数理逻辑与图论 作业 2 反馈

Eastwind

作业 2

形式命题的书写规范

本次作业反映出许多同学对命题如何书写的理解有偏差. 在此仅提出镜率比较高的几类错误及比较重要的规范, 详细的规范讲解或许会在后续习题课上进行:

先考虑零阶逻辑. 如果将零阶逻辑类比为一种语言, 那么其中的字母只有以下三类: 命题变元, 五种命题联结词 ($\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$) , 以及左右括号. 任何不在此列的字符 (比如逗号) 严格来讲都不应该出现在零阶逻辑命题中, 除非题目给出了新定义的命题联结词 (比如异或) . 因此, 当你应该写一个完整的命题, 但要表达的意思却需要多个命题同时为真时, 请用 $\wedge$ 连接这多个命题而不要用逗号等.

括号规范: 严格来说, 如果认为每次用命题联结词生成一个新的命题称为一次" 衍生" , 那么从第二次衍生起便需要将此前的衍生命题打一个括号, 以免读者无法区分每个联结词的管辖对象. 例如, $p\wedge(q\vee r)$ 是正确的, 而 $p\wedge q\vee r$ 则会使你的读者困惑.

不过这样的规范在有些情况下太严苛了, 反而给作者带来负担. 因此我们允许少量的简化处理:

1. 如果 $\neg$ 的管辖范围只有一个命题, 那么其它联结词囊括它时, 不需要再将这两个字符打括号. 例如, 我们认为 $p \rightarrow \neg q$ 是合理的.

2. 由于 $\vee, \wedge$ 作为运算符与自身嵌套时满足结合律, 我们允许连续的若干个 $\vee$ 与连续的若干个 $\wedge$ 不打括号, 但此时两者不能混合出现. 例如, 在小项表达式中, 我们时常用到 $p \wedge q \wedge r$ 这样的写法. 它可以视为 $p \wedge (q \wedge r)$ 或者 $(p \wedge q) \wedge r$ 的简写, 因为这两个命题是等价的.

3. 由于 $\leftrightarrow$ 作为关系时满足传递性, 我们也允许连续的 $\leftrightarrow$ 出现时不打括号. 例如, 我们允许出现 $p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$. 请注意, 它既不是 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$, 也不是 $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ 的简写, 而是 $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$ 的简写.

一阶逻辑命题的书写与之类似, 只是要注意量词 $\forall$ 与 $\exists$ 在每次出现时, 需要将其论域整体打上括号. 多个量词连续出现时, 由于论域相同, 可以只为最

后一个量词的论域打括号.

1.4.7

(c) 小问错误率偏高. 很多同学的答案是" 存在一个喜剧演员, 他很有趣" , 但这在意思上与 (d) 的翻译没有任何区别, 显然与二者在形式上的相异不符.

先把原命题不追求通顺地翻译成中文: " 存在一个人, 如果他是喜剧演员, 则他很有趣" . 高频错误答案与此命题的区别何在? 如果我们试图证明此命题, 则需要在论域中找到一个对象使得后面的命题为真. 而众所周知, 证明一个蕴含式为真有两种途径: 证明后件或证伪前件. 换言之, 只要我能找到一个有趣的人 (无论他是否是喜剧演员) , 则此命题必然为真. 这是因为如果此人是喜剧演员, 自然 g 构成正例; 而如果此人不是, 那么前件为假, 构成正例, 命题自然为真. 同理, 只要我能找到一个不是喜剧演员的人, 也能构成一正例, 从而命题为真.

对比错误答案: 错误答案直接抹除了论域中非喜剧演员的对象对命题真值的影响, 只考虑喜剧演员中是否有人有趣. 这显然是不符愿意的.

基于此可以引出直觉逻辑中一个经典的佯谬: 饮者悖论. 感兴趣的同学可以自行查找相关资料学习.

1.5.7

错误主要集中在 (d)(e)(f) 三问. 由于不同份作业错的方式千奇百怪, 这里只提出现率比较高的几种.

(d).

" 存在某种菜肴, 它至多被一个学生喜欢" : 这显然是将 $\exists$ 提到了 $\forall$ 的论域之外. 注意这种变换并不能保证新命题与原命题等价 (事实上它几乎总是会把新命题改得风马牛不相及) , 同学们可以自行验证此命题与正确答案" 对于任意两个学生, 总存在一种菜肴被其中至多一人喜欢" .

" 学校中至多只有一个人喜欢所有菜" : 这个答案没错, 因为驳斥原命题的唯一方式是找到两个学生, 使得所有菜肴他们都喜欢. 所以原命题等价于"

喜欢所有菜肴的至多一人”． 但这个意思相比于原命题作了过多变换. 对于这种题目, 同学们还是尽量让自然语言的句子一字一词地对应原命题好一点, 否则会给助教验证答案带来较大的负担.

(e).

” 对于所有菜肴, 都有两个学生同时喜欢或不喜欢它”：同上, 显然是交换不同量词带来的错误.

” 对于每两个同学, 都有一道菜他们看法相同”：这种翻译粗略地说并不错, 只是注意自然语言中” 两个” 通常指代不同的对象, 而形式命题中不同变元不一定总是指称不同的对象 (自然语言与形式语言的这种区别在此前的” 或” 也有所体现)．按形式命题的意思, z 可以与 x 取到同一个人, 因此任取一人同时作为 x 与 z 总是可以证明原命题为真. 这也是为什么有的答案翻译结果是” 永真式” (尽管我并不推荐这种答案)．

(f).

任意两个学生都有他们都喜欢吃的菜: $\leftrightarrow$ 只意味着这两个学生对这道菜的看法相同, 不能说明都是喜欢或不喜欢.

关于交换不同量词带来的错误, 最典型的例子是对比以下两个命题:

$\forall x \in Z, \exists y \in Z, s.t. x + y = 0$

$\exists y \in Z, \forall x \in Z, s.t. x + y = 0$

两个命题的区别仅仅在于交换了 $\forall x$ 与 $\exists y$ 的位置, 意思 (以及真值) 却大相径庭: 对于第一个命题, 为证明其为真, 只需对于每个 x 取其相反数作为 y 即可; 对于第二个命题, 显然取 $x = 0$ 与 $x = 1$ 时, 所需的 y 并不相同, 从而不存在这样万能的 y 使后半句的谓词总是成立.

1.5.11

本次作业绝对的重灾区. 交上来的作业中 (d) 到 (h) 小问错误率极高且错法非常统一. 希望同学们写作业时还是不要盲信来自他人的答案.

除了在开头中提到的命题书写规范问题, 这五问出镜率最高 (也最具迷惑性) 的错误答案为 (以 (d) 小问为例):

$\exists x \forall y((S(x) \land F(y)) \to (\neg A(x,y)))$

对比正确答案:

$\exists x \forall y(S(x) \land (F(y) \to (\neg A(x,y))))$

两者之间不过是 $\to$ 与 $\land$ 的优先顺序换了一下, 有何实质区别呢?

回答这个问题, 我们还是考虑使两者为真的谓词 A 赋值是否总是相同: 对于错误答案, 为使命题为真, 我可以选取一个 x 使得谓词论域中的命题总是为真. 而为使蕴含式为真, 最方便的方式无疑是使前件为假以暗度陈仓. 而前件又是一个合取式, 所以我们只需要让其中之一为假即可. y 的量词是 $\forall$ 而 x 的量词是 $\exists$, 那么最适合做手脚的无疑是 x. 换言之, 我只要在学校成员中任取一不是学生者 (不一定是教员, 可能全校人员的集合比学生与教员之并要大) 作为被特指的 x 代入, 即可轻松证明 (d) 为真, 这与原意显然是不符的.

为了求解正确答案, 万无一失地做法是逐个拆解句子中的量词, 并仔细审视后面的命题对量词的对象 (变元 x) 做了何种要求, 所要求的又是哪一部分的 x. 如果所要求的只是满足谓词 P 的那一部分 x, 便在量词之后整个命题之前加上 $P(x) \to$ 以示约束; 如果有多种要求, 则将这些要求以 $\land$ 或 $\lor$ 以符合原意的方式连接. 由此, 我们可以得到此题的正解:

$\exists x(S(x) \land \forall y(F(y) \to (\neg A(x,y))))$

这也是最直接转述中文原意的命题. 有的同学应该已经注意到, 其与我们上面给出的正确答案并不完全相同, 而是将 $S(x)$ 调到了 $\forall y$ 的论域之外. 其实这两条命题是等价的 (同学们可以自行借助语义试着验证这一点) . 在一阶逻辑命题中, 存在某种通用的等价变换可以将所有量词调到命题开头. 不过这一知识点应该不再我们这门课的要求范围中, 同学们作了解即可. 对于此类问题, 只要基于原文直接翻译成命题即可, 如果作了不多的显然的等价变换一般也会给分, 不需要将命题转换成某种" 一般格式" .

1.5.21

这题说实话有些怪: 如果将"$n > 0$" "$n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$" 定义成谓词, 那么命题中便不需要出现数学运算符; 如果直接将其写入命题中, 那么命题中又不需要谓词. 我们在批作业时对写成两种形式的答案都算对.

1.5.35

注意这里要求" 公共论域" , 所以不能为每个变元分别指定不同的论域, 尤其是不能直接迫使每个变元只能取一个特定值 (除非你给这四个变元指派的范围相同) .

1.6.35

这道题的题干描述有些歧义: " 如果超人存在, 则他是无能的或者恶意的" 一句, 究竟是推导过程还是前提条件之一?

如果认为此句是推导过程, 那么它的确可以从前述条件中得出. 但如果不假设一条类似于" 超人必然善意且能够防止邪恶" 这样的条件 (许多同学在作业中是这样默认的) , 则无法据此推断出关于超人存在与否的任何结论.

如果因为此句出现在" 因此" 之前, 从而认为它还是条件之一. 那么所有关于超人的已知条件是一致的, 自然无法得出超人不存在的结论. 从而论证无效.

但不管采用以上哪种解释, 这段话都显得... 意义不明. 我推测论述本身应该是改自宗教中有名的" 伊壁鸠鲁悖论" , 以世间邪恶的存在证明上帝若非不善则必无能, 从而人们无需信仰上帝. 由此第一种解释更加合理, 但题中应该加上前述的前提条件.

1.8.51

此题的 (b) 小问需要证明"Z" 字形的四联无法拼接成一个标准棋盘. 许多同学的答案看得出来意思到了, 但没有做严谨的证明.

证明的关键是"16 个 Z 字形无论如何排列, 都不可能排成一个标准棋盘" . 我们当然不可能在证明中列举所有可能的排列方式并验证, 所以需要归纳并简化这些排列的手段.

反证法: 假设存在完美的拼接方式, 那么考虑左下角的格子 $(1,1)$, 必须要有一个 Z 字形能够覆盖它. 不妨设这个 Z 字形覆盖了 $(1,1),(1,2),(2,2),(2,3)$ (另一种情况与之沿 $x=y$ 对称, 所以考虑一种情况即可) , 那么显然, 想要覆盖被围起来的 $(1,3)$ 只有可能在第一个 Z 字形上放 2 格再插入一个相同方向的 Z 字形, 而这又使 $(1,5)$ 格陷入相同的境地. 重复以上过程可知, 总有一个必须要添加进去的 Z 字形会越出棋盘的边界. 故得证.

不难理解, 以上证明方法实际上还证明了: 所有的 $m \times n$ 的棋盘, 都不能被若干个四联完美覆盖.