分布関数（Distribution function）

担当：佐々木

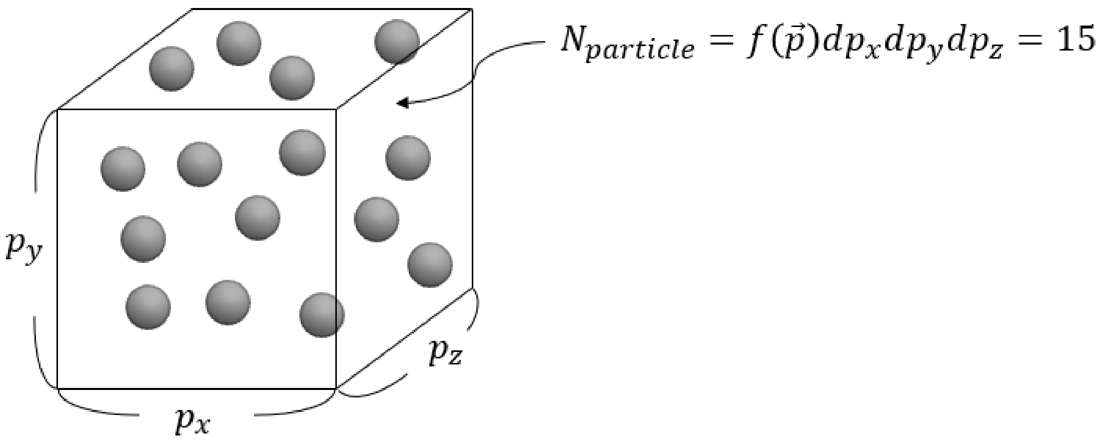

図 1　運動量空間における分布関数のイメージ

分布関数(Distribution function)は粒子の分布を定める関数であり、例えば距離空間における微小空間の中にある粒子の数をdN とすると、分布関数は以下のように定義できる。

$$f(\vec{x})dxdydz = dN$$

ここで

$f(\vec{x})$　：変位を従属変数としたときの分布関数

$dxdydz$：配位空間における微小体積

dN　：上記の微小体積内に入っている粒子の数

とした。またこれは変数変換により運動量変数に変換する事ができ、それが図 1 の様子である。以上の定義より、分布関数は位相空間における単位体積あたりの粒子の密度を表す関数であるといえる。

さて、相対論的原理より粒子の数はどの慣性系を基準系に取っても同様に等しくなければいけない。(例えば地上で観測している売り物のミカンの数は国際宇宙ステーションから見ても同じ数であるし、極端に言えば地上にその観測者が存在しているという観測事実は例えば亜光速で動いている人から見ても変わらず、その観測者が存在しているはずである)しかし、それは「粒子の数」であって、「分布関数」そのものの話をしているのではない。すなわち、観測者がいる基準系を取り替えることによって粒子の密度が変化するのではないか？ということである。以下では、1 章 6 節で学んだ超曲面の概念を用い、分布関数の慣性系間での変換則について議論していく。

まず、方針について大まかに説明する。

1. 粒子の数は基準系の選択に依らないことは相対論的原理より導き出されるという話はした。
2. すなわち、分布関数と位相空間の微小体積の積は座標系に依らず一定である。
3. 今知りたいのは分布関数の座標系の選択に関する変換則である。
4. よって位相空間の微小体積の座標系の選択に関する変換則を見つけ出すことができれば、間接的に分布関数自体の座標系の選択に関する変換則を導き出せるはずである。

距離と時間の四次元空間を考える。相対性理論による運動量の大きさはm^2c^2 に等しいという性質を持っていた。

$$p^{\mu}p_{\mu} = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2 \tag{9.16}$$

これによって定義される超曲面は 3 次元的多様体であり、その面積（積分要素）は対応する 3 つの 4 次元ベクトルが作る体積の大きさに等しく、ベクトルの大きさとして示される。このベクトルの向きは超曲面の面積要素の法線方向である。面積要素の成分をdS_{μ} とすると

$$dS_{\mu} = (dp_1dp_2dp_3, dp_0dp_2dp_3, dp_0dp_1dp_3, dp_0dp_1dp_2) \tag{A}$$

と書ける。

少々天下り的ではあるが、ここでこのベクトルdS_{μ}と 4 元運動量ベクトルp_{μ}との関係性を調べる。(9.16)式より、以下の関係が導き出される。

$$(dp^{\mu})p_{\mu} = 0$$

すなわち、$dp^{\mu} \perp p_{\mu}$ である。また、(A)式と 4 元ベクトルdp^{μ} との内積は以下のように書ける。

$$(dp^{\mu})dS_{\mu} = 0$$

すなわち、$dp^{\mu} \perp dS_{\mu}$ である。以上より、$p_{\mu} \parallel dS_{\mu}$ と結論付けることが出来る。すなわち、4 元運動量ベクトルと超曲面の積分要素ベクトルは全くその方向が一致しており、それぞれの要素が独立していることより、対応する成分の比はローレンツ不変量になるはずである。ここではその第 0 成分の比を用いることにより、

$$\frac{dp_xdp_ydp_z}{\frac{\mathcal{E}}{c}} \propto \frac{dp_xdp_ydp_z}{\mathcal{E}} \tag{10.1}$$

と不変量を定めることが出来る[1]。ここで光速度定数c は定数倍しか変わらないため、また後の議論の単純化のため省いておく。

[1] この結果により、$|\vec{p}|d\mathcal{E}d\Omega$ もローレンツ不変量であることを証明できる。極座標系を考え、$\vec{p}$ の方向の立体角を$d\Omega$ とすると、$dp_xdp_ydp_z = |\vec{p}|^2dpd\Omega$ と表される。ここで$dp \equiv d|\vec{p}|$ とした。(9.6)式により、$(\mathcal{E}/c)^2 = |\vec{p}|^2 + m^2c^2$ がわかっているので、これより$|\vec{p}|dp = \mathcal{E}d\mathcal{E}/c^2$ である。更にこれの両辺に$|\vec{p}|d\Omega$ をかけることにより、$|\vec{p}|^2dpd\Omega/\mathcal{E} = |\vec{p}|d\mathcal{E}d\Omega/c^2$ であり、これの左辺は(10.1)よりローレンツ不変量であるため、右辺に関してもローレンツ不変量であるといえ、結果$|\vec{p}|d\mathcal{E}d\Omega$ がローレンツ不変量であることを示すことが出来る。

さて、話をもとに戻し、粒子の数の分布関数を用いた定義を思い出して欲しい。

$$dN = f(\vec{p})dp_x dp_y dp_z$$

これを少し変形すると

$$dN = f(\vec{p})\mathcal{E}\,\frac{dp_x dp_y dp_z}{\mathcal{E}}$$

粒子数は基準系の選択に依らず、また(10.1)式より$dp_x dp_y dp_z/\mathcal{E}$ はローレンツ不変量であることを思い出すと、分布関数$f(\vec{p})$ について慣性系K 及び慣性系K' の間に次の関係式が成り立つ。

$$f(\vec{p})\mathcal{E} = f'(\vec{p}')\mathcal{E}'$$

少し変形して

$$f'(\vec{p}') = f(\vec{p})\cdot\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} \tag{10.2}$$

これが運動量空間における分布関数の変換則であり、ローレンツ変換によって運動量とエネルギーの変換則は(9.15)によって分かっているため、後はそれを代入してやれば K または K'系の分布関数の形について調べることが出来る。

次に位相空間における分布関数についての変換則について調べる。そのような分布関数は

$$dN = f(\vec{r},\vec{p})d^3p dV$$

と定義することが出来る。ここで運動量空間での分布関数の変換則を求めたときと同じように、位相空間での分布関数の変換則を導くため、微小運動量体積および微小変位体積についての変換則について調べる。今までの議論より、運動量の微小体積については(10.1)式のローレンツ不変量を用いて表すことが出来ることを知ったため、我々が今から求めたいのは微小体積dV に関しての変換則である。ここで、新たな慣性系K_0 を定義する。この慣性系では観測対象物が静止しており、観測対象物と同じ速度を持つことを定義する。この定義により、慣性系 K と慣性系K_0 との相対速度は、これまでの慣性系 K と観測対象物との相対速度と定義していた速度$\vec{v}$ と等しく、慣性系 K'と慣性系K_0 との相対速度は、これまでに慣性系 K'と観測対象物との相対速度と定義していた速度$\vec{v}'$ と等しい。ところで、ローレンツ変換により、慣性系K_0 における固有体積と慣性系 K および慣性系 K'における体積との変換則を導くことが出来る。具体的には

$$dV = dV_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$dV' = dV_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}$$

ここでdV は慣性系 K における微小体積、dV' は慣性系 K'における体積とした。

これと(9.4)式を組み合わせることにより、

$$\frac{dV}{dV'} = \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}}$$

と導くことができ、これは運動量の微小体積における関係式

$$\frac{d^3p}{d^3p'} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}$$

と逆数の関係にある。すなわち、d^3pdV はローレンツ不変量となり、これを位相空間における分布関数の定義式に代入すると

$$f'(\vec{r}',\vec{p}') = f(\vec{r},\vec{p})$$

となり、このことより位相空間における分布関数（粒子数の密度）は座標変換に依って変化しない、という結論がなされる。