# hw2

2nd: 3.1-2, 3.1-4; 3.2-3, 3.2-5; 4.3-3, 4.3-6;

## 3.1-2

**3.1-2 证明：对任意实常量 $a$ 和 $b$，其中 $b>0$，有**

$$(n+a)^b = \Theta(n^b)$$

令$c=2^b$，$n_0 \geq 2a$，对于所有$n \geq n_0$有$(n+a)^b \leq (2n)^b = cn^b$.
因此$(n+a)^b = O(n^b)$. 令$n_0 \geq \frac{-a}{1-1/2^{1/b}}$，$c=1/2$.
$n \geq n_0 \geq \frac{-a}{1-1/2^{1/b}} \leftrightarrow n - \frac{n}{2^{1/b}} \geq -a \leftrightarrow n+a \geq (1/2)^{a/b} n \leftrightarrow (n+a)^b \geq cn^b$.
$\Rightarrow (n+a)^b = \Omega\left(n^b\right)$. $\Rightarrow (n+a)^b = \Theta\left(n^b\right)$.

## 3.1-4

**3.1-4 $2^{n+1}=O(2^n)$成立吗？$2^{2n}=O(2^n)$成立吗？**

对于所有 $n \geq 0$，$2^{n+1} \geq 2 \cdot 2^n$. 故 $2^{n+1} = O\left(2^n\right)$.
但是 $2^{2n}$ 不等于 $O\left(2^n\right)$.
否则存在 $n_0$ 和 $c$ 使得 $n \geq n_0$ . 这说明 $2^n \cdot 2^n = 2^{2n} \leq c2^n$，故对 $n \geq n_0$ ，$2^n \leq c$. 但这是不可能的，因为$c$是常数。

## 3.2-3

**3.2-3 证明等式(3.19)。并证明 $n! = \omega(2^n)$且 $n! = o(n^n)$。**

用Stirling的近似公式:

$$\begin{aligned}
\lg(n!) &= \lg\left(\sqrt{(2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\lg(2\pi n) + n\lg(n) - n\lg(e) + \lg\left(\Theta\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

如果只将分解lg时得到的两个表达式相加而不是相减，那么这最后一项是 $O(\lg(n))$。所以，整个表达式主要由 $n\lg(n)$ 组成。因此，得到 $\lg(n!) = \Theta(n\lg(n))$。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\left(\frac{2e}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2e}{n}\right)^n$$

如果限制（n>4 e），那么:

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)} e^n = \lim_{n\to\infty} O\left(n^{-.5}\right)e^n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{c_1\sqrt{n}}$$
$$\geq \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{c_1 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{c_1} = \infty$$

# 3.2-5

***3.2-5　如下两个函数中，哪一个渐近更大些：$\lg(\lg^* n)$还是 $\lg^*(\lg n)$？**

注意到 $\lg^*(2^n) = 1 + \lg^*(n)$，所以：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\lg(\lg^*(n))}{\lg^*(\lg(n))} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(\lg^*(2^n))}{\lg^*(\lg(2^n))} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(1+\lg^*(n))}{\lg^*(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(1+n)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此$\lg^*(\lg(n))$的增长速度比 $\lg(\lg^*(n))$ 更快。

# 4.3-3

**4.3-3　我们看到 $T(n)=2T(\lfloor n/2\rfloor)+n$ 的解为$O(n\lg n)$。证明 $\Omega(n\lg n)$也是这个递归式的解。从而得出结论：解为 $\Theta(n\lg n)$。**

归纳假设 $T(n) \leq cn\lg n$，其中 $c = \max(T(2)/2, 1)$。有

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2\rfloor) + n \leq 2c\lfloor n/2\rfloor \lg(\lfloor n/2\rfloor) + n$$
$$\leq cn\lg(n/2) + n = cn(\lg(n)-1) + n = cn\left(\lg(n) - 1 + \frac{1}{c}\right) \leq cn\lg(n)$$

所以，$T(n) \in O(n\lg(n))$.

再次归纳地假设 $T(n) \geq c'n\lg(n)$，其中 $c' = \min(1/3, T(2)/2)$。得到

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2\rfloor) + n \geq 2c'\lfloor n/2\rfloor \lg(\lfloor n/2\rfloor) + n \geq c'(n-1)\lg((n-1)/2) + n$$
$$= c'(n-1)(\lg(n) - 1 - \lg(n/(n-1))) + n$$
$$= c'n\left(\lg(n) - 1 - \lg(n/(n-1)) + \frac{1}{c'}\right) - c'(\lg(n) - 1 - \lg(n/(n-1)))$$
$$\geq c'n\left(\lg(n) - 2 + \frac{1}{c'} - \frac{(\lg(n-1)-1)}{n}\right) \geq c'n\left(\lg(n) - 3 + \frac{1}{c'}\right) \geq c'n\lg(n)$$

所以，$T(n) \in \Omega(n)$.

结合问题第一部分，得出 $T(n) \in \Theta(n\lg(n))$，而不是最初的结论 $T(n) \in \Theta(n)$。

# 4.3-6

**4.3-6** 证明：$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor+17)+n$ 的解为 $O(n\lg n)$。

选择 $n_1$ 使得当 $n \ge n_1$)\$ 时有 $n/2+17 \le 3n/4$。将找到 $c$ 和 $d$ 使得 $T(n) \le cn\log n - d$
。

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n \\
&\le 2(c(n/2+17)\log(n/2+17) - d) + n \\
&\le cn\log(n/2+17) + 17c\log(n/2+17) - 2d + n \\
&\le cn\log(3n/4) + 17c\log(3n/4) - 2d + n \\
&= cn\log n - d + cn\log(3/4) + 17c\log(3n/4) - d + n.
\end{aligned}
$$

取 $c=-2/\log(3/4)$ 和 $d=34$。那么有 $T(n) \le cn\log n - d + 17c\log(n) - n$。由于 $\log(n)=o(n)$，存在 $n_2$ 使得当 $n \ge n_2$ 时有 $n \ge 17c\log(n)$。令 $n_0 = \max n_1, n_2$，有当 $n \ge n_0$ 时，$T(n) \le cn\log n - d$。
因此 $T(n)=O(n\log n)$。