емой волны. Амплитуды радиосигналов, принмаемых антенной от передатчиков, одинаковы. При одновременной работе передатчиков мощность принимаемого сигнала меняется в очень широких пределах.Объясните явление и оцените суммарный процент времени, в течении которого мощность принимаего сигнала составляет менее 1/1000 среднего значения принимаемой мощности.Отражением радиосигналов от земли пренебречь.
Р.Александров

Решения задач M1451-1460, Ф1468-1477

M1451. *Даны натуральные числа a и b такие, что числа $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит числа $\sqrt{a+b}$.*

Пусть d – наибольший общий делитель чисел a и b.
Так как

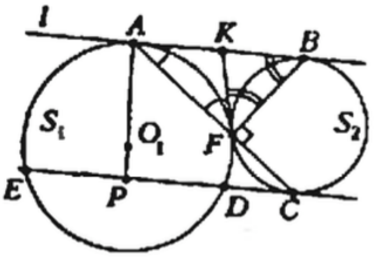
$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}$$

и ab делится на d^2, то a^2+b^2+a+b делится на d^2.Число a^2+b^2 также делится на d^2. Поэтому $a+b$ делится на d^2 и $\sqrt{a+b}\geq d$
А.Голованов, Е.Малинникова

M1451. *Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке F. Прямая l касается S_1 и S_2 в точках A и B соответственно. Прямая параллельная прямой l касается S_2 в точке C и пересекает S_1 в точках D и E. Докажите, что а) точки A,F и C лежат на одной прямой; б) общая хорда окружностей, описанных около треугольников ABC и BDE, проходит через точку F.*

а)Первое решение. Так как касательные к окружности S_2 в точках B и C паралельны, то BC - ее диаметр, и $\angle BFC=90°$. Проведем через точку F общую касательную к окружностям(см. рисунок), пусть она пересекает прямую l в точке K. Из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что треугольники AKF и BKF равнобедренные. Следовательно,

$$\angle AFB=\angle AFK+\angle KFB=\angle FAB+\angle FBA=180°/2=90°$$



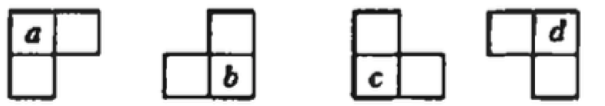
Второе решение. Рассмотрим гомотетию с центром F и коэффициентом, равным $-r_1/r_2$, где r_1 и r_2 – радиусы окружностей S_1 и S_2. При этой гомотетин S_1 переходит в S_2, а прямая l – касательная к S_1 – переходит в паралельную прямую – касательную к S_2. Следовательно, точка A перехолдит в точку C, поэтому точка F лежит на отрезке AC.
б) Ниже мы покажем, что центр окружности BDE находится в точке A. Поскольку центр окружности ABC есть середина $AC(\angle ABC=90°)$, а $\angle BFC=90°$(см. первое решение а)), отсюда бдет следовать, что BF есть перпендекуляр, опущенный из общей точки окружностей BDE и ABC на прямую, соединяющую их центры. А это и значит, что прямая BF содержит иъ обзую хорду.
Итак, нам достаточно доказать, что $AD=AE=AB$. Первое из этих равенств очевидно (ибо касательная к S_1 в точке A парарлельна DE). Пусть r_1 и r_2 - радиусы S_1 и S_2.
Опуская перепендекуляр AP на DE, найдем, что
$AP=BC=2r_2$б и по теореме Пифагора для треугольников APD и O_1PD, где O_1 – центр S_1,
$PD^2=O_1D^2-O_1p_2=r_1^2-(2r_2-r_1)^2=4r_1r_2-4r_2^2$,
$AD^2=AP^2+PD^2=4r_1r_2$. Но легко найти, что обзая касательная AB окружностей S_1 и S_2 равна $2\sqrt{r_2r_2}$.
А.Калинин, В.Дубровский

M1453.*Существует ли квадратный трехчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа n, в десятичной записи которого учавствуют одни единицы, число $P(n)$ также записывается одними единицами?*
Ответ: существует.
Рассмотрим квадратный трехчлен

$$P(x)=x(9x+2)$$

Если $n=\underbrace{11\ldots11}_{k}$, то $9n+2=1\underbrace{00\ldots00}_{k-1}1$.
Следовательно, $P(n)=\underbrace{11\ldots11}_{k}\cdot1\underbrace{00\ldots00}_{k-1}1=\underbrace{11\cdots11}_{2k}$.
Значит, этот квадратный трехчлен удовлетворяет условию.
А.Перлин

M1454.*Прямоугольник $m\times n$ разрезан на уголки:*



Докажите, что разность между количеством уголков вида a и количеством уголков вида b делится на 3.

Ясно, что если прямоугольник $m\times n$ разрезан на уголки,то mn делится на 3. Расставим в клетках прямоугольника числа так, как показано на рисунке.

1	2	3	4	…	n-3	n-2	n-1	n
2	3	4	5	…	n-2	n-1	n	n+1
3	4	5	6	…	n-1	n	n+1	n+2
…	…	…	…		…	…	…	…
m-1	m	m+1	m+2	…	m+n-5	m+n-4	m+n-3	m+n-2
m	m+1	m+2	m+3	…	m+n-4	m+n-3	m+n-2	m+n-1

Сумма всез этих чисел равна $mn(m+n)/2$. Сумма чисел, стоящих в уголке вида a, дает при делении на 3 остаток 2; сумма чисел, стоящих в уголке вида b, – остаток 1 (или, что тоже самое, -2); суммы чисел, стоящих в уголках вида c и d, делятся на 3. Если n_a и n_b – количество уголков вида a и b соответственно, то сумма всех чисел в прямоугольнике имеет вид $3N+2(n_a-n_b)$, где N – некоторое число. Из равенства