

# 第一次作业题



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

# 1.1节

13.

令  $p$ 、 $q$  为如下命题：

$p$ ：气温在零度以下。

$q$ ：正在下雪。

用  $p$ 、 $q$  和逻辑联结词(包括否定)写出下列各命题：

a) 气温在零度以下且正下着雪。

b) 气温在零度以下，但没有下雪。

c) 气温不在零度以下，并且没有下雪。

d) 要么正下着雪，要么在零度以下(也许两者兼有)。

e) 如果气温在零度以下，则也下着雪。

f) 要么气温在零度以下，要么下着雪；但如果气温在零度以下，就没有下雪。

g) 气温在零度以下是下雪的充分必要条件。

解答: a)  $p \wedge q$       b)  $p \wedge \neg q$       c)  $\neg p \wedge \neg q$       d)  $p \vee q$   
e)  $p \rightarrow q$       f)  $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$       g)  $q \leftrightarrow p$



## 1.1节

19. 判断下列各条件语句是真是假：

a) 如果  $1+1=2$ ，则  $2+2=5$ 。

b) 如果  $1+1=3$ ，则  $2+2=4$ 。

c) 如果  $1+1=3$ ，则  $2+2=5$ 。

d) 如果猴子会飞，则  $1+1=3$ 。

解答： a) 假  
b) 真  
c) 真  
d) 真



# 1.1节

35. 构造下列各复合命题的真值表。

a)  $(p \vee q) \rightarrow (p \oplus q)$

b)  $(p \oplus q) \rightarrow (p \wedge q)$

c)  $(p \vee q) \oplus (p \wedge q)$

d)  $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow q)$

e)  $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow \neg r)$

f)  $(p \oplus q) \rightarrow (p \oplus \neg q)$

解答:

对于a) b) c) d) f)有:

$p$	$q$	$(p \vee q) \rightarrow (p \oplus q)$	$(p \oplus q) \rightarrow (p \wedge q)$	$(p \vee q) \oplus (p \wedge q)$	$(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow q)$	$(p \oplus q) \rightarrow (p \oplus \neg q)$
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T



## 1.1节

对于e)有:

$p$	$q$	$r$	$\neg p$	$\neg r$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow \neg r$	$(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow \neg r)$
T	T	T	F	F	T	T	F
T	T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T	F



## 1.1节

43. 不借助于真值表，试解释为什么在  $p$ 、 $q$  和  $r$  至少有一个为真并且至少有一个为假时  $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$  为真，而当三个变量具有相同真值时为假。

解答：  $p, q, r$  当中至少有一个为真时，  $p \vee q \vee r$  为真，  $p, q, r$  当中至少有一个为假时，  $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$  为真，故当  $p, q, r$  当中至少有一个为真并且至少有一个为假时，  $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$  为真；当三个变量具有相同真值时，  $p \vee q \vee r$  和  $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$  当中一真一假，故  $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$  为假。



## 1.2节

11. 下列系统规范说明一致吗？“路由器能向边缘系统发送分组仅当它支持新的地址空间。路由器要能支持新的地址空间，就必须安装最新版本的软件。如果安装了最新版本的软件，路由器就能向边缘系统发送分组。路由器不支持新的地址空间。”

解答：

$p$ :路由器能向边缘系统发送分组； $q$ :路由器支持新的地址空间；

$r$ :路由器安装了最新版本的软件。

则按照题意依次得到： $p \rightarrow q ; q \rightarrow r ; r \rightarrow p ; \neg q$ .

当 $p, q, r$ 均为假时，上述四式均成立。

所以是一致的。

注意：仅当和当且仅当是不一样的。

## 1.2节

### 1. 仅当 (if) :

- "仅当"通常表示一个条件, 其中一个事件或情况是另一个事件或情况的充分条件。换句话说, 如果事件A发生, 那么事件B也会发生, 但并不一定要求事件A的发生。
- 这种关系通常用于表示一个单向的条件, 例如, "如果你下雨了, 你会湿透"。这并不意味着只有下雨才会湿透, 还可能有其他原因导致湿透, 但下雨是导致湿透的一个条件。

### 2. 当且仅当 (if and only if) :

- "当且仅当"表示一个双向的条件, 也就是两个事件或情况互为充要条件, 彼此完全等同。如果一个事件发生, 另一个事件也必定发生, 反之亦然。
- 这种关系用于表示两个事件或条件之间的等同关系, 例如, "你会被湿透当且仅当下雨", 这意味着只有在下雨的情况下你才会被湿透, 反之亦然。

总结起来, 关键区别在于"仅当"表示一个单向条件, 而"当且仅当"表示双向条件, 其中两个事件或情况互为充要条件, 彼此完全等同。



## 1.2节

### 29.

练习 28~35 是关于一个居住着三种人的岛民的：只讲真话的骑士、只讲假话的无赖和可能讲真话也可能讲假话的间谍(斯马亚在[Sm78]中称之为正常人)。你遇见三个人  $A$ 、 $B$  和  $C$ 。你知道其中一人是骑士、一人是无赖，还有一人是间谍。三人都知道其他两人是哪种类型的人。对于下列每种情况，可能的话请确定是否有唯一解并确定谁是骑士、无赖和间谍。当没有唯一解时，请列出所有可能的解或者说明无解。

28.  $A$  说“ $C$  是无赖”， $B$  说“ $A$  是骑士”，而  $C$  说“我是间谍”。

29.  $A$  说“我是骑士”， $B$  说“我是无赖”，而  $C$  说“ $B$  是骑士”。

解答： $A$ 是骑士， $B$ 是间谍， $C$ 是无赖。



## 1.2节

39.

一位侦探访谈了罪案的四位证人。从证人的话中侦探得出的结论是：如果男管家说的是真话，那么厨师说的也是真话；厨师和园丁说的不可能都是真话；园丁和杂役不可能都在说谎；如果杂役说真话，那么厨师就在说谎。侦探能分别判定这四位证人是在说真话还是撒谎？解释你的推理过程。

解答：侦探可以确定厨师和管家在撒谎，但是无法判断园丁和杂役说的是不是真的。

## 1.3节

19. 判断  $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$  是否为永真式。

解答：是一个永真式。

可以通过列真值表证明，也可以直接证明。

下面给出直接证明过程：

$$\neg q \wedge (p \rightarrow q) \equiv \neg q \wedge (\neg p \vee q) \equiv (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q) \equiv \neg q \wedge \neg p$$

$$\text{则原式} = (\neg q \wedge \neg p) \rightarrow \neg p \equiv \neg(\neg q \wedge \neg p) \vee \neg p \equiv q \vee p \vee \neg p \equiv T \text{ 为永真式}$$

上面红色步骤用到德摩根律



## 1.3节

29. 证明  $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$  和  $(p \wedge q) \rightarrow r$  逻辑等价。

解答：可以采用真值表来证明。但按照题目提示，我们的考虑如下：  
当左边命题为假时则  $p \rightarrow r$  和  $q \rightarrow r$  均为假，也就是  $p, q$  为真  $r$  为假，所以  $p \wedge q$  为真，所以右边命题为假。由于两个命题在变量相同的真值组合下均为假，故二者逻辑等价。

## 1.3节

33. 证明  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$  是永真式。

解答：

解法1：真值表

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T



## 1.3节

解法2：直接运算

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) &\equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \vee r) \equiv \\(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r) &\equiv \neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee (r \vee (q \wedge \neg r)) \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee \\(r \vee q) &\equiv T \quad \text{证完}\end{aligned}$$



## 1.3节

### • 45.

试找出一个含命题变量  $p$ 、 $q$  和  $r$  的复合命题，在  $p$ 、 $q$  和  $r$  中恰有两个为真时该命题为真，否则为假。[提示：构造合取式的析取。将使命题为真的每一种真值组合构成一个合取式。每个合取式都应包含三个命题变量或它们的否定。]

答：  $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$



## 1.3节

### • 55.

下面几道练习用到逻辑运算符 NAND(与非)和 NOR(或非)。命题  $p \text{ NAND } q$  在  $p$  或  $q$  或两者均为假时为真，而当  $p$  和  $q$  均为真时为假。命题  $p \text{ NOR } q$  只在  $p$  和  $q$  均为假时为真，否则为假。命题  $p \text{ NAND } q$  和  $p \text{ NOR } q$  分别表示为  $p \mid q$  和  $p \downarrow q$ 。(运算符  $\mid$  和  $\downarrow$  分别以 H. M. Sheffer 和 C. S. Peirce 的名字命名为 Sheffer 竖线(Sheffer stroke)和 Peirce 箭头。)

55. 只用运算符  $\downarrow$  构造一个等价于  $p \rightarrow q$  的命题。

答：两个示例： $((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$  或者  $((p \downarrow q) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow q)$





# 谢谢!



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China