～円周率を積み木で計算する～

円周率π、あなたは$\pi=3$派？$\pi=3.14$派？それとも$\pi=355/113$派？

Contrail

Introduction

円周率は無理数と呼ばれる数であり、その数は無限に続き、一切の規則を持っていません。

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ \ldots$$

また、円周率は一般的に方程式を解けば出てくる数とは違い、代数的な方程式を解いても導き出す事ができない超越数と呼ばれる数です。（リンデマンの定理より）

$$x^2 - 2 = 0 \to x = \pm\sqrt{2} \quad \to \quad \text{Not Transcendental Number}$$
$$?????= 0 \to x = \pi \qquad \to \qquad \text{Transcendental Number}$$

では、どのように円周率を計算すれば良いのでしょうか。代数的に解けない数をどのようにして計算すれば良いのでしょうか。

円周率を近似的に計算するための方法は数多く知られています。円の中を正多角形で近似したり、級数で近似したり・・・これに関してはライプニッツの公式などが有名だと思います。

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

他にも針を落として円周率を計算するBuffon's Game、これを利用したMonte Carlo シミュレーションによる円周率の計算などがあります。ですが、今回は全く異なったアプローチで円周率の計算に挑みたいと思います。なお、今回用いるアプローチに関してはG. Galperin の2003年の論文「PLAYING POOL WITH π (THE NUMBER π FROM A BILLIARD POINT OF VIEW)[1]」、及び3Blue1Brownの「The most unexpected answer to a counting puzzle[2]」を参考にしています。

---

[1] Galperin, G. (2003). *PLAYING POOL WITH π (THE NUMBER π FROM A BILLIARD POINT OF VIEW).*

[2] 3Blue1Brown "The most unexpected answer to a counting puzzle" https://youtu.be/HEfHFsfGXjs

Calculate PI with Blocks/Spheres

　では、円周率を求める新しいアプローチとはなんでしょうか。驚くことに、これはブロックや球などの積み木だけで計算することができる方法なのです。その手順は至って簡単であり、

1. まず比重が100^{d} だけ違う 2 つのブロックや球を用意します。
2. 2 つの積み木をツルツルとした平らな場所に起き、近くに壁を置きます。
3. 軽い方を静止させ、重い方を任意の速さでもう一つの積み木に衝突させます。
4. 衝突させた側の積み木が何度もう一つの積み木と壁に衝突させたかを数えます。
5. その衝突回数が$d+1$桁目までの円周率となります。

以上の 5 つのステップを踏むことで円周率を計算できます。不思議なことですが、このことは数学的、そして物理的に証明できることなのです。次のセクションではこの証明に移りますが、まずはこのことが本当に正しいのか、実際に道具や環境を用意するのは大変なので C++でプログラムを作ってシミュレーションしてみました。結果は以下のようになります。

```
Contrail@DESKTOP-222HQBU:cpp$ ./a.out
[+15.000000sec] Positions = (+11.714923,+14.723311)     Velocity = (+1.282076,+2.000000)
+314159265
```

図 1 比重 d = 8 としたときの計算結果

```
collided with Wall
collided with Block2
collided with Wall
collided with Block2
collided with Wall
collided with Block2
collided with Wall
collided with Block2
collided with Wall
collided with Block2
[+15.000000sec] Positions = (+6.412234,+23.499554)     Velocity = (+0.146719,+2.000000)
+31415
```

図 2 比重 d = 4 としたときの計算結果

この 2 つの画像（図 1、図 2）を見てもらうと分かるように、$d+1$ 桁までの精度で円周率を計算できていることが分かると思います。このシミュレーションによって積み木をぶつけるだけで円周率が計算することは実証出来ました。ではなぜこのような方法で円周率を計算することが出来るのでしょうか。

Proof for calculating PI with “Playing pool” method

　このシミュレーションの結果を説明するには数学的な側面だけでは足らず、物理的な視点からも物事を見る必要があります。（ラグランジアンの対称性を考えれば数学的に証明できますが…）その物理的な視点というのは、一度物理を習ったことがある人は聞いたことがあるだろう、「運動量保存の法則」そして「力学的エネルギーの保存」です。今回は全体として保存力、ふたつの物体同士が衝突する時は、内力しか働かない系を考えているため、この 2 つの法則は成立しています。また、実際は衝突する際に熱や音としてエネルギーが発散していきますが、それは無視することとします。空気抵抗や、衝突する際の応力による積み木の変形・回転も、物体が剛体で回転しないとして無視することとします。

　初期状態として速さを与えた剛体は質量m_1、速度v_1 を持ち、静止していた剛体は質量m_2、速度v_2 の状態を持つとします。

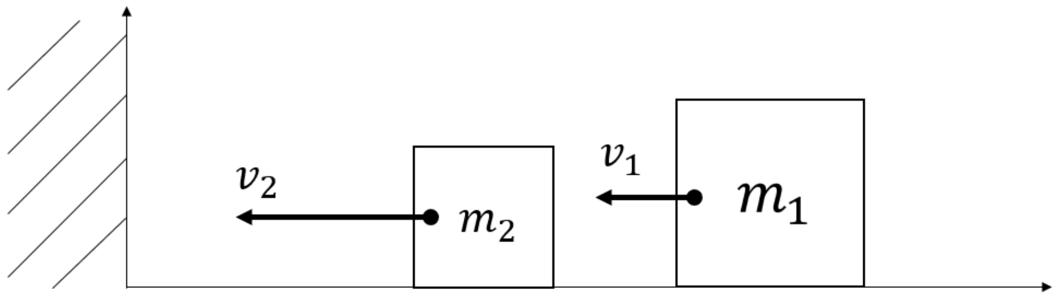

図 3　系の状態

力学的エネルギーの保存から、

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=const.$$

となります。ここで質量は定数としてよいため、変数変換$x=\sqrt{m_1}v_1, y=\sqrt{m_2}v_2$ を適応させ、

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)=const.$$

と式を変形させます。この形は円の方程式として有名な形であり、図形を書くと

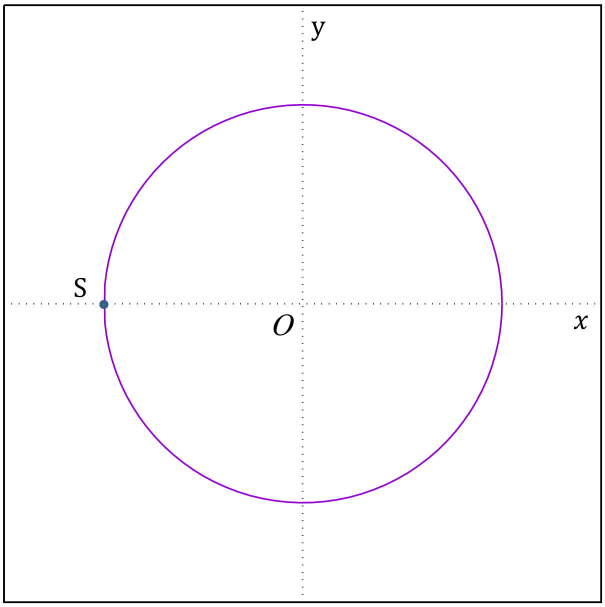

図 4 力学的エネルギー保存の法則

図 4のように完全な円となります。ここで点Sは系が最初にいたときを表す点であり、$v_1 = const.\ , v_2 = 0$ より$x = const.\ , y = 0$ より来ています。さて、時間が進み、最初速度を与えた剛体がもうひとつの静止している剛体に衝突したとき、このグラフではどのようにして系の状態を書くことが出来るのでしょうか。点 S はどのように次の状態へと移行するのでしょうか。

これに対する答えは、まだ使っていないもう一つの法則、運動量保存の法則から得られます。運動量保存の法則は数学的には次のような形を持っています。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = const.$$

我々が今使っている変数変換を用いるとこの式は次のように書くことが出来ます。

$$\sqrt{\mathrm{m}_1} x + \sqrt{m_2} y = const.$$

これを少し変形することによって

$$y = -\sqrt{m_1 / m_2}\, x + const.$$

すなわち、このグラフにおいて変数x,y は傾き$-\sqrt{\mathrm{m}_1 / m_2}$ によって、その変化が定められているということが、この式によって明らかになりました。では、この次の衝突、壁と衝突するまでの動きはどうなるのでしょうか。これは至って簡単で、今回は、壁は常に静止しており、壁と剛体は完全弾性衝突をすると仮定しているため、衝突の前後で衝突した剛体の速度ベクトルが逆向きになるだけです。すなわち、$x \to x,\ y \to -y$ と変化します。

以上のことを以て衝突しなくなるまでの系の状態について作図を行うと、次の図の線のようになります。

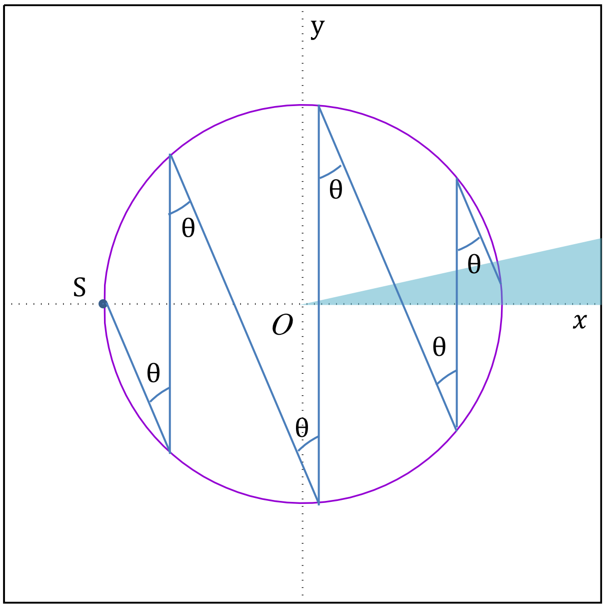

図 5　系の時間発展に伴う状態変化

図 5 のように、グラフ内では内角θ を持つ三角形がいくつか見えてきます。少し考えてみればこの三角形の数はトータルでの衝突回数に一致することが見て取れるでしょう。また、最終的に系は領域 D（$v_1 \geq v_2 > 0$）を満たす点で衝突を終えます。言い換えると、この点より更にプロットを続けるとこれまでに描いた三角形と重なってしまうため、これ以上にグラフへのプロットをすることは出来ません。すなわち、剛体の衝突数はグラフ内に描ける最大の三角形の数になります。

さて、三角形の数をN とすると、円周角の定理より、これらの三角形が作る全体としての弧の長さは半径をRとして2NRθとなります。系は領域 D でグラフ内での進行を止めることを思い出せば、この全体としての弧の長さは全円周よりも小さくなるはずであり、よって不等式

$$2\mathrm{NR}\theta < 2\pi\mathrm{R}$$

が成立します。これを整理すると

$$\mathrm{N}\theta < \pi$$

となります。ここで、このθ は衝突によって出来た三角形の内角であり、その三角形を形作る傾きは分かっているため、

$$\tan\theta = \sqrt{\mathrm{m}_2/m_1}$$
$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{\mathrm{m}_2/m_1})$$

ここで$m_2/m_1 = 100^{-d}$ より、Taylor 展開で近似してもよく、

$$\theta \cong 10^{-d}$$

これより、

$$N < \pi \times 10^{d}$$

衝突数N はこの不等式を満たす最大の自然数にならなければいけないため、Nは円周率の小数点以下d 桁まで求めることが出来るということが証明されました。

Conclusion

　積み木を互いに衝突させ、その衝突回数を数えるだけで円周率を導き出せることがわかりました。このことが数学的・物理的に証明出来ることは非常に面白いことではないでしょうか。証明の過程に変数x, y を用いた空間に移動することでその証明を完成させたことも興味深いです。先に述べた論文[3]では配位空間に移動し、ビームの反射を考えることで証明をしているため、今回とはまた別の証明方法にはなりますが、こちらも面白い証明方法です。是非一読してみてはどうでしょうか。

[3] Galperin, G. (2003). *PLAYING POOL WITH π (THE NUMBER π FROM A BILLIARD POINT OF VIEW).*