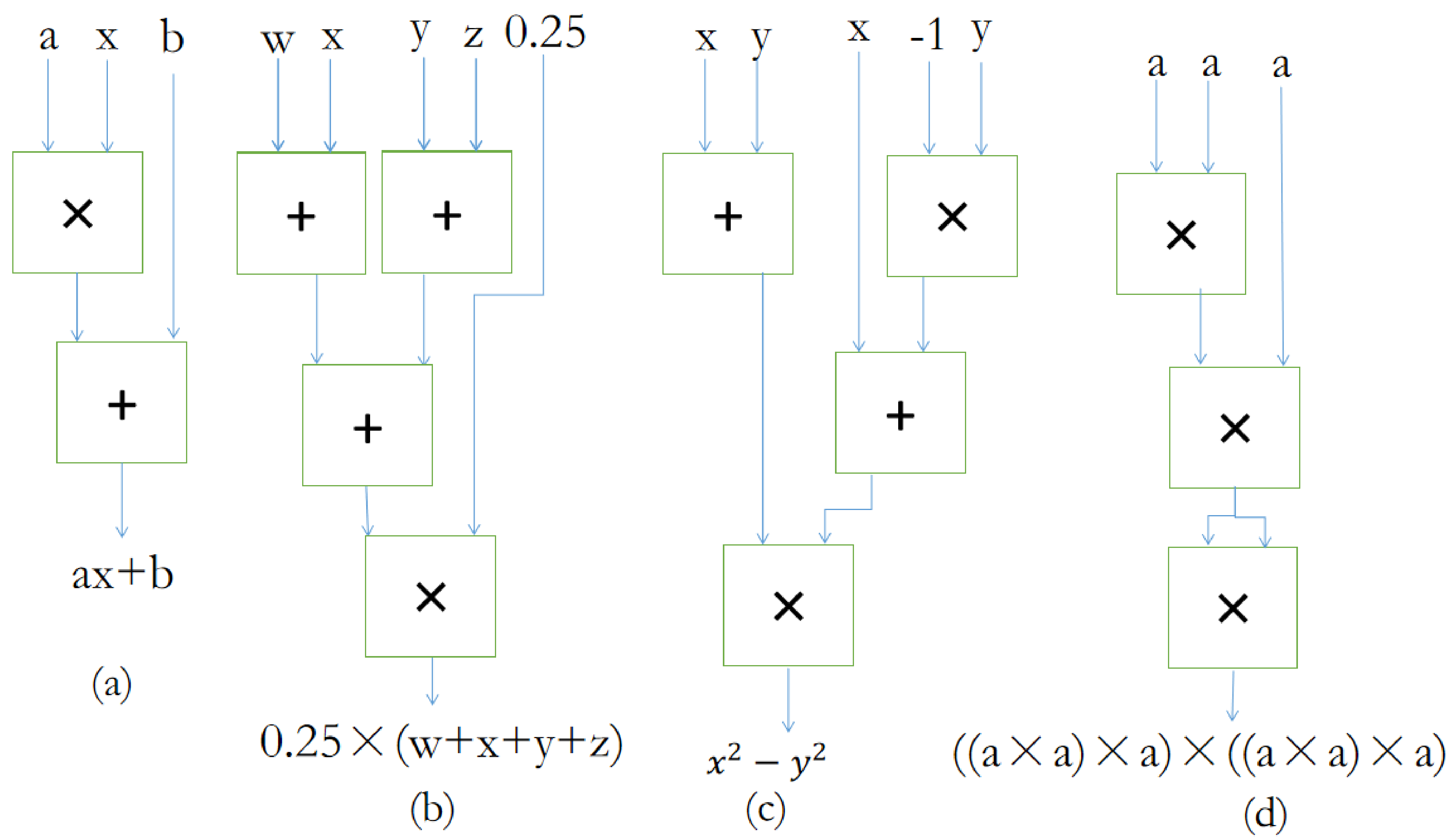
Homework1 Answer

T1



表达不止一种，合理即可。

> 部分同学没有用 `black boxes` 表示出来，若是考试时需注意按照题目要求。

T2

$(98)_D = (2^6 + 2^5 + 2^1) = (0110\_0010)_B$

$-105 = -(2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2) = (1110\_1001)_B \to 1001\_0110 \to 1001\_0111$

$(0100\_0010)_B = (2^6 + 2^1) = (66)_D$

$(1110\_1111)_B \to 1001\_0000 \to 1001\_0001 = -(2^4 + 2^0) = -17$

- 对于正数，原码 `=` 反码 `=` 补码
- 对于负数，补码和原码之间的转换均为非符号位取反 `+ 1`

T3

$a.\ 01\ +\ 11\_0011\ =\ 00\_0001\ +\ 11\_0011\ =\ 11\_0100\ =\ (-12)_D$

$b.\ 111\ +\ 010\_0110\ =\ 111\_1111\ +\ 010\_0110\ =\ 010\_0101\ =\ (37)_D$

$c.\ 1010\ +\ 1101\ =\ 0111 = (7)_D$

$d.\ 0001\ +\ 1110 = 1111 = (-1)_D$

> 首先进行符号扩展至相同位数（和最长的一致），然后进行运算，得到的结果截取相同的位数，不用额外拓展一位。
>
> 详细请看教材 `2.5.2` 和 `2.5.3`。

T4

$a.\ 1110\_1011$

$b.\ 0001\_1110$

$c.\ 1111\_0000$

$d.\ 0000\_0001$

> 对于不足 `8` 位的，补符号位至 `8` 位；对于超过 `8` 位的，去符号位至 `8` 位。

T5

$4.3 = 100.01\_0011\_0011\cdots = (1.0001\ 0011\ 0011\cdots) \times 2^2$

`0 10000001 00010011001100110011010`（注意末尾两位）

> 可能有同学得到的结果为 `0 10000001 00010011001100110011001`
>
> 但是事实上最后存在进位，（最后几位为 `10011`，进位为`1010`）这不作要求，仅作拓展，也即题目描述的与 `4.3` 最接近的数

示例代码：

```c
#include <stdio.h>

union my_union {
    int   a;
    float b;
};

int main() {
    union my_union t;
    t.b = 4.3;
    for (int loop = 31; loop >= 0; loop--) {
        putchar((t.a & (1 << loop)) == 0 ? '0' : '1');
    }
    return 0;
}
```

指数位全为 `1`，小数位全为 `0` 表示无穷，正负号由符号位决定；

指数位全为 `1`，且小数位不全为 `0` 则表示 `NaN`。

T6

$10001001 = 137$

$(1.11111001101001000000000) \times 2^{137-127} = 111\_1110\_0110.1001 = 2022.5625 = 2022\frac{9}{16}$

T7

$a.\ 1010\_0101\ AND\ 1101\_0101\ =\ 1000\_0101$

$b.\ 1000\_1110\ OR\ 1111\_0101 = 1111\_1111$

$c.\ NOT(1111\_0001)\ OR\ NOT(0101\_1010) = 0000\_1110\ OR\ 1010\_0101 = 1010\_1111$

$d.\ (x1234\ AND\ X5678)\ OR\ (xABCD\ AND\ X99EF) = x1230\ OR\ x89CD\ =\ x9BFD$

$e.\ x6A12\ XOR\ x3A15\ =\ x5007$

T8

A	B	C	Q_1	Q_2
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$Q_2 = A\ AND\ B\ AND\ C$

T9

1. 两种解答
    - 转义字符：`000010 010000 101000 001101` $\rightarrow$ `CQoN`
    - 非转义字符：`010111 000111 010001 011100 011100 100101 110010 101110` $\rightarrow$ `XHRcblxy`
2. 规避格式符号(将非 `ASCII` 字符的数据转换成 `ASCII` 字符)、有特定编码要求的文本(`HTTP` 协议下传输数据)。

T10

指数位为 `254`，小数位全为 `1`。

$$(\sum_{i=0}^{23} 2^i) \times 2^{254-127} = (2 - 2^{-23}) \times 2^{127} = 2^{128} - 2^{104}$$

T11

1. `Mult`
    - $A[23:31] + B[23:31] + 10000001 \rightarrow EXP[0:8]$
    - $\{1, A[0:23]\} * \{1, B[0:23]\} = FRAC[0:48]$
    - $(FRAC[47]\ ?\ \{0, EXP + 00000001, FRAC[24:47]\})\ :\ \{0, EXP, FRAC[23:46]\} \rightarrow C[0:32]$
2. `Add`
    - $A \geq B \Rightarrow A[23:31] \geq B[23:31]$

- $A[23:31] - B[23:31] \rightarrow SHIFT$
    - $\{01, A[0:23]\} + (\{01, B[0:23]\} >> SHIFT) \rightarrow FRAC[0:25]$
- $(FRAC[24]?\{0, A[23:31] + 00000001, FRAC[1:24]\} : \{0, A[23:31], FRAC[0:23]\}) \rightarrow C[0:32]$

题目中限制了 `A`，`B` 的范围就是希望不用考虑那些边界情况，也不用考虑 `T5` 中进位相关。

下面考虑两个 `IEEE` 浮点数的乘法：

- 对于指数位，可以直接相加，但是注意到真实指数的表示应该为 $(A[23:31] - 127) + (B[23:31] - 127) + 127 = A[23:31] + B[23:31] - 127$，也即 $A[23:31] + B[23:31] + 10000001$
- 对于小数位，分别在 `A`，`B` 的 `23` 位小数前补一个 `1`，然后相乘可得 `48` 位的 `FRAC`，注意我们需要取**第一个 `1` 后面的 `23` 位小数**。若 $FRAC[47]$ 为 `1`，则指数位还需 `+ 1`，小数位取 $FRAC[24:47]$；否则指数位不变，小数位取 $FRAC[23:46]$

为方便理解，再具体一点

$$1.frac_a \times 2^{exp_a} \times 1.frac_b \times 2^{exp_b} = 1.frac_a \times 1.frac_b \times 2^{exp_a + exp_b}$$
$$1.\underbrace{frac_a}_{23位} \times 1.\underbrace{frac_b}_{23位} = \underbrace{FRAC[47]FRAC[46]}_{2位}.\underbrace{frac}_{46位}$$

如果 $FRAC[47]$ 为 `1`，则小数点应该再往前点一位，所以指数位还需 `+ 1`；否则 $FRAC[46]$ 为 `1`，小数点不变，因此指数位不需要 `+ 1`。

对于加法，也是同理可得

$$1.frac_a \times 2^{exp_a} + 1.frac_b \times 2^{exp_b} = (1.frac_a + 1.frac_b \times 2^{exp_b - exp_a}) \times 2^{exp_a}$$
$$\underbrace{1.frac_a}_{24\text{位}} + \underbrace{1.frac_b \times 2^{exp_b - exp_a}}_{24\text{位}} = \underbrace{FRAC[24]FRAC[23]}_{2\text{位}}.\underbrace{frac}_{23\text{位}}$$

上述$\times 2^{exp_b - exp_a}$ 即**右移** $exp_a - exp_b$ 位，小数位前面补 `01` 是考虑得到 `25` 位的 $FRAC$。其它处理均与乘法类似，不赘述。