

емой волны. Амплитуды радиосигналов, принимаемых антенной от передатчиков, одинаковы. При одновременной работе передатчиков мощность принимаемого сигнала меняется в очень широких пределах. Объясните явление и оцените суммарный процент времени, в течение которого мощность принимающего сигнала составляет менее 1/1000 среднего значения принимаемой мощности. Отражением радиосигналов от земли пренебречь.

Р.Александров

## Решения задач М1451-1460, Ф1468-1477

**M1451.** Даны натуральные числа  $a$  и  $b$  такие, что числа  $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$  является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$  не превосходит числа  $\sqrt{a+b}$ .

Пусть  $d$  – наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$ .

Так как

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}$$

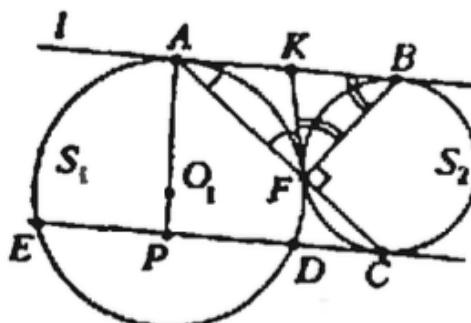
и  $ab$  делится на  $d^2$ , то  $a^2 + b^2 + a + b$  делится на  $d^2$ . Число  $a^2 + b^2$  также делится на  $d^2$ . Поэтому  $a + b$  делится на  $d^2$  и  $\sqrt{a+b} \geq d$

А.Голованов, Е.Малинникова

**M1451.** Окружности  $S_1$  и  $S_2$  касаются внешним образом в точке  $F$ . Прямая  $l$  касается  $S_1$  и  $S_2$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Прямая параллельная прямой  $l$  касается  $S_2$  в точке  $C$  и пересекает  $S_1$  в точках  $D$  и  $E$ . Докажите, что а) точки  $A, F$  и  $C$  лежат на одной прямой; б) общая хорда окружностей, описанных около треугольников  $ABC$  и  $BDE$ , проходит через точку  $F$ .

а) Первое решение. Так как касательные к окружности  $S_2$  в точках  $B$  и  $C$  параллельны, то  $BC$  – ее диаметр, и  $\angle BFC = 90^\circ$ . Проведем через точку  $F$  общую касательную к окружностям (см. рисунок), пусть она пересекает прямую  $l$  в точке  $K$ . Из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что треугольники  $AKF$  и  $BKF$  равнобедренные. Следовательно,

$$\angle AFB = \angle AFK + \angle KFB = \angle FAB + \angle FBA = 180^\circ / 2 = 90^\circ$$



Второе решение. Рассмотрим гомотетию с центром  $F$  и коэффициентом, равным  $-r_1/r_2$ , где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы окружностей  $S_1$  и  $S_2$ . При этой гомотетии  $S_1$  переходит в  $S_2$ , а прямая  $l$  – касательная к  $S_1$  – переходит в параллельную прямую – касательную к  $S_2$ . Следовательно, точка  $A$  переходит в точку  $C$ , поэтому точка  $F$  лежит на отрезке  $AC$ .

б) Ниже мы покажем, что центр окружности  $BDE$  находится в точке  $A$ . Поскольку центр окружности  $ABC$  есть середина

$AC$  ( $\angle ABC = 90^\circ$ ), а  $\angle BFC = 90^\circ$  (см. первое решение а)), отсюда будет следовать, что  $BF$  есть перпендикуляр, опущенный из общей точки окружностей  $BDE$  и  $ABC$  на прямую, соединяющую их центры. А это и значит, что прямая  $BF$  содержит и обзую хорду.

Итак, нам достаточно доказать, что  $AD = AE = AB$ . Первое из этих равенств очевидно (ибо касательная к  $S_1$  в точке  $A$  параллельна  $DE$ ). Пусть  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы  $S_1$  и  $S_2$ .

Опуская перпендикуляр  $AP$  на  $DE$ , найдем, что  $AP = BC = 2r_2$  и по теореме Пифагора для треугольников  $APD$  и  $O_1PD$ , где  $O_1$  – центр  $S_1$ ,  $PD^2 = O_1D^2 - O_1P^2 = r_1^2 - (2r_2 - r_1)^2 = 4r_1r_2 - 4r_2^2$ ,  $AD^2 = AP^2 + PD^2 = 4r_1r_2$ . Но легко найти, что общая касательная  $AB$  окружностей  $S_1$  и  $S_2$  равна  $2\sqrt{r_1r_2}$ .

А.Калинин, В.Дубровский

**M1453.** Существует ли квадратный трехчлен  $P(x)$  с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа  $n$ , в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число  $P(n)$  также записывается одними единицами?

Ответ: существует.

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$P(x) = x(9x + 2)$$

Если  $n = \underbrace{11\dots11}_k$ , то  $9n + 2 = \underbrace{100\dots00}_k 1$ .

Следовательно,  $P(n) = \underbrace{11\dots11}_k \cdot \underbrace{100\dots00}_k 1 = \underbrace{11\dots11}_{2k}$ .

Значит, этот квадратный трехчлен удовлетворяет условию.

А.Перлин

**M1454.** Прямоугольник  $m \times n$  разрезан на уголки:



Докажите, что разность между количеством уголков вида  $a$  и количеством уголков вида  $b$  делится на 3.

Ясно, что если прямоугольник  $m \times n$  разрезан на уголки, то  $mn$  делится на 3. Расставим в клетках прямоугольника числа так, как показано на рисунке.

1	2	3	4	...	$n-3$	$n-2$	$n-1$	$n$
2	3	4	5	...	$n-2$	$n-1$	$n$	$n+1$
3	4	5	6	...	$n-1$	$n$	$n+1$	$n+2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$m-1$	$m$	$m+1$	$m+2$	...	$m+n-5$	$m+n-4$	$m+n-3$	$m+n-2$
$m$	$m+1$	$m+2$	$m+3$	...	$m+n-4$	$m+n-3$	$m+n-2$	$m+n-1$

Сумма всех этих чисел равна  $mn(m+n)/2$ . Сумма чисел, стоящих в уголке вида  $a$ , дает при делении на 3 остаток 2; сумма чисел, стоящих в уголке вида  $b$ , – остаток 1 (или, что тоже самое, -2); суммы чисел, стоящих в уголках вида  $c$  и  $d$ , делятся на 3. Если  $n_a$  и  $n_b$  – количество уголков вида  $a$  и  $b$  соответственно, то сумма всех чисел в прямоугольнике имеет вид  $3N + 2(n_a - n_b)$ , где  $N$  – некоторое число. Из равенства