第三次作业总结

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

2.2.19

第一小问要证明两边互为子集，很多同学只证明了左边是右边的子集，证明不充分。

Note:这道题提供了一般地证明两个集合A，B相等的常用方法，也就是证明A，B互相为对方的子集。

2.2.47

这道题，有不少同学采取了在等式两边再$\oplus C$的做法，不过在运用结合律的时候要证明在集合运算下 $\oplus$ 运算符满足结合律。

对于这道题还有一些同学采取了较为复杂的集合运算方法进行求解，但大多数证明过程冗余且证明不充分，下面给出2.2.19中提出的证明集合相等即证明集合互为子集的做法：

对于 $x \in A$ 若 $x \in C$ 则 $x \notin A \oplus C$ 故 $x \notin B \oplus C$ 故 $x \in B$

若 $x \notin C$ 则 $x \in A \oplus C$ 故 $x \in B \oplus C$ 故 $x \in B$

因此 $A \subseteq B$ 同理 $B \subseteq A$ 故 $A = B$

2.3.3

第三小问有不少同学认为是函数，但是当比特串中数字全为0时，是没有对应结果(也就是没有像），故不是函数。

Note:

定义 1 令 A 和 B 为非空集合。从 A 到 B 的函数 f 是对元素的一种指派，对 A 的每个元素恰好指派 B 的一个元素。如果 B 中元素 b 是唯一由函数 f 指派给 A 中元素 a 的，则我们就写成 $f(a)=b$。如果 f 是从 A 到 B 的函数，就写成 $f: A \to B$。

定义 2 如果 f 是从 A 到 B 的函数，我们说 A 是 f 的定义域(domain)，而 B 是 f 的陪域(codomain)。如果 $f(a)=b$，我们说 b 是 a 的像(image)，而 a 是 b 的原像(preimage)。f 的值域(range)或像是 A 中元素的所有像的集合。如果 f 是从 A 到 B 的函数，我们说 f 把 A 映射(map)到 B。

2.3.21

这道题是按照题目要求构造函数，要特别注意构造的函数定义域为整数，值域为正整数，所以只要构造的函数不满足这一条件肯定就是错的。

按照题意要构造 映上非一对一函数、一对一非映上函数，一对一且映上函数，非一对一且非映上函数这四类函数，按照题目要求给出一种结果如下：

- a) $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & x \geq 0 \\ -2x+1 & x < 0 \end{cases}$
- b) $f(x) = |x| + 1$
- c) $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$
- d) $f(x) = |x| + 2$

2.3.21

Note:

定义 5 函数 f 称为是一对一(one-to-one)或单射(injection)函数，当且仅当对于 f 的定义域中的所有 a 和 b 有 $f(a)=f(b)$ 蕴含 $a=b$。一个函数如果是一对一的，就称为是单射的(injective)。

定义 7 一个从 A 到 B 的函数 f 称为映上(onto)或满射(surjection)函数，当且仅当对每个 $b\in B$ 有元素 $a\in A$ 使得 $f(a)=b$。一个函数 f 如果是映上的就称为是满射的(surjective)。

2.4.27

整体而言，这道题大家证明的方法种类很多，下面给出比较严谨的两类做法：

方法一：

在从 1，2，…，a_n 的所有整数中，a_n 是第 n 个正整数但不是一个完全平方。非平方是 a_1，a_2，…，a_n，平方项是 1^2，2^2，…，k^2，其中 k 是整数且满足 $k^2<n+k<(k+1)^2$。因此，$a_n=n+k$ 满足 $k^2<a_n<(k+1)^2$。为了寻找 k，首先注意 $k^2<n+k<(k+1)^2$，所以 $k^2+1\leqslant n+k\leqslant (k+1)^2-1$。所以，$(k-1/2)^2+3/4=k^2-k+1\leqslant n\leqslant k^2+k=(k+1/2)^2-1/4$。从而可得 $k-1/2<\sqrt{n}<k+1/2$，所以 $k=\{n\}$ 并且 $a_n=n+k=n+\{\sqrt{n}\}$。

方法二：

考虑到 $a_n-a_{n-1}=1+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，因此若 $a_n-a_{n-1}\neq 1$ 必有 $a_n-a_{n-1}=2$ 且 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=1$。因此必定存在 $x\in Z_+$ 使得 $\sqrt{n}>x+0.5>\sqrt{n-1}$ 故 $n>x^2+x+0.25>n-1$ 因此 $n=x^2+x+1$，故 $a_n=x^2+2x+2$ 以及 $a_{n-1}=x^2+2x$，可以发现 $(x+1)^2$ 被跳过了。因此有，所有 $a_n-a_{n-1}=2$ 的 n 都满足 a_n 与 a_{n-1} 中有一个完全平方数。所有可以推得 a_n 包括所有非完全平方数的正整数。又因为 $a_1=2$，是第 1 个非完全平方数的正整数，所以 a_n 是第 n 个非完全平方数的正整数

2.5.31

这道题要证明既为一对一又是映上的，可以分别证一对一和映上，下面给出一种常见做法：

映上：对于任意 $z=f(m,n)$，若 $(x-2)(x-1)/2<z\leq(x-1)x/2$，则取 $m=z-(x-2)(x-1)/2, n=x-m$，易知 $m,n>0$ 即有 $f(m,n)=z$。

一对一：上述 m,n 是唯一的。这是因为，当 $m+n$ 固定时，一定只存在一个 m；
下证不存在多个 $m+n$ 可以使式子成立。易知 $0\leq m<x$，因此若 $m'+n'>x$ 则可算得
$m'=z-(m'+n'-2)(m'+n'-1)/2\leq 0$ 不符合题意；若有 $m'+n'<x$ 则可算得
$m'=z-(m'+n'-2)(m'+n'-1)/2\geq x-1\geq m'+n'$ 得 $n'\leq 0$ 不符合题意。故不存在多个 $m+n$ 可以使式子成立。

2.5.31

也可以理解题目意思后，从一对一和映上整体进行考虑，下面提供一种做法：

显然，对于固定的 $m+n$ 值，比如 $m+n=x$，由公式可知函数的取值范围是从 $(x-2)(x-1)/2+1$ 到 $(x-2)(x-1)/2+(x-1)$，因为在这些条件下 m 的取值可假设为 1，2，3，…，$(x-1)$，而当 $m+n$ 固定时公式中的第一项是一个固定的正整数。要证明这个函数是一对一和映上的，我们只需要证明 $x+1$ 的取值范围恰好是 x 所剩下值的范围，即 $f(x-1, 1)+1=f(1, x)$。我们有 $f(x-1, 1)+1=(x-2)(x-1)/2+(x-1)+1=(x^2-x+2)/2=(x-1)x/2+1=f(1, x)$。

谢谢！