

球形原子核における一体ポテンシャル

6.3 原子核の体積パラメータ

まず初めに補正振動子のポテンシャルにおけるパラメータ ω_0 について考える。原子核の波動関数は動径座標表示において、 $\sqrt{M\omega_0/\hbar} \cdot r$ とかける。したがって特性長は $\sqrt{\hbar/M\omega_0}$ である。その波動関数より、全ての1粒子系の密度を足し合わせ、原子核全体としての密度を計算でき、それを用いて更に平均半径を調べ、実験と照らし合わせる事が出来る。振動子の波動関数における容易にわかる物理量としては、

$$\langle r_i^2 \rangle = \left(N_i + \frac{3}{2} \right) \frac{\hbar}{M\omega_0}$$

が存在する。この物理量に関しては既に以前の章で半径の二乗平均平方根として、

$$R_{rms}^2 = \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle = \frac{5}{3} \frac{1}{A} \sum_i \langle r_i^2 \rangle$$

を定義していた。次に振動子の閉殻状態において $\langle r \rangle^2$ を評価する。 N' の殻における縮退は $(N'+1)(N'+2)$ であり、これは同等の数である中性子と陽子に対しても同じく、

$$\begin{aligned} A &= 2 \sum_{N'=0}^N (N'+1)(N'+2) \cong 2 \sum_{N'=0}^N \left(N' + \frac{3}{2} \right)^2 \\ &\cong 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 dx \cong \frac{2}{3} (N+2)^3 \end{aligned}$$

および

$$A \langle r^2 \rangle = 2 \frac{\hbar}{M\omega_0} \sum_{N'=0}^N \left(N' + \frac{3}{2} \right) (N'+1)(N'+2) \cong \frac{1}{2} \frac{\hbar}{M\omega_0} (N+2)^4$$

これらの式からすぐに次の関係が得られ、

$$N+2 \cong \left(\frac{3A}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

および

$$R_{rms}^2 = \frac{5}{3} \frac{\hbar}{M\omega_0} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{4}{3}} A^{\frac{1}{3}}$$

である。実験によって得られた、 $R_{rms} = r_0 A^{1/3}$ を $r_0 = 1.2 \text{ fm}$ と用いることによって、

$$\hbar\omega_0 = \frac{\hbar^2}{Mr_0^2} \frac{5}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot A^{-\frac{1}{3}} \cong 41 \cdot A^{-\frac{1}{3}} \text{ MeV}$$

を得られる。

中性子と陽子のポテンシャルは図 6.4 に示されている通り非常に異なっている。これは中性子-中性子及び陽子-陽子間の強い 2 体相互作用が同じであるのにも関わらず成り立つ。この一体としてのポテンシャルの相違は二通りの形で現れる。1 つ目に、陽子のみがクーロン力によって相互作用する。問題 6.11 では、一様に半径 $R = r_0 A^{1/3}$ で電荷分布した電荷球の内側と外側におけるクーロンポテンシャルを計算する。結果としては以下ようになる。

$$V_C(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} - \frac{3}{2} \right)$$

$$V_C(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$r = R$ の内部では、クーロンポテンシャルは定数を別に、 r^2 に比例している。そのため、このクーロンポテンシャルは ω_0 の補正によって非常によく振動子ポテンシャルに組み込むことが出来る。

実際には、クーロン力の斥力によって、安定線上の原子核は陽子よりも中性子を多く持つ。結果として、陽子は中性子よりもより深く原子核のポテンシャルに潜り込むことが分かる。

(これは電磁気的なクーロン力の斥力とはまた別である) これは、異種粒子は同種粒子に比べてお互いをよく束縛し合うためである。パウリの排他原理により、異種粒子にアクセスできる近しい状態のうち、たった半分しか同種粒子にアクセスできない。さらに陽子は中性子に比べ、より多くの異種粒子を近くに持つため、結果的により深いポテンシャルを持つのである。

この 2 つの効果である、クーロン効果とパウリの排他原理の効果を次のように選ぶことによって原子核のポテンシャルに取り入れることが出来る。

$$\omega_0^N = \omega_0 \left(1 + \gamma \frac{N-Z}{A} \right)$$

$$\omega_0^Z = \omega_0 \left(1 - \gamma \frac{N-Z}{A} \right)$$

ここで γ はまだ定まっていない。

γ を定める最も簡単な方法は実験的によく満足する次の要求を使うことである。

$$\langle r^2 \rangle_N \cong \langle r^2 \rangle_Z$$

これによって $\gamma \cong 1.3$ となり、結果として出てくる中性子-陽子ポテンシャルでの差はクーロンポテンシャルと陽子と中性子に対する純粋な核力ポテンシャルの $N \neq Z$ のときの差をうまく説明する。

原子核の波動関数の数値計算より、実際には $\langle r^2 \rangle_N$ と $\langle r^2 \rangle_Z$ の値を得ることは非常に簡単である。これらの数値より、 $\hbar\omega_0^N$ と $\hbar\omega_0^Z$ を中性子と陽子分布の半径に対する目標値が精度良く再現されるようにフィットすることが出来る。もともとの推測であった

$$\hbar\omega_0^{N,Z} = 41 \cdot A^{-\frac{1}{3}} \left(1 \pm \frac{1}{3} \frac{N-Z}{A} \right) \text{ MeV}$$

は軽い原子核を除いて全ての原子核において1~2% の範囲で正しいことがわかった。

6.4 閉殻 ± 1 原子核の1粒子スペクトル – パラメータ κ 及び μ'

中性子が過分な場合や、陽子が過分な場合や、中性子や陽子が足りない場合を除いた、二重閉殻を持つ原子核は特に1粒子的な描像が適する原子核である。これは、これらの原子核が球形であり、これまでの計算を球対称のもとで考えていたからである。更に、閉殻の外側にいくつかの粒子があり、不完全に満たされた軌道を占有していると、「残留力」というものは、比較的小さいにも関わらず、励起スペクトルにおいて、核スピンの発生する順序を決定付ける。そのため、まずは二重魔法数 ± 1 を持つ原子核についてのみを考えるのが良い取り掛かりになるだろう。そのような原子核に対しては、エネルギー準位のギャップの上で一番低いエネルギー準位を持つ軌道にある、その余った粒子を取り入れることによって、全角運動量 I はその軌道の j と等しくなる。例えば、酸素17において、 $d_{5/2}$ 軌道に存在する、余っている中性子によって、全角運動量は $I = 5/2$ となる。

「1つのホール」状態が示すことは角運動量 j にもまた関連している。すなわち、

$$I(\text{ホール状態}) = I(\text{粒子の数}) = j$$

である。これは、次の議論から明らかになる。まず、全ての粒子の位置が占められた閉じた軌道において、全角運動量は $I = 0$ となる。次に、そのような閉じた軌道における最後の粒子は角運動量ベクトル \vec{j} に寄与することにより、それ以外の粒子の全角運動量と等しく打ち消し合う。これはこれらの他の粒子のベクトルが $\vec{I} = \vec{j}$ になるように結合している場合のみによる。

二重魔法数 $\pm n$ を持つ原子核に対し、ある種類の偶数個の粒子の場合についてまず考える。これらの粒子について、最低エネルギー状態においては、全角運動量が常にゼロになるというのを仮定するのがよい。これは十分なデータによって支持されている事実である。

奇数個の同種粒子に関して、「先任順位ルール」を仮定する。これは、2つずつある同種粒子は角運動量ゼロに向かうというルールである。このルールは、部分的に占有された軌道で同種粒子間に働く $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ に比例する残留力を導入することによって定量的に理解することができる。エネルギー的に好まれる状態というのはしたがって、ペアになって角運動量がゼロになっているものになる。このルールを用いることによって例えば、

$$I\left[\left(d_{5/2}\right)^3\right] = I\left(d_{5/2}\right) = 5/2$$

が成り立つ。先任順位ルールを厳格に守るのであれば、軽い、陽子の数が奇数の原子核のスピンの表6.1に列挙されている。同じような表を奇数個の中性子を持つ原子核の場合に対して作ることが出来る。奇数個の陽子を持つ原子核は原子番号が奇数で、中性子数が偶数、一方で奇数個の中性子を持つ原子核は中性子数が奇数で、原子番号が偶数であることに注意

されたい。

表 6.1 に載っている予想と実測されたスピンを見比べると、すぐに 2 つの値が非常によく合っていることを気付くはずである。実際、先任順位ルールは重い原子核に対しても成り立つということが、 $|n|$ を適度に小さくすることによって、例えば $|n| < 5$ や 7 にすることによってわかる。 $|n|$ の値が大きい場合に関して、他のカップリング機構が優勢になる。例えば、 $A = 20 \sim 25$ のような、表 6.1 において予想値と実測値の違いが見られる原子核は、変形しているとして説明される。

更に踏み込み、閉殻状態に ± 1 の粒子が追加された原子核の励起スペクトルについて議論することが出来る。例えば、鉛 208 における低エネルギースペクトルとその近辺にある原子核について図 6.5 に記載されている。 $Z = 82$ や $N = 126$ 近辺の、余分な粒子や j 軌道にホールを持つ状態というのは簡単に見分けることが出来る。これは他の状態に対して約 2 MeV 大きい励起エネルギーが観測される初めての例であり、例えば、鉛 208 の集合的な 3^- 状態が、質量数が奇数の原子核（奇核）の基底状態に対応する場合である。図 6.5 のスペクトルをより、異なった軌道のエネルギー準位が図 6.6 に示されているように得ることが出来る。（ $Z = 82$ および $N = 126$ におけるエネルギーギャップはビスマス 209 と鉛 209 に対する鉛 208 の質量実測値からそれぞれ簡単に得ることが出来る。）図 6.6 において、ウッズサクソンポテンシャルによる典型的なフィットに依ってどれだけよく再現されるかが示されている。

他の閉殻におけるエネルギースペクトルについて次は考えていく。酸素 16、カルシウム 40、カルシウム 48、そしてニッケル 56 の周辺に有る中性子の軌道の位置について図 6.7 より得られる。図 6.7 においては、補正振動子のパラメータ κ 及び μ のフィットから得られたエネルギー準位も載せておく。そのようなフィットは非常に簡単であり、なぜならばこの章で与えられた公式より、閉じた状態における球形補正振動子ポテンシャルのエネルギー準位を書き下すことは容易であり、

$$E(N, l, j) = \hbar\omega_0 \left[N + \frac{3}{2} - \kappa \{l \text{ or } - (l + 1)\} - \mu' \left(l(l + 1) - \frac{N(N + 3)}{2} \right) \right]$$

図 6.7 においては、カルシウム 40 とカルシウム 48 のスペクトルを満足良くフィットするためには、パラメータ μ' はカルシウム 48 の場合において十分に大きくなければいけないということを注意しておく。

($Z=8, N=8$), ($Z=20, N=20$), ($Z=20, N=28$), ($Z=28, N=28$), ($Z=50, N=82$), そして ($Z=82, N=126$) のような二重魔法核の周辺のよくできた球形の原子核のエネルギー準位スペクトルをフィッティングすることによって、核図表の様々な部分で有効な中性子と陽子に対する κ 及び μ' を得ることが出来る。さらには、閉殻 ± 1 の原子核から得られた「観測されたエネルギー」というのは相関性を持っており、そのため、1 粒子系のポテンシャルで計算したい裸のエネルギーではないのである。したがって、補正振動子ポテンシャルの近似的な性質より、 κ と μ' について雑な値しか得られないのである。

より良い κ と μ' の値を得る方法としては、十分に確立された変形領域 $20 < A < 28, 150 < A < 190, 225 < A$ においての 1 粒子レベルにフィットさせることである。そのポテンシャルの有用性に関しての基準は、 κ と μ' の変動が N と Z に関して小さいことと連続的であることである。

補正振動子ポテンシャルを用いて計算を行う上で、2つの多少異なった方法を用いる事ができる。同じ値の κ と μ' が全ての殻において用いられ、限られた領域の原子核にのみ用いる事ができる。もう 1 つの方法としては、異なった κ と μ' の値を異なった N 殻に用いることであり、図 6.3 にその例が示されている。より最近のフィッティングから得られた値が表 6.2 に列挙されている。 κ を N の関数に、 μ を N の関数にすることによって、全ての原子核に対し、フェルミ面近辺のエネルギー準位の順番をだいたい再現するポテンシャルを構築することが可能になった。フェルミ面周りの軌道のみが最も測定可能な性質に影響を与えるため、これらの 2 つの方法は本質的には限られた原子核が調べられる際は同じである。しかし、後述した方法は全ての原子核において同じポテンシャルを用いることが出来るという優位性を持っている。

6.5 $Z=114$ 、 $N=184$ の原子核軌道の予測

自分自身を提示する興味深い問題として、既に存在している原子核に対応する中性子と陽子数を超えた閉殻を予測する可能性がある。その場合、関連するシェル効果が核分裂とアルファ崩壊に関して、比較的長い寿命を持つ原子核につながる事が大きいことが期待される。図 6.8 で見られるように、 $Z=82$ 以降の陽子の軌道に関しては $Z=114$ において起きるように思われ、 $f_{5/2}$ および $f_{7/2}$ の間の $5f$ 軌道の分割に対応する。この予測は補正振動子ポテンシャル、ウッズサクソンポテンシャル、そしてハートリーフォック法によって導かれたポテンシャルに共通している。シェル効果の大きさであるが、これはどのようにスピン軌道相互作用の強さが推定されるかに強く依存している。そのため、図 6.8 にある全ての計算が $Z=114$ のギャップを予測しているとしても、何らかの形でむしろ異なっており、これは推定の中に含まれる不確定さを暗に示しているのである。

次の中性子殻は殆どの推定によって $N=184$ に対応する。 $N = 184$ より上の $h_{11/2}$ 軌道の位置は $N=184$ のギャップのサイズに非常に重要である。補正振動子ポテンシャルにおいて、 $h_{11/2}$ 軌道は $d_{3/2}$ と $k_{17/2}$ のギャップのちょうど真ん中に発生する。 $h_{11/2}$ の上にある $N=196$ の軌道は $N=184$ の軌道と同じほど重要である。図 6.9 に見られるようなウッズサクソンタイプのポテンシャルにおいては、 $N=184$ のギャップは $N=196$ のギャップを明らかに圧しており、 $N=196$ のギャップを一掃するほどまでである。

図 6.8 と 6.9 に見られるようなフィットは全て 1970 年に得られたものである。図 6.8 にある Köhler のスペクトルでは、 $Z=126$ にあるギャップは $Z=114$ のギャップとほとんど同じくらいであることが読み取れる。他の計算では $Z=114$ のギャップよりも $Z=126$ のギャ

ップのほうが大きいという結果も出ている。しかし、 $Z=114$ と $Z=184$ の予測は最も可能性のある今までに観測された原子核以降の閉殻の候補であることは未だ確かである。

陽子数 $Z=114$ と中性子数 $N=184$ の組み合わせは原子核²⁹⁸114 に対応する。この原子核、または近くの原子核は最も長い寿命を持つはずである。対応する核分裂の寿命の長さの予測は 10 章にて議論されている。