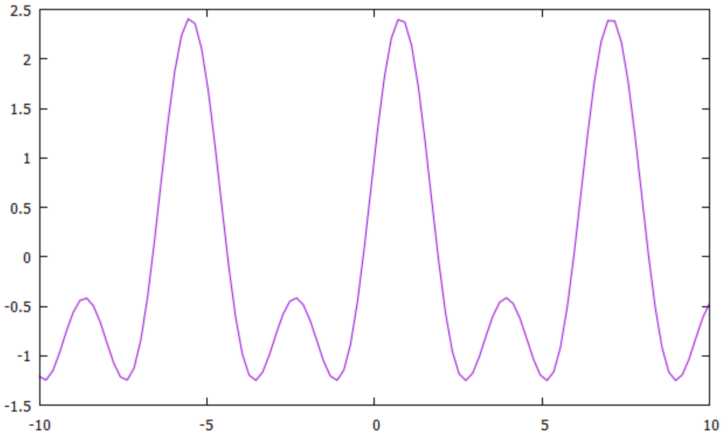
# フーリエ変換について

## そもそもフーリエ変換って何？

フーリエさんが「周期的な関数(何度も同じ形を繰り返す関数)は周期的な波を描く$\sin(x)$と$\cos(x)$の組み合わせで表せられるのではないか？」ということを考えたのが始まりだ。

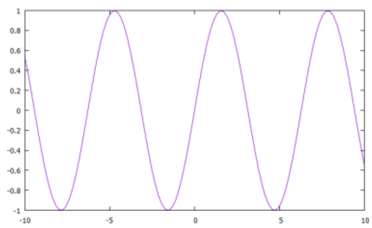
次のようなグラフが“周期的な関数”の一例(周期$2\pi$)。



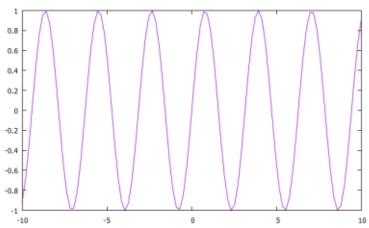

本当にこんな複雑なグラフが三角関数で表せられるのだろうか？？
実際にフーリエ解析(変換)してみると次のような三角関数の組み合わせで表せられるらしい。(フーリエ解析の詳しいやり方は後々話します)

$$\sin(x) + \sin(2x) + \cos(x)$$

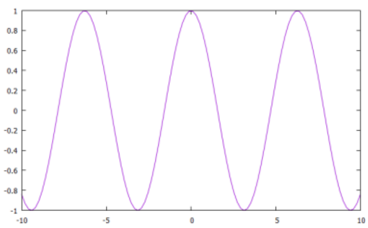
グラフで本当にそうなるのか見てみよう。
それぞれの項は次のようなグラフになる。



$\sin(x)$



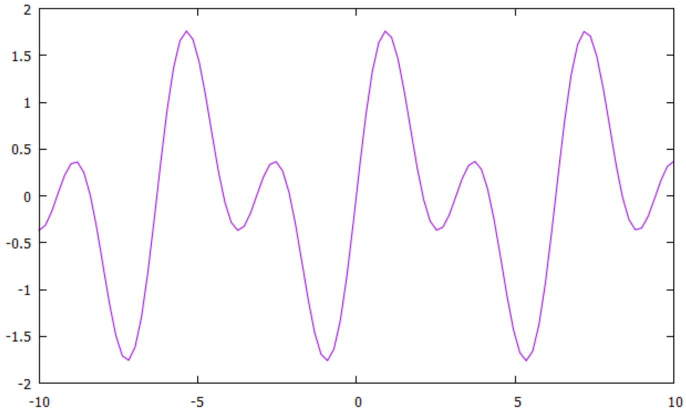
$\sin(2x)$



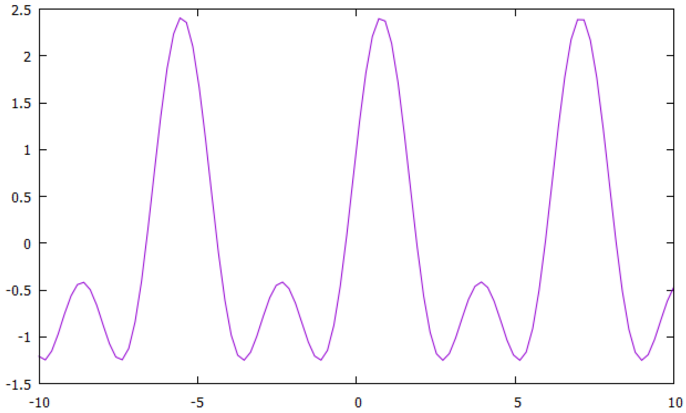
$\cos(x)$

これの和がさっきのフーリエ解析した式になるはずなので、全てのグラフを足し合わせてやれば本当に一致しているのかが見られるはず。

まずsin(x) + sin(2x)をしてみよう。




この時点で結構それっぽい波形になっていると思う。高い波と低い波がそれぞれ隣り合って繰り返されているのだ。仕上げに cos(x)のグラフを足し合わせると次のグラフになる。

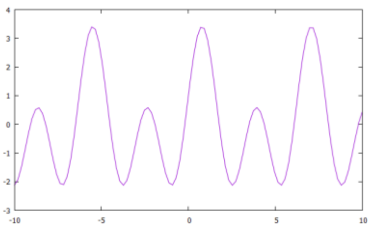



これは最初の“周期的な関数”と全く同じ形である！

実はこれは最初に紹介した周期関数だけではなく、一般の場合でも成立することがわかっている。従ってフーリエさんの「**どんな周期関数も三角関数に分解することが出来る**」という予想が正しかったのである！

・・・え？で？何が嬉しいの？

さっきの例ではそう思うかもしれない。
次のグラフを見て欲しい。



これをフーリエ解析してみると、

$$\sin(x) + 2\sin(2x) + \cos(x)$$

となる。つまり、sin(2x)の項が前例のものより倍になっているのである。
すなわち、フーリエ解析した際に、**どの周波数(角速度)の要素がどれだけ関与しているか、**を知ることが出来るのだ。これは音楽(どの音階が一番大きいか)、光学(どの色の光が一番明るいか)、電磁気学、量子力学など様々な学問に用いることが出来る。

## どうやって解析するの？

先程どんな周期関数も三角関数の組み合わせだけで表現できると言った。それは実は正しくはなく、周期関数の波形の中心が y=0 になる場合だけだ(三角関数が y=0 中心に y 軸振動するため)。
これに対応するには単純に定数を加えてやれば良い。従ってフーリエ解析の式(フーリエ級数展開)は以下のようになる。

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_n \{a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x)\}$$

一項目に定数、二項目に三角関数の組み合わせ、という形だ。これまでの議論でなぜこんな形になるかは分かるだろう。
なお、係数に関しては

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2\pi}{T}nx)dx$$

となる。

**実は、周期関数でなくてもフーリエ解析をすることは出来る。**
理論はこうだ、周期関数のひとつの周期の区間を抜き出すとする。その関数をグラフ表示するとしよう、そしてそのグラフ曲線の両端をつまんで無限大まで引っ張ってやる。すると全く周期関数ではない形になってしまうだろう。正確に言うと無限に長い周期を持った周期関数が出来るのである。見た目は周期関数ではないが、周期関数から出発したのでこれもフーリエ解析可能なのである。これは次のような式(フーリエ変換)で表せる。

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\omega x} dx$$

オイラーの公式を展開すると、

$$\mathrm{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(cos\omega x + isin\omega x)dx$$

積分の係数、exponential の指数は宗派によって変わるのでそこは担当教員に任せる。
これについても最初の議論と同じように振動数を角速度に変換して引数に入れてやることで解としてその振動数の大きさが出てくるのである。($\mathrm{f} = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{\omega}{2\pi}$)

**フーリエ解析とはすなわち、とある関数を三角関数に変換することだったのだ。そしてその変換した後の式を見ることで振動数別の大きさを調べることが出来るというわけだ。**

周期関数など日常のどこにあるんだ、という話になるかもしれないが、身近なところで言えば「音」自体がその例である。これはオシロスコープを見ればすぐに分かる。オシロスコープは横軸を時間、縦軸を音の大きさとしてグラフ表示するものである。
例えば「あ」という声は複雑なグラフをオシロスコープ上で示す。これは「あ」というのは様々な周波数の音が組み合わさって生まれた音だからだ。そこで、「あ」という音のグラフをフーリエ解析してやると、その「様々な周波数」を特定することが出来る。

## 実際に解いてみる

$\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2\ (-\pi \le x \le \pi)$をフーリエ級数展開してみる。
基本的な二次関数の式が三角関数ではどう表現されるのであろうか。
$\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2$ は陽関数であるため、奇関数との積では全体として奇関数となってしまうため、積分範囲で y 軸対象なため、積分は 0 となる。従って、$\mathrm{b_n} = 0$

$$\mathrm{a_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

部分積分を用いて、

$$\mathrm{a_n} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\mathrm{n}^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\mathrm{n}^2\pi}\{\pi\cos(\pi n) + \pi\cos(\pi n)\} = 4\frac{(-1)^n}{\mathrm{n}^2}$$

$$\mathrm{a_0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3\pi} \times 2\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^2$$

あとは級数展開式に当てはめるだけである。

最後にフーリエ変換をしてみよう。この場合、$\mathrm{x}^2$は無限大で発散するのでフーリエ変換できない。なので、別に次のような関数を定義して変換してみる。

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 1 & |x| \leq \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

$$\mathrm{f(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega x}\,dx = \left[\frac{1}{i\omega}e^{i\omega x}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{i\omega}(e^{i\omega\pi} - e^{-i\omega\pi}) = \frac{2}{\omega}\sin(\omega\pi)$$

## 数学的な話

ここからは少しだけ難しくなる。
ベクトルと同じように実は関数にも内積の概念がある。
ベクトルと違って積分を使い、周期 T の関数では($\omega \equiv 2\pi/T$)

$$\langle \mathrm{f(x)}, \mathrm{g(x)} \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)g(x)dx$$

であると定義する。関数が図形的に直交するから、ではなく内積の性質を満たすからこう定義されている。

さて、フーリエが定義したフーリエ級数展開の式は次のような式であった。

$$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_n \{a_n\cos(\omega nx) + b_n\sin(\omega nx)\}$$

これの係数$a_0$, $a_n$, $b_n$を求めるには内積が役立つ。
事前知識としてベクトルと同じように関数の内積にも直交性は存在して、

$$\langle \cos(\mathrm{nx}), \cos(\mathrm{mx}) \rangle = \delta_{\mathrm{nm}}$$
$$\langle \sin(\mathrm{nx}), \sin(\mathrm{mx}) \rangle = \delta_{\mathrm{nm}}$$
$$\langle \cos(\mathrm{nx}), \sin(\mathrm{mx}) \rangle = 0$$

という性質が成り立つ。(ここで$\delta$はクロネッカーのデルタ関数である。詳しくは Wikipedia)
従って、

$$\langle \mathrm{f(x)}, 1 \rangle = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_0(1 \cdot 1)dx + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_n \{a_n\cos(\omega nx) + b_n\sin(\omega nx)\}\right] dx$$

直交性を使い、

$$\langle \mathrm{f(x)}, 1 \rangle = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_0(1 \cdot 1)dx$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}a_0\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx$$

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{dx} = \mathrm{a_0}$$

となる。$\mathrm{a_n}$と$\mathrm{b_n}$も同様に、

$$\mathrm{a_n} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\omega n x)dx$$

$$\mathrm{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\omega n x)dx$$

とできる。さてフーリエ変換の式はどうやって出したのだろうか。

フーリエ級数展開式を複素数形にしてみよう。

オイラーの公式から、

$$\cos(\mathrm{\omega nx}) = \frac{e^{i\omega nx} + e^{-i\omega nx}}{2}$$

$$\sin(\mathrm{\omega nx}) = \frac{e^{i\omega nx} - e^{-i\omega nx}}{2\mathrm{i}}$$

となる。フーリエ級数展開式より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{f(x)} &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_n \{a_n\cos(\omega n x) + b_n\sin(\omega n x)\} \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_n \left\{a_n\frac{e^{i\omega nx} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2\mathrm{i}}\right\} \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_n \left\{a_n\frac{e^{i\omega nx} + e^{-i\omega nx}}{2} + b_n\frac{e^{i\omega nx} - e^{-i\omega nx}}{2\mathrm{i}}\right\} \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_n \left\{\frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\omega nx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\omega nx}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_n \left\{\frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\omega nx}\right\} + \sum_{-n} \left\{\frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}e^{i\omega nx}\right\}$$

ここで次のような定義をする。

$$c_\mathrm{n} = \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} & n > 0 \\ \dfrac{a_n + ib_n}{2} & n < 0 \\ \dfrac{1}{2}a_0 & n = 0 \end{cases}$$

すると、

$$\mathrm{f(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega nx}$$

となり、直交性を使うと、

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} c_n dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\omega nx} dx$$

$$\mathrm{c_n} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\omega nx} dx$$

つまり、

$$\mathrm{f(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\omega nx} dx\, e^{i\omega nx}$$

フーリエ変換では周期を無限大にするのだった。すなわち、

$$\mathrm{f(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{L\to 0} \frac{L}{T}\int_{-\frac{T}{2L}}^{\frac{T}{2L}} f(x) e^{-i\omega nx} dx\, e^{i\omega nx}$$

これは一部、区分求積法の形であり、積分に置き換えることが出来る。簡易のため、積分は必ず収束すると仮定して、

$$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega nx} dx e^{i\omega nx}\, dn$$

$$= \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega nx} dn \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega nx} dx$$

ここで積分を取り出して、また$\omega \to \mathrm{n}$、$\mathrm{n} \to \omega$とすると、

$$\mathrm{f(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega nx} dx$$

よって、フーリエ変換の式が出てきて、逆フーリエ変換の式、

$$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega nx} d\omega$$

もついでに見つけることが出来た。