XX математика и механика

П. ХАЛМОШ

# ТЕОРИЯ МЕРЫ

Факториал

СЕРИЯ «XX век. Математика и механика»

*Выпуск* 3

---

*Серия основана издательством «Факториал Пресс» в 2002 году.*

## Вышли в свет

1. *Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю.* Линейное программирование. 352 с., 2003.
2. *Постников М. М.* Теория Галуа. 304 с., 2003.
3. *Халмош П.*, Теория меры. 256 с., 2003.

## Готовятся к печати

*Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру.

*Тертычный-Даури В. Ю.* Адаптивная механика.

*Бочаров А. В, Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. // Под ред. Виноградова А. М. и Красильщика И. С.

# MEASURE THEORY

by

PAUL R. HALMOS

1950
*New York*

П. ХАЛМОШ

# ТЕОРИЯ МЕРЫ

*Перевод с английского*
Д. А. ВАСИЛЬКОВА

*Под редакцией*
С. В. ФОМИНА

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
*Москва — 1953*

СЕРИЯ «XX век. Математика и механика»
*Выпуск* 3

П. ХАЛМОШ

# ТЕОРИЯ МЕРЫ

*Перевод с английского*
Д. А. Василькова

*Под редакцией*
С. В. Фомина

Москва
Факториал Пресс
2003

УДК 517.5
ББК 22.162 СЕРИЯ «XX век. Математика и механика». *Выпуск* 3.
X 17
*Книга воспроизводится по изданию 1953г.*

**Халмош П.**

X 17 Теория меры / Пер. с англ. под ред. проф. С. В. Фомина. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2003. — 256 с.

ISBN 5-88688-065-8

Основные вопросы, рассматриваемые в книге — это теория меры, интеграл Лебега, а также их приложения, главным образом к теории вероятностей и к топологической алгебре.

Книга построена таким образом, что она является одновременно и руководством для начинающего читателя, и справочной монографией для специалиста. Основной текст, написанный с полным проведением доказательств, довольно элементарен. Напротив, дополнения, имеющиеся почти во всех параграфах и сформулированные в виде отдельных вопросов или теорем (часто с наводящими указаниями), рассчитаны на более подготовленного читателя.

Для студентов и аспирантов физико-математических специальностей.

Библиогр. 74.

*Научное издание*

*Халмош Пол*

ТЕОРИЯ МЕРЫ

Редактор *Фомин С. В.*
Перевод *Васильков Д. А.*

Формат 70 × 100/16. Усл. печ. л. 20,8. Бумага офсетная № 1. Гарнитура литературная. Подписано к печати 20.03.2003. Тираж 1000 экз. Заказ № 7557.

Издательство «Факториал Пресс», 117449, Москва, а/я 331; ЛР ИД № 00316 от 22.10.1999.
e/mail: factorialco@mail.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов издательства «Факториал Пресс» в ППП типографии «Наука» Академиздатцентра «Наука» РАН. 121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 6.

Оригинал-макет подготовлен с использованием издательской системы AP-TEX.

ISBN 5-88688-065-8

9785886880656

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Предисловие

Понятие меры, возникшее первоначально в теории функций действительного переменного, в настоящее время играет первостепенную роль в самых разнообразных отделах математики. Наряду с теорией функций действительного переменного понятием меры, в той или иной форме, широко пользуется теория вероятностей, функциональный анализ, топологическая алгебра, качественная теория дифференциальных уравнений и т. п. Различные отделы теоретической физики, используя методы теории вероятностей, функционального анализа, эргодические теоремы и т. д., также оказываются связанными в известной степени с понятием меры.

Издаваемая в русском переводе книга П. Халмоша посвящена систематическому изложению теории меры и абстрактного интеграла Лебега и некоторым их приложениям, главным образом к теории вероятностей и к топологической алгебре. Первые восемь глав книги содержат общую теорию меры в абстрактном пространстве. Понятие независимости множеств приводит к теоретико-множественной трактовке основ теории вероятностей (гл. 9), а введение в исходном пространстве топологии — к изучению меры в локально компактных пространствах (гл. 10). Наконец, последние две главы книги посвящены изучению инвариантных мер в локально компактных группах (мера Хаара). Следует отметить, что этот последний круг вопросов сравнительно мало освещен в монографической литературе.

Книга Халмоша построена таким образом, что она является одновременно и руководством для начинающего читателя, и справочной монографией для специалиста. Основной текст, написанный с полным проведением доказательств, довольно элементарен. Напротив, дополнения, имеющиеся почти во всех параграфах и сформулированные в виде отдельных вопросов или теорем (часто с наводящими указаниями), рассчитаны на более подготовленного читателя. Здесь в очень сжатой форме содержится обширный фактический материал, относящийся как к самой теории меры, так и к разнообразным ее приложениям. Такая планировка книги позволила автору охватить, при сравнительно небольшом объеме, весьма широкий круг вопросов, причем теория меры излагается в ней с той степенью общности, которая нужна для ее многочисленных приложений. Автору удалось внести ряд усовершенствований в изложение даже таких классических вопросов, как, например, построение интеграла Лебега, теорема Фубини и т. д. Несколько формальный стиль книги Халмоша делает ее не очень подходящей для самого первоначального ознакомления с предметом. Однако читателю, уже имеющему понятие об основных идеях теории меры, она будет несомненно интересна. Для лиц, занимающихся главным образом различными приложениями теории меры к функциональному анализу, динамическим системам, случайным процессам и т. д., книга Халмоша может представить даже больший интерес чем, например, «Теория интеграла» Сакса.

Несколько слов необходимо сказать о терминологии автора. Будучи весьма систематичной, она в то же время не всегда совпадает с общепринятой. В случаях, когда это было целесообразно, такие отступления сохранены в переводе. Например, у Халмоша слово «класс» *всегда* означает «множество множеств», поэтому в переводе пришлось отказаться от общепринятого термина «класс смежности по подгруппе», заменив его менее употребительным «смежное подмножество». Некоторые терминологические указания содержатся в подстрочных примечаниях переводчика и редактора.

В разработке того круга вопросов, которому посвящена книга Халмоша, советским математикам принадлежит одно из первых мест. Однако Халмош, следуя общей тенденции, принятой в американской научной литературе последнего времени, избегает цитирования советских авторов. Укажем лишь некоторые наиболее характерные, примеры. Приводя классические теоремы Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина об измеримых функциях (последнюю, впрочем, лишь в упражнениях), Халмош ссылается не на оригинальные работы этих авторов, а на монографию Сакса «Теория интеграла». Далее, в гл. 8 рассматривается вопрос об условиях изоморфизма меры на абстрактном пространстве с лебеговской мерой на отрезке. Наиболее исчерпывающим образом этот вопрос был решен в работах В. А. Рохлина, совершенно не упомянутых автором. Гл. 9 («Вероятность») представляет собой, по существу, обработку идей, содержащихся в известной монографии А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей», однако эта работа упомянута автором лишь по двум, довольно частным, поводам. Рассматривая в гл. 12 вопрос о включении группы с заданной на ней инвариантной мерой в локально компактную, Халмош ни словом не упоминает о работах Д. А. Райкова, решившего в своей докторской диссертации аналогичный вопрос для коммутативных групп. Таким образом, необходимо учитывать, что книга Халмоша, давая подробное изложение теории меры и ее приложений, в то же время не может сколько-нибудь правильно ориентировать читателя в вопросах истории этих разделов науки.

*С. В. Фомин*

## Предисловие автора

Цель этой книги — дать связное изложение той части теории меры, которая по опыту последних лет оказалась наиболее полезной для современного анализа. Если мне удалось достигнуть этой цели, то книга может служить учебником по теории меры и в то же время, для более подготовленного математика, источник справок.

Я старался по возможности сократить количество новых терминов и непривычных обозначений. Немногочисленные отклонения моей терминологии от той, которой обычно пользуются в теории меры, вызваны стремлением согласовать наши термины с принятыми в смежных областях математики. Так, например, в пользу наименований «структура» и «кольцо» для определенных классов множеств можно высказать серьезные доводы алгебраического характера, гораздо более убедительные, чем те аналогии, которые побудили Хаусдорфа ввести термины «кольцо» и «тело».

Для понимания первых семи глав книги от вдумчивого читателя требуется лишь знакомство с элементарной алгеброй и основами математического анализа. Для удобства читателя во введении, озаглавленном «Предварительные сведения», подробно указано, отдельно по каждой главе, какие именно сведения нужны. Начинающего читателя не должно обескуражить то, что в этом введении он столкнется с терминами и понятиями, определяемыми позднее, в первых семи главах; пусть он при этом не думает, что его подготовка недостаточна даже для чтения введения.

В конце всех параграфов, за исключением § 44, 93 и 64, приведены упражнения. Иногда они сформулированы в виде вопросов, чаще даже — в виде утверждений, которые читателю предлагается доказать. Упражнения следует рассматривать как органическую часть книги; они содержат не только примеры, необходимые для уяснения теории, но также определения новых понятий М даже целые разделы теории, бывшие еще недавно предметом исследований.

Может показаться странным, что в основном тексте многие совсем простые понятия изложены со всеми подробностями, тогда как в упражнениях некоторые тонкие и сложные вещи (топологические пространства, трансфинитные числа, банаховы пространства) появляются мимоходом и предполагаются известными. Впрочем, весь материал расположен так, что если в упражнении мало подготовленный читатель сталкивается с понятием, не определенным до сих пор в самой книге, то такое упражнение он может опустить без ущерба для понимания дальнейшего. С другой стороны, читатель более сведующий с удовлетворением обнаружит именно в таких упражнениях связь теории меры с другими областями математики.

Значок □ в тексте после точки указывает на конец доказательства.

Ссылки на литературу собраны в конце книги; там же помещен список литературы. Последний не претендует на полноту. Цель его состоит в том, чтобы в отдельных случаях помочь читателю ознакомиться с понятиями и фактами, которые мы предполагаем известными; в других случаях, когда история вопроса недостаточно освещена, — указать оригинальные статьи, в которых впервые сформулированы соответствующие результаты; главная цель, однако, — ориентировать читателя, желающего глубже ознакомиться с предметом.

Упоминание в самом тексте теоремы и упражнения снабжены номерами, под которыми они фигурируют в соответствующем параграфе, и тут же указывается номер параграфа; если параграф не указан, то имеются в виду теорема и упражнение, содержащиеся в том же параграфе, что и сама ссылка.

## Предварительные сведения

Для понимания первых семи глав этой книги требуется только знакомство с элементарной алгеброй и началами математического анализа. В частности, читателю должны быть известны следующие понятия и факты.

1. Математическая индукция; переместительный и сочетательный законы алгебраических действий; линейные комбинации; соотношение эквивалентности и разбиение на классы.

2. Счетные множества; счетность соединения счетного числа счетных множеств.

3. Действительные числа; простейшие метрические и топологические свойства числовой прямой (например, множество рациональных чисел всюду плотно; всякое открытое множество представляет собой соединение конечного или счетного числа непересекающихся открытых интервалов); теорема Гейне—Бореля.

4. Общее понятие функции (в частности, понятие последовательности, т. е. функции, заданной на множестве целых положительных чисел); сложение и умножение функций; абсолютная величина функции.

5. Верхняя и нижняя грани числовых множеств и действительных функций; предел, верхний и нижний пределы последовательности действительных чисел или функций.

6. Символы $+\infty$ и $-\infty$; алгебраические соотношения между ними и произвольным действительным числом:

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=\pm\infty,$$

$$x(\pm\infty)=(\pm\infty)x=\begin{cases}\pm\infty & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x=0,\\ \mp\infty & \text{при } x<0,\end{cases}$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty,$$

$$(\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty,$$

$$\frac{x}{\pm\infty}=0,$$

$$-\infty<x<+\infty.$$

Во всех случаях, когда символы $+\infty$ и $-\infty$ присоединяются к действительным числам, например в качестве допустимых значений функций, это особо оговаривается. Числовую прямую, пополненную символами $+\infty$ и $-\infty$, условимся называть *расширенной числовой прямой.*

Если $x$ и $y$ — действительные числа, то

$$x \cup y = \max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|),$$
$$x \cap y = \min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Точно так же, если $f$ и $g$ — действительные функции, то функции $f \cup g$ и $f \cap g$ определяются равенствами

$$(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x), \quad (f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x).$$

Верхняя и нижняя грани последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ обозначаются соответственно

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{и} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} x_n.$$

В этих обозначениях

$$\limsup_n x_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} x_m$$

и

$$\liminf_n x_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} x_m.$$

В гл. VIII используются понятия метрического пространства, полного и сепарабельного метрического пространства, а также понятие равномерной непрерывности функции, заданной в метрическом пространстве. В гл. VIII встречаются и более мудреные понятия анализа, такие, как односторонняя непрерывность.

В последнем параграфе гл. IX нужна теорема Тихонова о компактности произведений пространства (для счетного числа множителей, каждый из которых есть отрезок).

Вообще, каждая глава опирается на результаты всех предыдущих. Исключение в этом отношении составляет гл. IX, которая для последних трех глав не нужна.

В гл. X, XI и XII систематически используются многие понятия и результаты, относящиеся к теоретико-множественной топологии и теории топологических групп. Мы приводим здесь перечень соответствующих определений и теорем. В качестве учебника топологии этот перечень служить не может; цель его: а) сообщить специалисту, какие именно формулировки основных понятий и результатов здесь понадобятся, б) точно указать начинающему, с чем следует ему ознакомиться, прежде чем приступить к чтению последних трех глав, в) напомнить некоторые не общеупотребительные термины и г) дать возможность читателю быстро получить нужную ему справку.

**Топологические пространства.** *Топологическим пространством* называется множество $X$ с выделенным в нем классом подмножеств, называемых *открытыми множествами* в $X$. Класс открытых множеств должен содержать пустое множество 0 и все $X$; кроме того, пересечение любого конечного числа и соединение произвольного (а не только конечного или счетного) класса открытых множеств должны быть открытыми множествами. Подмножество $E$ в $X$ называется *множеством типа* $G_\delta$, если существует последовательность открытых множеств $\{U_n\}$, такая, что $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Класс всех множеств типа $G_\delta$ замкнут относительно образования конечных соединений и счетных пересечений. Топологическое пространство $X$ называется *дискретным*[1]), если в нем все множества — открытые или, это эквивалентно, всякое его одноточечное множество принадлежит классу открытых множеств. Множество $E$ называется *замкнутым*, если $X - E$ открытое множество. Класс замкнутых множеств содержит 0 и $X$ и замкнут относительно образования конечных соединений и произвольных пересечений. *Открытым ядром* $E^0$ множества $E$ в $X$ называется наибольшее открытое множество, содержащееся в $E$. *Замыкание* $\overline{E}$ множества $E$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее $E$. Если $E$ — открытое множество, то $E^0 = E$; если $E$ замкнуто, то $\overline{E} = E$. Замыкание множества $E$ состоит из всех точек $x$, обладающих следующим свойством: всякое открытое множество, содержащее $x$, имеет непустое пересечение с $E$. Множество $E$ называется *плотным* в $X$, если $\overline{E} = X$. Подмножество $Y$ топологического пространства $X$ само оказывается топологическим пространством (*подпространством* пространства $X$), если в качестве открытых множеств в $Y$ взять пересечения $Y$ с открытыми множествами в $X$; возникающая таким образом в $Y$ топология называется *относительной топологией*. Окрестностью точки $x$ в $X$ (множества $E$ в $X$) называется любое открытое множество, содержащее точку $x$ (соотв. множество $E$). *Базисом* называется класс $\mathbf{B}$ открытых множеств, обладающий таким свойством: для любой точки $x$ из $X$ и любой ее окрестности $U$ существует множество $B$ из $\mathbf{B}$, такое, что $x \in B \subset U$. *Топология числовой прямой* определяется требованием, чтобы класс всех открытых интервалов представлял собой базис. *Подбазис* определяется как класс открытых множеств, всевозможные конечные пересечения которых образуют базис. Пространство $X$ называется *сепарабельным*, если оно обладает счетным базисом. Всякое подпространство сепарабельного пространства сепарабельно.

*Открытым покрытием* подмножества $E$ топологического пространства $X$ называется любой класс $\mathbf{K}$ открытых множеств, такой, что $E \subset \bigcup \mathbf{K}$. Если пространство $X$ сепарабельно, то, каково бы ни было открытое покрытие $\mathbf{K}$ множества $E$ в $X$, в $\mathbf{K}$ существует счетный подкласс $\{K_1, K_2, \ldots\}$ также являющийся открытым покрытием $E$. Множество $E$ в $X$ называется *компактным*, если всякое его открытое покрытие $\mathbf{K}$ содержит конечный подкласс $\{K_1, \ldots, K_n\}$ также являющийся открытым покрытием множества $E$. Пространство $X$ компактно тогда и только тогда, когда всякий класс замкнутых множеств, обладающих тем свойством, что любой его конечный подкласс имеет непустое пересечение, сам обладает непустым пресечением. Множество $E$ в пространстве $X$ называется *$\sigma$-компактным*, если существует последовательность компактных множеств $\{C_n\}$, такая, что $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Пространство $X$ называется *локально компактным*, если всякая его точка обладает окрестностью, замыкание которой компактно. Подмножество $E$ локально компактного пространства называется *ограниченным*,

[1]) В топологии термин «дискретное пространство» обычно употребляется в более широком смысле, именно, пространство называется дискретным, если в нем пересечение любого класса открытых множеств есть открытое множество. — *Прим. ред.*

если существует компактное множество $C$, такое, что $E \subset C$. Класс всевозможных ограниченных открытых множеств в локально компактном пространстве представляет собой базис. Замкнутое подмножество ограниченного множества компактно. Подмножество $E$ локально компактного пространства называется *σ-ограниченным*, если существует последовательность компактных множеств $\{C_n\}$, такая, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Для всякого локально компактного, но не компактного, пространства $X$ существует компактное пространство $X^*$, содержащее $X$ и в точности одну дополнительную точку $x^*$; говорят, что пространство $X$ *компактифицируется* добавлением точки $x^*$. Открытыми множествами в $X^*$ служат открытые множества в $X$, а также дополнения (в $X^*$) замкнутых компактных подмножеств $X$.

Пусть $\{X_i\colon i \in I\}$ — какой-нибудь класс топологических пространств; их *тихоновским произведением*[1]) называется множество $X = \times\{X_i\colon i \in I\}$ всевозможных функций $x$, заданных на $I$ таким образом, что $x(i) \in X_i$ при любом $i$ из $I$. Фиксировав какое-нибудь $i_0$ из $I$, обозначим через $E_{i_0}$ любое открытое множество в $X_{i_0}$, а для $i \neq i_0$ положим $E_i = X_i$; определим теперь в $X$ открытые множества, потребовав, чтобы класс множеств вида $\times\{E_i\colon i \in I\}$ служил подбазисом. Функция $\xi_i$, заданная на $X$ посредством равенства $\xi_i(x) = x(i)$, непрерывна. Тихоновское произведение любого класса компактных пространств компактно.

Топологическое пространство называется *хаусдорфовым пространством*, если любые две его точки имеют непересекающиеся окрестности. Любые два непересекающихся компактных подмножества хаусдорфова пространства также обладают непересекающимися окрестностями. Компактное множество в хаусдорфовом пространстве непременно замкнуто. Если локально компактное пространство $X$ хаусдорфово или сепарабельно, то компактификация его посредством присоединения точки $x^*$ приводит соответственно к хаусдорфову или сепарабельному пространству $X^*$. Непрерывная действительная функция на компактном множестве ограничена.

Если $X$ — топологическое пространство, то $\mathcal{F}(X)$ (или $\mathcal{F}$) будет обозначать класс действительных непрерывных функций $f$ на $X$, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ при любом $x$ из $X$. Хаусдорфово пространство называется *вполне регулярным*, если для любой его точки $y$ и для любого замкнутого множества $F$, не содержащего $y$, существует функция $f$ из $\mathcal{F}$, такая, что $f(y) = 0$ и $f(x) = 1$ для всех $x$ из $F$. Всякое локально компактное хаусдорфово пространство вполне регулярно.

*Метрическим пространством* называется множество $X$ с определенной на $X \times X$ действительной функцией $d$, называемой *расстоянием*, обладающей следующими свойствами: $d(x, y) \geqslant 0$, $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$, и $d(x, y) \leqslant d(z, x) + d(z, y)$. Если $E$ и $F$ — непустые подмножества метрического пространства, то $d(E, F) = \inf\{d(x, y)\colon x \in E, y \in F\}$ называется расстоянием между

[1]) Мы заменили употребленный здесь автором термин "декартово произведение" (Cartesian product) термином, общеупотребительным в советской математической литературе. В применении к множествам, не являющимися топологическими пространствами, в частности, для так называемых измеримых пространств, сходная конструкция используется в гл. VII; там в переводе термин «декартово произведение» сохранен. — *Прим. перев.*

множествами $E$ и $F$. Если $F=\{x_0\}$ — множество, состоящее из единственной точки $x_0$, то вместо $d(E, \{x_0\})$ мы пишем просто $d(E, x_0)$. *Сферой радиуса* $r_0$ *с центром* $x_0$ называется множество $E=\{x\colon d(x_0, x)<r_0\}$. *Топология метрического пространства* определяется требованием, чтобы класс всевозможных сфер служил базисом. Метрическое пространство вполне регулярно. Замкнутые множества в метрическом пространстве являются множествами типа $G_\delta$. Метрическое пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда оно содержит счетное всюду плотное подмножество. Каково бы ни было подмножество $E$ метрического пространства, функция $f$, определяемая равенством $f(x)=d(E, x)$, непрерывна и $\bar{E}=\{x\colon f(x)=0\}$. Числовая прямая и тихоновское произведение конечного числа числовых прямых представляют собой локально компактные сепарабельные хаусдорфовы пространства; это даже — метрические пространства, если расстояние $d(x, y)$ между точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ определить как $(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$. Замкнутый интервал действительной прямой является компактным множеством.

Отображение $T$ топологического пространства $X$ в топологическое пространство $Y$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества в $Y$ есть открытое множество в $X$, или, что то же самое, если прообраз любого замкнутого множества в $Y$ есть замкнутое множество в $X$. Преобразование $T$ называется *открытым*, если образ любого открытого множества в $X$ есть открытое множество в $Y$. Если $\mathbf{B}$ — подбазис в пространстве $Y$, то преобразование $T$ непрерывно тогда и только тогда, когда $T^{-1}(B)$ — открытое множество, каково бы ни было $B$ из $\mathbf{B}$. Если непрерывное преобразование $T$ отображает $X$ на $Y$ и при этом $X$ компактно, то $Y$ также компактно. *Гомеоморфизмом* называется взаимно-однозначное непрерывное отображение пространства $X$ на пространство $Y$, для которого обратное отображение также непрерывно.

Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных действительных функций непрерывна. Если $f$ и $g$ — непрерывные действительные функции, то функции $f\cup g$ и $f\cap g$ также непрерывны.

**Топологические группы**. Непустое множество $X$ называется *группой*, если в нем определена операция умножения, подчиняющаяся сочетательному закону и условию, что при любых двух элементах $a$ и $b$ из $X$ разрешимы уравнения $ax=b$ и $xa=b$. Во всякой группе существует единственный *единичный элемент* $e$, характеризуемый тем свойством, что $ex=xe=x$ для любого $x$ из $X$. Для всякого элемента $x$ в $X$ существует *обратный* элемент $x^{-1}$, характеризуемый тем свойством, что $xx^{-1}=x^{-1}x=e$. Непустое подмножество $Y$ в $X$ называется *подгруппой*, если $x^{-1}y\in Y$, коль скоро $x$ и $y$ принадлежат $Y$. Если $E$ — какое-нибудь подмножество группы $X$, то множество элементов вида $x^{-1}$, где $x\in E$, условимся обозначать $E^{-1}$; если $E$ и $F$ какие-нибудь подмножества группы $X$, то $EF$ означает множество элементов вида $xy$, где $x\in E$, $y\in F$. Непустое подмножество $Y$ группы $X$ будет подгруппой в том и только в том случае, если $Y^{-1}Y\subset Y$. Если $x\in X$, то вместо $\{x\}E$ и $E\{x\}$ принято писать просто $xE$ и $Ex$; об этих множествах говорят, что они получены из $E$ посредством *левого* и, соответственно, *правого переноса*. Если $Y$ — подгруппа группы $X$, то множества $xY$

и $Yx$ называются соответственно левыми и правами *смежными подмножествами*[1]) по подгруппе $Y$. Подгруппа $Y$ называется *инвариантной*, если $xY = Yx$ при любом $x$ из $X$; инвариантная подгруппа иначе называется *нормальным делителем* группы. Если в классе $\widehat{X}$ смежных подмножеств по нормальному делителю $Y$ определить умножение, положив, что произведение $Y_1$ и $Y_2$ из $\widehat{X}$ есть множество $Y_1Y_2$, то $\widehat{X}$ оказывается группой; ее называют *фактор-группой* группы $X$ по $Y$ и обозначают $X/Y$. Единичным элементом $\widehat{e}$ группы $\widehat{X}$ служит $Y$. Если $Y$ — нормальный делитель группы $X$, то отображение $\pi$ группы $X$ на фактор-группу $\widehat{X}$, ставящее в соответствие всякому элементу $x$ из $X$ то смежное подмножество, которому этот элемент принадлежит, называется *проекцией* группы $X$ на $\widehat{X}$. Отображение $T$ группы $X$ в группу $Y$ называется *гомоморфизмом*, если $T(xy) = T(x)T(y)$ для любых элементов $x$ и $y$ из $X$. Проекция группы $X$ на фактор-группу $\widehat{X}$ представляет собой гомоморфизм.

*Топологический группой* называется группа $X$, представляющая собой одновременно хаусдорфово пространство, если при этом отображение (пространства $X \times X$ на $X$), переводящее $(x, y)$ в $x^{-1}y$, непрерывно. Класс $\mathbf{N}$ открытых множеств в топологической группе, содержащих единичный элемент $e$, называется *базисом в точке* $e$, если: а) каков бы ни был элемент $x$, отличный от $e$, в $\mathbf{N}$ найдется множество $U$, не содержащее $x$; б) для любых двух множеств $U$ и $V$ из $\mathbf{N}$ существует $W$, принадлежащее $\mathbf{N}$, такое, что $W \subset U \cap V$; в) для любого $U$ из $\mathbf{N}$ существует $V$, принадлежащее $\mathbf{N}$, такое, что $V^{-1}V \subset U$; г) для любого $U$ из $\mathbf{N}$ и любого $x$ из $X$ существует $V$, принадлежащее $\mathbf{N}$, такое, что $V \subset xUx^{-1}$; д) для любого $U$ из $\mathbf{N}$ и любого $x$ из $X$ существует $V$, принадлежащее $\mathbf{N}$, такое, что $Vx \subset U$. Класс всех окрестностей точки $e$ образует базис в $e$; обратно, если в какой-нибудь группе $X$ выделен класс $\mathbf{N}$ подмножеств, удовлетворяющий только что перечисленным условиям, и в качестве базиса взять класс множеств, получающихся в результате всевозможных переносов множеств из $\mathbf{N}$, то группа $X$, таким образом топологизированная, станет топологической группой. Окрестность $V$ единичного элемента называется *симметричной*, если $V^{-1} = V$; класс всех симметричных окрестностей точки $e$ образует базис в $e$. Если $\mathbf{N}$ — базис в $e$, а $F$ — произвольное замкнутое множество в $X$, то $F = \bigcap\{UF\colon U \in \mathbf{N}\}$.

Замыкание подгруппы (нормального делителя) топологической подгруппы $X$ представляет собой подгруппу (соотв. нормальный делитель). Если $Y$ — замкнутый нормальный делитель топологической группы $X$, то, объявив в группе $\widehat{X} = X/Y$ открытыми те множества, прообразы которых при отображении $\pi$ открыты в $X$, мы превратим $\widehat{X}$ в топологическую группу. Сама проекция $\pi$ при этом окажется открытым непрерывным отображением.

Если $C$ — компактное, а $U$ — открытое множество в топологической группе и $C \subset U$, то существует такая окрестность $V$ единичного эле-

---

[1]) Здесь мы вынуждены избегать принятых в русской литературе терминов «смежный класс» или «класс смежности», так как класс на протяжении всей книги означает множество множеств. — *Прим. перев.*

мента $e$, что $VCV \subset U$. Если $C$ и $D$ — два непересекающихся компактных множества, то существует окрестность $U$ точки $e$, такая, что $UCU$ и $UDU$ не пересекаются. Если $C$ и $D$ — компактные множества, то множества $C^{-1}$ и $CD$ также компактны.

Подмножество $E$ топологической группы $X$ называется *ограниченным*, если для всякой окрестности $U$ единичного элемента $e$ существует конечное множество $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (при $E \neq 0$ его можно считать заключенным в $E$), обладающее тем свойством, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i U$. В том случае, когда $X$ локально компактно, это определение согласуется с общим определением ограниченного множества в локально компактном топологическом пространстве (см. выше). Если непрерывная действительная функция $f$, заданная на $X$, такова, что множество $N(f) = \{x: f(x) \neq 0\}$ ограничено, то $f$ *равномерно непрерывна* в том смысле, что для всякого положительного числа $\varepsilon$ существует такая окрестность $U$ элемента $e$, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, коль скоро $x_1 x_2^{-1} \in U$.

Топологическая группа называется *локально ограниченной*, если ее единичный элемент $e$ обладает ограниченной окрестностью. Для всякой локально ограниченной топологической группы $X$ существует локально компактная группа $X^*$, содержащая $X$ в качестве плотной подгруппы; эта группа единственна с точностью до изоморфизма и называется *пополнением* группы $X$. Любая замкнутая подгруппа и любой нормальный делитель локально компактной группы представляют собой локально компактные группы.

# ГЛАВА 1

# МНОЖЕСТВА И КЛАССЫ

## § 1. Теоретико-множественное включение

Всюду в этой книге слово *множество* будет означать подмножество некоторого заданного множества; последнее, за исключением некоторых особых случаев, будет обозначаться буквой $X$. Элементы множества $X$ будут называться *точками*, само $X$ — *пространством* (иногда мы будем говорить об $X$ как о *всем* пространстве или пространстве *целиком*). Глава эта носит вводный характер; цель ее — ввести основные понятия теории множеств и установить некоторые факты, которыми мы будем постоянно пользоваться в дальнейшем.

Если $x$ — точка пространства $X$, а $E$ — подмножество в $X$, то запись

$$x \in E$$

означает, что $x$ принадлежит $E$ (т. е. $x$ есть одна из точек множества $E$). Противоположное утверждение, состоящее в том, что $x$ не принадлежит $E$, записывается символом

$$x \notin E.$$

Так, например, для любой точки $x$ из $X$ имеем

$$x \in X,$$

тогда как соотношение

$$x \notin X$$

не имеет места ни для одной из этих точек.

Если $E$ и $F$ — подмножества $X$, то запись

$$E \subset F \quad \text{или} \quad F \supset E$$

означает, что $E$ представляет собой подмножество множества $F$, т. е. всякая точка множества $E$ принадлежит $F$. В частности,

$$E \subset E,$$

каково бы ни было множество $E$. Два множества $E$ и $F$ называются *равными* в том и только в том случае, когда они содержат одни и те же точки, т. е. когда

$$E \subset F \quad \text{и} \quad F \subset E.$$

Из этого, на первый взгляд безобидного, определения вытекает важный принцип, состоящий в том, что для доказательства равенства двух множеств необходимо обнаружить, в два этапа, что каждое из этих множеств является подмножеством другого.

Громадное упрощение формулировок и записи достигается присоединением к классу подмножеств $X$ множества, не содержащего никаких элементов; такое множество называется *пустым* и обозначается символом 0. Для любого множества $E$ имеем

$$0 \subset E \subset X;$$

вместе с тем, каков бы ни был $x$,

$$x \notin 0.$$

Помимо множеств точек нам часто придется рассматривать множества множеств. Например, если $X$ — числовая прямая, то совокупность всех интервалов есть множество некоторых подмножеств $X$. Условимся множество множеств всегда называть *классом*. На классы множеств, разумеется, распространяются все предыдущие определения. Так, например, если $E$ — множество, а $\mathbf{E}$ — некоторый класс множеств, то

$$E \in \mathbf{E}$$

означает, что $E$ принадлежит классу $\mathbf{E}$ (иначе, входит в $\mathbf{E}$, является элементом класса $\mathbf{E}$). Если $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ суть классы, то

$$\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$$

означает, что всякое множество, принадлежащее $\mathbf{E}$, входит в $\mathbf{F}$; будем при этом говорить, что $\mathbf{E}$ есть подкласс класса $\mathbf{F}$.

В тех весьма редких случаях, когда нам придется иметь дело с множеством классов, мы будем употреблять слово *система*. Так, например, если $X$ — эвклидова плоскость, а $\mathbf{E}_y$ — множество интервалов на горизонтальной оси, лежащих на расстоянии $y$ от начала координат, то всякое $\mathbf{E}_y$ образует класс, а множество всех таких классов — систему.

**Упражнения**

1. Отношение $\subset$ рефлективно и транзитивно; оно симметрично в том и только в том случае, когда $X$ — пустое множество

2. Пусть $\mathbf{X}$ — класс всех подмножеств пространства $X$; к $\mathbf{X}$ принадлежат, конечно, пустое множество 0 и все $X$. Пусть $x$ — точка пространства $X$, $E$ — подмножество из $X$, т. е. элемент класса $\mathbf{X}$, и $\mathbf{E}$ — какой-нибудь класс подмножеств из $X$, т. е. подкласс класса $\mathbf{X}$. Тогда, если вместо $u$ и $v$ подставлять произвольно и независимо символы $x$, $E$, $X$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{X}$, то в числе пятидесяти соотношений вида

$$u \in v \quad \text{и} \quad u \subset v$$

будут соотношения всегда верные, могущие быть верными или неверными, всегда неверные и, наконец, лишенные смысла. Например, $u \in v$ имеет смысл тогда, когда слева стоит $x$, а справа — $E$ или $X$, или же слева — $E$ или $X$, а справа — $\mathbf{E}$ или $\mathbf{X}$.

## § 2. Соединения и пересечения

Пусть $\mathbf{E}$ — какой-нибудь класс подмножеств пространства $X$; множество всех тех точек из $X$, каждая из которых принадлежит хотя бы одному из множеств класса $\mathbf{E}$, называется *соединением* множеств класса $\mathbf{E}$ и обозначается

$$\bigcup \mathbf{E} \quad \text{или} \quad \bigcup \{E \colon E \in \mathbf{E}\}.$$

Если класс $\mathbf{E}$ конечный или счетный, то $\bigcup \mathbf{E}$ будем иногда называть конечным или, соответственно, счетным соединением.

Примененным здесь способом записи мы постоянно будем пользоваться в дальнейшем. Если нам задано какое-нибудь множество, $x$ — его произвольный элемент и $\pi(x)$ — некоторое предложение, относящееся к $x$, то

$$\{x \colon \pi(x)\}$$

означает множество всех тех $x$, в применении к которым предложение $\pi(x)$ верно. Если $\{\pi(x)\}$ — последовательность предложений, относящихся к $x$, то

$$\{x \colon \pi_1(x), \pi_2(x), \ldots\}$$

— множество всех тех $x$, для которых верно $\pi_n(x)$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ В общем случае, когда всякому элементу $\gamma$ какого-либо «множества индексов» $\Gamma$ поставлено в соответствие некоторое предложение $\pi_\gamma(x)$, относящееся к $x$, то множество всех тех $x$, для которых $\pi_\gamma(x)$ верно при всех $\gamma$ из $\Gamma$, обозначается символом

$$\{x \colon \pi_\gamma(x), \gamma \in \Gamma\}.$$

Так, например,

$$\{x \colon x \in E\} = E \quad \text{и} \quad \{E \colon E \in \mathbf{E}\} = \mathbf{E}.$$

Для пояснения приведем еще такие примеры:

$\{t \colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ — замкнутый единичный интервал;
$\{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 1\}$ — единичная окружность в плоскости;
$\{n^2 \colon n = 1, 2, \ldots\}$ — множество квадратов всех целых положительных чисел.

В соответствии с этим способом записи верхняя и нижняя грани числового множества $E$ будут обозначаться

$$\sup\{x \colon x \in E\} \quad \text{и} \quad \inf\{x \colon x \in E\}.$$

Вообще, фигурные скобки $\{\ldots\}$ будут нами употребляться в качестве символа, служащего для образования множеств. Например, если $x$ и $y$ — какие-нибудь две точки, то $\{x, y\}$ будет означать множество, элементами которого являются $x$ и $y$. Необходимо строго различать точку $x$ и множество $\{x\}$, состоящее из единственного элемента $x$, и точно так же множество $E$ и класс $\{E\}$, образованный единственным множеством $E$. В самом деле, пустое множество $0$ не содержит никаких элементов, в то время как класс $\{0\}$ содержит одно множество, именно самое пустое множество.

Для соединений некоторых специальных классов множеств применяются особые обозначения. Так, например, если

$$\mathbf{E} = \{E_1, E_2\},$$

то вместо

$$\bigcup \mathbf{E} = \bigcup \{E_i\colon\ i = 1, 2\}$$

пишут

$$E_1 \cup E_2;$$

вообще, при

$$\mathbf{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$$

соединение

$$\bigcup \mathbf{E} = \bigcup \{E_i\colon\ i = 1, \ldots, n\}$$

обозначают

$$E_1 \cup \ldots \cup E_n \quad \text{или} \quad \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Подобным же образом, если имеется последовательность множеств $\{E_n\}$, то соединение множеств, ее образующих, обозначается

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \quad \text{или} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

В общем случае, если всякому элементу $\gamma$ некоторого множества индексов $\Gamma$ поставлено в соответствие множество $E_\gamma$, то соединение

$$\bigcup \{E_\gamma;\, \gamma \in \Gamma\}$$

класса всех множеств $E_\gamma$ обозначается

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma \quad \text{или} \quad \bigcup_{\gamma} E_\gamma.$$

Если $\Gamma$ — множество индексов — пусто, то условимся считать, что

$$\bigcup_{\gamma} E_\gamma = 0.$$

Участие пустого множества и всего пространства $X$ в образовании соединений описывается тождествами

$$E \cup 0 = E \quad \text{и} \quad E \cup X = X.$$

Вообще, соотношение

$$E \subset F$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$E \cup F = F.$$

Если $\mathbf{E}$ — какой-нибудь класс подмножеств пространства $X$, то совокупность всех точек $x$, каждая из которых принадлежит всем множествам из $\mathbf{E}$, называется *пересечением* множеств класса $\mathbf{E}$ и обозначается

$$\bigcap \mathbf{E} \quad \text{или} \quad \bigcap \{E\colon\, E \in \mathbf{E}\}.$$

Если класс $\mathbf{E}$ конечный или счетный, то $\bigcap \mathbf{E}$ будем иногда называть конечным или, соответственно, счетным пересечением.

Для пересечения двух, конечного или счетного числа множеств, а также класса множеств, снабженных индексами, употребляются обозначения, сходные с теми, которые мы указали для соединений, но со знаком $\cap$ вместо $\cup$. Если множество индексов $\Gamma$ пусто, то мы положим, может быть несколько неожиданно для читателя,

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = X.$$

В пользу такого соглашения можно высказать несколько соображений эвристического характера. Одно из них состоит в следующем: если $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ — два каких-нибудь непустых множества индексов, причем $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, то очевидно,

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_1} E_\gamma \supset \bigcap_{\gamma \in \Gamma_2} E_\gamma,$$

и поэтому самому узкому из возможных $\Gamma$ должно отвечать самое широкое пересечение. Можно также исходить из следующего равенства:

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} E_\gamma = \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma_1} E_\gamma\right) \cap \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma_2} E_\gamma\right),$$

справедливо для не пустых множеств $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$. Если стремиться к тому, чтобы распространить это соотношение на произвольные $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, то придется допустить, что

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \cup 0} E_\gamma = \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma\right) \cap \left(\bigcap_{\gamma \in 0} E_\gamma\right);$$

положив $E_\gamma = X$ при любом $\gamma$ из $\Gamma$, мы придем к равенству

$$\bigcap_{\gamma \in 0} E_\gamma = X.$$

В образовании пресечений пустое множество 0 и все пространство участвуют согласно следующим правилам:

$$E \cap 0 = 0 \quad \text{и} \quad E \cap X = E.$$

Вообще,

$$E \subset F$$

тогда и только тогда, когда

$$E \cap F = E.$$

Два множества $E$ и $F$ называются *непересекающимися*, если у них нет общих точек, т. е. если

$$E \cap F = 0;$$

иногда говорят просто, что множества $E$ и $F$ *не пересекаются*. *Классом без пересечений* называется такой класс $\mathbf{E}$ множеств $E$, никакие два из которых не пересекаются.

В заключение этого параграфа мы введем полезное понятие характеристической функции. Пусть $E$ — какое-нибудь множество в $X$; функция $\chi_E$, заданная на $X$ равенствами

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in E, \\ 0 & \text{при } x \notin E, \end{cases}$$

называется *характеристической функцией* множества $\mathbf{E}$. Соответствие между множествами и их характеристическими функциями взаимно-однозначно, и все свойства множеств и операций над множествами могут быть выражены в терминах характеристических функций. В качестве еще одного примера обозначения множества с помощью фигурных скобок отметим равенство

$$E = \{x\colon \chi_E(x) = 1\}.$$

### Упражнения

1. Образование соединений множеств переместительно и сочетательно, т. е.

$$E \cup F = F \cup E \quad \text{и} \quad E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G;$$

образование пересечений обладает такими же свойствами.

2. Операции образования соединений и пресечений распределительны одна относительно другой, т. е.

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G) \quad \text{и} \quad E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G).$$

Распределительные законы действуют и в более общей форме:

$$F \cap \left(\bigcup \{E\colon E \in \mathbf{E}\}\right) = \bigcup \{E \cap F\colon E \in \mathbf{E}\},$$

$$F \cup \left(\bigcap \{E\colon E \in \mathbf{E}\}\right) = \bigcap \{E \cup F\colon F \in \mathbf{E}\}.$$

3. Образует ли класс всех подмножеств $X$ группу относительно операции $\cup$ или $\cap$?

4. Имеем тождества $\chi_0(x) \equiv 0$, $\chi_X(x) \equiv 1$. Неравенство

$$\chi_E(x) \leqslant \chi_F(x)$$

имеет место для всех $x$ из $X$ тогда и только тогда, когда $E \subset F$. Если $E \cap F = A$ и $E \cup \cup F = B$, то

$$\chi_A = \chi_E \chi_F = \chi_E \cap \chi_F \quad \text{и} \quad \chi_B = \chi_E + \chi_F - \chi_A = \chi_E \cup \chi_F.$$

5. Распространяются ли приведенные в упр. 4 выражения характеристических функций соединения и пересечения на любые конечные, счетные и произвольные соединения и пересечения?

## § 3. Пределы, дополнения и разности

Если $\{E_n\}$ — последовательность множеств, то множество $E^*$ всех тех точек $x$, каждая из которых принадлежит бесконечно многим $E_n$, называется *верхним пределом* последовательности и обозначается

$$E^* = \limsup_n E_n.$$

Множество $E_*$ всех точек $x$, каждая из которых принадлежит всем $E_n$ за исключением конечного числа, называется *нижним пределом* последовательности и обозначается

$$E_* = \liminf_n E_n.$$

Если $\{E_n\}$ такова, что ее верхний предел равен нижнему, то $E^*(=E_*)$ называют *пределом* этой последовательности и обозначают

$$\lim_n E_n.$$

Если при $n=1, 2, \ldots$

$$E_n \subset E_{n+1},$$

то последовательность называется *возрастающей*; если при $n=1, 2, \ldots$

$$E_n \supset E_{n+1},$$

то последовательность называется *убывающей*. Возрастающие и убывающие последовательности носят общее название *монотонных* последовательностей. Легко убедиться в том, что монотонная последовательность $\{E_n\}$ имеет предел, равный

$$\bigcup_n E_n \quad \text{или} \quad \bigcap_n E_n,$$

в зависимости от того, возрастающая эта последовательность или убывающая.

*Дополнением* множества $E$ в $X$ называется множество всех тех точек $x$, которые не принадлежат $E$. Дополнение множества $E$ обозначается $E'$. Операция взятия дополнения обладает следующими алгебраическими свойствами:

$$E \cap E' = 0, \quad E \cup E' = X, \quad (E')' = E, \quad 0' = X, \quad X' = 0$$

и

$$E' \supset F', \quad \text{если} \quad E \subset F.$$

Образование дополнений позволяет установить интересную и очень важную связь между соединениями и пересечениями, выражаемую следующими тождествами:

$$\left(\bigcup \{E\colon E \in \mathbf{E}\}\right)' = \bigcap \{E'\colon E \in \mathbf{E}\},$$

$$\left(\bigcap \{E\colon E \in \mathbf{E}\}\right)' = \bigcup \{E'\colon E \in \mathbf{E}\}.$$

Словесно их можно выразить, сказав, что дополнение соединения множеств какого-либо класса равно пересечению их дополнений, а дополнение их пересечения есть соединение их дополнений. Отсюда и из только что указанных элементарных свойств дополнений вытекает важный *принцип двойственности*:

*Если верно некоторое соотношение между множествами, имеющее вид равенства или включения и выраженное в терминах соединений, пересечений и дополнений, то верно и соотношение такого же рода, которое получается из исходного, если в нем* $\cup, \cap, \subset, \supset$ *заменить соответственно символами* $\cap, \cup, \supset, \subset$, *равенства сохранить, а каждое множество заменить его дополнением.*

Если $E$ и $F$ — подмножества $X$, то

$$E - F$$

означает множество всех тех точек из $E$, которые не принадлежат $F$; такое множество называется *разностью* множеств $E$ и $F$. Так как

$$X - F = F'$$

и, вообще,

$$E - F = E \cap F',$$

то разность $E - F$ называют еще *относительным дополнением* множества $F$ в множестве $E$. При замене множеств их относительными дополнениями, так же как и при взятии обычных дополнений, символы $\cup$ и $\subset$ следует заменить соответственно на $\cap$ и $\supset$, и обратно, например,

$$E - (F \cup G) = (E - F) \cap (E - G).$$

Разность $E - F$ называется *собственной* в том случае, когда $E \supset F$.

Введем, наконец, еще одно теоретико-множественное понятие, очень важное во многих случаях, — понятие *симметрической разности* двух множеств $E$ и $F$. Обозначается она символом

$$E \Delta F$$

и определяется равенством

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E) = (E \cap F') \cup (E' \cap F).$$

Обращение с пределами, дополнениями и разностями множеств требует известной практики. Мы рекомендуем поэтому читателю провести доказательства наиболее важных свойств этих операций, перечисленных в приведенных здесь упражнениях.

### Упражнения

1. Еще одним доводом в пользу равенства

$$\bigcap_{\gamma \in 0} E_\gamma = X,$$

принятого нами в § 3, служит стремление распространить на пустое множество Γ соотношение

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = \Big(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} E'_\gamma\Big)',$$

справедливое при любом непустом множестве индексов Γ.

2. Если $E_* = \liminf\limits_n E$ и $E^* = \limsup\limits_n E_n$, то

$$E_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m = E^*.$$

3. Верхний и нижний пределы последовательности множеств и предел такой последовательности (если он существует) не изменяются, если произвольным образом изменить конечное число членов последовательности.

4. Если $E_n = A$ при четных $n$ и $E_n = B$ при нечетных $n$, то

$$\liminf_n E_n = A \cap B \quad \text{и} \quad \limsup_n E_n = A \cup B.$$

5. Если $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств, то

$$\lim_n E_n = 0.$$

6. Если $E_* = \liminf\limits_n E_n$ и $E^* = \limsup\limits_n E_n$, то

$$(E_*)' = \limsup_n E_n' \quad \text{и} \quad (E^*)' = \liminf_n E_n';$$

справедливы и более общие соотношения:

$$F - E_* = \limsup_n (F - E_n) \quad \text{и} \quad F - E^* = \liminf_n (F - E_n).$$

7.

$$E - F = E - (E \cap F) = (E \cup F) - F,$$
$$E \cap (F - G) = (E \cap F) - (E \cap G),$$
$$(E \cup F) - G = (E - G) \cup (F - G).$$

8.

$$(E - G) \cap (F - G) = (E \cap F) - G,$$
$$(E - F) - G = E - (F \cup G),$$
$$E - (F - G) = (E - F) \cup (E \cap G),$$
$$(E - F) \cap (G - H) = (E \cap G)(F \cup H).$$

9.

$$E \Delta F = F \Delta E, \quad E \Delta (F \Delta G) = (E \Delta F) \Delta G,$$
$$E \cap (F \Delta G) = (E \cap F) \Delta (E \cap G),$$
$$E \Delta 0 = E, \quad E \Delta X = E',$$
$$E \Delta E = 0, \quad E \Delta E' = X,$$
$$E \Delta F = (E \cup F) - (E \cap F).$$

10. Образует ли класс всех подмножеств пространства $X$ группу относительно операции $\Delta$?

11. Если $E_* = \liminf\limits_n E_n$ и $E^* = \limsup\limits_n E_n$, то

$$\chi_{E_*}(x) = \liminf_n \chi_{E_n}(x), \quad \chi_{E^*}(x) = \limsup_n \chi_{E_n}(x),$$

где выражения в правых частях равенств при всяком $x$ представляют собой верхний и нижний пределы числовой последовательности.

12.

$$\chi_{E'} = 1 - \chi_E, \quad \chi_{E - F} = \chi_E (1 - \chi_F),$$
$$\chi_{E \Delta F} = |\chi_E - \chi_F| \equiv \chi_E + \chi_F (mod 2).$$

13. (E. Bishop) Пусть $\{E_n\}$ — последовательность множеств; положим

$$D_1 = E_1, \quad D_2 = D_1 \Delta E_2, \quad D_3 = D_2 \Delta E_3, \ldots, D_{n+1} = D_n \Delta E_{n+1}, \ldots$$

Последовательность $\{D_n\}$ имеет предел тогда и только тогда, когда $\lim_n E_n = 0$. Если (см. упр. 12) временно назвать операцию $\Delta$ «сложением», то этот результат словесно можно высказать так: ряд множеств сходится тогда и только тогда, когда его общий член стремится к нулю.

## § 4. Кольца и алгебры

Непустой класс $\mathbf{R}$ множеств называется *кольцом* (или *булевским кольцом*) в том случае, когда он обладает следующим свойством: если

$$E \in \mathbf{R} \quad \text{и} \quad F \in \mathbf{R},$$

то

$$E \cup F \in \mathbf{R} \quad \text{и} \quad E - F \in \mathbf{R}.$$

Другими словами, кольцо — это непустой класс множеств, замкнутый относительно образования соединений (двух множеств) и вычитания.

Всякое кольцо $\mathbf{R}$ содержит пустое множество, так как если

$$E \in \mathbf{R},$$

то

$$0 = E - E \in \mathbf{R}.$$

Так как

$$E - F = (E \cup F) - F,$$

то любой непустой класс множеств, замкнутый относительно образования соединений и собственных разностей, представляет собой кольцо. Так как

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E)$$

и

$$E \cap F = (E \cup F) - (E \Delta F),$$

то кольцо должно быть замкнуто относительно образования симметрических разностей и пересечений. Применение математической индукции и сочетательного закона для операций $\cup$ и $\cap$ показывает, что если $\mathbf{R}$ является кольцом и

$$E_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathbf{R} \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{n} E_i \in \mathbf{R}.$$

Полезными примерами колец могут служить класс $\{0\}$, содержащий лишь пустое множество, и класс всевозможных подмножеств $X$. Это — своего рода «крайние случаи». Приведем несколько более поучительный пример. Пусть

$$X = \{x\colon\ -\infty < x < +\infty\}$$

— числовая прямая; класс $\mathbf{R}$ всевозможных конечных соединений ограниченных интервалов, замкнутых слева и открытых справа, т. е. множеств вида

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x\colon\ -\infty < a_i \leqslant x < b_i < +\infty\},$$

представляет собой кольцо.

Соединения и пересечения выступают в определении кольца неравноправным образом. В то время как кольцо всегда замкнуто относительно взятия пересечений, класс множеств, замкнутый относительно образования пересечений и разностей, может не быть кольцом. Однако всякий не пустой класс $\mathbf{E}$, замкнутый относительно образования пересечений, собственных разностей и соединения непересекающихся множеств из $\mathbf{E}$, представляет собой кольцо; это вытекает из равенства

$$E \cup F = [E - (E \cap F)] \cup [F - (E \cap F)] \cup (E \cap F).$$

Нетрудно дать определение кольца в форме, более симметричной относительно операций $\cup$ и $\cap$: назовем кольцо непустой класс множеств, замкнутый относительно образования пересечения (двух множеств) и симметрических разностей. В силу равенств

$$E \cup F = (E \Delta F) \Delta (E \cap F), \quad E - F = E \Delta (E \cap F)$$

мы получаем кольцо в смысле нашего первоначального определения, но в такой формулировке «пересечения» можно заменить «соединениями»: непустой класс множеств, замкнутый относительно образования соединений (двух множеств) и симметрических разностей, представляет собой кольцо.

Непустой класс $\mathbf{R}$ называется *алгеброй* (или *булевской алгеброй*) тогда, когда он обладает следующими свойствами: а) если $E \in \mathbf{R}$ и $F \in \mathbf{R}$, то $E \cup F \in \mathbf{R}$; б) если $E \in \mathbf{R}$, то $E' \in \mathbf{R}$. Так как

$$E - F = E \cap F' = (E' \cup F)',$$

то любая алгебра является одновременно кольцом. Соотношение между общим понятием кольца и более узким понятием алгебры очень просто: алгебра есть кольцо, содержащее $X$. В самом деле, всякое такое кольцо представляет собой алгебру, потому что

$$E' = X - E;$$

обратно, если $\mathbf{R}$ — алгебра, то

$$X = E \cup E' \in \mathbf{R},$$

где $E$ — произвольное множество, входящее в $\mathbf{R}$ (класс $\mathbf{R}$, как мы помним, не пуст).

### Упражнения

1. Следующие классы множеств служат примерами колец или алгебр:

а) $X$ — $n$-мерное эвклидово пространство, класс $\mathbf{E}$ образован всевозможными конечными соединениями «полуоткрытых интервалов» вида

$$\{(x_1, \ldots, x_n): -\infty < a_i \leqslant x_i < b_i < +\infty, i = 1, \ldots, n\}.$$

б) $X$ — какое-нибудь несчетное множество; $\mathbf{E}$ — класс всех конечных или счетных подмножеств множества $X$.

в) $X$ — какое-нибудь несчетное множество; $\mathbf{E}$ — класс множеств, которые либо сами конечны или счетны, либо обладают конечным или счетным дополнением.

2. В каких топологических пространствах класс $\mathbf{E}$ всех его открытых множеств образует кольцо?

3. Пересечение любой системы колец (алгебр) представляет собой кольцо (соотв. алгебру).

4. Пусть $\mathbf{R}$ — кольцо множеств. Если обозначить

$$E \odot F = E \cap F, \quad E \oplus F = E \Delta F,$$

то относительно таких операций «сложения» ($\oplus$) и «умножения» ($\odot$) множество $\mathbf{R}$ оказывается «кольцом» в алгебраическом смысле этого слова. Алгебраические кольца, такие как это, в которых все элементы идемпотентны (т. е. $E \odot E = E$ для любого $E$ из $\mathbf{R}$), также называются булевскими кольцами. Именно тесная связь между булевскими кольцами множеств и общими булевскими кольцами оправдывает употребление «кольцевой» терминологии в применении к классам множеств.

5. Если $\mathbf{R}$ — какое-нибудь кольцо множеств и $\mathbf{A}$ — класс тех множеств, которые либо сами принадлежат $\mathbf{R}$, либо обладают принадлежащими $\mathbf{R}$ дополнениями, то $\mathbf{A}$ представляет собой алгебру.

6. *Полукольцом* называется непустой класс $\mathbf{P}$ множеств, такой, что

а) если $E \in \mathbf{P}$ и $F \in \mathbf{P}$, то $E \cap F \in \mathbf{P}$;

б) если $E \in \mathbf{P}$, $F \in \mathbf{P}$ и $E \subset F$, то существует конечный класс: $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ множеств, принадлежащих $\mathbf{P}$, со следующим свойством: $E = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = F$, причем $D_i = C_i - C_{i-1} \in \mathbf{P}$, $i = 1, \ldots, n$.

Всякое полукольцо содержит пустое множество. Если $X$ — произвольное множество, то класс $\mathbf{P}$, состоящий из пустого множества и всех одноточечных подмножеств $X$ (т. е. множеств вида $\{x\}$, где $x \in X$), есть полукольцо. Если $X$ — действительная прямая, то класс всех ограниченных интервалов, замкнутых слева и открытых справа, является полукольцом.

## § 5. Порожденные кольца и $\sigma$-кольца

Теорема 1. *Если $\mathbf{E}$ — произвольный класс множеств, то существует единственное кольцо $\mathbf{R}_0$, такое, что $\mathbf{E} \subset \mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_0 \subset \mathbf{R}$, каково бы ни было кольцо $\mathbf{R}$, содержащее $\mathbf{E}$.*

$\mathbf{R}_0$ — наименьшее кольцо, содержащее $\mathbf{E}$, — называется кольцом, *порожденным* классом $\mathbf{E}$, и обозначается $\mathbf{R}(\mathbf{E})$.

Доказательство. Так как класс всех подмножеств $X$ представляет собой кольцо, то всегда существует по меньшей мере одно кольцо, содержащее $\mathbf{E}$. Далее, пересечение любой системы колец есть кольцо (см. упр. 3 § 4), поэтому пересечение всех колец, содержащих $\mathbf{E}$, также является кольцом, содержащим $\mathbf{E}$. Оно и будет, как легко видеть, искомым кольцом $\mathbf{R}_0$. □

Теорема 2. *Если $\mathbf{E}$ — произвольный класс множеств, то всякое множество, принадлежащее $\mathbf{R}(\mathbf{E})$, может быть покрыто соединением конечного числа множеств из $\mathbf{E}$.*

Доказательство. Класс тех множеств, которые могут быть покрыты конечными соединениями множеств из $\mathbf{E}$, представляет собой кольцо; это кольцо содержит $\mathbf{E}$, следовательно, оно содержит и $\mathbf{R}(\mathbf{E})$. □

Теорема 3. *Если $\mathbf{E}$ — счетный класс множеств, то $\mathbf{R}(\mathbf{E})$ также счетно.*

Доказательство. Для любого класса $\mathbf{C}$ множеств условимся обозначать $\mathbf{C}^*$ класс всевозможных конечных соединений разностей множеств из $\mathbf{C}$. Ясно, что если $\mathbf{C}$ счетно, то счетно и $\mathbf{C}^*$, и если

$$0 \in \mathbf{C} \quad \text{то} \quad \mathbf{C} \subset \mathbf{C}^*.$$

Не нарушая общности, мы можем допустить, что

$$0 \in \mathbf{E}.$$

Положим теперь

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}_n = \mathbf{E}^*_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, что

$$\mathbf{E} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n \subset \mathbf{R}(\mathbf{E}),$$

и класс

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n$$

— счетный. Доказательство теоремы будет завершено, когда мы покажем, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n$ представляет собой кольцо.

Так как

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}_1 \subset \mathbf{E}_2 \subset \ldots,$$

то, каковы бы ни были множества $A$ и $B$ из $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n$, существует такой номер $n$, что $A$ и $B$ принадлежит классу $\mathbf{E}_n$. При этом

$$A - B \in \mathbf{E}_{n+1},$$

и так как

$$0 \in \mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}_n,$$

то

$$A \cup B = (A - 0) \cup (B - 0) \in \mathbf{E}_{n+1}.$$

Мы доказали, что вместе с любыми двумя множествами $A$ и $B$ класс $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n$ содержит их соединение и разность, т. е. $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n$ есть кольцо. □

Непустой класс $\mathbf{S}$ множеств называется *σ-кольцом*, если он обладает следующими свойствами:

а) если $E \in \mathbf{S}$ и $F \in \mathbf{S}$, то $E - F \in \mathbf{S}$;

б) если $E_i \in \mathbf{S}$, $\quad i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{S}$.

Таким образом, $\sigma$-кольцо представляет собой кольцо, замкнутое относительно образования счетных соединений. Если $\mathbf{S}$ есть $\sigma$-кольцо и

$$E_i \in \mathbf{S}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

то, так как

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = E - \bigcup_{i=1}^{\infty} (E - E_i),$$

мы видим, что

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{S},$$

т. е. $\sigma$-кольцо замкнуто относительно образования счетных пресечений. Если

$$E_i \in \mathbf{S}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $\mathbf{S}$ есть $\sigma$-кольцо, то (см. упр. 2 § 3) $\mathbf{S}$ содержит также $\liminf_i E_i$ и $\limsup_i E_i$.

Теорема 1 и ее доказательство останутся справедливыми, если «кольцо» заменить всюду «$\sigma$-кольцом». Поэтому можно ввести понятие $\sigma$-кольца $\mathbf{S}(\mathbf{E})$, *порожденного* каким-либо классом $\mathbf{E}$, как наименьшего $\sigma$-кольца, содержащего $\mathbf{E}$.

Теорема 4. *Если $\mathbf{E}$ — произвольный класс множеств, а $E$ — произвольное множество, принадлежащее $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E})$, то $\mathbf{E}$ содержит счетный подкласс $\mathbf{D}$, такой, что $E \in \mathbf{S}(\mathbf{D})$.*

Доказательство. Соединение всех $\sigma$-подколец $\sigma$-кольца $\mathbf{S}$, порожденных всевозможными счетными подклассами класса $\mathbf{E}$, представляет собой $\sigma$-кольцо, содержащее $\mathbf{E}$. Следовательно, оно совпадает с $\mathbf{S}$. □

Если $\mathbf{E}$ — какой-нибудь класс подмножеств из $X$ и $A$ — фиксированное подмножество в $X$, то

$$\mathbf{E} \cap A$$

будет означать класс множеств вида $E \cap A$, где $E \in \mathbf{E}$.

Теорема 5. *Если $\mathbf{E}$ — произвольный класс множеств и $A$ — любое фиксированное подмножество из $X$, то*

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) \cap A = \mathbf{S}(\mathbf{E} \cap A).$$

Доказательство. Класс множеств вида

$$B \cup (C - A),$$

где

$$B \in \mathbf{S}(\mathbf{E} \cap A) \quad \text{и} \quad C \in \mathbf{S}(\mathbf{E}),$$

обозначим $\mathbf{C}$. Легко видеть, что $\mathbf{C}$ есть $\sigma$-кольцо. Если $E \in \mathbf{E}$, то из соотношений

$$E = (E \cap A) \cup (E - A)$$

и

$$E \cap A \in \mathbf{E} \cap A \subset \mathbf{S}(\mathbf{E} \cap A)$$

вытекает, что $E \in \mathbf{C}$; таким образом, $\mathbf{E} \subset \mathbf{C}$. Следовательно,

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) \subset \mathbf{C},$$

откуда

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) \cap A \subset \mathbf{C} \cap A.$$

Очевидно, однако, что

$$\mathbf{C} \cap A = \mathbf{S}(\mathbf{E} \cap A);$$

поэтому

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) \cap A \subset \mathbf{S}(\mathbf{E} \cap A).$$

Обратное включение

$$\mathbf{S}(\mathbf{E} \cap A) \subset \mathbf{S}(\mathbf{E}) \cap A$$

следует из того, что $\mathbf{S}(\mathbf{E}) \cap A$ есть $\sigma$-кольцо, и из соотношения

$$\mathbf{E} \cap A \subset \mathbf{S}(\mathbf{E}) \cap A. \qquad \square$$

**Упражнения**

1. В следующих примерах указать кольцо, порожденное классом $\mathbf{E}$.

а) В $X$ взято фиксированное подмножество $E$, и $\mathbf{E}=\{E\}$ есть класс, состоящий из этого единственного множества.

б) В $X$ фиксировано подмножество $E$, и $\mathbf{E}$ есть класс всех подмножеств $X$, содержащих $E$, т. е. $\mathbf{E}=\{F\colon E\subset F\}$.

в) $\mathbf{E}$ есть класс всех подмножеств, содержащих ровно по две различные точки.

2. Класс $\mathbf{L}$ множеств называется *структурой* (lattice), если $0\in\mathbf{L}$ и $E\cup F\in\mathbf{L}$, $E\cap F\in\mathbf{L}$, коль скоро $E\in\mathbf{L}$, $F\in\mathbf{L}$. Пусть $\mathbf{L}$ — структура, а $\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{L})$ — класс всех подмножеств вида $F-E$, где $E\in\mathbf{L}$, $F\in\mathbf{L}$ и $E\subset F$. Тогда $\mathbf{P}$ представляет собой полукольцо. (Указание. Если $D_i=F_i-E_i$, $i=1,2,$ — представления двух множеств из $\mathbf{P}$ в виде собственных разностей множеств из $\mathbf{L}$ — и если $D_1\supset D_2$, то $F_2-E_2\subset C\subset F_1-E_1$, где $\mathbf{C}=(F_1\cap F_2)-(E_1\cap F_2)$ или $\mathbf{C}=F_1-[E_1\cup(F_1\cap E_2)]$.) Будет ли $\mathbf{P}$ кольцом?

3. Пусть $\mathbf{P}$ — какое-нибудь полукольцо, а $\mathbf{R}$ — класс всех множеств вида $\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$, где $\{E_1,\dots,E_n\}$ — произвольный конечный класс непересекающихся множеств из $\mathbf{P}$:

а) $\mathbf{R}$ замкнуто относительно образования, во-первых, конечных пересечений и, во-вторых, соединений непересекающихся множеств.

б) Если $E\in\mathbf{P}$, $F\in\mathbf{P}$ и $E\subset F$, то $F-E\in\mathbf{R}$.

в) Если $E\in\mathbf{P}$, $F\in\mathbf{R}$ и $E\subset F$, то $F-E\in\mathbf{R}$.

г) Если $E\in\mathbf{R}$, $F\in\mathbf{R}$ и $E\subset F$, то $F-E\in\mathbf{R}$.

д) $\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{P})$. Отсюда, в частности, следует, что полукольцо, замкнутое относительно образования соединений, есть кольцо.

4. Прямо или посредством упр. 5 § 4 доказать аналог теоремы 1 для алгебр.

5. Если $\mathbf{P}$ — полукольцо и $\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{P})$, то $\mathbf{S}(\mathbf{R})=\mathbf{S}(\mathbf{P})$.

6. Является ли $\sigma$-кольцом непустой класс множеств, замкнутый относительно образования симметрических разностей и счетных пересечений?

7. Если $\mathbf{E}$ — непустой класс множеств, то всякое множество из $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ может быть покрыто соединением счетного числа множеств из $\mathbf{E}$ (см. теорему 2).

8. Если $\mathbf{E}$ — бесконечный класс множеств, то $\mathbf{E}$ и $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ имеют одинаковую мощность (см. теорему 3).

9. Аналог теоремы 3 для $\sigma$-колец можно получить следующим путем (см. также упр. 8). Для любого класса $\mathbf{E}$, содержащего 0, полагаем $\mathbf{E}_0=\mathbf{E}$, и для всякого порядкового числа $\alpha>0$

$$\mathbf{E}_\alpha=\left(\bigcup\{\mathbf{E}_\beta\colon \beta<\alpha\}\right)^*,$$

где класс $\mathbf{C}^*$ образован из всевозможных счетных соединений разностей множеств из $\mathbf{C}$:

а) $\mathbf{E}\subset\mathbf{E}_\beta\subset\mathbf{E}_\alpha\subset\mathbf{S}(\mathbf{E})$ при $0<\beta<\alpha$;

б) $\mathbf{S}(\mathbf{E})=\bigcup\{\mathbf{E}_\alpha\colon \alpha<\Omega\}$, где $\Omega$ — первое несчетное порядковое число;

в) если мощность $\mathbf{E}$ не выше мощности континиуума, то мощность $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ не выше мощности континиуума.

10. Как формулируются для колец теоремы, аналогичные теоремам 4 и 5?

## § 6. Монотонные классы

Мы не располагаем конструктивным приемом, позволяющим для заданного класса множеств строить порожденное им $\sigma$-кольцо. Однако рассматривая некоторый тип классов, определяемый менее стеснительными условиями по сравнению с $\sigma$-кольцами, мы получаем полезную теорему, касающуюся строения $\sigma$-колец, порожденных некоторыми классами.

Непустой класс $\mathbf{M}$ множеств называется *монотонным*, если, какова бы ни была содержащаяся в нем монотонная последовательность множеств $\{E_n\}$,

$$\lim_n E_n\in\mathbf{M}.$$

Так же как в случае колец и $\sigma$-колец, все подмножества пространства $X$ образуют монотонный класс, и пересечение любой системы монотонных классов также представляет собой монотонный класс. Поэтому мы можем ввести монотонный класс $\mathbf{M}(\mathbf{E})$, *порожденный* произвольным классом $\mathbf{E}$, как наименьший монотонный класс множеств, содержащий $\mathbf{E}$.

Теорема 1. *Всякое $\sigma$-кольцо представляет собой монотонный класс; монотонное кольцо есть $\sigma$-кольцо.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для того, чтобы доказать второе, нужно обнаружить, что кольцо, одновременно являющееся монотонным классом, замкнуто относительно образования счетных соединений. Пусть $\mathbf{M}$ — монотонное кольцо и

$$E_i \in \mathbf{M}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Тогда, так как $\mathbf{M}$ есть кольцо,

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathbf{M}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Последовательность $\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\}$ — возрастающая, и ее предел равен $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

Так как кольцо $\mathbf{M}$ монотонно, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathbf{M}. \qquad \square$$

Теорема 2. *Если $\mathbf{R}$ — кольцо, то $\mathbf{M}(\mathbf{R}) = \mathbf{S}(\mathbf{R})$. Следовательно, если монотонный класс содержит кольцо $\mathbf{R}$, то он содержит и $\mathbf{S}(\mathbf{R})$.*

Доказательство. Так как $\sigma$-кольцо представляет собой монотонный класс и $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \supset \mathbf{R}$, то

$$\mathbf{S}(\mathbf{R}) \supset \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{R}).$$

Доказательство будет завершено, если мы обнаружим, что $\mathbf{M}$ есть $\sigma$-кольцо; из $\mathbf{M}(\mathbf{R}) \supset \mathbf{R}$ будет тогда следовать, что $\mathbf{M}(\mathbf{R}) \supset \mathbf{S}(\mathbf{R})$.

Класс множеств $E$, таких, что $E - F$, $F - E$ и $E \cup F$, где $F$ — некоторое фиксированное множество, принадлежат $\mathbf{M}$, условимся обозначать $\mathbf{K}(F)$. Заметим, что так как $E$ и $F$ в определении $\mathbf{K}(F)$ участвуют симметрично, то соотношения

$$E \in \mathbf{K}(F) \quad \text{и} \quad F \in \mathbf{K}(E)$$

следуют одно из другого. Если класс $\mathbf{K}(F)$ не пуст и $\{E_n\}$ — какая-нибудь содержащаяся в нем монотонная последовательность, то

$$\lim_n E_n - F = \lim_n (E_n - F) \in \mathbf{M},$$
$$F - \lim_n E_n = \lim_n (F - E_n) \in \mathbf{M},$$
$$F \cup \lim_n E_n = \lim_n (F \cup E_n) \in \mathbf{M};$$

таким образом, $\mathbf{K}(F)$ есть монотонный класс.

Если $E \in \mathbf{R}$ и $F \in \mathbf{R}$, то, согласно определению кольца, $E \in \mathbf{K}(F)$. Это верно для любого $E$ из $\mathbf{R}$, поэтому $\mathbf{R} \subset \mathbf{K}(F)$. Так как $\mathbf{M}$ — наименьший монотонный класс, содержащий $\mathbf{R}$, то

$$\mathbf{M} \subset \mathbf{K}(F).$$

Отсюда если $E \in \mathbf{M}$ и $F \in \mathbf{R}$, то $E \in \mathbf{K}(F)$, следовательно, $F \in \mathbf{K}(E)$. Это верно для любого $F$ из $\mathbf{R}$, поэтому так же, как и выше, мы заключаем, что

$$\mathbf{M} \subset \mathbf{K}(E).$$

Справедливость последнего соотношения при любом $E$ из $\mathbf{M}$ равнозначно утверждению, что $\mathbf{M}$ есть кольцо, а из теоремы 1 следует, что $\mathbf{M}$ есть даже $\sigma$-кольцо. □

Доказанная теорема не дает нам способа построения для заданного кольца $\mathbf{R}$ порожденного им $\sigma$-кольца. Однако она показывает, что вместо того, чтобы исследовать $\sigma$-кольцо, порожденное кольцом $\mathbf{R}$, достаточно исследовать порожденный им монотонный класс. Во многих приложениях это совсем нетрудно.

### Упражнения

1. Верна ли теорема 2 для полуколец?

2. Класс $\mathbf{N}$ называется ***нормальным***, если он замкнут относительно образования пересечений убывающих последовательностей и счетных соединений непересекающихся множеств, в него входящих. Всякое $\sigma$-кольцо представляет собой нормальный класс, нормальное кольцо есть $\sigma$-кольцо.

3. Наименьший нормальный класс, содержащий класс $\mathbf{E}$, обозначим $\mathbf{N}(\mathbf{E})$; тогда, если $\mathbf{P}$ — любое полукольцо, то $\mathbf{N}(\mathbf{P}) = \mathbf{S}(\mathbf{P})$.

4. Назовем ***$\sigma$-алгеброй*** непустой класс множеств, замкнутый относительно образования дополнений и счетных соединений; тогда $\sigma$-алгебру можно описать как $\sigma$-кольцо, содержащее $X$. Если $\mathbf{R}$ — алгебра, то $\mathbf{M}(\mathbf{R})$ совпадает с наименьшей $\sigma$-алгеброй, содержащей $\mathbf{R}$. Верно ли это тогда, когда $\mathbf{R}$ есть кольцо?

5. В следующих примерах указать $\sigma$-алгебру, $\sigma$-кольцо и монотонный класс, порожденные классом $\mathbf{E}$:

а) $X$ — какое угодно множество, $P$ — некоторая фиксированная перестановка точек из $X$, т. е. некоторое фиксированное взаимно-однозначное отображение $X$ самого на себя. Подмножество $E$ в $X$ назовем ***инвариантным*** относительно $P$, если, коль скоро $x \in E$, непременно $\mathbf{P}(x) \in E$ и $P^{-1}(x) \in E$. В качестве $\mathbf{E}$ взят класс всех инвариантных множеств.

б) $X$ и $Y$ — два произвольных множества, $T$ — какое-нибудь (не обязательно взаимно-однозначное) отображение $X$ в $Y$. Если $E \subset Y$, то $T^{-1}(E)$ означает множество всех $x$ из $X$, для которых $T(x) \in E$. $\mathbf{E}$ — класс всех множеств вида $T^{-1}(E)$, где $E$ — произвольное подмножество из $Y$.

в) $X$ — топологическое пространство, $\mathbf{E}$ — класс его подмножеств первой категории.

г) $X$ — трехмерное эвклидово пространство; назовем его подмножество $E$ ***цилиндром***, если из $(x, y, z) \in E$ вытекает $(x, y, \hat{z}) \in E$, где $\hat{z}$ — произвольное действительное число. $\mathbf{E}$ — класс всевозможных цилиндров.

д) $X$ — евклидова плоскость; $\mathbf{E}$ — класс подмножеств из $X$, могущих быть покрытыми конечным или счетным числом горизонтальных прямых.

# ГЛАВА 2

# МЕРЫ И ВНЕШНИЕ МЕРЫ

## § 7. Мера на кольцах

Функция, областью определения которой служит какой-либо класс множеств, называется *функцией множества*. Действительная функция множества $\mu$, определенная на некотором классе $\mathbf{E}$ и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *аддитивной* в том случае, когда она обладает следующим свойством: если

$$E \in \mathbf{E}, \quad F \in \mathbf{E}, \quad E \cup F \in \mathbf{E} \quad \text{и} \quad E \cap F = 0,$$

то

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F).$$

Действительная функция множества $\mu$, определенная на некотором классе $\mathbf{E}$ и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *конечно-аддитивной*, если для всякого конечного подкласса непересекающихся множеств $\{E_1, \ldots, E_n\}$ из $\mathbf{E}$, соединения которых также принадлежит $\mathbf{E}$, выполняется равенство

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i).$$

Действительная функция множества $\mu$, определенная на некотором классе $\mathbf{E}$ и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *счетно-аддитивной*, если для всякой последовательности непересекающихся множеств $\{E_n\}$ из $\mathbf{E}$, соединение которых также принадлежит $\mathbf{E}$, выполняется равенство

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Действительная функция множества $\mu$, принимающая конечные или бесконечные значения, называется *мерой*, если она определена на некотором кольце $\mathbf{R}$, неотрицательна, счетно-аддитивна и $\mu(0) = 0$. Заметим, что в силу равенства

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup \ldots \cup E_n \cup 0 \cup 0 \cup \ldots$$

мера всегда конечно-аддитивна. Тривиальный пример меры можно построить следующим образом. Пусть $f$ — действительная неотрицательная функция, заданная на каком-нибудь множестве $X$ и принимающая конечные или бесконечные значения; пусть $\mathbf{R}$ — кольцо, состоящее из всевозможных конечных подмножеств $X$. Меру $\mu$ определим, положив

$$\mu(\{x_1,\dots,x_n\})=\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \quad \text{и} \quad \mu(0)=0.$$

Менее тривиальные примеры появятся в следующих параграфах.

Пусть на кольце $\mathbf{R}$ определена мера $\mu$; о множестве $E$ из $\mathbf{R}$ скажем, что оно — *конечной меры*, если $\mu(E)<\infty$. $E$ называется множеством *$\sigma$-конечной меры*, если в $\mathbf{R}$ существует последовательность множеств $\{E_n\}$, такая, что

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{и} \quad \mu(E_n)<\infty, \quad n=1,2,\dots$$

Если мера любого множества $E$ из $\mathbf{R}$ конечна ($\sigma$-конечна), то сама мера $\mu$ называется *конечной* (соотв. $\sigma$-конечной) на $\mathbf{R}$. Если $X\in\mathbf{R}$, т. е. $\mathbf{R}$ представляет собой алгебру, и при этом мера самого $X$ конечна или $\sigma$-конечна, то $\mu$ называется *вполне конечной* или соответственно *вполне $\sigma$-конечной* мерой. Мера $\mu$ называется *полной*, если из

$$E\in\mathbf{R}, \quad F\subset E \quad \text{и} \quad \mu(E)=0$$

следует, что $F\in\mathbf{R}$.

### Упражнения

1. Если $\mu$ — заданная на некотором кольце $\mathbf{R}$ неотрицательная аддитивная действительная функция множества, принимающая конечные или бесконечные значения, причем $\mu(E)<\infty$ хотя бы для одного $E$ из $\mathbf{R}$, то $\mu(0)=0$.

2. Если $\mathbf{E}$ — непустой класс множеств и $\mu$ — мера на $\mathbf{R}(\mathbf{E})$, такая, что $\mu(E)<\infty$ для всех $E$ из $\mathbf{E}$, то $\mu$ конечна на $\mathbf{R}(\mathbf{E})$ (см. теорему 2 § 5).

3. Пусть $\mu$ — мера на некотором $\sigma$-кольце; тогда класс всех множеств конечной меры представляет собой кольцо, а класс всех множеств $\sigma$-конечной меры — $\sigma$-кольцо. Если, кроме того, мера $\mu$ $\sigma$-конечна, то для того, чтобы класс всех множеств конечной меры представлял собой $\sigma$-кольцо, необходимо и достаточно, чтобы $\mu$ была конечной. Верно ли последнее утверждение в том случае, когда мера $\mu$ не $\sigma$-конечна?

4. Пусть $\mu$ — мера на некотором $\sigma$-кольце $\mathbf{S}$ и $E$ — множество $\sigma$-конечной меры из $\mathbf{S}$. Если $\mathbf{D}$ — произвольный класс, состоящий из непересекающихся множеств и содержащийся в $\mathbf{S}$, то неравенство $\mu(E\cap D)\neq 0$ выполняется лишь для конечного или счетного числа множеств $D$ из $\mathbf{D}$. [Указание. Предположить сначала, что $\mu(E)<\infty$; для целых положительных $n$ рассмотреть классы $\{D\colon D\in\mathbf{D},\ \mu(E\cap D)\geqslant \frac{1}{n}\}$.]

5. Заданная на кольце $\mathbf{R}$ неотрицательная аддитивная функция множества $\mu$, принимающая конечные или бесконечные значения и равная нулю на пустом множестве, конечно-аддитивна. То же верно и тогда, когда $\mu$ задана на полукольце $\mathbf{P}$, но доказательство в этом случае нетривиально. Его можно провести следующим образом. Назовем *разбиением* множества $E$ из $\mathbf{P}$ конечный класс $\{E_1,\dots,E_n\}$ непересекающихся множеств $E_i$, принадлежащих $\mathbf{P}$, соединение которых равно $E$. Разбиение $\{E_i\}$ назовем *$\mu$-разбиением*, если, каково бы ни было $F$ из $\mathbf{P}$,

$$\mu(E\cap F)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i\cap F).$$

Разбиение $\{E_i\}$ множества $E$ назовем *подразбиением* разбиения $\{F_j\}$ (того же множества $E$), если каждое $E_i$ содержится в некотором $F_j$. Далее доказываем последовательно:

а) Если $\{E_i\}$ и $\{F_j\}$ — разбиения $E$, то их *произведение*, т. е. класс множеств вида $E_i\cap F_j$, также является разбиением.

б) Если некоторое подразбиение разбиения $\{E_i\}$ есть $\mu$-разбиение, то и само $\{E_i\}$ является $\mu$-разбиением.

в) Произведение двух $\mu$-разбиений представляет собой $\mu$-разбиение.

г) Если $E = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = F$, где $C_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, и

$$D_i = C_i - C_{i-1} \in \mathbf{P}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то $\{E, D_1, \ldots, D_n\}$ есть $\mu$-разбиение множества $F$.

д) Всякое разбиение множества $E$ из $\mathbf{P}$ есть $\mu$-разбиение.

## § 8. Мера на интервалах

С целью разъяснения основных понятий теории меры мы рассмотрим сейчас один классический частный случай, важный и сам по себе. В этом параграфе пространством $X$ будет служить числовая прямая. Пусть $\mathbf{P}$ обозначает класс всех ограниченных интервалов, замкнутых слева и открытых справа, т. е. точечных множеств вида

$$\{x\colon\ -\infty < a \leqslant x < b < \infty\},$$

а $\mathbf{R}$ — класс конечных соединений интервалов такого рода. Таким образом, $\mathbf{R}$ состоит из множеств вида

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x\colon\ -\infty < a_i \leqslant x < b_i < \infty\}.$$

(Лёгко видеть, что всякое такое множество может быть представлено как соединение непересекающихся интервалов, принадлежащих классу $\mathbf{P}$.)

Ограниченные замкнутые слева и открытые справа интервалы мы условимся называть просто «полузамкнутыми интервалами». Использование полузамкнутых интервалов, вместо замкнутых или открытых представляет собой лишь технический прием. Так, например, если $a$, $b$, $c$ и $d$ — действительные числа, причем $-\infty < a < b < c < d < \infty$, то разность между открытыми интервалами $\{x\colon a < x < d\}$ и $\{x\colon b < x < c\}$ не является ни открытым интервалом, ни соединением конечного числа открытых интервалов. Если рассматривать замкнутые интервалы, то мы столкнемся с подобным же явлением. С полузамкнутыми интервалами такого затруднения не возникает, и в этом как раз состоит их преимущество.

Как обычно, мы обозначаем

$$[a, b] = \{x\colon a \leqslant x \leqslant b\} \text{ — замкнутый интервал,}$$
$$[a, b) = \{x\colon a \leqslant x < b\} \text{ — полузамкнутый интервал,}$$
$$(a, b) = \{x\colon a < x < b\} \text{ — открытый интервал.}$$

При этом всегда подразумевается, что $a \leqslant b$.

В классе $\mathbf{P}$ мы задаем функцию множества $\mu$, положив

$$\mu([a, b)) = b - a.$$

Заметим, что в случае $a = b$ интервал $[a, b)$ оказывается пустым множеством и

$$\mu(0) = 0.$$

Теперь мы выясним, как сказываются на функции $\mu$ некоторые теоретико-множественные соотношения в классе $\mathbf{P}$.

Теорема 1. *Если $\{E_1, \ldots, E_n\}$ — конечный класс непересекающихся множеств из* $\mathbf{P}$ *и $E_i \subset E_0$, $i = 1, \ldots, n$, где $E_0$ — некоторое множество, принадлежащее* $\mathbf{P}$, *то*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \leqslant \mu(E_0).$$

Доказательство. Пусть $E_i = [a_i, b_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, причем множеств $E_1, \ldots, E_n$ занумерованы так, что

$$a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n.$$

Из предположений, касающихся $\{E_1, \ldots, E_n\}$, следует, что

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0,$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - b_i) =$$
$$= b_n - a_1 \leqslant b_0 - a_0 = \mu(E_0). \qquad \square$$

Теорема 2. *Если замкнутый интервал $F_0 = [a_0, b_0]$ содержится в соединении конечного числа ограниченных открытых интервалов $U_1, \ldots, U_n$, где $U_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, n$, то*

$$b_0 - a_0 < \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Доказательство. Пусть $k_1$ — такой номер, при котором $a_0 \in U_k$. Если $b_{k_1} \leqslant b_0$, то пусть $k_2$ — такой номер, при котором $b_{k_1} \in U_{k_2}$; если $b_{k_2} \leqslant \leqslant b_0$, то пусть $k_3$ — такой номер при котором $b_{k_2} \in U_{k_3}$, и т. д. по индукции. Не нарушая общности, можно предположить, что $m = n$ и $U_{k_j} = U_i$; этого можно добиться, выбрасывая лишние $U_i$ и изменяя нумерацию. Другими словами, мы предполагаем, что

$$a_1 < a_0 < b_1, \quad a_n < b_0 < b_n$$

и, в случае $n > 1$,

$$a_{i+1} < b_i < b_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Отсюда

$$b_0 - a_0 < b_n - a_1 = b_1 - a_1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1}(b_{i+1} - b_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i). \qquad \square$$

Теорема 3. *Если $\{E_0, E_1, E_2, \ldots\}$ — последовательность множеств из* $\mathbf{P}$, *такая, что*

$$E_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

*то*

$$\mu(E_0) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Доказательство. Пусть $E_i = [a_1, b_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. При $a_0 = b_0$ теорема тривиальна. Если $a_0 < b_0$, то возьмем произвольное положительное число $\varepsilon$, такое, что $\varepsilon < b_0 - a_0$. Взяв еще произвольное положительное $\delta$, положим

$$F_0 = [a_0, b_0 - \varepsilon] \quad \text{и} \quad U_i = \left(a_i - \frac{\delta}{2^i}, b_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,$$

и согласно теореме Гейне-Бореля, существует такое целое положительное $n$, что $F_0 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Из теоремы 2 получим

$$\mu(E_0) - \varepsilon = (b_0 - a_0) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n}\left(b_1 - a_i + \frac{\delta}{2^i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) + \delta.$$

Отсюда, так как $\varepsilon$ и $\delta$ могут быть сколь угодно малыми, следует утверждение теоремы. □

Теорема 4. *Функция множества $\mu$ счетно-аддитивна на* $\mathbf{P}$.

Доказательство. Пусть $\{E_i\}$ — последовательность непересекающихся множеств из $\mathbf{P}$, соединение которых — обозначим его $E$ — также принадлежит $\mathbf{P}$. Согласно теореме 1,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \leqslant \mu(E), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leqslant \mu(E),$$

и остается лишь воспользоваться теоремой 3. □

Теорема 5. *На кольце* $\mathbf{R}$ *существует единственная конечная мера $\bar{\mu}$, такая, что $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$, когда $E \in \mathbf{P}$.*

Доказательство. Всякое множество $E$ из $\mathbf{R}$ может быть представлено как соединение конечного числа непересекающихся множеств из $\mathbf{P}$. Пусть

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{и} \quad E = \bigcup_{j=1}^{m} F_j$$

— два таких представления одного и того же множества $E$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, n$

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{m} (E_i \cap F_j)$$

есть представление множества $E_i$ из $\mathbf{P}$ в виде соединения конечного числа непересекающихся множеств, также принадлежащих $\mathbf{P}$, и так как $\mu$ конечно-аддитивна, то

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j).$$

Точно так же

$$\sum_{j=1}^{m} \mu(F_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j).$$

Отсюда следует, что если $E \in \mathbf{R}$ и $\{E_1, \ldots, E_n\}$ есть конечный класс непересекающихся множеств из $\mathbf{P}$, соединение которых равно $E$, то равенство

$$\bar{\mu}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

однозначно определят на $\mathbf{R}$ некоторую функцию $\bar{\mu}$.

Из самого определения функции $\bar{\mu}$ следует, что она конечно-аддитивна и совпадает с $\mu$ на $\mathbf{P}$. Ясно также, что этими двумя свойствами функция $\bar{\mu}$ определяется однозначно. Остается показать, что $\bar{\mu}$ счетно-аддитивна.

Пусть $\{E_i\}$ — последовательность непересекающихся множеств из $\mathbf{R}$, соединение которых $E$ также принадлежит $\mathbf{R}$. Каждое $E_i$, в свою очередь, представляет собой соединение конечного числа непересекающихся множеств из $\mathbf{P}$,

$$E_i = \bigcup_j E_{ij}$$

и

$$\bar{\mu}(E_i) = \sum_j \mu(E_{ij}).$$

Если $E \in \mathbf{P}$, то, так как множества $E_{ij}$ не пересекаются и образуют счетный класс, а $\mu$ счетно-аддитивна на $\mathbf{P}$,

$$\bar{\mu}(E) = \mu(E) = \sum_i \sum_j \mu(E_{ij}) = \sum_i \bar{\mu}(E_i).$$

В общем случае $E$ представляет собой соединение конечного числа непересекающихся множеств из $\mathbf{P}$,

$$E = \bigcup_k F_k;$$

воспользовавшись только что полученным результатом, мы получим

$$\bar{\mu}(E) = \sum_k \bar{\mu}(F_k) = \sum_k \sum_i \bar{\mu}(E_i \cap F_k) = \sum_i \sum_k \bar{\mu}(E_i \cap F_k) = \sum_i \bar{\mu}(E_i). \quad \square$$

В силу теоремы 5 мы можем, не опасаясь путаницы, писать $\mu(E)$ вместо $\bar{\mu}(E)$ даже тогда, когда $E$ принадлежит $\mathbf{R}$, а не $\mathbf{P}$.

### Упражнения

1. В доказательстве теоремы 4 пусть $E_{n_1}$ — тот интервал последовательности $\{E_i\}$, левый конец которого совпадает с левым концом интервала $E$, $E_{n_2}$ — тот интервал, левый конец которого совпадает с правым концом интервала $E_{n_1}$, и т. д. Не пользуясь теоремами 1, 2 и 3, показать, что

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i} \in \mathbf{P} \quad \text{и} \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_{n_i}).$$

2. Еще одно доказательство теоремы 4, не опирающееся на теоремы 1, 2 и 3, можно получить, расположив интервалы последовательности $\{E_i\}$ в порядке возрастания их левых концов и затем применив трансфинитную индукцию.

3. Пусть $g$ — конечная возрастающая непрерывная функция действительного переменного; положим

$$\mu_g([a, b)) = g(b) - g(a).$$

Для $\mu_g$ справедливы теоремы, аналогичные теоремам 4 и 5, относящимся к $\mu$.

4. Теоремы 4 и 5 могут быть обобщены на $n$-мерное эвклидово пространство, если ввести «интервалы» вида

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon a_i \leqslant x_i < b_i, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

и положить

$$\mu(E) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

5. Если $\mu$ — вполне аддитивная неотрицательная функция множества, заданная на полукольце $\mathbf{P}$, причем $\mu(0) = 0$, то на $\mathbf{R}(\mathbf{P})$ существует единственная мера $\bar{\mu}$, такая, что $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$, коль скоро $E \in \mathbf{P}$. Если $\mu$ (вполне) конечна, или $\sigma$-конечна, то такова же и $\bar{\mu}$ (см. упр. 3 § 5 и доказательство теоремы 5).

## § 9. Свойства мер

Действительная функция множества $\mu$, заданная на некотором классе $\mathbf{E}$ и принимающая конечные и бесконечные значения, называется *монотонной*, если из $E \in \mathbf{E}$, $F \in \mathbf{E}$ и $E \subset F$ вытекает $\mu(E) \leqslant \mu(F)$. Действительная функция множества $\mu$, заданная на $\mathbf{E}$ и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *субтрактивной*, если из $E \in \mathbf{E}$, $F \in \mathbf{E}$, $E \subset F$, $F - E \in \mathbf{E}$ и $|\mu(E)| < \infty$ вытекает

$$\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E).$$

Теорема 1. *Если $\mu$ — мера на некотором кольце $\mathbf{R}$, то $\mu$ монотонна и субтрактивна.*

Доказательство. Если $E \in \mathbf{E}$, $F \in \mathbf{E}$ и $E \subset F$, то $F - E \in \mathbf{E}$ и $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E)$. Монотонность меры $\mu$ следует из того, что она неотрицательна. Тогда, когда $\mu(E)$ конечно, полученное равенство можно переписать в виде $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$, и мы видим, что $\mu$ субтрактивна. □

Теорема 2. *Если $\mu$ — мера на кольце $\mathbf{R}$, $E \in \mathbf{R}$, и $\{E_i\}$ — конечный или счетный класс множеств из $\mathbf{R}$, такой, что $E \subset \bigcup_i E_i$, то*

$$\mu(E) \leqslant \sum_i \mu(E_i).$$

Доказательство. Здесь мы воспользуемся следующим простым, но важным замечанием: если $\{F_i\}$ — конечный или счетный класс множеств из кольца $\mathbf{R}$, то можно выделить класс $\{G_i\}$ непересекающихся множеств из $\mathbf{R}$, таких, что

$$G_i \subset F_i \quad \text{и} \quad \bigcup_i G_i = \bigcup_i F_i;$$

для этого можно положить

$$G_i = F_i - \bigcup \{F_j\colon 1 \leqslant j < i\}.$$

Требуемый результат получится, если применить это замечание к классу $\{E \cap E_j\}$ и воспользоваться тем, что $\mu$ счетно-аддитивна и монотонна. □

Теорема 3. *Если $\mu$ — мера на кольце $\mathbf{R}$, $E \in \mathbf{R}$ и $\{E_i\}$ — конечный или счетный класс непересекающихся множеств из $\mathbf{R}$, такой, что $\bigcup_i E_i \subset E$, то*

$$\sum_i \mu(E_i) \leqslant \mu(E).$$

Доказательство. Если класс $\{E_i\}$ конечен, то $\bigcup_i E_i \in \mathbf{R}$ и, следовательно,

$$\sum_i \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_i E_i\right) \leqslant \mu(E).$$

В счетном случае требуемое неравенство можно получить предельным переходом из соответствующих неравенств, справедливых для конечных подклассов. □

Теорема 4. *Если $\mu$ — мера на кольце $\mathbf{R}$, $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность множеств из $\mathbf{R}$ и $\lim_n E_n \in \mathbf{R}$, то $\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n)$.*

Доказательство. Положим $E_0 = 0$; тогда

$$\mu(\lim_n E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i - E_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i - E_{i-1}) =$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i - E_{i-1}) = \lim_n \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}(E_i - E_{i-1})\right) = \lim_n \mu(E_n). \qquad \square$$

Теорема 5. *Если $\mu$ — мера на кольце $\mathbf{R}$, $\{E_n\}$ — убывающая последовать множеств из $\mathbf{R}$, из которых хотя бы одно имеет конечную меру, и $\lim_n E_n \in \mathbf{R}$, то $\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n)$.*

Доказательство. Если $\mu(E_m) < \infty$, то $\mu(E_n) \leqslant \mu(E_m) < \infty$ для $n \geqslant m$, и поэтому $\mu(\lim_n E_n) < \infty$. Последовательность $\{E_m - E_n\colon n = m, m+1, \ldots\}$ — возрастающая, следовательно, в силу теорем 1 и 4,

$$\mu(E_m) - \mu(\lim_n E_n) = \mu(E_m - \lim_n E_n) = \mu(\lim_n (E_m - E_n)) =$$

$$= \lim_n \mu(E_m - E_n) = \lim_n (\mu(E_m) - \mu(E_n)) = \mu(E_m) - \lim_n \mu(E_n).$$

Так как $\mu(E_m) < \infty$, то теорема доказана. □

Мы будем говорить, что действительная функция $\mu$, заданная на некотором классе $\mathbf{E}$ и принимающая конечные или бесконечные значения, *непрерывна снизу* на множестве $E$ (в классе $\mathbf{E}$), если для любой возрастающей последовательности множеств $\{E_n\}$ из $\mathbf{E}$, такой, что $\lim_n E_n = E$, выполняется равенство $\lim_n \mu(E_n) = \mu(E)$. Подобным же образом $\mu$ *непрерывна сверху* на $E$, если, какова бы ни была убывающая последовательность множеств $\{E_n\}$ из $\mathbf{E}$, такая, что $\lim_n E_n = E$ и $|\mu(E_m)| < \infty$, хотя бы для одного значения $m$, выполняется равенство $\lim_n \mu(E_n) = \mu(E)$. Теоремы 4 и 5 утверждают, что мера $\mu$ непрерывна сверху и снизу (на любом множестве, входящем в кольцо, на котором $\mu$ определена); следующая теорема содержит утверждение обратного характера.

Теорема 6. *Пусть $\mu$ — конечная неотрицательная аддитивная функция множества, заданная на некотором кольце* $\mathbf{R}$. *Если $\mu$ непрерывна снизу на любом $E$ из* $\mathbf{E}$ *или непрерывна сверху на пустом множестве, то $\mu$ представляет собой меру.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\mu$, будучи аддитивной и заданной на кольце, конечно-аддитивна. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств из $\mathbf{R}$, соединение которых $E$ также принадлежит $\mathbf{R}$. Положим

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \quad G_n = E - F_n.$$

Если $\mu$ непрерывна снизу, то, так как $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность и $\lim_n F_n = E$, мы получим

$$\mu(E) = \lim_n \mu(F_n) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Если же $\mu$ непрерывна сверху на пустом множестве, то, так как $\{G_n\}$ — убывающая последовательность и $\lim_n G_n = 0$,

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) + \mu(G_n) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) + \lim_n \mu(G_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i). \qquad \square$$

## Упражнения

1. Теоремы 1–5 верны не только для колец, но и для полуколец. Доказательства могут быть проведены непосредственно или получены из соответствующих результатов для колец посредством упр. 5 § 8.

2. Если $\mu$ — мера на каком-нибудь кольце $\mathbf{R}$, а $E$ и $F$ — множества из $\mathbf{R}$, то

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

Если $E$, $F$ и $G$ — множества из $\mathbf{R}$, то

$$\mu(E) + \mu(F) + \mu(G) + \mu(E \cap F \cap G) = \mu(E \cup F \cup G) + \mu(E \cap F) + \mu(F \cap G) + \mu(G \cap E).$$

Эти соотношения можно обобщить на любое конечное число множеств.

3. Если $\mu$ — мера на кольце $\mathbf{R}$, то для двух множеств $E$ и $F$ из $\mathbf{R}$ мы пишем $E \sim F$, если $\mu(E \Delta F) = 0$. Отношение «$\sim$» рефлективно, симметрично и транзитивно. Если $E \sim \sim F$, то $\mu(E) = \mu(F) = \mu(E \cap F)$. Будет ли кольцом класс тех множеств $E$ из $\mathbf{R}$, для которых $E \sim 0$?

4. Положим $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$. Тогда $\rho(E, F) \geqslant 0$, $\rho(E, F) = \rho(F, E)$ и $\rho(E, F) \leqslant \leqslant \rho(E, G) + \rho(G, F)$. Если $E_1 \sim E_2$ и $F_1 \sim F_2$, то $\rho(E_1, F_1) = \rho(E_2, F_2)$.

5. Теоремы 4 и 5 могут быть обобщены следующим образом. Пусть $\mu$ — мера на кольце $\mathbf{R}$. Если $\{E_n\}$ — последовательность множеств из $\mathbf{R}$, причем $\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\liminf_n E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathbf{R}$, то $\mu(\liminf_n E_n) \leqslant \liminf_n \mu(E_n)$.

В том случае, когда $\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\limsup_n E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \in \mathbf{R}$ и $\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i\right) < < \infty$ хотя бы при одном значении $n$, имеем $\mu(\limsup_n E_n) \geqslant \limsup_n \mu(E_n)$.

6. Если выполняются предположения второй части упр. 5 и $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, то $\mu(\limsup_n E_n) = 0$.

7. Пусть $X$ — множество всех рациональных чисел, заключенных в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$, а $\mathbf{P}$ — класс «полузамкнутых интервалов» вида $\{x\colon x \in X, a \leqslant x < b\}$, где $a$, $b$ рациональны и $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$. Функция $\mu$, определенная на $\mathbf{P}$ равенством

$$\mu(\{x\colon a \leqslant x < b\}) = b - a,$$

конечно-аддитивна и непрерывна как сверху, так и снизу. Однако $\mu$ не счетно-аддитивна, так что теорема 6 не распространяется на полукольца.

8. Пусть $X$ — множество всех целых положительных чисел, а $\mathbf{R}$ — класс всех конечных подмножеств из $X$ и их дополнений. Для множеств $E$, входящих в $\mathbf{R}$, мы полагаем $\mu(E) = 0$ или $\mu(E) = \infty$, в зависимости от того, конечно $E$ или бесконечно. Такая функция множества $\mu$ непрерывна сверху на пустом множестве, но свойством счетной аддитивности не обладает. Следовательно, вторая половина теоремы 6 неверна в том случае, когда для $\mu$ допускаются бесконечные значения.

9. Будет ли верна теорема 5, если в ее формулировке опустить условие, что $\mu(E_n) < \infty$ при некотором $n$?

10. Пусть $\mu$ — мера, заданная на борелевских множествах некоторого сепарабельного полного метрического пространства $X$, причем $\mu(X) = 1$. Тогда $X$ содержит множество $E$, представляющее собой соединение счетного числа компактных множеств и такое, что $\mu(E) = 1$. (Указание. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек, плотная в $X$, а $U_n^k$ — замкнутая сфера радиуса $\frac{1}{k}$ с центром в $x_n$. Если $0 < \varepsilon < 1$ и $F_m^k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n^k$, то $m_k$ определим по индукции как наименьшее целое положительное число, для которого

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_{m_i}^i\right) > 1 - \varepsilon.$$

Тогда множество $C = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_{m_i}^i$ компактно и $\mu(C) \geqslant 1 - \varepsilon$.)

## § 10. Внешние меры

Непустой класс $\mathbf{E}$ множеств называется *наследственным* классом, если каковы бы ни были множества $E$ и $F$, такие, что $E \in \mathbf{E}$ и $F \subset E$, непременно $F \in \mathbf{E}$.

Типичный пример наследственного класса представляет собой класс всех подмножеств некоторого множества $E$ в пространстве $X$. Та часть алгебраической теории наследственных классов, которая нам понадобится, чрезвычайно проста и во всех подробностях походит на теории колец, $\sigma$-колец и других известных нам классов множеств. В частности, пересечение любой системы наследственных классов является наследственным классом, поэтому для всякого класса множеств существует наименьший содержащий его наследственный класс. Наибольший интерес будут представлять для нас наследственные классы, являющиеся вместе с тем $\sigma$-кольцами; легко видеть, что наследственный класс представляет собой $\sigma$-кольцо тогда и только тогда, когда он замкнут относительно образования счетных соединений. Если $\mathbf{E}$ — какой-нибудь класс множеств, то наследственное $\sigma$-кольцо, *порожденное* классом $\mathbf{E}$, т. е. наименьшее наследственное $\sigma$-кольцо, содержащее $\mathbf{E}$, будет обозначаться $\mathbf{H}(\mathbf{E})$. Наследственное $\sigma$-кольцо $\mathbf{H}(\mathbf{E})$ состоит из множеств, могущих быть покрытыми счетными классами множеств, принадлежащих $\mathbf{E}$; если же само $\mathbf{E}$ замкнуто относительно образования счетных соединений (например, если $\mathbf{E}$ есть $\sigma$-кольцо), то $\mathbf{H}(\mathbf{E})$ представляет собой класс всех множеств, служащих подмножествами множеств класса $\mathbf{E}$.

Действительная функция множества $\mu^*$, заданная на некотором классе $\mathbf{E}$ и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *полуаддитивной*, если для любых множеств $E$ и $F$ из $\mathbf{E}$, таких, что $E \cup F \in \mathbf{E}$, выполянется неравенство

$$\mu^*(E \cup F) \leqslant \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

Действительная функция множества $\mu^*$, заданная на $\mathbf{E}$ и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *конечно-полуаддитивной*, если для любого конечного класса $\{E_1, \ldots, E_n\}$ множеств из $\mathbf{E}$, соединение которых тоже принадлежит $\mathbf{E}$, выполняется неравенство

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E_i).$$

Действительная функция множества $\mu^*$, заданная на $\mathbf{E}$ и принимающая конечные или бесконечные значения, называется *счетно-полуаддитивной*, если для любой последовательности $\{E_n\}$ множеств из $\mathbf{R}$, соединение которых тоже принадлежит $\mathbf{R}$, выполняется неравенство

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

*Внешней мерой* называется действительная функция множества $\mu^*$, заданная на каком-либо наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$ и принимающая конечные или бесконечные значения, если она неотрицательна, монотонна, счетно-полуаддитивна и обращается в нуль на пустом множестве. Заметим, что внешняя мера всегда конечно-полуаддитивна. (Вполне) конечные и $\sigma$-конечные внешние меры определяются точно так же, как соответствующие меры.

Внешняя мера естественно возникает при попытке распространить меру, заданную на некотором кольце, на более широкий класс множеств. Простейшие относящиеся сюда подробности точно формулируются в следующей теореме.

Теорема 1. *Если $\mu$ — мера на каком-либо кольце $\mathbf{R}$, то функция $\mu^*$, заданная на $\mathbf{H}(\mathbf{R})$ посредством равенства*

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\colon\ E_n \in \mathbf{R}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\},$$

*представляет собой внешнюю меру, совпадающую на $\mathbf{R}$ с $\mu$; если $\mu$ (вполне) $\sigma$-конечна, то такова же и $\mu^*$.*

Словесно $\mu^*(E)$ может быть определена как нижняя грань сумм вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, где последовательность множеств $\{E_n\}$ из $\mathbf{R}$ выбирается так, чтобы $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ содержало $E$. Так определенная внешняя мера $\mu^*$ называется внешней мерой, *индуцированной* мерой $\mu$.

Доказательство. Если $E \in \mathbf{R}$, то $E \subset E \cup 0 \cup 0 \cup \ldots$ и, следовательно, $\mu^*(E) \leqslant \mu(E) + \mu(0) + \mu(0) + \ldots = \mu(E)$. С другой стороны, если $E \in R$, $E_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, и $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, то согласно теореме 2 § 9,

$\mu(E) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, так что $\mu(E) \leqslant \mu^*(E)$. Таким образом, $\mu^*$ представляет собой продолжение функции $\mu$, т. е. $\mu^*(E) = \mu(E)$, когда $E \in \mathbf{R}$; отсюда, в частности, следует, что $\mu^*(0) = 0$.

Если $E \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$, $F \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$ и $E \subset F$, то всякая последовательность множеств из $\mathbf{R}$, покрывающая $F$, покрывает и $E$, поэтому $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$.

Для того чтобы доказать, что $\mu^*$ счетно-полуаддитивна, возьмем множества $E$ и $E_i$ из $\mathbf{H}(\mathbf{R})$, такие, что $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. Пусть $\varepsilon$ — произвольное положительное число; тогда для всякого целого положительного $i$ выберем последовательность множеств $\{E_{ij}\}$ из $\mathbf{R}$ таким образом, чтобы

$$E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{ij}) \leqslant \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Возможность выбора такой последовательности вытекает из определения $\mu^*(E_i)$. Тогда, так как все $E_{ij}$ образуют счетный класс множеств из $\mathbf{R}$, покрывающий $E$, то

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{ij}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon$ выбрано произвольно, то

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Предположим, что мера $\mu$ $\sigma$-конечна, и возьмем любое множество $E$ из $\mathbf{H}(\mathbf{R})$. Согласно определению $\mathbf{H}(\mathbf{R})$, в $\mathbf{R}$ существует последовательность множеств $\{E_i\}$, такая, что $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. Так как $\mu$ $\sigma$-конечна, то для каждого $i = 1, 2, \ldots$ в $\mathbf{R}$ найдется последовательность множеств $\{E_{ij}\}$, для которой

$$E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij} \quad \text{и} \quad \mu(E_{ij}) < \infty.$$

Отсюда получаем

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij} \quad \text{и} \quad \mu^*(E_{ij}) = \mu(E_{ij}) < \infty. \qquad \square$$

### Упражнения

1. Всегда ли в предположениях теоремы 1 конечна $\mu^*$, коль скоро конечна $\mu$?

2. Наименьшее наследственное кольцо, содержащее заданный класс $\mathbf{E}$, будем обозначать $\mathbf{J}(\mathbf{E})$. Пусть на некотором кольце $\mathbf{R}$ задана действительная конечная функция множества $\mu$, неотрицательная и конечно-аддитивная. Для $E$, принадлежащих $\mathbf{J}(\mathbf{E})$, положим

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(F)\colon E \subset F \in \mathbf{R}\};$$

функция $\mu^*$ оказывается конечной, неотрицательной и полуаддитивной. Выполняется ли для множеств $E$ из $\mathbf{R}$ равенство $\mu^*(E) = \mu(E)$?

3. Класс $\mathbf{H}$ подмножеств заданного множества $X$ образует идеал в булевском кольце всех его подмножеств тогда и только тогда, когда $\mathbf{H}$ — наследственное кольцо (см. упр. 4 § 4).

4. Здесь приведено несколько примеров функций множества, заданных на наследственных классах. Некоторые из них являются внешними мерами, остальные нарушают в точности по одному из условий, определяющих внешнюю меру:

а) $X$ — произвольное множество, $\mathbf{H}$ — класс всех его подмножеств. Фиксируем в $X$ какую-нибудь точку $x_0$ и положим $\mu^*(E)=\chi_E(x_0)$.

б) $X$ и $\mathbf{H}$ те же, что в примере «а»; $\mu^*(E)=1$ для всех $E$ из $\mathbf{H}$.

в) $X=\{x, y\}$ — множество, состоящее из двух различных точек, $\mathbf{H}$ — класс всех его подмножеств; $\mu^*$ определена равенствами

$$\mu^*(0)=0, \quad \mu^*(\{x\})=\mu^*(\{y\})=10, \quad \mu^*(X)=1.$$

г) $X$ — множество, состоящее из 100 точек, размещенных в квадратной таблице из 10 столбцов, по 10 точек в каждом; $\mathbf{H}$ — класс всех подмножеств $X$; $\mu^*(E)$ определено как число столбцов, которые содержат хотя бы одну точку из $E$.

д) $X$ — множество всех целых положительных чисел, $\mathbf{H}$ — класс всех его подмножеств. Если $E$ — конечное множество из $\mathbf{H}$, то $\nu(E)$ означает число элементов этого множества; $\mu^*$ определена для любого $E$ из $\mathbf{H}$ равенством

$$\mu^*(E)=\limsup_n \frac{1}{n}\nu(E\cap\{1,\ldots,n\}).$$

е) $X$ — произвольное множество, $\mathbf{H}$ — класс всех его конечных или счетных подмножеств; $\mu^*(E)$ есть число точек, входящих в $E$ (если $E$ бесконечно, то $\mu^*(E)=\infty$).

5. Если $\mu^*$ — внешняя мера на наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$, а $E_0$ — некоторое фиксированное множество из $\mathbf{H}$, то функция $\mu_0^*$, определенная равенством $\mu_0^*(E)=\mu^*(E\cap E_0)$, представляет собой внешнюю меру на $\mathbf{H}$.

6. Если $\lambda^*$ и $\mu^*$ — внешние меры на наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$, то функция $\nu^*$, определенная равенством $\nu^*(E)=\lambda^*(E)\cup\mu^*(E)$, есть внешняя мера на $\mathbf{H}$.

7. Если $\{\mu_n^*\}$ — последовательность внешних мер, заданных на наследственном кольце $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$, а $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, то функция $\mu^*$, определенная равенством $\mu^*(E)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\mu_n^*(E)$, представляет собой внешнюю меру на $\mathbf{H}$.

## § 11. Измеримые множества

Пусть на некотором наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$ задана внешняя мера $\mu^*$. Множество $E$ из $\mathbf{H}$ называется *$\mu^*$-измеримым*, если для любого $A$ из $\mathbf{H}$

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E').$$

Понятие $\mu^*$ — измеримости играет важнейшую роль в теории внешней меры. Не так легко, однако, уловить смысл этого понятия, не обращаясь к его следствиям, которые будут изложены ниже. Поэтому может быть полезным следующее пояснение. Внешняя мера может не быть не только счетно-аддитивной, но даже конечно-аддитивной (см. пример «г» упр. 4 § 10). Стремясь удовлетворить естественному требованию аддитивности, мы выделяем такие множества, которые всякое другое множество расщепляют аддитивно; определение $\mu^*$-измеримых множеств точно формулирует это несколько вольное описание. Введение такого, на первый взгляд сложного, понятия полностью оправдывается тем успехом, с каким оно применяется при доказательстве весьма важной теоремы о продолжении меры (см. § 13).

Теорема 1. *Если $\mu^*$ — внешняя мера на наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$, то класс $\overline{\mathbf{S}}$ всех $\mu^*$-измеримых множеств представляет собой кольцо.*

Доказательство. Если $E$ и $F$ принадлежат $\overline{\mathbf{S}}$ и $A \in \mathbf{H}$, то

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'), \tag{1}$$
$$\mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F'), \tag{2}$$
$$\mu^*(A \cap E') = \mu^*(A \cap E' \cap F) + \mu^*(A \cap E' \cap F'). \tag{3}$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F') + \mu^*(A \cap E' \cap F) + \mu^*(A \cap E' \cap F'). \tag{4}$$

Если в равенстве (4) вместо $A$ взять $A \cap (E \cup F)$, то первые три слагаемых в правой части не изменятся, а последнее выпадет, так что мы получим

$$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F') + \mu^*(A \cap E' \cap F). \tag{5}$$

Так как $E' \cap F' = (E \cup F)'$, то подстановка (5) в (4) дает

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)'), \tag{6}$$

откуда следует, что $E \cup F \in \overline{\mathbf{S}}$.

Подобным же образом, заменив $A$ в равенстве (4) множеством $A \cap \cap (E - F)' = A \cap (E' \cup F)$, мы получим

$$\mu^*(A \cap (E - F)') = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E' \cap F) + \mu^*(A \cap E' \cap F'). \tag{7}$$

Но $E \cap F' = E - F$, поэтому подстановка (7) в (4) дает

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E - F)) + \mu^*(A \cap (E - F)'), \tag{8}$$

а это означает, что $E - F \in \overline{\mathbf{S}}$. Так как пустое множество, очевидно, $\mu^*$-измеримо, то $\overline{\mathbf{S}}$ есть кольцо. □

Прежде чем перейти к изучению более глубоких свойств $\mu^*$-измеримых множеств, полезно привести следующее простое, но полезное замечание: если на наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$ задана внешняя мера $\mu^*$ и если множество $E$ из $\mathbf{H}$ таково, что для всякого $A$ из $\mathbf{H}$ выполняется неравенство

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E'),$$

то множество $E$ $\mu^*$-измеримо. Для доказательства достаточно вспомнить, что обратное неравенство $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$ прямо следует из полуаддитивности внешней меры.

Теорема 2. *Если* $\mu^*$ *— внешняя мера на наследственном* $\sigma$*-кольце* $\mathbf{H}$*, то класс* $\overline{\mathbf{S}}$ *всех* $\mu^*$*-измеримых множеств есть* $\sigma$*-кольцо. Если* $A \in \mathbf{H}$, $\{E_n\}$ *— последовательность непересекающихся множеств из* $\overline{\mathbf{S}}$ *и* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, *то*

$$\mu^*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n).$$

Доказательство. Взяв в (5) $E_1$ и $E_2$ соответственно вместо $E$ и $F$, получим

$$\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2))=\mu^*(A\cap E_1)+\mu^*(A\cap E_2).$$

Методом индукции доказывается равенство

$$\mu^*\left(A\cap\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(A\cap E_i)$$

для любого целого положительного $n$. Если мы положим

$$F_n=\bigcup_{i=1}^{n}E_i,\quad n=1,2,\ldots,$$

то, согласно теореме 1, будем иметь

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap F_n)+\mu^*(A\cap F_n')\geqslant\sum_{i=1}^{n}\mu^*(A\cap E_i)+\mu^*(A\cap E').$$

Так как это неравенство верно при любом $n$, то

$$\mu^*(A)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_i)+\mu^*(A\cap E')\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E').\qquad(9)$$

Мы видим, что $E\in\overline{\mathbf{S}}$ (так что класс $\overline{\mathbf{S}}$ замкнут относительно образования счетных соединений непересекающихся множеств) и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_i)+\mu^*(A\cap E')=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E').\qquad(10)$$

Взяв $A\cap E$ вместо $A$ в (10), мы придем ко второму утверждению теоремы [слагаемое $\mu^*(A\cap E')$ может быть бесконечно, поэтому его нельзя просто вычесть из общих частей равенства (10)]. Но всякое счетное соединение множеств из кольца может быть представлено как счетное соединение непересекающихся множеств из этого кольца, следовательно, $\overline{\mathbf{S}}$ есть $\sigma$-кольцо. □

Теорема 3. *Если $\mu^*$ — внешняя мера на наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$ и $\overline{\mathbf{S}}$ — класс всех $\mu^*$-измеримых множеств, то всякое множество нулевой внешней меры принадлежит $\overline{\mathbf{S}}$ и функция множества $\bar{\mu}$, определенная на $\overline{\mathbf{S}}$ равенством $\bar{\mu}(E)=\mu^*(E)$, представляет собой полную меру на $\overline{\mathbf{S}}$.*

О мере $\bar{\mu}$ условимся говорить, что она *индуцирована* внешней мерой $\mu^*$.

Доказательство. Если $E\in\mathbf{H}$ и $\mu^*(E)=0$, то, каково бы ни было $A$ из $\mathbf{H}$,

$$\mu^*(A)=\mu^*(E)+\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E'),$$

так что $E\in\overline{\mathbf{S}}$. Счетная аддитивность $\bar{\mu}$ на $\overline{\mathbf{S}}$ будет следовать из равенства (10), если взять в нем $E$ вместо $A$. Если, наконец,

$$E\in\overline{\mathbf{S}},\quad F\subset E\quad\text{и}\quad\bar{\mu}(E)=\mu^*(E)=0,$$

то $\bar{\mu}(F)=\mu^*(F)=0$, следовательно, $\bar{\mu}$ — полная мера. □

### Упражнения

1. В примере «г» упр. 4 § 10 множество $E$ оказывается $\mu^*$-измеримым тогда и только тогда, когда столбец, содержащий какую-либо точку из $E$, целиком входит в $E$. Какие множества $\mu^*$-измеримы в примере «е» упр. 4 § 10?

2. Внешняя мера $\mu^*$ задана на наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$; при каких дополнительных условиях класс $\mu^*$-измеримых множеств представляет собой алгебру?

3.Заменив в равенстве (4) в доказательстве теоремы 1 множество $A$ множеством $A \cap \cap (E' \cup F')$, можно доказать непосредственно, что класс $\overline{\mathbf{S}}$ замкнут относительно образования пересечений. К какому выводу приведет этот прием, если $A$ заменить множеством $A \cap (F - E)' = A \cap (E \cup F')$?

4. Пусть $\mu^*$-конечная, неотрицательная, монотонная и конечно-аддитивная функция множества на наследственном кольце $\mathbf{J}$ (см. упр. 2 § 10). Класс всех $\mu^*$-измеримых множеств представляет собой кольцо, и $\mu^*$ на этом кольце аддитивна.

5. Пусть $\mu^*$ — внешняя мера на наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$, $\overline{\mathbf{S}}$ — класс всех $\mu^*$-измеримых множеств. Если $A \in \mathbf{H}$, а $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность множеств из $\overline{\mathbf{S}}$, то $\mu^*(\lim_n(A \cap E_n)) = \lim_n \mu^*(A \cap E_n)$; если $\{E_n\}$ — убывающая последовательность множеств из $\overline{\mathbf{S}}$, причем $\mu^*(A \cap E_m) < \infty$ хотя бы при одном значении $m$, то $\mu^*(\lim_n(A \cap \cap E_n)) = \lim_n \mu^*(A \cap E_n)$.

6. Если $\mu^*$ — внешняя мера на наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$, а $E$ и $F$ — два множества из $\mathbf{H}$, из которых хотя бы одно $\mu^*$-измеримо, то

$$\mu^*(E) + \mu^*(F) = \mu^*(E \cup F) + \mu^*(E \cap F).$$

7. Выводы этого параграфа могут быть получены также посредством разбиений (см. упр. 5 § 7). Назовем *разбиением* конечный или счетный класс $\{E_i\}$ непересекающихся множеств, такой, что $\bigcup_i E_i = X$. Пусть $\mu^*$ — внешняя мера на наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$; разбиение $\{E_i\}$ назовем *$\mu^*$-разбиением*, если, каково бы ни было множество $A$ из $\mathbf{H}$,

$$\mu^*(A) = \sum_i \mu^*(A \cap E_i).$$

Будем называть множество $E$ *$\mu^*$-множеством*, если $\{E, E'\}$ представляет собой $\mu^*$-разбиение. Разбиение $\{E_i\}$ называется *подразбиением* разбиения $\{F_j\}$, если всякое $E_i$ содержится в одном из $F_j$. *Произведением* двух произвольных разбиений $\{E_i\}$ и $\{F_j\}$ называется разбиение, образованное множествами вида $E_i \cap F_j$. Заметим, что $E$ представляет собой $\mu^*$-множкство тогда и только тогда, когда оно $\mu^*$-измеримо в смысле определения, приведенного в этом параграфе. Дальше последовательно доказываем следующие утверждения:

а) Произведение двух $\mu^*$-разбиений есть $\mu^*$-разбиение.

б) Если некоторое подразбиение разбиения $\{E_i\}$ есть $\mu^*$-разбиение, то само $\{E_i\}$ является $\mu^*$-разбиением.

в) $\{E_i\}$ представляет собой $\mu^*$-разбиение тогда и только тогда, когда каждое $E_i$ есть $\mu^*$-множество.

г) Класс всех $\mu^*$-множеств есть $\sigma$-кольцо. (Указание. Класс всех $\mu^*$-множеств есть кольцо, замкнутое относительно образования счетных соединений непересекающихся множеств.)

8. а) Внешняя мера $\mu^*$, заданная в классе $\mathbf{H}$ всех подмножеств метрического пространства $X$, называется *метрической* внешней мерой, если

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F),$$

коль скоро $d(E, F) > 0$, где $d$ — расстояние в $X$. Пусть $\mu^*$ — метрическая внешняя мера, $E$ — подмножество в $X$ и $U$ — некоторое содержащее $E$ открытое множество; если $E_n = E \cap \left\{x\colon d(x, U') \geqslant \frac{1}{n}\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\lim_n \mu^*(E_n) = \mu^*(E)$. [Указание. $\{E_n\}$ есть возрастающая последовательность множеств, соединение которых равно $E$; если $E_0 = 0$, $D_n = E_{n+1} - E_n$ и ни $D_{n+1}$, ни $E_n$ не пусты, то $d(D_{n+1}, E_n) > 0$, следовательно,

$$\mu^*(E_{2n+1}) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(D_{2i}) \quad \text{и} \quad \mu^*(E_{2n}) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(D_{2i-1}).$$

Требуемое равенство тривиально в том случае, когда один из рядов $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(D_{2i})$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(D_{2i-1})$ расходится; если же они оба сходятся, то следует воспользоваться неравенством

$$\mu^*(E) \leqslant \mu^*(E_{2n}) + \sum_{i=n}^{\infty} \mu^*(D_{2i}) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(D_{2i-1}).]$$

б) Если $\mu^*$ — метрическая внешняя мера, то всякое открытое множество и, следовательно, всякое борелевское множество $\mu^*$-измеримы. [Указание. Если $U$ — открытое множество, $A$ — произвольное подмножество в $X$, то следует применить «а» к множеству $E = A \cap U$. Так как $d(E_n, A \cap U') > 0$, то

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(E_n \cup (A \cap U')) = \mu^*(E_n) + \mu^*(A \cap U').]$$

в) Если $\mu^*$ — внешняя мера в классе всех подмножеств метрического пространства, такая, что всякое открытое множество оказывается $\mu^*$-измеримым, то $\mu^*$ — метрическая внешняя мера. (Указание. Если $d(E, F) > 0$, то возьмем открытое множество $U$, такое, что $E \subset U$ и $F \cap U = 0$, и запишем равенство, характеризующее измеримость $U$, взяв в качестве $A$ множество $E \cup F$.)

ГЛАВА 3

# ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕР

## § 12. Свойства индуцированных мер

Мы видели, что всякая мера индуцирует некоторую внешнюю меру, а всякая внешняя мера, в свою очередь, индуцирует некоторую меру. Если, исходя из некоторой меры $\mu$, образовать индуцированную ею внешнюю меру $\mu^*$, а затем меру $\bar{\mu}$, индуцированную этой последней, то каково соотношение между мерами $\mu$ и $\bar{\mu}$? Цель настоящего параграфа — получить ответ на этот вопрос. Всюду в этом параграфе мы будем предполагать, что $\mu$ — мера, заданная на некотором кольце $\mathbf{R}$, $\mu^*$ — индуцированная ею внешняя мера на $\mathbf{H}(\mathbf{R})$, $\bar{\mu}$ — индуцированная этой последней мера на $\sigma$-кольце $\overline{\mathbf{S}}$ всех $\mu^*$-измеримых множеств.

Теорема 1. *Всякое множество из* $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ $\mu^*$*-измеримо.*

Доказательство. Если $E \in \mathbf{R}$, $A \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$ и $\varepsilon > 0$, то, согласно определению $\mu^*$, существует последовательность $\{E_n\}$ множеств из $\mathbf{R}$, такая, что $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ и

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\mu(E_n \cap E) + \mu(E_n \cap E')) \geqslant$$
$$\geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E').$$

Так как это неравенство справедливо при любом $\varepsilon$, то $E$ оказывается $\mu^*$-измеримым. Другими словами мы доказали, что $\mathbf{R} \subset \overline{\mathbf{S}}$, а так как $\overline{\mathbf{S}}$ представляет собой $\sigma$-кольцо, то $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \subset \overline{\mathbf{S}}$. □

Теорема 2. *Если* $E \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$, *то*

$$\mu^*(E) = \inf\{\bar{\mu}(F) \colon E \subset F \in \overline{\mathbf{S}}\} = \inf\{\bar{\mu}(F) \colon E \subset F \in \mathbf{S}(\mathbf{R})\}.$$

Это означает, что внешние меры, индуцированные мерой $\bar{\mu}$, заданной на $\mathbf{S}(\mathbf{R})$, и мерой $\bar{\mu}$, заданной на $\overline{\mathbf{S}}$, совпадают с $\mu^*$.

Доказательство. Так как, в силу определения $\mu^*$ и теоремы 1 § 10, $\mu(F) = \bar{\mu}(F)$ тогда, когда $F \in \mathbf{R}$, то

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \colon E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \mathbf{R}, \quad n = 1, 2, \ldots\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_n) \colon E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \mathbf{S}(\mathbf{R}), \quad n = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Но всякую последовательность $\{E_n\}$ множеств из $\mathbf{S(R)}$, для которой

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = F\ ,$$

можно заменить последовательностью $\{F_n\}$ непересекающихся множеств из $\mathbf{S(R)}$, такой, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = F$ и $\mu(F_n) \leqslant \mu(E_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Далее, согласно определению $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}(F) = \mu^*(F)$ для $F$ из $\overline{\mathbf{S}}$; следовательно,
$\mu^*(E) \geqslant \inf\{\bar{\mu}(F)\colon E \subset F \in \mathbf{S(R)}\} \geqslant \inf\{\bar{\mu}(F)\colon E \subset F \in \overline{\mathbf{S}}\} \geqslant \mu^*(E)$. □

Множество $F$ из $\mathbf{S(R)}$ называется *измеримой оболочкой* некоторого множества $E$ из $\mathbf{H(R)}$, если $E \subset F$, и, каково бы ни было множество $G$ из $\mathbf{S(R)}$, содержащееся в $F - E$, непременно $\bar{\mu}(G) = 0$. Грубо говоря, измеримая оболочка множества $E$ из $\mathbf{H(R)}$ — это наименьшее множество из $\mathbf{S(R)}$, покрывающее $E$.

Теорема 3. *Если множество $E$ из $\mathbf{H(R)}$ имеет $\sigma$-конечную внешнюю меру, то оно обладает измеримой оболочкой $F$. При этом $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\mu^*(E) < \infty$. В силу теоремы 2, для всякого $n = 1, 2, \ldots$ в $\mathbf{S(R)}$ найдется множество $F_n$, такое, что

$$E \subset F_n \quad \text{и} \quad \bar{\mu}(F_n) \leqslant \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Положим $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$; тогда

$$E \subset F \in \mathbf{S(R)} \quad \text{и} \quad \mu^*(E) \leqslant \bar{\mu}(F) \leqslant \bar{\mu}(F_n) \leqslant \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Так как $n$ в этих неравенствах произвольно, то $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$. Если $G \subset F - E$, причем $G \in \mathbf{S(R)}$, то $E \subset F - G$ и, следовательно,

$$\bar{\mu}(F) = \mu^*(E) \leqslant \bar{\mu}(F - G) = \bar{\mu}(F) - \bar{\mu}(G) \leqslant \bar{\mu}(F).$$

Так как $\bar{\mu}(F) < \infty$, то $\bar{\mu}(G) = 0$, так что $F$ служит измеримой оболочкой множества $E$.

Если $\mu^*(E) = \infty$, то $E$, будучи множеством $\sigma$-конечной внешней меры, представляет собой соединение счетного числа непересекающихся множеств конечной внешней меры

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \mu^*(E_n) < \infty.$$

Пусть $F_n$ — измеримая оболочка множества $E_n$ и $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Тогда, очевидно, $F \in \mathbf{S(R)}$ и $E \subset F$. Если $G \subset F - E$, то $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, где $G_n = G \cap F_n$. Так как $G_n \subset F_n - E_n$, то $\bar{\mu}(G_n) = 0$, откуда $\bar{\mu}(G) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(G_n) = 0$. Мы видим, что $F$ служит измеримой оболочкой множества $E$. Равенство $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$ в рассматриваемом случае очевидно, так как $\bar{\mu}(F) = \infty$. □

Теорема 4. *Если $E \in \mathbf{H}(\mathbf{R})$ и $F$ — измеримая оболочка множества $E$, то $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$; если и $F_1$ и $F_2$ служат измеримыми оболочками множества $E$, то $\mu(F_1 \Delta F_2) = 0$.*

Доказательство. Из $E \subset F_1 \cap F_2 \subset F_1$ вытекает, что $F_1 - (F_1 \cap \cap F_2) \subset F_1 - E$, а так как $F_1$ служит измеримой оболочкой множества $E$, то

$$\bar{\mu}(F_1 - (F_1 \cap F_2)) = 0.$$

Подобным же образом доказывается, что

$$\bar{\mu}(F_2 - (F_1 \cap F_2)) = 0.$$

Отсюда

$$\bar{\mu}(F_1 \Delta F_2) = 0.$$

При $\mu^*(E) = \infty$ равенство $\mu^*(E) = \bar{\mu}(F)$ тривиально. При $\mu^*(E) < < \infty$ существование измеримой оболочки $F_0$ множества $E$, обладающей свойством

$$\bar{\mu}(F_0) = \mu^*(E),$$

обеспечено теоремой 3. Согласно же результатам предыдущего параграфа, любые две измеримые оболочки одного и того же множества имеют одинаковую меру. □

Теорема 5. *Если мера $\mu$ на $\mathbf{R}$ $\sigma$-конечна, то $\sigma$-конечны также меры $\bar{\mu}$ на $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ и $\bar{\mu}$ на $\bar{\mathbf{S}}$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 § 10, если $\mu$ $\sigma$-конечна, то $\mu^*$ $\sigma$-конечна. Поэтому для любого $E$ из $\bar{\mathbf{S}}$ существует последовательность $\{E_i\}$ множеств из $\mathbf{H}(\mathbf{R})$, такая, что

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \mu^*(E_i) < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Доказательство завершается применением теоремы 3 к каждому из множеств $E_i$. □

Помимо вопроса, сформулированного в начале этого параграфа, мы можем поставить такой вопрос. Если, исходя из некоторой внешней меры $\mu^*$, образовать индуцированную ею меру $\bar{\mu}$, а затем внешнюю меру $\bar{\mu}^*$, индуцированную мерой $\bar{\mu}$, то каково соотношение между $\mu^*$ и $\bar{\mu}^*$? Вообще говоря, эти две функции различны; если же $\bar{\mu}^*$ совпадает с исходной внешней мерой $\mu^*$, то $\mu^*$ называется *регулярной* внешней мерой. Утверждение теоремы 2, собственно, состоит в том, что если внешняя мера $\mu^*$ индуцирована некоторой мерой, заданной на кольце, то $\mu^*$ регулярна. Обратное также верно: если внешня мера $\mu^*$ регулярна, т. е. $\mu^* = \bar{\mu}^*$, то она индуцирована некоторой мерой, заданной на кольце, именно мерой $\bar{\mu}$ на кольце $\mu^*$-измеримых множеств. Таким образом, понятия индуцированной внешней меры и регулярной внешней меры равнообъемны.

### Упражнения

1. Теорема 4 утверждает, что измеримая оболочка, если она вообще существует, определяется однозначно с точностью до множества меры нуль; теорема 3 устанавливает существование измеримой оболочки у множества $\sigma$-конечной внешней меры. Следующий пример показывает, что условие $\sigma$-конечности внешней меры в теореме 3 не может быть опущено.

Пусть $X$ — эвклидова плоскость. Обозначим $\mathbf{R}_0$ класс множеств $E$ в $X$, могущих быть покрытыми конечным или счетным числом горизонтальных прямых, на каждой из которых либо $E$, либо его дополнение конечно или счетно. Пусть $\mathbf{R}$ — алгебра, порожденная классом $\mathbf{R}_0$. Если положить $\mu(E) = 0$ тогда, когда $E$ конечно или счетно, и $\mu(E) = \infty$ для несчетных $E$, то $\mu$ будет мерой на $\mathbf{R}$. Легко видеть, что в этом случае $\mathbf{R}=\mathbf{S}(\mathbf{R})$, а $\overline{\mathbf{S}}=\mathbf{H}(\mathbf{R})$ совпадает с классом всех подмножеств $X$. Если множество $E$ есть ось $y$ и $E\subset F\in\mathbf{S}(\mathbf{R})$, то в $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ всегда найдется множество $G$ такое, что $G\subset F-E$ и $\mu(G)\neq 0$.

2. Говорят, что множество $E$ на числовой прямой имеет *точку сгущения на бесконечности*, если вне любого конечного интервала оказывается несчетное подмножество множества $E$. Пусть $X$ — числовая прямая, а $E$ — любое ее подмножество. Зададим функцию $\mu^*$, положив $\mu^*(E)=0$, если $E$ конечно или счетно, $\mu^*(E)=1$, если $E$ несчетно, но не имеет точки сгущения на бесконечности, и $\mu^*(E)=\infty$, если $E$ обладает точкой сгущения на бесконечности. Тогда $\mu^*$ будет вполне $\sigma$-конечной внешней мерой, но индуцированная ею мера $\overline{\mu}$ не будет $\sigma$-конечной, так как $\mu^*$-измеримыми оказываются лишь множества, сами конечные или счетные, а также множества с конечными или счетными дополнениями. Регулярна ли $\mu^*$? Что получится, если для множеств с точкой сгущения на бесконечности положить $\mu^*(E)=17$?

3. Пусть $n$ — некоторое фиксированное целое положительное число, а $\aleph_0,\aleph_1,\ldots,\aleph_n$ — первые $n+1$ бесконечных мощностей, расположенные в порядке возрастания. Возьмем в качестве $X$ множество мощности $\aleph_n$ и зададим на его подмножествах функцию $\mu^*$, положив $\mu^*(\mathbf{E})=0$, если $E$ конечно, и $\mu^*(E)=k$, если $E$ обладает мощностью $\aleph_k$, $0\leqslant k\leqslant n$. Функция $\mu^*$ является внешней мерой; регулярна ли она?

4. Если $\mu^*$ — регулярная внешняя мера на наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}$, $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность множеств из $\mathbf{H}$ и $\lim\limits_n E_n=E$, то $\mu^*(E)=\lim\limits_n\mu^*(E_n)$. (Указание. В случае $\lim\limits_n\mu^*(E_n)=\infty$ результат очевиден. В противном случае возьмем $\mu^*$-измеримые оболочки $F_n$ множеств $E_n$, $n=1,2,\ldots$; они образуют возрастающую последовательность, предел которой обозначим $F$. Так как $\mu^*(F_n)=\mu^*(E_n)\leqslant\mu^*(E)$, то $\lim\limits_n\mu^*(F_n)=\mu^*(F)\leqslant\mu^*(E)$; с другой стороны, $E\subset F$, поэтому $\mu^*(E)\leqslant\mu^*(F)$. Таким образом, $F$ служит измеримой оболочкой множества $E$.) Для нерегулярных внешних мер этот результат неверен; соответствующий пример можно построить, опираясь на упр. 2.

5. Для любого подмножества $E$ произвольного множества $X$ положим $\mu^*(E)=0$ или 1, в зависимости от того, пусто $E$ или нет; при таком определении функция $\mu^*$ оказывается регулярной внешней мерой в классе всех подмножеств $X$. Если $\{E_n\}$ — убывающая последовательность непустых множеств с пустым пересечением (в бесконечном $X$ такая последовательность всегда существует), то $\lim\limits_n\mu^*(E_n)=1$, тогда как $\mu^*(\lim\limits_n E_n)=0$. Другими словами, для убывающих последовательностей свойство, аналогичное указанному в упр. 4, не имеет места, даже если внешняя мера вполне конечна и регулярна.

6. Пусть $\mu_1^*$ и $\mu_2^*$ — две конечные внешние меры, заданные на всевозможных подмножествах некоторого $X$, и пусть $\overline{\mathbf{S}}_i$, $i=1,2$, — класс $\mu_i^*$-измеримых множеств. Если задать $\mu^*$, положив для любого $E$, заключенного в $X$,

$$\mu^*(E)=\mu_1^*(E)+\mu_2^*(E),$$

то класс $\overline{\mathbf{S}}$ $\mu^*$-измеримых множеств совпадает с пересечением классов $\overline{\mathbf{S}}_1$ и $\overline{\mathbf{S}}_2$. (Указание. Равенство $\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E')=\mu^*(A)$ возможно только при $\mu_i^*(A\cap\cap E)+\mu_i^*(A\cap E')=\mu_i^*(A)$, $i=1,2$.) Что можно сказать, если не предполагать $\mu_1^*$ и $\mu_2^*$ конечными?

7. Пусть $\mu_1^*$ — любая конечная регулярная внешняя мера на всевозможных подмножествах множества $X$, а $\mu_2^*$ задана так, как $\mu^*$ в упр. 5. Тогда, хотя $\mu_2^*$ конечна и регулярна, но, если $\mu_1^*$ принимает больше двух различных значений, внешняя мера $\mu_1^*+\mu_2^*$ нерегулярна.

8. Если $X$ — метрическое пространство, а $p$ — положительное действительное число, то $p$-мерной *хаусдорфовой* (внешней) *мерой* множества $E$ в пространстве $X$ называется

$$\mu_p^*(E)=\sup_{\varepsilon>0}\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\delta(E_i))^p\colon E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\quad \delta(E_i)<\varepsilon,\quad i=1,2,\ldots\right\},$$

где $\delta(E)$ означает диаметр множества $E$:

а) Функция множества $\mu_p^*$ есть метрическая внешняя мера (см. упр. 8 § 11).

б) Внешняя мера $\mu_p^*$ регулярна; в самом деле, для любого подмножества $E$ пространства $X$ существует убывающая последовательность $\{U_n\}$ открытых множеств, содержащих $E$, такая, что

$$\mu_p^*(E)=\mu_p^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\right).$$

## § 13. Расширение и пополнение меры

Всегда ли можно распространить меру, заданную на некотором кольце, на порожденное им $\sigma$-кольцо? Ответ на этот вопрос, по существу, содержится в результатах предыдущих параграфов; формально он заключен в следующей теореме.

Теорема 1. *Если $\mu$ — $\sigma$-конечная мера, заданная на некотором кольце* $\mathbf{R}$, *то существует единственная мера* $\bar{\mu}$, *заданная на $\sigma$-кольце* $\mathbf{S}(\mathbf{R})$, *такая, что* $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ *для множеств $E$ из* $\mathbf{R}$; *при этом мера $\bar{\mu}$ $\sigma$-конечна.*

Мера $\bar{\mu}$ называется *расширением* меры $\mu$. Всюду, где это не может вызвать недоразумение, мы будем писать $\mu(E)$ вместо $\bar{\mu}(E)$ даже для множеств $E$ из $\mathbf{S}(\mathbf{R})$.

Доказательство. Существование меры $\bar{\mu}$ установлено теоремой 3 § 11 и теоремой 1 § 12. Для того чтобы доказать единственность, допустим, что на $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ заданы две меры $\mu_1$ и $\mu_2$, обладающие тем свойством, что $\mu_1(E) = \mu_2(E)$, коль скоро $E \in \mathbf{R}$. Пусть $\mathbf{M}$ — класс всех тех множеств из $\mathbf{S}(\mathbf{R})$, на которых $\mu_1$ и $\mu_2$ совпадают. Если одна из этих мер конечна и если $\{E_n\}$ — монотонная последовательность множеств из $\mathbf{M}$, то, так как

$$\mu_i(\lim_n E_n) = \lim_n \mu_i(E_n), \quad i = 1, 2,$$

мы приходим к заключению, что $\lim_n E_n \in \mathbf{M}$. (Здесь существенно используется тот факт, что при любом $n$ одно из чисел $\mu_1(E_n)$ и $\mu_2(E_n)$, а вместе с ним и другое, конечно; см. теоремы 4 и 5 § 9.) Таким образом, класс $\mathbf{M}$ монотонный, и так он содержит $\mathbf{R}$, то, согласно теореме 2 § 6, $\mathbf{M}$ охватывает $\mathbf{S}(\mathbf{R})$.

В общем случае, без всяких предположений о конечности мер $\mu_1$ и $\mu_2$, можно действовать следующим образом. Возьмем какое-нибудь множество $A$ из $\mathbf{R}$ конечной меры (безразлично, относительно $\mu_1$ или $\mu_2$, потому что на $\mathbf{R}$ обе меры совпадают). Так как $\mathbf{R} \cap A$ представляет собой кольцо, а $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \cap A$ — $\sigma$-кольцо, им порожденное (см. теорему 5 § 5), то к $\mathbf{R} \cap A$ и $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \cap A$ применимы рассуждения предыдущего абзаца, следовательно, $\mu_1$ и $\mu_2$ совпадают на $\mathbf{S}(\mathbf{R}) \cap A$. Но всякое множество $E$ из $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ может быть покрыто счетным числом непересекающихся множеств из $\mathbf{R}$, мера которых конечна, откуда и вытекает утверждение теоремы. $\square$

Процесс распространения меры, описанный в § 12, дает даже несколько больше, чем утверждается теоремой 1: заданная на $\mathbf{R}$ мера $\mu$ в действительности распространяется на класс всех $\mu^*$-измеримых множеств, который, вообще говоря, шире $\sigma$-кольца, порожденного кольцом $\mathbf{R}$. Следующая теорема показывает, что такое расширение области определения $\mu$ может быть осуществлено без помощи внешней меры.

Теорема 2. *Если $\mu$ — мера на некотором $\sigma$-кольце* $\mathbf{S}$, *то класс* $\overline{\mathbf{S}}$ *всех множеств вида* $E \Delta N$, *где* $E \in \mathbf{S}$, *а $N$ есть подмножество какого-либо множества меры нуль из* $\mathbf{S}$, *представляет собой $\sigma$-кольцо, и функция* $\bar{\mu}$, *определенная на* $\overline{\mathbf{S}}$ *равенством* $\bar{\mu}(E \Delta N) = \mu(E)$, *есть полная мера на* $\overline{\mathbf{S}}$.

Мера $\bar{\mu}$, таким образом определенная, называется *пополнением* меры $\mu$.

Доказательство. Пусть $E \in \mathbf{S}$ и $N \subset A \in \mathbf{S}$, где $\mu(A)=0$; тогда соотношения

$$E \cup N = (E - A)\Delta[A \cap (E \cup N)]$$

и

$$E \Delta N = (E - A) \cup [A \cap (E \Delta N)]$$

показывают, что $\overline{\mathbf{S}}$ можно охарактеризовать как класс множеств вида $E \cup N$, где $E \in \mathbf{S}$, а $N$ — подмножество некоторого множества меры нуль из $\mathbf{S}$. Отсюда следует, что класс $\overline{\mathbf{S}}$, который, очевидно, замкнут относительно образования симметрических разностей, замкнут также относительно образования счетных соединений, следовательно, $\overline{\mathbf{S}}$ представляет собой $\sigma$-кольцо. Если

$$E_1 \Delta N_1 = E_2 \Delta N_2,$$

где

$$E_i \in \mathbf{S}, \quad N_i \subset A_i \in \mathbf{S}, \quad \mu(A_i) = 0, \quad i = 1, 2,$$

то

$$E_1 \Delta E_2 = N_1 \Delta N_2$$

и, следовательно, $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$. Отсюда $\mu(E_1) = \mu(E_2)$, и мы видим, что равенства

$$\bar{\mu}(E \Delta N) = \bar{\mu}(E \cup N) = \mu(E)$$

действительно определяют $\bar{\mu}$ однозначно. Пользуясь представлением множеств, входящих в $\overline{\mathbf{S}}$ в виде $E \cup N$, нетрудно проверить, что $\bar{\mu}$ есть мера. Так как $\overline{\mathbf{S}}$ содержит все подмножества всевозможных множеств меры нуль из $\overline{\mathbf{S}}$, то мера $\bar{\mu}$ полная. □

Следующая теорема устанавливает связь между пополнением заданной меры и тем продолжением ее, которое строится посредством внешней меры.

Теорема 3. *Пусть $\mu$ — $\sigma$-конечная мера, заданная на некотором кольце $\mathbf{R}$, и $\mu^*$ — индуцированная ею внешняя мера. Тогда пополнение расширения меры $\mu$, заданного на $\mathbf{S}(\mathbf{R})$, совпадает с $\mu^*$ на всех $\mu^*$-измеримых множествах.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{S}^*$ — класс всех $\mu^*$-измеримых множеств, а $\overline{\mathbf{S}}$ — область определения пополнения $\bar{\mu}$ меры $\mu$. Так как $\mu^*$ представляет собой полную меру на $\mathbf{S}^*$, то $\overline{\mathbf{S}}$ содержится в $\mathbf{S}^*$, и на $\overline{\mathbf{S}}$ мера $\bar{\mu}$ совпадает с $\mu^*$. Мы покажем теперь, что $\mathbf{S}^*$ содержится в $\overline{\mathbf{S}}$. Мера $\mu^*$ $\sigma$-конечна на $\mathbf{S}^*$ (см. теорему 5 § 12), поэтому достаточно доказать, что если $E \in \mathbf{S}^*$ и $\mu^*(E) < \infty$, то $E \in \overline{\mathbf{S}}$.

Согласно теореме 3 § 12, множество $E$ обладает измеримой оболочкой $F$. Так как $\mu^*(F) = \mu(F) = \mu^*(E)$, $\mu^*(E) < \infty$ и $\mu^*$ есть мера на $\mathbf{S}^*$, то $\mu^*(F - E) = 0$. Множество $F - E$ также имеет измеримую оболочку $G$ и

$$\mu(G) = \mu^*(F - E) = 0,$$

поэтому равенство

$$E = (F - G) \cup (E \cap G)$$

представляет $E$ в виде соединения множества из $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ и подмножества некоторого множества из $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ меры нуль. Таким образом, $E \in \overline{\mathbf{S}}$, и теорема 3 доказана. □

Грубо говоря, теорема 3 утверждает, что в $\sigma$-конечном случае $\sigma$-кольцо всех $\mu^*$-измеримых множеств и $\sigma$-кольцо $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ разнятся весьма незначительно: всякое $\mu^*$-измеримое множество с точностью до множества меры нуль совпадает с некоторым множеством из $\mathbf{S}(\mathbf{R})$.

В заключение этого параграфа мы приведем очень полезную теорему, касающуюся связи между мерой в кольце и ее расширением в порожденном им $\sigma$-кольце.

Теорема 4. *Если $\mu$ — $\sigma$-конечная мера в некотором кольце $\mathbf{R}$, то для любого множества $E$ из $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ конечной меры и для любого положительного числа $\varepsilon$ в $\mathbf{R}$ существует множество $E_0$, такое, что $\mu(E\Delta E_0)<\varepsilon$.*

Доказательство. В силу результатов § 10–12 и теоремы 1

$$\mu(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\colon E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\quad E_i\in\mathbf{R},\quad i=1,2,\ldots\right\}.$$

Поэтому в $\mathbf{R}$ существует последовательность множеств $\{E_i\}$, такая, что

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\quad\text{и}\quad\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Big)\leqslant\mu(E)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Big)=\lim_n\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\Big),$$

то можно указать такое целое положительное $n$, что, обозначив

$$E_0=\bigcup_{i=1}^{n}E_i,$$

будем иметь

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Big)\leqslant\mu(E_0)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ясно, что $E_0\in\mathbf{R}$. Утверждение теоремы будет следовать из соотношений

$$\mu(E-E_0)\leqslant\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i-E_0\Big)=\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Big)-\mu(E_0)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\mu(E_0-E)\leqslant\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i-E\Big)=\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Big)-\mu(E)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.\qquad\square$$

### Упражнения

1. Пусть $\mu$ — конечная неотрицательная, конечно-аддитивная функция множества в кольце $\mathbf{R}$. Функция $\mu^*$, построенная согласно § 10, и в этом случае будет внешней мерой; следовательно, можно будет образовать меру $\bar{\mu}$, согласно теореме 3 § 11, но $\bar{\mu}$ не будет, вообще говоря, продолжением функции $\mu$ (см. упр. 2 § 10; 4 (e) § 10; 4 § 11).

2. Если $\bar{\mu}$ — расширение описанной в § 8 меры $\mu$, заданной в кольце $\mathbf{R}$, порожденном интервалами, то, каково бы ни было счетное множество $E$ из $\mathbf{S}(\mathbf{R})$, $\bar{\mu}(E)=0$.

3. Утверждение единственности в теореме 1 неверно, если класс $\mathbf{R}$, на котором задана мера $\mu$, не является кольцом. (Указание. Пусть $X=\{a,b,c,d\}$ — пространство, состоящее из четырех точек, и в классе всех его подмножеств заданы меры $\mu_1$ и $\mu_2$ следующим образом: $\mu_1(\{a\})=\mu_1(\{d\})=\mu_2(\{b\})=\mu_2(\{c\})=1$, $\mu_1(\{b\})=\mu_1(\{c\})=\mu_2(\{a\})=\mu_2(\{d\})=2$.)

4. Справедлива ли теорема 1 в том случае, когда $\mu$ задана на полукольце?

5. Пусть $\mathbf{R}$ — кольцо подмножеств счетного множества $X$, такое, что всякое непустое множество из $\mathbf{R}$ счетно, а $S(\mathbf{R})$ охватывает все подмножества $X$ (см. упр. 7 § 9). Для всякого $E$ из $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ положим $\mu_1(E)$ равным числу точек в $E$ и $\mu_2(E)=2\mu_1(E)$. Тогда $\mu_1$

и $\mu_2$ совпадают на $\mathbf{R}$, но не совпадают на $\mathbf{S}(\mathbf{R})$. Таким образом, утверждение единственности в теореме 1 неверно без условия $\sigma$-конечности мер на $\mathbf{R}$, хотя бы эти меры были вполне $\sigma$-конечны на $\mathbf{S}(\mathbf{R})$.

6. Предположим, что $\mu$ есть мера в $\sigma$-кольце $\mathbf{S}$, а $\bar{\mu}$ в кольце $\overline{\mathbf{S}}$ — ее пополнение. Если $A \in \mathbf{S}$, $B \in \mathbf{S}$, $A \subset E \subset B$ и $\mu(B - A) = 0$, то $E \in \overline{\mathbf{S}}$.

7. Пусть $X$ — какое-нибудь несчетное множество, $\mathbf{S}$ — класс его конечных или счетных подмножеств и их дополнений и для всякого $E$ из $\mathbf{S}$ $\mu(E)$ равно числу точек, входящих в $E$. При этом $\mu$ представляет собой полную меру в $\mathbf{S}$, и все подмножества в $X$ оказываются $\mu^*$-измеримыми. Таким образом, теорема 3 без предположения $\sigma$-конечности неверна.

8. Если $\mu$ и $\nu$ — $\sigma$-конечные меры в кольце $\mathbf{R}$, то для всякого множества $E$ из $\mathbf{S}(\mathbf{R})$, для которого $\mu(E) < \infty$ и $\nu(E) < \infty$, и для всякого положительного числа $\varepsilon$ в $\mathbf{R}$ найдется множество $E_0$, такое, что $\mu(E \Delta E_0) \leqslant \varepsilon$ и $\nu(E \Delta E_0) \leqslant \varepsilon$.

## § 14. Внутренние меры

Мы возвращаемся к изучению мер в общем виде, внешних мер и соотношений между ними, с целью изложения интересного и исторически важного раздела теории.

Мы видели, что если в $\sigma$-кольце $\mathbf{S}$ задана мера $\mu$, то функция $\mu^*$, определенная для всех множеств $E$ наследственного $\sigma$-кольца $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ равенством

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(F)\colon E \subset F \in \mathbf{S}\},$$

представляет собой внешнюю меру; в $\sigma$-конечном случае индуцированная внешней мерой $\mu^*$ мера $\bar{\mu}$ в $\sigma$-кольце $\overline{\mathbf{S}}$ всех $\mu^*$-измеримых множеств совпадает с пополнением меры $\mu$. Теперь мы определим *внутреннюю меру* $\mu_*$, индуцированную мерой $\mu$, положив для $E$ из $\mathbf{H}(\mathbf{S})$

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F)\colon E \supset F \in \mathbf{S}\}.$$

В этом параграфе мы изучим $\mu_*$ и ее связь с $\mu^*$; мы покажем, что свойства $\mu_*$ в некотором, вполне естественном, смысле двойственны свойствам $\mu^*$. Прежде всего мы заметим, что функция множества $\mu_*$ неотрицательна, монотонна и обращается в нуль на пустом множестве; этими свойствами внутренней меры мы будем пользоваться в дальнейшем без особых пояснений.

Итак, в этом параграфе всюду предполагается, что $\mu$ есть $\sigma$-конечная мера в некотором $\sigma$-кольце $\mathbf{S}$, $\mu^*$ и $\mu_*$ — индуцированны ею внешняя и внутренняя меры, $\bar{\mu}$ — мера в $\overline{\mathbf{S}}$ — пополнение меры $\mu$. Напоминаем, что $\bar{\mu}$ совпадает с $\mu^*$ в классе $\mu^*$-измеримых множеств (см. теорему 3 § 13).

Теорема 1. *Если* $E \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$, *то*

$$\mu_*(E) = \sup\{\bar{\mu}(F)\colon E \supset F \in \overline{\mathbf{S}}\}.$$

Доказательство. Так как $\mathbf{S} \subset \overline{\mathbf{S}}$, то прямо из определения $\mu_*$ вытекает неравенство

$$\mu_*(E) \leqslant \sup\{\bar{\mu}(F)\colon E \supset F \in \overline{\mathbf{S}}\}.$$

С другой стороны, согласно теореме 2 § 13, каково бы ни было $\mathbf{F}$ из $\overline{\mathbf{S}}$, в $\mathbf{S}$ существует множество $G$, такое, что $G \subset F$ и $\bar{\mu}(F) = \mu(G)$. Это означает, что любое значение меры $\bar{\mu}$ на $\overline{\mathbf{S}}$ достигается мерой $\mu$ на $\mathbf{S}$; тем самым теорема доказана. □

Множество $F$ из $\mathbf{S}$ называется *измеримым ядром* некоторого множества $E$ из $\mathbf{H}(\mathbf{S})$, если $F \subset E$ и, каково бы ни было множество $G$ из $\mathbf{S}$, содержащееся в $E - F$, непременно $\mu(G) = 0$. Грубо говоря, измеримое ядро множества $E$ есть наибольшее множество из $\mathbf{S}$, содержащееся в $E$.

Теорема 2. *Всякое множество из* $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ *обладает измеримым ядром.*

Доказательство. Пусть $\widehat{E}$ — измеримая оболочка множества $E$, а $N$ — измеримая оболочка множества $\widehat{E} - E$. Положим $F = \widehat{E} - N$; тогда

$$F = \widehat{E} - N \subset \widehat{E} - (\widehat{E} - E) = E,$$

и если $G \subset E - F$, то

$$G \subset E - (\widehat{E} - N) = E \cap N \subset N - (\widehat{E} - E).$$

Так как $N$ есть измеримая оболочка множества $\widehat{E} - E$, то из полученных включений следует, что $F$ является измеримым ядром множества $E$. □

Теорема 3. *Если* $E \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$, *а* $F$ *— измеримое ядро множества* $E$, *то* $\mu(F) = \mu_*(E)$. *Если* $F_1$ *и* $F_2$ *служат измеримыми ядрами множества* $E$, *то* $\mu(F_1 \Delta F_2) = 0$.

Доказательство. Так как $F \subset E$, то, очевидно, $\mu(F) \leqslant \mu_*(E)$. Если бы имело место неравенство $\mu(F) < \mu_*(E)$, то, согласно определению $\mu_*(E)$, в $\mathbf{S}$ существовало бы множество $F_0$, такое, что $F_0 \subset E$ и $\mu(F_0) > \mu(F)$; тогда мы имели бы

$$F_0 - F \subset E - F \quad \text{и} \quad \mu(F_0 - F) \geqslant \mu(F_0) - \mu(F) > 0,$$

что противоречит свойствам множества $F$. Таким образом, $\mu(F) = \mu_*(E)$.

Из соотношений $F_1 \subset F_1 \cup F_2 \subset E$ следует $(F_1 \cup F_2) - F_1 \subset E - F_1$. Поэтому, в силу того, что $F_1$ служит измеримым ядром множества $E$,

$$\mu((F_1 \cup F_2) - F_1) = 0;$$

подобным же образом

$$\mu((F_1 \cup F_2) - F_2) = 0.$$

Следовательно, $\mu(F_1 \Delta F_2) = 0$. □

Теорема 4. *Если* $\{E_n\}$ *— последовательность непересекающихся множеств из* $\mathbf{H}(\mathbf{S})$, *то*

$$\mu_*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(E_n).$$

Доказательство. Пусть $F_n$ — измеримое ядро множества $E_n$, $n = 1, 2, \ldots,$; тогда, в силу счетной аддитивности $\mu$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) = \mu_*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big). \qquad \square$$

Теорема 5. *Если* $A \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$, *а* $\{E_n\}$ *— последовательность непересекающихся множеств из* $\overline{\mathbf{S}}$, *такая, что* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, *то*

$$\mu_*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A \cap E_n).$$

Доказательство. Если $F$ — измеримое ядро множества $A \cap \cap E$, то

$$\mu_*(A \cap E) = \mu(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(F \cap E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A \cap E_n).$$

Обратное неравенство имеет место в силу теоремы 4. □

Теорема 6. *Если $E \in \overline{\mathbf{S}}$, то*

$$\mu^*(E) = \mu_*(E) = \bar{\mu}(E).$$

*Обратно, если $E \in \mathbf{H}(\mathbf{S})$ и*

$$\mu^*(E) = \mu_*(E) < \infty,$$

*то $E \in \overline{\mathbf{S}}$.*

Доказательство. Если $E \in \overline{\mathbf{S}}$, то как верхняя грань, фигурирующая в теореме 1, так и нижняя грань в теореме 2 § 12 достигаются функцией $\bar{\mu}$ на множестве $E$. Чтобы доказать обратное утверждение, возьмем измеримое ядро и измеримую оболочку множества $E$, обозначив их соответственно $A$ и $B$. Так как $\mu(A) = \mu_*(E) < \infty$, то

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A) = \mu^*(E) - \mu_*(E) = 0,$$

и требуемый результат вытекает из полноты меры $\bar{\mu}$ в $\overline{\mathbf{S}}$ (см. теорему 3 § 11, и упр. 6 § 13). □

Теорема 7. *Если $E$ и $F$ — непересекающиеся множества из $\mathbf{H}(\mathbf{S})$, то*

$$\mu_*(E \cup F) \leqslant \mu_*(E) + \mu^*(F) \leqslant \mu^*(E \cup F).$$

Доказательство. Пусть $A$ — измеримая оболочка множества $F$, а $B$ — измеримое ядро множества $E \cup F$. Так как $B - A \subset E$, то

$$\mu_*(E \cup F) = \mu(B) \leqslant \mu(B - A) + \mu(A) \leqslant \mu_*(E) + \mu^*(F).$$

Пусть теперь $A$ — измеримое ядро множества $E$, а $B$ — измеримая оболочка множества $E \cup F$. Тогда $B - A \supset F$ и

$$\mu^*(E \cup F) = \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geqslant \mu_*(E) + \mu^*(F). \qquad \square$$

Теорема 8. *Если $E \in \overline{\mathbf{S}}$, то, каково бы ни было подмножество $A$ пространства $X$,*

$$\mu_*(A \cap E) + \mu^*(A' \cap E) = \bar{\mu}(E).$$

Доказательство. Применив теорему 7 к множествам $A \cap E$ и $A' \cap E$, получим

$$\mu_*(E) \leqslant \mu_*(A \cap E) + \mu^*(A' \cap E) \leqslant \mu^*(E).$$

Но $E \in \overline{\mathbf{S}}$, поэтому, в силу теоремы 6, $\mu_*(E) = \mu^*(E) = \bar{\mu}(E)$. □

Результаты этого параграфа позволяют наметить еще один подход к построению расширения меры $\bar{\mu}$, которым часто пользуются. Пусть $\mu$ — $\sigma$-конечная мера на некотором кольце $\mathbf{R}$, $\mu^*$ — индуцированная ею внешняя мера в $\mathbf{H}(\mathbf{R})$; тогда для любого $E$ конечной меры из $\mathbf{R}$ и для любого $A$ из $\mathbf{H}(\mathbf{R})$

$$\mu_*(A \cap E) = \mu(E) - \mu^*(A' \cap E).$$

Это равенство может служить для определения внутренней меры, если мы покажем, что любые два множества $E$ и $F$ конечной меры из $\mathbf{R}$, такие, что $A \cap E = A \cap F$, удовлетворяют условию $\mu(E) - \mu^*(A' \cap E) = \mu(F) - \mu^*(A' \cap F)$. В самом деле, тогда можно сказать, что множество $E$ из $\mathbf{H(R)}$, имеющее конечную внешнюю меру, измеримо, если $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. Читатель сможет провести это построение во всех подробностях с помощью приемов, развитых в этой главе.

### Упражнения

1. Имеют ли место для $\mu_*$ свойства, сформулированные в упр. 4 § 12 для $\mu^*$?

2. При некоторых дополнительных условиях для внутренних мер справедливо предложение, двойственное тому, которое сформулировано в упр. 4 § 12; буквально это предложение на внутренние меры не распространяется (см. упр. 5 § 12).

3. Если $E$ — множество конечной меры из $\overline{\mathbf{S}}$ и $F \subset E$, то из $\bar{\mu}(E) = \mu^*(F) + \mu^*(E - F)$ следует, что $F \in \overline{\mathbf{S}}$. Другими словами, испытать $F$ на измеримость можно посредством одного фиксированного множества (содержащего $F$) из $\overline{\mathbf{S}}$, вместо того чтобы прибегать к всевозможным $A$ из $\mathbf{H(S)}$. [Указание. Можно воспользоваться теоремой 8.]

4. Верен ли для внутренних мер аналог предложения, сформулированного в упр. 6 § 11?

5. Если $E \in \mathbf{H(S)}$ и $F$ — измеримая оболочка множества $E$, то $\bar{\mu}(F \cap M) = \mu^*(E \cap M)$, каково бы ни было измеримое множество $M$. (Указание. Применить теорему 8 к множествам $E = F \cap M$ и $A = E'$.) Обратно, если множество $F$ обладает этим свойством и $E \subset F \in \mathbf{S}$, то $F$ служит измеримой оболочкой множества $E$. Подобным же образом, $F$ представляет собой измеримое ядро множества $E$ тогда и только тогда, когда $E \supset F \in \mathbf{S}$ и $\bar{\mu}(F \cap M) = \mu_*(E \cap M)$ для любого $M$ из $\overline{\mathbf{S}}$.

## § 15. Лебеговская мера

В этом параграфе мы применим общие методы теории продолжения меры к специальному случаю, рассмотренному в § 8, и установим относящиеся к этому случаю классические результаты; попутно будет введена терминология, установившаяся в этом круге вопросов.

Всюду в этом параграфе предполагается, что $X$ — числовая прямая, $\mathbf{P}$ — класс всех ограниченных полузамкнутых интервалов вида $[a, b)$, $\mathbf{S}$ — порожденное классом $\mathbf{P}$ $\sigma$-кольцо и $\mu$ — функция множества, заданная на $\mathbf{P}$ равенством $\mu([a, b)) = b - a$.

Множества, принадлежащие $\sigma$-кольцу $\mathbf{S}$, называются *борелевскими множествами* на прямой; согласно теоремам 5 § 8 и 1 § 13, мы можем считать, что мера $\mu$ определена на всех борелевских множествах. Множества класса $\overline{\mathbf{S}}$ называются *множествами, измеримыми в смысле Лебега*, а мера $\bar{\mu}$ на $\overline{\mathbf{S}}$, являющаяся пополнением меры $\mu$, — *лебеговской мерой*. Самое меру $\mu$ также называют обычно лебеговской.

Так как вся прямая $X$ представляет собой соединение счетного числа множеств из $\mathbf{P}$, то и $\mu$ на $\mathbf{S}$ и $\bar{\mu}$ на $\overline{\mathbf{S}}$ вполне $\sigma$-конечны. Некоторые другие интересные свойства $\mu$ и $\bar{\mu}$ перечислены в следующих теоремах.

Теорема 1. *Всякое счетное множество представляет собой борелевское множество меры нуль.*

Доказательство. Для любого $a (-\infty < a < \infty)$ имеем

$$\{a\} = \{x\colon x = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x\colon a \leqslant x < a + \frac{1}{n}\right\},$$

поэтому
$$\mu(\{a\}) = \lim_n \mu\left(\left[a, a+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Таким образом, всякое одноточечное множество есть борелевское множество меры нуль. Так как борелевские множества образуют $\sigma$-кольцо и мера $\mu$ счетно-аддитивна, то мы прямо получаем утверждение теоремы. □

Теорема 2. *Класс* $\mathbf{S}$ *борелевских множеств совпадает с* $\sigma$*-кольцом, порожденным классом* $\mathbf{U}$ *всех открытых множеств.*

Доказательство. Так как, каково бы ни было действительное число $a$, $\{a\}$ есть борелевское множество, то из соотношения $(a, b) = [a, b) - \{a\}$ следует, что всякий ограниченный открытый интервал является борелевским множеством. Далее, всякое открытое множество представляет собой соединение счетного числа ограниченных открытых интервалов, поэтому $\mathbf{S} \supset \mathbf{U}$ и, следовательно, $\mathbf{S} \supset \mathbf{S}(\mathbf{U})$. Чтобы установить обратное включение, заметим, что, каково бы ни было действительное число $a$,
$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n},\ a + \frac{1}{n}\right);$$
следовательно, $\{a\} \in \mathbf{S}(\mathbf{U})$. Из соотношения $[a, b) = (a, b) \cup \{a\}$ вытекает, что $\mathbf{P} \subset \mathbf{S}(\mathbf{U})$ и, следовательно,
$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{P}) \subset \mathbf{S}(\mathbf{U}). \qquad \square$$

Теорема 3. *Если* $\mathbf{U}$ — *класс всех открытых множеств, то для любого множества* $E$ *на прямой*
$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U)\colon E \subset U \in \mathbf{U}\}.$$

Доказательство. Так как $\mu^*(E) = \inf\{\mu(F)\colon E \subset F \in \mathbf{S}\}$, то из соотношения $\mathbf{U} \subset \mathbf{S}$ следует, что
$$\mu^*(E) \leqslant \inf\{\mu(U)\colon E \subset U \in \mathbf{U}\}$$
С другой стороны, в силу определения $\mu^*$, для любого положительного числа $\varepsilon$ существует последовательность множеств $\{[a_n, b_n)\}$, принадлежащих $\mathbf{P}$, такая, что
$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$$
и
$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \leqslant \mu^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Отсюда следует, что
$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n\right) = U \in \mathbf{U}$$
и
$$\mu(U) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon.$$
Утверждение теоремы вытекает из того, что $\varepsilon$ произвольно. □

Теорема 4. *Пусть* $T$ — *взаимно-однозначное отображение всей числовой прямой самой на себя, определенное формулой* $T(x) = \alpha x + \beta$, *где* $\alpha$ *и* $\beta$ — *действительные числа, причем* $\alpha \neq 0$. *Если для* *любого множества $E$ множества точек вида $T(x)$, где $x \in E$, обозначить $T(E)$, то*

$$\mu^*(T(E)) = |\alpha|\mu^*(E) \quad \text{и} \quad \mu_*(T(E)) = |\alpha|\mu_*(E).$$

*При этом множество $T(E)$ является борелевским или измеримым в смысле Лебега тогда и только тогда, когда множество $E$ соответственно борелевское или измеримое в смысле Лебега.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему для случая $\alpha > 0$. При $\alpha < 0$ отображение $T$ представляет собой результат наложения преобразований $T_1$ и $T_2$: $T(x) = T_1(T_2(x))$, где $T_1(x) = |\alpha|x + \beta$ и $T_2(x) = -x$. Читателю предоставляется доказать, что преобразование $T_2$ переводит борелевские множества в борелевские, а множества, измеримые в смысле Лебега, — в множества, измеримые в смысле Лебега, и что оно сохраняет как внутреннюю, так и внешнюю меру любого множества.

Итак, предположим, что $\alpha > 0$. Пусть $T(\mathbf{S})$ — класс множеств вида $T(E)$, где $E \in \mathbf{S}$. Ясно, что $T(\mathbf{S})$ представляет собой $\sigma$-кольцо, и нам нужно доказать, что $T(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$. Если $E = [a, b) \in \mathbf{P}$, то $E = T(F)$, где

$$F = \left[\frac{a-\beta}{\alpha}, \frac{b-\beta}{\alpha}\right) \in \mathbf{P};$$

таким образом, $E \in T(\mathbf{S})$ и, следовательно, $\mathbf{S} \subset T(\mathbf{S})$. Применив это же рассуждение к обратному преобразованию $T^{-1}$, мы придем к соотношению $\mathbf{S} \subset T^{-1}(\mathbf{S})$. Подвергнув $\mathbf{S}$ и $T^{-1}(\mathbf{S})$ преобразованию $T$, мы получим $T(\mathbf{S}) \subset \mathbf{S}$, откуда $T(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$.

Если для борелевских множеств $E$ мы положим

$$\mu_1(E) = \mu(T(E)) \quad \text{и} \quad \mu_2(E) = \alpha\mu(E),$$

то функции $\mu_1$ и $\mu_2$ будут мерами на $\mathbf{S}$. В том случае, когда $E = [a, b) \in \mathbf{P}$,

$$T(E) = [\alpha a + \beta, \alpha b + \beta)$$

и

$$\mu_1(E) = \mu(T(E)) = (\alpha b + \beta) - (\alpha a + \beta) = \alpha(b - a) = \alpha\mu(E) = \mu_2(E).$$

Согласно теоремам 5 § 8 и 1 § 13, $\mu(T(E)) = \alpha\mu(E)$ для любого множества $E$ из $\mathbf{S}$.

Применив к отображению $T^{-1}$ выводы двух предыдущих абзацев, мы получим равенства

$$\mu^*(T(E)) = \inf\{\mu(F)\colon T(E) \subset F \in \mathbf{S}\} =$$
$$= \inf\{\alpha\mu(T^{-1}(F))\colon E \subset T^{-1}(F) \in \mathbf{S}\} = \alpha \inf\{\mu(G)\colon E \subset G \in \mathbf{S}\} = \alpha\mu^*(E).$$

Взяв здесь всюду sup вместо inf, $\mu_*$ вместо $\mu^*$ и $\supset$ вместо $\subset$, придем к равенству

$$\mu_*(T(E)) = \alpha\mu_*(E),$$

где $E$ — произвольное множество.

Пусть теперь $E$ — множество, измеримое в смысле Лебега, и $A$ — любое множество. Тогда

$$\mu^*(A \cap T(E)) + \mu^*(A \cap (T(E))') =$$
$$= \mu^*(T(T^{-1}(A) \cap E)) + \mu^*(T(T^{-1}(A) \cap E')) =$$
$$= \alpha[\mu^*(T^{-1}(A) \cap E) + \mu^*(T^{-1}(A) \cap E')] = \alpha\mu^*(T^{-1}(A)) = \mu^*(A),$$

и мы видим, что $T(E)$ измеримо в смысле Лебега. Применив это же рассуждение к $T^{-1}$, мы завершим доказательство теоремы. □

**Упражнения**

1. Класс борелевских множеств совпадает с $\sigma$-кольцом, порожденным классом $\mathbf{C}$ всех замкнутых множеств, и для любого множества $E$

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(C)\colon E \supset C \in \mathbf{C}\}.$$

2. Для всякого измеримого в смысле Лебега множества $E$ существуют борелевские множества $A$ и $B$, такие, что

$$A \subset E \subset B \quad \text{и} \quad \mu(B - A) = 0;$$

при этом $A$ есть множество $F_\sigma$, а $B$ — множество $G_\delta$.

3. Всякое ограниченное множество имеет конечную внешнюю меру. Верно ли обратное утверждение?

4. Пусть $M$ — множество рациональных чисел, заключенных в замкнутом единичном интервале $X$. Точки множества $M$ каким-то образом занумерованы: $M = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ и для $i = 1, 2, \ldots$ пусть $F_i(\varepsilon)$ означает открытый интервал длины $\frac{\varepsilon}{2^i}$ с центром в точке $x_i$; положим $F(\varepsilon) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i(\varepsilon)$, $\quad F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F(\frac{1}{n})$. Справедливы следующие утверждения:

а) Можно указать $\varepsilon > 0$ и точку $x$ из $X$ таким образом, что $x \notin F(\varepsilon)$.

б) $F(\varepsilon)$ — открытое множество и $\mu(F(\varepsilon)) \leqslant \varepsilon$.

в) Множество $X - F(\varepsilon)$ нигде не плотно.

г) Множество $X - F$ первой категории, и, следовательно, $F$ несчетно, так как $X$ представляет собой полное метрическое пространство (отсюда, в частности, следует, что $F \neq M$).

д) Мера множества $F$ равна нулю.

Так как $F \supset M$, то из утверждения «д» вытекает, что $M$ (как и всякое счетное множество) имеет меру нуль. Более интересно то, что обнаружено существование несчетного множества меры нуль (см. упр. 5).

5. Представим число $x$ из замкнутого единичного интервала бесконечной троичной дробью:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}, \quad \alpha_n = 0, 1, 2, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

пусть $C$ — множество тех $x$, в представлении которых такими дробями можно обойтись без цифры 1. (Заметим, что если вместо $\sum \frac{\alpha_n}{3^n}$ писать, по аналогии с десятичными дробями, $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$, то, например, $\frac{1}{3} = 0{,}100\ldots = 0{,}222\ldots$; поэтому $\frac{1}{3} \in C$. В то же время $\frac{1}{2} = 0{,}111\ldots$, и представить $\frac{1}{2}$ иначе в троичной системе невозможно, следовательно, $\frac{1}{2} \notin C$.) Возьмем последовательность открытых интервалов: $X_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ — «средняя треть» замкнутого отрезка $X$; $X_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $X_3 = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ — «средние трети» двух отрезков, соединение которых есть $X - X_1$; $X_4$, $X_5$, $X_6$, $X_7$ — «средние трети» четырех отрезков, образующих $X - (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$, т. д. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) $C = X - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. (У к а з а н и е. Представить все $x$ из $X$ в виде $x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ таким образом, чтобы для каждого $x$, принадлежащего $C$, все соответствующие $\alpha_n$ были равны 0 или 2. Такое представление $x$ единственно, и $x \in X_1$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = 1$; $x \in X_2 \cup X_3$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \neq 1$, $\alpha_2 = 1$; $x \in X_4 \cup X_5 \cup X_6 \cup X_7$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \neq 1$, $\alpha_2 \neq 1$, $\alpha_3 = 1$ и т. д.)

б) $\mu(C) = 0$.

в) $C$ нигде не плотно. (У к а з а н и е. Предположите, что $X$ содержит открытый интервал, не пересекающийся с $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.)

г) $C$ — совершенное множество. (У к а з а н и е. Никакие два интервала из последовательности $X_1, X_2, \ldots$ не пересекаются.)

д) $C$ имеет мощность континиуума. (У к а з а н и е. Поставим в соответствие числу $x$ из $C$, представленному бесконечной троичной дробью $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$, в которой $\alpha_n = 0$ или 2, число $y$, представляющееся бесконечной *двоичной* дробью $0, \beta_1 \beta_2, \ldots$, где $\beta_n = \frac{1}{2} \alpha_n$. Это соответствие между $C$ и $X$ не взаимно-однозначно, но оно взаимно-однозначно между иррациональными числами, входящими в $C$, и иррациональными числами интервала $X$. Иначе можно доказать это, опираясь на утверждение «г».) $C$ называется *канторовым множеством.*

6. Так как класс всех борелевских множеств имеет мощность континиуума (см. упр. 9 § 5), а всякое подмножество канторова множества измеримо в смысле Лебега (см. утверждение «б»), то существуют множества, измеримые в смысле Лебега и не являющиеся борелевскими множествами.

7. Множество точек замкнутого единичного интервала, изображаемых бесконечными двоичными дробями, в которых на всех четных местах стоят нули, измеримо в смысле Лебега и имеет меру нуль.

8. Пусть $X$ — окружность в эвклидовой плоскости. На борелевских множествах в $X$ можно единственным образом задать меру $\mu$, инвариантную относительно всех вращений этой окружности и такую, что $\mu(X) = 1$. (Множество на окружности назовем борелевским, если оно принадлежит $\sigma$-кольцу, порожденному классом всех открытых дуг этой окружности.)

9. Пусть $g$ — конечная возрастающая непрерывная функция действительного переменного. Тогда на некотором $\sigma$-кольце $\mathbf{S}_g$, содержащем все борелевские множества, можно единственным образом задать полную меру $\bar{\mu}_g$, такую, что $\bar{\mu}_g([a, b)) = g(b) - g(a)$, и для всякого $E$ из $\mathbf{S}_g$ существует борелевское множество $F$, для которого $\bar{\mu}_g(E \Delta F) = 0$ (см. упр. 3 § 8). Мера $\bar{\mu}_g$ называется *мерой Лебега—Стильтьеса, порожденной* функцией $g$.

## § 16. Неизмеримые множества

Рассмотрения предыдущего параграфа не достаточно тонки для того, чтобы полностью выяснить строение множеств на прямой, измеримых в смысле Лебега. В частности, далеко не тривиален вопрос, существуют ли вообще неизмеримые множества. Цель этого параграфа — ответить на этот вопрос, а также на некоторые смежные вопросы. Приемы, которые мы здесь употребим, заметно отличаются от тех, которыми мы пользовались до сих пор. Но многие из них постоянно употребляются в теории меры, особенно при построении различных примеров, поэтому мы изложим эти приемы во всех подробностях. Обозначения здесь те же, что в § 15.

Если $E$ — какое-нибудь множество на числовой прямой, то $E + a$, где $a$ — фиксированное действительное число, будет обозначать множество всех чисел вида $x + a$, где $x \in E$; вообще, если $E$ и $F$ — множества на числовой прямой, то $E + F$ будет означать множество всех чисел вида $x + y$, где $x \in E$ и $y \in F$. Символом $D(E)$ мы будем обозначать *множество разностей* $x - y$, в которых и $x$ и $y$ входят в $E$.

Теорема 1. *Если $E$ — множество, измеримое в смысле Лебега, конечной положительной меры и $0 \leqslant \alpha < 1$, то существует открытый интервал $U$, такой, что $\bar{\mu}(E \cap U) \geqslant \alpha \bar{\mu}(U)$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{U}$ — класс всевозможных открытых множеств. Согласно теореме 3 § 15, $\bar{\mu}(E) = \inf\{\mu(U)\colon E \subset U \in \mathbf{U}\}$, поэтому можно выбрать такое открытое множество $U_0$, что $E \subset U_0$ и $\alpha\mu(U_0) \leqslant \bar{\mu}(E)$. Отсюда, если $\{U_n\}$ — последовательность непересекающихся открытых интервалов, соединение которых равно $U_0$, то

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \leqslant \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E \cap U_n).$$

Следовательно, хотя бы для одного значения $n$ должно выполняться неравенство $\alpha\mu(U_n) \leqslant \bar{\mu}(E \cap U_n)$; в качестве $U$ мы возьмем такое $U_n$. $\square$

Теорема 2. *Каково бы ни было измеримое в смысле Лебега множество $E$ положительной меры, существует открытый интервал, содержащий нуль и целиком содержащийся в множестве $D(E)$.*

Доказательство. В том случае, когда $E$ содержит какой-нибудь открытый интервал, утверждение тривиально. В общем случае мы прибегнем к теореме 1, согласно которой можно выбрать такой интервал $U$, что

$$\bar{\mu}(E \cap U) \geqslant \frac{3}{4}\mu(U).$$

Если $-\frac{1}{2}\mu(U) < x < \frac{1}{2}\mu(U)$, то множество

$$(E \cap U) \cup ((E \cap U) + x)$$

заключено в интервале $U \cup (U+x)$, длина которого меньше $\frac{3}{2}\mu(U)$. Если бы множества $E \cap U$ и $(E \cap U) + x$ не пересекались, то, раз они имеют одинаковую меру,

$$\bar{\mu}((E \cap U) \cup ((E \cap U) + x)) = 2\bar{\mu}(E \cap U) \geqslant \frac{3}{2}\mu(U).$$

Следовательно, по крайней мере одна точка из $E \cap U$ принадлежит множеству $(E \cap U) + x$, откуда следует, что $x \in D(E)$. Мы показали, что интервал $\left(-\frac{1}{2}\mu(U), \frac{1}{2}\mu(U)\right)$ обладает свойством, утверждаемым теоремой. □

Теорема 3. *Если $\xi$ — иррациональное число, то множество $A$ всех чисел вида $n+m\xi$, где $n$ и $m$ — произвольные целые числа, всюду плотно на числовой прямой. Тем же свойством обладает его подмножество $B$ чисел вида $n + m\xi$ с четным $n$ и подмножество $C$ чисел вида $n + m\xi$ с нечетным $n$.*

Доказательство. Для любого целого положительного $i$ существует единственное целое число $n_i$, положительное, отрицательное или равное нулю, такое, что $0 \leqslant n_i + i\xi < 1$; обозначим $x_i = n_i + i\xi$. Пусть $U$ — произвольный интервал. Возьмем целое положительное число $k$, удовлетворяющее неравенству $\mu(U) > \frac{1}{k}$. Тогда среди $k+1$ чисел $x_1, \ldots, x_{k+1}$, заключенных в единичном интервале, найдутся по меньшей мере два, $x_i$ и $x_j$, такие, что $|x_i - x_j| < \frac{1}{k}$. Отсюда следует, что некоторое целое кратное разности $x_i - x_j$, т. е. некоторый элемент множества $A$, попадает в интервал $U$. Тем самым утверждение теоремы, относящееся к множеству $A$, доказано. Доказательство для множества $B$ можно провести таким же путем, только вместо единичного интервала следует взять интервал $[0, 2)$. Справедливость теоремы для множества $C$ вытекает из равенства $C = B + 1$. □

Теорема 4. *Существует по крайней мере одно множество $E_0$, не являющееся измеримым в смысле Лебега.*

Доказательство. Для двух действительных чисел $x$ и $y$ мы будем писать (только в этом доказательстве) $x \sim y$, если $x - y \in A$, где $A$ — множество, описанное в предыдущей теореме и соответствующее какому-нибудь фиксированному $\xi$. Легко убедиться в том, что отношение «$\sim$» рефлективно, симметрично и транзитивно, и, следовательно, все действительные числа разбиваются на непересекающиеся множества, каждое из которых образовано числами, находящимися в отношении «$\sim$» с некоторым определенным числом. Согласно аксиоме выбора, существует множество $E_0$, содержащее в точности по одной точке из каждого такого множества. Мы докажем, что $E_0$ неизмеримо.

Пусть $F$ — какое-нибудь борелевское множество, содержащееся в $E_0$. Так как множество разностей $D(F)$ не может содержать никаких отличных от нуля элементов множества $A$, то, в силу теоремы 2, множество $F$ должно иметь меру нуль. Следовательно, $\mu_*(E_0)=0$. Другими словами, если бы $E_0$ было измеримым по Лебегу, то его мера должна была бы равняться нулю.

Заметим теперь, что если $a_1$ и $a_2$ представляют собой различные элементы из $A$, то множества $E_0+a_1$ и $E_0+a_2$ не пересекаются. В самом деле, если допустить, что $x_1+a_1=x_2+a_2$, где $x_1\in E_0$ и $x_2\in E_0$, то $x_1-x_2=a_2-a_1\in A$, т. е. $x_1\sim x_2$, что противоречит определению множества $E_0$. Далее, счетный класс множеств вида $E_0+a$, где $a\in A$, покрывает всю числовую прямую, т. е $E_0+A=X$, поэтому если бы $E_0$ было измеримо в смысле Лебега, то все $E_0+a$ были бы измеримы в смысле Лебега и имели бы ту же меру, что $E_0$. Следовательно, допущение, что $E_0$ измеримо в смысле Лебега, приводит к нелепому выводу: $\mu(X)=0$. □

Это — известное доказательство теоремы 4. Однако нам понадобится в дальнейщем, для построения некоторых примеров, следующая, более сильная

Теорема 5. *На числовой прямой существует множество $M$, такое, что, каково бы ни было множество $E$, измеримое в смысле Лебега,*
$$\mu_*(M\cap E)=0 \quad \text{и} \quad \mu^*(M\cap E)=\bar{\mu}(E).$$

Доказательство. Пусть $A=B\cup C$ (см. теорему 3), а $E_0$ — множество, описанное в доказательстве предыдущей теоремы. Положим
$$M=E_0+B\ .$$

Пусть $F$ — какое-нибудь борелевское множество, содержащееся в $M$. Тогда, так как множество разностей $D(F)$ не может содержать ни одного элемента из всюду плотного множества $C$, то, в силу теоремы 2, $\mu_*(M)=0$. Из соотношений же
$$M'=E_0+C=E_0+(B+1)=M+1$$
вытекает, что и $\mu_*(M')=0$ (см. теорему 4 § 15). Если $E$ — произвольное множество, измеримое в смысле Лебега, то, в силу монотонности внутренней меры, $\mu_*(M\cap E)=\mu_*(M'\cap E)=0$. Отсюда, согласно теореме 8 § 14, $\mu^*(M\cap E)=\bar{\mu}(E)$. □

Из результатов этого параграфа, между прочим, следует, что лебеговскую меру нельзя распространить на класс *всех* подмножеств действительной прямой, так чтобы распространенная функция множества была мерой, инвариантной относительно переносов.

### Упражнения

1. Если $E$ — множество, измеримое в смысле Лебега, обладающее тем свойством, что для всякого $x$ из некоторого всюду плотного множества
$$\bar{\mu}(E\Delta(E+x))=0,$$
то либо $\bar{\mu}(E)=0$, либо $\bar{\mu}(E')=0$.

2. Пусть $\mu$ — $\sigma$-конечная мера на некотором $\sigma$-кольце $\mathbf{S}$ подмножеств пространства $X$, а $\mu^*$ и $\mu_*$ — соответственно верхняя и нижняя меры, индуцированные мерой $\mu$ на $\mathbf{H}(\mathbf{S})$. Пусть $M$ — произвольное множество из $\mathbf{H}(\mathbf{S})$ и $\widetilde{\mathbf{S}}$ — $\sigma$-кольцо, порожденное классом всех подмножеств из $\mathbf{S}$ совместно с множеством $M$. Следующая цепочка утверждений приводит к доказательству того, что мера $\mu$ может быть продолжена на $\widetilde{\mathbf{S}}$:

а) $\sigma$-кольцо $\widetilde{\mathbf{S}}$ состоит из всевозможных множеств вида $(E \cap M)\Delta(F \cap M')$, где $E \in \mathbf{S}$, $F \in \mathbf{S}$. [Указание. Достаточно обнаружить, что класс множеств указанного вида образует $\sigma$-кольцо. Заметим, что $(E \cap M)\Delta(F \cap M') = (E \cap M) \cup (F \cap M')$.]

б) Если $\mu^*(M) < \infty$, $G$ и $H$ — соответственно измеримое ядро и измеримая оболочка множества $M$ и $D = H - G$, то пересечение любого множества из $\widetilde{\mathbf{S}}$ с $D'$ принадлежит $\mathbf{S}$.

в) В $\mathbf{S}$ содержатся множества $G$ и $H$, такие, что $G \subset M \subset H$, $\mu_*(M - G) = \mu_*(H - M) = 0$, и если $D = H - G$, то пересечение с $D'$ любого множества из $\widetilde{\mathbf{S}}$ принадлежит $\mathbf{S}$. (Указание. Существует такая последовательность $\{X_n\}$ попарно непересекающихся множеств из $\mathbf{S}$, что $\mu(X_n) < \infty$ и $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \cap X_n)$.)

г) В тех же обозначениях $\mu_*(M \cap D) = \mu_*(M' \cap D) = 0$ и, следовательно, $\mu^*(M \cap D) = \mu^*(M' \cap D) = \mu(D)$.

д) В тех же обозначениях, если

$$[(E_1 \cap M)\Delta(F_1 \cap M')] \cap D = [(E_2 \cap M)\Delta(F_2 \cap M')] \cap D,$$

где $E_1$, $F_1$, $E_2$ и $F_2$ принадлежат $\mathbf{S}$, то

$$\mu(E_1 \cap D) = \mu(E_2 \cap D) \quad \text{и} \quad \mu(F_1 \cap D) = \mu(F_2 \cap D).$$

Указание. Воспользоваться тем, что из

$$[(E_1 \Delta E_2) \cap M \cap D]\Delta[(F_1 \Delta F_2) \cap M' \cap D] = 0$$

следует

$$(E_1 \cap D)\Delta(E_2 \cap D) \subset M' \cap D \quad \text{и} \quad (F_1 \cap D)\Delta(F_2 \cap D) \subset M \cap D.]$$

е) Пусть $\alpha$ и $\beta$ — неотрицательные числа, такие, что $\alpha + \beta = 1$. Пользуясь теми же обозначениями, положим

$$\bar{\mu}((E \cap M)\Delta(F \cap M')) = \mu([(E \cap M)\Delta(F \cap M')] \cap D') + \alpha\mu(E \cap D) + \beta\mu(F \cap D).$$

Тогда $\widetilde{\mu}$ представляет собой меру на $\widetilde{\mathbf{S}}$, совпадающую на $\mathbf{S}$ с $\mu$.

3. Если $\mu$ — $\sigma$-конечная мера на некотором $\sigma$-кольце $\mathbf{S}$ и если $\{M_1, \ldots, M_n\}$ — конечный класс множеств, принадлежащих наследственному $\sigma$-кольцу $\mathbf{H}(\mathbf{S})$, то $M_1, \ldots, M_n$ могут быть присоединены к $\mathbf{S}$ и на $\sigma$-кольце $\widetilde{\mathbf{S}}$, порожденном классом $\mathbf{S} \cup \{M_1, \ldots, M_n\}$, можно определить меру $\widetilde{\mu}$, совпадающую на $\mathbf{S}$ с $\mu$.

4. Следующий пример полезен для интуитивного овладения понятием неизмеримого множества. Фактически все основные свойства неизмеримых множеств могут быть обнаружены на этом примере. Пусть $X = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ — единичный квадрат. Для любого подмножества $E$ интервала $[0, 1]$ положим

$$\widehat{E} = \{(x, y)\colon x \in E, 0 \leqslant y \leqslant 1\} \subset X.$$

Пусть $\mathbf{S}$ — класс множеств $\widehat{E}$, соответствующих измеримым в смысле Лебега множествам $E$. Положим $\mu(\widehat{E})$ равной лебеговской мере множества $E$. Тогда множество $M = \left\{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1, y = \frac{1}{2}\right\}$ будет неизмеримым: $\mu_*(M) = 0$ и $\mu^*(M) = 1$.

5. Пусть $\mu^*$ — регулярная внешняя мера в классе всех подмножеств некоторого множества $X$, такая, что $\mu(X) = 1$. Возьмем такое подмножество $M$ в $X$, для которого $\mu_*(M) = 0$ и $\mu^*(M) = 1$ (см. теорему 5 и упр. 4). Тогда функция $\nu^*$, определенная равенством $\nu^*(E) = \mu^*(E) + \mu^*(E \cap M)$, представляет собой внешнюю меру (см. упр. 5 и 7 § 10).

а) Множество $E$ $\nu^*$-измеримо тогда и только тогда, когда оно $\mu^*$-измеримо (см. упр. 6 § 12).

б) $\inf \nu^*(E)$ по всем $\nu^*$-измеримым множествам $E$, содержащим заданное множество $A$, равняется $2\mu^*(A)$. [Указание. Если $E$ $\nu^*$-измеримо, то $\mu^*(E \cap M) = \mu^*(E)$.]

в) Внешняя мера $\nu^*$ нерегулярна. (Указание. Проверить на множестве $M'$.)

ГЛАВА 4

# ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

## § 17. Пространства с мерой

*Измеримым пространством* назовем множество $X$ с выделенным в нем $\sigma$-кольцом $\mathbf{S}$ подмножеств, обладающим тем свойством, что $\bigcup \mathbf{S} = X$. Обычно можно, не опасаясь путаницы, обозначать измеримое пространство той же буквой $X$, что и само множество. В тех случаях, однако, когда важно подчеркнуть выделенное $\sigma$-кольцо, мы будем пользоваться обозначением $(X, \mathbf{S})$. Множество $E$ в пространстве $X$ принято называть *измеримым* тогда и только тогда, когда $E$ принадлежит $\sigma$-кольцу $\mathbf{S}$. Такая терминология не означает, однако, что $\mathbf{S}$ представляет собой $\sigma$-кольцо $\mu^*$-измеримых множеств относительно некоторой внешней меры, которая задана или хотя бы может быть задана на $\mathbf{S}$.

Пользуясь термином «измеримое множество», можно сформулировать условие, фигурирующее в определении измеримого пространства, сказав, что соединение всех измеримых множеств равно всему пространству или что каждая точка пространства принадлежит некоторому измеримому множеству. Цель этого ограничения состоит в том, чтобы, исключив из рассмотрения точки (или целые участки) пространства, несущественные с точки зрения теории меры, избавиться тем самым от многочисленных очевидных оговорок.

*Пространством с мерой* назовем измеримое пространство $(X, \mathbf{S})$ с заданной на $\mathbf{S}$ мерой $\mu$. Так же как для измеримого пространства, мы условимся и пространство с мерой обычно обозначать той же буквой $X$. В тех случаях, когда важно подчеркнуть выделенное $\sigma$-кольцо и заданную на нем меру, мы будем пользоваться обозначением $(X, \mathbf{S}, \mu)$. Будем говорить, что имеем пространство с (вполне) конечной, $\sigma$-конечной или полной мерой тогда, когда мера $\mu$ обладает соответствующим свойством. В пространстве с мерой мы будем, без особых пояснений, вводить внешнюю меру $\mu^*$ и (в $\sigma$-конечном случае) внутреннюю меру $\mu_*$, индуцированные мерой $\mu$ на наследственном $\sigma$-кольце $\mathbf{H}(\mathbf{S})$.

Большинство результатов предыдущей главы, как в основном тексте так и в примерах, относится к превращению определенных измеримых пространств в пространства с мерой. В этом параграфе мы сделаем несколько общих замечаний об измеримых пространствах и о пространствах с мерой, а в остальных параграфах этой главы и в дальнейших главах займемся рассмотрением функций, заданных на пространствах с мерой, методами построения новых пространств с мерой из некоторых исходных, и, наконец, изучением особенно важных частных случаев.

Заметим прежде всего, что всякое измеримое подмножество $X_0$ пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ само может рассматриваться как пространство с мерой $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$, в котором в качестве $\mathbf{S}_0$ взят класс измеримых подмножеств множества $X_0$, а $\mu_0$ определена на таких подмножествах равенством $\mu_0(E) = \mu(E)$. Обратно, если некоторое подмножество $X_0$ множества $X$ представляет собой пространство с мерой $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$, то само $X$ может быть обращено в пространство с мерой, если отнести к $\mathbf{S}$ те множества в $X$, пересечения которых с $X_0$ принадлежат $\mathbf{S}_0$, а $\mu$ определить на $\mathbf{S}$ равенством $\mu(E) = \mu_0(E \cap X_0)$. Подобные же замечания справедливы, конечно, и для измеримых пространств. Часто бывает удобно пользоваться некоторым видоизменением указанной конструкции даже и тогда, когда $X$ уже является пространством с мерой. Если $X_0$ — какое-нибудь измеримое множество в пространстве $X$, то в классе всех измеримых подмножеств пространства $X$ можно задать новую меру $\mu_0$, положив $\mu_0(E) = \mu(E \cap X_0)$; легко проверить, что $(X, \mathbf{S}, \mu_0)$ оказывается при этом пространством с мерой.

К чему приведут построения, указанные в предыдущем абзаце, если в качестве $X_0$ взять неизмеримое множество? Для того чтобы выделить случай, когда такого рода построения могут оказаться полезными, введем следующее новое понятие. Множество $X_0$ в пространстве с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ назовем *массивным*, если $\mu_*(E - X_0) = 0$, каково бы ни было измеримое множество $E$. Если само $X$ измеримо, то $X_0$ массивно тогда и только тогда, когда $\mu_*(X - X_0) = 0$; если $\mu$ — вполне конечная мера, то $X_0$ оказывается массивным подмножеством тогда и только тогда, когда $\mu^*(X_0) = \mu(X)$ (примеры массивных подмножеств указаны в теореме 5 § 16 и в упр. 4 § 16). Следующий результат, несколько более глубокий, нежели замечания предыдущего абзаца, состоит в том, что всякое массивное множество в пространстве с мерой также может быть рассматриваемо как пространство с мерой.

Теорема 1. *Пусть $X_0$ — массивное множество в пространстве с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$. Если $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S} \cap X_0$ и $\mu_0(E \cap X_0) = \mu(E)$ для множеств $E$, принадлежащих $\mathbf{S}$, то $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$ представляет собой пространство с мерой.*

Доказательство. Если множества $E_1$ и $E_2$ из $\mathbf{S}$ таковы, что $E_1 \cap X_0 = E_2 \cap X_0$, то $(E_1 \Delta E_2) \cap X_0 = 0$, поэтому $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$ и $\mu(E_1) = \mu(E_2)$. Другими словами, мера $\mu_0$ определена на $\mathbf{S}_0$ однозначно.

Рассмотрим какую-нибудь последовательность $\{F_n\}$ непересекающихся множеств из $\mathbf{S}_0$; пусть

$$F_n = E_n \cap X_0,$$

где $E_n \in \mathbf{S}$. Если

$$\widetilde{E}_n = E_n - \bigcup_{n=1}^{n} E_i, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то

$$(\widetilde{E}_n \Delta E_n) \cap X_0 = (F_n - \bigcup_{i=1}^{n} F_i) \Delta F_n = F_n \Delta F_n = 0,$$

следовательно, $\mu(\widetilde{E}_n \Delta E_n) = 0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\widetilde{E}_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n).$$

Таким образом, $\mu_0$ действительно представляет собой меру. □

**Упражнения**

1. Справедливо предложение, обратное теореме 1: если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с мерой и $X_0$ — подмножество $X$, обладающее тем свойством, что $E_1 \cap X_0 = E_2 \cap X_0$ влечет за собой равенство $\mu(E_1) = \mu(E_2)$, то $X_0$ является массивным подмножеством в $X$. (Указание. Если $F = E - X_0$, то $(E - F) \cap X_0 = E \cap X_0$.)

2. В $\sigma$-конечном случае теорема 1 может быть доказана иначе с помощью результата, содержащегося в упр. 2 § 16.

3. Следующее предложение показывает, что пространства с конечной мерой лишь незначительно отличаются от пространств с вполне конечной мерой, хотя на первый взгляд последние образуют гораздо более специальный класс пространств. В любом пространстве с конечной мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ существует массивное измеримое множество. (Указание. Пусть $c = \sup\{\mu(\mathbf{E}): E \in \mathbf{S}\}$; тогда, если $\{E_n\}$ — последовательность измеримых множеств, такая, что $\lim_n \mu(E_n) = c$, то можно положить $X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Заметим, что $\mu(X_0) = c$.) Этот вывод позволяет нам во многих приложениях без особенных потерь заменять пространство $X$ множеством $X_0$. В качестве примера пространства с конечной, но не вполне конечной, мерой рассмотрим числовую прямую $X$ и на ней класс $\mathbf{S}$ множеств вида $E \cup C$, где $E$ — измеримое в смысле Лебега подмножество интервала $[0, 1]$, а $C$ — некоторое конечное или счетное множество; $\mu$ пусть будет лебеговской мерой. Указанный здесь метод замены $X$ множеством $X_0$ конечной меры часто применяется в теории меры и носит название *метода исчерпывания*.

4. Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с полной $\sigma$-конечной мерой, то в нем всякое $\mu^*$-измеримое множество измеримо. Таким образом, для пространств с полной $\sigma$-конечной мерой мерой оба понятия измеримости эквивалентны.

## § 18. Измеримые функции

Предположим, что $f$ — функция, заданная на каком-нибудь множестве $X$ и принимающая действительные значения, и $M$ — множество на числовой прямой. Будем пользоваться обозначением

$$f^{-1}(M) = \{x: f(x) \in M\}$$

и называть $f^{-1}(M)$, т. е. множество всех точек из $X$, которые функцией $f$ отображаются в множество $M$, прообразом множества $M$ (при отображении $f$). Если, например, $f$ — характеристическая функция некоторого множества $E$, заключенного в $X$, то $f^{-1}(\{1\}) = E$ и $f^{-1}(\{0\}) = E'$; вообще

$$f^{-1}(M) = 0, \quad E, \quad E' \quad \text{или} \quad X$$

соответственно в тех случаях, когда $M$ не содержит ни 0, ни 1, содержит 1 и не содержит 0, содержит 0 и не содержит 1 и содержит как 1, так и 0.

Легко проверить, что, какова бы ни была функция $f$,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(M_n),$$

$$f^{-1}(M - N) = f^{-1}(M) - f^{-1}(N);$$

другими словами, отображение $f^{-1}$ подмножеств числовой прямой на подмножества $X$ сохраняет теоретико-множественные операции. Отсюда, в частности, следует, что если $\mathbf{E}$ — класс множеств на числовой прямой, обладающей определенными алгебраическими свойствами (например, $\mathbf{E}$ есть кольцо или $\sigma$-кольцо), то $f^{-1}(\mathbf{E})$ — класс множеств вида $f^{-1}(M)$, где $M \in \mathbf{E}$, — обладает теми же алгебраическими свойствами. Наибольший интерес для нас в дальнейшем будет представлять тот случай, когда $\mathbf{E}$ — класс всех борелевских множеств на прямой.

Предположим теперь, что в $X$ выделено, кроме того, некоторое $\sigma$-кольцо $\mathbf{S}$ подмножеств, так что мы имеем измеримое пространство $(X, \mathbf{S})$. Для всякой функции $f$, заданной на $X$ и принимающей действительные значения (конечные или бесконечные), обозначим

$$N(f) = \{x\colon f(x) \neq 0\}.$$

Действительную функцию, обладающую тем свойством, что, каково бы ни было борелевское множество $M$ на числовой прямой, множество $N(f) \cap f^{-1}(M)$ измеримо, мы назовем *измеримой функцией.*

В связи с этим определением нужны некоторые пояснения. Прежде всего следует подчеркнуть особую роль, которую играет в множестве значений функции число 0. Причина этого кроется в том, что нуль служит единичным элементом аддитивной группы действительных чисел. В следующей главе будет введено понятие интеграла, применимое к некоторым измеримым функциям, — бесспорно, важнейшее понятие в теории меры. Тот факт, что интегрирование можно рассматривать как своего рода обобщенное суммирование, заставляет особым образом подходить к числу 0.

Пусть $f$ — измеримая функция на $X$. Если в качестве $M$ взять всю числовую прямую, то мы получим, что множество $N(f)$ должно быть измеримым. Отсюда, если $E$ — измеримое подмножество пространства $X$, а $M$ — какое-нибудь борелевское множество на числовой прямой, то из равенства

$$E \cap f^{-1}(M) = [E \cap N(f) \cap f^{-1}(M)] \cup [(E - N(f)) \cap f^{-1}(M)]$$

следует, что множество $E \cap f^{-1}(M)$ измеримо. (Заметим, что $(E - N(f)) \cap f^{-1}(M)$ в правой части этого равенства либо пусто, либо равно $E - N(f)$.) Другими словами, если функцию $f$, заданную на измеримом множестве $E$, называть *измеримой на $E$* в том случае, когда $E \cap f^{-1}(M)$ измеримо, каково бы ни было борелевское множество $M$ на числовой прямой, то, как мы видим из проведенного рассуждения, измеримая функция оказывается измеримой на всяком измеримом множестве. Если, в частности, само пространство $X$ принадлежит классу измеримых множеств, то определение измеримости $f$ сводится к требованию, чтобы при любом борелевском множестве $M$ на числовой прямой множество $f^{-1}(M)$ было измеримым. Таким образом, в этом случае, т. е. когда измеримо само $X$, функция $f$ измерима, если отображение $f^{-1}$ переводит множества определенного $\sigma$-кольца, именно, борелевские множества на числовой прямой, в множества другого заранее выбранного $\sigma$-кольца, именно, $\sigma$-кольца $\mathbf{S}$.

Ясно, что понятие измеримости зависит от выбора $\sigma$-кольца $\mathbf{S}$, поэтому в тех редких случаях, когда будут рассматриваться несколько $\sigma$-колец одновременно, мы будем говорить о функциях, измеримых относительно $\mathbf{S}$, или просто измеримых $(\mathbf{S})$. Если, в частности, $X$ есть числовая прямая, $\mathbf{S}$ — класс борелевских множеств, а $\overline{\mathbf{S}}$ — класс множеств, измеримых в смысле Лебега, то функции, измеримые относительно $\mathbf{S}$, мы будем называть функциями, *измеримыми в смысле Бореля*, а функции, измеримые относительно $\overline{\mathbf{S}}$, — *измеримыми в смысле Лебега.*

Важно подчеркнуть еще, что измеримость функции, так же как измеримость множества, согласно § 17, зависит лишь от выбора $\sigma$-кольца $\mathbf{S}$ и *не зависит* от того, задана ли на $\mathbf{S}$ какая-либо мера и если задана, то какие числовые значения она принимает.

Можно сказать, что множества и функции *декретируются* измеримыми; понятие измеримости — чисто теоретико-множественное, и от теории меры оно совершенно не зависит.

Такое положение вещей сходно с тем, что имеет место в современной теории топологических пространств, где некоторые множества можно объявить открытыми, а некоторые функции — непрерывными, не обращаясь к метрике. Возможность ввести метрику, в терминах которой открытые множества и непрерывность могут быть *определены*, хотя и представляет известный интерес, но обычно не столь уж существенна. Эта аналогия более глубока, чем может показаться на первый взгляд: читатель, знакомый с определением непрерывной функции на топологическом пространстве $X$, вспомнит, что функция $f$ называется непрерывной, если отображение $f^{-1}$ переводит открытые множества на числовой прямой (в нашем случае, т. е. когда $f$ принимает действительные значения) в множества некоторого заранее выделенного класса, названные открытыми множествами.

Понятие измеримости надо распространить на функции, могущие принимать бесконечные значения. Достигается это тем, что одноточечные множества $\{\infty\}$ и $\{-\infty\}$ на расширенной числовой прямой причисляются к классу борелевских множеств. После этого само определение измеримой функции повторяется дословно. Таким образом, функция принимающая действительные значения, конечные или бесконечные, измерима, если измеримы множества $f^{-1}(\{\infty\})$ и $f^{-1}(\{-\infty\})$, а также $N(f)\cap f^{-1}(M)$, каково бы ни было борелевское множество $M$ на числовой прямой. Заметим, что класс борелевских множеств с присоединением к нему $\{\infty\}$ и $\{-\infty\}$ перестает быть $\sigma$-кольцом, порожденным всевозможными полузамкнутыми интервалами.

Теперь мы займемся изучением измеримых функций и постараемся выяснить все подробности их строения. Весьма полезен следующий предварительный результат.

Теорема 1. *Функция $f$ на измеримом пространстве $(X, \mathbf{S})$, принимающая действительные значения, измерима тогда и только тогда, когда, каково бы ни было действительное число $c$, множество $N(f)\cap\{x\colon f(x)<c\}$ измеримо.*

Доказательство. Высказанное здесь условие необходимо для того, чтобы $f$ была измерима. В самом деле, если $M=\{t\colon t<c\}$ — открытая полупрямая от $-\infty$ до $c$, то $M$ представляет собой борелевское множество и $\{x\colon f(x)<c\}=f^{-1}(M)$.

Предположим теперь, что множество $N(f)\cap\{x\colon f(x)<c\}$ при любом $c$ измеримо. Если $c_1$ и $c_2$ — действительные числа, причем $c_1\leqslant c_2$, то

$$\{x\colon f(x)<c_2\}-\{x\colon f(x)<c_1\}=\{x\colon c_1\leqslant f(x)<c_2\}.$$

Таким образом, если $M$ — полузамкнутый интервал вида $[c_1, c_2)$, то $N(f)\cap f^{-1}(M)$, будучи разностью двух измеримых множеств, измеримо. Пусть $\mathbf{E}$ — класс всех тех множеств $M$ на числовой прямой, для которых $N(f)\cap f^{-1}(M)$ измеримо. Тогда $\mathbf{E}$ представляет собой $\sigma$-кольцо, содержащее, как мы только что видели, все полузамкнутые интервалы. Следовательно, $\mathbf{E}$ охватывает все борелевские множества, и теорема доказана. □

**Упражнения**

1. Теорема 1 остается справедливой, если вместо множеств $\{x\colon f(x) < c\}$ рассматривать множества $\{x\colon f(x) \leqslant c\}$, или $\{x\colon f(x) > c\}$, или $\{x\colon f(x) \geqslant c\}$. [Указание. Если $-\infty < c < \infty$, то, например,

$$\{x\colon f(x) \leqslant c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x\colon f(x) < c + \frac{1}{n}\right\}.]$$

2. Теорема 1 справедлива и тогда, когда значения $c$ берутся лишь из некоторого всюду плотного множества действительных чисел.

3. Если $f$ — измеримая функция и $c$ — любое действительное число, то $cf$ также измерима.

4. Если $E$ — измеримое множество, то его характеристическая функция измерима. Верно ли обратное предложение?

5. Функция, тождественно равная отличной от нуля постоянной, измерима тогда и только тогда, когда $X \in \mathbf{S}$.

6. Если $X$ — числовая прямая и $f$ — заданная на ней возрастающая функция, то $f$ измерима в смысле Бореля. Будет ли измерима в смысле Бореля всякая непрерывная функция?

7. Пусть $X$ — числовая прямая и $E$ — какое-нибудь множество на ней, не измеримое в смысле Лебега; функция $f$ задана следующим образом: $f(x) = x$, когда $x \in E$, и $f(x) = -x$, когда $x \notin E$. Измерима ли $f$ в смысле Лебега?

8. Если $f$ — измеримая функция, то, каково бы ни было действительное число $c$, множество $\{x\colon f(x) = c\}$ измеримо. Верно ли обратное предложение?

9. Функция $f$, принимающая комплексные значения, называется измеримой, если одновременно измеримы $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$. Доказать, что функция $f$, принимающая комплексные значения, измерима, тогда и только тогда, когда, каково бы ни было открытое множество $M$ в комплексной плоскости, множество $N(f) \cap f^{-1}(M)$ измеримо.

10. Пусть $f$ — функция на измеримом пространстве $(X, \mathbf{S})$, принимающая действительные значения. Для действительных $t$ положим $B(t) = \{x\colon f(x) \leqslant t\}$. Тогда

а) из $s < t$ следует $B(s) \subset B(t)$,

б) $$\bigcup_t B(t) = X, \quad \bigcap_t B(t) = 0,$$

в) $$\bigcap_{t > s} B(t) = B(s).$$

Обратно, если $\{B(t)\}$ — класс множеств, обладающий свойствами «а»—«в», то существует единственная функция $f$, заданная на $X$ и принимающая (конечные) действительные значения, для которой $\{x\colon f(x) \leqslant t\} = B(t)$. (Указание. $f(x) = \inf\{t\colon x \in B(t)\}$.)

11. Пусть $f$ — измеримая функция, заданная на пространстве $(X, \mathbf{S}, \mu)$ с вполне конечной мерой. Если для всякого борелевского множества $M$ на расширенной числовой прямой положить $\nu(M) = \mu(f^{-1}(M))$, то $\nu$ будет мерой в классе всех борелевских множеств. Если все значения $f$ конечны, то функция $g$ действительного переменного, определенная равенством $g(t) = \mu(\{x\colon f(x) < t\})$, обладает следующими свойствами: она монотонно возрастает, непрерывна слева, $g(-\infty) = 0$ и $g(\infty) = \mu(X)$; $g$ называется *функцией распределения* для функции $f$. Если $g$ непрерывна, то мера Лебега—Стильтьеса $\bar{\mu}_g$, порожденная функцией $g$ (см. упр. 9 § 15), будет служить пополнением меры $\nu$. Если $f = \chi_E$ — характеристическая функция измеримого множества $E$, то соответствующая ей мера $\nu$ будет обладать следующим свойством: $\nu(M) = \chi_M(1)\mu(E) + \chi_M(0)\mu(E')$.

## § 19. Действия над измеримыми функциями

Теорема 1. *Если $f$ и $g$ — измеримые функции, заданные на измеримом пространстве $(X, \mathbf{S})$ и принимающие конечные или бесконечные действительные значения, то, каково бы ни было действи-*

*тельное число $c$, каждое из множеств*

$$A=\{x\colon f(x)<g(x)+c\},\ B=\{x\colon f(x)\leqslant g(x)+c\},\ C=\{x\colon f(x)=g(x)+c\}$$

*имеет измеримое пересечение со всяким измеримым множеством.*

Доказательство. Пусть $M$ — множество всех рациональных чисел. Утверждение теоремы, относящееся к множеству $A$, следует из соотношения

$$A=\bigcup_{r\in M}[\{x\colon f(x)<r\}\cap\{x\colon r-c<g(x)\}],$$

а утверждения, относящиеся к $B$ и $C$, — соответственно из равенств

$$B=X-\{x\colon g(x)<f(x)-c\}\quad\text{и}\quad C=B-A. \qquad \square$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi$ — измеримая в смысле Бореля функция, заданная на расширенной числовой прямой и принимающая конечные или бесконечные действительные значения, причем $\varphi(0)=0$, а $f$ — измеримая функция на каком-нибудь измеримом пространстве $X$, принимающая конечные или бесконечные действительные значения. Тогда, если $\widehat{f}(x)=\varphi(f(x))$, то $\widehat{f}$ представляет собой измеримую функцию на $X$.*

Доказательство. Здесь удобнее обратиться непосредственно к определению измеримой функции, нежели пользоваться необходимым и достаточным условием измеримости, установленным в § 18. Пусть $M$ — произвольное борелевское множество на расширенной числовой прямой. Тогда

$$N(\widehat{f})\cap\widehat{f}^{-1}(M)=\{x\colon \varphi(f(x))\in M-\{0\}\}=\{x\colon f(x)\in\varphi^{-1}(M-\{0\})\}.$$

Так как $\varphi(0)=0$, то

$$\varphi^{-1}(M-\{0\})=\varphi^{-1}(M-\{0\})-\{0\}.$$

Функция $\varphi$ измерима в смысле Бореля, поэтому $\varphi^{-1}(M-\{0\})$ представляет собой борелевское множество и измеримость функции $f$ влечет за собой измеримость множества

$$N(\widehat{f})\cap\widehat{f}^{-1}(M)=N(f)\cap f^{-1}(\varphi^{-1}(M-\{0\})). \qquad \square$$

Легко убедиться в том, что при всяком положительном $\alpha$ функция $\varphi$, определенная на всей числовой прямой равенством $\varphi(t)=|t|^{\alpha}$, измерима в смысле Бореля. Отсюда следует, что измеримость функции $f$ влечет за собой измеримость $|f|^{\alpha}$. Точно так же измеримы любая целая положительная степень измеримой функции и произведение измеримой функции на (действительную) постоянную. Рассматривая измеримые в смысле Бореля функции двух и большего числа переменных и проводя аналогичные рассуждения, мы обнаружим, что сумма и произведение двух измеримых функций представляют собой измеримые функции. Но так как мы еще не ввели понятие измеримости в смысле Бореля для функции нескольких переменных, то эти рассмотрения мы отложим и обратимся к прямому доказательству измеримости суммы и произведения.

Теорема 3. *Если $f$ и $g$ — измеримые функции на измеримом пространстве $X$, принимающие конечные и бесконечные действительные значения, то $f+g$ и $fg$ также измеримы.*

Доказательство. Так как смысл выражения $f(x)+g(x)$ и $f(x)g(x)$ в тех точках, в которых хотя бы одно из значений $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно, легко установить, перебрав немногочисленные возможные случаи, то мы сразу ограничимся рассмотрением функций, принимающих конечные значения. (Попутно мы напомним читателю, что в случае $f(x)=\pm\infty$, $g(x)=\mp\infty$ сумма $f(x)+g(x)$ не имеет смысла.)

Тогда, когда $f$ и $g$ конечны, для любого действительного числа $c$ мы имеем

$$\{x\colon f(x)+g(x)<c\}=\{x\colon f(x)<c-g(x)\},$$

и измеримость функции $f+g$ вытекает из теоремы 1, если взять в ней — $g$ вместо $g$. Измеримость $fg$ следует из тождества

$$fg=\tfrac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]. \qquad \square$$

Для конечных $f$ и $g$ имеют место тождества

$$f\cup g=\tfrac{1}{2}(f+g+|f-g|) \quad \text{и} \quad f\cap g=\tfrac{1}{2}(f+g-|f-g|),$$

откуда, согласно теоремам 2 и 3, из измеримости $f$ и $g$ следует измеримость $f\cup g$ и $f\cap g$. Если для любой действительной (конечной или бесконечной) функции $f$ положить

$$f^+=f\cup 0 \quad \text{и} \quad f^-=-(f\cap 0),$$

и

$$f=f^+-f^- \quad \text{и} \quad |f|=f^++f^-.$$

Функция $f^+$ называется *положительной частью* функции $f$, а $f^-$ — ее *отрицательной частью*. В силу только что сделанного замечания, положительная и отрицательная части измеримой функции являются измеримыми функциями; обратно, функция, у которой измеримы ее положительная и отрицательная части, сама измерима.

### Упражнения

1. Пусть $f$ такова, что функция $|f|$ измерима; измерима ли сама $f$?

2. Если $X\in\mathbf{S}$, то теорема 2 верна и без предположения, что $\varphi(0)=0$; другими словами, в этом случае подстановка измеримой функции в функцию, измеримую в смысле Бореля, всегда приводит к измеримой функции.

3. Подстановка измеримой функции в функцию, измеримую в смысле Лебега, не приводит, вообще говоря, к измеримой функции даже тогда, когда $X\in\mathbf{S}$. В следующих ниже предложениях намечено доказательство этого утверждения путем построения соответствующего примера неизмеримой в смысле Лебега функции $\tilde{f}=\varphi(f)$, где $\varphi$ — функция действительного переменного $y$, измеримая в смысле Лебега, а $f$ — непрерывная возрастающая (в строгом смысле) функция действительного переменного $x$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Пусть $X=[0,1]$ — замкнутый единичный интервал. Любое $x$ из $X$ может быть представлено в виде

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}=0,\alpha_1\alpha_2\ldots,$$

где $\alpha_i=0$, 1 или 2, $i=1,2,\ldots$. Тогда, если $x\in C$ где $C$ — канторово множество (см. упр. 5 § 15), то $\alpha_i=0$ или 2, $i=1,2,\ldots$. Пуст $n=n(x)$ — первый индекс, при котором $\alpha_n=1$;

если таких индексов нет вовсе, то мы положим $n(x)=\infty$. Определим теперь функцию $\psi$, положив

$$\psi(x)=\sum_{1\leqslant i<n}\frac{\alpha_i}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^n}$$

($\psi$ называют иногда *канторовой функцией*):

а) Если $0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$, то

$$0=\psi(0)\leqslant\psi(x)\leqslant\psi(y)\leqslant\psi(1)=1.$$

(Указание. Если $x=0,\alpha_1\alpha_2\ldots\leqslant y=0,\beta_1\beta_2\ldots$ и $\alpha_i=\beta_i$ при $1\leqslant i<j$, то $\alpha_j\leqslant\beta_j$.)

б) Функция $\psi$ непрерывна. (Указание. Если $x=0,\alpha_1\alpha_2\ldots$, $y=0,\beta_1\beta_2\ldots$ и $\alpha_i=\beta_i$ при $1\leqslant i<j$, то $|\psi(x)-\psi(y)|\leqslant 2^{j-1}$.)

в) Для любого $x$ из $X$ найдется одно и только одно число $y$, $0\leqslant y\leqslant 1$, такое, что $x=\frac{1}{2}(y+\psi(y))$; это уравнение определят $y$ как функцию от $x$; обозначим ее $f$. Она строго возрастает и непрерывна на $X$. (Указание. $\frac{1}{2}(y+\psi(y))$ непрерывна и строго возрастает.)

г) Множество $f^{-1}(C)$ измеримо в смысле Лебега и имеет положительную меру. (Указание. Множество $\psi(X-C)=\{\psi(y)\colon y\in X-C\}$ счетно, поэтому его мера равна нулю; следовательно, $\mu(f^{-1}(X-C))=\frac{1}{2}$.)

д) Существует измеримое в смысле Лебега множество $M$, такое, для которого $f^{-1}(M)$ не измеримо в смысле Лебега. (Указание. В силу теоремы 5 § 16, $f^{-1}(C)$ содержит неизмеримое подмножество. Вспомним, что всякое подмножество множества, лебеговская мера которого равна нулю, измеримо в смысле Лебега.)

е) Если $\varphi$ — характеристическая функция множества $M$, введенного в «д», и если $\widehat{f}(x)=\varphi(f(x))$, то $\varphi$ измерима в смысле Лебега, а $\widehat{f}$ неизмерима.

4. Множество $M$ в «д» служит примером множества, измеримого в смысле Лебега, но не являющегося борелевским множеством (см. упр. 6 § 15).

## § 20. Последовательности измеримых функций

Теорема 1. *Если $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций на измеримом пространстве $X$, принимающих конечные или бесконечные действительные значения, то все четыре функции $h$, $g$, $f^*$ и $f_*$, определяемые равенствами*

$$h(x)=\sup\{f_n(x)\colon n=1,2,\ldots\},\qquad g(x)=\inf\{f_n(x)\colon n=1,2,\ldots\},$$
$$f^*(x)=\limsup_n f_n(x),\qquad f_*(x)=\liminf_n f_n(x),$$

*измеримы.*

Доказательство. Общий случай легко сводится к случаю, когда функции принимают только конечные значения. Измеримость функции $g$ следует из равенства

$$\{x\colon g(x)<c\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\colon f_n(x)<c\},$$

измеримость функции $h$ — из соотношения

$$h(x)=-\inf\{-f_n(x)\colon n=1,2,\ldots\}.$$

Равенства

$$f^*(x)=\inf_{n\geqslant 1}\sup_{m\geqslant n}f_m(x),\quad f_*(x)=\sup_{n\geqslant 1}\inf_{m\geqslant n}f_m(x)$$

влекут за собой измеримость функций $f^*$ и $f_*$. □

Из теоремы 1 вытекает, что множество точек, в которых сходится последовательность измеримых функций $\{f_n\}$, т. е. множество

$$\{x\colon \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x)\}$$

имеет измеримое пересечение со всяким измеримым множеством. Следовательно, функция $f$, определенная равенством $f(x) = \lim_n f_n(x)$ в тех точках $x$, в которых этот предел существует, измерима.

Большую пользу в теории измеримых функций приносит понятие простой функции. Функция $f$, заданная на измеримом пространстве $X$, называется *простой*, если можно указать конечный класс непересекающихся измеримых множеств $\{E_1, \ldots, E_n\}$ и конечное множество действительных чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, такие, что

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{когда } x \in E_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & \text{когда } x \notin E_1 \cup \ldots \cup E_n. \end{cases}$$

(Мы, подчеркиваем, что значения простой функции суть *конечные* действительные числа; это важно для дальнейшего.)

Простейшим примером простой функции может служить характеристическая функция $\chi_E$ измеримого множества $E$. Нетрудно убедиться в том, что всякая простая функция измерима; в самом деле, простая функция $f$, отвечающая множествам $E_i$ и числам $\alpha_i$, может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x).$$

Произведение двух простых функций, а также любая линейная комбинация простых функций представляет собой простые функции.

Теорема 2. *Всякая измеримая функция $f$, принимающая конечные или бесконечные действительные значения, представляет собой предел последовательности $\{f_n\}$ простых функций. В том случае, когда функция $f$ неотрицательна, все $f_n$ можно выбрать неотрицательными, притом так, что последовательность $\{f_n\}$ будет возрастающей.*

Доказательство. Сначала предположим, что $f \geqslant 0$. Для любого $n = 1, 2, \ldots$ положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n}, & \text{если } \frac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i}{2^n}, \quad i = 1, 2, \ldots 2^n n, \\ n, & \text{если } f(x) \geqslant n. \end{cases}$$

Ясно, что каждая $f_n$ представляет собой неотрицательную простую функцию и последовательность $\{f_n\}$ — возрастающая. Если $f(x) < \infty$, то при любом $n$

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n};$$

если же $f(x) = \infty$, то $f_n(x) = n$, также при любом $n$. Вторая половина теоремы доказана. Первая половина доказывается применением полученного результата отдельно к функциям $f^+$ и $f^-$. □

### Упражнения

1. Понятия, введенные в этом и в предыдущем параграфах, а также все полученные здесь результаты, за исключением тех, разумеется, в которых существенную роль играет

упорядоченность множества действительных чисел, переносятся на функции, принимающие комплексные значения.

2. Если в теореме 2 функция $f$ ограничена, то последовательность $\{f_n\}$ можно выбрать так, чтобы она сходилась к $f$ равномерно.

3. Допустив в определении простой функции выбор счетного числа множеств $E_i$ и счетного числа соответствующих чисел $\alpha_i$, мы придем к понятию *элементарной функции.* Всякая конечная измеримая функция служит пределом равномерно сходящейся последовательности элементарных функций.

## § 21. Сходимость почти всюду

В трех предыдущих параграфах была развита теория измеримых функций в тех пределах, в которых это разумно делать, не обращаясь к самому понятию меры. Начиная с этого момента, мы предполагаем, что пространство $X$, на котором заданы рассматриваемые нами функции, представляет собой пространство с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$.

Если некоторое предложение, касающееся точек пространства с мерой, верно для всех точек за исключением некоторого множества, измеримого и имеющего меру нуль (может быть, пустого), то принято говорить, что это предложение верно для *почти всех* точек или верно *почти всюду.* Так, например, некоторая функция постоянна почти всюду, если есть такая постоянная $c$, что множество $\{x\colon f(x) \neq c\}$ имеет меру нуль. Функция $f$ называется *существенно ограниченной*, если она ограничена почти всюду, т. е. если существует такая постоянная $c$, что множество $\{x\colon |f(x)| > c\}$ имеет меру нуль. Нижняя грань множества тех $c$, для которых только что высказанное утверждение справедливо, называется *существенно верхней гранью* функции $|f|$ и обозначается

$$\sup\mathrm{vrai}\,|f|.$$

Пусть на пространстве $X$ с мерой задана последовательность функций $\{f_n\}$, принимающих конечные или бесконечные действительные значения. Предположим, что эта последовательность сходится почти всюду к некоторой функции $f$. Это означает, что, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и точка $x$ из $X - E_0$, где $E_0$ — некоторое фиксированное множество меры нуль (может быть пустое), можно указать такое целое число $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$, что для всех $n \geqslant n_0$

$$\begin{aligned} f_n(x) &< -\tfrac{1}{\varepsilon}, &&\text{если } f(x) = -\infty,\\ |f_n(x) - f(x)| &< \varepsilon, &&\text{если } -\infty < f(x) < \infty,\\ f_n(x) &> \tfrac{1}{\varepsilon}, &&\text{если } f(x) = \infty. \end{aligned}$$

Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n\}$, принимающих конечные значения, — *фундаментальная почти всюду*, если, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и точка $x$ из $X - E_0$, где $E_0$ — некоторое определенное множество меры нуль, можно указать такое целое число $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$, что для всех $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что если последовательность сходится почти всюду к некоторой конечной функции, то эта последовательность — фундаментальная почти всюду, и, обратно, всякая фундаментальная почти всюду последовательность сходится почти всюду к некоторой конечной функции. Далее, если последовательность сходится почти всюду к некоторой функции $f$ и одновременно к некоторой другой функции $g$, то почти всюду $f(x) = g(x)$, т. е. предельная функция единственна с точностью до определения ее на некотором множестве меры нуль.

В дальнейшем нам придется иметь дело с различными видами сходимости, и всегда мы будем придерживаться аналогичной терминологии. Коль скоро введено какое-нибудь новое понятие сходимости, т. е. определено, в каком смысле $f_n$ оказываются близкими к $f$ при больших $n$, так без дальнейших пояснений мы будем пользоваться понятием последовательности, фундаментальной в этом новом смысле, т. е. такой, для которой при больших $m$ и $n$ разность $f_m - f_n$ близка в указанном смысле к нулю.

Первым из таких «новых» понятий сходимости появится равномерная сходимость почти всюду. Последовательность функций $\{f_n\}$ называется *почти всюду равномерно сходящейся* к функции $f$, если существует такое множество $E_0$ меры нуль, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать целое число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, обладающее тем свойством, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant n_0$ и для всех $x$ из $X - E_0$. Другими словами, $\{f_n\}$ сходится равномерно (в обычно смысле) вне множества $E_0$. И в этом случае, как легко проверить, последовательность сходится равномерно почти всюду тогда и только тогда, когда она почти всюду равномерно фундаментальная.

Следующий результат, известный под названием *теоремы Егорова*, устанавливает интересную и очень полезную связь сходимости почти всюду с равномерной сходимостью.

Теорема 1. *Пусть $E$ — измеримое множество конечной меры и $\{f_n\}$ — последовательность почти всюду конечных измеримых функций, сходящаяся почти всюду на $E$ к конечной измеримой функции $f$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ в $E$ существует измеримое подмножество $F$, такое, что $\mu(F) < \varepsilon$, и на множестве $E - F$ последовательность $\{f_n\}$ сходится к $f$ равномерно.*

Доказательство. Исключая из $E$, если это нужно, некоторое множество $E_0$ меры нуль, мы добьемся того, что $\{f_n\}$ будет сходиться во всех точках множества $E - E_0$. Поэтому мы вправе сразу предположить, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к $f$ на всем $E$. Пусть

$$E_n^m = \bigcap_{i=n}^{\infty} \left\{x\colon |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\},$$

тогда

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \ldots,$$

и так как $\{f_n\}$ сходится к $f$ на $E$, то

$$E \subset \lim_n E_n^m$$

при любом $m = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что $\lim\limits_n \mu(E - E_n^m) = 0$, поэтому для некоторого $n_0 = n_0(m)$

$$\mu(E - E_{n_0(m)}^m) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

(Номер $n_0$ зависит, конечно, от выбора $\varepsilon$, но $\varepsilon$ в этом рассуждении

фиксировано.) Если
$$F=\bigcup_{m=1}^{\infty}(E-E^m_{n_0(m)}),$$
то множество $F$ измеримо, $F\subset E$ и
$$\mu(F)=\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}(E-E^m_{n_0(m)})\right)\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\mu(E-E^m_{n_0(m)})<\varepsilon.$$

Каково бы ни было $m$, если $x\in E-F=E\cap\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}E^m_{n_0(m)}$, то $x\in E^m_n$, где $n\geqslant n_0(m)$, следовательно, $|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{m}$. Таким образом, $\{f_n\}$ сходится на $E-F$ равномерно. □

Теорема Егорова подсказывает определение почти равномерной сходимости. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ почти всюду конечных измеримых функций *сходится почти равномерно* к функции $f$, если для всякого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество $F$, такое, что $\mu(F)<\varepsilon$ и $\{f_n\}$ сходится к $f$ равномерно на $F'$. Пользуясь понятием почти равномерной сходимости, теорему Егорова можно сформулировать так: на множестве конечной меры сходимость почти всюду влечет за собой почти равномерную сходимость.

Теорема 2. *Если последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится к $f$ почти равномерно, то $\{f_n\}$ сходится к $f$ почти всюду.*

Доказательство. Пусть $F_n$ — измеримое множество, такое, что $\mu(F_n)<\frac{1}{n}$ и на $F'_n$ последовательность $\{f_n\}$ сходится к $f$ равномерно. Положим $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, тогда
$$\mu(F)\leqslant\mu(F_n)<\frac{1}{n},$$
следовательно, $\mu(F)=0$ и, очевидно, в любой точке $x$ из $F'$ последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$. □

Заметим, что термин «почти равномерная сходимость», к сожалению, вполне установившейся, неудачен, так как он может неверно ассоциироваться со свойствами, имеющими место «почти всюду»; лучше подошло бы название вроде «сходимость, близкая к равномерной». Во всяком случае не следует смешивать почти равномерную сходимость со сходимостью, равномерной почти всюду.

## Упражнения

1. Для всякой измеримой в смысле Лебега функции $f$ можно найти функцию $g$, измеримую в смысле Бореля, такую, что $f(x)=g(x)$ почти всюду. (Указание. Пусть $E_r=\{x: f(x)<r\}$, где $r$ — рациональное число. В силу теоремы 2 § 13, $E_r=F_r\Delta N_r$, где $F_r$ — борелевское множество, а $N_r$ имеет меру нуль. Возьмем борелевское множество $N$ меры нуль, содержащее $\bigcup\limits_r N_r$, и положим
$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{когда } x\in N,\\ f(x), & \text{когда } x\notin N.)\end{cases}$$

2. Пусть $E$ — измеримое множество, такое, что $0<\mu(E)<\infty$, и $\{f_n\}$ — почти всюду фундаментальная последовательность функций, измеримых и почти всюду конечных. Тогда существуют такая положительная постоянная $c$ и такое измеримое подмножество $F\subset E$ положительной меры, что $|f_n(x)|<c$ для всех $x$ из $F$ и для всех $n=1,2,\ldots$.

3. Пусть $E$ — измеримое множество $\sigma$-конечной меры и $\{f_n\}$ — последовательность почти всюду конечных измеримых функций, сходящихся почти всюду на $E$ к некоторой конечной измеримой функции $f$. Тогда существует такая последовательность измеримых

множеств $\{E_n\}$, что $\mu(E - \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i) = 0$, и на каждом $E_i$ последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно. [Указание. Достаточно доказать это предложение для случая $\mu(E) < \infty$. Пользуясь теоремой Егорова, можно выбрать $E_i$ таким образом, чтобы $\{f_n\}$ сходится на $E_i$ равномерно и $\mu(E - \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i) < \frac{1}{n}$.]

4. Пусть $X$ — множество всех целых положительных чисел, $\mathbf{S}$ — класс всех его подмножеств. Для $E$, принадлежащих $\mathbf{S}$, положим $\mu(E)$ равным числу элементов множества $E$. Пусть $\chi_n$ — характеристическая функция множества $\{1, \ldots, n\}$. Тогда последовательность $\{\chi_n\}$ сходится к 1 всюду на $X$, но эта последовательность не является фундаментальной в смысле почти равномерной сходимости. Таким образом, теорема Егорова не верна тогда, когда множество $E$ имеет бесконечную меру.

5. Для всякой существенно ограниченной функции $f$ положим $\|f\| = \sup \operatorname{vrai} |f|$. Тогда для того, чтобы последовательность существенно ограниченных функций $\{f_n\}$ сходилась равномерно к $f$ почти всюду, необходимо и достаточно условие $\lim\limits_{n} \|f_n - f\| = 0$.

6. Образует ли множество $\mathfrak{M}$ всех существенно ограниченных измеримых функций с нормой $\|f\| = \sup \operatorname{vrai} |f|$ банахово пространство?

## § 22. Сходимость по мере

В этом параграфе, как и в предыдущем, мы будем рассматривать произвольное фиксированное пространство с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$.

Теорема 1. *Пусть $f$ и $f_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — конечные измеримые функции на некотором множестве $E$ конечной меры и $E_n(\varepsilon) = \{x\colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ произвольно. Последовательность $\{f_n\}$ сходится к $f$ почти всюду на $E$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n} \mu(E \cap \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)) = 0,$$

*каково бы ни было $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Последовательность действительных чисел $\{f_n(x)\}$ *не* сходится к действительному числу $f(x)$ тогда и только тогда, когда существует такое $\varepsilon > 0$, при котором точка $x$ входит в $E_n(\varepsilon)$ при бесконечно многих значениях $n$. Другими словами, если $D$ — множество тех точек $x$, в которых $\{f_n(x)\}$ не стремится к $f(x)$, то

$$D = \bigcup_{\varepsilon > 0} \limsup_{n} E_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_{n} E_n\left(\frac{1}{k}\right).$$

Следовательно, для того чтобы $E \cap D$ имело меру, равную нулю, (т. е. $\{f_n\}$ сходилось бы к $f$ почти всюду на $E$), необходимо и достаточно выполнение равенства $\mu(E \cap \limsup\limits_{n} E_n(\varepsilon)) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$. Окончательно, утверждение теоремы следует из соотношений

$$\mu(E \cap \limsup_{n} E_n(\varepsilon)) = \mu(E \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)) = \lim_{n} \mu(E \cap \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)). \qquad \square$$

Осуществив напрашивающееся само собой ослабление условия, сформулированного в теореме 1, мы придем к еще одному виду сходимости, с которым часто приходится иметь дело в теории функций. Говорят, что последовательность почти всюду конечных измеримых функций $\{f_n\}$ *сходится по мере* к функции $f$, если $\lim\limits_{n} \mu(\{x\colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$. В соответствии с нашим общим замечанием относительно терминологии (см. § 21), функции $f_1, f_2, \ldots$ образуют последовательность, *фундаментальную по мере*, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\{x\colon |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$$

при $n, m \to \infty$.

Из теоремы 1 прямо следует, что если последовательность конечных измеримых функций сходится почти всюду к конечной функции (или является фундаментальной почти всюду) на некотором множестве $E$ конечной меры, то она сходится на $E$ также по мере (соотв. является фундаментальной по мере). Сейчас мы докажем это утверждение, не предполагая, что мера множества $E$ конечна.

Теорема 2. *Почти равномерная сходимость влечет за собой сходимость по мере.*

Доказательство. Если $\{f_n\}$ сходится к $f$ почти равномерно, то, каковы бы ни были положительные числа $\varepsilon$ и $\delta$, существует такое измеримое множество $F$, что $\mu(F) < \delta$ и $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, когда $x$ принадлежит $F'$ и $n$ достаточно велико. □

Теорема 3. *Если последовательность $\{f_n\}$ сходится по мере к $f$, то $\{f_n\}$ — фундаментальная по мере. Если, кроме того, $\{f_n\}$ сходится по мере к $g$, то $f = g$ почти всюду.*

Доказательство. Первое утверждение следует из соотношения

$$\{x\colon |f_m(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset \\ \subset \left\{x\colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x\colon |f_m(x) - f(x)| \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Для того чтобы доказать второе утверждение, заметим, что

$$\{x\colon |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset \\ \subset \left\{x\colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x\colon |f_n(x) - g(x)| \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Так как при достаточно большом $n$ мера обоих множеств в правой части последнего соотношения сколь угодно мала, то

$$\mu(\{x\colon |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $f = g$ почти всюду. □

В дополнение к этим сравнительно элементарным замечаниям приведем два несколько более глубоких результата, касающихся сходимости по мере.

Теорема 4. *Последовательность измеримых функций $\{f_n\}$, фундаментальная по мере, содержит подпоследовательность, сходящуюся почти равномерно.*

Доказательство. Для любого целого положительного $k$ возьмем такое целое $\bar{n}(k)$, что

$$\mu\left(\left\{x\colon |f_n(x) - f_m(x) \geqslant \frac{1}{2^k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k},$$

когда $n \geqslant \bar{n}(k)$ и $m \geqslant \bar{n}(k)$. Положим

$$n_1 = \bar{n}(1), \quad n_2 = (n_1 + 1) \cup \bar{n}(2), \quad n_3 = (n_2 + 1) \cup \bar{n}(3), \ldots$$

Тогда $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ и функции $f_{n_1}, f_{n_2}, f_{n_3}, \ldots$ образуют бесконечную подпоследовательность последовательности $\{f_n\}$. Если

$$E_k = \left\{x\colon |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\right\}$$

и $k \geqslant i \geqslant j$, то для любого $x$, не принадлежащего $E_k \cup E_{k+1} \cup \ldots$, выполняются неравенства

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |f_{n_m}(x) - f_{n_{m+1}}(x)| < \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Таким образом, последовательность $\{f_{n_i}\}$ равномерно фундаментальна на множестве $X - (E_k \cup E_{k+1} \cup \ldots)$. Так как

$$\mu(E_k \cup E_{k+1} \cup \ldots) \leqslant \sum_{m=k}^{\infty} \mu(E_m) < \frac{1}{2^{k-1}},$$

то теорема доказана. □

Теорема 5. *Если $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций, фундаментальная по мере, то существует измеримая функция $f$, к которой $\{f_n\}$ сходится по мере.*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, почти равномерно фундаментальная и, следовательно, сходящаяся почти всюду. Положим $f(x) = \lim\limits_k f_{n_k}(x)$ для всех тех $x$, для которых такой предел существует. Заметим теперь, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\{x\colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset$$
$$\subset \left\{x\colon |f_n(x) - f_{n_k}(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x\colon |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Мера первого множества справа, по предположению, сколь угодно мала при достаточно больших $n$ и $n_k$, а мера второго стремится к нулю при $k \to \infty$, так как почти равномерная сходимость влечет за собой сходимость по мере. □

### Упражнения

1. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с вполне конечной мерой и $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ — последовательности конечных измеримых функций, сходящиеся по мере соответственно к $f$ и $g$:

а) Последовательность $\{\alpha f_n + \beta g_n\}$, где $\alpha$ и $\beta$ — действительные постоянные, сходятся по мере к $\alpha f + \beta g$; $\{|f_n|\}$ сходится по мере $|f|$.

б) Если $f = 0$ почти всюду, то $\{f_n^2\}$ сходится по мере к $f^2$.

в) Последовательность $\{f_n g\}$ сходится по мере к $fg$. (Указание. Для заданного положительного числа $\delta$ существует постоянная $c$, такая, что если $E = \{x\colon |g(x)| \leqslant c\}$, то $\mu(X - E) < \delta$; поведение $\{f_n g\}$ можно рассмотреть отдельно на $E$ и на $X - E$.)

г) Последовательность $\{f_n^2\}$ сходится по мере к $f^2$. (Указание. Применить утверждение «б» к $\{f_n - f\}$.)

д) Последовательность $\{f_n g_n\}$ сходится по мере к $fg$. (Указание. Выразить произведение через суммы и квадраты.)

е) Верны ли утверждения «а»—«д» тогда, когда мера $\mu$ не вполне конечна?

2. Всякая подпоследовательность фундаментальной по мере последовательности фундаментальна по мере.

3. Если $\{f_n\}$ — последовательность, фундаментальная по мере , а $\{f_{n_i}\}$ и $\{f_{n_j}\}$ — ее подпоследовательности, сходящиеся почти всюду соответственно к $f$ и $g$, то $f = g$ почти всюду.

4. Пусть $X$ — множество всех целых положительных чисел, $\mathbf{S}$ — класс всех его подмножеств, $\mu$ — мера на $\mathbf{S}$, определенная таким образом, что $\mu(E)$ равно числу элементов множества $E$. Для измеримых функций на $X$ сходимость по мере эквивалентна равномерной сходимости.

5. Вытекает ли сходимость по мере из сходимости почти всюду на множестве бесконечной меры? (См. упр. 4 и упр. 4 § 21).

6. Пусть $X$ — замкнутый единичный интервал с лебеговской мерой. Если

$$E_n^i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \quad n = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и $\chi_n^i$ — характеристическая функция интервала $E_n^i$, то последовательность $\{\chi_1^1, \chi_2^1, \chi_2^2, \chi_3^1, \chi_3^2, \chi_3^3, \ldots\}$ сходится по мере к 0, но не сходится ни в одной точке.

7. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность измеримых множеств, $\{\chi_n\}$ — последовательность соответствующих характеристических функций. Последовательность $\{\chi_n\}$ фундаментальна по мере тогда и только тогда, когда $\rho(E_n, E_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$. (Определение $\rho$ см. в упр. 4 § 9).

# ГЛАВА 5

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ

## § 23. Интегрируемые простые функции

Простая функция $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, заданная на пространстве с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$, *интегрируема*, если $\mu(E_i) < \infty$ для всех тех значений индекса $i$, при которых $\alpha_i \neq 0$. Интеграл от $f$ обозначается

$$\int f(x)\, d\mu(x), \quad \text{или} \quad \int f\, d\mu$$

и определяется равенством[1])

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i).$$

Если одновременно $f$ может быть представлена в виде $f = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{F_i}$, то, в силу аддитивности $\mu$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(F_j)$; таким образом, значение интеграла не зависит от представления $f$ и определяется однозначно. Заметим, что абсолютная величина интегрируемой простой функции, произведение интегрируемой простой функции на постоянную, а также сумма двух интегрируемых простых функций представляют собой интегрируемые простые функции.

Если $E$ — измеримое множество и $f$ — интегрируемая простая функция, то, как легко видеть, произведение $\chi_E f$ является интегрируемой простой функцией. *Интеграл от $f$ по множеству $E$* определяется равенством

$$\int_E f\, d\mu = \int \chi_E f\, d\mu.$$

Простейшим примером интегрируемой простой функции может служить характеристическая функция измеримого множества конечной меры; при этом $\int \chi_E\, d\mu = \int_E d\mu = \mu(E)$.

---

[1]) Если $\alpha_{i_0} = 0$ и $\mu(E_{i_0}) = \infty$, то $\alpha_{i_0}\mu(E_{i_0}) = 0$, в силу соглашения, принятого во введении, согласно которому $0 \cdot \infty = 0$. — *Прим. перев.*

В дальнейшим мы распространим понятие интеграла на класс функций, гораздо более широкий, чем класс интегрируемых простых функций. В то же время некоторые полезные определения и формулировки (но не доказательства!) многих теорем опираются на столь элементарные свойства интеграла, что могут быть высказаны уже теперь. Поэтому, чтобы избежать ненужных повторений, мы условимся всюду в этом параграфе вместо «простая функция» говорить просто «функция». Таким образом, все теоремы этого параграфа будут иметь смысл сразу для того более широкого класса функций, который мы рассмотрим ниже. Доказательства же, проведенные здесь, приложимы только к простым функциям; доказательства для общего случая будут изложены несколько позднее.

Доказательства теорем 1 и 2 мы опускаем; они прямо следуют из определений, только в случае теоремы 1 потребуется еще совсем простой и очевидный подсчет.

Теорема 1. *Если $f$ и $g$ — интегрируемые функции, то для любых действительных $\alpha$ и $\beta$*

$$\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu.$$

Теорема 2. *Если интегрируемая функция $f$ почти всюду неотрицательна, то $\int f\, d\mu \geqslant 0$.*

Теорема 3. *Если $f$ и $g$ — интегрируемые функции, такие, что почти всюду $f \geqslant g$, то*

$$\int f\, d\mu \geqslant \int g\, d\mu.$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 2 к функции $f - g$ и воспользоваться теоремой 1 при $\alpha = 1$, $\beta = -1$. □

Теорема 4. *Если $f$ и $g$ — интегрируемые функции, то*

$$\int |f + g|\, d\mu \leqslant \int |f|\, d\mu + \int |g|\, d\mu.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 3, взяв $|f| + |g|$ вместо $f$ и $|f + g|$ вместо $g$. □

Теорема 5. *Если $f$ — интегрируемая функция, то*

$$\left| \int f\, d\mu \right| \leqslant \int |f|\, d\mu.$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 3 сначала к функции $|f|$ и $f$, затем к $|f|$ и $-f$. □

Теорема 6. *Если $f$ — интегрируемая функция, $\alpha$ и $\beta$ — действительные числа и $E$ — измеримое множество, такое, что $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ для всех $x$ из $E$, то*

$$\alpha\mu(E) \leqslant \int_E f\, d\mu \leqslant \beta\mu(E).$$

Доказательство. Основное предположение этой теоремы может быть выражено неравенствами $\alpha\chi_E \leqslant f\chi_E \leqslant \beta\chi_E$, поэтому в случае $\mu(E) < \infty$ требуемый результат следует из теоремы 3. В случае $\mu(E) = \infty$ нужно прямо обратиться к определению интегрируемости. □

*Неопределенным интегралом* функции $f$ называется функция множества $\nu$, заданная на всевозможных измеримых множествах $E$ равенством

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Теорема 7. *Если интегрируемая функция $f$ почти всюду неотрицательна, то ее неопределенный интеграл есть монотонная функция множества.*

Доказательство. Если $E$ и $F$ — измеримые множества и $E \subset F$, то почти всюду $\chi_E f \leqslant \chi_F f$ и требуемый результат следует из теоремы 3. □

Функция множества $\nu$, заданная на всевозможных измеримых множествах в пространстве с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и принимающая лишь конечные значения, называется *абсолютно непрерывной*, если, каково бы ни было положительное число $\varepsilon$, существует такое положительное число $\delta$, что $|\nu(E)| < \varepsilon$ для всякого измеримого множества $E$, удовлетворяющего условию $\mu(E) < \delta$.

Теорема 8. *Неопределенный интеграл интегрируемой функции представляет собой абсолютно непрерывную функцию множества.*

Доказательство. Если $c$ — любое положительное число, превосходящее все значения $|f|$, то для любого измеримого множества $E$ будет выполняться неравенство

$$\left|\int_E f\, d\mu\right| \leqslant c\mu(E). \qquad \square$$

Теорема 9. *Неопределенный интеграл интегрируемой функции представляет собой счетно-аддитивную функцию множества.*

Доказательство. В том случае, когда $f$ — характеристическая функция некоторого измеримого множества $E$ конечной меры, счетная аддитивность ее неопределенного интеграла сводится к счетной аддитивности меры. Тогда, когда $f$ — любая интегрируемая простая функция, она может быть представлена как линейная комбинация характеристических функций, откуда следует утверждение теоремы. □

Пусть $f$ и $g$ — интегрируемые функции. Определим *расстояние* $\rho(f, g)$ между $f$ и $g$ посредством равенства

$$\rho(f, g) = \int |f - g|\, d\mu.$$

Функция $\rho$ оправдывает название «расстояние» во всех отношениях, за исключением одного. В самом деле, верны и тривиальны следующие свойства:

$$\rho(f, f) = 0, \quad \rho(f, g) = \rho(g, f), \quad \rho(f, g) \leqslant \rho(f, h) + \rho(h, g).$$

Однако сходство с расстоянием нарушает следующее свойство $\rho$: из $\rho(f, g) = 0$ не следует, что $f = g$. Расстояние между двумя интегрируемыми функциями равно нулю и тогда, когда функции совпадают почти всюду. В следующем параграфе мы ознакомимся с этим явлением ближе.

**Упражнения**

1. Если одна из двух простых функций интегрируема, то интегрируемо и их произведение.

2. Если $E$ и $F$ — измеримые множества конечной меры, то $\rho(\chi_E, \chi_F) = \mu(E \Delta F)$ (см. упр. 4 § 9 и упр. 7 § 22).

3. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — замкнутый единичный интервал с определенной на нем лебеговской мерой. Фиксируем какую-нибудь точку $x_0$ в $X$ и полагаем $\nu(E) = \chi_E(x_0)$. Обладает ли $\nu$ свойством абсолютной непрерывности?

4. Если $\nu$ — абсолютно непрерывная функция множества, заданная на всевозможных измеримых множествах в некотором пространстве с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$, то $\nu(E) = 0$, каково бы ни было измеримое множество $\mathbf{E}$, такое, что $\mu(E) = 0$.

5. Если пространство $X$ с вполне конечной мерой состоит из конечного числа точек, то всякая конечная измеримая функция на $X$ является интегрируемой простой функцией и все свойства интегралов от таких функций сводятся к свойствам конечных сумм.

## § 24. Последовательности интегрируемых простых функций

В этом параграфе мы продолжаем рассматривать некоторое фиксированное пространство с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и снова вместо «простая функция» говорим «функция». Так как все методы, применяемые в этом параграфе (за исключением одного рассуждения в конце доказательства теоремы 4), основаны только на выводах предыдущего параграфа, то, когда мы обратимся к рассмотрению интегрируемых функций общего вида, как формулировки, так и доказательства следующих теорем сохранятся без изменений.

Последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ назовем *фундаментальной в смысле сходимости в среднем* или просто *фундаментальной в среднем*, если $\rho(f_n, f_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Теорема 1. *Последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$, фундаментальная в среднем, является фундаментальной по мере.*

Доказательство. Для любого фиксированного положительного числа $\varepsilon$ положим

$$E_{mn} = \{x\colon |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Тогда

$$\rho(f_n, f_m) = \int |f_n - f_m|\, d\mu \geqslant \int\limits_{E_{mn}} |f_n - f_m|\, d\mu \geqslant \varepsilon\mu(E_{mn}),$$

откуда $\mu(E_{mn}) \to 0$ при $n, m \to \infty$. □

Теорема 2. *Если $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых функций и $\nu_n$ — неопределенный интеграл от $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то*

$$\nu(E) = \lim_n \nu_n(E)$$

*существует для всякого измеримого множества $E$ и функция множества $\nu$ конечна и счетно-аддитивна.*

Доказательство. Существование конечного предела $\nu(E)$, притом равномерного относительно $E$, следует из соотношений

$$|\nu_n(E)-\nu_m(E)|\leqslant\int|f_n-f_m|\,d\mu\to 0\quad\text{при}\quad n,m\to\infty.$$

Отсюда же вытекает, что $\nu$ конечно-аддитивна. Пусть теперь $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся измеримых множеств, соединение которых равно $E$. Для любых двух целых положительных чисел $k$ и $n$ будем иметь неравенство

$$|\nu(E)-\sum_{i=1}^{k}\nu(E_i)|\leqslant$$

$$\leqslant|\nu(E)-\nu_n(E)|+|\nu_n(E)-\sum_{i=1}^{k}\nu_n(E_i)|+|\nu_n(\bigcup_{i=1}^{k}E_i)-\nu(\bigcup_{i=1}^{k}E_i)|.$$

Первое и третье слагаемое справа становятся сколь угодно малыми при возрастании $n$. Когда достаточно большое значение $n$ фиксировано, втрое слагаемое можно сделать сколь угодно малым, выбрав достаточно большое $k$. Таким образом,

$$\nu(E)=\lim_{k}\sum_{i=1}^{k}\nu(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i).\qquad\square$$

Будем говорить, что конечные функции множества $\nu_n$, $n=1,2,\ldots$, заданные на $\mathbf{S}$, *равностепенно абсолютно непрерывны*, если, каково бы ни было положительное число $\varepsilon$, существует такое положительное число $\delta$, что $|\nu_n(E)|<\varepsilon$ для любого измеримого множества $E$, удовлетворяющего условию $\mu(E)<\delta$, и для всех $n$.

Теорема 3. *Если $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых функций и $\nu_n$ — неопределенный интеграл от $f_n$, $n=1,2,\ldots$, то функции множества $\nu_n$ равностепенно абсолютно непрерывны.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$; выберем целое положительное число $n_0$ таким образом, чтобы

$$\int|f_m-f_n|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$$

для $m\geqslant n_0$ и $n\geqslant n_0$. Пусть, далее, $\delta$ — такое положительное число, что для любого измеримого множества $E$, удовлетворяющего условию $\mu(E)<\delta$, выполняются неравенства

$$\int\limits_E|f_n|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}\quad n=1,2,\ldots,n_0$$

(см. теорему 8 § 23). Возьмем теперь произвольное измеримое множество $E$ меры $<\delta$ и произвольное $n$. Если $n\leqslant n_0$, то

$$|\nu_n(E)|\leqslant\int\limits_E|f_n|\,d\mu<\varepsilon;$$

если же $n > n_0$, то и тогда

$$|\nu_n(E)| \leqslant \int_E |f_n - f_{n_0}|\, d\mu + \int_E |f_{n_0}|\, d\mu < \varepsilon. \qquad \square$$

Следующая теорема не особенно важна в общем случае; поэтому как ее формулировка, так и доказательство будут относиться лишь к случаю простых функций.

Теорема 4. *Пусть $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — фундаментальные в среднем последовательности интегрируемых простых функций, сходящиеся по мере к одной и той же функции $f$. Если $\nu_n$ и $\lambda_n$ — неопределенные интегралы соответственно от $f_n$ и $g_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и если*

$$\nu(E) = \lim_n \nu_n(E), \quad \lambda(E) = \lim_n \lambda_n(E),$$

*где $E$ — любое измеримое множество, то функции множества $\nu$ и $\lambda$ тождественны.*

Доказательство. Так как для любого $\varepsilon > 0$

$$E_n = \{x\colon |f_n(x) - g_n(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset$$
$$\subset \left\{x\colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x\colon |f(x) - g_n(x)| \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2}\right\},$$

то отсюда следует, что $\lim_n \mu(E_n) = 0$. Поэтому если $E$ — измеримое множество конечной меры, то в неравенстве

$$\int_E |f_n - g_n|\, d\mu \leqslant \int_{E - E_n} |f_n - g_n|\, d\mu + \int_{E \cap E_n} |f_n|\, d\mu + \int_{E \cap E_n} |g_n|\, d\mu$$

первое слагаемое справа не превосходит $\varepsilon\mu(E)$, а два других становятся сколь угодно малыми при достаточно большом $n$. Последнее утверждение основывается на теореме 3, согласно которой неопределенные интегралы от $f_n$ и $g_n$ равностепенно абсолютно непрерывны. Таким образом,

$$\lim_n |\nu_n(E) - \lambda_n(E)| = 0$$

и, следовательно, $\nu(E) = \lambda(E)$. Так как $\nu$ и $\lambda$ счетно-аддитивны, то равенство $\nu(E) = \lambda(E)$ верно и для измеримых множеств $E$ $\sigma$-конечной меры.

Функции $f_n$ и $g_n$ — простые; следовательно, каждая из них определяется с помощью некоторого конечного класса измеримых множеств конечной меры. Если $E_0$ — соединение множеств из таких классов, отвечающих всем $f_n$ и $g_n$, то множество $E_0$ измеримо и имеет $\sigma$-конечную меру. При этом для любого измеримого множества $E$

$$\nu_n(E - E_0) = \lambda_n(E - E_0) = 0$$

и, следовательно, $\nu(E - E_0) = \lambda(E - E_0) = 0$. Отсюда вытекает, что $\nu(E) = \nu(E \cap E_0)$, $\lambda(E) = \lambda(E \cap E_0)$, и теорема полностью доказана. $\square$

**Упражнения**

1. Является ли полным метрическим пространством множество всех интегрируемых простых функций, с определенным выше расстоянием $\rho$?

2. В обозначениях теоремы 2, если $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся измеримых множеств, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ сходится абсолютно. (Указание. Сумма этого ряда не зависит от порядка его членов.)

## § 25. Интегрируемые функции

Почти всюду конечная измеримая функция $f$, заданная в пространстве с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$, называется *интегрируемой*, если существует фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых простых функций $\{f_n\}$, сходящаяся по мере к $f$. *Интеграл* функции $f$ обозначается

$$\int f(x)\, d\mu(x) \quad \text{или} \quad \int f\, d\mu$$

и определяется равенством

$$\int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu.$$

Из теоремы 4 § 24, если положить в ней $E = \bigcup\limits_n N(f_n)$, будет следовать, что значение интеграла не зависит от выбора последовательности простых функций $\{f_n\}$, фигурирующей в его определении. В то же время из теоремы 2 следует, что значение интеграла всегда конечно, — на это мы обращаем особое внимание читателя. Заметим еще, что абсолютная величина интегрируемой функции, произведение интегрируемой функции на постоянную и сумма двух интегрируемых функций представляют собой интегрируемые функции; это вытекает из очевидных свойств последовательностей функций, сходящихся по мере и фундаментальных в среднем. Соотношения

$$f^+ = \tfrac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{и} \quad f^- = \tfrac{1}{2}(|f| - f)$$

показывают, что вместе с $f$ интегрируемы также $f^+$ и $f^-$.

Если $E$ — измеримое множество и $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых простых функций, сходящихся по мере к $f$, то, как легко видеть, $\{\chi_E f_n\}$ представляет собой последовательность такого же рода, сходящуюся по мере к $\chi_E f$. Определим *интеграл* функции $f$ *по множеству* $E$ равенством

$$\int_E f\, d\mu = \int \chi_E f\, d\mu.$$

Вспомним, что теоремы §§ 23 и 24, за исключением теоремы 4 § 24, были сформулированы для произвольных интегрируемых функций, а доказаны лишь для простых функций. Дополним теперь эти доказательства.

Теоремы 1 и 2 § 23 вытекают прямо из простейших свойств предела. Теоремы 3–7 § 23 опираются на теорему 2 § 23, и доказательства их можно повторить дословно. Для доказательства теоремы 8 § 23, утверждающей абсолютную непрерывность неопределенного интеграла от $f$, возьмем фундаментальную в среднем последовательность интегрируемых простых функций, сходящуюся к $f$ по мере. Для всякого измеримого множества $E$ будем иметь неравенство

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant \left|\int_E f_n\,d\mu\right| + \left|\int_E f_n\,d\mu - \int_E f\,d\mu\right|.$$

В его правой части первое слагаемое становится сколь угодно малым, когда достаточно мала мера $E$, так как $f_n$ — простые функции, и для них теорема 8 § 23 доказана. Что касается второго слагаемого, то оно стремится к нулю в силу самого определения $\int_E f\,d\mu$, и теорема 8 § 24 доказана полностью.

Еще проще доказательство счетной аддитивности неопределенного интеграла. В самом деле, в обозначениях предыдущего абзаца утверждение теоремы 9 § 23 получается непосредственно применением теоремы 2 § 24 к последовательности простых функций.

Доказательства теорем 1–3 § 24 основаны на самих результатах, а не на доказательствах предыдущего параграфа, следовательно, эти теоремы оказываются справедливы и в общем случае.

Будем говорить, что последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ *сходится в среднем* к интегрируемой функции $f$, если

$$\rho(f, f_n) = \int |f - f_n|\,d\mu \to 0$$

при $n \to \infty$. Наш первый результат, относящийся к этому понятию, как по своей формулировке, так и по методу доказательства очень близок к теореме 1 § 24.

Теорема 1. *Если последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ сходится в среднем к $f$, то $\{f_n\}$ сходится к $f$ также по мере.*

Доказательство. Если для произвольного положительного числа $\varepsilon$ положим

$$E_n = \{x\colon |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

то

$$\int |f - f_n|\,d\mu \geqslant \int_{E_n} |f - f_n|\,d\mu \geqslant \varepsilon\mu(E_n),$$

следовательно, $\mu(E_n) \to 0$ при $n \to \infty$. □

Теорема 2. *Если интегрируемая функция $f$ почти всюду неотрицательна, то $\int f\,d\mu = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$ почти всюду.*

Доказательство. Если $f=0$ почти всюду, то в качестве последовательности интегрируемых простых функций, сходящейся по мере к $f$, можно взять последовательность функций, тождественно равных нулю; отсюда будет следовать, что $\int f\,d\mu=0$. Чтобы доказать обратное, заметим, что если фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых простых функций $\{f_n\}$ сходится по мере к $f$, то все $f_n$ можно считать неотрицательными, так как вместо $f_n$ можно взять $|f_n|$. Условие $\int f\,d\mu=0$ влечет за собой $\lim\limits_n \int f_n\,d\mu=0$, т. е., в силу неравенств $f_n\geqslant 0$, $\{f_n\}$ сходится в среднем к 0. Согласно теореме 1, $\{f_n\}$ сходится к 0 по мере, и из теоремы 3 § 22 следует, что $f=0$ почти всюду. □

Теорема 3. *Если $f$ — интегрируемая функция и $E$ — множество меры нуль, то*

$$\int\limits_E f\,d\mu=0.$$

Доказательство. Так как $\int\limits_E f\,d\mu=\int \chi_E f\,d\mu$, а характеристическая функция множества меры нуль почти всюду равна нулю, то сформулированное утверждение следует из теоремы 2. □

Теорема 4. *Если интегрируемая функция $f$ положительна почти всюду на некотором измеримом множестве $E$ и $\int\limits_E f\,d\mu=0$, то $\mu(E)=0$.*

Доказательство. Положим $F_0=\{x\colon f(x)>0\}$ и $F_n=\left\{x\colon f(x)\geqslant \geqslant \frac{1}{n}\right\}$. Согласно условию теоремы, множество $E-F_0$ имеет меру нуль, поэтому нам достаточно будет доказать, что $\mu(E\cap F_0)=0$. А это следует из неравенств

$$0=\int\limits_{E\cap F_n} f\,d\mu\geqslant\frac{1}{n}\mu(E\cap F_n)\geqslant 0$$

и соотношения

$$F_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n,$$

откуда

$$\mu(E\cap F_0)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E\cap F_n).\qquad □$$

Теорема 5. *Если $f$ — интегрируемая функция, такая, что $\int\limits_F f\,d\mu=0$ для всякого измеримого множества $F$, то $f=0$ почти всюду.*

Доказательство. Если $E=\{x\colon f(x)>0\}$, то, согласно условию теоремы, $\int\limits_E f\,d\mu=0$ и, в силу предыдущей теоремы, $\mu(E)=0$. Применяя то же рассуждение к функции $-f$, придем к заключению, что и множество $\{x\colon f(x)<0\}$ имеет меру нуль. □

Теорема 6. *Если $f$ — интегрируемая функция, то $N(f)=\{x\colon f(x)\neq 0\}$ есть множество $\sigma$-конечной меры.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых простых функций, сходящаяся по мере к $f$. При любом $n=1,2,\ldots$ множество $N(f_n)$ имеет конечную меру. Если $E=N(f)-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N(f_n)$, а $F$ — произвольное измеримое подмножество множества $E$, то из равенства

$$\int\limits_F f\,d\mu=\lim_n \int\limits_F f_n\,d\mu$$

и теоремы 5 следует, что $f=0$ почти всюду на $E$. А так как, в силу определения множества $N(f)$, функция $f$ отлична от нуля на $E$, то $\mu(E)=0$. Отсюда и из соотношения

$$N(f)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} N(f_n)\cup E$$

следует утверждение теоремы. □

Иногда оказывается целесообразным применять символ $\int f\,d\mu$ и к некоторым интегрируемым функциям. Так, например, если $f$ — неинтегрируемая измеримая функция, принимающая конечные или бесконечные значения, и $f\geqslant 0$ почти всюду, то мы полагаем

$$\int f\,d\mu=\infty.$$

Наиболее широкий класс функций, для которых можно разумно определить $\int f\,d\mu$, образован теми $f$, для которых хотя бы одна из функций $f^+$ и $f^-$ интегрируема. Для них мы полагаем

$$\int f\,d\mu=\int f^+\,d\mu-\int f^-\,d\mu.$$

В правой части этого равенства только одно из слагаемых $\int f^+\,d\mu$ и $\int f^-\,d\mu$ может быть бесконечно, поэтому значение $\int f\,d\mu$ может быть конечно или бесконечно, но оно не может свестись к неопределенному выражению $\infty-\infty$. Мы будем в дальнейшем пользоваться таким расширенным понятием интеграла, хотя сам термин «интегрируемая функция» всегда будет употребляться в его первоначальном смысле.

### Упражнения

1. Если $X$ — пространство, состоящее из целых положительных чисел (см., например, упр. 4 § 22), то заданная на нем функция $f$ интегрируема тогда и только тогда, когда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится абсолютно. Если это условие выполнено, то $\int f\,d\mu=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

2. Если $f$ — неотрицательная интегрируемая функция, то ее неопределенный интеграл представляет собой конечную меру в классе всех измеримых множеств.

3. Если $f$ интегрируема, то, каково бы ни было $\varepsilon>0$,

$$\mu(\{x\colon |f(x)|\geqslant\varepsilon\})<\infty.$$

4. Пусть $g$ — конечная, возрастающая и непрерывная функция действительного переменного и $\bar\mu_g$ — индуцированная ею мера Лебега—Стильтьеса (см. упр. 9 § 15). Если

$f$ — функция, интегрируемая относительно этой меры, то $\int f(x)\,\overline{d\mu_g}(x)$ называется *интегралом Лебега—Стильтьеса* функции $f$ относительно $g$ и обозначается $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dg(x)$. В частности, если $g(x) \equiv x$, то мы приходим к интегралу Лебега, который обозначается $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Если $f$ — непрерывная функция, для которой множество $N(f)$ ограничено, то $f$ — интегрируема в смысле Лебега.

## § 26. Последовательности интегрируемых функций

Теорема 1. *Если $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых простых функций, сходящаяся по мере к интегрируемой функции $f$, то*

$$\rho(f, f_n) = \int |f - f_n|\,d\mu \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

*Таким образом, для всякой интегрируемой функции $f$ и для всякого положительного числа $\varepsilon$ существует интегрируемая простая функция $g$, такая, что $\rho(f, g) < \varepsilon$.*

Доказательство. При любом фиксированном целом положительном $m$ последовательность простых функций $\{|f_n - f_m|\}$ — фундаментальная в среднем и сходится по мере к $|f - f_m|$. Поэтому

$$\int |f - f_m|\,d\mu = \lim_n \int |f_n - f_m|\,d\mu.$$

Утверждение теоремы следует из того факта, что последовательность $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем. □

Теорема 2. *Если $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых функций, то существует интегрируемая функция $f$, такая, что при $n \to \infty$, $\rho(f, f_n) \to 0$, и, следовательно, $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.*

Доказательство. В силу теоремы 1, для всякого целого положительного $n$ найдется интегрируемая функция $g_n$, такая, что $\rho(f_n, g_n) < \frac{1}{n}$. Последовательность интегрируемых простых функций $\{g_n\}$ оказывается, таким образом, фундаментальной в среднем. Пусть $f$ — измеримая (и, следовательно, интегрируемая) функция, к которой $\{g_n\}$ сходится по мере. Имеем

$$0 \leqslant \left| \int f_n\,d\mu - \int f\,d\mu \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int |f_n - f|\,d\mu = \rho(f_n, f) \leqslant \rho(f_n, g_n) + \rho(g_n, f),$$

и требуемое утверждение вытекает из теоремы 1. □

Для того чтобы кратко сформулировать следующую теорему, вспомним введенное в § 9 для функций множества понятие непрерывности сверху. Конечная функция множества $\nu$, заданная на некотором классе $\mathbf{E}$ множеств $E$, называется непрерывной сверху в 0, если, какова бы ни была убывающая последовательность множеств $\{E_n\}$ из $\mathbf{E}$, такая, что $\lim\limits_n E_n = 0$, имеет место соотношение $\lim\limits_n \nu(E_n) = 0$. Пусть теперь $\{\nu_n\}$ — последовательность конечных функций множества, заданных на $\mathbf{E}$; будем говорить, что функции $\nu_n$, образующие эту последовательность, *равностепенно непрерывны* сверху в 0, если для любой убывающей последовательности множеств $\{E_n\}$ из $\mathbf{E}$, такой, что $\lim\limits_n E_n = 0$, и для любого положительного числа $\varepsilon$ существует целое положительное $m_0$, обладающее тем свойством, что $|\nu_n(E_m)| < \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, коль скоро $m \geqslant m_0$.

Теорема 3. *Последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ сходится в среднем к интегрируемой функции $f$ тогда и только тогда, когда $\{f_n\}$ сходится к $f$ по мере и неопределенные интегралы от $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, равностепенно абсолютно непрерывны и равностепенно непрерывны сверху в* 0.

Доказательство. Докажем сначала необходимость этих условий. Сходимость $\{f_n\}$ по мере и равностепенная абсолютная непрерывность неопределенных интегралов устанавливаются соответственно теоремой 1 § 25 и теоремой 3 § 24. Поэтому нам нужно доказать только равностепенную непрерывность сверху в 0.

Из сходимости $\{f_n\}$ к $f$ в среднем следует, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует целое положительное $n_0$, такое, что $\int |f - f_n|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ для $n \geqslant n_0$. Так как неопределенный интеграл от неотрицательной интегрируемой функции представляет собой меру (см. теорему 9 § 23), то, согласно теореме 5 § 9, неопределенный интеграл непрерывен сверху в 0. Пусть $\{E_n\}$ — какая-нибудь убывающая последовательность измеримых множеств с пустым пересечением; можно указать целое положительное $m_0$, такое, что для $m \geqslant m_0$

$$\int\limits_{E_m} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{E_m} |f_n - f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots, n_0.$$

Отсюда если $m \geqslant m_0$, то

$$\int\limits_{E_m} |f_n|\, d\mu \leqslant \int\limits_{E_m} |f_n - f|\, d\mu + \int\limits_{E_m} |f|\, d\mu < \varepsilon$$

для всех целых положительных $n$. Равностепенная непрерывность в 0 неопределенных интегралов от $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, установлена.

Переходим к доказательству достаточности высказанных условий. Так как соединение счетного числа измеримых множеств $\sigma$-конечной меры само является измеримым множеством $\sigma$-конечной меры, то таким, согласно теореме 7 § 25, должно быть множество

$$E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x\colon f_n(x) \neq 0\}.$$

Пусть $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность измеримых множеств конечной меры, такая, что $\lim_n E_n = E_0$. Тогда если $F_n = E_0 - E_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\{F_n\}$ — убывающая последовательность и $\lim_n F_n = 0$. По предложению, для всякого $\delta > 0$ можно указать такое целое $k$, при котором

$$\int_{F_k} |f_n|\, d\mu < \frac{\delta}{2}$$

и, следовательно,

$$\int_{F_k} |f_m - f_n|\, d\mu \leqslant \int_{F_k} |f_m|\, d\mu + \int_{F_k} |f_n|\, d\mu < \delta.$$

Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ положим

$$G_{mn} = \{x\colon |f_m(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\};$$

тогда

$$\int_{E_k} |f_m - f_n|\, d\mu \leqslant \int_{E_k - G_{mn}} |f_m - f_n|\, d\mu + \int_{E_k \cap G_{mn}} |f_m - f_n|\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\mu(E_k) + \int_{E_k \cap G_{mn}} |f_m - f_n|\, d\mu.$$

В силу сходимости $\{f_n\}$ по мере и равностепенной абсолютной непрерывности соответствующих неопределенных интегралов, второе слагаемое в последней части неравенств при достаточно больших $m$ и $n$ сколь угодно мало, поэтому

$$\limsup_{m,n} \int_{E_k} |f_m - f_n|\, d\mu \leqslant \varepsilon\mu(E_k).$$

Так как $\varepsilon$ произвольно, то

$$\limsup_{m,n} \int_{E_k} |f_m - f_n|\, d\mu = 0.$$

Из равенств

$$\int |f_m - f_n|\, d\mu = \int_{E_0} |f_m - f_n|\, d\mu = \int_{E_k} |f_m - f_n|\, d\mu + \int_{F_k} |f_m - f_n|\, d\mu$$

мы заключаем, что

$$\limsup_{m,n} \int |f_m - f_n|\, d\mu < \delta$$

и, так как $\delta$ произвольно,

$$\limsup_{m,n} \int |f_m - f_n|\, d\mu = 0.$$

Мы доказали таким образом, что последовательность $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем; отсюда, согласно теореме 2, следует, что существует интегрируемая функция $g$, к которой $\{f_n\}$ сходится по мере. А так как сходимость в среднем влечет за собой сходность по мере, то $f = g$ почти всюду. □

Следующий результат известен под названием теоремы Лебега об ограниченно сходящихся последовательностях функций.

Теорема 4. *Если последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ сходится к $f$ по мере (или почти всюду) и почти всюду $|f_n(x)| \leqslant |g(x)|$, $n = 1, 2, \ldots$, где $g$ — некоторая интегрируемая функция, то $f$ интегрируема и последовательность $\{f_n\}$ сходится к $f$ в среднем.*

Доказательство. В случае, когда $\{f_n\}$ сходится к $f$ по мере, наше утверждение прямо следует из теоремы 3; легко видеть, что выполнение условий этой теоремы, касающихся неопределенных интегралов, обеспечено неравенством

$$\int\limits_E |f_n|\, d\mu \leqslant \int\limits_E |g|\, d\mu.$$

Случай, когда имеет место сходимость почти всюду, может быть сведен к случаю сходимости по мере, в силу существования функции $g$ (даже тогда, когда мера множества, по которому берутся интегралы, бесконечна; см. упр. 4 и 5 § 22). В самом деле, не нарушая общности, мы можем предположить, что неравенства $|f_n(x)| \leqslant |g(x)|$ и $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ выполняются для всех $x$ из $X$. Тогда, каково бы ни было положительное $\varepsilon$,

$$E_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x\colon |f_i(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{x\colon |g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

откуда следует, что $\mu(E_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Сходимость почти всюду влечет за собой равенство $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$, поэтому, в силу теоремы 5 § 9

$$\limsup_n \mu(\{x\colon |f_i(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \lim_n \mu(E_n) = \mu(\lim_n E_n) = 0.$$

Таким образом, последовательность, ограниченная интегрируемой функцией и сходящаяся почти всюду, сходится по мере. На этом доказательство теоремы заканчивается. □

### Упражнения

1. Является ли банаховым пространством множество всех интегрируемых функций с нормой $\|f\| = \int |f|\, d\mu$?

2. Пусть $\{f_n\}$ — равномерно фундаментальная последовательность функций, интегрируемых на измеримом множестве $E$ конечной меры. Функция $f$, определяемая равенством $f(x) = \lim\limits_n f_n(x)$, интегрируема на $E$, и $\int\limits_E |f_n - f|\, d\mu \to 0$ при $n \to \infty$.

3. Для случая пространства с конечной мерой теорема 3 справедлива без предположения о равностепенной непрерывности неопределенных интегралов в 0.

4. Пусть $(X, \mathrm{S}, \mu)$ — пространство целых положительных чисел, описанное в упр. 4 § 22.

а) Положим

$$f_n(k)=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{при } 1\leqslant k\leqslant n,\\ 0 & \text{при } k>n.\end{cases}$$

На этом примере мы видим, что условие равностепенной непрерывности неопределенных интегралов в 0 в общем случае не может быть опущено.

б) Тот же пример позволяет заключить, что из равномерной сходимости последовательности интегрируемых функций $\{f_n\}$ к интегрируемой функции $f$ не следует, вообще говоря, что $\lim\limits_n \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$ (см. выше, упр. 2).

в) Пусть

$$f_n(k)=\begin{cases}\frac{1}{k} & \text{при } 1\leqslant k\leqslant n,\\ 0 & \text{при } k>n.\end{cases}$$

На этом примере нетрудно показать, что предел равномерно сходящейся последовательности интегрируемых функций может не быть интегрируемой функцией.

5. Пусть $X$ — замкнутый единичный интервал, $\mu$ — лебеговская мера. Возьмем убывающую последовательность открытых интервалов $E_n$, такую, что $\mu(E_n)=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$. На примере последовательности $\{n\chi_n\}$ мы убеждаемся в том, что условие ограниченности в теореме 4 не может быть опущено.

6. Если $\{f_n\}$ — последовательность интегрируемых функций, сходящихся в среднем к интегрируемой функции $f$, а $g$ — существенно ограниченная измеримая функция, то последовательность $\{f_n g\}$ сходится в среднем к $fg$.

7. Если $\{f_n\}$ — последовательность неотрицательных интегрируемых функций, сходящаяся почти всюду к интегрируемой функции $f$, и если $\lim\limits_n \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$, $n=1,2,\ldots$, то $\{f_n\}$ сходится к $f$ в среднем. (Указание. Пусть $g_n = f_n - f$. Тогда из неравенства $|f_n - f|\leqslant f_n + f$ следует, что $0\leqslant g_n^-\leqslant f$. Применяя к последовательности $\{g_n^-\}$ теорему об ограниченной сходимости, мы получим требуемый результат из равенств $\int g_n^+\,d\mu - \int g_n^-\,d\mu = 0$, $n=1,2,\ldots$).

## § 27. Свойства интеграла

Теорема 1. *Если $f$ измерима, $g$ интегрируема и $|f|\leqslant|g|$ почти всюду, то $f$ интегрируема.*

Доказательство. Рассматривая отдельно положительную и отрицательную части функции $f$, мы сведем теорему к случаю, когда $f$ неотрицательна. Если $f$ — простая функция, то теорема очевидна. В общем случае существует возрастающая последовательность неотрицательных простых функций, такая, что $\lim\limits_n f_n(x)=f(x)$ для всех $x$ из $X$. Так как $0\leqslant f_n\leqslant|g|$, то каждая $f_n$ интегрируема, и наше утверждение следует из теоремы об ограниченно сходящихся последовательностях. □

Терема 2. *Если $\{f_n\}$ — возрастающая последовательность неотрицательных измеримых функций (могущих принимать и бесконечные значения) и $f$ — предел этой последовательности в смысле сходимости почти всюду, то $\lim\limits_n \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$.*

Доказательство. Когда $f$ интегрируема, этот результат вытекает из теоремы об ограниченно сходящихся последовательностях и из теоремы 1. Таким образом, то новое, что содержится в этой теореме, относится к случаю неинтегрируемой $f$ и состоит в том, что $\lim\limits_n \int f_n\,d\mu=\infty$, коль скоро $\int f\,d\mu=\infty$. Для доказательства этого мы покажем, что если $\lim\limits_n \int f_n\,d\mu < \infty$, то $f$ интегрируема. Пусть этот предел конечен, тогда

$$\lim_{m,\,n}\left|\int f_m\,d\mu - \int f_n\,d\mu\right| = 0.$$

Так как при фиксированных $m$ и $n$ функция $f_m - f_n$ не меняет знака, то

$$\left|\int f_m\,d\mu - \int f_n\,d\mu\right| = \int |f_m - f_n|\,d\mu,$$

и мы видим, что последовательность $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем. Согласно теореме 2 § 26, она сходится в среднем к некоторой интегрируемой функции $g$. Из сходимости в среднем следует сходимость по мере, следовательно, некоторая подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится к $g$ почти всюду, откуда $f = g$ почти всюду. □

Теорема 3. *Измеримая функция интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема ее абсолютная величина.*

Доказательство. Новым для нас в этой теореме является утверждение, что если $|f|$ интегрируема, то интегрируема и $f$. Это следует из теоремы 1, если вместо $g$ взять $|f|$. □

Теорема 4. *Если $f$ интегрируема, а $g$ существенно ограничена, то $fg$ интегрируема.*

Доказательство. Если почти всюду $|g| \leqslant c$,то $|fg| \leqslant c|f|$ также почти всюду и интегрируемость $fg$ следует из теоремы 3. □

Теорема 5. *Если $f$ — существенно ограниченная измеримая функция и $E$ — измеримое множество конечной меры, то $f$ интегрируема на $E$.*

Доказательство. Характеристическая функция измеримого множества конечной меры интегрируема, поэтому наше утверждение вытекает из теоремы 4, если в ней вместо $f$ и $g$ взять соответственно $\chi_E$ и $f$. □

Следующее предложение, последнее в этом параграфе, носит название *леммы Фату*.

Теорема 6. *Если $\{f_n\}$ — последовать неотрицательных интегрируемых функций, такая, что*

$$\liminf_n \int f_n\,d\mu < \infty,$$

*то функция $f$, определенная равенством*

$$f(x) = \liminf_n f_n(x),$$

*интегрируема и*

$$\int f\,d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n\,d\mu.$$

Доказательство. Если $g_n(x) = \inf\{f_i(x)\colon n \leqslant i < \infty\}$, то $g_n \leqslant f_n$ и последовательность $\{g_n\}$ — возрастающая. Так как $\int g_n\,d\mu \leqslant \int f_n\,d\mu$, то

$$\lim_n \int g_n\,d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n\,d\mu < \infty.$$

Вместе с тем $\lim\limits_n g_n(x) = \liminf\limits_n f_n(x) = f(x)$; следовательно в силу теоремы 2, $f$ интегрируема и

$$\int f\,d\mu \leqslant \lim_n \int g_n\,d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n\,d\mu. \qquad \square$$

**Упражнения**

1. Пусть $g$ — интегрируемая функция, $f$ — измеримая функция, причем почти всюду $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, где $\alpha$, $\beta$ — действительные числа. Тогда существует такое действительное число $\gamma$, $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$, что

$$\int f|g|\,d\mu = \gamma \int |g|\,d\mu.$$

Этот результат носит название *теоремы о среднем значении.* (Указание. Имеем неравенства

$$\alpha \int |g|\,d\mu \leqslant \int f|g|\,d\mu \leqslant \beta \int |g|\,d\mu\,).$$

2. Если последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|\,d\mu < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится почти всюду к некоторой интегрируемой функции $f$ и

$$\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\mu.$$

(Указание. Примените теорему 2 к последовательности частичных сумм ряда $\sum f_n$).

3. Если функции $f$ и $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$, интегрируемы и $|f_n(x)| \leqslant f(x)$ почти всюду, то функции $f^*$ и $f_*$, определяемые равенствами

$$f^* = \limsup_n f_n(x), \qquad f_* = \liminf_n f_n(x),$$

интегрируемы, и

$$\int f_*\,d\mu \leqslant \liminf_n \int f_n\,d\mu \leqslant \limsup_n \int f_n\,d\mu \leqslant \int f^*\,d\mu.$$

(Указание. Прибегая к рассмотрению положительной и отрицательной частей функций $f_n$, можно свести общий случай к случаю неотрицательных $f_n$ и применить лемму Фату к последовательностям $\{f + f_n\}$ и $\{f - f_n\}$.)

4. Измерима функция $f$ интегрируема на измеримом множестве $E$ конечной меры тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap \{x\colon |f(x)| \geqslant n\}).$$

(Указание. Применить метод суммирования Абеля). Что можно утверждать в тех случаях, когда $\mu(E) < \infty$ или когда сумма берется от $n = 0$?

5. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность измеримых множеств и $m$ — произвольное фиксированное целое положительное число. Если $G$ — множество всех точек, которые входят в $E_n$ по меньшей мере при $m$ значениях номера $n$, то $G$ измеримо и

$$m\mu(G) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

(Указание. Рассмотрите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_G \chi_{E_n}(x)\,d\mu(x)$).

6. Пусть $f$ — конечная измеримая функция на пространстве $(X, \mathbf{S}, \mu)$ с вполне конечной мерой. Положим

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mu\left(\left\{x\colon \frac{k}{2^n} < f(x) \leqslant \frac{k+1}{2^n}\right\}\right), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда

$$\int f\, d\mu = \lim_n s_n$$

в том смысле, что если $f$ интегрируема, то все ряды $s_n$ сходятся абсолютно и существует их предел, равный интегралу от $f$; обратно, если хотя бы один из рядов $s_n$ сходится абсолютно, то и все они сходятся абсолютно, существует $\lim_n s_n$, функция $f$ интегрируема и ее интеграл равен этому пределу. (Указание. Достаточно рассмотреть случай, когда $f \geqslant 0$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{при } \dfrac{k}{2^n} < f(x) \leqslant \dfrac{k+1}{2^n}, \ k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{при } f(x) = 0 \end{cases}$$

и применим теорему 2. Обратное утверждение можно получить так: из неравенств

$$f(x) \leqslant 2f_n(x) + \mu(X)$$

заключаем, что $f$ интегрируема, после чего обращаемся к только что проведенному рассуждению).

7. В следующих рассуждениях намечен другой, часто употребляемый подход к понятию интеграла. Пусть $f$ — неотрицательная интегрируемая функция, заданная на пространстве с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$. Для любого измеримого множества $E$ полагаем

$$a(E) = \inf\{f(x)\colon x \in E\}$$

и для любого конечного класса непересекающихся измеримых множеств $\mathbf{C} = \{E_1, \ldots, E_n\}$

$$s(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{n} a(E_i)\mu(E_i).$$

Мы утверждаем, что верхняя грань множества чисел вида $s(\mathbf{C})$ равна $\int f\, d\mu$. Если функция $f$ простая, то это очевидно. В общем случае рассмотрим неотрицательную простую функцию $g$, такую, что $g \leqslant f$. Пусть $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$; взяв класс $\mathbf{C} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, получим для него неравенство

$$\int g\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a(E_i)\mu(E_i) = s(\mathbf{C}).$$

Отсюда следует, что если $\{g_n\}$ — последовательность неотрицательных интегрируемых простых функций, сходящаяся к $f$, то

$$\lim_n \int f_n\, d\mu \leqslant \sup s(\mathbf{C})$$

и, следовательно,

$$\int f\, d\mu \leqslant \sup s(\mathbf{C}).$$

С другой стороны, так как всякое $s(\mathbf{C})$ равно интегралу от некоторой функции $g$ описанного типа, то

$$s(\mathbf{C}) \leqslant \int f\, d\mu.$$

а) Распространяется ли полученный здесь результат на те интегрируемые неотрицательные функции?

б) если $f$ — интегрируемая функция на пространстве $(X, \mathbf{S}, \mu)$ с вполне конечной мерой и ее функция распределения $g$ (см. упр. 11 § 18) непрерывна, то

$$\int f\, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dg(x)$$

(см. упр. 4 § 25). (Указание. Предположив, что $f \geqslant 0$, рассмотреть «интегральные суммы» $s(\mathbf{C})$ для того и другого интеграла и воспользоваться результатами упр. 7).

# ГЛАВА 6

# ОБЩИЕ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА

## § 28. Обобщенные меры

В этой главе мы рассмотрим одно обобщение понятия меры, не очень сложное, но полезное. В отличие от мер, те функции, которые мы предполагаем здесь изучить, могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Пусть на каком-нибудь $\sigma$-кольце $\mathbf{S}$ подмножеств множества $X$ заданы две меры $\mu_1$ и $\mu_2$. Если для множеств $E$ из $\mathbf{S}$ мы положим $\mu(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E)$, то $\mu$ будет, очевидно, некоторой мерой; то же справедливо и для любой конечной суммы мер. Иначе можно получить новую меру, снабдив исходную некоторым фиксированным неотрицательным множителем. Сочетая эти два приема, мы придем к выводу, что если $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ — конечное множество мер, а $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — конечное множество неотрицательных чисел, то функция $\mu$, определенная на $\mathbf{S}$ равенством

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(E),$$

также представляет собой меру.

Иное положение возникает, если в качестве коэффициентов мы будем брать числа произвольного знака. Если, например, $\mu_1$ и $\mu_2$ — какие-нибудь две меры на $\mathbf{S}$, то, определив $\mu$ равенством $\mu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$, мы столкнемся с двумя обстоятельствами. Во-первых, $\mu$ может оказаться отрицательной на некоторых $E$; это не только не вызывает серьезных возражений, но предсталяет значительный интерес и заслуживет изучения. Во-вторых, может случиться, что $\mu_1(E) = \mu_2(E) = \infty$ для некоторого множества $E$; вопрос о том, какой смысл следует при этом приписать $\mu(E)$, представляет затруднение, которое должно быть устранено с самого начала.

Для того чтобы избежать неопределенных выражений, мы условимся рассматривать разности двух мер только тогда, когда по крайней мере одна из них конечна. Это напоминает условие, принятое нами при распространении символа $\int f\, d\mu$ на некоторые неинтегрируемые функции. (Напомним читателю, что $\int f\, d\mu$ определяется для тех измеримых функций, для которых по крайней мере одна из функций $f^+$ и $f^-$ интегрируема, т. е. по крайней мере одна из функций множества $\nu^+$ и $\nu^-$, определенных равенствами

$$\nu^+(E) = \int_E f^+\,du, \quad \nu^-(E) = \int_E f^-\,d\mu,$$

представляет собой конечную меру.) Эту аналогию можно продолжить: если $f$ — измеримая функция, для которой определен $\int f\,d\mu$, то функция множества $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ представляется в виде разности двух мер.

В предыдущих абзацах достаточно серьезно мотивировано введение следующего определения. *Обобщенной мерой*[1]) будем называть действительную счетно-аддитивную функцию множества $\mu$, заданную на классе всех измеримых множеств в измеримом пространстве $(X, \mathbf{S})$ и обладающую, кроме того, следующими свойствами: $\mu(0) = 0$ и из бесконечных значений $\infty$ и $-\infty$ функция $\mu$ может принимать лишь какое-нибудь одно.

Заметим, что из условия счетной аддитивности вытекает следующее свойство обобщенной меры $\mu$: для любой последовательности непересекающихся измеримых множеств $\{E_n\}$ сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ всегда имеет определенный смысл, т. е. такой ряд либо сходится, либо сумма его равна $\infty$ или $-\infty$.

Понятия (вполне) конечной и (вполне) $\sigma$-конечной обобщенной меры определяются очевидным образом. Только вместо $\mu(E)$ в соответствующих определениях надо брать $|\mu(E)|$ или, что то же самое, вместо $\mu(E) < \infty$ требовать выполнения неравенств $-\infty < \mu(E) < \infty$. Так, например, обобщенная мера $\mu$ вполне конечна, если само пространство $X$ представляет собой измеримое множество и $|\mu(X)| < \infty$.

Ниже мы докажем, что всякая обобщенная мера представляется в виде разности двух мер. Отсюда будет следовать, что можно было бы первоначально задать обобщенную меру на некотором кольце, а потом строить расширение, подобно тому как это делается с мерами. Вместе с тем ясно, что такое изложение было бы пустой тратой времени, так как расширение всякой обобщенной меры можно будет получить, строя расширения соответствующих обычных мер.

Так же как в случае меры, прямо из определения обобщенной меры вытекает, что обобщенная мера конечно-аддитивна и, следовательно, субтрактивна.

Теорема 1. *Если $\mu$ — обобщенная мера, а $E$ и $F$ — измеримые множества, такие, что*

$$E \subset F \quad \text{и} \quad |\mu(F)| < \infty,$$

*то*

$$|\mu(E)| < \infty.$$

Доказательство. Имеем равенство

$$\mu(F) = \mu(F - E) + \mu(E).$$

[1]) В оригинале signed measure. Иногда для этого понятия употребляется также термин «заряд». — *Прим. перев.*

Если в его правой части бесконечно только одно слагаемое, то бесконечно и $\mu(F)$. Если оба слагаемых справа бесконечны, то либо $\mu(F-E)=\mu(E)=\infty$, либо $\mu(F-E)=\mu(E)=-\infty$, так как, согласно определению, обобщенная мера не может принимать на $\mathbf{S}$ и значение $\infty$, и значение $-\infty$; но тогда соответственно $\mu(F)=\infty$ или $\mu(F)=-\infty$. Таким образом, значение $\mu(F)$ конечно только в том случае, когда оба слагаемых в правой части последнего равенства конечны, а это означает, что всякое измеримое подмножество множества конечной обобщенной меры имеет конечную обобщенную меру. □

Теорема 2. *Если $\mu$ — обобщенная мера и $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся измеримых множеств, такая, что $\left|\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right|<\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ сходится абсолютно.*

Доказательство. Положим

$$E_n^+=\begin{cases} E_n, & \text{если } \mu(E_n)\geqslant 0,\\ 0 & \text{если } \mu(E_n)<0,\end{cases}$$

и

$$E_n^-=\begin{cases} E_n, & \text{если } \mu(E_n)\leqslant 0,\\ 0, & \text{если } \mu(E_n)>0.\end{cases}$$

Тогда

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n^+)$$

и

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^-\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n^-).$$

В правых частях последних двух равенств стоят ряды соответственно с положительным и отрицательными членами, и так как для $\mu$ по крайней мере одно из значений $\infty$ и $-\infty$ исключено, то хотя бы один из этих рядов сходится. В то же время сумма этих рядов представляет собой сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$, поэтому в действительности сходятся как $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n^+)$, так и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n^-)$. Сходимость каждого из этих рядов в отдельности равносильна абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$; теорема доказана. □

Теорема 3. *Если $\mu$ — обобщенная мера, $\{E_n\}$ — монотонная последовательность измеримых множеств и если, в том случае, когда эта последовательность убывающая, $|\mu(E_n)|<\infty$ хотя бы при одном значении $n$, то*

$$\mu(\lim_n E_n)=\lim_n \mu(E_n).$$

Доказательство. В случае возрастающей последовательности доказательство происходит так же, как для меры (см. теорему 4 § 9). Случай убывающей последовательности сводится к предыдущему переходом к дополнениям (см. теорему 5 § 9); то, что $|\mu(E_n)|<\infty$ при достаточно больших $n$, следует теперь из теоремы 1. □

**Упражнения**

1. Сумма двух (вполне) $\sigma$-конечных мер представляет собой (вполне) $\sigma$-конечную меру. Верно ли аналогичное утверждение для обобщенных мер?

2. *Комплексной мерой* в классе $\mathbf{S}$ всех измеримых множеств некоторого измеримого пространства называется функция множества $\mu$, такая, что $\mu(E)=\mu_1(E)+i\mu_2(E)$, где $E \in \mathbf{S}$, $i=\sqrt{-1}$ и $\mu_1$, $\mu_2$ — обобщенные меры в смысле определения, приведенного в этом параграфе. Распространяются ли на комплексные меры теоремы 1–3?

3. Если обобщенная мера $\mu$ двояким образом представлена в виде разности мер, $\mu = \mu_1 - \mu_2$ и $\mu = \nu_1 - \nu_2$, то всегда ли $\mu_1 = \nu_1$ и $\mu_2 = \nu_2$?

4. Тот факт, что обобщенная мера может принимать только одно из бесконечных значений $\infty$ и $-\infty$, следует из условия аддитивности. (Указание. Если $\mu(E)=\infty$ и $\mu(F)=-\infty$, то по крайней мере в одном из равенств

$$\mu(E)=\mu(E-F)+\mu(E\cap F),$$
$$\mu(F)=\mu(F-E)+\mu(E\cap F),$$
$$\mu(E\Delta F)=\mu(E-F)+\mu(F-E)$$

правая часть оказывается неопределенной.)

## § 29. Разложения в смысле Хана и в смысле Жордана

Пусть $\mu$ — обобщенная мера, заданная на классе всех измеримых множеств в некотором измеримом пространстве $(X, \mathbf{S})$. Множество $E$ назовем *положительным* (по отношению к $\mu$), если для любого $F$ из $\mathbf{S}$ множество $E\cap F$ измеримо и $\mu(E\cap F)\geqslant 0$; аналогично назовем $E$ *отрицательным*, если для любого $F$ из $\mathbf{S}$ множество $E\cap F$ измеримо и $\mu(E\cap F)\leqslant 0$. Пустое множество в этом смысле одновременно положительно и отрицательно. Мы пока не утверждаем, что существуют другие, нетривиальные, положительные или отрицательные множества.

Теорема 1. *Если $\mu$ — обобщенная мера, то существуют такие непересекающиеся множества $A$ и $B$, что $A$ — положительно, $B$ — отрицательно (по отношению к $\mu$) и $A\cup B = X$.*

Говорят, что множества $A$ и $B$ образуют *разложение в смысле Хана* пространства $X$ по отношению к $\mu$.

Доказательство. Так как $\mu$ принимает не более одного из бесконечных значений, то можно предположить, что

$$-\infty < \mu(E) \leqslant \infty$$

для любого измеримого множества $E$. Так как разность двух отрицательных множеств и соединение конечного или счетного числа непересекающихся отрицательных множеств, очевидно, представляют собой отрицательные множества, то соединение счетного числа любых отрицательных множеств отрицательно. Положим $\beta = \inf \mu(B)$, где нижняя грань берется по всем измеримым отрицательным множествам $B$. Пусть $\{B_i\}$ — последовательность измеримых отрицательных множеств, такая, что $\lim\limits_i \mu(B_i)=\beta$; если $B=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, то $B$ представляет собой измеримое отрицательное множество, для которого $\mu(B)$ принимает наименьшее значение.

Теперь мы докажем, что $A = X - B$ представляет собой положительное множество. Допустим противное, т. е. что $A$ содержит измеримое подмножество $E_0$, такое, что $\mu(E_0)<0$. Множество $E_0$ не может быть отрицательным, потому что иначе $B\cup E_0$ было бы отрицательным множеством, на котором $\mu$ принимала бы значение, меньшее, чем $\mu(B)$, что невозможно. Пусть $k_1$ — наименьшее целое положительное число,обладающее тем свойством, что $E_0$ содержит измеримое множество $E_1$, такое, что $\mu(E_1)\geqslant\frac{1}{k_1}$. (Заметим, что, так как $\mu(E_0)<\infty$, значения $\mu(E_0)$ и $\mu(E_1)$ оба конечны). В силу соотношений

$$\mu(E_0-E_1)=\mu(E_0)-\mu(E_1)\leqslant\mu(E_0)-\frac{1}{k_1}<0,$$

рассуждение, только что примененное к $E_0$, применимо и к $E_0-E_1$. Возьмем $k_2$ — наименьшее целое положительное число, обладающее тем свойством, что $E_0-E_1$ содержит измеримое подмножество $E_2$, такое, что $\mu(E_2)\geqslant\frac{1}{k_2}$, и продолжим это построение неограниченно. Так как $\mu$ конечна на измеримых подмножествах множества $E_0$ (см. теорему 1 § 28), то $\lim\limits_n\frac{1}{k_n}=0$. Отсюда следует, что, каково бы ни было измеримое множество $F$, содержащееся в

$$F_0=E_0-\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j,$$

непременно $\mu(F)\leqslant 0$, т. е. $F_0$ представляет собой измеримое отрицательное множество. Из того факта, что $F_0$ не пересекается с $B$ и соотношения

$$\mu(F_0)=\mu(E_0)-\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_j)\leqslant\mu(E_0)<0$$

противоречат свойству минимальности множества $B$, мы заключаем, что предположение $\mu(E_0)<0$ неприемлемо. □

Нетрудно показать на примерах, что разложение в смысле Хана, вообще говоря, не единственно. Однако если $X=A_1\cup B_1$ и $X=A_2\cup B_2$ — два таких разложения пространства $X$, то, каково бы ни было измеримое множество $E$,

$$\mu(E\cap A_1)=\mu(E\cap A_2)\quad\text{и}\quad\mu(E\cap B_1)=\mu(E\cap B_2).$$

Чтобы показать это, заметим, что

$$E\cap(A_1-A_2)\subset E\cap A_1\quad\text{и}\quad E\cap(A_1-A_2)\subset E\cap B_2,$$

откуда $\mu(E\cap(A_1-A_2))\geqslant 0$ и одновременно $\mu(E\cap(A_1-A_2))\leqslant 0$. Следовательно, $\mu(E\cap(A_1-A_2))=0$ и точно так же $\mu(E\cap(A_2-A_1))=0$; отсюда следует, что

$$\mu(E\cap A_1)=\mu(E\cap(A_1\cup A_2))=\mu(E\cap A_2).$$

Это рассуждение показывает, что равенства

$$\mu^+(E)=\mu(E\cap A)\quad\text{и}\quad\mu^-(E)=-\mu(E\cap B)$$

однозначно определяют в классе всех измеримых множеств функции $\mu^+$ и $\mu^-$, называемые соответственно *верхней вариацией* и *нижней вариацией* обобщенной меры $\mu$. Функция множества $|\mu|$, определенная в классе всех измеримых множеств равенством $|\mu|(E)=\mu^+(E)+\mu^-(E)$, называется *полной вариацией* обобщенной меры $\mu$. (Следует обратить внимание на существенное различие смысла символов $|\mu|(E)$ и $|\mu(E)|$).

Теорема 2. *Верхняя, нижняя и полная вариации обобщенной меры $\mu$ представляют собой меры, причем $\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$ для любого измеримого множества $E$. Если $\mu$ (вполне) конечна или $\sigma$-конечна, то таковы же $\mu^+$ и $\mu^-$; по крайней мере одна из мер $\mu^+$ и $\mu^-$ всегда конечна.*

Доказательство. Все три вариации, очевидно неотрицательны; если всякое измеримое множество представляется в виде соединения счетного числа измеримых множеств, на которых $\mu$ конечна, то, в силу теоремы 1 § 28, это же верно и по отношению к $\mu^+$ и $\mu^-$. Равенство $\mu = \mu^+ - \mu^-$ следует из определений $\mu^+$ и $\mu^-$. Тот факт, что $\mu$ способна принимать лишь одно из бесконечных значений $\infty$ и $-\infty$, влечет за собой, что по крайней мере одна из функций множества $\mu^+$ и $\mu^-$ конечна. Так как счетная аддитивность $\mu^+$ и $\mu^-$ очевидна, то теорема полностью доказана. □

Из теоремы 2 следует, что всякая обобщенная мера представляется в виде разности двух мер, из которых хотя бы одна конечна; представление обобщенной меры в виде разности верхней и нижней вариаций называется ее *разложением в смысле Жордана*.

### Упражнения

1. Если $\mu$ — конечная обобщенная мера и $\{E_n\}$ — последовательность измеримых множеств, для которой существует $\lim_n E_n$ (т. е. такая, что $\limsup_n E_n = \liminf_n E_n$), то

$$\mu(\lim_n E_n) = \lim_n \mu(E_n).$$

2. Конечная обобщенная мера и все ее вариации ограничены. Поэтому конечную обобщенную меру иногда называют мерой *с ограниченной вариацией*.

3. Если $\mu$ — обобщенная мера и $E$ — измеримое множество, то

$$\mu^+(E) = \sup\{\mu(F)\colon E \supset F \in \mathbf{S}\} \quad \text{и} \quad \mu^-(E) = -\inf\{\mu(F)\colon E \supset F \in \mathbf{S}\}.$$

Эти равенства иногда рассматривают как определения $\mu^+$ и $\mu^-$ и с их помощью доказывают существование разложения в смысле Жордана.

4. Является ли банаховым пространством множество всех вполне конечных обобщенных мер $\mu$, заданных на некоторой $\sigma$-алгебре, с нормой $\|\mu\| = |\mu|(X)$?

5. Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с мерой и $f$ — заданная на нем интегрируемая функция, то функция множества $\nu$, определенная равенством $\nu(E) = \int_E f(x)\, d\mu(x)$, представляет собой конечную обобщенную меру и

$$\nu^+(E) = \int_E f^+\, d\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f^-\, d\mu.$$

Как с помощью $f$ выражается $|\mu|$?

6. Если $\mu$ и $\nu$ — вполне конечные меры на некоторой $\sigma$-алгебре $\mathbf{S}$ и если $E$ — множество из $\mathbf{S}$, то для всякого действительного числа $t$ в $\mathbf{S}$ существует множество $A_t$, такое, что $A_t \subset E$, и, каково бы ни было множество $F$ из $\mathbf{S}$, содержащееся в $A_t$ (или в $E - A_t$), выполняется неравенство $\nu(F) \leqslant t\mu(F)$ (или соответственно $\nu(F) \geqslant t\mu(F)$).

7. Если $\mu$ — обобщенная мера и $f$ — измеримая функция, интегрируемая относительно $|\mu|$, то можно положить по определению

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\mu^+ - \int f\, d\mu^-.$$

Такой интеграл обладает многими существенными свойствами «положительных» интегралов, рассмотренных в гл. 5. Если $\mu$ — конечная обобщенная мера, то для любого измеримого множества $E$

$$|\mu|(E) = \sup\left|\int_E f\, d\mu\right|,$$

где верхняя грань берется по всем измеримым функциям $f$, подчиненным условию $|f| \leqslant 1$.

8. Если рассмотреть отдельно действительные и мнимые части, то $\int f\,d\mu$ можно определить для комплексных функций $f$ и комплексных мер $\mu$ (см. упр. 2 § 28). Упр. 7 подсказывает нам определение полной вариации конечной комплексной меры $\mu$ в виде $|\mu|(E) = \sup\left|\int\limits_E f\,d\mu\right|$, где верхняя грань берется по всем (вообще говоря, комплексным) измеримым функциям $f$, подчиненным условию $|f| \leqslant 1$. Какова связь между $|\mu|$ и полными вариациями действительной и мнимой частей $\mu$?

## § 30. Абсолютная непрерывность

Мы показали, что обобщенная мера обладает многими важными свойствами неопределенного интеграла, обобщением которого она является. Однако неопределенному интегралу присущи некоторые свойства (или лучше сказать, некоторые связи с той мерой, относительно которой он определен), непосредственно не распространяющиеся на обобщенные меры. С одним из таких свойств, в высшей степени важным — свойством абсолютной непрерывности — мы познакомились в § 23; здесь мы рассмотрим более общую схему, в рамках котрой понятие абсолютной непрерывности сохраняет смысл.

Пусть $(X, \mathbf{S})$ — какое-нибудь измеримое пространство, а $\mu$ и $\nu$ — обобщенные меры, заданные на $\mathbf{S}$. Мы будем говорить, что $\nu$ *абсолютно непрерывна* относительно $\mu$, и писать $\nu \ll \mu$, если $\nu(E) = 0$ для любого измеримого множества $E$, для которого $|\mu|(E) = 0$. Грубо говоря, $\nu \ll \mu$ означает, что значения $\nu$ малы, коль скоро малы значения $\mu$. Следует обратить внимание на известное отсутствие симметрии в точном определении; малость $\mu$ выражена условием, наложенным на ее полную вариацию. Мы сейчас покажем, что это отсутствие симметрии только кажущееся.

Теорема 1. *Если $\mu$ и $\nu$ — обобщенные меры, то условия*

$$\nu \ll \mu, \tag{1}$$

$$\nu^+ \ll \mu \quad \text{и} \quad \nu^- \ll \mu, \tag{2}$$

$$|\nu| \ll |\mu| \tag{3}$$

*эквивалентны между собой.*

Доказательство. Если выполняется (1), то $\nu(E) = 0$, коль скоро $|\mu|(E) = 0$. Пусть $X = A \cup B$ — разложение в смысле Хана по отношению к $\nu$; тогда если $|\mu|(E) = 0$, то

$$0 \leqslant |\mu|(E \cap A) \leqslant |\mu|(E) = 0$$

и

$$0 \leqslant |\mu|(E \cap B) \leqslant |\mu|(E) = 0,$$

следовательно,

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = 0, \quad \nu^-(E) = \nu(E \cap B) = 0,$$

т. е. выполняется условие (2). То, что (2) влечет за собой (3) и(3) влечет за собой (1), вытекает соответственно из соотношений

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) \quad \text{и} \quad 0 \leqslant |\nu(E)| \leqslant |\nu|(E). \qquad \square$$

Следующая теорема устанавливает связь между общим определением абсолютной непрерывности и тем определением, которое мы имели в § 23 (для конечных функций множества). Эта теорема по существу утверждает, что фразе «значения $\nu$ малы, коль скоро малы значения $\mu$» можно придать иную точную интерпретацию, эквивалентную первоначальной, хотя внешне отличную от нее.

Теорема 2. *Пусть $\mu$ и $\nu$ — обобщенные меры, причем $\nu$ конечна и $\nu \ll \mu$. Тогда для всякого положительного числа $\varepsilon$ найдется такое положительное число $\delta$, что $|\nu|(E) < \varepsilon$ для всякого измеримого множества $E$, для которого $|\mu|(E) < \delta$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ можно найти последовательность измеримых множеств $\{E_n\}$, такую, что $|\mu|(E_n) < \frac{1}{2^n}$ и $|\nu|(E) \geqslant \varepsilon$, $\quad n = 1, 2, \ldots$

Если $E = \limsup\limits_n E_n$, то

$$|\mu|(E) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} |\mu|(E_i) < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

откуда $|\mu|(E) = 0$. С другой стороны, так как $\nu$ конечна, то

$$|\nu|(E) = \lim_n |\nu|(E_n \cup E_{n+1} \cup \ldots) \geqslant \limsup_n |\nu|(E_n) \geqslant \varepsilon.$$

Это противоречит условию $\nu \ll \mu$; тем самым теорема доказана. □

Легко видеть, что отношению «$\ll$» рефлективно (т. е. $\mu \ll \mu$) и транзитивно (т. е. если $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_2 \ll \mu_3$, то $\mu_1 \ll \mu_3$). Две обобщенные меры $\mu$ и $\nu$ называются *эквивалентными*, если одновременно $\nu \ll \mu$ и $\mu \ll \nu$. Отношение эквивалентности записывается $\mu \equiv \nu$.

Пусть $(X, \mathbf{S})$ — измеримое пространство и на $\mathbf{S}$ заданы обобщенные меры $\mu$ и $\nu$. Назовем $\mu$ и $\nu$ *взаимно сингулярными*, если в $X$ существуют непересекающиеся множества $A$ и $B$, такие, что $A \cup B = X$ и, каково бы ни было измеримое множество $E$, множества $A \cap E$ и $B \cap E$ измеримы и $|\mu|(A \cap E) = |\nu|(B \cap E) = 0$; отношение сингулярности условимся записывать $\mu \perp \nu$. Несмотря на симметрию этого отношения, часто удобнее бывает говорить, что мера $\nu$ *сингулярна относительно* $\mu$.

Сингулярность $\nu$ относительно $\mu$ представляет собой как бы крайнюю форму отрицания абсолютной непрерывности $\nu$ относительно $\mu$. В самом деле, при $\mu \perp \nu$, если, например, $|\mu|(E) = 0$, то не только отсюда не следует равенство $|\nu|(E) = 0$, но вообще мера $|\nu|$ способна быть отличной от нуля лишь на тех множествах, на которых $|\mu|$ равна нулю.

В заключение этого параграфа введем еще одно новое обозначение. Традиционный термин «почти всюду», которым мы уже неоднократно пользовались, вполне удовлетворителен в тех случаях, когда мы имеем дело с одной мерой. Однако уже при рассмотрении понятий абсолютной непрерывности и сингулярности мы по необходимости сталкиваемся с несколькими мерами, и для того, чтобы не повторять часто выражений вроде «почти всюду по отношению к $\mu$», условимся применять следующее обозначение. Пусть $\pi(x)$ — какое-нибудь предложение, которое может быть отнесено к любой точке $x$ измеримого пространства $(X, \mathbf{S})$, и $\mu$ — обобщенная мера на $\mathbf{S}$; тогда

$$\pi(x)[\mu] \quad \text{или} \quad \pi[\mu]$$

будет означать, что если $E$ — множество всех точек $x$, для которых $\pi(x)$ неверно, то $|\mu|(E)=0$. Так, например, если $f$ и $g$ — функции, заданные на $X$, то $f=g[\mu]$ означает, что $\{x\colon f(x)\neq g(x)\}$ представляет собой измеримое множество меры нуль относительно $|\mu|$. Символ $[\mu]$ можно читать: «по модулю $\mu$».

### Упражнения

1. Пусть $\mu$ — обобщенная мера, $f$ — функция, интегрируемая относительно $\mu$; если $\nu$ задана на измеримых множествах посредством равенства $\nu(E)=\int_E f\,d\mu$ (см. упр. 7 § 29), то $\nu \ll \mu$.

2. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — единичный интервал с лебеговской мерой. Положим $F=\left\{x\colon 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\right\}$ и зададим функции $f_1$, $f_2$ и функции множества $\mu_1$, $\mu_2$ следующим образом: $f_1(x)=2\chi_F(x)-1$, $f_2(x)=x$; $\mu_i(E)=\int_E f_i\,d\mu$, $i=1,2$. Тогда $\mu_2\ll\mu_1$. Однако из $\mu_1(E)=0$, вообще говоря, не следует, что $\mu_2(E)=0$. Если бы $\mu_2$ было определено, например, так: $\mu_2(E)=\int_E\left(f_2-\frac{1}{2}\right)d\mu$, то из $\mu_1(E)=0$ вытекало бы $\mu_2(E)=0$.

3. Какова бы ни была обобщенная мера $\mu$, вариации $\mu^+$ и $\mu^-$ взаимно сингулярны и обе они абсолютно непрерывны по отношению к $\mu$.

4. Какова бы ни была обобщенная мера $\mu$, всегда $\mu\equiv|\mu|$.

5. Если $\mu$ — обобщенная мера и $E$ — измеримое множество, то $|\mu|(E)=0$ тогда и только тогда, когда $\mu(F)=0$ для всякого измеримого подмножества $F$ множества $E$.

6. Если $\mu$ и $\nu$ — любые две меры на каком-либо $\sigma$-кольце $\mathbf{S}$, то $\mu\ll\mu+\nu$.

7. Пусть $f_1$ и $f_2$ — интегрируемые функции, заданные в пространстве $(X, \mathbf{S}, \mu)$ с вполне конечной мерой, и $\mu_i$ — неопределенный интеграл от $f_i$, $i=1,2$. Тогда если $\mu(\{x\colon f_1(x)=0\}\Delta\{x\colon f_2(x)=0\})=0$, то $\mu_1\equiv\mu_2$.

8. Пусть $\psi$ — канторова функция (см. упр. 3 § 19), $\mu_0$ — порожденная ею мера Лебега—Стильтьеса на борелевских множествах единичного интервала (см. упр. 9 § 15). Если $\mu$ — лебеговская мера, то $\mu_0$ и $\mu$ взаимно сингулярны.

9. Если $\mu$ и $\nu$ — обобщенные меры, причем $\nu\ll\mu$ и в то же время $\nu\perp\mu$, то $\nu=0$.

10. Пусть $\nu_1$, $\nu_2$ и $\mu$ — конечные обобщенные меры; если $\nu_1$ и $\nu_2$ сингулярны относительно $\mu$, то $\nu_1+\nu_2$ также сингулярна относительно $\mu$. (Указание. Пусть $X=A_1\cup B_1$ и $X=A_2\cup B_2$ — такие разложения, что $|\mu|$ обращается в нуль на всех измеримых подмножествах множеств $A_i$, а $|\nu_i|$ — на измеримых подмножествах множеств $B_i$, $i=1,2$; тогда

$$X=[(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap B_2)\cup(A_2\cap B_1)]\cup(B_1\cap B_2)$$

будет представлять собой соответствующее разложение для $\mu$ и $\nu$.)

11. Пусть $\mu$ и $\nu$ — меры на какой-либо $\sigma$-алгебре $\mathbf{S}$, такие, что $\mu$ конечна и $\nu\ll\mu$. Тогда существует измеримое множество $E$, обладающее следующим свойством: $X-E$ есть множество $\sigma$-конечной меры по отношению к $\nu$ и, каково бы ни было измеримое подмножество $F$ множества $E$, $\nu(F)$ равно либо 0, либо $\infty$. (Указание. $E$ строится методом исчерпывания (см. упр. 3 § 17), исходя из условий: $\nu$ должна равняться 0 или $\infty$ на измеримых подмножествах $E$ и $\mu$ должна принимать на $E$ свое наибольшее значение; требуемое свойство множества $X-E$ устанавливается также методом исчерпывания.)

12. Теорема 2 может нарушиться, если не предполагать, что $\nu$ конечна. (Указание. Пусть $X$ — множество всех целых положительных чисел; положим

$$\mu(E)=\sum_{n\in E}2^{-n},\quad \nu(E)=\sum_{n\in E}2^{n}.)$$

## § 31. Теорема Радона—Никодима

Теорема 1. *Если $\mu$ и $\nu$ — вполне конечные меры, причем $\nu\ll\mu$ и $\nu$ не рана нулю тождественно, то существуют положительное* *число $\varepsilon$ и измеримое множество $A$, такие, что $\mu(A) > 0$ и $A$ положительно по отношению к обобщенной мере $\nu - \varepsilon\mu$.*

Доказательство. Пусть $X = A_n \cup B_n$ — разложение в смысле Хана по отношению к обобщенной мере $\nu - \frac{1}{n}\mu$, $n = 1, 2, \ldots$. Положим

$$A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Тогда, так как $B_0 \subset B_n$, то

$$0 \leqslant \nu(B_0) \leqslant \frac{1}{n}\mu(B_0), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и, следовательно, $\nu(B_0) = 0$. Отсюда следует, что $\nu(A_0) > 0$ и, в силу абсолютной непрерывности $\nu$ относительно $\mu$, $\mu(A_0) > 0$. Следовательно, $\mu(A_n) > 0$ хотя бы для одного значения $n$; остается для такого $n$ положить $A = A_n$ и $\varepsilon = \frac{1}{n}$. □

Теперь мы установим основной результат, касающийся абсолютной непрерывности; это — так называемая *теорема Радона—Никодима.*

Теорема 2. *Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с вполне $\sigma$-конечной мерой. Если $\sigma$-конечная обобщенная мера $\nu$, заданная на $\mathbf{S}$, абсолютно непрерывна относительно $\mu$, то на $X$ существует конечная измеримая функция $f$, такая, что*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

*для любого измеримого множества $E$. Такая функция $f$ единственна, в том смысле, что если $\nu(E) = \int_E g \, d\mu$ для всякого измеримого $E$, то $f = g[\mu]$.*

Следует особо отметить, что интегрируемость $f$ при этом не утверждается; $f$ будет интегрируемой, очевидно, тогда и только тогда, когда $\nu$ конечна. Впрочем, употребляя символ $\int_E f \, d\mu$, мы тем самым в неявной форме утверждаем (см. § 25), что хотя бы одна из функций $f^+$ и $f^-$ интегрируема; если интегрируема $f^+$, то конечна верхняя вариация $\nu^+$ обобщенной меры $\nu$, если интегрируема $f^-$, то конечна нижняя вариация $\nu^-$.

Доказательство. Так как $X$ представляет собой соединение счетного числа измеримых множеств, на каждом из которых $\mu$ и $\nu$ конечны, то, не нарушая общности доказательства, можно с самого начала предположить, что обе рассматриваемые обобщенные меры конечны. Так как $\nu$ конечна, то функция $f$ интегрируема, и единственность $f$, в указанном смысле, следует из теоремы 5 § 25. Наконец, предположение $\nu \ll \mu$ эквивалентно совокупности условий

$$\nu^+ \ll \mu, \quad \nu^- \ll \mu,$$

поэтому существование $f$ достаточно доказать в том случае, когда $\mu$ и $\nu$ являются конечными мерами.

Пусть $\mathcal{K}$ — множество функций $f$ на $X$, обладающих следующими свойствами: $f$ неотрицательны, интегрируемы относительно $\mu$ и $\int_E f\,d\mu \leqslant \nu(E)$ для всякого измеримого множества $E$. Положим

$$\alpha = \sup\left\{\int f\,d\mu\colon f \in \mathcal{K}\right\}$$

и возьмем последовательность функций $\{f_n\}$ из $\mathcal{K}$, такую, что

$$\lim_n \int f_n\,d\mu = \alpha.$$

Пусть $E$ — произвольное измеримое множество, $n$ — любое целое положительное число и $g_n = f_1 \cup \ldots \cup f_n$. Тогда $E$ можно представить в виде соединения $n$ непересекающихся измеримых множеств, $E = E_1 \cup \ldots \cup E_n$, таким образом, что $g_n(x) = f_j(x)$, когда $x$ принадлежит $E_j$, $j = 1, \ldots, n$. Следовательно,

$$\int_E g_n\,d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{E_j} f_j\,d\mu \leqslant \sum_{j=1}^n \nu(E_j) = \nu(E).$$

Положим $f_0(x) = \sup\{f_n(x)\colon n = 1, 2, \ldots\}$. Тогда $f_0(x) = \lim_n g_n(x)$ и, согласно теореме 2 § 27, $f_0 \in \mathcal{K}$ и $\int f_0\,d\mu = \alpha$. Так как $f_0$ интегрируема, то существует такая конечная функция $f$, что $f_0 = f[\mu]$; теперь мы покажем, что если $\nu_0(E) = \nu(E) - \int_E f\,d\mu$, то мера $\nu_0$ тождественно равна нулю.

Если бы $\nu_0$ не обращалась в нуль тождественно, то, в силу теоремы 1, можно было бы указать положительное число $\varepsilon$ и измеримое множество $A$, такие, что $\mu(A) > 0$ и

$$\varepsilon\mu(E \cap A) \leqslant \nu_0(E \cap A) = \nu(E \cap A) - \int_{E \cap A} f\,d\mu$$

для любого измеримого множества $E$. Тогда, положив $g = f + \varepsilon\chi_E$, мы получили бы для любого измеримого $E$

$$\int_E g\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \varepsilon\mu(E \cap A) \leqslant \int_{E-A} f\,d\mu + \nu(E \cap A) \leqslant \nu(E),$$

т. е. $g \in \mathcal{K}$. Но

$$\int g\,d\mu = \int f\,d\mu + \varepsilon\mu(A) > \alpha,$$

что противоречит выбору функции $f$. □

**Упражнения**

1. Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с мерой и $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ для любого измеримого множества $E$, то

$$X = \{x\colon f(x) > 0\} \cup \{x\colon f(x) \leqslant 0\}$$

представляет собой разложение в смысле Хана по отношению к $\nu$.

2. а) Предположим, что $(X, \mathbf{S})$ — измеримое пространство, а $\mu$ и $\nu$ — вполне конечные меры на $\mathbf{S}$, причем $\nu \ll \mu$. Если $\bar{\mu} = \mu + \nu$ и $\nu(E) = \int_E f\,d\bar{\mu}$ для любого $E$ из $\mathbf{S}$, то $0 \leqslant f(x) < 1\ [\mu]$.

б) Если $\int g\,d\nu = \int fg\,\overline{d\mu}$ для любой неотрицательной измеримой функции $g$, то $\nu(E) = \int\limits_E \frac{f}{1-f}\,d\mu$, каково бы ни было измеримое множество $E$. (Указание. Записав сделанное предположение в виде $\int g(1-f)\,d\nu = \int fg\,d\mu$, положим, для заданного $E$, $g = \frac{\chi_E}{1-f}$).

3. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — единичный интервал с лебеговской мерой и $M$ — какое-нибудь его неизмеримое подмножество. Пусть, далее, $(\alpha_1, \beta_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2)$ — две пары положительных чисел, таких, что $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 1$ и $\widetilde{\mu}_i$, $i = 1, 2$, — продолжения меры $\mu$, заданные с помощью $\alpha_i$ и $\beta_i$, как это указано в упр. 2 «е» § 16, на $\sigma$-кольце $\widetilde{\mathbf{S}}$, порожденном классом $\mathbf{S}$ и множеством $M$. Тогда существуют такие измеримые функции $f_1$ и $f_2$, что

$$\widetilde{\mu}_1(E) = \int\limits_E f_1\,d\widetilde{\mu}_2 \quad \text{и} \quad \widetilde{\mu}_2(E) = \int\limits_E f_2\,d\widetilde{\mu}_1$$

для любого измеримого множества $E$. Как строятся функции $f_1$ и $f_2$?

4. Теорема Радона-Никодима справедлива в том случае, когда $\mu$ представляет собой обобщенную меру. (Указание. Пусть $X = A \cup B$ — разложение в смысле Хана по отношению к $\mu$; применить теорему Радона-Никодима отдельно к $\nu$ и $\mu^+$ на множестве $A$ и к $\nu$ и $\mu^-$ на множестве $B$.)

5. Пусть $\mu$ — вполне $\sigma$-конечная обобщенная мера. Так как $\mu^+$ и $\mu^-$ абсолютно непрерывны как относительно $\mu$, так и относительно $|\mu|$, то

$$\mu^+(E) = \int\limits_E f_+\,d\mu = \int\limits_E g_+\,d|\mu| \quad \text{и} \quad \mu^-(E) = \int\limits_E f_-\,d\mu = \int\limits_E g_-\,d|\mu|.$$

Функции $f_+$, $g_+$, $f_-$ и $g_-$ — удовлетворяют соотношениям $f_+ = g_+[\mu]$ и $f_- = g_-[\mu]$. Как строятся эти функции?

6. Если $\mu$ — обобщенная мера, $\nu(E) = \int\limits_E f\,d\mu$ и $|\nu|(E) = \int\limits_E g\,d|\mu|$ для любого измеримого множества $E$, то $g = |f|[\mu]$.

7. Теорема Радона-Никодима, справедлива тогда и только тогда, когда $\nu$ не $\sigma$-конечна, но в этом случае функция $f$ может принимать бесконечные значения. (Указание. Достаточно рассмотреть тот случай, когда $\nu$ представляет собой меру, а $\mu$ конечна; в этом случае пользуемся упр. 11 § 30.)

8. Теорема Радона-Никодима, вообще говоря, неверна тогда, когда $\mu$ не вполне $\sigma$-конечна, если даже при этом $\nu$ конечна. (Указание. Пусть $X$ — какое-нибудь несчетное множество, а $\mathbf{S}$ — класс тех его подмножеств, которые либо сами конечны или счетны, либо имеют конечные или счетные дополнения. Для любого $E$ из $\mathbf{S}$ положим $\mu(E)$ равным числу точек в множестве $E$, а $\nu(E)$ положим равным 0, если $E$ конечно или счетно, и равным 1, если $E$ несчетно.)

9. Пусть $(X, \mathbf{S})$ — измеримое пространство, $\mu$ и $\nu$ — заданные на $\mathbf{S}$ $\sigma$-конечные меры, такие, что $\nu \ll \mu$. Тогда теорема Радона-Никодима может быть применена отдельно к каждому измеримому множеству, и возникает вопрос, нельзя ли задать на $X$ функцию $f$ так, чтобы она служила подынтегральной функцией в теореме Радона-Никодима сразу для всех измеримых множеств. Следующий уродливый пример показывает, что это вообще говоря, невозможно.

Возьмем какое-нибудь несчетное множество $A$ мощности $\alpha$ и множество $B$ мощности $\beta > \alpha$. В качестве $X$ возьмем множество всех упорядоченных пар $(a, b)$, где $a \in A$ и $b \in B$. Множество вида $\{(a, b_0)\colon a \in A\}$ условимся называть *горизонтальной линией*, множество вида $\{(a_0, b)\colon b \in B\}$ — *вертикальной линией*. Пусть $\mathbf{S}$ — класс всех тех множеств $E$, которые могут быть покрыты конечным или счетным числом горизонтальных и вертикальных линий $L$ и, кроме того, обладают тем свойством, что либо $L \cap E$, либо $L - E$ не более, чем счетно. Для любого $E$ из $\mathbf{S}$ положим $\mu(E)$ равным числу горизонтальных и вертикальных линий $L$, таких, что $L - E$ конечно или счетно, а $\nu(E)$ — равным числу вертикальных линий с тем же свойством. Очевидно, что $\mu$ и $\nu$ — $\sigma$-конечные меры и $\nu \ll \mu$. Допустим теперь, что на $X$ можно задать такую функцию $f$, что $\nu(E) = \int\limits_E f\,d\mu$ для любого $E$ из $\mathbf{S}$. Легко видеть, что множество $M = \{x\colon f(x) = 0\}$ должно иметь конечное или счетное пересечение со всякой вертикальной линией и в то же время, какова бы ни была горизонтальная линия $L$, $L - M$ должно быть конечно или счетно. Из первого условия вытекает, что мощность множества $M$ не может превзойти $\alpha\aleph_0 = \alpha$, а из второго, — что эта мощность не меньше $\beta(\alpha - \aleph_0) \geqslant \beta$.

10. (J. C. Oxtoby) Меру $\mu$ в пространстве $(X, \mathbf{S}, \mu)$ можно подчинить условию, более слабому, чем полная $\sigma$-конечность, и более сильному, чем $\sigma$-конечность, при выполнении которого справедлива теорема Радона-Никодима. Это условие состоит в том, что пространство может быть представлено в виде соединения непересекающихся измеримых множеств конечной меры, образующих класс $\mathbf{D}$, такой, что всякое измеримое множество может быть покрыто, с точностью до множества меры нуль, конечным или счетным числом множеств из $\mathbf{D}$. Приведем пример пространства с не вполне $\sigma$-конечной мерой, удовлетворяющего высказанному условию.

В качестве $X$ возьмем эвклидову плоскость, в качестве $\mathbf{S}$ — класс всех тех множеств, которые можно покрыть конечным или счетным числом горизонтальных прямых и пересечение которых с каждой такой прямой измеримо в смысле Лебега (на прямой). Если $E$ из $\mathbf{S}$ помещается на одной горизонтальной прямой, то $\mu(E)$ полагаем равной лебеговской мере множества $E$ на этой прямой; для произвольного $\mathbf{E}$ из $\mathbf{S}$ значение $\mu(E)$ определяется однозначно свойством счетной аддитивности.

11. Если в упр. 9 положить $B = A$, а мощность этого множества равна $\aleph_1$ (= наименьшая несчетная мощность), то мы не придем к противоречию. В самом деле, в этом случае $X$ содержит множество $E$, обладающее тем свойством, что если $L$ — произвольная вертикальная линия, то $E \cap L$ конечно или счетно, а если $L'$ — произвольная горизонтальная линия, то $L' - E$ конечно или счетно. [Указание. Пусть $A$ вполне упорядочено, т. е. каждому элементу $a$ множества $A$ поставлено в соответствие некоторое порядковое число $\xi(a) < \Omega$ (где $\Omega$ — наименьшее несчетное порядковое число), и соответствие между $A$ и множеством всех чисел, меньших $\Omega$, взаимно однозначно. Тогда $E = \{(a, b): \xi(a) > \xi(b)\}$.]

12. Если $\mu$ — вполне конечная мера и $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ для любого измеримого множества $E$, то

$$B(t) = \{x: f(x) \leqslant t\}$$

представляет собой отрицательное множество по отношению к обобщенной мере $\nu - t\mu$ (см. упр. 1 выше). Теорему Радона-Никодима можно доказать иначе, восстановив функцию $f$ по заданным множествам $B(t)$ (см. упр. 10 § 18). Основная трудность этого доказательства состоит в том, что отрицательные множества определяются не единственным образом. Трудность эту можно частично устранить, выбрав для всех $t$ множества $B(t)$ так, чтобы значения $\mu(B(t))$ были наименьшими.

## § 32. Производные от обобщенных мер

Для функций, фигурирующих под знаком интеграла в теореме Радона—Стильтьеса, часто употребляется весьма выразительное специальное обозначение. Если $\mu$ — вполне $\sigma$-конечная мера и если $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ для любого измеримого множества $E$, то мы будем писать

$$f = \frac{d\nu}{d\mu} \quad \text{или} \quad d\nu = f d\mu,$$

а саму функцию $f$ называть *производной* Радона—Стильтьеса. При этом соотношениям, получаемым формальными действиями над дифференциалами, отвечают содержательные теоремы. Некоторые из них тривиальны, как, например,

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu},$$

тогда как другие выражают более или менее глубокие свойства операции интегрирования. К числу последних относятся правило дифференцирования сложной функции и, как очевидное следствие, правило замены переменного в интеграле; и то, и другое здесь точно сформулировано и доказано. Надо, конечно, иметь в виду, что производная Радона—Никодима $\frac{d\nu}{d\mu}$ определяется единственным образом лишь с точностью до множеств меры нуль (относительно $\mu$); поэтому в точном словесном выражении всякой дифференциальной формулы приходится часто применять термин «почти всюду».

Теорема 1. *Если $\lambda$ и $\mu$ — вполне $\sigma$-конечные меры, такие, что $\mu \ll \lambda$, а $\nu$ — вполне $\sigma$-конечная обобщенная мера, причем $\nu \ll \mu$, то*

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}[\lambda].$$

Доказательство. Если равенство такого вида справедливо как для верхней, так и для нижней вариации обобщенной меры $\nu$, то оно будет справедливо и для самой $\nu$; поэтому достаточно рассмотреть лишь тот случай, когда $\nu$ есть мера. Обозначим $\frac{d\nu}{d\mu} = f$ и $\frac{d\mu}{d\lambda} = g$. Так как $\nu$ неотрицательна, то, согласно теореме 5 § 25, $f \geqslant 0$ $[\mu]$, и мы можем предположить, не нарушая общности, что $f$ неотрицательна всюду.

Пусть $\{f_n\}$ — возрастающая последовательность неотрицательных простых функций, сходящаяся к $f$ в каждой точке пространства $X$ (см. теорему 2 § 20). Тогда, в силу теоремы 2 § 27, для любого измеримого множества $E$

$$\lim_n \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu \quad \text{и} \quad \lim_n \int_E f_n g\, d\lambda = \int_E fg\, d\lambda.$$

А так как для любого измеримого $F$

$$\int_E \chi_F\, d\mu = \mu(E \cap F) = \int_{E\cap F} g\, d\lambda = \int_E \chi_F g\, d\lambda,$$

то

$$\int_E f_n\, d\mu = \int_E f_n g\, d\lambda, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и, следовательно,

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu = \int_E fg\, d\lambda. \qquad \square$$

Теорема 2. *Если $\lambda$ и $\mu$ — вполне $\sigma$-конечные меры, причем $\mu \ll \lambda$, и $f$ — конечная измеримая функция, для которой имеет смысл $\int f\, d\mu$, то*

$$\int f\, d\mu = \int f \frac{d\mu}{d\lambda}\, d\lambda.$$

Доказательство. Зададим на измеримых множествах $E$ обобщенную меру $\nu$, положив

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu,$$

и воспользуемся теоремой 1. Получим равенство

$$\nu(E) = \int_E \frac{d\mu}{d\lambda}\, d\lambda;$$

искомый результат получим при $E = X$. $\square$

Следующая теорема, касающаяся соотношений между различными обобщенными мерами, даст нам так называемое *разложение в смысле Лебега* вполне $\sigma$-конечной обобщенной меры на части, одна из которых абсолютно непрерывна, а другая сингулярна относительно некоторой другой вполне $\sigma$-конечной меры.

Теорема 3. *Если* $(X, \mathbf{S})$ — *измеримое пространство, а* $\mu$ *и* $\nu$ — *вполне* $\sigma$-*конечные обобщенные меры, заданные на* $\mathbf{S}$, *то существуют единственным образом определенные вполне* $\sigma$-*конечные меры* $\nu_0$ *и* $\nu_1$, *такие, что сумма их равна* $\nu$, $\nu_0 \perp \mu$ *и* $\nu_1 \ll \mu$.

Доказательство. Предположим, как обычно, что $\mu$ и $\nu$ конечны. Так как $\nu_1$ абсолютно непрерывна относительно $\mu$ тогда и только тогда, когда она абсолютно непрерывна относительно $|\mu|$, а $\nu_0$ сингулярна относительно $\mu$ тогда и только тогда, когда $\nu_0 \perp |\mu|$, то мы можем предположить, что $\mu$ представляет собой меру. И, наконец, так как $\nu^+$ и $\nu^-$ можно рассматривать отдельно, то мы вправе предположить, что и $\nu$ является мерой.

Доказательство этой теоремы для случая вполне конечных мер основано на простом замечании, которое состоит в том, что $\nu$ абсолютно непрерывна относительно $\mu + \nu$. Следовательно, существует такая измеримая функция $f$, что

$$\nu(E) = \int\limits_E f\, d\mu + \int\limits_E f\, d\nu$$

для любого измеримого множества $E$. Так как $0 \leqslant \nu(E) \leqslant \mu(E) + \nu(E)$, то $0 \leqslant f \leqslant 1$ $[\mu + \nu]$ и, следовательно, $0 \leqslant f \leqslant 1$ $[\nu]$. Если мы положим $A = \{x\colon f(x) = 1\}$ и $B = \{x\colon 0 \leqslant f(x) < 1\}$, то будем иметь

$$\nu(A) = \int\limits_A d\mu + \int\limits_A d\nu = \mu(A) + \nu(A),$$

откуда, так как $\nu$ конечна, $\mu(A) = 0$. Положим теперь

$$\nu_0(E) = \nu(E \cap A) \quad \text{и} \quad \nu_1(E) = \nu(E \cap B),$$

где $E$ — произвольное измеримое множество. Тогда очевидно, что $\nu_0 \perp \mu$. Остается доказать соотношение $\nu_1 \ll \mu$.

Если $\mu(E) = 0$, то

$$\int\limits_{E \cap B} d\nu = \nu(E \cap B) = \int\limits_{E \cap B} f\, d\nu$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{E \cap B} (1 - f)\, d\nu = 0.$$

Так как $1 - f \geqslant 0$ $[\nu]$, то отсюда следует, что $\nu_1(E) = \nu(E \cap B) = 0$. Существование $\nu_0$ и $\nu_1$ доказано.

Если $\nu = \nu_0 + \nu_1$ и $\nu = \bar{\nu}_0 + \bar{\nu}_1$ — два разложения в смысле Лебега обобщенной меры $\nu$, то $\nu_0 - \bar{\nu}_0 = \bar{\nu}_1 - \nu_1$. При этом $\nu_0 - \bar{\nu}_0 \perp \mu$ (см. упр. 10 § 30) и $\bar{\nu}_1 - \nu_1 \ll \mu$, следовательно, $\nu_0 = \bar{\nu}_0$ и $\nu_1 = \bar{\nu}_1$ (см. упр. 9 § 30). □

### Упражнения

1. Пользуясь понятием интеграла относительно обобщенной меры, можно обобщить понятие производной Радона-Никодима. Теорема 1 справедлива и тогда, когда $\lambda$ и $\mu$ — обобщенные меры. (Указание. Возьмите разложения в смысле Хана $X = A_j \cup B_j$ ($j = 1, 2, 3$) по отношению к каждой из обобщенных мер $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ и разложите $X$ на восемь множеств $C_k$ ($k = 1, \ldots, 8$), составленных из таких пересечений множеств $A_j$, $B_j$ по три, чтобы на измеримых подмножествах каждого из $C_k$ все три функции $\lambda$, $\mu$, $\nu$ сохраняли знак; после этого можно почти непосредственно применить теорему 1.)

2. Если $\mu$ и $\nu$ — вполне $\sigma$-конечные меры и $\mu \equiv \nu$, то
$$\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{1}{\frac{d\nu}{d\mu}}.$$

3. Если $\mu$ и $\nu$ — вполне $\sigma$-конечные меры и $\nu \ll \mu$, то
$$\nu\left(\left\{x\colon \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0\right\}\right) = 0.$$

4. Если $\mu_0$, $\mu_1$ и $\mu_2$ — вполне конечные меры и если $d\mu_0 = f_1\,d(\mu_0 + \mu_1) = f_2\,d(\mu_0 + \mu_2) = f\,d(\mu_0 + \mu_1 + \mu_2)$, то почти всюду относительно $\mu_0 + \mu_1 + \mu_2$ выполняются равенства
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{f_1(x) f_2(x)}{f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) f_2(x)} & \text{при } f_1(x) f_2(x) \neq 0, \\ 0 & \text{при } f_1(x) = f_2(x) = 0. \end{cases}$$

5. Пусть $\{\mu_n\}$ и $\{\nu_n\}$ — последовательности вполне конечных мер. Положим
$$\bar{\mu}_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \quad \bar{\nu}_n = \sum_{i=1}^{n} \nu_i, \quad \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i, \quad \nu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i$$
и допустим, что $\mu$ и $\nu$ представляют собой конечные меры. Тогда если $\nu_n \ll \bar{\mu}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\nu \ll \mu$ и
$$\lim_n \frac{d\bar{\nu}_n}{d\bar{\mu}_n} = \frac{d\nu}{d\mu} \; [\mu].$$
Доказательство этого предложения основывается на следующих леммах:

а) Если $\{E_n\}$ — такая последовательность измеримых множеств, что $\bar{\mu}_n(E_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\mu(\limsup_n E_n) = 0$. (Указание. $\bar{\mu}_n(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \bar{\mu}_k(E_k)$.)

б) Если $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ — последовательности функций, такие, что $\varphi_n = \psi_n[\mu_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\limsup_n \varphi_n(x) = \limsup_n \psi_n(x)[\mu]$ и $\liminf_n \varphi_n(x) = \liminf_n \psi_n(x)[\mu]$. (Указание. Примените «а» к множествам $E_n = \{x\colon \varphi_n(x) \neq \psi_n(x)\}$.)

В силу «б», результат, сформулированный в упр. 5, можно доказывать при каких-нибудь фиксированных представлениях производных $\dfrac{d\bar{\nu}_n}{d\bar{\mu}_n}$. Если
$$\frac{d\nu_n}{d\mu} = f_n \quad \text{и} \quad \frac{d\mu_n}{d\mu} = g_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
то, в силу теоремы 1, в качестве такого представления можно взять
$$\frac{d\bar{\nu}_n}{d\bar{\mu}_n} = \frac{f_1 + \ldots + f_n}{g_1 + \ldots + g_n}[\mu_n], \quad n = 1, 2, \ldots$$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \dfrac{d\nu}{d\mu}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = 1\; [\mu]$. (Указание. Так как
$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(E) = \int_E (g_1 + \ldots + g_n)\, d\mu, \quad n = 1, 2, \ldots$$
и
$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i(E) = \int_E (f_1 + \ldots + f_n)\, d\mu, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
то требуемый результат вытекает из теоремы 2 § 27 и теоремы 5 § 25).

ГЛАВА 7

# ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

## § 33. Декартовы произведения

Если $X$ и $Y$ — какие-нибудь два множества (необязательно подмножества одного пространства), то *декартовым произведением* $X$ на $Y$ называется множество всех упорядоченных пар $(x, y)$, где $x \in X$, $y \in Y$; оно обозначается $X \times Y$. Простейшим примером декартова произведения служит координатная плоскость, которую можно рассматривать как произведение координатных осей. Большинство терминов и понятий, связанных с декартовыми произведениями, подсказаны именно этим примером. Так, если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то множество $E = A \times B$, содержащееся в $X \times Y$, назовем *прямоугольником*, а сами множества $A$ и $B$ — *сторонами* этого прямоугольника. (Заметим, что в случае плоскости мы отклоняемся от классической терминологии, согласно которой $A \times B$ будет называться прямоугольником только в том случае, когда $A$ и $B$ представляют собой интервалы).

Теорема 1. *Прямоугольник оказывается пустым множеством тогда и только тогда, когда пуста одна из его сторон.*

Доказательство. Если $A \times B \neq 0$ и $(x, y) \in A \times B$, то $x \in A$ и $y \in B$, так что $A \neq 0$ и $B \neq 0$. С другой стороны, если ни $A$, ни $B$ не пусто, то найдется хотя бы одна точка $(x, y)$, принадлежащая $A \times B$, т. е. $A \times B \neq 0$. □

Теорема 2. *Если $E_1 = A_1 \times B_1$ и $E_2 = A_2 \times B_2$ — два непустых прямоугольника, то $E_1 \subset E_2$ тогда и только тогда, когда $A_1 \subset A_2$ и $B_1 \subset B_2$.*

Доказательство. Достаточность высказанного условия очевидна. Чтобы доказать его необходимость, возьмем какую-нибудь точку $(x, y)$ из $A_1 \times B_1$ и допустим, что в $A_1$ существует точка $x_1$, не принадлежащая множеству $A_2$. Тогда

$$(x, y) \in A_1 \times B_1, \quad \text{но} \quad (x_1, y) \notin A_2 \times B_2.$$

Полученное противоречие показывает, что $A_1 \subset A_2$. Точно так же доказывается, что $B_1 \subset B_2$. □

Теорема 3. *Если $A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2$ — непустой прямоугольник, то $A_1 = A_2$ и $B_1 = B_2$.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что

$$A_1 \subset A_2 \subset A_1 \quad \text{и} \quad B_1 \subset B_2 \subset B_1. \qquad □$$

Теорема 4. *Пусть $E_1 = A_1 \times B_1$, $E_2 = A_2 \times B_2$, $E = A \times B$ непустые прямоугольники. Тогда для того, чтобы $E_1$ и $E_2$ не пересекались и соединение их было равно $E$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: либо $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = 0$ и $B_1 = B_2 = B$, либо $B_1 \cup B_2 = B$, $B_1 \cap B_2 = 0$ и $A_1 = A_2 = A$.*

Доказательство. Высказанное условие необходимо. В самом деле, так как $E_1 \subset E$ и $E_2 \subset E$, то, согласно теореме 2, $A_1 \subset A$ и $A_2 \subset A$ и, следовательно, $A_1 \cup A_2 \subset A$; точно так же $B_1 \cup B_2 \subset B$. С другой стороны, из соотношения

$$E_1 \cup E_2 \subset (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$$

следует, что $A \subset A_1 \cup A_2$ и $B \subset B_1 \cup B_2$. Итак, $A = A_1 \cup A_2$ и $B = B_1 \cup B_2$. Рассуждая подобным же образом, мы придем к выводу, что

$$0 = E_1 \cap E_2 \supset (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

и, в силу теоремы 1, хотя бы одно из множеств $A_1 \cap A_2$ и $B_1 \cap B_2$ пусто.

Пусть, например, $A_1 \cap A_2 = 0$; покажем, что в этом случае $B_1 = B_2 = B$. (Случай, когда $B_1 \cap B_2 = 0$ исследуется совершенно так же). Допустим противное, т. е. что, например, в $B - B_1$ найдется точка $y$. Тогда, какова бы ни была точка $x$ из $A_1$, непременно $(x, y) \in E$, но (так как $y \notin B_1$) $(x, y) \notin E_1$ и (так как $x \notin A_2$) $(x, y) \notin E_2$. Это противоречит предположению, что $E = E_1 \cup E_2$, следовательно, $B - B_1 = 0$; равенство $B - B_2 = 0$ устанавливается подобным же образом.

Достаточность условия доказывается проще. Если, например, $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = 0$ и $B_1 = B_2 = B$, то $A \supset A_1$, $A \supset A_2$, $B \supset B_1$, $B \supset B_2$ и, следовательно, $E \supset E_1 \cup E_2$. Если же $(x, y) \in E$, то либо $(x, y) \in E_1$, либо $(x, y) \in E_2$, в зависимости от того, входит $x$ в $A_1$ или в $A_2$. Таким образом, $E$ оказывается соединением прямоугольников $E_1$ и $E_2$, причем эти последние не пересекаются. □

Теорема 5. *Если $\mathbf{S}$ — некоторое кольцо подмножеств множества $X$, в $\mathbf{T}$ — некоторое кольцо подмножеств множества $Y$, то класс $\mathbf{R}$ всевозможных конечных соединений непересекающихся прямоугольников вида $A \times B$, где $A \in \mathbf{S}$, $B \in \mathbf{T}$, представляет собой кольцо.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что пересечение двух множеств вида $A \times B$, где $A \in \mathbf{S}$, $B \in \mathbf{T}$, также представляет собой множество такого вида. Если одно из них, или их пересечение, пусто, то это утверждение тривиально. Если

$$E_1 = A_1 \times B_1, \quad E_2 = A_2 \times B_2 \quad \text{и} \quad (x, y) \in E_1 \cap E_2,$$

то $x \in A_1 \cap A_2$ и $y \in B_1 \cap B_2$, следовательно,

$$E_1 \cap E_2 \subset (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

С другой стороны, в силу теоремы 2, $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ содержится как в $E_1$, так и в $E_2$, поэтому

$$E_1 \cap E_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Так как $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ представляют собой кольца, то $A_1 \cap A_2 \in \mathbf{S}$ и $B_1 \cap B_2 \in \mathbf{T}$. Таким образом, класс $\mathbf{R}$ замкнут относительно образования конечных пересечений.

Из соотношения

$$(A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2)] \cup [(A_1 - A_2) \times B_1]$$

следует, что разность двух множеств рассматриваемого вида есть множество такого же вида. А так как

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i - \bigcup_{j=1}^{m} F_j = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} (E_i - F_j),$$

то, принимая во внимание результат предыдущего абзаца, мы приходим к заключению, что класс $\mathbf{R}$ замкнут относительно образования разностей. Так как соединение любого конечного числа непересекающихся множеств из $\mathbf{R}$, очевидно, входит в $\mathbf{R}$, то теорема полностью доказана. □

Пусть одновременно с множествами $X$ и $Y$ нам заданы некоторые $\sigma$-кольца $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ подмножеств соответственно $X$ и $Y$. Тогда $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ будет означать $\sigma$-кольцо подмножеств произведения $X \times Y$, порожденное классом всевозможных множеств вида $A \times B$, где $a \in \mathbf{S}$ и $B \times \mathbf{T}$.

Теорема 6. *Если $(X, \mathbf{S})$ и $(Y, \mathbf{T})$ — измеримые пространства, то $(X \times Y, \ \ \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ также представляет собой измеримое пространство.*

Измеримое пространство $(X \times Y, \ \ \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ назовем *декартовым произведением* измеримых пространств $(X, \mathbf{S})$ и $(Y, \mathbf{T})$.

Доказательство. Если $(x, y) \in X \times Y$, то существуют множества $A$ и $B$, такие, что $x \in A \in \mathbf{S}$ и $y \in B \in \mathbf{T}$; отсюда следует, что $(x, y) \in \in A \times B \in \mathbf{S} \times \mathbf{T}$. □

Заметим, что здесь мы впервые воспользовались тем, что измеримое пространство равно соединению всех своих измеримых множеств; в настоящий главе мы будем существенно пользоваться этим свойством измеримых пространств.

Нам не раз понадобится также понятие *измеримого прямоугольника*. Два естественных определения этого понятия напрашиваются сами собой. Согласно одному из них, прямоугольник в произведении измеримых пространств $(X, \mathbf{S})$ и $(Y, \mathbf{T})$ измерим, если он принадлежит $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$; согласно другому, прямоугольник $A \times B$ измерим, если $A \in \mathbf{S}$ и $B \in \mathbf{T}$. Ниже мы увидим, что в применении к непустым прямоугольникам эти определения эквивалентны, а до тех пор мы остановимся на втором определении. Тогда можно будет сказать, что класс измеримых множеств в декартовом произведении двух измеримых пространств представляет собой $\sigma$-кольцо, порожденное классом всех измеримых прямоугольников.

**Упражнения**

1. Пересечение любого счетного класса (измеримых) прямоугольников представляет собой (измеримый) прямоугольник. Можно ли в этом предложении опустить слово «счетный»?

2. В случае пустых прямоугольников условия теорем 2, 3 и 4 перестают быть необходимыми.

3. В предположениях теоремы 5, класс **P** всех множеств вида $A \times B$, где $A \in \mathbf{S}$ и $B \in \mathbf{T}$, представляет собой полукольцо. Верно ли это утверждение, если относительно **S** и **T** предполагать только, что они — полукольца?

4. Если кольца **S** и **T** содержат хотя бы по два различных непустых множества, то класс **P** (см. упр. 3) не является кольцом.

5. Для того чтобы $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ было $\sigma$-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы и **S** и **T** были $\sigma$-алгебрами.

6. Если $(X, \mathbf{S})$ и $(Y, \mathbf{T})$ — измеримые пространства, то всякое измеримое множество в $(X \times Y)$ содержится в некотором измеримом прямоугольнике. (Указание. Класс всех тех множеств, каждое их которых может быть покрыто некоторым измеримым прямоугольником, представляет собой $\sigma$-кольцо.)

## § 34. Сечения

Пусть $(X, \mathbf{S})$ и $(Y, \mathbf{T})$ — измеримые пространства, а $(X \times Y, \quad \mathbf{S} \times \mathbf{T})$ — их декартово произведение. Если $E$ — какое-нибудь множество в $X \times Y$, и $x$ — любая точка из $X$, то множество $E_x = \{y\colon (x, y) \in E\}$ будет называться *сечением* множества $E$ или, говоря точнее, сечением, *определяемым* точкой $x$. В тех случаях, когда существенно лишь то, что сечение определено какой-то точкой пространства $X$ (и, следовательно, представляет собой подмножество пространства $Y$), а какой именно точкой — не имеет значения, мы будем также употреблять термин *$X$-сечение.* При этом сама запись исключает возможность смешения такого сечения с $Y$-сечением, определяемых некоторой точкой $y$ из $Y$; последнее определяется, разумеется, как множество $E^y = \{x\colon (x, y) \in E\}$. Мы хотим подчеркнуть тот факт, что сечение множества в произведении пространств $X$ и $Y$ само не является подмножеством этого произведения, а представляет собой подмножество либо из $X$, либо из $Y$.

Если $f$ — произвольная функция, заданная на некотором множестве $E$ в произведении $X \times Y$, и $x$ — какая-нибудь точка из $X$, то функцию $f_x$, определенную на сечении $E_x$ равенством

$$f_x(y) = f(x, y),$$

мы назовем *сечением* функции $f$, или, точнее, *$X$-сечением* функции $f$, или, еще точнее, сечением функции $f$, *определяемым* точкой $x$. Подобным же образом *$Y$-сечение* функции $f$, определяемой точкой $y$ из $Y$, есть функция $f^y$, заданная на сечении $E^y$ равенством $f^y(x) = f(x, y)$.

Теорема 1. *Любое сечение измеримого множества есть измеримое множество.*

Доказательство. Пусть **E** — класс всех множеств в $X \times Y$, обладающих тем свойством, что все их сечения измеримы. **E** является, очевидно, $\sigma$-кольцом. Если $E = A \times B$ — произвольный измеримый прямоугольник, то любое его сечение либо пусто, либо совпадает с одной из его сторон (с $A$, если имеем $Y$-сечение; с $B$, если имеем $X$-сечение); таким образом $E \in \mathbf{E}$. Следовательно, $\mathbf{S} \times \mathbf{T} \subset \mathbf{E}$. □

Теорема 2. *Любое сечение измеримой функции представляет собой измеримую функцию.*

Доказательство. Пусть $f$ — измеримая функция на $X \times Y$, $x$ — точка из $X$, $M$ — произвольное борелевское множество на числовой прямой. Тогда измеримость множества $N(f_x) \cap f_x^{-1}(M)$ следует из соотношений

$$f_x^{-1}(M) = \{y\colon f_x(y) \in M\} = \{y\colon f(x, y) \in M\} = \\ = \{y\colon (x, y) \in f^{-1}(M)\} = (f^{-1}(M))_x.$$

(Заметим еще, что $N(f_x) = (N(f))_x$.) Измеримость $Y$-сечения функции $f$ доказывается подобным же образом. $\square$

### Упражнения

1. Если $\chi$ — характеристическая функция какого-либо множества $E$ в $X \times Y$, то $\chi_x$ и $\chi^y$ представляют собой характеристические функции соответственно сечений $E_x$ и $E^y$. В частности, если $\chi$ — характеристическая функция прямоугольника $A \times B$, то

$$\chi(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y).$$

Любое сечение простой функции является простой функцией.

2. Пусть $X = Y$ — произвольное несчетное множество, а $\mathbf{S} = \mathbf{T}$ — класс всех его конечных или счетных подмножеств. Если $D = \{(x, y)\colon x = y\}$ — «диагональ» пространства $X \times Y$, то всякое сечение множества $D$ измеримо, тогда как само $D$ неизмеримо; таким образом, теорема 1 не обратима.

3. Пусть на декартовом произведении двух измеримых пространств $X$ и $Y$ задана действительная функция $f$, принимающая конечные или бесконечные значения. Если $f$ такова, что, каково бы ни было борелевское множество $M$ на расширенной числовой прямой, пересечение $f^{-1}(M)$ со всяким измеримым множеством измеримо, то любое сечение функции $f$ обладает тем же свойством. Сохранит ли силу это утверждение, если в определении измеримого пространства не требовать, чтобы все пространство было равно соединению всех измеримых множеств? Каково соотношение между сформулированным здесь свойством функции и свойством измеримости?

4. Непустой прямоугольник представляет собой измеримое множество тогда и только тогда, когда он является измеримым прямоугольником. (Указание. Если множество $A \times B$ измеримо, то всякое его сечение измеримо.)

5. Пусть $(X, \mathbf{S})$ — измеримое пространство, причем $X \in \mathbf{S}$ (другими словами, $\mathbf{S}$ есть $\sigma$-алгебра); пусть $Y$ — числовая прямая и $\mathbf{T}$ — класс всех борелевских множеств. Если $f$ — неотрицательная функция, заданная на $X$, то множество

$$V^*(f) = \{(x, y)\colon x \in X, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

в $X \times Y$ называется *верхним множеством ординат* функции $f$, а

$$V_*(f) = \{(x, y)\colon x \in X, \quad 0 \leqslant y < f(x)\}$$

— ее *нижним множеством ординат*. (Заметим, что, например, для функции, тождественно равной нулю, нижнее множество ординат пусто). Здесь мы наметим вкратце другой возможный подход к изучению измеримых функций на декартовых произведениях:

а) Если $f$ — неотрицательная простая функция, то множества $V^*(f)$ и $V_*(f)$ измеримы. (Указание. Оба эти множества представляют собой соединения конечного числа измеримых прямоугольников.)

б) Если $f$ и $g$ — неотрицательные функции и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x$, то $V^*(f) \subset V^*(g)$ и $V_*(f) \subset V_*(g)$.

в) Если $\{f_n\}$ — возрастающая последовательность неотрицательных функций, сходящаяся во всех точках к $f$, то $\{V_*(f_n)\}$ представляет собой возрастающую последовательность множеств, соединение которых равно $V_*(f)$; подобным же образом, если $\{f_n\}$ сходится к $f$, убывая, то $\{V^*(f_n)\}$ — убывающая последовательность множеств, пересечение которых равно $V^*(f)$.

г) Если $f$ — неотрицательная измеримая функция, то $V^*(f)$ и $V_*(f)$ — измеримые множества. (Указание. Если $f$ ограничена, то существуют последовательности простых функций $\{g_n\}$ и $\{h_n\}$, такие, что

$$0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant f \leqslant h_{n+1} \leqslant h_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\lim_n g_n = \lim_n h_n = f.)$$

д) Если $E$ — любое измеримое множество в $X \times Y$ и $\alpha$, $\beta$ — действительные числа, причем $\alpha > 0$, то $\{(x, y)\colon (x, \alpha y + \beta) \in E\}$ представляет собой измеримое множество в $X \times Y$. (Указание. Это предложение верно в том случае, когда $E$ есть измеримый прямоугольник и все множества, для которых оно верно, образуют $\sigma$-кольцо.)

е) Если $f$ — неотрицательная функция, для которой множество $V^*(f)$ (или $V_*(f)$) измеримо, то $f$ измерима. (Указание. В том случае, когда измеримо $V^*(f)$, достаточно показать, что, каково бы ни было положительное число $c$, множество $\{x\colon f(x) > c\}$ измеримо. Если $E = V^*(f)$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x, y)\colon \left(x, \frac{1}{n}y + c\right) \in E, \quad y > 0\right\} = \{(x, y)\colon f(x) > c, \quad y > 0\},$$

и наше утверждение следует из того факта, что стороны измеримого прямоугольника измеримы.)

ж) Множество $\{(x, y)\colon f(x) = y\}$ называется *графиком* функции $f$ (не обязательно неотрицательной). График измеримой функции представляет собой измеримое множество.

## § 35. Произведение мер

Продолжая изучение декартовых произведений, мы будем теперь в качестве множителей брать пространства с мерой.

Теорема 1. *Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ — пространства с $\sigma$-конечными мерами и $E$ — любое измеримое множество в $X \times Y$, то функции $f$ и $g$, заданные соответственно на $X$ и $Y$ равенствами $f(x) = \nu(E_x)$ и $g(y) = \mu(E^y)$, представляет собой неотрицательные измеримые функции,такие, что $\int f\,d\mu = \int g\,d\nu$.*

Доказательства. Если $\mathbf{M}$ — класс всех тех множеств $E$, для которых справедлива эта теорема, то, как легко видеть, $\mathbf{M}$ замкнут относительно образования счетных соединений непересекающихся множеств, входящих в него. Так как меры $\mu$ и $\nu$ $\sigma$-конечны, то всякое множество из $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ может быть покрыто счетным числом непересекающихся измеримых прямоугольников со сторонами, мера которых конечна. Поэтому, если бы нам удалось доказать, что всякое измеримое подмножество измеримого прямоугольника со сторонами конечной меры входит в $\mathbf{M}$, то отсюда следовало бы утверждение теоремы, т. е. что любое измеримое множество входит в $\mathbf{M}$. Другими словами, мы свели доказательство к случаю, когда меры конечны. В этом случае достаточно показать, что в $\mathbf{M}$ входят все измеримые прямоугольники (а следовательно, все конечные соединения измеримых прямоугольников) и что $\mathbf{M}$ представляет собой монотонный класс.

Если $E = A \times B$ — непустой измеримый прямоугольник, то $f = \nu(B)\chi_A$ и $g = \mu(A)\chi_B$. Следовательно, функции $f$ и $g$ измеримы и $\int f\,d\mu = \int g\,d\nu = \mu(A)\nu(B)$.

То, что $\mathbf{M}$ — монотонный класс, следует из теоремы об интегрировании последовательностей функций, в частности, из теорем 4 § 26 и 2 § 27. (Возможность применения этих теорем обусловлена тем, что меры $\mu$ и $\nu$ конечны.) Так как всевозможные соединения конечного числа непересекающихся измеримых прямоугольников образуют кольцо (см. теорему 5 § 33) и так как, по самому определению, класс измеримых множеств является $\sigma$-кольцом, порожденным этим кольцом, то, согласно тереме 2 § 6, все измеримые множества принадлежат $\mathbf{M}$. □

Теорема 2. *Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ — пространства с $\sigma$-конечными мерами, то функция множества $\lambda$, заданная на множествах $E$ из $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$ равенством*

$$\lambda(E) = \int \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y),$$

*представляет собой $\sigma$-конечную меру и обладает тем свойством, что, каков бы ни был измеримый прямоугольник $A \times B$,*

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

*Этим последним свойством функция $\lambda$ определяется однозначно.*

Мера $\lambda$ называется *произведением* мер $\mu$ и $\nu$ и обозначается $\lambda = \mu \times \nu$; при этом $(X \times Y,\ \mathbf{S} \times \mathbf{T},\ \mu \times \nu)$ называется *декартовым произведение* пространств с мерами $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$.

Доказательство. То, что $\lambda$ есть мера, следует из теоремы 2 § 27 (см. также упр. 2 § 27). Мера $\lambda$ $\sigma$-конечна, так как всякое измеримое множество в $X \times Y$ может быть покрыто счетным числом измеримых прямоугольников конечной меры. Единственность $\lambda$ следует из теоремы 1 § 13. □

**Упражнения**

1. Пусть $X = Y$ — единичный интервал, а $\mathbf{S} = \mathbf{T}$ — класс борелевских множеств; пусть, далее, $\mu(E)$ — лебеговская мера множества $E$, а $\nu(E)$ равно числу точек множества $E$. Тогда $D = \{(x, y)\colon x = y\}$ представляет собой измеримое множество в $X \times Y$, такое, что $\int \nu(D_x)\, d\mu(x) = 1$ и $\int \mu(D^y)\, d\nu(y) = 0$. Таким образом, теорема 1, вообще говоря, неверна, если меры не $\sigma$-конечны.

2. Произведение двух $\sigma$-конечных полных мер может не быть полной мерой. (Указание. Пусть $X = Y$ — единичный интервал, $M$ — неизмеримое множество в $X$, $y$ — любая точка из $Y$; рассмотрите множество $M \times \{y\}$; см. также упр. 4 § 34.)

3. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с вполне $\sigma$-конечной мерой, $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ — числовая прямая, $\mathbf{T}$ — класс всех борелевских множеств и $\nu$ — лебеговская мера; пусть $\lambda = \mu \times \nu$. Мы уже видели (см. упр. 5 § 34), что для любой неотрицательной измеримой (следовательно, для любой неотрицательной интегрируемой) функции $f$ множества ординат $V^*(f)$ и $V_*(f)$ представляют собой измеримые множества в $X \times Y$. Теперь мы утверждаем, что $\lambda(V_*(f)) = \lambda(V^*(f)) = \int f\, d\mu$. (Указание. В силу известных результатов, относящихся к приближению функций простыми функциями и к интегрированию последовательностей, это равенство достаточно установить для простых функций $f$.) Само это равенство может служить определением интеграла $\int f\, d\mu$; в нем заключена точная формулировка утверждения, что «интеграл равен площади, ограниченной кривой».

4. При условиях, высказанных в предыдущем упражнении, график измеримой функции имеет меру нуль. (Указание. Достаточно рассмотреть неотрицательные ограниченные измеримые функции на пространстве с вполне конечной мерой; для них справедлив результат предыдущего упражнения.)

5. Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ — пространства с $\sigma$-конечными мерами и $\lambda = \mu \times \nu$, то для любого множества $E$ из $\mathbf{H}(\mathbf{S} \times \mathbf{T})$ значение $\lambda^*(E)$ равно нижней грани сумм вида $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$, где $\{E_n\}$ — последовательность измеримых прямоугольников, покрывающая $E$. (Указание. См. упр. 3 § 33, теорему 1 § 10 и упр. 5 § 8.)

## § 36. Теорема Фубини

В этом параграфе мы рассмотрим связь между интегралами по произведению пространств и интегралами по множителям. Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ — пространства с $\sigma$-конечными мерами, а $\lambda = \mu \times \nu$ — произведение мер, заданное на $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$.

Если функция $h$ на $X \times Y$ такова, что для нее имеет смысл интеграл по этому пространству (например, если $h$ интегрируема или измерима и неотрицательна), то такой интеграл мы будем записывать

$$\int h(x, y)\, d\lambda(x, y) \quad \text{или} \quad \int h(x, y)\, d(\mu \times \nu)(x, y)$$

и называть *двойным интегралом* функции $h$. Если функция $f$ такова, что для нее существует интеграл

$$\int h_x(y)\, d\nu(y) = f(x),$$

причем и $\int f\, d\mu$ имеет смысл, то мы будем писать

$$\int f\, d\mu = \iint h(x, y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int d\mu(x) \int h(x, y)\, d\nu(y).$$

Подобным же образом определяется $\iint h(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$ или $\int d\nu(y) \int h(x, y) d\mu(x)$, как интеграл (если он существует) функции $g$ на $Y$, определенной равенством $g(y) = \int h^y(x)\, d\mu(x)$. Интегралы

$$\iint h\, d\mu\, d\nu \quad \text{и} \quad \iint h\, d\nu\, d\mu$$

называются *повторными интегралами* функции $h$. Двойной и повторные интервалы функции $h$ по измеримому множеству $E$ в пространстве $X \times Y$, т. е. соответствующие интегралы функции $h_{\chi_E}$, обозначаются

$$\int_E f\, d\lambda, \quad \int\int_E f\, d\mu\, d\nu \quad \text{и} \quad \int\int_E d\nu\, d\mu.$$

Всякое $X$-сечение (множества или функции) определяется выбором точки $x$ из $X$. Поэтому, говоря, что некоторое утверждение верно для «почти всех $X$-сечений», мы будем подразумевать, что $X$-сечения, для которых это утверждение неверно, отвечают некоторым точкам $x$, образующим множество меры нуль. Подобный же смысл мы будем вкладывать в выражение «почти все $Y$-сечения». Если некоторое утверждение справедливо одновременно для почти всех $X$-сечений и для почти всех $Y$-сечений, то мы будем просто говорить, что оно верно для почти всех сечений.

Начнем с того, что установим один простой, но важный результат.

Теорема 1. *Множество $E$ в $X \times Y$ имеем меру нуль тогда и только тогда, когда почти все его $X$-сечения (или почти все $Y$-сечения) имеют меру нуль.*

Доказательство. Согласно определению произведения мер,

$$\lambda(E) = \begin{cases} \int \nu(E_x)\, d\mu(x), \\ \int \mu(E^y)\, d\nu(y). \end{cases}$$

Если $\lambda(E) = 0$, то интегралы в правой части конечны, и, в силу теоремы 2 § 25, неотрицательные подынтегральные функции справа должны почти всюду обращаться в нуль. Обратно, если хотя бы одна из подынтегральных функций равна нулю почти всюду, то $\lambda(E) = 0$. □

Т е о р е м а 2. *Если $h$ — неотрицательная измеримая функция на $X \times Y$, то*

$$\int h \, d(\mu \times \nu) = \iint h \, d\mu \, d\nu = \iint h \, d\nu \, d\mu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $h$ — характеристическая функция какого-нибудь измеримого множества $E$, то

$$\int h(x, y) \, d\nu(y) = \nu(E_x) \quad \text{и} \quad \int h(x, y) \, d\mu(x) = \mu(E^y),$$

и наше утверждение следует из теоремы 2 § 35. В общем случае мы возьмем возрастающую последовательность неотрицательных простых функций $\{h_n\}$, сходящуюся всюду к $h$ (см. теорему 2 § 20). Так как всякая простая функция представляется в виде линейной комбинации характеристических функций, то утверждение теоремы верно для функций $h_n$.

Согласно теореме 2 § 27,

$$\lim_n \int h_n \, d\lambda = \int h \, d\lambda.$$

Если

$$f_n(x) = \int h_n(x, y) \, d\nu(y),$$

то из свойств последовательности $\{h_n\}$ вытекает, что $\{f_n\}$ представляет собой возрастающую последовательность неотрицательных измеримых функций, сходящихся к $f(x) = \int h(x, y) \, d\nu(y)$ при любом $x$ (см. теорему 2 § 27). Отсюда следует, что функция $f$ измерима (и, очевидно, неотрицательна); еще раз применяя теорему 2 § 27, мы получим равенство

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Мы доказали, что двойной интеграл совпадает с одним из повторных интегралов; совпадение его с другим повторным интегралом устанавливается точно так же. □

Следующий результат называется *теоремой Фубини*. Впрочем иногда это название присваивают также теоремам 1 и 2.

Т е о р е м а 3. *Если $h$ — интегрируемая функция на $X \times Y$, то почти все ее сечения интегрируемы. Функция $f$ и $g$, определенные равенствами $f(x) = \int h(x, y) \, d\nu(y)$ и $g(y) = \int h(x, y) \, d\mu(x)$, интегрируемы и*

$$\int h \, d(\mu \times \nu) = \int f \, d\mu = \int g \, d\nu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как действительная функция интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируемы ее положительная и отрицательная части, то достаточно рассмотреть случай неотрицательной $h$. В этом случае требуемый результат следует из теоремы 2. Интегралы неотрицательных функций $f$ и $g$ оказываются конечными, следовательно, сами $f$ и $g$ — интегрируемыми. Отсюда вытекает, что $f$ и $g$ почти всюду конечны и, следовательно, почти все сечения функции $h$ интегрируемы. □

### Упражнения

1. Пусть $X$ — множество мощности $\aleph_1$, $\mathbf{S}$ — класс всех его конечных или счетных подмножеств и их дополнений; $\mu$ задана на $\mathbf{S}$ таким образом, что для любого $A$ из $\mathbf{S}$ значение $\mu(A)$ равно 0, если $A$ конечно или счетно, и 1, если $A$ несчетно. Положим теперь $(Y, \mathbf{T}, \nu) = (X, \mathbf{S}, \mu)$ и возьмем в $X \times Y$ множество $E$, обладающее тем свойством, что пересечение $E$ с любой горизонтальной линией конечно или счетно, а пересечение с любой вертикальной линией имеет относительно этой линии конечное или счетное дополнение (см. упр. 11 § 31). В качестве $h$ возьмем характеристическую функцию множества $E$; тогда $h$ неотрицательна и

$$\int h(x, y)\, d\mu(x) = 1, \qquad \int h(x, y)\, d\nu(y) = 0.$$

Не противоречит ли этот пример теореме 2?

2. Если $(X, \mathbf{S}, \mu) = (Y, \mathbf{T}, \nu)$ — единичный интервал с лебеговской мерой и $E$ — множество в $X \times Y$, такое, что $E_x$ и $E - E^y$ конечны или счетны при любых $x$ и $y$ (см. упр. 1), то $E$ — неизмеримое множество.

3. Здесь мы укажем интересное обобщение результатов, изложенных в этом параграфе. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с вполне конечной мерой, $(Y, \mathbf{T})$ — измеримое пространство, такое, что $Y \in \mathbf{T}$. Предположим, что почти каждому $x$ из $X$ поставлена в соответствие конечная мера $\nu_x$ на $\mathbf{T}$ таким образом, что если $\varphi(x) = \nu_x(B)$, то при любом множестве $B$ из $\mathbf{T}$ функция $\varphi$ на $X$ оказывается измеримой. Положим $\nu(B) = \int \nu_x(B)\, d\mu(x)$. Тогда если $g$ — неотрицательная измеримая функция на $Y$ и $f(x) = \int g(y)\, d\nu_x(y)$, то $f$ — неотрицательная измеримая функция на $X$ и $\int f\, d\mu = \int g\, d\nu$.

4. Теорема Фубини часто доказывается несколько сложнее; это объясняется тем, что вместо $\lambda$ рассматривается ее пополнение $\bar{\lambda}$. Действительно, теоремы этого параграфа оказываются справедливыми, если заменить $\lambda$ мерой $\bar{\lambda}$. (Указание. Всякая функция, измеримая $(\overline{\mathbf{S} \times \mathbf{T}})$, совпадает почти всюду $[\bar{\lambda}]$ с некоторой функцией, измеримой $(\mathbf{S} \times \mathbf{T})$; см. упр. 1 § 21.) В упражнениях 5–9 предполагается, что $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ — пространства с вполне конечными мерами. Легко убедиться в том, что результаты этих упражнений распространяются на пространства с вполне $\sigma$-конечными мерами и, следовательно, на измеримые множества в произведении пространств с $\sigma$-конечными мерами.

5. Если $E$ и $F$ — измеримые множества в $X \times Y$, такие, что $\nu(E_x) = \nu(F_x)$ для (почти) всех $x$ из $X$, то $\lambda(E) = \lambda(F)$. (Некоторые частные случаи этого предложения, обычно формулируем недостаточно строго, носят название *принципа Кавальери*.)

6. Если $f$ и $g$ — интегрируемые функции соответственно на $X$ и $Y$, то функция $h$ на $X \times Y$, определяемая равенством $h(x, y) = f(x)g(x)$, интегрируема и

$$\int h\, d(\mu \times \nu) = \int f\, d\mu \cdot \int g\, d\nu.$$

7. Предположим, что $\mu(X) = \nu(Y) = 1$, $A_0$ и $B_0$ — измеримые множества соответственно в $X$ и $Y$, такие, что $\mu(A_0) = \nu(B_0) = \frac{1}{2}$. Пусть $\chi$ — характеристическая функция множества $(A_0 \times Y)\Delta(X \times B_0)$. Положим $f(x, y) = 2\chi(x, y)$. Если для любого измеримого множества $E$ из $X \times Y$

$$\bar{\lambda}(E) = \int_E f(x, y)\, d\lambda(x, y),$$

то $\bar{\lambda}$ — конечная мера на $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$, обладающая тем свойством, что $\bar{\lambda}(A \times Y) = \mu(A)$ и $\bar{\lambda}(X \times B) = \nu(B)$, когда $A \in \mathbf{S}$ и $B \in \mathbf{T}$. Это означает, что произведение мер не определяется однозначно своими значениями на таких прямоугольниках.

8. Существование произведения мер часто доказывается следующим прямым, хотя технически довольно сложным приемом. Всевозможные конечные соединения непересекающихся измеримых прямоугольников образуют кольцо $\mathbf{R}$ (см. теорему 5 § 33). Если

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i) \quad \text{и} \quad \bigcup_{j=1}^{m} (C_j \times D_j)$$

— два представления какого-нибудь множества $E$ из $\mathbf{R}$ в виде соединений нескольких измеримых прямоугольников, то

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} [(A_i \cap C_j) \times (B_i \cap D_j)]$$

есть еще одно представление $E$ в таком виде; следовательно, выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(C_j)\nu(D_j).$$

Другими словами, функция множества $\lambda$ однозначно определяется равенством

$$\lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i).$$

Можно обнаружить (по существу, доказав теорему Фубини для интегралов по множествам, принадлежащим $\mathbf{R}$), что $\lambda$ представляет собой меру, к которой применима теорема 1 § 13.

9. Если $A$ и $B$ — произвольные (не обязательно измеримые) множества соответственно в $X$ и $Y$, то

$$\lambda^*(A \times B) = \mu^*(A)\nu^*(B).$$

(Указание. Если $A^*$ и $B^*$ — измеримые оболочки множеств $A$ и $B$, то из $A \times B \subset A^* \times B^*$ следует неравенство $\lambda^*(A \times B) \leqslant \mu^*(A)\nu^*(B)$. Обратное неравенство можно получить, рассмотрев измеримую оболочку $E^*$ множества $A \times B$. Так как $E^* \cap (A^* \times B^*)$ также служит измеримой оболочкой множества $A \times B$, то можно предположить, что $E^* \subset A^* \times B^*$. Из теоремы Фубини получим

$$\lambda(E^*) \geqslant \int\limits_{A^*} \nu(E^*_x)\, d\mu(x) \geqslant \mu(A^*)\nu(B^*).)$$

## § 37. Конечномерные произведения пространств

В предыдущих параграфах была развита теория произведений пространств в случае двух множителей; теперь мы посмотрим, как можно распространить эту теорию на произвольное конечное число множителей. Предположим, что $n(>1)$ — целое положительное число, $X_1, \ldots, X_n$ — произвольные множества; *декартовым произведением* этих множеств назовем множество всех упорядоченных систем вида $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Такое декартово произведение мы будем обозначать

$$X_1 \times \ldots \times X_n,$$

или

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i$$

или, наконец,

$$\times\{X_i \colon i = 1, \ldots, n\}.$$

Если $A_i$ — множество в $X_i$, $i = 1, \ldots, n$, то множество $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$ называется *прямоугольником*.

Относительно образования декартовых произведений, так же как относительно любой алгебраической операции, можно поставить вопрос, ассоциативно ли оно. Если, например, $X_1$, $X_2$, $X_3$ — какие-нибудь три множества, то, не нарушая того порядка, в каком они перечислены, можно образовать множества $(X_1 \times X_2) \times X_3$, $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ и $X_1 \times X_2 \times X_3$. В каком смысле эти три декартовых произведения можно считать равными? Очевидно, они состоят из различных элементов; в самом деле, упорядоченная пара $((x_1, x_2), x_3)$, первый элемент которой сам представляет собой упорядоченную пару, не тождественна упорядоченной тройке $(x_1, x_2, x_3)$. Столь же очевидно, однако, наличие «естественного» взаимно-однозначного соответствия между рассматриваемыми декартовыми произведениями, которое сопоставляет друг другу их элементы

$$((x_1, x_2), x_3) \quad (x_1, (x_2, x_3)) \quad \text{и} \quad (x_1, x_2, x_3).$$

Так как при таком соответствии сохраняются все интересующие нас свойства строения декартовых произведений, то мы сознательно согласимся на то, чтобы, допуская некоторую логическую погрешность, считать все три описанных произведения тождественными. Это соглашение будет осуществляться вполне последовательно, так что, например, в случае семи множителей, элемент

$$(((x_1, x_2), x_3), \quad ((x_4, x_5), \quad (x_6, x_7)))$$

множества

$$(((X_1 \times X_2) \times X_3) \times ((X_4 \times X_5) \times (X_6 \times X_7)))$$

мы будем отождествлять с элементом

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$

множества

$$(X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 \times X_5 \times X_6 \times X_7).$$

Такое отождествление позволит нам упростить изложение многих доказательств. Так, например, рассматривая $X_1 \times \ldots \times X_n$ как повторное произведение

$$(\ldots((X_1 \times X_2) \times X_3) \times \ldots) \times X_n,$$

мы сможем, обобщая теоремы § 33, пользоваться методом математической индукции. Формулируя такие обобщения, надо соблюдать известную осторожность. Так, например, теорема 4 § 33 обобщается следующим образом: если

$$E = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i, \quad F = \mathop{\times}_{i=1}^{n} B_i \quad \text{и} \quad G = \mathop{\times}_{i=1}^{n} C_i$$

— непустые прямоугольники, то $E = F \cup G$ и $F \cap G = 0$ тогда и только тогда, когда существует такое целое положительное $j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $A_j = B_j \cup C_j$, $B_j \cap C_j = 0$ и $A_i = B_i = C_i$ при $i \neq j$.

Несколько видоизменяется понятие сечения (множества или функции): $X_j$-сечение множества $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i$, отвечающее точке $x_j$ из $X_j$, представляет собой подмножество произведения

$$\times\{X_i\colon 1 \leqslant i \leqslant n, \quad i \neq j\}.$$

Пусть $(X_i, \mathbf{S}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, — измеримые пространства; их декартовым произведением назовем измеримое пространство $(X_1 \times \ldots \times X_n, \quad \mathbf{S}_1 \times \ldots \times \mathbf{S}_n)$, в котором

$$\mathbf{S}_1 \times \ldots \times \mathbf{S}_n$$

(иначе обозначаемое $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \mathbf{S}_i$ или $\times\{\mathbf{S}_i\colon i = 1, \ldots, n\}$) есть $\sigma$-кольцо, порожденное прямоугольниками вида

$$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i,$$

где $A_i \in \mathbf{S}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Из этого определения следует, что любое сечение измеримого множества (или измеримой функции) представляет собой измеримое множество (соотв. измеримую функцию).

Прибегнув к методу индукции, мы без труда определим декартово произведение пространств $(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)$, $i = 1, \ldots, n$, с $\sigma$-конечными мерами. На $\mathbf{S}_1 \times \ldots \times \mathbf{S}_n$ можно задать единственную меру $\mu$ (обозначаемую $\mu_1 \times \ldots \times \mu_n$), обладающую тем свойством, что

$$\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i)$$

для произвольного измеримого прямоугольника $A_1 \times \ldots \times A_n$. Непосредственное обобщение допускает теорема Фубини, так что интеграл произвольной интегрируемой функции на произведении пространств можно вычислить, взяв любой из соответствующих повторных интегралов.

Произведение пространств $X = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i$ принято называть $n$-мерным. Термин этот не имеет отношения к понятию размерности, он указывает лишь, каким путем образовано $X$ из пространств $X_i$. Пространство с мерой может оказаться трехмерным в одном контексте и двумерным — в другом, так как $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ можно одновременно представить в виде $X = X_0 \times X_3$, где $X_0 = X_1 \times X_2$.

### Упражнения

В упражнениях 1–5 предполагается, что

$$(X, \mathbf{S}, \mu) = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} (X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i),$$

где $X_i$ — числовая прямая, $\mathbf{S}_i$ — класс всех борелевских множеств, $\mu_i$ — лебеговская мера, $i = 1, \ldots, n$.

1. Множества, образующие $\sigma$-кольцо $\mathbf{S}$, называются *борелевскими множествами* в $n$-мерном эвклидовом пространстве. Класс всех борелевских множеств совпадает с $\sigma$-кольцом, порожденным классом всех открытых множеств.

2. Если $\varphi$ — функция на $X$, измеримая в смысле Бореля, а $f_1, \ldots, f_n$ — действительные измеримые функции на некотором измеримом пространстве $(Y, \mathbf{T})$, причем $Y \in \mathbf{T}$, то функция $\widehat{f}$ на $Y$, определенная равенством $\widehat{f}(y) = \varphi(f_1(y), \ldots, f_n(y))$, измерима (см. теорему 2 § 19).

3. Пополнение $\bar{\mu}$ меры $\mu$ называется *n-мерной лебеговской мерой*; большинство результатов §§ 15 и 16 справедливо для $\bar{\mu}$. В частности, если $\mathbf{U}$ — класс всех открытых множеств в $X$, а $\mathbf{C}$ — класс всех замкнутых множеств в $X$, то для любого множества $E$ в $X$

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U)\colon E \subset U \in \mathbf{U}\}$$

и

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(C)\colon E \supset C \in \mathbf{C}\}.$$

4. Если $T$ — линейное преобразование, определенное равенствами

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n), \quad y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то для любого множества $E$ в $X$

$$\mu^*(T(E)) = |\Delta|\mu^*(E) \quad \text{и} \quad \mu_*(T(E)) = |\Delta|\mu_*(E),$$

где $\Delta$ — определитель матрицы $(a_{ij})$. (Указание. Достаточно доказать это предложение для прямоугольников $E$, стороны которых представляют собой интервалы. Сначала следует рассмотреть такие частные случаи:

а) $y_i = x_i + b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

б) $y_i = x_i$ при $i \neq j$ и $i \neq k$; $y_j = x_k$ и $y_k = x_j$.

в) $y_i = x_i$ при $i \neq j$; $y_j = x_j \pm x_k$, где $k \neq j$.

г) $y_i = x_i$ при $i \neq j$; $y_j = cx_j$.

Произвольное линейное преобразование может быть представлено в виде произведения преобразований типов «а»—«г».

5. Функции $\varphi_j$, определенные равенствами

$$\varphi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

измеримы.

6. Можно определить $n$-мерную лебеговскую меру, не прибегая к произведениям пространств. Рассмотрим пространство $X_1 \times \ldots \times X_n$, где $X_i = X$ — единичный интервал, $i = 1, \ldots, n$. Для любого $x$ из $X$ пусть $x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ — представление $x$ в виде двоичной дроби; положим

$$x_i = 0, \alpha_i\alpha_{n+i}\alpha_{2n+i}\ldots, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(Для тех $x$, для которых существуют два таких представления, выберем какое-нибудь одно, например конечное.) Отображение $T$ единичного интервала $X$ в $X_1 \times \ldots \times X_n$, определенное равенством $T(x) = (x_1, \ldots, x_n)$, обладает тем свойством, что если множество $E$ в $X_1 \times \ldots \times X_n$ измеримо, то множество $T^{-1}(E) = \{x \colon T(x) \in E\}$ в $X$ также измеримо. (Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда $E$ — прямоугольник со сторонами, концы которых являются двоичными рациональными числами). Произведение $\mu_1 \times \ldots \times \mu_n$ может быть определено равенством $(\mu_1 \times \ldots \times \mu_n)(E) = \mu(T^{-1}(E))$, где $\mu$ — лебеговская мера. Это новое определение согласуется с тем, которое было дано выше.

7. С помощью диагонального метода, т. е. положив

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_7\ldots,\\
x_2 &= 0, \alpha_3\alpha_5\alpha_8\alpha_{12}\ldots,\\
x_3 &= 0, \alpha_6\alpha_9\alpha_{13}\alpha_{18}\ldots,\\
x_4 &= 0, \alpha_{10}\alpha_{16}\alpha_{19}\alpha_{25}\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

можно распространить указанное в упр. 6 определение меры на бесконечно-мерный аналог эвклидова пространства.

## § 38. Бесконечномерные произведения пространств

Переходим к обобщению понятия произведения пространств на случай бесконечного числа множителей. Первый шаг в этом направлении очевиден: если $\{X_i\}$ — последовательность каких-нибудь множеств, то их декартовым произведением

$$X = \mathop{\times}_{i=1}^{\infty} X_i$$

мы назовем множество всех последовательностей вида $(x_1, x_2, \ldots)$, где $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Однако если каждое $X_i$ есть пространство с мерой, т. е. в каждом $X_i$ выделено $\sigma$-кольцо множеств $\mathbf{S}_i$ с заданной на ней мерой $\mu_i$, то отнюдь не ясно, как следует определить в $X$ измеримые множества и как задать на них меру. В этом параграфе мы решим эту задачу в предположении, что все $X_i$ представляют собой пространства с вполне конечными мерами, причем $\mu_i(X_i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots$. Разумеется, введя соответствующий множитель, можно всякую вполне конечную меру сделать равной 1 на всем пространстве. Однако, как мы увидим, здесь это требование не является условной нормировкой; введение его объяснятся особой ролью, которую играет 1 в умножении (особенно в образовании бесконечных произведений).

Итак, предположим, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ мы имеем множество $X_i$, некоторую $\sigma$-алгебру $\mathbf{S}_i$ его подмножеств и заданную на $\mathbf{S}_i$ меру $\mu_i$, такую, что $\mu_i(X_i) = 1$. Назовем прямоугольником множество вида $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \subset X_i$ для всех $i$ и $A_i = X_i$ для всех, за исключением некоторого конечного числа, значений $i$. *Измеримым прямоугольником* мы назовем прямоугольник $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, в котором все $A_i$ являются измеримыми множествами в $X_i$; в силу предыдущего определения, это условие налагает ограничение лишь на конечное число множеств $A_i$. Множество в $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ назовем *измеримым*, если оно принадлежит $\sigma$-кольцу $\mathbf{S}$, порожденному классом всевозможных измеримых прямоугольников; при этом будем писать $\mathbf{S} = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i$. В действительности $\mathbf{S}$ оказывается $\sigma$-алгеброй.

Пусть $J$ — любое подмножество множества $I$ всех целых положительных чисел; будем говорить, что две точки

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, \ldots)$$

*согласованы* на $J$, и записывать это символом $x \equiv y(J)$, если $x_j = y_j$ для всех $j$ из $J$. Множество $E$ в $X$ называется $J$*-цилиндром*, если из $x \equiv y(J)$ вытекает, что $x$ и $y$ либо оба принадлежат, либо оба не принадлежат множеству $E$. Иначе говоря, $E$ представляет собой $J$-цилиндр, если никакое изменение координат с номерами, не попадающими в $J$, не может удалить из множества $E$ содержащуюся в нем точку и ввести в множество $E$ точку, ранее ему не принадлежавшую (см. пример «д» упр. 5 § 6). Например, если $J = \{1, \ldots, n\}$ и $A_j$ — произвольное множество в $X_j$, $j = 1, \ldots, n$, то прямоугольник $A_1 \times \ldots \times A_n \times X_n \times X_{n+1} \times \ldots$ представляет собой $J$-цилиндр.

Положим

$$X^{(n)} = \mathop{\times}\limits_{i=n+1}^{\infty} X_i, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

в силу принятого нами в предыдущем параграфе соглашения, мы можем записать следующее равенство:

$$X = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} X_i = (X_1 \times \ldots \times X_n) \times X^{(n)}.$$

Любое $X^{(n)}$ представляет собой бесконечномерное произведение пространств, подобное $X (= X^{(0)})$, поэтому все выводы, относящиеся к $X$, применимы и к $X^{(n)}$.

Если $(x_1, \ldots, x_n)$ — любая точка из $X_1 \times \ldots \times X_n$, а $E$ — множество в $X$, то сечение множества $E$, определяемое точкой $(x_1, \ldots, x_n)$, будем обозначать $E(x_1, \ldots, x_n)$; такое сечение представляет собой множество в $X^{(n)}$. Заметим, что если $E$ — (измеримый) прямоугольник в $X$, то $E(x_1, \ldots, x_n)$ — (измеримый) прямоугольник в $X^{(n)}$.

Теорема 1. *Если $J=\{1,\ldots,n\}$ и множество $E$ в $X$ представляет собой $J$-цилиндр, то $E=A\times X^{(n)}$, где $A$ — измеримое множество в произведении $X_1\times\ldots\times X_n$.*

Доказательство. Пусть $(\bar{x}_{n+1},\bar{x}_{n+2},\ldots)$ — произвольная точка из $X^{(n)}$ и $A$ — $X^{(n)}$-сечение множества $E$, определяемое этой точкой; $A$, очевидно, заключено в $X_1\times\ldots\times X_n$. Так как множества $E$ и $A\times X^{(n)}$ оба являются $J$-цилиндрами, то если точка $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},x_{n+2},\ldots)$ из $X$ принадлежит одному из них, то и $(x_1,\ldots,x_n,\bar{x}_{n+1},\bar{x}_{n+2},\ldots)$ принадлежит этому множеству. Ясно, однако, что если точка $(x_1,\ldots$ $\ldots,x_n,\bar{x}_{n+1},\bar{x}_{n+2},\ldots)$, входит в одно из этих множеств, то она входит и в другое. Еще раз воспользовавшись тем, что $E$ и $A\times X^{(n)}$ представляют собой $J$-цилиндры, т. е. тем, что любое из этих множеств содержит точку $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},x_{n+2},\ldots)$, если оно содержит $(x_1,\ldots,x_n,\bar{x}_{n+1},\bar{x}_{n+2},\ldots)$, мы приходим к выводу, что $E$ и $A\times X^{(n)}$ состоят из одних и тех же точек. Из теоремы 1 § 34 следует, что если измеримо $E$, то измеримо и $A$. □

Пусть $m$ и $n$ — целые положительные числа, причем $m<n$; может случиться, что непустое множество $E$ в $X$ является одновременно и $\{1,\ldots,m\}$-цилиндром и $\{1,\ldots,n\}$-цилиндром. Тогда, согласно теореме 1,

$$E=A\times X^{(m)} \quad \text{и} \quad E=B\times X^{(n)},$$

где $A\subset X_1\times\ldots\times X_m$ и $B\subset X_1\times\ldots\times X_n$. Первое из этих равенств можно записать в виде

$$E=(A\times X_{m+1}\times\ldots\times X_n)\times X^{(n)},$$

поэтому, в силу теоремы 3 § 33, $B=A\times X_{m+1}\times\ldots\times X_n$. Следовательно, если $E$ измеримо, то $A$ и $B$ измеримы, причем

$$(\mu_1\times\ldots\times\mu_m)(A)=(\mu_1\times\ldots\times\mu_n)(B).$$

Таким образом, если мы положим

$$\mu(A\times X^{(n)})=(\mu_1\times\ldots\times\mu_n)(A),$$

то это равенство однозначным образом определит на измеримых $\{1,\ldots$ $\ldots,n\}$-цилиндрах некоторую функцию $\mu$. Областью определения этой функции служит класс всех измеримых множеств, являющихся $\{1,\ldots$ $\ldots,n\}$-цилиндрами, каждое при некотором значении $n$. Обозначим этот класс $\mathbf{F}$, а содержащиеся в нем множества условимся называть конечномерными множествами в $X$. Легко убедиться в том, что $\mathbf{F}$ представляет собой алгебру, порожденное ею $\sigma$-кольцо $\mathbf{S(F)}$ совпадает с $\mathbf{S}$, а функция множества $\mu$ на $\mathbf{F}$ конечна, неотрицательна и конечно-аддитивна.

Класс множеств в $X^{(n)}$ и функцию множества на нем, аналогичные $\mathbf{F}$ и $\mu$ для $X$, будем обозначать соответственно $\mathbf{F}^{(n)}$ и $\mu^{(n)}$. Из полученных нами результатов, касающихся конечномерных произведений, вытекает, что если $E$ принадлежит классу $\mathbf{F}$, то всякое его сечение вида $E(x_1,\ldots$ $\ldots,x_n)$ принадлежит классу $\mathbf{F}^{(n)}$ и

$$\mu(E)=\int\ldots\int\mu^{(n)}(E(x_1,\ldots,x_n))\,d\mu_1(x_1)\ldots\,d\mu_n(x_n).$$

Теорема 2. *Если* $\{(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)\}$ — *последовательность пространств с вполне конечными мерами, причем* $\mu_i(X_i) = 1$, *то на* $\sigma$*-алгебре* $\mathbf{S} = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i$ *существует единственная мера* $\mu$, *обладающая тем свойством, что для любого измеримого множества* $E$ *вида* $A \times X^{(n)}$

$$\mu(E) = (\mu_1 \times \ldots \times \mu_n)(A).$$

Такая мера $\mu$ называется *произведением* заданных мер $\mu_i$ и обозначается символом

$$\mu = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i;$$

пространство с мерой

$$\left( \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} X_i, \quad \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i, \quad \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i \right)$$

будем называть *декартовым произведением* исходных пространств $(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. В силу теорем 7 § 9 и 1 § 13, нам нужно только доказать, что функция $\mu$, построенная нами на алгебре $\mathbf{F}$ всех конечномерных множеств, непрерывна сверху в 0, т. е. если $\{E_n\}$ — убывающая последовательность множеств из $\mathbf{F}$, такая, что $0 < \varepsilon \leqslant \mu(E_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, то $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} E_j \neq 0$.

Пусть $F_1 = \left\{ x_1 \colon \mu^{(1)}(E_j(x_1)) > \frac{\varepsilon}{2} \right\}$; тогда, в силу равенств

$$\mu(E_j) = \int \mu^{(1)}(E_j(x_1))\, d\mu_1(x_1) = \\ = \int\limits_{F_j} \mu^{(1)}(E_j(x_1))\, d\mu_1(x_1) + \int\limits_{F_j'} \mu^{(1)}(E_j(x_1))\, d\mu_1(x_1),$$

имеем

$$\mu(E_j) \leqslant \mu_1(F_j) + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$\mu_1(F_j) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\{F_j\}$ — убывающая последовательность множеств в $X_1$, а мера $\mu_1$, будучи счетно-аддитивной, непрерывна сверху в 0, то $X_1$ содержит хотя бы одну точку $\bar{x}_1$, для которой $\mu^{(1)}(E_j(\bar{x}_1)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $j = 1, 2, \ldots$. $\{E_j(\bar{x})\}$ представляет собой убывающую последовательность измеримых множеств в $X^{(1)}$, и то рассуждение, которое мы только что провели для $X$, $\{E_j\}$ и $\varepsilon$, можно повторить для $X^{(1)}$, $\{E_j(\bar{x}_1)\}$ и $\frac{\varepsilon}{2}$. Мы получим точку $\bar{x}_2$, принадлежащую $X^{(2)}$, такую, что $\mu^{(2)}(E_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$, $j = 1, 2, \ldots$. Продолжая это рассуждение, мы получим последовательность $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\}$, обладающую следующими свойствами: $\bar{x}_n \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$\mu^{(n)}(E_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Теперь мы докажем, что точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$ принадлежит множеству $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$. Для этого рассмотрим какое-нибудь $E_j$ и выберем $n$ таким образом, чтобы $E_j$ было $\{1, \ldots, n\}$-цилиндром. Из неравенства $\mu^{(n)}(E_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)) > 0$ следует, что $E_j$ содержит хотя бы одну точку $(x_1, x_2, \ldots)$, такую, что $x_i = \bar{x}_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Из определения $\{1, \ldots$ $\ldots, n\}$-цилиндра мы заключаем, что точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots)$ сама принадлежит множеству $E_j$. □

### Упражнения

1. То, что в этом параграфе множеством индексов $I$ служило множество целых положительных чисел, несущественно; в качестве $I$ можно было бы взять любое счетное множество. (При этом пространство $X = \times\{X_i\colon i \in I\}$ состояло бы, по определению, из всевозможных функций $x$, заданных на $I$ и принимающих при любом $i$ из $I$ значение $x(i)$ из $X_i$). Доказать это можно, перенумеровав элементы множества $I$, т. е. выбрав какое-нибудь фиксированное взаимно-однозначное соответствие между $I$ и множеством целых положительных чисел. Часто, например, встречается случай, когда $I$ — множество всех целых чисел.

2. Построение произведений пространств без труда обобщается на случай несчетного числа множителей. Пусть $I$ — произвольное множество индексов; если для любого $i$ из $I$ задано $(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)$ — пространство с вполне конечной мерой, причем $\mu_i(X_i) = 1$, то $X = \times(X_i\colon i \in I)$ определяется дословно, так же, как в упр. 1 соответствующее произведение в случае, когда $I$ счетно. Так же дословно могут быть повторены определения прямоугольника, измеримого прямоугольника и измеримого множества. Так как класс всех множеств, являющихся $J$-цилиндрами при некотором фиксированном *конечном или счетном* подмножестве $J$ множества $I$, представляет собой $\sigma$-алгебру, содержащую все измеримые прямоугольники, то всякое измеримое множество $E$ является $J$-цилиндром при некотором, должным образом выбранным, множестве $J$. Если $\mu(E)$ определить как $(\times_{j \in J} \mu_j)(E)$, то $\mu$ оказывается мерой в классе всех измеримых множеств; эту меру мы обозначим $\times_{i \in I} \mu_i$.

3. Нетрудно, комбинируя теорию конечномерных произведений с теорией бесконечномерных произведений, построить произведения пространств, в которых конечное число множителей обладает не вполне конечной, а лишь $\sigma$-конечной мерой.

4. Если $X = \times_{i=1}^{\infty} X_i$ — произведение пространств, описанное в теореме 2, $E_i$ — измеримое множество в $X_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то $E = \times_{i=1}^{\infty} E_i$ — измеримое множество в $X$ и

$$\mu(E) = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(E_i) = \lim_n \prod_{i=1}^{n} \mu_i(E_i).$$

[Указание. Пусть $F_n = E_1 \times \ldots \times E_n \times X^{(n)}$; тогда $\{F_n\}$ — убывающая последовательность измеримых множеств в $X$, такая, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \times_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{и} \quad \mu(F_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(E_i).]$$

5. С помощью произведений пространств можно построить лебеговскую меру на числовой прямой (см. доказательство теоремы 3 § 8), а следовательно, и в $n$-мерном эвклидовом пространстве (см. упр. 6 § 37), совсем не опираясь на топологические понятия. Для осуществления такого построения возьмем пространство с мерой $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$, где $X_0$ состоит из двух точек, 0 и 1; $\mathbf{S}_0$ — класс всех подмножеств в $X_0$ и $\mu_0(\{0\}) = \mu_0(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Для всех $i = 1, 2, \ldots$ положим $(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i) = (X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$ и образуем произведение

$$(X, \mathbf{S}, \mu) = \left(\times_{i=1}^{\infty} X_i,\ \times_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i,\ \times_{i=1}^{\infty} \mu_i\right).$$

При этом справедливы следующие утверждения:

а) Какова бы ни была точка $x=(x_1, x_2, \ldots)$ из $X$, множество $\{x\}$ измеримо и $\mu(\{x\})=0$. (Указание. См. упр. 4.)

б) Множество $\overline{E}$ точек $x=(x_1, x_2, \ldots)$, для которых все $x_i$, за исключением конечного числа значений $i$, равны 1, измеримо и имеет меру нуль. (Указание. $\overline{E}$ — счетное множество.) Положим $\overline{X}=X-\overline{E}$ и в дальнейшем условимся рассматривать пространство с мерой $(\overline{X}, \overline{\mathbf{S}}, \overline{\mu})$, где $\overline{\mathbf{S}}=\mathbf{S}\cap\overline{X}$ и $\mu(E\cap\overline{X})=\mu(E)$, $E\in\mathbf{S}$.

в) Для $x=(x_1, x_2, \ldots)$ из $\overline{X}$ положим $z(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{2^i}$; тогда функция $z$ определит взаимно-однозначное соответствие между $\overline{X}$ и интервалом $Z=\{z\colon\ 0\leqslant z<1\}$. (Указание. Рассмотреть разложения точек $z$ из $Z$ в двоичные дроби; для тех $z$, для которых возможны два различных разложения, выбрать конечное.)

г) Если $A=\{z\colon 0\leqslant a\leqslant z<b\leqslant 1\}$ и $E=\{x\colon z(x)\in A\}$, то $E$ измеримо и $\overline{\mu}(E)=b-a$. (Указание. Достаточно рассмотреть случай, когда $a$ и $b$ — двоичные рациональные числа.)

д) Если $A$ — любое борелевское множество и $E=\{x\colon z(x)\in A\}$, то $E$ измеримо и $\overline{\mu}(E)$ равна лебеговской мере множества $A$. (Указание. Функция множества $\nu$, определенная равенством $\nu(A)=\overline{\mu}(E)$, представляет собой меру, совпадающую с лебеговской мерой на интервалах.)

Результаты «а»—«д» означают построение лебеговской меры на интервале $Z$. Рассматривая числовую прямую как соединение счетного числа таких интервалов, можно определить лебеговскую меру на всей числовой прямой. Иначе можно взять пространство $I$ всех целых чисел, задать в нем меру, определив ее значение на любом подмножестве как число элементов в этом подмножестве, и воспользоваться очевидным взаимно-однозначным соответствием между числовой прямой и произведением $I\times Z$.

6. Результат, сходный с результатом упр. 5, можно получить, взяв пространство с мерой $(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$, где $X_0$ — множество всех целых положительных чисел, $\mathbf{S}_0$ — класс всех подмножеств множества $X_0$ и $\mu_0(E)=\sum_{i\in E}2^{-i}$. Положим $(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)=(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$ и образуем произведение $X=\mathop{\times}_{i=1}^{\infty}X_i$, точками которого служат последовательности целых положительных чисел. Для $x=(x_1, x_2, \ldots)$ положим

$$z(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-(x_1+\ldots+x_n)}.$$

Рассматривая разложения действительных чисел в двоичные дроби, можно доказать, что для этой функции $z$ справедливы предложения «в»—«д» предыдущего упражнения.

7. Пусть $X_0=\{x\colon 0\leqslant x<1\}$ — полузамкнутый единичный интервал, $\mathbf{S}_0$ — класс борелевских множеств в $X_0$, $\mu_0$ — лебеговская мера на $\mathbf{S}_0$. Положим $(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)=(X_0, \mathbf{S}_0, \mu_0)$, $i=1, 2, \ldots$, и образуем произведение $X=\mathop{\times}_{i=1}^{\infty}X_i$. Между $X$ и $X_0$ существует взаимно-однозначное соответствие, такое, что всякому борелевскому множеству в $X_0$ соответствует измеримое множество (т. е. множество, принадлежащее классу $\mathop{\times}_{i=1}^{\infty}\mathbf{S}_i$) в $X$, причем соответствующие друг другу множества имеют одинаковые меры. (Указание. Пусть $Y_0$ — множество двух точек, описанное в упр. 5 и обозначенное там $X_0$; если $Y_{ij}=Y_0$ для $i=0, 1, 2, \ldots$ и $j=1, 2, \ldots$, то $X_i=\mathop{\times}_{j=1}^{\infty}Y_{ij}$, $i=0, 1, 2, \ldots$, и $X=\mathop{\times}_{i=1}^{\infty}X_i=\mathop{\times}_{i=0}^{\infty}\mathop{\times}_{j=1}^{\infty}Y_{ij}$. Указанное соответствие может быть установлено с помощью известного соответствия между элементами обыкновенной и двойной последовательности множеств.)

# ГЛАВА 8

# ОТОБРАЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ

## § 39. Измеримые отображения

При изучении каждой математической системы объектов важно исследовать те преобразования, которые оставляют инвариантными все или некоторые структурные свойства такой системы. В наши намерения не входит изучение во всех подробностях преобразований, встречающихся в теории меры, однако некоторые основные их свойства мы рассмотрим в этом параграфе.

Отображение есть функция $T$, определенная в каждой точке некоторого множества $X$ и принимающая значения из некоторого множества $Y$. Множество $X$ называется *областью определения* функции $T$; множество тех точек из $Y$, каждая из которых является образом $T(x)$ какой-либо точки $x$ из $X$, называется *областью значений* функции $T$. Отображение, область определения которого есть $X$, а область значений лежит в $Y$, называется часто отображением множества $X$ в множество $Y$; если область значений функции $T$ совпадает с $Y$, то $T$ называется отображением множества $X$ *на* множество $Y$. *Образ* $T(E)$ произвольного подмножества $E$ множества $X$ при отображении $T$ определяется как область значений отображения $T$ множества $E$ в множество $Y$; *прообраз* $T^{-1}(F)$ произвольного подмножества $F$ множества $Y$ при отображении $T$ есть множество всех тех точек из $X$, образы которых лежат в $F$, т. е.

$$T^{-1}(F) = \{x\colon\ T(x) \in F\}.$$

Отображение $T$ называется *взаимно-однозначным*, если $T(x_1) = T(x_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$. Отображение, обратное к взаимно-однозначному отображению $T$, обозначается символом $T^{-1}$; для каждого $y = T(x)$ из области значений отображения $T$ оно определяется соотношением $T^{-1}(y) = x$.

Если $T$ есть отображение множества $X$ в множество $Y$, а $S$ — отображение множества $Y$ в множество $Z$, то *произведением* $ST$ отображений $S$ и $T$ называется отображение множества $X$ в множество $Z$, определенное соотношением $(ST)(x) = S(T(x))$.

Для каждой функции $g$, определенной на множестве $Y$, отображение $T$ множества $X$ в множество $Y$ определяет очевидным образом некоторую функцию $f$, определенную на множестве $X$; функция $f$ определяется соотношением $f(x) = g(T(x))$. Удобно и естественно писать $f = gT$.

Теорема 1. *Если $T$ — отображение множества $X$ в множество $Y$, $g$ — функция на $Y$, а $M$ — произвольное подмножество того пространства, которому принадлежат значения функции $g$, то*

$$\{x\colon (gT)(x) \in M\} = T^{-1}(\{y\colon g(y) \in M\}).$$

Доказательство. Следующие утверждения эквивалентны между собой:

(а) $x_0 \in \{x\colon (gT)(x) \in M\}$,
(б) $g(T(x_0)) \in M$,
(в) если $y_0 = T(x_0)$, то $g(y_0) \in M$

и

(г) $T(x_0) \in \{y\colon g(y) \in M\}$.

Эквивалентность первого и последнего из этих утверждений и составляет как раз утверждение теоремы. □

Пусть $(X, \mathbf{S})$ и $(Y, \mathbf{T})$ — измеримые пространства, а $T$ — отображение множества $X$ в множество $Y$. Как следует определять понятие измеримости отображения $T$? Исходя из того частного случая, когда $Y$ есть числовая прямая, мы скажем, что отображение $T$ *измеримо*, если прообраз каждого измеримого множества измерим. Мы видим, что это определение не согласуется с тем, которое было установлено ранее для измеримых функций; в силу особой роли числа 0, измеримая функция может не быть измеримым отображением. Эта несогласованность целиком окупается удобством в приложениях; недоразумений всегда можно избежать, если не путать термины «функция» и «отображение». В том важном случае, когда $X$ само принадлежит $\mathbf{S}$, а $Y$ представляет собой числовую прямую, понятия измеримого отображения и измеримой функции совпадают.

Если $T$ — измеримое отображение пространства $(X, \mathbf{S})$ в пространство $(Y, \mathbf{T})$, то символом $T^{-1}(\mathbf{T})$ мы обозначим класс всех подмножеств множества $X$, имеющих вид $T^{-1}(F)$, где $F \in \mathbf{T}$; ясно, что $T^{-1}(\mathbf{T})$ есть $\sigma$-кольцо, содержащееся в $\mathbf{S}$.

Теорема 2. *Если $T$ — измеримое отображение пространства $(X, \mathbf{S})$ в пространство $(Y, \mathbf{T})$ и если $g$ — измеримая функция на $Y$, принимающая конечные или бесконечные действительные значения, то функция $gT$ измерима относительно $\sigma$-кольца $T^{-1}(\mathbf{T})$.*

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что для каждого борелевского множества $M$ на числовой прямой,

$$\begin{aligned} N(gT) \cap (gT)^{-1}(M) &= \{x\colon (gT)(x) \in M - \{0\}\} = \\ &= T^{-1}(\{y\colon g(y) \in M - \{0\}\}) = T^{-1}(N(g) \cap g^{-1}(M)); \end{aligned}$$

из измеримости отображения $T$ следует, что

$$N(gT) \cap (gT)^{-1}(M) \subset T^{-1}(\mathbf{T}). \qquad \square$$

Измеримое отображение $T$ пространства $(X, \mathbf{S})$ в пространство $(Y, \mathbf{T})$ определяет очевидным образом для каждой функции множества $\mu$ на $\mathbf{S}$ некоторую функцию множества $\nu$ на $\mathbf{T}$; функция $\nu$ определяется для каждого $F$ из $\mathbf{T}$ соотношением $\nu(F) = \mu(T^{-1}(F))$. Удобно и естественно писать $\nu = \mu T^{-1}$.

Теорема 3. *Если $T$ — измеримое отображение пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ в измеримое пространство $(Y, \mathbf{T})$ и если $g$ — измеримая действительная функция на $Y$, принимающая конечные или бесконечные значения, то*

$$\int g\, d(\mu T^{-1}) = \int (gT)\, d\mu,$$

*в том смысле, что из существования одного из этих интегралов вытекает существование другого, и оба интеграла равны.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть неотрицательную функцию $g$. Если $g$ — характеристическая функция измеримого множества $F$ из $Y$, то из теоремы 1 следует, что $gT$ является характеристической функцией множества $T^{-1}(F)$ и, следовательно,

$$\int g\, d(\mu T^{-1}) = (\mu T^{-1})(F) = \mu(T^{-1}(F)) = \int (gT)\, d\mu.$$

Из этого соотношения следует, что утверждение теоремы справедливо для простых функций $g$. Рассмотрим теперь общий случай; пусть $\{g_n\}$ — возрастающая последовательность простых функций, сходящаяся к $g$; тогда $\{g_n T\}$ представляет собой возрастающую последовательность простых функций, сходящуюся к $gT$, и желаемый результат получается переходом к пределу. □

Если в обозначениях последней теоремы $F$ есть измеримое множество в $Y$, то, применив эту теорему к функции $\chi_F g$, получим

$$\int_F g(y)\, d\mu T^{-1}(y) = \int_{T^{-1}(F)} g(T(x))\, d\mu(x).$$

Мы видим, что каждая часть этого равенства может быть получена из другой формальной подстановкой $y = T(x)$.

Теорема 4. *Если $T$ — измеримое отображение пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ в пространство с вполне $\sigma$-конечной мерой $(Y, \mathbf{T}, \nu)$, такое, что $\mu T^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно $\nu$, то существует такая неотрицательная измеримая функция $\varphi$ на $Y$, что*

$$\int g(T(x))\, d\mu(x) = \int g(y)\varphi(y)\, d\nu(y)$$

*для любой измеримой функции $g$, в том смысле, что из существования одного их этих интегралов вытекает существование другого, и оба интеграла равны.*

Функция $\varphi$ играет ту же роль, что и функциональный определитель (или, точнее, его абсолютная величина) при замене переменных в кратном интеграле.

Доказательство. Возьмем равенство, доказанное в теореме 3, и воспользуемся теоремой 2 § 32, положив

$$\varphi = \frac{d(\mu T^{-1})}{d\nu}. \qquad \square$$

Пусть $T$ — взаимно-однозначное отображение измеримого пространства $(X, \mathbf{S})$ *на* измеримое пространство $(Y, \mathbf{T})$; если как $T$, так и $T^{-1}$ измеримы, то будем называть $T$ отображением, *сохраняющим измеримость*. Сохраняющее измеримость отображение $T$ пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ на пространство с мерой $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ называется *сохраняющим меру*, если $\mu T^{-1} = \nu$.

**Упражнения**

1. Произведение двух измеримых отображений измеримо.

2. Если $T$ — измеримое отображение пространства $(X, \mathbf{S})$ в пространство $(Y, \mathbf{T})$ и если функция $f$ на $X$ измерима относительно $T^{-1}(\mathbf{T})$, то $f(x_1) = f(x_2)$, когда $T(x_1) = T(x_2)$. [Указание. Если $F_1$ — измеримое множество в $Y$, содержащее $T(x_1)$, то существует такое измеримое множество $F$ в $Y$, что

$$\{x\colon f(x) = f(x_1)\} \cap T^{-1}(F_1) = T^{-1}(F).$$

Из $x_1 \in T^{-1}(F)$ вытекает, что $x_2 \in T^{-1}(F)$.]

3. Если $T$ — измеримое отображение пространства $(X, \mathbf{S})$ *на* пространство $(Y, \mathbf{T})$ и если действительная функция $f$ на $X$ измерима относительно $T^{-1}(\mathbf{T})$, то существует единственная измеримая функция $g$ на $Y$, такая, что $f = gT$. [Указание. Как видно из упр. 2, функция $g$ однозначно определяется для каждого $y = T(x)$ соотношением $g(y) = f(x)$. Из того, что для каждого борелевского множества $M$ на числовой прямой

$$T^{-1}(\{y\colon g(y) \in M\}) = \{x\colon f(x) \in M\},$$

вытекает, в силу равенства $T(X) = Y$, что $N(g) \cap \{y\colon g(y) \in M\} \in T$.] Остается ли в силе этот результат для отображений $T$ пространства $X$ в пространство $Y$?

4. Предположим, что $X = Y$ — единичный интервал, $\mathbf{S}$ — класс всех борелевских множеств, а $\mathbf{T}$ — класс всех конечных или счетных множеств. Если определить отображение $T$ пространства $X$ на пространство $Y$ равенством $T(x) = x$, то это отображение будет взаимно-однозначным и измеримым, но не сохраняющим измеримость. Можно ли построить подобный пример для случая $(X, \mathbf{S}) = (Y, \mathbf{T})$?

5. Если $T$ — измеримое отображение пространства $(X, \mathbf{S})$ в пространство $(Y, \mathbf{T})$ и если $\mu$ и $\nu$ — две меры на $\mathbf{S}$, такие, что $\nu \ll \mu$, то $\nu T^{-1} \ll \mu T^{-1}$.

## § 40. Кольца с мерой

*Булевское кольцо* есть кольцо в обычном алгебраическом смысле, все элементы которого идемпотентны. Это означает, что булевское кольцо представляет собой множество $\mathbf{R}$, в котором определены две алгебраические операции (называемые сложением и умножением), удовлетворяющие следующим условиям: а) операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны, а умножение дистрибутивно относительно сложения; б) в $\mathbf{R}$ существует единственный элемент (обозначаемый 0), такой, что сложение 0 с любым элементом $E$ дает $E$; в) произвольный элемент $E$ при сложении с самим собой дает 0; г) произвольный элемент $E$ при умножении самого на себя дает $E$.

Типичным примером булевского кольца является кольцо подмножеств некоторого множества $X$, в котором сумма множеств $E$ и $F$ определяется как $E \Delta F$, а произведение тех же множеств — как $E \cap F$. Так как понятие булевского кольца было введено нами ради приложений к кольцам множеств, мы условимся всегда обозначать операции сложения и умножения в булевских кольцах символами $\Delta$ и $\cap$.

Большинство введенных нами понятий и установленных результатов, относившихся к кольцам множеств, переносится без изменений на производные булевские кольца. Если, в частности, определить соединение и разность соотношениями

$$E \cup F = (E \Delta F) \Delta (E \cap F)$$

и

$$E - F = E \Delta (E \cap F),$$

то эти операции будут удовлетворять тем же нормальным соотношениям, что и соответствующие операции над множествами. Аналогичное утверждение справедливо применительно к отношениям включения, которые определяются следующим образом:

$$E \subset F, \quad \text{если} \quad E \cap F = E,$$

и

$$E \supset F, \quad \text{если} \quad E \cap F = F.$$

Напомним, что соединение некоторого класса множеств есть наименьшее множество, содержащее все множества данного класса, а их пересечение — наибольшее множество, содержащееся во всех множествах данного класса; аналогичные утверждения справедливы применительно к соединениям и пересечениям (если только они могут быть образованы) в произвольном булевском кольце. Если, например, $E$ и $F$ — элементы булевского кольца $\mathbf{R}$, то $E \cup F$ действительно является наименьшим элементом, содержащим и $E$ и $F$; это означает, что $E \subset E \cup F$, $F \subset E \cup F$, и, каков бы ни был элемент $G$ из $\mathbf{R}$, такой, что $E \subset G$ и $F \subset G$, непременно $E \cup F \subset G$. Однако для бесконечного множества элементов из булевского кольца не всегда существует элемент, содержащий все элементы этого множества, и даже если такие элементы существуют, то среди них может не быть наименьшего.

Булевское кольцо $\mathbf{S}$ называется *булевским $\sigma$-кольцом*, если каждое счетное множество элементов из $\mathbf{S}$ имеет соединение; легко проверить, что каждое счетное множество элементов из булевского $\sigma$-кольца имеет пересечение. Типичным примером булевского $\sigma$-кольца является, конечно, $\sigma$-кольцо подмножеств множества $X$.

*Булевская алгебра* есть булевское кольцо $\mathbf{R}$, в котором существует элемент (его естественно обозначить $X$), отличный от $0$ и обладающий тем свойством, что $E \subset X$ для любого $E$ из $\mathbf{R}$. *Булевская $\sigma$-алгебра* есть булевское $\sigma$-кольцо, являющееся булевской алгеброй.

Для функций, определенных на булевском кольце, понятие аддитивности, $\sigma$-конечности и т. п. вводятся так же, как и для функций множества на кольце множеств; очевидным образом переносятся на булевские кольца и понятия меры, $\sigma$-конечной меры и т. д. Мера $\mu$ на булевском кольце называется *положительной*, если она равна нулю только на нулевом элементе.

Мера $\mu$ на $\sigma$-кольце $\mathbf{S}$ подмножеств некоторого множества $X$ обычно не является положительной. Однако существуют хорошо известные методы, с помощью которых можно построить, исходя из заданной меры $\mu$, некоторую положительную меру. Один из таких методов заключается в том, что рассматривается класс $\mathbf{N}$ измеримых множеств меры нуль, являющийся идеалом кольца $\mathbf{S}$ (эти слова употребляются в их обычном алгебраическом смысле), и кольцо $\mathbf{S}$ заменяется фактор-кольцом $\mathbf{S}/\mathbf{N}$. Другой метод, равносильный только что описанному, заключается в том, что пишут $E \sim F$, если $\mu(E\Delta F) = 0$, и затем, пользуясь рефлективностью, симметричностью и транзитивностью этого отношения, заменяют $\mathbf{S}$ множеством всех классов эквивалентных между собой (относительно $\sim$) элементов.

В теории меры наиболее удобен следующий вариант (который мы и будем применять) указанного выше приема. Мы не будем заменять $\mathbf{S}$ другой системой, — элементами булевского $\sigma$-кольца, которые мы будем рассматривать, по-прежнему являются измеримые множества. Однако при этом мы изменим само понятие равенства; если два множества $E$ и $F$ из $\mathbf{S}$ таковы, что $\mu(E\Delta F) = 0$, то мы будем считать их равными и писать $E = F[\mu]$ (равенство по модулю $\mu$). Если $E_n = F_n[\mu]$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$E_1 - F_1 = E_2 - F_2 \quad \text{и} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n[\mu],$$

так что даже после изменения понятия равенства $\mathbf{S}$ остается булевским $\sigma$-кольцом относительно обычных теоретико-множественных операций. Если $E = F[\mu]$, то $\mu(E) = \mu(F)$, т. е. мера $\mu$ снова оказывается однозначно определенной на $\mathbf{S}$. Так как соотношения $\mu(E) = 0$ и $E = 0[\mu]$, очевидно, эквивалентны, то при новом определении равенства $\mu$ становится положительной мерой.

Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с мерой, то $\mathbf{S}(\mu)$ будет обозначать $\sigma$-кольцо $\mathbf{S}$, в котором равенство элементов понимается как равенство по модулю $\mu$.

*Кольцом с мерой* $(\mathbf{S}, \mu)$ мы назовем булевское $\sigma$-кольцо $\mathbf{S}$ с заданной на нем положительной мерой $\mu$. Из предыдущего видно, что если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с мерой, то $(\mathbf{S}(\mu), \mu)$ представляет собой кольцо с мерой; мы будем называть его кольцом с мерой, *связанным* с $X$, или просто — кольцом с мерой пространства $X$. *Алгебра с мерой* есть булевская алгебра, являющаяся в то же время кольцом с мерой. Выражения «(вполне) конечная» и «$\sigma$-конечная» употребляются для колец с мерой и алгебр с мерой в том же смысле, что и для пространств с мерой.

*Изоморфизмом* двух колец с мерой $(\mathbf{S}, \mu)$ и $(\mathbf{T}, \nu)$ называется такое взаимно-однозначное отображение $T$ кольца $\mathbf{S}$ на кольцо $\mathbf{T}$, при котором

$$T(E - F) = T(E) - T(F), \quad T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(E_n)$$

и

$$\mu(E) = \nu(T(E))$$

для любых элементов $E, F$ и $E_n$, $n = 1, 2, \ldots$, кольца $\mathbf{S}$. Два кольца с мерой называются *изоморфными*, если между ними можно установить соответствие, являющееся изоморфизмом. Два пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ называются изоморфными, если изоморфны связанные с ними кольца с мерой $(\mathbf{S}(\mu), \mu)$ и $(\mathbf{T}(\nu), \nu)$.

*Атомом* кольца с мерой $(\mathbf{S}, \mu)$ (или меры $\mu$) называется всякий отличный от 0 элемент $E$ этого кольца, такой, что если $F \subset E$, то либо $F = 0$, либо $F = E$; кольцо с мерой, не содержащее атомов, называется *неатомическим*. Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с мерой, кольцо с мерой которого является неатомическим, то и пространство $X$, и сама мера $\mu$ также называются неатомическими.

Если $(\mathbf{S}, \mu)$ — кольцо с мерой, то символом $\mathcal{S}$ (или $\mathcal{S}(\mu)$) мы обозначим множество всех элементов из $\mathbf{S}$, имеющих конечную меру, и для любых двух элементов $E$ и $F$ из $\mathcal{S}$ положим

$$\rho(E, F) = \mu(E \Delta F).$$

Легко проверить, что функция $\rho$ определяет в $\mathcal{S}$ некоторую метрику; мы будем называть $\mathcal{S}$ метрическим пространством, *связанным* с $(\mathbf{S}, \mu)$, или просто — метрическим пространством кольца $(\mathbf{S}, \mu)$. Мы будем пользоваться обозначением $\mathcal{S}(\mu)$ также для метрического пространства, связанного с кольцом с мерой $(\mathbf{S}(\mu), \mu)$ пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$. Кольцо с мерой, или пространство с мерой, называется *сепарабельным*, если сепарабельно связанное с ним метрическое пространство.

Теорема 1. *Если $\mathcal{S}$ — метрическое пространство кольца с мерой $(\mathbf{S}, \mu)$ и если*

$$f(E, F) = E \cup F \quad \text{и} \quad g(E, F) = E \cap F,$$

*то $f$, $g$ и $\mu$ являются равномерно непрерывными функциями своих аргументов.*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из соотношений

$$\left.\begin{aligned} &\mu((E_1 \cup F_1) - (E_2 \cup F_2)) + \mu((E_2 \cup F_2) - (E_1 \cup F_1)) \\ &\mu((E_1 \cap F_1) - (E_2 \cap F_2)) + \mu((E_2 \cap F_2) - (E_1 \cap F_1)) \end{aligned}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \mu(E_1 - E_2) + \mu(F_1 - F_2) + \mu(E_2 - E_1) + \mu(F_2 - F_1)$$

и

$$|\mu(E) - \mu(F)| = |\mu(E - F) - \mu(F - E)| \leqslant \mu(E - F) + \mu(F - E). \qquad \square$$

Теорема 2. *Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с $\sigma$-конечной мерой, такое, что $\sigma$-кольцо $\mathbf{S}$ имеет счетное множество образующих, то метрическое пространство $\mathcal{S}(\mu)$ измеримых множеств конечной меры сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность множеств из $\mathbf{S}$, такая, что $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\{E_n\})$. Так как мера $\mu$ $\sigma$-конечна, то без ограничения общности можно предполагать, что $\mu(E_n) < \infty$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. В силу теоремы 3 § 5, кольцо, порожденное последовательностью $\{E_n\}$, также счетно, поэтому мы можем предполагать, что класс $\{E_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ сам является кольцом. Из теоремы 4 § 13 следует, что для каждого $E$ из $\mathcal{S}(\mu)$ и каждого положительного числа $\varepsilon$ существует такое целое положительное число $n$, что $\rho(E, E_n) < \varepsilon$. Но это и означает, что в $\mathcal{S}(\mu)$ имеется счетное, всюду плотное множество; теорема доказана. $\square$

**Упражнения**

1. Метрическое пространство $\mathcal{S}$ пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ полно. (Указание. Если $\{E_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathcal{S}$ и если $\chi_n$ — характеристическая функция множества $E_n$, то последовательность $\{\chi_n\}$ фундаментальна по мере и к ней может быть применима теорема 5 § 22.)

2. Полно ли метрическое пространство кольца с мерой?

3. Понятие полноты булевского кольца родственно соответствующему понятию для метрических пространств, но не тождественно ему. Булевское кольцо $\mathbf{R}$ называется полным, если каждое подмножество $\mathbf{E}$ кольца $\mathbf{R}$ имеет соединение. Ясно, что каждое полное булевское кольцо является булевской $\sigma$-алгеброй; обратно, каждая алгебра с вполне конечной мерой полна. (Указание. Пусть $\widetilde{\mathbf{E}}$ — множество всевозможных конечных соединений элементов из $\mathbf{E}$. Положим $\alpha = \sup\{\mu(E)\colon E \in \widetilde{\mathbf{E}}\}$ и построим последовательность $\{E_n\}$ элементов из $\widetilde{\mathbf{E}}$, такую, что $\lim\limits_n \mu(E_n) = \alpha$; искомым соединением является множество $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.)

4. Результат упр. 3 остается справедливым для алгебр с вполне $\sigma$-конечными мерами.

5. Если $\rho$ — расстояние в метрическом пространстве $\mathcal{S}$ кольца с мерой $(\mathbf{S}, \mu)$, то $\rho$ инвариантно относительно сдвигов в том смысле, что $\rho(E \Delta G, F \Delta G) = \rho(E, F)$, если $E$, $F$ и $G$ принадлежат $\mathcal{S}$.

6. Если взаимно-однозначное отображение $T$ кольца с мерой $(\mathbf{S}, \mu)$ на кольцо с мерой $(\mathbf{T}, \nu)$ таково, что

$$T(E - F) = T(E) - T(F), \quad T(E \cup F) = T(E) \cup T(F) \quad \text{и} \quad \mu(E) = \nu(T(E)),$$

когда $E$ и $F$ принадлежат $\mathbf{S}$, то $T$ есть изоморфизм.

7. Если взаимно-однозначное отображение $T$ кольца с мерой $(\mathbf{S}, \mu)$ на кольцо с мерой $(\mathbf{T}, \nu)$ таково, что $\mu(E) = \nu(T(E))$ и $E \subset F$ тогда и только тогда, когда $T(E) \subset T(F)$, то $T$ есть изоморфизм.

8. Метрическое пространство $\mathcal{S}$ с расстоянием $\rho$ называется *выпуклым*, если для любых двух различных элементов $E$ и $F$ из $\mathcal{S}$ существует такой элемент $G$, отличный от $E$ и $F$, что

$$\rho(E, F) = \rho(E, G) + \rho(G, F).$$

Метрическое пространство кольца с $\sigma$-конечной мерой выпукло тогда и только тогда, когда это кольцо неатомическое.

9. Изоморфизм двух колец с мерой является изометрией их метрических пространств.

10. Кольцо с вполне $\sigma$-конечной мерой содержит не более чем счетное множество атомов.

11. Если $\mathcal{S}$ — метрическое пространство пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $\nu$ — конечная мера на $\mathbf{S}$, такая, что $\nu \ll \mu$, то функция $\nu$ однозначно определена и непрерывна на $\mathcal{S}$.

12. Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с $\sigma$-конечной мерой и $\{\nu_n\}$ — последовательность конечных обобщенных мер на $\mathbf{S}$, такая, что каждая $\nu_n$ абсолютно непрерывна относительно $\mu$ и существует конечный $\lim\limits_n \nu_n(E)$ для каждого $E$ из $\mathbf{S}$, то функция множества $\nu_n$ равностепенно абсолютно непрерывны относительно $\mu$. [Указание. Пусть $\mathcal{S}$ — метрическое пространство пространства с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$. Положим для любого фиксированного положительного числа $\varepsilon$

$$\mathcal{E}_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} \left\{E\colon E \in \mathcal{S}, \quad |\nu_n(E) - \nu_m(E)| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{3}\right\}.\Big]$$

Так как, в силу упр. 11, каждое $\mathcal{E}_k$ замкнуто и, в силу упр. 1, $\mathcal{S}$ есть полное метрическое пространство, то по теореме Бэра существуют целое положительное число $k_0$, положительное число $r_0$ и множество $E_0$ из $\mathcal{S}$, такие, что $\{E\colon \rho(E, E_0) < r_0\} \subset \mathcal{E}_{k_0}$. Пусть $\delta$ — положительное число $< r_0$, такое, что $|\nu_n(E)| < \frac{\varepsilon}{3}$, если $\mu(E) < \delta$, и $n = 1, \ldots, k_0$. Заметим, что если $\mu(E) < \delta$, то

$$\rho(E_0 - E, E_0) < r_0, \quad \rho(E_0 \cup E, E_0) < r_0$$

и

$$|\nu_n(E)| \leqslant |\nu_{k_0}(E)| + |\nu_n(E_0 \cup E) - \nu_{k_0}(E_0 \cup E)| + |\nu_n(E_0 - E) - \nu_{k_0}(E_0 - E)|.$$

13. Если, в обозначениях упр. 12, $\nu(E)=\lim_n \nu_n(F)$, то $\nu$ — конечная обобщенная мера и $\nu \ll \mu$.

14. Если $\{\nu_n\}$ — такая последовательность конечных обобщенных мер, что $\lim_n \nu_n(E) = \nu(E)$ существует и конечен для любого измеримого множества $E$, то $\nu(E)$ представляет собой обобщенную меру. [Указание. Пусть $|\nu_n(E)| \leqslant c_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Положим $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n c_n} |\nu_n|(E)$ и воспользуемся результатом упр. 13.]

15. а) Любое булевское кольцо $\mathbf{R}$ изоморфно (в обычном алгебраическом смысле этого слова) кольцу подмножеств некоторого множества $X$. [Указание. Пусть $X$ — множество всех гомоморфизмов кольца $\mathbf{R}$ в булевскую алгебру $\mathbf{R}_0$, состоящую из двух элементов, 0 и 1. Если для каждого $E$ из $\mathbf{R}$

$$T(E) = \{x\colon\ x \in X,\quad x(E) = 1\},$$

то $T$ представляет собой гомоморфизм кольца $\mathbf{R}$ в алгебру всех подмножеств множества $X$; остается доказать только, что если $E \in \mathbf{R}$ и $E \neq 0$, то существует $x$ из $X$, для которого $x(E) = 1$. Если кольцо $\mathbf{R}$ конечно, этот результат получить легко. В общем случае пусть $X^*$ — множество всех функций, определенных на $\mathbf{R}$ и принимающих значения из $\mathbf{R}_0$; в обычной для произведений пространств топологии $X^*$ является компактным хаусдорфовым пространством. Если $\tilde{\mathbf{R}}$ — такое конечное подкольцо кольца $\mathbf{R}$, что $E \in \tilde{\mathbf{R}}$, и $X^*(\tilde{\mathbf{R}})$ — множество всех функций $x^*$ из $X^*$, являющихся гомоморфизмами на $\tilde{\mathbf{R}}$, для которых $x^*(E) = 1$, то соотношение

$$\bigcap_{i=1}^{n} X^*(\tilde{\mathbf{R}}_i) \supset X^*(\tilde{\mathbf{R}})$$

(где $\tilde{\mathbf{R}}$ — кольцо, порожденное $\tilde{\mathbf{R}}, \ldots, \tilde{\mathbf{R}}_n$) показывает, что любой конечный подкласс класса $\{X^*(\tilde{\mathbf{R}})\}$ имеет непустое пересечение. Этот результат известен как *теорема Стоуна*.]

б) Доказательство теоремы Стоуна, намеченное выше, показывает, что кольцо $\mathbf{R}$ изоморфно некоторому кольцу множеств, одновременно открытых и замкнутых, в компактном хаусдорфовом пространстве. Если $\mathbf{R}$ — булевская алгебра, то $\mathbf{R}$ изоморфна кольцу всех множеств, одновременно открытых и замкнутых, в компактном хаусдорфовом пространстве. [Указание. Слегка изменив обозначения в упр. 15, «а», возьмем в качестве $X$ множество всех тех гомоморфизмов $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}_0$, которые отображают максимальный элемент алгебры $\mathbf{R}$ на 1. Тогда образ алгебры $\mathbf{R}$ при преобразовании $T$ содержит базис пространства $X$ (относительно той топологии, которая введена в $X$). Если некоторый класс подмножеств компактного хаусдорфова пространства, одновременно открытых и замкнутых, представляет собой базис и если он замкнут относительно образования конечных соединений, то он содержит все множества, являющиеся одновременно открытыми и замкнутыми.]

в) Каждая булевская $\sigma$-алгебра $\mathbf{S}$ изоморфна $\sigma$-алгебре подмножеств некоторого множества $X$ по модулю некоторого $\sigma$-идеала. (Указание. Отобразим $\mathbf{S}$ с помощью алгебраического изоморфизма $T$ на алгебру всех тех множеств некоторого компактного хаусдорфова пространства $X$, которые одновременно открыты и замкнуты; пусть $\mathbf{S}_0$ есть $\sigma$-кольцо, порожденное классом всех подмножеств пространства $X$, одновременно открытых и замкнутых, а $\mathbf{N}_0$ — класс всех множеств первой категории в $\mathbf{S}_0$. Если для последовательности $\{E_n\}$ множеств, одновременно открытых и замкнутых, положить $E = T(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(E_n))$, то множество $E - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ нигде не плотно. Другими словами, класс всех множеств, одновременно открытых и замкнутых, замкнут по модулю $\mathbf{N}_0$ относительно образования счетных соединений. Остается еще показать, что $T$ будет изоморфизмом даже после приведения по модулю $\mathbf{N}_0$, т. е. что $\mathbf{N}_0$ не содержит ни одного непустого множества, одновременно открытого и замкнутого; этот результат, однако, является частным случаем теоремы Бэра, которая справедлива для локально компактных пространств так же, как и для полных метрических пространств.)

## § 41. Теорема об изоморфизме

Цель настоящего параграфа — показать, что понятие кольца с мерой не является таким общим, как это может показаться. Действительно докажем, что каждое кольцо с мерой, удовлетворяющее некоторым весьма общим условиям, является кольцом с мерой некоторого пространства с мерой. Из многих теорем этого типа мы разберем только одну, выбранную в силу ее исторического значения и разнообразия ее приложений.

Мы ограничимся рассмотрением алгебр с вполне конечной мерой. Пусть $(\mathbf{S}, \mu)$ — алгебра с вполне конечной мерой; если не оговорено противное, то под $X$ мы будем понимать максимальный элемент алгебры $\mathbf{S}$. Алгебра $\mathbf{S}$ и мера $\mu$ называются *нормированными*, если $\mu(X)=1$. *Разбиением* элемента $E$ алгебры $\mathbf{S}$ называется конечное множество $\mathbf{P}$ непересекающихся элементов алгебры $\mathbf{S}$, соединение которых есть $E$. *Нормой* $|\mathbf{P}|$ разбиения $\mathbf{P}=\{E_1, \ldots, E_k\}$ называется наибольшее из чисел $\mu(E_1), \ldots, \mu(E_k)$. Если $\mathbf{P}=\{E_1, \ldots, E_k\}$ — разбиение элемента $E$ и $F$ — произвольный элемент алгебры $\mathbf{S}$, содержащийся в $E$, то символом $\mathbf{P} \cap F$ обозначается разбиение $\{E_1 \cap F, \ldots, E_k \cap F\}$ элемента $F$.

Если $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ — разбиения, то мы будем писать $\mathbf{P}_1 \leqslant \mathbf{P}_2$, если каждый элемент из $\mathbf{P}_1$ содержится в некотором элементе из $\mathbf{P}_2$; последовательность $\{\mathbf{P}_n\}$ разбиений называется *убывающей*, если $\mathbf{P}_{n+1} \leqslant \mathbf{P}_n$ при $n=1,2,\ldots$. Последовательность $\{\mathbf{P}_n\}$ разбиений называется *плотной*, если каждому элементу $E$ алгебры $\mathbf{S}$ и каждому положительному числу $\varepsilon$ соответствуют такое целое положительное число $n$ и такой элемент $E_0$ алгебры $\mathbf{S}$, что $E_0$ является соединением элементов $\mathbf{P}_n$ и $\rho(E, E_0)=\mu(E \Delta E_0)<\varepsilon$.

Теорема 1. *Если $(\mathbf{S}, \mu)$ — неатомическая алгебра с вполне конечной мерой, а $\{\mathbf{P}_n\}$ — плотная убывающая последовательность разбиений элемента $X$, то* $\lim\limits_n |\mathbf{P}_n|=0$.

Доказательство. Так как $\{|\mathbf{P}_n|\}$ — убывающая последовательность положительных чисел, то она имеет предел; допустив, что этот предел равен некоторому положительному числу $\delta$, приведем это предположение к противоречию.

Если $\mathbf{P}_1=\{E_1, \ldots, E_k\}$, то по крайней мере для одного из элементов $E_i$

$$|\mathbf{P}_n \cap E_i| \geqslant \delta \quad \text{при} \quad n=1,2,\ldots.$$

Пусть $F_1$ — такой элемент; рассмотрим последовательность $\{\mathbf{P}_n \cap F_1\}$ разбиений элемента $F_1$. Повторив только что приведенное рассуждение, найдем такой элемент $F_2$ разбиения $\mathbf{P}_2$, что $F_2 \subset F_1$ и

$$|\mathbf{P}_n \cap F_2| \geqslant \delta \quad \text{при} \quad n=1,2,\ldots,$$

и продолжаем так неограниченно.

Если $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, то $\mu(F) \geqslant \delta>0$ и, так как $F$ не является атомом, существует такой элемент $F_0$, что $F_0 \subset F$ и $0<\mu(F_0)<\mu(F)$. Заметим, что элемент $F_0$ либо содержится во всех элементах разбиений $\mathbf{P}_n$, $n=1,2,\ldots$, либо не пересекается ни с одним из них. Отсюда следует, что если $\varepsilon$ меньше каждого из чисел $\mu(F_0)$ и $\mu(F)-\mu(F_0)$, то ни один элемент из $\mathbf{S}$, являющийся соединением элементов разбиения $\mathbf{P}_n$, не может отстоять от $F_0$ на расстояние, меньшее, чем $\varepsilon$. Так как это противоречит плотности последовательности $\{\mathbf{P}_n\}$, то теорема доказана. □

Теорема 2. *Если $Y$ — единичный интервал, $\mathbf{T}$ — класс всех борелевских множеств в $Y$, а $\nu$ — мера Лебега на $\mathbf{T}$ и если $\{\mathbf{Q}_n\}$ — такая последовательность разбиений на интервалы максимального элемента $Y$ алгебры с мерой $(\mathbf{T}, \nu)$, что $\lim\limits_n |\mathbf{Q}_n| = 0$, то последовательность $\{\mathbf{Q}_n\}$ является плотной.*

Доказательство. Для каждого положительного числа $\varepsilon$ существует такое целое положительное $n$, что $|\mathbf{Q}_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Для произвольного подинтервала $E$ интервала $Y$ обозначим $E_1$ единственным образом определенный интервал разбиения $\mathbf{Q}_n$, содержащий левый конец интервала $E$. Если $E_1$ не содержит правого конца интервала $E$, то обозначим $E_2$ интервал разбиения $\mathbf{Q}_n$, примыкающий к $E_1$ справа, и продолжаем так конечное число раз до тех пор, пока не придем к интервалу $E_k$ разбиения $\mathbf{Q}_n$, содержащему правый конец интервала $E$. Соединение интервалов $E_1, \ldots, E_k$ отстоит от $E$ меньше, чем на $\varepsilon$; это доказывает, что любой подинтервал интервала $Y$ может быть аппроксимирован соединениями элементов из $\{\mathbf{Q}_n\}$. Так как класс всех конечных соединений интервалов является плотным, то теорема доказана. □

Теорема 3. *Каждая сепарабельная неатомическая нормированная алгебра с мерой $(\mathbf{S}, \mu)$ изоморфна алгебре с мерой $(\mathbf{T}, \nu)$ единичного интервала.*

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ — плотная последовательность в метрическом пространстве $\mathcal{S}(\mu)$ алгебры с мерой $(\mathbf{S}, \mu)$. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ множества элементов вида $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i$ при любом $i = 1, \ldots, n$ равно либо $E_i$, либо $X - E_i$, есть разбиение $\mathbf{P}_n$ элемента $X$. Ясно, что последовательность разбиений $\{\mathbf{P}_n\}$ является убывающей; кроме того, эта последовательность — плотная, так как $\{E_n\}$ плотна в $\mathcal{S}(\mu)$. Из теоремы 1 следует, что $\lim\limits_n |\mathbf{P}_n| = 0$.

Каждому элементу $E$ разбиения $\mathbf{P}_1$ можно поставить в соответствие такой подинтервал $T(E)$ интервала $Y$, что $\mu(E) = \nu(T(S))$, и эти интервалы образуют разбиение интервала $Y$. Каждый из этих интервалов мы разбиваем аналогичным образом на подинтервалы, соответствующие элементам разбиения $\mathbf{P}_2$, и продолжаем так по индукции. Таким путем мы получаем последовательность $\{\mathbf{Q}_n\}$ разбиений $Y$ на интервалы; так как отображение $T$ элементов разбиения $\{\mathbf{P}_n\}$ в интервалы сохраняет меру, то $\lim\limits_n |\mathbf{Q}_n| = 0$ и, следовательно, в силу теоремы 2, последовательность разбиений $\{\mathbf{Q}_n\}$ является плотной.

Если определить $T$ не только для элементов разбиений $\mathbf{P}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, но также и для конечных соединений таких элементов, отнеся каждому такому соединению соответствующее конечное соединение элементов разбиения $\mathbf{Q}_n$, то отображение $T$ будет изометрией плотного подмножества метрического пространства $\mathcal{S}(\mu)$ на плотное подмножество пространства $\mathcal{I}(\nu)$, отвечающего алгебре с мерой $(\mathbf{T}, \nu)$. Следовательно, существует единственное изометрическое отображение $\overline{T}$ пространства $\mathcal{S}(\mu)$ на пространстве $\mathcal{I}(\nu)$, совпадающее с $T$ везде, где $T$ определено. Так как $T$ сохраняет соединения и разности и так как эти операции являются равномерно непрерывными функциями своих аргументов, то отсюда следует, что $\overline{T}$ есть изоморфизм. □

**Упражнения**

1. Если $(\mathbf{S}, \mu)$ — неатомическое кольцо с $\sigma$-конечной мерой и $E_0 \in \mathbf{S}$, $E_0 \neq 0$, то для любого положительного числа $\varepsilon$ существует такой элемент $E$ из $\mathbf{S}$, что $E \subset E_0$ и $0 < \mu(E) < \varepsilon$. [Указание. Если $\mu(E_0) < \infty$ и если $E_1$ — такой элемент из $\mathbf{S}$, что $E_1 \subset E_0$ и $0 < \mu(E_1) < \mu(E_0)$, то либо $\mu(E_1) \leqslant \frac{1}{2}\mu(E_0)$, либо $\mu(E_0 - E_1) \leqslant \frac{1}{2}\mu(E_0)$.]

2. Если $(\mathbf{S}, \mu)$ — неатомическое кольцо с $\sigma$-конечной мерой и $E_0 \in \mathbf{S}$, то для любого неотрицательного числа $\alpha \leqslant \mu(E_0)$ (может быть равного $\infty$) существует такой элемент $E$ из $\mathbf{S}$, что $E \subset E_0$ и $\mu(E) = \alpha$. [Указание. Так как случай $\alpha = \infty$ тривиален, то можно, не ограничивая общности, предположить, что $\mu(E_0) < \infty$. Требуемый результат получается трансфинитным методом исчерпывания. Этот метод сходен с тем, при помощи которого обычно доказывается, что две любые точки полного выпуклого метрического пространства могут быть соединены сегментом. Наше утверждение является частным случаем этой общей теоремы метрической геометрии (см. упр. 2 и 8 § 40).]

3. Если $(\mathbf{S}, \mu)$ — неатомическая алгебра с вполне $\sigma$-конечной мерой и если $E_0 \in \mathbf{S}$, то, каково бы ни было $\alpha$ (конечное или бесконечное), заключенное между $\mu(E_0)$ и $\mu(X)$, существует такой элемент $E$ из $\mathbf{S}$, что $E_0 \subset E$ и $\mu(E) = \alpha$. (Указание. Если $\alpha$ конечно, то применим упр. 2 к $X - E_0$ и $\mu(X) - \alpha$.)

4. Если $(\mathbf{S}, \mu)$ — алгебра с вполне конечной мерой, то множество всех значений меры $\mu$ замкнуто.

5. Если неатомическое кольцо $(\mathbf{S}, \mu)$ с $\sigma$-конечной мерой содержит по крайней мере один элемент, отличный от 0, то его метрическое пространство $\mathcal{S}(\mu)$ не имеет изолированных точек. Верно ли, что если $\mathcal{S}(\mu)$ не имеет изолированных точек, то кольцо $(\mathbf{S}, \mu)$ — неатомическое.

6. Всякая сепарабельная неатомическая алгебра $(\mathbf{S}, \mu)$ с вполне $\sigma$-конечной мерой, такая, что $\mu(X) = \infty$, изоморфна алгебре с мерой $(\mathbf{T}, \nu)$ числовой прямой. [Указание. Из упр. 2 следует, что существует такая последовательность $\{X_n\}$ элементов из $\mathbf{S}$, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ и $\mu(X_n) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$; каково бы ни было $n$, к алгебре, состоящей из всех тех элементов, которые содержатся в $X_n$, применима теорема 3.]

7. Каждая алгебра с мерой изоморфна алгебре с мерой некоторого пространства с мерой (см. упр. 15, «в», § 40).

## § 42. Функциональные пространства

Существуют некоторые метрические пространства, связанные с произвольным пространством с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$, аналогичные пространству $\mathcal{S}(\mu)$ измеримых множеств конечной меры. Одним из них является класс $\mathcal{L}_1$ (или $\mathcal{L}_1(\mu)$) всех интегрируемых действительных функций, принимающих конечные или бесконечные значения. Если для $f$ из $\mathcal{L}_1$ положить

$$\|f\| = \int |f| \, d\mu$$

и для $f$ и $g$ из $\mathcal{L}_1$ положить $\rho(f, g) = \|f - g\|$ (см. § 23), то функция $\rho$ будет обладать всеми обычными свойствами расстояния, кроме одного — из $\rho(f, g) = 0$ не вытекает, конечно, что $f = g$: в силу теоремы 2 § 25, равенство $\rho(f, g) = 0$ означает, что $f = g[\mu]$. Мы снова станем на ту же точку зрения, что и в случае пространства измеримых множеств конечной меры. Два элемента (т. е. две функции) из $\mathcal{L}_1$ будем считать равными, если расстояние между ними равно нулю, или, что то же самое, если они равны почти всюду $[\mu]$; при этом $\mathcal{L}_1$ становится метрическим пространством, даже как известно (см. теорему 2 § 26), полным.

Для некоторых целей анализа желательно обобщить это построение. Если $p$ — действительное число, большее единицы, то обозначим $\mathcal{L}_p$

(или $\mathcal{L}_p(\mu)$) класс всех измеримых функций $f$, таких, что $|f|^p$ интегрируема. Подобно тому как это мы делали для $\mathcal{L}_1$, будем отождествлять два элемента из $\mathcal{L}_p$, если они равны почти всюду $[\mu]$. Теория пространства $\mathcal{L}_p$ весьма похожа на теорию пространства $\mathcal{L}_1$, однако до известного предела. Например, определяя для $f$ из $\mathcal{L}_p$ норму равенством

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

и полагая, для $f$ и $g$ из $\mathcal{L}_p$, $\rho_p(f, g) = \|f - g\|_p$, мы сталкиваемся с некоторыми трудностями. В то время как ясно, что $\rho_p(f, g) = \rho_p(g, f) \geqslant 0$ и $\rho_p(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = g[\mu]$, справедливость неравенства треугольника совсем не очевидна и даже, что еще более серьезно, не очевидно, что $\rho_p$ всегда конечно. Чтобы преодолеть эти трудности, мы докажем сначала две классические теоремы; из них первая устанавливает так называемое *неравенство Гельдера.*

Теорема 1. *Если $p$ и $q$ — действительные числа, большие* 1 *и такие, что* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *и если* $f \in \mathcal{L}_p$ *и* $g \in \mathcal{L}_q$, *то* $fg \in \mathcal{L}_1$ *и* $\|fg\| \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi$, определенную для всех положительных действительных чисел $t$ равенством $\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$. Дифференцируя, получим

$$\varphi'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1};$$

мы видим, что $\varphi'$ обращается в нуль только при $t = 1$. Так как

$$\lim_{t \to 0} \varphi(t) = \lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty,$$

то отсюда следует, что функция $\varphi$ достигает в точке $t = 1$ своего наименьшего значения; таким образом,

$$\frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q} = \varphi(t) \geqslant \varphi(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если $a$ и $b$ — два произвольных положительных числа, то, положив $t = \frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}}}$, получим

$$1 \leqslant \frac{a^{p-1}}{bp} + \frac{b^{q-1}}{aq}, \quad \text{т. е.} \quad ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q};$$

ясно, что последнее неравенство справедливо и тогда, когда $a$ и $b$ равны нулю.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы. Если $\|f\|_p = 0$ или $\|g\|_q = 0$, то утверждение теоремы тривиально; если $\|f\|_p$ и $\|g\|_q$ отличны от нуля, то положим

$$a = \frac{|f|}{\|f\|_p} \quad \text{и} \quad b = \frac{|g|}{\|g\|_q}.$$

В силу последнего неравенства, получим

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\int |f|^p \, d\mu} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\int |g|^q \, d\mu}.$$

Так как $fg$ измерима, то это неравенство показывает, что $fg \in \mathcal{L}_1$; интегрируя его, получим требуемый результат. □

Теперь мы установим так называемое *неравенство Минковского.*

Теорема 2. *Если $p$ — действительное число, большее единицы, и $f$ и $g$ принадлежит $\mathcal{L}_p$, то $f+g\in\mathcal{L}_p$ и*

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p.$$

Доказательство. Неравенство Гельдера для метрического пространства, состоящего из двух точек, меры 1 каждая, дает элементарное неравенство

$$|a_1b_1+a_2b_2|\leqslant(|a_1|^p+|a_2|^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(|b_1|^q+|b_2|^q)^{\frac{1}{q}},$$

где, как и раньше, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Отсюда вытекает, что

$$|f+g|^p\leqslant|f|\cdot|f+g|^{p-1}+|g|\cdot|f+g|^{p-1}\leqslant(|f|^p+|g|^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(2|f+g|^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}}$$

и, следовательно,

$$|f+g|^p\leqslant 2^{\frac{p}{q}}(|f|^p+|g|^p).$$

Таким образом, $f+g\in\mathcal{L}_p$. Требуемое неравенство следует из соотношений

$$(\|f+g\|_p)^p=\int|f+g|^p\,d\mu\leqslant\int|f|\cdot|f+g|^{p-1}\,d\mu+\int|g|\cdot|f+g|^{p-1}\,d\mu\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int|g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=(\|f\|_p+\|g\|_p)(\|f+g\|_p)^{\frac{p}{q}}.\quad\square$$

Из теоремы 2 следует, что если $f$, $g$ и $h$ принадлежит $\mathcal{L}_p$, то

$$\rho_p(f,g)=\|f-g\|_p\leqslant\|f-h\|_p+\|h-g\|_p=\rho_p(f,h)+\rho_p(h,g);$$

мы доказали, что $\mathcal{L}_p$ — метрическое пространство; доказательство полноты пространства $\mathcal{L}_1$ переносится, с очевидными изменениями, на $\mathcal{L}_p$.

**Упражнения**

1. Метрическое пространство $\mathcal{L}_p(\mu)$ пространства с мерой $(X,\mathbf{S},\mu)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда пространство $\mathcal{S}(\mu)$ измеримых множеств конечной меры сепарабельно. [Указание. Если некоторый класс множеств плотен в $\mathcal{S}(\mu)$, то множество всех конечных линейных комбинаций с рациональными коэффициентами характеристических функций этих множеств плотно в $\mathcal{L}_p(\mu)$.]

2. Другим полезным пространством является множество $\mathcal{M}$ всех существенно ограниченных измеримых функций. Если положить для любой $f$ из $\mathcal{M}$

$$\|f\|_\infty=\sup\operatorname{vrai}\{|f(x)|:\ x\in X\}$$

и для $f$ и $g$ из $\mathcal{M}$ положить $\rho_\infty(f,g)=\|f-g\|_\infty$, то $\mathcal{M}$ (с обычным соглашением относительно равенства двух элементов) становится полным метрическим пространством.

3. Из описанных нами функциональных пространств наиболее полно изучено пространство $\mathcal{L}_2$; оно является наиболее естественным и плодотворным обобщением обычного конечномерного евклидова пространства. *Линейным функционалом* на $\mathcal{L}_2$ называется такая действительная функция $\Lambda$ на $\mathcal{L}_2$, что

$$\Lambda(\alpha f+\beta g)=\alpha\Lambda(f)+\beta\Lambda(g),$$

где $\alpha$ и $\beta$ — действительные числа, а $f$ и $g$ принадлежит $\mathcal{L}_2$. Линейный функционал $\Lambda$ называется *ограниченным*, если существует такая положительная конечная постоянная $c$, что $|\Lambda(f)| \leqslant c\|f\|_2$ для всех $f$ из $\mathcal{L}_2$.

Для каждого ограниченного линейного функционала $\Lambda$ существует такой элемент $g$ из $\mathcal{L}_2$, что $\Lambda(f) = \int fg\, d\mu$, каково бы ни было $f$ из $\mathcal{L}_2$. (Доказательство этого элементарного геометрического факта не опирается на свойства, более глубокие, чем полнота $\mathcal{L}_2$). Этот результат может быть использован для доказательства теоремы Радона—Никодима (простым следствием которой он, в свою очередь, является). Для простоты ограничимся при наброске этого доказательства случаем конечных мер. Допустим, что $\mu$ и $\nu$ — две конечные меры, такие, что $\nu \ll \mu$, и положим $\lambda = \mu + \nu$.

а) Если $\Lambda(f) = \int f\, d\nu$ при любом $f$ из $\mathcal{L}_2(\lambda)$, то $\Lambda$ — ограниченный линейный функционал на $\mathcal{L}_2(\lambda)$.

б) Если $\Lambda(f) = \int fg\, d\lambda$, то $0 \leqslant g \leqslant 1[\lambda]$. [Указание. Если $f$ — характеристическая функция измеримого множества $E$, то $\Lambda(f) = \nu(E) \leqslant \lambda(E)$.]

в) Если $E = \{x\colon g(x) = 1\}$, то $\lambda(E) = 0$. [Указание. $\lambda(E) = \nu(E)$.]

г) $\int f(1-g)\, d\nu = \int fg\, d\mu$ для любой неотрицательной измеримой функции $f$.

д) Если $g_0 = \dfrac{g}{1-g}$, то $\nu(E) = \int\limits_E g_0\, d\mu$ для любого измеримого множества $E$. [Указание. Положить $f = \dfrac{\chi_E}{1-g}$.]

4. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — пространство с конечной мерой; для любых двух действительных измеримых функций $f$ и $g$ положим

$$\rho_0(f, g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu.$$

Функция $\rho_0$ определяет в множестве всех измеримых функций некоторую метрику; сходимость в смысле этой метрики эквивалентна сходимости по мере.

## § 43. Функции множества и функции точки

В этом параграфе мы изучим связь между некоторыми функциями действительного переменного и конечными мерами на действительной прямой. Всюду в этом параграфе $X$ будет обозначать числовую прямую, $\mathbf{S}$ — класс всех борелевских множеств и $\mu$ — лебеговскую меру на $\mathbf{S}$.

Будем рассматривать монотонные неубывающие функции $f$ на $X$, т. е. такие функции $f$, для которых $f(x) \leqslant f(y)$, если $x \leqslant y$; для краткости будем называть такие функции просто *монотонными*. Если $f$ — ограниченная монотонная функция, то легко видеть, что

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

всегда существуют и конечны; как обычно, обозначим эти пределы соответственно $f(-\infty)$ и $f(+\infty)$.

Теорема 1. *Если $\nu$ — конечная мера на $\mathbf{S}$ и если для любого действительного числа $x$*

$$f_\nu(x) = \nu(\{t\colon -\infty < t < x\}),$$

*то $f_\nu$ — ограниченная монотонная функция, непрерывная слева и такая, что $f_\nu(-\infty) = 0$.*

Доказательство. Ограниченность и монотонность $f_\nu$ следуют из соответствующих свойств меры $\nu$. Так как $f_\nu(-n) = \nu((-\infty, -n))$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$f_\nu(-\infty) = \lim_n f_\nu(-n) = \nu\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty}\{t\colon -\infty < t < -n\}\Big) = \nu(0) = 0.$$

Чтобы доказать непрерывность функции $f_\nu$ слева при любом $x$, предположим, что $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность чисел, такая, что $\lim\limits_n x_n = x$; тогда

$$0 = \nu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}[x_n, x)\Big) = \lim_n \nu([x_n, x)) = \lim_n (f_\nu(x) - f_\nu(x_n)). \qquad \square$$

Теорема 2. *Если $f$ — ограниченная непрерывная слева монотонная функция, причем $f(-\infty) = 0$, то существует единственная конечная мера $\nu$ на $\mathbf{S}$, такая, что $f = f_\nu$.*

Доказательство. Это доказательство во всех деталях повторяет построение лебеговской меры. Именно, если определить $\nu$ для каждого полузамкнутого интервала, положив $\nu([a, b)) = f(b) - f(a)$, то все, что говорилось в § 8 относительно $\mu$, применимо к $\nu$, и, следовательно, может быть применима теорема о продолжении (см. теорему 1 § 13). Нуждается в изменении только рассуждение, использованное в доказательстве теоремы 3 § 8. Нам нужно доказать, что если $[a_0, b_0)$ — полузамкнутый интервал, содержащийся в соединении последовательности $\{[a_i, b_i)\}$ полузамкнутых интервалов, то

$$\nu([a_0, b_0)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \nu([a_i, b_i)).$$

Если $a_0 = b_0$, то результат тривиален; в противном случае пусть $\varepsilon$ — такое положительное число, что $\varepsilon < b_0 - a_0$. Так как $f$ непрерывна слева в $a_i$, то для всякого положительного числа $\delta$ и всякого целого положительного $i$ существует такое положительное число $\varepsilon_i$, что

$$f(a_i) - f(a_i - \varepsilon_i) < \frac{\delta}{2^i}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Если $F_0 = [a_0, b_0 - \varepsilon]$ и $U_i = (a_i - \varepsilon_i, b_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, то $F_0 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$ и, следовательно, в силу теоремы Гейне—Бореля, существует такое положительное $n$, что

$$F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Так же, как и в теореме 2 § 8, получаем

$$f(b_0 - \varepsilon) - f(a_0) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(f(b_i) - f(a_i - \varepsilon_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(f(b_i) - f(a_i)) + \sum_{i=1}^{n}(f(a_i) - f(a_i - \varepsilon)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}(f(b_i) - f(a_i)) + \delta.$$

Так как $\varepsilon$ и $\delta$ произвольны, то требуемое неравенство следует из непрерывности функции $f$ слева в точке $b_0$. $\square$

Теоремы 1 и 2 устанавливают взаимно-однозначное соответствие между всеми конечными мерами $\nu$ на $\mathbf{S}$ и некоторыми функциями $f_\nu$ действительного переменного; следующие две теоремы показывают, как некоторые свойства меры $\nu$ могут быть охарактеризованы с помощью соответствующей функции $f_\nu$.

Теорема 3. *Если $\nu$ — конечная мера на* $\mathbf{S}$, *то для того, чтобы функция $f_\nu$ была непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы $\nu(\{x\})=0$ для любой точки $x$.*

Доказательство. Если $\{x_n\}$ — убывающая последовательность чисел, такая, что $\lim\limits_n x_n = x$, то

$$\nu(\{x\}) = \nu(\bigcap_{n=1}^{\infty}[x_n, x)) = \lim_n \nu([x_n, x)) = \lim_n (f_\nu(x_n) - f_\nu(x)).$$

Остается только заменить, что $f_\nu$ непрерывна в точке $x$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_n (f_\nu(x_n) - f_\nu(x)) = 0. \qquad \square$$

Действительная функция $f$ действительного переменного называется *абсолютно непрерывной*, если для любого положительного числа $\varepsilon$ существует такое положительное число $\delta$, что

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

для каждого конечного класса $\{(a_i, b_i)\colon i = 1, 2, \ldots\}$ непересекающихся ограниченных открытых интервалов, для которого $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$.

Теорема 4. *Если $\nu$ — конечная мера на* $\mathbf{S}$, *то, для того чтобы функция $f_\nu$ была абсолютно непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы $\nu$ была абсолютно непрерывна относительно $\mu$.*

Доказательство. Если $\nu \ll \mu$, то для каждого положительного числа $\varepsilon$ существует такое положительное число $\delta$, что $\nu(E) < \varepsilon$ для любого борелевского множества $E$, для которого $\mu(E) < \delta$. Следовательно, если $\{(a_i, b_i)\colon i = 1, 2, \ldots, n\}$ — конечный класс непересекающихся ограниченных открытых интервалов, такой, что

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} |f_\nu(b_i) - f_\nu(a_i)| = \sum_{i=1}^{n} \nu([a_i, b_i)) = \nu(\bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i)) < \varepsilon.$$

Обратно, предположим, что функция $f_\nu$ абсолютно непрерывна. Пусть $\varepsilon$ — произвольное положительное число, а $\delta$ — такое положительное число, что $\sum\limits_{i=1}^{n} |f_\nu(b_i) - f_\nu(a_i)| < \varepsilon$, как только $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$. Если $E$ — борелевское множество лебеговской меры нуль, то существует такая последовательность $\{[a_i, b_i)\}$ непересекающихся полузамкнутых интервалов, что

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \delta.$$

Так как отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{n} |f_\nu(b_i) - f_\nu(a_i)| < \varepsilon$ для любого целого положительного $n$, то

$$\nu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \nu([a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} |f_\nu(b_i) - f_\nu(a_i)| \leqslant \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon$ произвольно, то $\nu(E) = 0$. □

Для того чтобы сформулировать следующий результат (представляющий собой простое, но часто используемое следствие теоремы Лебега о разложении), нам понадобится еще одно определение. Будем говорить, что конечная мера $\nu$ на $\mathbf{S}$ является *чисто атомической*, если существует такое конечное или счетное множество $C$, что $\nu(X - C) = 0$.

Теорема 5. *Если $\nu$ — конечная мера на $\mathbf{S}$, то существуют три однозначно определенные меры $\nu_1$, $\nu_2$ и $\nu_3$ на $\mathbf{S}$, сумма которых равна $\nu$, причем $\nu_1$ абсолютно непрерывна относительно $\mu$, $\nu_2$ является чисто атомической, а $\nu_3$ сингулярна относительно $\mu$, но $\nu_3(\{x\}) = 0$ для любой точки $x$.*

Доказательство. Согласно теореме Лебега о разложении (см. теорему 3 § 32), существуют две меры $\nu_0$ и $\nu_1$ на $\mathbf{S}$, сумма которых равна $\nu$, причем $\nu_0$ сингулярна, а $\nu_1$ абсолютно непрерывна относительно лебеговской меры $\mu$. Пусть $C$ — множество тех точек $x$, для которых $\nu_0(\{x\}) \neq 0$; так как мера $\nu$ конечна, то множество $C$ конечно или счетно. Если положить

$$\nu_2(E) = \nu_0(E \cap C) \quad \text{и} \quad \nu_3(E) = \nu_0(E - C),$$

то ясно, что разложение $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ обладает требуемыми свойствами. Единственность этого разложения следует из единственности разложения Лебега и очевидной единственности множества $C$. □

### Упражнения

1. Все результаты этого параграфа справедливы и для обобщенной меры $\nu$, если условие монотонности $f_\nu$ заменить условием ограниченности ее вариации. [Указание. Каждая функция ограниченной вариации является разностью двух монотонных.]

2. Некоторые хорошо известные свойства монотонных функций и абсолютно непрерывных функций могут быть доказаны применением методов этого параграфа; укажем два примера:

а) Монотонная функция имеет не более счетного множества точек разрыва. [Указание. Если ограниченная монотонная функция $f$ непрерывна слева и $f(-\infty) = 0$, то применим теорему 2 и рассуждение, использованное при доказательстве теоремы 3. Общий случай очевидным образом сводится к этому частному.]

б) Если ограниченная монотонная и абсолютно непрерывная функция $f$ такова, что $f(-\infty) = 0$, то существует такая неотрицательная интегрируемая в смысле Лебега функция $\varphi$, что $f(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, d\mu(t)$. [Указание. Применить теоремы 2 и 4.]

3. Следующие замечания показывают, что теорема 3 § 15 и результат упр. 1 § 15 могут быть распространены на весьма широкий класс мер, включающий меры, исследованные в этом параграфе:

а) Если две конечные меры $\mu$ и $\nu$ на $\sigma$-кольце $\mathbf{S}$ подмножеств множества $X$ совпадают на некоторой структуре $\mathbf{L}$ множеств из $\mathbf{S}$, то они совпадают и на $\sigma$-кольце $\mathbf{S}(\mathbf{L})$, порожденном $\mathbf{L}$. [Указание. Если $E \in \mathbf{L}$, $F \in \mathbf{L}$ и $E \subset F$, то $\mu(F - E) = \nu(F - E)$. Применим теперь результаты упр. 2 § 5 и упр. 5 § 8 и теорему 1 § 13.]

б) Если две конечные меры $\mu$ и $\nu$ определены на всех борелевских множествах в метрическом пространстве $X$ и совпадают на классе $\mathbf{U}$ открытых подмножеств пространства $X$, то они совпадают на всех борелевских множествах.

в) Если $\mu$ — конечная мера, определенная на всех борелевских множествах в метрическом пространстве $X$, а $\mathbf{U}$ — класс открытых множеств пространства $X$, то $\mu(E) = \inf\{\mu(U)\colon E \subset U \in \mathbf{U}\}$ для любого борелевского множества $E$. [Указание. Функция множества $\nu^*$, определенная равенством $\nu^*(E) = \inf\{\mu(U)\colon E \subset U \in \mathbf{U}\}$, является конечной метрической внешней мерой; она определяет меру $\nu$ на всех борелевских множествах, и $\nu$ совпадает с $\mu$ на $\mathbf{U}$.)

г) Если $\mu$ — мера на всех борелевских множествах в метрическом пространстве $X$, а $\mathbf{C}$ — класс замкнутых множеств пространства $X$, имеющих конечную меру, то $\mu(E) = \sup\{\mu(\mathbf{C})\colon E \supset C \in \mathbf{C}\}$, для любого борелевского множества $E$ $\sigma$-конечной меры. [Указание. Достаточно рассмотреть множества $E$ конечной меры. Положим $\nu(E) = \mu(E \cap F)$ и применим «в» к $\nu$ и $X - E$.]

д) Если $\mu$ — мера на всех борелевских множествах в полном сепарабельном метрическом пространстве $X$, а $\mathbf{C}_0$ — класс компактных множеств в пространстве $X$, имеющих конечную меру, то $\mu(E) = \sup\{\mu(C)\colon E \supset C \in \mathbf{C}_0\}$ для каждого борелевского множества $E$ $\sigma$-конечной меры. [Указание. Применить «г» и упр. 10 § 9.]

4. Если $\nu$ — конечная мера на $\mathbf{S}$ и если борелевское множество $E_0$ является для меры $\nu$ атомом, то в $E_0$ существует такая точка $x_0$, что $\mu(E_0 - \{x_0\}) = 0$. [Указание. Посредством упр. 3 общий случай может быть сведен к случаю замкнутого и ограниченного $E_0$.]

5. Если $\nu$ — конечная мера на $\mathbf{S}$, то, для того чтобы $f_\nu$ была непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы мера $\nu$ была неатомической.

6. Большинство результатов этого параграфа остается справедливым для мер и обобщенных мер $\nu$, не являющихся конечными; существенно только, чтобы $\nu$ была конечна на ограниченных интервалах.

7. В связи с упр. 6 и для построения примеров интересно заметить, что существуют $\sigma$-конечные меры $\nu$ на $\mathbf{S}$, абсолютно непрерывные относительно $\mu$, для которых $\nu(E) = \infty$ для каждого интервала $E$, имеющего хотя бы одну внутреннюю точку. (Указание. Пусть $f$ — положительная интегрируемая в смысле Лебега функция, такая, что $\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f^2\, d\mu = \infty$ для любого положительного числа $\varepsilon$, например $f(x) = (e^{|x|}\sqrt{|x|})^{-1}$. Если $\{r_1, r_2, \ldots\}$ — последовательность всех рациональных чисел, то для каждого $x$ положим

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(x - r_n);$$

мера $\nu$, определенная для каждого борелевского множества $E$ равенством $\nu(E) = \int\limits_E g^2\, d\mu$, обладает требуемыми свойствами. Заметим, что так как $\int g\, d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int f\, d\mu$, то функция $g$ принимает конечные значения почти всюду $[\mu]$.)

## ГЛАВА 9

# ВЕРОЯТНОСТЬ

## § 44. Вводные замечания

Цель этого параграфа — дать интуитивное оправдание построению теории вероятностей на основе теории меры.

Основным неопределимым понятием теории вероятностей является понятие «события». Говоря не строго, можно назвать событием любой из возможных исходов произвольного физического эксперимента. В качестве хорошо известного примера рассмотрим эксперимент, заключающийся в бросании обычной игральной кости и наблюдении выпавшего число очков $x$ (= 1, 2, 3, 4, 5 или 6). «Число $x$ четное», «$x$ меньше 4», «$x$ равно 6» — каждое такое утверждение соответствует некоторому возможному исходу рассматриваемого эксперимента. С этой точки зрения возможно столько событий, сколько существует сочетаний из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Если в целях удобства рассматривать также невозможное событие, состоящее в том, что «число $x$ не равно ни одному из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6», то существует $2^6$ возможных событий, связанных с экспериментом бросания кости. Для того чтобы более подробно изучить этот пример, введем следующие обозначения: пусть символ {2, 4, 6} означает событие «$x$ есть четное число», {1, 2, 3} — событие «$x$ меньше 4» и т. д. Невозможное событие и достоверное событие (={1, 2, 3, 4, 5, 6}) заслуживает специальных обозначений; условимся обозначать их соответственно 0 и $X$.

По отношению к событиям постоянно употребляются следующие выражения: «два события $E$ и $F$ несовместимы, или взаимно исключают друг друга», «событие $E$ является дополнительным к событию $F$», «событие $E$ заключается в одновременном наступлении событий $F$ и $G$», «событие $E$ заключается в наступлении хотя бы одного из событий $F$ и $G$». Такие фразы подсказывают определения отношений между событиями и операций образования новых событий из уже имеющихся, что должно быть, конечно, частью математической теории событий.

Понятие дополнительного события, вероятно, наиболее прозрачно. Событие, дополнительное к событию $E$, заключается в ненаступлении события $E$ и обозначается $E'$. Таким образом, если $E = \{2, 4, 6\}$, то $E' = \{1, 3, 5\}$. Можно ввести также комбинации событий, отвечающие логическим отношениям «и» и «или». Любым двум событиям $E$ и $F$ мы ставим в соответствие их «соединение» $E \cup F$ и «пересечение» $E \cap F$: событие $E \cup F$ наступает тогда и только тогда, когда наступает по крайней мере одно из событий $E$ и $F$, а $E \cap F$ есть событие, наступающее тогда и только тогда, когда наступают оба события $E$ и $F$. Так, например, если $E=\{2,4,6\}$ и $F=\{1,2,3\}$, то $E\cup F=\{1,2,3,4,6\}$ и $E\cap F=\{2\}$.

Эти соображения и их очевидные обобщения, относящиеся к более сложным экспериментам, позволяют нам заключить, что теория вероятностей занимается изучением булевских алгебр множеств. Событие представляет собой множество, дополнительное событие — дополнение этого множества; несовместимые события являются непересекающимися множествами; событие, заключающееся в совместном наступлении двух событий, есть пересечение двух множеств. Такой перевод понятий на теоретико-множественный язык может быть очевидным образом продолжен.

Для классической теории вероятностей, имеющей дело с простыми играми, вроде игры в кости, когда общее число возможных событий конечно, описанное выше сведение класса рассматриваемых событий к булевской алгебре множеств удается осуществить полностью и без каких-либо дополнительных ограничений. В условиях же, возникающих в современной теории и практике, и даже в более сложных азартных играх, приходится дополнительно предполагать, что система событий замкнута относительно образования счетных соединений, т. е., в нашей терминологии, что рассматриваемая булевская алгебра является $\sigma$-алгеброй.

Попробуем пояснить необходимость этого дополнительного предположения на одном несколько искусственном примере. Предположим, что игрок бросает кость до первого выпадения шестерки; пусть $E_n$ — событие, заключающееся в том, что шестерка выпала первый раз при $n$-м бросании. Событие $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ наступает тогда и только тогда, когда игра оканчивается после конечного числа бросаний. Наступление противоположного события $E'$, если не практически, то, по крайней мере, теоретически возможно; естественно поэтому подвергнуть изучению и это событие. Многочисленные примеры такого рода, вместе с более серьезными чисто математическими соображениями, оправдывают утверждение, что математическая теория вероятностей состоит в изучении булевских $\sigma$-алгебр множеств.

Это не значит, что любые булевские $\sigma$-алгебры множеств служат предметом теории вероятностей. Утверждения, касающиеся таких алгебр и отношений между их элементами, носят обычно лишь качественный характер, тогда как теория вероятностей подходит к изучению булевских алгебр также с количественной стороны. Теперь мы перейдем к описанию самих вероятностей.

Когда мы спрашиваем, «какова вероятность некоторого события», то мы ожидаем ответа на этот вопрос в виде числа, связанного с этим событием. Другими словами, вероятность есть числовая функция $\mu$ события $E$, т. е. функция множества на некоторой $\sigma$-алгебре. Исходя из интуитивных и практических соображений, мы требуем, чтобы число $\mu(E)$ давало представление о частоте наступления события $E$. Если при многократном повторении эксперимента, исходом которого может служить событие $E$, мы замечаем, что событие $E$ наступило в одной четверти общего числа всех испытаний (так что в остальных трех четвертях осуществилось событие $E'$), то можно попытаться отразить этот результат, положив $\mu(E)=\frac{1}{4}$. Даже эта весьма грубая «прикидка» дает некоторые наводящие указания относительно природы функции $\mu$.

Итак, пусть $\mu(E)$ равно частоте наступления события $E$, т. е. отношению числа наступлений события $E$ к общему числу повторений эксперимента; тогда $\mu(E)$ должно быть неотрицательным действительным числом, заключенным в интервале $[0, 1]$. Если события $E$ и $F$ несовместимы, скажем, в примере с костью $E=\{1\}$ и $F=\{2, 4, 6\}$, то частота наступления события $E \cup F=\{1, 2, 4, 6\}$ равна, очевидно, сумме частот наступления событий $E$ и $F$ в отдельности. Если единица выпадает в одной шестой всех испытаний, а четное число очков — в половине всех испытаний, то событие, заключающееся в выпадении либо единицы, либо четного числа очков, должно наступать с частотой $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что функция $\mu$ не может быть совершенно произвольной; необходимо подчинить ее условию аддитивности, т. е. потребовать, чтобы $\mu(E \cup F)$ при $E \cap F=0$ было равно $\mu(E)+\mu(F)$. Так как достоверное событие наступает при всех осуществлениях эксперимента, то нужно потребовать также, чтобы $\mu(X)=1$.

От окончательного определения вероятности нас отделяет сейчас одна подробность чисто математического характера, незначительная на первый взгляд, но в действительности весьма важная. Если $\mu$ — аддитивная функция на булевской $\sigma$-алгебре, а $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств, принадлежащих этой алгебре, то равенство $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ может выполняться или не выполняться. Дальнейшим ограничением, налагаемым на функцию $\mu$, является условие счетной аддитивности, без которого современная теория вероятностей не может обойтись. С точки зрения интуиции конечная и счетная аддитивность в равной мере оправданы. Во всяком случае счетная аддитивность не противоречит нашим интуитивным представлениям, а успешное развитие теории в предположении счетной аддитивности вполне оправдывает введение этого ограничения. Итак, вероятность $\mu$ представляет собой меру, определенную на некоторой булевской $\sigma$-алгебре $\mathbf{S}$ подмножеств множества $X$, причем $\mu(X)=1$.

В предыдущих главах основную роль играли понятия измеримой функции, интеграла и произведения пространств; сейчас мы выясним, какой смысл приобретают эти понятия в теории вероятностей.

Начнем с часто употребляемого понятия «случайной величины». «Случайная величина есть переменная, значения которой зависят от случая». Таким образом, мы имеем дело с переменной величиной. Известно, однако, что там, где строится математическая теория, «переменная величина», особенно такая, значения которой чем-то «определяются», всегда представляет собой функцию. Значения такой функции, как мы сказали, «зависят от случая». Иначе говоря, наша функция связана с некоторым экспериментом таким образом, что, коль скоро эксперимент произведен и зарегистрирован определенный его исход, значение функции оказывается известным. В нашей схеме эксперименту соответствует пространство с мерой $X$; следовательно, функция исхода эксперимента должна быть функцией точки $x$ пространства $X$. Случайная величина есть, таким образом, действительная функция, заданная на пространстве с мерой.

Предыдущая фраза не дает еще полного описания «случайной величины» в обычном понимании этого термина. Функция $f$, определенная на пространстве $X$, называется случайной величиной только в том случае, когда имеется возможность ответить на некоторые вопросы, относящиеся к вероятностям значений, принимаемых функцией $f$. Типичен, например, такой вопрос: «Какова вероятность того, что $f$ принимает значение, заключенное между $\alpha$ и $\beta$?», т. е., на языке теории вероятностей: «Чему равна мера множества тех точек, для которых $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$?» Для того чтобы на вопрос такого рода всегда можно было дать ответ, необходимо и достаточно, чтобы множества, о которых идет речь, принадлежали выделенной $\sigma$-алгебре $\mathbf{S}$ множеств в пространстве $X$, другими словами, чтобы случайная величина была измеримой функцией.

Рассмотрим более подробно случайную величину $f$, связанную с экспериментом бросания игральной кости и определенную равенством $f(x) = x$. Возможными значениями функции $f$ служат числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Особый интерес для теории вероятностей представляет их среднее арифметическое $\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$; оно называется средним значением или математическим ожиданием случайной величины $f$. Если кость неправильная, то вероятности $p_x$ выпадения $x$ очков, вообще говоря, не равны $\frac{1}{6}$; в этом случае математическое ожидание определяется как взвешенное среднее $1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + \ldots + 6\cdot p_6$. В случае когда число значений функции $f$ не обязательно конечно, аналогом такого взвешенного среднего служит интеграл; итак, если измеримая функция $f$ интегрируема, то ее математическим ожиданием является, по определению, интеграл этой функции.

Мы выяснили, как интерпретируются в теории вероятностей измеримые функции и интегралы; для того чтобы найти интерпретацию произведений пространств, продолжим рассмотрение примера с игральной костью. Для простоты мы снова допустим, что кость правильная и выпадение каждой из шести граней имеет вероятность, равную $\frac{1}{6}$. Рассмотрим события $E = \{2, 4, 6\}$ и $F = \{1, 2\}$. Понятие условной вероятности, которое мы сейчас введем, позволяет давать ответы на вопросы такого рода: «Какова вероятность события $E$, если известно, что наступило событие $F$?». В нашем примере: «Какова вероятность того, что $x$ — четное число, если известно, что $x$ меньше 3?» Термин «условная вероятность» отражает специфику в постановке вопроса: определяется вероятность события в предположении, что выполняются некоторые заранее заданные условия.

Рассмотрим сначала событие $G = \{2\}$ и поставим вопрос, какова условная вероятность события $E$, если известно, что событие $G$ произошло. Ответ на этот вопрос интуитивно ясен и не зависит от предположений, определяющих численные значения самих вероятностей (например, от предположения, что кость правильная). Если известно, что $x$ равно 2, то $x$ — четное число, и искомая условная вероятность должна равняться 1. Легкость ответа в этом примере обусловлена тем, что $G$ содержится в $E$. В общем случае нужно оценить долю события $F$, содержащуюся в событии $G$. Ее естественно измерять не просто вероятностью совместного осуществления событий $E$ и $F$, т. е. числом $\mu(E \cap F)$, а отношением $\mu(E \cap F)$ к вероятности события $F$. Поэтому условная вероятность $\mu_F(E)$ события $E$ при условии, что событие $F$ наступило, определяется как $\frac{\mu(E \cap F)}{\mu(F)}$. При $E = \{2, 4, 6\}$ и $G = \{2\}$ мы имеем $\mu_G(E) = 1$, т. е. ответ, полученный выше. При $E = \{2, 4, 6\}$ и $F = \{1, 2\}$ мы получаем $\mu_F(E) = \frac{1}{2}$, что интуитивно вполне разумно: если известно, что значение $x$ равно 1 или 2, то оно может быть четно (=2) или нечетно (=1), причем каждая из этих возможностей осуществляется с вероятностью, равной $\frac{1}{2}$.

Сопоставим теперь следующие два вопроса: «Какова вероятность события $E$, если известно, что наступило событие $F$?» и, просто, «Какова вероятность события $E$?» Ответы на эти вопросы даются соответственно числами $\mu_F(E)$ и $\mu(E)$. Может случиться, как это было в предыдущем примере, что эти два числа совпадают, т. е., другими словами, что наступление события $F$ не влияет на вероятность события $E$. Такое взаимоотношение событий удачно характеризуется словом «независимость»: два события $E$ и $F$ называются независимыми (иначе, статистически или стохастически независимыми), если $\mu_F(E) = \mu(E)$. Воспользовавшись указанными выше выражением условной вероятности, этому определению можно придать следующую более симметричную форму: события $E$ и $F$ независимы тогда и только тогда, когда $\mu(E \cap F) = \mu(E)\mu(F)$.

Предположим теперь, что мы имеем дело с двумя независимыми осуществлениями некоторого эксперимента, например с двумя последовательными бросаниями правильной игральной кости. Результат такого составного эксперимента должен выражаться, конечно, парой чисел $(x_1, x_2)$. Точки пространства с мерой, соответствующего этому составному эксперименту, являются, таким образом, точками декартова произведения исходного пространства с мерой самого на себя; задача заключается в том, чтобы разумным образом определить вероятности, т. е. меру, в таком произведении. Чтобы наметить путь к решению этой задачи, рассмотрим события $E =$ «$x_1 < 3$» и $F =$ «$x_2 < 4$». Для них $\mu(E) = \frac{1}{3}$ и $\mu(F) = \frac{1}{2}$; если под независимостью испытаний понимать независимость любых их результатов, в данном случае $E$ и $F$, то должно выполняться равенство $\mu(E \cap F) = \frac{1}{6}$.

Мы видим, таким образом, что если математическое описание некоторого эксперимента дается пространством с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$, то двукратное независимое повторение этого эксперимента должно описываться декартовым произведением пространства $(X, \mathbf{S}, \mu)$ самого на себя.

Так же как два повторения эксперимента приводят к двумерному декартовому произведению, так любое конечное число $n$ повторений приводит к $n$-мерному декартову произведению. Математической моделью бесконечной последовательности независимых повторений является бесконечномерное произведение. Хотя бесконечная последовательность повторений эксперимента практически неосуществима, но рассмотрение бесконечных произведений приносит большую пользу. Дело в том, что многие вероятностные утверждения относятся к результатам длинных серий испытаний, и точный смысл эти утверждения получают только в строго сформулированных предельных теоремах.

На этом мы заканчиваем наши вводные замечания и переходим к подробному изучению основных понятий и результатов теории вероятностей.

## § 45. Независимость

*Пространством вероятностей* называется пространство $(X, \mathbf{S}, \mu)$ с вполне конечной мерой, такое, что $\mu(X) = 1$; мера $\mu$ называется при этом *вероятностной мерой* или просто *вероятностью.*

Если $\mathbf{E}$ — конечный или бесконечный класс измеримых множеств в пространстве вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$, то множества класса $\mathbf{E}$ называются *независимыми*, если

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) = \prod_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

для любого конечного класса $\{E_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ множеств из $\mathbf{E}$. В случае, когда класс $\mathbf{E}$ состоит всего из двух множеств $E$ и $F$, условие независимости выражается равенством

$$\mu(E \cap F) = \mu(E)\mu(F).$$

В качестве примера независимых множеств возьмем множества $E = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad a \leqslant y \leqslant b\}$ и $F = \{(x, y)\colon c \leqslant x \leqslant d, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ в единичном квадрате с лебеговской мерой ($a, b, c$ и $d$ — произвольные числа, принадлежащие к замкнутому единичному интервалу $[0, 1]$). Заметим, что для того, чтобы множества некоторого класса $\mathbf{E}$ (даже конечного) были независимы, не достаточно попарной независимости этих множеств.

Если $\mathcal{E}$ — конечное или бесконечное множество измеримых действительных функций на пространстве вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$, то функции, принадлежащие множеству $\mathcal{E}$, называются *независимыми*, если

$$\mu(\bigcap_{i=2}^{n}\{x\colon f_i(x) \in M_i\}) = \prod_{i=1}^{n} \mu(\{x\colon f_i(x) \in M_i\})$$

для любого конечного множества $\{f_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ различных функций из $\mathcal{E}$ и для любого конечного класса борелевских множеств $\{M_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ на числовой прямой. Этому условию эквивалентно следующее: если для каждой функции $f$ из $\mathcal{E}$ произвольным образом выбрать борелевское множество $M_f$ на числовой прямой, то множества класса $\mathbf{E} = \{f^{-1}(M_f)\colon f \in \mathcal{E}\}$ независимы. Пример двух независимых функций можно получить, взяв в качестве $X$, как в предыдущем примере, единичный квадрат с лебеговской мерой и определив функции $f$ и $g$ равенствами $f(x, y) = x$ и $g(x, y) = y$.

Наши примеры независимых множеств и функций указывают на весьма тесную связь между понятиями независимости и декартова произведения. Действительно, пусть $f_1$ и $f_2$ — две независимые функции, заданные на $(X, \mathbf{S}, \mu)$; рассмотрим отображение $T$ пространства $X$ в эвклидову плоскость, определенное равенством

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

Если измеримость на плоскости понимать в смысле Бореля, то, так как $X \in \mathbf{S}$ и функции $f_1$ и $f_2$ измеримы, измеримо и отображение $T$;

сами функции $f_1$ и $f_2$ являются, конечно, измеримыми отображениями пространства $X$ в числовую прямую. Обращаясь непосредственно к определению независимости, мы видим, что независимость функций $f_1$ и $f_2$ может быть очень просто выражена равенством

$$\mu T^{-1} = \mu f_1^{-1} \times \mu f_2^{-1}.$$

(Если обозначить, как это иногда делается, отображение $T$ символом $f_1 \times f_2$, то последнее равенство примет вид дистрибутивного закона). Если функции $g_1$ и $g_2$ определены на плоскости равенствами

$$g_1(y_1, y_2) = y_1 \quad \text{и} \quad g_2(y_1, y_2) = y_2,$$

то, как легко видеть, $f_1 = g_1 T$ и $f_2 = g_2 T$. Уже из этих соображений вытекает следующий нетривиальный результат.

Теорема 1. *Если $f_1$ и $f_2$ — независимые функции, ни одна из которых не равна нулю почти всюду, то $f_1$ и $f_2$ обе интегрируемы тогда и только тогда, когда интегрируемо их произведение $f_1 f_2$. Если это условие выполняется, то*

$$\int f_1 f_2 \, d\mu = \int f_1 \, d\mu \cdot \int f_2 d\mu$$

Доказательство. В только что введенных обозначениях $|f_i|$ интегрируемы тогда и только тогда, когда интегрируемы $g_i$, $i = 1, 2$ (см. теорему 3 § 39). Если интегрируемы $|g_1|$ и $|g_2|$, то, в силу теоремы Фубини, интегрируема функция $|g_1 g_2|$. Обратно, если функция $|g_1 g_2|$ интегрируема, то интегрируемы почти все ее сечения, а так как всякое такое сечение пропорционально $|g_1|$ или $|g_2|$ и множители пропорциональности могут быть выбраны отличными от нуля, в силу того, что $f_1$ и $f_2$ не равны нулю почти всюду, то $|g_1|$ и $|g_2|$ оказываются интегрируемыми. Еще раз применяя теорему 3 § 39, мы придем к заключению, что $|g_1 g_2|$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема $|f_1 f_2|$. Первое утверждение теоремы доказано. Второе следует из теоремы Фубини. □

Применение произведений пространств в исследовании независимых функций выходит далеко за пределы описанного частного случая. Пусть, например, $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций и $Y$ — декартово произведение последовательности числовых прямых, на каждой из которых измеримость понимается в смысле Бореля. Если для любого $x$

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots),$$

то $T$ будет измеримым отображением $X$ в $Y$; для того, чтобы функции $f_n$ были независимыми, необходимо и достаточно условие: $\mu T^{-1} = \mu f_1^{-1} \times \mu f_2^{-1} \times \ldots$ Если на $Y$ задать функции $g_n$ равенствами $g_n(y_1, y_2, \ldots \ldots) = y_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то $f_n = g_n T$, $n = 1, 2, \ldots$ Подобный же результат справедлив для произвольных (конечных, счетных и несчетных) множеств функций.

Теорема 2. *Пусть $\{f_{ij}\colon i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n_i\}$ — множество независимых функций. Если $\varphi_i$ — действительная измеримая в смысле Бореля функция от $n_i$ действительных переменных, $i = 1, \ldots, k$, и если*

$$f_i(x) = \varphi_i(f_{i1}(x), \ldots, f_{in_i}(x)),$$

*то функции $f_1, \ldots, f_k$ независимы.*

Доказательство. Эта теорема легко следует из установленной выше связи между произведениями пространств и понятием независимости. Пусть $Y_{ij}$ — числовая прямая, $i=1,\ldots,k$, $j=1,\ldots,n_i$, и $Y=\times_{i,j} Y_{ij}$. Положим

$$T(x)=(f_{11}(x),\ldots,f_{1n_1}(x),\ldots,f_{k1}(x),\ldots,f_{kn_k}(x)),$$
$$g_{ij}(y_{11},\ldots,y_{1n_1},\ldots,y_{k1},\ldots,y_{kn_k})=y_{ij}$$

и

$$g_i=\varphi_i(g_{i1},\ldots,g_{in_i});$$

тогда $f_i=g_iT$, $i=1,\ldots,k$. Независимость функций $g_i$ очевидна, следовательно, функции $f_i$ также независимы. □

В заключение этого параграфа введем один термин, часто употребляющийся в теории вероятностей. Пусть $f$ — действительная измеримая функция на $(X,\mathbf{S},\mu)$, такая, что $f^2$ интегрируема. Тогда, в силу неравенства Буняковского (т. е. неравенства Гельдера при $p=2$, см. теорему 1 § 42), сама $f$ также интегрируема и

$$\left(\int f\,d\mu\right)^2\leqslant\int f^2\,d\mu.$$

Если положить $\alpha=\int f\,d\mu$, то $\int(f-\alpha)^2\,d\mu$ называется *дисперсией* функции $f$ и обозначается $\sigma^2(f)$. Так как интеграл функции, тождественно равной постоянной, по пространству вероятностей равен самой этой постоянной, то, согласно определению $\alpha$,

$$\sigma^2(f)=\int f^2\,d\mu-\left(\int f\,d\mu\right)^2.$$

Ясно, что, какова бы ни была действительная постоянная $c$,

$$\sigma^2(cf)=c^2\sigma^2(f).$$

Теорема 3. *Если $f$ и $g$ — независимые функции с конечными дисперсиями, то*

$$\sigma^2(f+g)=\sigma^2(f)+\sigma^2(g).$$

Доказательство. Имеем равенства

$$\sigma^2(f+g)=\int(f+g)^2\,d\mu-\left(\int(f+g)\,d\mu\right)^2=$$
$$=\int f^2\,d\mu+2\int fg\,d\mu+\int g^2\,d\mu-\left(\int f\,d\mu\right)^2-$$
$$-2\left(\int f\,d\mu\right)\left(\int g\,d\mu\right)-\left(\int g\,d\mu\right)^2;$$

требуемый результат следует из теоремы 1. □

**Упражнения**

1. Пусть $F$ — измеримое множество положительной меры в пространстве вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$. Если, каково бы ни было измеримое множество $E$, $\mu_F(E) = \dfrac{\mu(F \cap E)}{\mu(F)}$, то $\mu_F$ представляет собой вероятностную меру на $\mathbf{S}$, причем $\mu_F(F) = 1$; множества $E$ и $F$ независимы тогда и только тогда, когда $\mu_F(E) = \mu(E)$. Число $\mu_F(E)$ называется *условной вероятностью $E$ при условии $F$.*

2. Если $\{E_i: i = 1, \ldots, n\}$ — конечный класс измеримых множеств положительной меры, то

$$\mu(E_1 \cap \ldots \cap E_n) = \mu(E_1)\mu_{E_1}(E_2) \ldots \mu_{E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1}}(E_n).$$

Этот результат называется *теоремой умножения* для условных вероятностей.

3. Если $\{E_i: i = 1, \ldots, n\}$ — конечный класс непересекающихся измеримых множеств положительной меры, соединение которых равно $X$ (т. е. $\{E_i\}$ представляет собой разбиение $X$), то, каково бы ни было измеримое множество $F$, $\mu(F) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\mu_{E_i}(F)$; если $F$ имеет положительную меру, то

$$\mu_F(E_j) = \frac{\mu(E_j)\mu_{E_j}(F)}{\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\mu_{E_i}(F)}.$$

Это — так называемая *теорема Байеса.*

4. Разбиения $\{E_i: i = 1, \ldots, n\}$ и $\{F_j: j = 1, \ldots, m\}$ пространства $X$ называются независимыми, если $\mu(E_i \cap F_j) = \mu(E_i)\mu(F_j)$ для $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, m$. Два множества $E$ и $F$ независимы тогда и только тогда, когда независимы разбиения $\{E, E'\}$ и $\{F, F'\}$.

5. Пусть $X = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ — единичный интервал с лебеговской мерой. Для любого целого положительного $n$ зададим на $X$ функцию $f_n$, положив $f_n(x) = +1$ или $-1$, в зависимости от того, нечетно или четно целое положительное число $i$, при котором $\frac{i-1}{2^n} \leqslant x < \frac{i}{2^n}$. Функции $f_n$ называются *функциями Радемахера.* Любые две из трех функций $f_1$ и $f_2$ и $f_1 f_2$ независимы, тогда как все три не независимы.

6. Пусть $f$ и $g$ — независимые интегрируемые функции, $M$ — борелевское множество на числовой прямой. Если $E = f^{-1}(M)$, то $\int_E fg\, d\mu = \int_E f\, d\mu \cdot \int_E g\, d\mu$. [Указание. Так как $\chi_E(x) = \chi_M(f(x))$, то, в силу теоремы 2, функции $f\chi_M(f)$ и $g$ независимы.]

7. Если $f$ и $g$ — измеримые функции с конечными дисперсиями, причем $\sigma(f)\sigma(g) \neq 0$, то

$$r(f, g) = \frac{\int fg\, d\mu - \int f\, d\mu \cdot \int g\, d\mu}{\sigma(f)\sigma(g)}$$

называется *коэффициентом корреляции* между $f$ и $g$; число $\sigma(f) = \sqrt{\sigma^2(p)}$ называется *средним квадратичным отклонением* функции $f$. Говорят, что функции $f$ и $g$ некоррелированы, если $r(f, g) = 0$. Равенство $\sigma^2(f+g) = \sigma^2(f) + \sigma^2(g)$ имеет место тогда и только тогда, когда $f$ и $g$ некоррелированы.

8. Всегда ли независимы две некоррелированные функции $f$ и $g$? (Указание. Взять в качестве $X$ единичный интервал и положить $f(x) = \sin 2\pi x$, $g(x) = \cos 2\pi x$.)

9. Если $f$ и $g$ — независимые интегрируемые функции, такие, что функция $(f+g)^2$ интегрируема, то $f^2$ и $g^2$ также интегрируемы.

## § 46. Ряды независимых функций

Всюду в этом параграфе рассматривается некоторое фиксированное пространство вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$. Прежде всего мы установим так называемое *неравенство Колмогорова.*

Теорема 1. *Если $f_i$, $i=1,\ldots,n$, — независимые функции, такие, что $\int f_i\,d\mu=0$ и $\int f_i^2\,d\mu<\infty$, $i=1,\ldots,n$ и если $f(x)=\bigcup_{k=1}^{n}|\sum_{i=1}^{k}f_i(x)|$ (т. е. $f$ есть наибольшая из абсолютных величин сумм $\sum_{i=1}^{k}f_i$, $k=1,\ldots,n$), то, каково бы ни было положительное число $\varepsilon$,*

$$\mu(\{x\colon |f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2(f_k).$$

Доказательство. Положим

$$E=\{x\colon |f(x)|\geqslant\varepsilon\},\quad s_k=\sum_{i=1}^{k}f_i$$

и

$$E_k=\{x\colon |s_k(x)|\geqslant\varepsilon\}\cap\bigcap_{1\leqslant i\leqslant k}\{x\colon |s_i(x)|<\varepsilon\}.$$

Тогда

$$\int_{E_k}s_n^2\,d\mu=\int_{E_k}s_k^2\,d\mu+\mu(E_k)\sum_{k<i\leqslant n}\int f_i^2\,d\mu\geqslant\int_{E_k}s_k^2\,d\mu\geqslant\mu(E_k)\varepsilon^2.$$

Так как $E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$ и множества $E_k$ не пересекаются, то

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma^2(f_k)=\int(f_1+\ldots+f_n)^2\,d\mu\geqslant\int_E s_n^2\,d\mu=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}s_n^2\,d\mu\geqslant\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)\varepsilon^2=\mu(E)\varepsilon^2.\qquad\square$$

Теорема 2. *Если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций, таких, что $\int f_n\,d\mu=0$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^2(f_n)<\infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ сходится почти всюду.*

Доказательство. Положим

$$s_n(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x),\quad n=1,2,\ldots,$$

$$a_m(x)=\sup\{|s_{m+k}(x)-s_m(x)|\colon k=1,2,\ldots\},$$

$$a(x)=\inf\{a_m(x)\colon m=1,2,\ldots\}.$$

Тогда для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{n}f_n(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $a(x)=0$. В силу неравенства Колмогорова, для любого положительного $\varepsilon$ и для любых двух целых положительных чисел $m$ и $n$

$$\mu(\{x\colon \bigcup_{k=1}^{n}|s_{m+k}(x)-s_m(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=m+1}^{m+n}\sigma^2(f_k),$$

откуда

$$\mu(\{x\colon a_m(x) \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma^2(f_k).$$

Следовательно,

$$\mu(\{x\colon a(x) \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma^2(f_k).$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n)$ сходится, то $\mu(\{x\colon a(x) \geqslant \varepsilon\}) = 0$. Но $\varepsilon$ было выбрано произвольно, поэтому теорема доказана. □

Следующая теорема содержит результат, в известном смысле обратный предыдущему.

Теорема 3. *Если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций, таких, что $\int f_n\, d\mu = 0$ и $|f_n(x)| \leqslant c$, где $c$ — некоторая положительная постоянная, и если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на множестве положительной меры, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n) < \infty.$$

Доказательство. Обозначим $s_0(x) = 0$ и $s_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда, в силу теоремы Егорова (см. упр. 2 § 21), существует положительное число $d$, такое, что множество

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{x\colon |s_n(x)| \leqslant d\}$$

имеет положительную меру. Если мы положим

$$E_n = \bigcap_{i=1}^{n} \{x\colon |s_i(x)| \leqslant d\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то $\{E_n\}$ будет убывающей последовательностью множеств, пересечение которых равно $E$. Положим $F_n = E_{n-1} - E_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\alpha_n = \int\limits_{E_n} s_n^2\, d\mu$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; тогда

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = \int\limits_{E_{n-1}} s_n^2\, d\mu - \int\limits_{F_n} s_n^2\, d\mu - \int\limits_{E_{n-1}} s_{n-1}^2\, d\mu =$$

$$= \int\limits_{E_{n-1}} f_n^2\, d\mu + 2 \int\limits_{E_{n-1}} f_n s_{n-1}\, d\mu - \int\limits_{F_n} s_n^2\, d\mu, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Так как

$$\int\limits_{E_{n-1}} f_n^2\, d\mu = \mu(E_{n-1})\sigma^2(f_n), \qquad \int\limits_{E_{n-1}} f_n s_{n-1}\, d\mu = 0,$$

$$\mu(E_{n-1}) \geqslant \mu(E_n)$$

и

$$|s_n(x)| \leqslant c + d$$

для $x$, принадлежащих $F_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} \geqslant \mu(E)\sigma^2(f_n) - (c+d)^2\mu(F_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Суммируя эти неравенства по $n$ от 1 до $k$, получим

$$d^2 \geqslant \mu(E_k)d^2 \geqslant \alpha_k \geqslant \mu(E)\sum_{n=1}^{k}\sigma^2(f_n) - (c+d)^2. \qquad \square$$

Из теорем 2 и 3 вытекает, что если $\{f_n\}$ — равномерно ограниченная последовательность независимых функций, таких, что $\int f_n\,d\mu = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ либо почти всюду сходится, либо почти всюду расходится; таким образом, мера множества, на котором этот ряд сходится, равна либо 0, либо 1.

Теорема 4. *Если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций, таких, что почти всюду $|f_n(x)| \leqslant c$, $n = 1, 2, \ldots$, где $c$ — некоторая постоянная, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится почти всюду тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sigma^2(f_n)$.*

Доказательство. Достаточность высказанного условия получим, применив теорему 2 к последовательности функций $\{g_n\}$, определенных равенствами $g_n(x) = f_n(x) - \int f_n\,d\mu$, $n = 1, 2, \ldots$ Для доказательства необходимости условия рассмотрим декартово произведение пространства $X$ самого на себя и функции $h_n$ на этом произведении, определенные равенствами $h_n(x, y) = f_n(x) - f_n(y)$, $n = 1, 2, \ldots$ Одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится почти всюду и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(x, y)$, и так как

$$\int h_n\,d(\mu\times\mu) = 0,$$

то согласно теореме 3, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sigma^2(h_n) < \infty$. Но $\sigma^2(h_n) = 2\sigma^2(f_n)$, поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sigma^2(f_n) < \infty$. Так как $\sigma^2(g_n) = \sigma^2(f_n)$, то, в силу теоремы 2, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ сходится почти всюду, и из соотношений

$$\int f_n\,d\mu = f_n(x) - g_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu$. $\square$

Полученные здесь результаты представляют собой частные случаи следующей весьма общей теоремы, принадлежащей Колмогорову и носящей название *теоремы о трех рядах.*

Теорема 5. *Пусть* $\{f_n\}$ — *последовательность независимых функций,* $c$ — *положительная постоянная и* $E_n = \{x\colon |f_n(x)| \leqslant c\}$. *Тогда для того, чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходился почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы сходились следующие три ряда:*

$$\text{(а)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n'),$$

$$\text{(б)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f_n\, d\mu,$$

$$\text{(в)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int\limits_{E_n} f_n^2\, d\mu - \left( \int\limits_{E_n} f_n\, d\mu \right)^2 \right).$$

Доказательство. Положим

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) \\ c \end{cases} \quad \text{и} \quad h_n(x) = \begin{cases} f_n(x), \\ -c, \end{cases} \quad \text{когда} \quad \begin{cases} |f_n(x)| \leqslant c, \\ |f_n(x)| > c. \end{cases}$$

Ясно, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$$

сходятся в одних и тех же точках. Из теоремы 4 (примененной отдельно к $\{g_n\}$ и $\{h_n\}$) следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится почти всюду тогда и только тогда, когда сходятся ряды

$$\text{(г)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int\limits_{E_n} f_n\, d\mu \pm c\mu(E_n') \right),$$

$$\text{(д)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int\limits_{E_n} f_n^2\, d\mu - \left( \int\limits_{E_n} f_n\, d\mu \right)^2 + c^2 \mu(E_n)\mu(E_n') \mp 2c\mu(E_n') \int\limits_{E_n} f_n\, d\mu \right).$$

Непосредственно видно, что условие сходимости рядов «а», «б» и «в» эквивалентно сходимости всех четырех рядов «г» и «д» (при обеих комбинациях знаков $\pm$ и $\mp$). Остается только заметить, что так как члены сходящегося ряда ограничены, то ряд, полученный почленным перемножением двух сходящихся рядов, в одном из которых все члены неотрицательны, сходится. □

### Упражнения

1. Следующий результат, который неявно фигурировал в рассуждениях, касавшихся соотношений между сходимостью в среднем и сходимостью по мере, известен под названием *неравенства Чебышева*. Если $f$ — измеримая функция с конечной дисперсией, то, каково бы ни было положительное число $\varepsilon$,

$$\mu(\{x\colon |f(x) - \int f\, dx| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sigma^2(f).$$

Неравенство Колмогорова приводится к неравенству Чебышева при $n = 1$. Так как в обозначениях теоремы 1

$$\{x\colon |f(x)| \geqslant \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{x\colon |\sum_{i=1}^{k} f_i(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

то, применив неравенство Чебышева отдельно к каждой из сумм вида $\sum_{i=1}^{k} f_i(x)$, мы получим

$$\mu(\{x\colon |f(x)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\sigma^2(f_k).$$

2. Интересный результат получится, если применить теорему 4 к последовательности функций Радемахера $\{f_n\}$ (см. упр. 5 § 45). Если $\{c_n\}$ — последовательность действительных чисел, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ сходится почти всюду или расходится почти всюду, в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$. На языке теории вероятностей ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$ сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$; при этом предполагается, что знаки $+$ и $-$ в каждом члене первого ряда равновероятны и выбор того или другого знака не зависит от знаков остальных членов.

3. Тот факт, что мера множества, на котором сходится ряд независимых функций, может равняться только нулю или единице, представляет собой следствие весьма общего принципа, называемого иногда *законом* 0–1. Предположим, что пространство вероятностей $X$ есть декартово произведение последовательности $\{X_n\}$ пространств вероятности. Пусть $J_n = \{n+1, n+2, \ldots\}$, где $n$ — любое целое положительное число. Если измеримое множество $E$ представляет собой $J_n$-цилиндр при любом $n$, то $\mu(E) = 0$ или 1. [Указание. Положим $\nu(F) = \mu(E \cap F)$ для любого измеримого множества $F$. Если $F$ является $J$-цилиндром, причем $J$ есть некоторое конечное множество, то $\nu(F) = \mu(E)\mu(F)$. В этом равенстве вместо $F$ можно взять $E$, так как конечная мера на измеримых множествах в $X$ однозначно определяется своими значениями на $J$-цилиндрах (с конечными $J$).]

4. Если $\{E_n\}$ — последовательность независимых множеств, то

$$\mu(\limsup_n E_n) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

(см. упр. 6 § 9). [Указание. Примените теорему 4 к последовательности $\{\chi_n\}$ характеристических функций множеств $E_n$.] Этот результат носит название *леммы Бореля—Кантелли*.

5. Две последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ называются *эквивалентными* в смысле Хинчина, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x\colon f_n(x) \neq g_n(x)\}) < \infty.$$

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций; для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходился почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{g_n\}$, эквивалентная последовательности $\{f_n\}$, такая, что все $f_n$ имеют конечные дисперсии и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n)$ сходятся.

6. Если $\{f_n\}$ — последовательность интегрируемых функций, а $f$ — измеримая функция с конечной дисперсией, такая, что при любом целом положительном $n$ функции

$$f_1, \ldots, f_n, \quad f - (f_1 + \ldots + f_n)$$

независимы, то все $f_n$ имеют конечные дисперсии и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( f_n(x) - \int f_n \, d\mu \right)$$

сходится почти всюду. [Указание. Воспользоваться результатом упр. 9 § 45 и теоремой о трех рядах.]

## § 47. Закон больших чисел

В теории вероятностей есть ряд предельных теорем, объединенных общим названием *закона больших чисел*. В этом параграфе мы рассмотрим две типичные теоремы такого рода.

Теорема 1. *Если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций с конечными дисперсиями, такая, что $\int f_n\,d\mu = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_n \frac{1}{n^2}\sum\limits_{n=1}^{n}\sigma^2(f_i) = 0$, то последовательность средних арифметических $\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right\}$ сходится по мере к нулю.*

Доказательство. Так как функция $\sigma^2$ однородна с показателем 2 и, для независимых функций, аддитивна, то

$$\int\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\right)^2 d\mu = \sigma^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(f_i).$$

Таким образом, условия теоремы эквивалентны предположению, что последовательность средних арифметических сходится к нулю в среднем с показателем 2 (иначе говоря, сходится к нулю в пространстве $\mathcal{L}_2$), а из этого предположения вытекает сходимость по мере. □

Говорят, что две измеримые функции $f$ и $g$ на пространстве вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$ имеют *одинаковое распределение*, если $\mu(f^{-1}(M)) = \mu(g^{-1}(M))$ для всех борелевских множеств $M$ на числовой прямой. Легко проверить, что если $f$ и $g$ — интегрируемые функции с одинаковым распределением и если $F = f^{-1}(M)$ и $G = g^{-1}(M)$, где $M$ — какое-нибудь борелевское множество, то $\int_F f\,d\mu = \int_G g\,d\mu$. К последовательности независимых функций $\{f_n\}$, таких, что $\int f_n\,d\mu = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и любые $f_m$ и $f_n$, $m = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, имеют одинаковое распределение, непосредственно применима теорема 1, так как в этом случае $\sigma^2(f_n) = \sigma^2(f_1)$ при любом $n$, и условие, касающееся дисперсий, выполняется автоматически.

Следующие два предложения из элементарного анализа понадобятся нам для вывода усиленной формы закона больших чисел.

Теорема 2. *Если $\{y_n\}$ — последовательность действительных чисел, имеющая конечный предел $y$, то $\lim\limits_n \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = y$.*

Доказательство. Для всякого положительного числа $\varepsilon$ существует целое положительное число $n_0$, такое, что $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$, когда $n > n_0$. Выберем целое положительное число $n_1$, большее $n$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_0}|y_i - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $n > n_1$, то

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - y\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_0}(y_i - y)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n}(y_i - y)\right| < \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_0}|y_i - y| + \frac{n-n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 3. *Если $\{y_n\}$ — последовательность действительных чисел, такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{n}$ сходится, то* $\lim\limits_n \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 0$.

Доказательство. Положим

$$s_0 = 0, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{i}, \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Так как $y_i = i(s_i - s_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots$, и

$$t_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} is_i - \sum_{i=1}^{n+1} is_{i-1} = -\sum_{n=1}^{n} s_i + (n+1)s_{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

то

$$\frac{t_{n+1}}{n+1} = -\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i + s_{n+1}.$$

Последовательность $\{s_n\}$ сходится к конечному пределу и, в силу теоремы 2, к тому же пределу сходится последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} s_i\right\}$. Следовательно,

$$\lim_n \frac{t_{n+1}}{n+1} = 0. \qquad \square$$

Теорема 4. *Если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций с конечными дисперсиями, такая, что $\int f_n\, d\mu = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^2(f_n)}{n^2} < \infty$, то последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right\}$ сходится к нулю почти всюду.*

Как условия, так и утверждение теоремы 4 сильнее, чем в теореме 1. Теорема 4 представляет собой одну из форм *усиленного закона больших чисел.*

Доказательство. Положим $g_n(x) = \frac{1}{n}f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, и применим к последовательности $\{g_n\}$ теорему 2 § 46. Так как $\int g_n\, d\mu = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^2(g_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^2(f_n)}{n^2} < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}f_n(x)$$

сходится почти всюду. Требуемый результат вытекает из теоремы 3. $\square$

## Упражнения

1. Две измеримые функции имеют одинаковое распределение тогда и только тогда, когда их функции распределения совпадают (см. упр. 11 § 18).

2. Если $\{\sigma_i^2\}$ — последовательность неотрицательных действительных чисел, а $m$ и $n$ — целые положительные числа, причем $m < n$, то

$$\frac{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}{n^2} \leqslant \frac{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_m^2}{n^2} + \frac{\sigma_{m+1}^2}{(m+1)^2} + \ldots + \frac{\sigma_n^2}{n^2}.$$

Из этого неравенства следует, что условия теоремы 4 не слабее условий теоремы 1. То, что они в действительности сильнее, можно показать, построив последовательность независимых функций с дисперсиями $\sigma^2(f_n) = \dfrac{n+1}{\log(n+1)}$.

3. Условие теоремы 4, касающееся дисперсий, ослабить нельзя. В самом деле, какова бы ни была последовательность неотрицательных чисел $\{\sigma_n^2\}$, такая, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sigma_n^2}{n^2} = \infty$, существует последовательность независимых функций $\{f_n\}$, такая, что $\int f_n \, d\mu = 0$, $\sigma^2(f_n) = \sigma_n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\left\{\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right\}$ не сходится к нулю почти всюду. [Указание. Функции $f_n$ следует построить так, чтобы при $\sigma_n^2 \leqslant n^2$ выполнялись условия

$$\mu(\{x\colon f_n(x) = n\}) = \mu(\{x\colon f_n(x) = -n\}) = \frac{\sigma_n^2}{2n^2},$$

$$\mu(\{x\colon f_n(x) = 0\}) = 1 - \frac{\sigma_n^2}{n^2},$$

а при $\sigma_n^2 > n^2$ — условия

$$\mu(\{x\colon f_n(x) = \sigma_n\}) = \mu(\{x\colon f_n(x) = -\sigma_n\}) = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что если $\lim\limits_n \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 0$, то $\lim\limits_n \dfrac{1}{n} y_n = 0$, и применим к множествам $\{x\colon |f_n(x)| \geqslant n\}$ лемму Бореля—Кантелли.]

4. Если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций, удовлетворяющая условиям теоремы 4, то существует эквивалентная ей последовательность $\{g_n\}$ независимых функций, такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(g_n)}{n^2} = \infty.$$

Другими словами, предложение, обратное усиленному закону больших чисел, не справедливо.

5. Справедливо следующее, несколько ослабленное, обращение теоремы 4: если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций, такая, что $\int f_n \, d\mu = 0$ и почти всюду $\left|\dfrac{1}{n} f_n(x)\right| \leqslant c$, $n = 1, 2, \ldots$, где $c$ — некоторая постоянная, и если последовательность $\left\{\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\right\}$ сходится к нулю почти всюду, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(f_n)}{n^{2+\varepsilon}} < \infty,$$

каково бы ни было положительное число $\varepsilon$. [Указание. Если последовательность действительных чисел $\{y_n\}$ такова, что последовательность $\left\{\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right\}$ сходится к нулю или хотя бы ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{y_n}{n^{1+\varepsilon}}$ сходится при любом положительном $\varepsilon$.]

6. В тереме 4 условие $\int f_n \, d\mu = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, можно заменить условием $\lim\limits_n \dfrac{1}{n} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu = 0$.

7. Следующую теорему также называют иногда усиленным законом больших чисел: если $\{f_n\}$ — последовательность независимых интегрируемых функций с одинаковыми распределениями, такая, что $\int f_n\,d\mu = 0$, то $\lim\limits_n \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = 0$ почти всюду. К доказательству этой теоремы приводит следующая цепь предложений:

а) Если $E_n = \{x\colon |f_1(x)| \leqslant n\}$, то $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2}\int\limits_{E_n} f_1^2\,d\mu < \infty$. [Указание. Положим $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\chi_n f_1^2$, где $\chi_n$ — характеристическая функция множества $E_n$. Если $k-1 < |f_1(x)| \leqslant k$, то $\chi_n(x) = 0$ для всех $n < k$; отсюда вытекает, что $|g(x)| < |f_1(x)|$ и, следовательно, $g$ интегрируема.]

б) Если $F_n = \{x\colon |f_n(x)| \leqslant n\}$ и $g_n = \chi_{F_n} f_n$, то последовательность независимых функций $\{g_n\}$ эквивалентна $\{f_n\}$.

в) $\lim\limits_n \sum\limits_{i=1}^{n} \int g_i\,d\mu = 0$. [Указание. $\int g_i\,d\mu = \int\limits_{F_i} f_i\,d\mu = \int\limits_{E_i} f_1\,d\mu$ и $\{E_i\}$ представляет собой возрастающую последовательность измерительных множеств, соединение которых равно $X$ (см. терему 2).]

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(g_n)}{n^2} < \infty$. [Указание. Заметив, что $\int g_n\,d\mu = \int\limits_{F_n} f_n^2\,d\mu = \int\limits_{E_n} f_1^2\,d\mu$, и применив «а», установим сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\int g_n^2\,d\mu$; в силу неравенств

$$\left(\int g_n\,d\mu\right)^2 \leqslant \left(\int |g_n|\,d\mu\right)^2,$$

будет сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\int g_n\,d\mu\right)^2$.]

8. Теорема, приведенная в упр. 7, допускает следующее обращение: если $\{f_n\}$ — последовательность независимых функций, имеющих одинаковое распределение, и $\lim\limits_n \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = 0$ почти всюду, то $f_n$ интегрируемы. [Указание. Условие $\lim\limits_n \frac{1}{n} f_n = 0$ почти всюду и лемма Бореля—Кантелли обеспечивают сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\{x\colon |f_n(x)| > n\})$. Далее следует заметить, что $\mu(\{x\colon |f_n(x)| > n\}) = \mu(\{x\colon |f_1(x)| > n\})$, и применить результат упр. 4 § 27].

9. Применив усиленный закон больших чисел к последовательности функций Радемахера, мы придем к знаменитой теореме Бореля о *нормальных числах*: почти все числа единичного интервала разлагаются в двоичные дроби, содержащие одинаковое число нулей и единиц. Подобный же вывод справедлив для разложений в бесконечные дроби при любом основании $r$, отличном от $2 (r \geqslant 3)$, и мы получаем, таким образом, теорему об *абсолютно нормальных числах*: почти все числа нормальны относительно всех оснований $r$ одновременно.

## § 48. Условные вероятности и условные математические ожидания

Пусть $E$ и $F$ измеримые множества в пространстве вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$; если $\mu(F) \neq 0$, то условная вероятность $E$ при условии $F$ была нами определена равенством

$$\mu_F(E) = \frac{\mu(E \cap F)}{\mu(F)}$$

(см. § 44 и упр. 1 § 45). Теперь нас интересует вопрос, как $\mu_F(E)$ зависит от $F$. Предположим, что множество $F$ таково, что и $\mu(F)$ и $\mu(F')$

не равны нулю; рассмотрим измеримое пространство $Y$, состоящее только из двух точек $y_1$ и $y_2$ (при этом подразумевается, что все его подмножества измеримы), и отображение $T$ пространства $X$ в $Y$, такое, что $T(x) = y_1$ или $y_2$, в зависимости от того, принадлежит $x$ множеству $F$ или нет. Если для любого множества $A$ в $Y$ положить

$$\nu_E(A) = \mu(E \cap T^{-1}(A)) \quad \text{и} \quad \nu(A) = \nu_X(A) = \mu(T^{-1}(A)),$$

то, очевидно,

$$\mu_F(E) = \frac{\nu_E(\{y_1\})}{\nu(\{y_1\})} \quad \text{и} \quad \mu_{F'}(E) = \frac{\nu_E(\{y_2\})}{\nu(\{y_2\})}.$$

Таким образом, условную вероятность можно рассматривать как измеримую функцию на $Y$, представляющую собой, грубо говоря, отношение мер $\nu_E$ и $\nu$.

Построение, осуществленное в предыдущем абзаце, можно несколько обобщить. Пусть $\{F_1, \ldots, F_n\}$ — конечный класс непересекающихся измеримых множеств положительной меры, причем $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i = X$; рассмотрим измеримое пространство $Y$, состоящее из $n$ точек $y_1, \ldots, y_n$. Если $T(x) = y_i$, когда $x \in F_i$, $i = 1, \ldots, n$, то $T$ представляет собой измеримое отображение пространства $X$ в $Y$ и снова условные вероятности могут быть представлены в виде отношений мер в пространстве $Y$. Мы приходим к следующему общему определению. Пусть $T$ — любое измеримое отображение пространства вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$ в какое-нибудь измеримое пространство $(Y, \mathbf{T})$; положим $\nu_E(F) = \mu(E \cap T^{-1}(F))$, где $E$ — измеримое множество в $X$, а $F$ — измеримое множество в $Y$. Ясно, что $\nu_E$ и $\mu T^{-1}$ $(= \nu_X)$ представляют собой меры на $\mathbf{T}$, причем $\nu_E \ll \mu T^{-1}$. Согласно теореме Радона—Никодима, существует интегрируемая функция $p_E$ на $Y$, такая, что

$$\mu(E \cap T^{-1}(F)) = \int\limits_E p_E(y)\, d\mu T^{-1}(y)$$

для любого $F$ из $\mathbf{T}$; эта функция $p_E$ определяется однозначно по модулю $\mu T^{-1}$. Назовем $p_E(y)$ условной вероятностью $E$ при условии $y$ (или условной вероятностью $E$ при условии $T(x) = y$). Иногда мы будем называть эту функцию «условной вероятностью $E$ при заданном значении $T(x)$» и писать $p_E(T(x))$. Кроме того, мы условимся вместо $p_E(y)$ писать $p(E, y)$; тогда же, когда нас будет интересовать $p$ как функция аргумента $E$, то мы будем ее обозначать $p^y(E) = p(E, y)$.

Если множество $F$ таково, что $\mu(T^{-1}(F)) \neq 0$, то, разделив обе части равенства, определяющего $p$, на $\mu(T^{-1}(F))$, мы получим соотношение

$$\mu_{T^{-1}(F)}(E) = \frac{\mu\big(E \cap T^{-1}(F)\big)}{\mu\big(T^{-1}(F)\big)} = \frac{1}{\mu\big(T^{-1}(F)\big)} \int\limits_F p(E, y)\, d\mu T^{-1}(y).$$

Так как слева стоит условная вероятность $E$ при условии $T^{-1}(F)$, то представляется правдоподобным, что, когда $F$ «стягивается к точке $y$», левая часть равенства должна стремится к условной вероятности $E$ при заданном $y$, а правая — к значению подынтегральной функции $p(E, y)$. Теорема Радона—Никодима позволяет строго оформить эти пока еще довольно шаткие рассуждения.

Теорема 1. *Для любого фиксированного измеримого множества $E$ в $X$*

$$0 \leqslant p(E, y) \leqslant 1 \quad [\mu T^{-1}].$$

*Для любой фиксированной последовательности $\{E_n\}$ непересекающихся измеримых множеств в $X$*

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(E_n, y) \quad [\mu T^{-1}].$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из неравенств $0 \leqslant \mu(E \cap T^{-1}(F)) \leqslant 1$, справедливых при любом измеримом множестве $F$ в $Y$. Для того чтобы доказать второе утверждение, заметим, что

$$\int_F p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, y\right) d\mu T^{-1}(y) = \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap T^{-1}(F)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap T^{-1}(F)) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_F p(E_n, y)\, d\mu T^{-1}(y) = \int_F \left(\sum_{n=1}^{\infty} p(E_n, y)\right) d\mu T^{-1}(y),$$

и воспользуемся свойством единственности производной Радона—Никодима. □

Теорема 1 утверждает, что функция $p^y$ в некоторых отношениях напоминает меру. Сходство это проявляется далее в следующих свойствах $p^y$: $p(X, y) = 1[\mu T^{-1}]$; если $E_1 \subset E_2$, то $p(E_1, y) \leqslant p(E_2, y)[\mu T^{-1}]$; если $\{E_n\}$ — убывающая последовательность измеримых множеств в $X$, то

$$p\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, y\right) = \lim_n p(E_n, y) \ [\mu T^{-1}].$$

Важно, однако, помнить, что то исключительное множество меры нуль, на котором соответствующее соотношение нарушается, зависит от выбора множеств $E_i$, поэтому, вообще говоря, нельзя утверждать, что функция $p^y$ почти всех $y$ представляет собой меру.

Уравнение, определяющее $p(E, y)$, может быть записано в виде

$$\int_{T^{-1}(F)} \chi_E(x)\, d\mu(x) = \int_F p(E, y)\, d\mu T^{-1}(y).$$

Возьмем теперь вместо $\chi_E$ произвольную интегрируемую на $X$ функцию $f$; тогда функция $\nu$, определяемая равенством

$$\nu(F) = \int_{T^{-1}(F)} f(x)\, d\mu(x)$$

для любого измеримого множества $F$ в $Y$, представляет собой обобщенную меру на $\mathbf{T}$. Так как, очевидно, $\nu \ll \mu T^{-1}$, то, согласно теореме Радона—Никодима, существует такая интегрируемая функция $e_f$ на $Y$, что

$$\int\limits_{T^{-1}(F)} f(x)\,d\mu(x) = \int\limits_{F} e_f(y)\,d\mu T^{-1}(y),$$

каково бы ни было $F$ из $\mathbf{T}$; по модулю $\mu T^{-1}$ функция $e_f$ определяется таким образом однозначно. Назовем $e_f(y)$ *условным математическим ожиданием $f$ при условии $y$*; вместо $e_f(y)$ мы будем также писать $e(f, y)$.

Так как соотношение между $p$ и $e$ напоминает соотношение между мерой и неопределенным интегралом, то можно ожидать, что $p$ и $e$ связаны равенством вроде

$$e(f, y) = \int f(x)\,dp^y(x).$$

Но $p^y$ не является, вообще говоря, мерой, поэтому написанный интеграл может не иметь смысла; на $e$ сказываются, таким образом, плохие свойства функции $p$.

Теорема 2. *Если $f$ — интегрируемая функция на $Y$, то $fT$ представляет собой интегрируемую функцию на $X$ и при этом $e(fT, x) = f(y)$.*

Доказательство. Из теоремы 3 § 39 следует, что $fT$ интегрируема и

$$\int\limits_{T^{-1}(F)} f(T(x))\,d\mu(x) = \int\limits_{F} f(y)\,d\mu T^{-1}(y)$$

для любого $F$ из $\mathbf{T}$. □

### Упражнения

1. Рассмотрим декартово произведение $(X \times Y, \mathbf{S} \times \mathbf{T}, \mu \times \nu)$ пространств вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$. Если $T(x, y) = x$, то $T$ представляет собой измеримое отображение пространства $X \times Y$ на $X$. Для любого измеримого множества $E$ в $X \times Y$ выполняется равенство $p(E, x) = \nu(\mathbf{E}_x)[\mu]$, и, следовательно, в этом случае $p_E$ можно определить так, что $p^x$ оказывается мерой при любом $x$.

2. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ — пространства вероятностей и $\lambda$ — мера на $\mathbf{S} \times \mathbf{T}$, такая, что $\lambda \ll \mu \times \nu$; пусть $\lambda(E) = \int_E f\,d(\mu \times \nu)$. Если $T(x, y) = x$, то для любого измеримого множества $E$ в $X \times Y$

$$p(E, x) = \int \chi_E(x, y) f(x, y)\,d\nu(y)\ [\mu].$$

3. Если $T$ — измеримое отображение пространства вероятностей $(X, \mathbf{S}, \mu)$ в измеримое пространство $(Y, \mathbf{T})$, то $p(T^{-1}(F), y) = \chi_F(y)$ для любого измеримого множества $F$ в $Y$.

4. Возможны случаи, когда условные вероятности $p(E, y)$ нельзя задать так, чтобы $p^y$ была мерой для почти всех $y$. Рассмотрим следующий пример. Пусть $Y$ — замкнутый единичный интервал, $\mathbf{T}$ — класс всех борелевских множеств в $Y$, $\nu$ — лебеговская мера на $\mathbf{T}$. Положим $X = Y$ и возьмем $\sigma$-кольцо $\mathbf{S}$, порожденное классом $\mathbf{T}$ и каким-либо множеством $M$, обладающим тем свойством, что и само $M$ и его дополнение $M'$ являются массивными множествами в $Y$. Зададим на $\mathbf{S}$ вероятностную меру $\mu$, положив

$$\mu((A \cap M) \cup (B \cap M')) = \nu(A),$$

где $A$ и $B$ принадлежат $\mathbf{T}$, и рассмотрим отображение $T$ пространства $X$ на $Y$, определенное равенством $T(x) = x$. Допустим, что в $\mathbf{T}$ существует такое множество $C_0$ меры нуль, что $p^y$ представляет собой меру на $\mathbf{S}$, когда $y \notin C_0$.

а) Если $D_0=\{x\colon p(M,y)\neq 1\}$, то $\nu(D_0)=0$.

б) Если $E_0$ — множество тех $y$, для которых нарушается тождество $p(T^{-1}(F),y)=\chi_F(y)$ (относительно $F$), то $\nu(E_0)=0$. [Указание. Пусть $\mathbf{R}$ — счетное кольцо, такое, что $\mathbf{S}(\mathbf{R})=\mathbf{T}$. Если для любого $F$ из $\mathbf{R}$ положить

$$E_0(F)=\{y\colon p(T^{-1}(F),y)\neq\chi_F(y)\},$$

то $\nu(E_0(F))=0$. Воспользуемся тем, что две вероятностные меры, совпадающие на $\mathbf{R}$, тождественны на всем $\mathbf{T}$.]

в) Если $y\notin C_0\cup D_0\cup E_0$, то $y\in M$. [Указание. Так как $p(M,y)=1$ и $p(T^{-1}(\{y\}),y)=1$, а $p^y$ есть мера, то

$$p(M\cap T^{-1}(\{y\}),y)=1.]$$

Из «в» вытекает, что в $M$ содержится борелевское множество $C_0'\cap D_0'\cap E_0'$ меры 1, а это противоречит предположению, что $M'$ — густое подмножество $Y$.

5. Если $X$ — числовая прямая, $\mu$ — вероятностная мера на всех борелевских множествах в $X$, $T$ — измеримое отображение $X$ в какое-нибудь измеримое пространство $(Y,\mathbf{T})$, то условные вероятности $p(E,y)$ можно задать так, чтобы $p^y$ была мерой для почти всех $y$. [Указание. Положим $q(x,y)=p((-\infty,x),y)$. В $Y$ существует такое измеримое множество $C_0$, что $\mu T^{-1}(C_0)=0$ и, когда $y\notin C_0$, $q^y$ представляет собой монотонную функцию на множестве всех рациональных чисел и $\lim\limits_n q^y\left(x-\frac{1}{n}\right)=q^y(x)$ для любого рационального числа $x$. Пусть $\overline{q}^y$ — монотонна и непрерывная слева функция на $X$, совпадающая с $q^y$ при рациональных $x$, а $\overline{p}^y$ — мера на $\mathbf{S}$, определенная равенством $\overline{p}^y((-\infty,x))=\overline{q}^y(x)$; тогда $\overline{p}(E,y)=\overline{p}^y(E)$ обладает требуемым свойством.]

6. Если $T$ — измеримое отображение пространства вероятностей $(X,\mathbf{S},\mu)$ в измеримое пространство $(Y,\mathbf{T})$ и условные вероятности $p(E,y)$ можно задать так, чтобы функция $p^y$ была мерой для почти всех $y$, то

$$e(f,y)=\int f(x)\,dp^y(x)\ [\mu T^{-1}],$$

какова бы ни была интегрируемая функция $f$ на $X$. [Указание. Это равенство справедливо, если $f$ — характеристическая функция измеримого множества.]

7. Пусть $T$ — измеримое отображение пространства вероятностей $(X,\mathbf{S},\mu)$ в измеримое пространство $(Y,\mathbf{T})$. Если $f$ и $g$ — функции, интегрируемые относительно $\mu$ и $\mu T^{-1}$ соответственно, и если функция $h$, определенная равенством $h(x)=f(x)g(T(x))$, интегрируема на $X$, то $e(h,y)=e(f,y)g(y)\ [\mu T^{-1}]$.

## § 49. Меры в произведениях пространств

Существует ли последовательность независимых случайных величин, обладающих наперед заданными распределениями? Говоря точнее, если $\{\mu_n\}$ — последовательность вероятностных мер на борелевских множествах числовой прямой, то всегда ли существует такое пространство вероятностей $(X,\mathbf{S},\mu)$ и такая последовательность независимых функций $\{f_n\}$ на $X$, что $\mu(f_n^{-1}(E))=\mu_n(E)$ для любого борелевского множества $E$ и для любого целого положительного $n$? В более общей постановке вопрос может быть сформулирован так: если $\{(X_n,\mathbf{S}_n,\mu_n)\}$ — последовательность пространств вероятностей, то всегда ли существует такое пространство вероятностей $(X,\mathbf{S},\mu)$ и, для каждого целого положительного числа $n$, такое измеримое отображение $T_n$ пространства $X$ в $X_1\times\ldots\times X_n$, что $\mu T_n^{-1}=\mu_1\times\ldots\times\mu_n$? Положительный ответ на эти вопросы дает теорема 2 § 38.

Понятие независимости одно из важнейших в теории вероятностей, однако теория вероятностей не может ограничиться рассмотрением одних только независимых случайных величин. Основная цель этого параграфа состоит в том, чтобы сформулировать и доказать для зависимых случайных величин теорему, соответствующую теореме 2 § 38, т. е. установить существование последовательности случайных величин с наперед заданными совместными распределениями. Однако, в отличие от теоремы 2 § 38, теорема этого параграфа применима только к равномерно ограниченным действительным функциям; другими словами, «множители» того произведения пространств, которое мы собираемся рассматривать, будут представлять собой единичные интервалы. Сам результат и его доказательство распространяются на более общие случаи, но и эти обобщения существенно опираются на те или иные топологические понятия. Обойтись же без всяких условий топологического характера, по-видимому, невозможно; известно, что аналог следующей ниже теоремы 1, сформулированный только в терминах теории меры, неверен.

Предположим, что $X_n$ при любом целом положительном $n$ представляет собой замкнутый единичный интервал, а $\mathbf{S}_n$ — класс всех борелевских множеств в $X_n$; положим $(X, \mathbf{S}) = \times_{n=1}^{\infty} (X_n, \mathbf{S}_n)$. Пусть, далее, $F_n$ есть $\sigma$-кольцо всех измеримых $\{1, \ldots, n\}$-цилиндров в $X$ и $\mathbf{F}\left(= \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)$ — класс всех измеримых конечномерных множеств в $X$ (см. § 38).

Теорема 1. *Если $\mu$ — функция на $\mathbf{F}$, являющаяся при любом целом положительном $n$ вероятностной мерой на $\mathbf{F}_n$, то существует единственное продолжение функции $\mu$, представляющее собой вероятностную меру на $\mathbf{S}$.*

Доказательство. Определим измеримое отображение $T_n$ пространства $X$ на измеримое пространство $Y_n = \times_{i=1}^{n} X_i$ равенством

$$T_n(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) = (x_1, \ldots, x_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и положим для измеримых множеств $A$ в $Y_n$

$$\nu_n(A) = \mu(T_n^{-1}(A)).$$

Тогда, если $\{E_i\}$ — убывающая последовательность множеств из $\mathbf{F}$, таких, что $0 < \varepsilon \leqslant \mu(E_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, то для любого фиксированного $i$ найдется такое борелевское множество $A_i$ в $Y_n$ и такое целое положительное число $n$, что $E_i = T_n^{-1}(A_i)$. Пусть $B_i$ — замкнутое подмножество множества $A_i$, такое, что $\nu_n(B_i - A_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Если $F_i = T_n^{-1}(B_i)$, то $F_i$ — замкнутое множество в $X$ (относительно топологии пространства $X$ как тихоновского произведения интервалов) и $\mu(E_i - F_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$.

Положим $G_k = \bigcap_{i=1}^{k} F_i$; тогда $\{G_k\}$ — убывающая последовательность компактных множеств в $X$. Так как

$$\mu(E_k - G_k) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k}(E_k - F_i)\Big) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k}(E_i - F_i)\Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

то
$$\mu(G_k) = \mu(E_k) - \mu(E_k - G_k) \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2}$$
и, следовательно, $G_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Убывающая последовательность компактных множеств имеет непустое пересечение; таким образом доказано, что функция $\mu$ непрерывна сверху в 0 и, следовательно, счетно-аддитивна. Окончательный результат следует из теоремы 1 § 13. □

Сохраняя введенные выше обозначения, установим теперь одно интересное свойство произведения единичных интервалов.

Т е о р е м а 2. *Для любого измеримого множества $E$ в $X$*
$$\lim_n p(E, T_n(x)) = \chi_E(x)\ [\mu];$$
*другими словами, для всех $x$, за исключением, быть может, некоторого множества меры нуль, условные вероятности $E$ при заданных первых $n$ координатах точки $x$ с возрастанием $n$ стремятся к* 0 *или* 1, *в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит $x$ множеству $E$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вместо сходимости почти всюду мы докажем почти равномерную сходимость (в силу теорем 1 и 2 § 21, обе сходимости эквивалентны). Пусть $\varepsilon$ и $\delta$ — положительные числа, причем $\delta < 1$. Согласно теореме 4 § 13, существует измеримый $\{1, \ldots, n_0\}$-цилиндр $E_0$, такой, что $\mu(E \Delta E_0) < \frac{\varepsilon\delta}{2}$. Положим $B = E \Delta E_0$ и заметим, что
$$\chi_E(x) = \chi_{E_0}(x),$$
когда $x \notin B$. Пусть $C_n = \{x\colon p(B, T_n(x)) \geqslant \delta\}$, $D_n = C_n - \bigcup_{1 \leqslant i < n} C_i$, $n = 1, 2, \ldots$, и $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, тогда $C_n$ и $D_n$ при любом $n$ являются измеримыми $\{1, \ldots, n\}$-цилиндрами. Поэтому
$$\mu(B \cap D_0) = \int_{D_n} p(B, T_n(x))\, d\mu(x) \geqslant \delta\mu(D_n)$$
и, следовательно,
$$\frac{\varepsilon\delta}{2} > \mu(B) \geqslant \mu(B \cap C) = \mu\Big(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap D_n) \geqslant$$
$$\geqslant \delta \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) = \delta\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\Big) = \delta\mu(C).$$
Если положить $A = B \cup C$, то $\mu(A) \leqslant \frac{\varepsilon\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Так как
$$|p(E, T_n(x)) - p(E_0, T_n(x))| \leqslant p(E \Delta E_0, T_n(x))\ [\mu], \quad n = 1, 2, \ldots,$$
то можно предположить, что эти неравенства выполняются для всех $x$ из $X$. При $n \geqslant n_0$, в силу теорем 1 § 38 и 2 § 48, мы будем иметь неравенство
$$|p(E, T_n(x)) - \chi_{E_0}(x)| \leqslant p(B, T_n(x)).$$
Если, кроме того, $x \notin A$, то $\chi_{E_0}(x) = \chi_E(x)$ и $p(B, T_n(x)) < \delta$, следовательно, $|p(E, T_n(x)) - \chi_E(x)| < \delta$. □

**Упражнения**

1. Пусть $\{(X_n, \mathbf{S}_n, \mu_n)\}$ — последовательность пространств вероятностей, $(X, \mathbf{S}) = \mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} (X_n, \mathbf{S}_n)$ и $\mu$ — функция на $\mathbf{F}$, такая, что $\mu$ является вероятностной мерой на $\mathbf{F}_n$ при любом $n$. Если на всех $\mathbf{F}_n$ функция $\mu$ абсолютно непрерывна относительно произведения мер $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i$, то для $\mu$ существует единственное продолжение, являющееся вероятностной мерой на $\mathbf{S}$. [Указание. См. доказательство теоремы 2, § 38.] И результат, и метод доказательства распространяются на все случаи, когда можно задать условные вероятности $p(E, T_n(x))$ так, чтобы для почти всех фиксированных $x$ они были вероятностными мерами на каждом $\mathbf{F}_k$.

2. Утверждение и доказательство теоремы 1 распространяются на случай, когда $X_n$ — любые компактные метрические пространства. Дополнением локально компактного пространства до компактного можно без труда доказать теорему 1 для того случая, когда каждое $X_n$ является числовой прямой. Верна ли теорема 1 тогда, когда все $X_n$ — произвольные компактные пространства?

3. Сохраняя обозначения упр. 1, приведем пример, когда $X_n$ не являются интервалами и теорема 1 неверна. Пусть $Y$ — единичный интервал, $\mathbf{T}$ — класс всех борелевских множеств в $Y$, $\nu$ — лебеговская мера на $\mathbf{T}$. Пусть, далее, $\{X_n\}$ — такая убывающая последовательность массивных подмножеств в $Y$, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n = 0$. Положим $\mathbf{S}_n = \mathbf{T} \cap X_n$; если $E \in \mathbf{S}_n$, т. е. $E = F \cap X_n$, где $F \in \mathbf{T}$, то положим $\mu_n(E) = \nu(F)$. Образуем произведение пространств $(X, \mathbf{S}) = \mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} (X_n, \mathbf{S}_n)$ и рассмотрим измеримые отображения $S_n$ пространств $X_n$ в $X_1 \times \ldots \times X_n$, определяемые для произвольного $n$ равенствами $S_n(x_n) = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_i = x_n$, $i = 1, \ldots, n$.

а) Для любого измеримого $\{1, \ldots, n\}$-цилиндра

$$E = A \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \ldots, \quad A \in \mathbf{S}_1 \times \ldots \times \mathbf{S}_n,$$

в $X$ положим $\mu(E) = \mu_n(S_n^{-1}(A))$. Тем самым мы однозначно определим на $\mathbf{F}$ функцию $\mu$, которая при любом $n$ будет вероятностной мерой на $\mathbf{F}_n$.

б) Если $E_i$ — множество всех тех точек $(x_1, x_2, \ldots)$ из $X$, первые $i$ координат которых совпадают, $i = 1, 2, \ldots$, то $E_i \in \mathbf{F}_i$. [Указание. Если

$$D_i = \{(y_1, \ldots, y_i)\colon\ y_1 = \ldots = y_i\},$$

то $D_i$ представляет собой измеримое подмножество $i$-мерного декартова произведения $Y$ самого на себя; при этом

$$E_i = (D_i \cap (X_1 \times \ldots \times X_i)) \times X_{i+1} \times X_{i+2} \times \ldots].$$

в) Функция множества $\mu$ на $\mathbf{F}$ не непрерывна сверху в 0. [Указание. Множества $E_i$, определенные в «б», таковы, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i = 0$, но $\mu(E_i) = 1$.]

4. Закон 0–1 (см. упр. 3 § 46) представляет собой частный случай теоремы 2. В самом деле, если $E$ является $J_n$-цилиндром и $F$ — измеримое множество в $Y_n$, то $T_n^{-1}(E)$ является $\{1, \ldots, n\}$-цилиндром и

$$\mu(E \cap T_n^{-1}(F)) = \mu(E)\mu T_n^{-1}(F) = \int\limits_F \mu(E)\, d\mu_n,$$

поэтому $p(E, T_n(x))$ почти всюду $[\mu]$ равна постоянной $(= \mu(E))$. Из теоремы 2 вытекает, что $\chi_E(x) = \mu(E)$ $[\mu]$ и, следовательно, $\mu(E)$ равно 0 или 1.

# ГЛАВА 10

# ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

## § 50. Некоторые топологические теоремы

В этом параграфе мы выведем несколько топологических результатов, отсутствующих обычно, в силу их весьма специального характера, в руководствах по топологии.

Всюду в этой главе, если не оговорено противное, предполагается, что $X$ — локально компактное хаусдорфово пространство. $\mathcal{F}$ будет обозначать множество всех действительных непрерывных функций $f$ на $X$, удовлетворяющих при всех $x$ неравенствам $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Теорема 1. *Если $C$ — компактное множество, а $U$ и $V$ — открытые множества, соединение которых содержит $C$, то существуют такие компактные множества $D$ и $E$, что $D \subset U$, $E \subset V$ и $C = D \cup E$.*

Доказательство. Так как $C - U$ и $C - V$ представляют собой непересекающиеся компактные множества, то существуют такие непересекающиеся открытые множества $\widetilde{U}$ и $\widetilde{V}$, что $C - U \subset \widetilde{U}$ и $C - V \subset \widetilde{V}$; положим $D = C - \widetilde{U}$ и $E = C - \widetilde{V}$. Легко видеть, что $D$ и $E$ компактны и $D \subset U$, $E \subset V$. Так как $\widetilde{U} \cap \widetilde{V} = 0$, то $D \cup E = (C - \widetilde{U}) \cup (C - \widetilde{V}) = C - (\widetilde{U} \cap \widetilde{V}) = C$. □

Теорема 2. *Если $C$ — компактное множество, $F$ — замкнутое множество и $C \cap F = 0$, то в $\mathcal{F}$ существует такая функция $f$, что $f(x) = 0$ для $x$ из $C$ и $f(x) = 1$ для $x$ из $F$.*

Доказательство. Пространство $X$ вполне регулярно, поэтому для каждой точки $y$ из $C$ существует функция $f_y$ из $\mathcal{F}$, такая, что $f_y(y) = 0$ и $f_y(x) = 1$, когда $x \in F$. Так как класс всех множеств вида $\{x: f_y(x) < \frac{1}{2}\}$ образует открытое покрытие компактного множества $C$, то $C$ содержит конечное подмножество $\{y_1, \ldots, y_n\}$, обладающее тем свойством, что

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{x: f_{y_i}(x) < \frac{1}{2}\right\}.$$

Положим $g(x) = \prod_{i=1}^{n} f_{y_i}(x)$; тогда $g \in \mathcal{F}$ и, так как $0 \leqslant f_y(x) \leqslant 1$ при всех $x$ из $X$ и при всех $y$ из $C$, то $g(x) < \frac{1}{2}$, когда $x \in C$, и $g(x) = 1$, когда $x \in F$. Легко убедиться в том, что свойствами, указанными в теореме, будет обладать функция $f = (2g - 1) \cup 0$. □

Иногда бывает важно знать не только, существует или нет функция $f \in \mathcal{F}$, тождественно равная нулю на $C$, как в теореме 2, но и можно ли выбрать ее так, чтобы она нигде вне $C$ в нуль не обращалась. Такой выбор $f$ в общем случае невозможен; в следующей теореме этот вопрос рассмотрен подробнее.

Теорема 3. *Если $f$ — действительная непрерывная функция на $X$ и $c$ — произвольное действительное число, то каждое из множеств*

$$\{x\colon f(x) \geqslant c\}, \quad \{x\colon f(x) \leqslant c\} \quad \text{и} \quad \{x\colon f(x) = c\}$$

*представляет собой замкнутое $G_\delta$. Обратно, если $C$ — компактное $G_\delta$, то существует функция $f$ из $\mathcal{F}$, такая, что $C = \{x\colon f(x) = 0\}$.*

Доказательство. Так как $\{x\colon f(x) \geqslant c\} = \{x\colon -f(x) \leqslant -c\}$ и $\{x\colon f(x) = c\} = \{x\colon f(x) \geqslant c\} \cap \{x\colon f(x) \leqslant c\}$, то достаточно рассмотреть множество $\{x\colon f(x) \leqslant c\}$. В силу непрерывности функции $f$, множество $\{x\colon f(x) \leqslant c\}$ замкнуто, тогда как множества вида $\left\{x\colon f(x) < c + \frac{1}{n}\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$, открыты. Равенство

$$\{x\colon f(x) \leqslant c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x\colon f(x) < c + \frac{1}{n}\right\}$$

означает, что $\{x\colon f(x) \leqslant c\}$ есть $G_\delta$.

Теперь предположим, что $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, где $C$ — компактное множество, а $\{U_n\}$ — последовательность открытых множеств. Согласно теореме 2, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует функция $f_n$ из $\mathcal{F}$, равная нулю на $C$ и единице на $X - U_n$. Положим $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$; тогда $f \in \mathcal{F}$ и $f(x) = 0$, когда $x \in C$. Какова бы ни была точка $x$, принадлежащая $X - C$, $x \in X - U_n$ при некотором значении $n$; таким образом, если $x \in X - C$, то $f(x) \geqslant \frac{1}{2^n} f_n(x) = \frac{1}{2^n} > 0$ и, следовательно, $C = \{x\colon f(x) = 0\}$. □

Теорема 4. *Если $C$ — компактное множество, $U$ — открытое множество и $C \subset U$, то существуют множество $C_0$, являющееся компактным $G_\delta$, и $\sigma$-компактное открытое множество $U_0$, такие, что*

$$C \subset U_0 \subset C_0 \subset U.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно предположить, что $U$ ограничено, так как всегда существует ограниченное открытое множество $V$, содержащее $C$ и содержащееся в $U$. Пусть $f$ — функция из $\mathcal{F}$, равная нулю на $C$ и единице на $X - U$ (см. теорему 2); положим

$$U_0 = \left\{x\colon f(x) < \frac{1}{2}\right\} \quad \text{и} \quad C_0 = \left\{x\colon f(x) \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

При этом, очевидно, $C \subset U_0 \subset C_0 \subset U$ и, в силу теоремы 3, $C_0$ представляет собой замкнутое $G_\delta$. Так как $U$ ограничено, то $C_0$ компактно; из равенства

$$U_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x\colon f(x) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right\}$$

видно, что $U_0$ $\sigma$-компактно. □

Теорема 5. *Если $X$ сепарабельно, то в нем всякое компактное множество $C$ есть $G_\delta$.*

Доказательство. Какова бы ни была точка $x$ из $X$, не принадлежащая $C$, существуют такие непересекающиеся открытые множества $U(x)$ и $V(x)$, что $C \subset U(x)$ и $x \in V(x)$. Пространство $X$ сепарабельно, и класс $\{V(x)\colon x \notin C\}$ образует открытое покрытие множества $X - C$, поэтому существует последовательность $\{x_n\}$ точек из $X$, такая, что

$$X - C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V(x_n).$$

Отсюда следуют соотношения

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U(x_n) \supset C \supset \bigcap_{n=1}^{\infty}(X - V(x_n)) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} U(x_n). \qquad \square$$

**Упражнения**

1. Теорему 2 можно доказать иначе, дополнив пространство $X$ до компактного (присоединением одной точки) и воспользовавшись тем, что компактное хаусдорфово пространство нормально. Для любых двух непресекающихся замкнутых множеств $C$ и $D$ в компактном хаусдорфовом пространстве существует непрерывная на этом пространстве функция, равная нулю на $C$ и единице на $D$.

2. С помощью теоремы 3 или непосредственно можно доказать, что класс всех компактных $G_\delta$ замкнут относительно образования конечных соединений и счетных пересечений.

3. Если $X$ — несчетное дискретное пространство, а $X^*$ — компактное пространство, полученное из $X$ путем присоединения одной точки $x^*$, то одноточечное множество $\{x^*\}$ компактно, но не является $G_\delta$.

4. Пусть $I$ — произвольное несчетное множество; поставим в соответствие каждому $i$ из $I$ (компактное хаусдорфово) пространство $X_i$, состоящее из двух действительных чисел 0 и 1; их тихоновское произведение $\times_{i \in I} X_i$ обозначим $X$:

а) Любое одноточечное множество в $X$ компактно, но не является $G_\delta$.

б) Назовем множество $E$ в $X$ $\aleph_0$-множеством, если в $I$ существует такое счетное подмножество $J$, что $E$ представляет собой $J$-цилиндр (см. упр. 2 § 38). Компактное множество $C$ в $X$ есть $G_\delta$ тогда и только тогда, когда оно является $\aleph_0$-множеством. [Указание. Если $C$ компактно, $U$ открыто и $C \subset U$, то, в силу самого определения топологии в $X$, $C \subset U_0 \subset U$, где $U_0$ — открытое множество в $X$ и одновременно $J$-цилиндр, причем $J$ — некоторое конечное подмножество в $I$.]

в) Если $f$ — действительная непрерывная функция на $X$ и $M$ — любое борелевское множество на числовой прямой, то $f^{-1}(M)$ представляет собой $\aleph_0$-множество.

5. Пусть $X^*$ и $Y^*$ — компактные пространства, полученные из счетного дискретного пространства $X$ и несчетного дискретного пространства $Y$ присоединением к тому и другому по одной точке ($x^*$ и $y^*$). На примере множеств

$$(\{x^*\} \times Y^*) - \{(x^*, y^*)\} \quad \text{и} \quad (X^* \times \{y^*\}) - \{(x^*, y^*)\}$$

в локально компактном хаусдорфовом пространстве $(X^* \times Y^*) - \{(x^*, y^*)\}$ можно видеть, что в теореме 2 нельзя опустить условие компактности множества $C$.

6. В локально компактном хаусдорфовом пространстве класс всех $\sigma$-компактных открытых множеств образует базис (см. теорему 4).

## § 51. Борелевские и бэровские множества

Соотношения между свойством измеримости и свойством непрерывности функций представляют исключительный интерес; глубже всего эти соотношения изучены в случае локально компактных пространств. В этом параграфе мы изложим основные понятия и результаты, касающиеся некоторых специальных $\sigma$-колец множеств в локально компактных пространствах и функций, измеримых относительно этих $\sigma$-колец. Введем следующие обозначения: $\mathbf{C}$ — класс всех компактных множеств в локально компактном хаусдорфовом пространстве $X$, $\mathbf{S}$ — $\sigma$-кольцо, порожденное классом $\mathbf{C}$, $\mathbf{U}$ — класс всех открытых множеств, принадлежащих классу $\mathbf{S}$. Множества, принадлежащие классу $\mathbf{S}$, мы будем называть *борелевскими множествами* в $X$, так что, например, $\mathbf{U}$ может быть определено как класс всех открытых борелевских множеств в $X$. Действительную функцию $f$ на $X$ назовем функцией, *измеримой в смысле Бореля* (или просто *борелевской функцией*), если она измерима относительно $\sigma$-кольца $\mathbf{S}$.

Теорема 1. *Всякое борелевское множество $\sigma$-ограничено; всякое $\sigma$-ограниченное открытое множество есть борелевское множество.*

Доказательство. Всякое компактное множество, очевидно, ограничено и, следовательно, $\sigma$-ограничено. Класс всех $\sigma$-ограниченных множеств представляет собой $\sigma$-кольцо, а так как он содержит $\mathbf{C}$, то он содержит и $\sigma$-кольцо, порожденное классом $\mathbf{C}$.

Предположим теперь, что $U$ — открытое множество и $\{C_n\}$ — последовательность компактных множеств, такая, что

$$U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = K.$$

Так как все множества $C_n - U$, $n = 1, 2, \ldots$, компактны, то

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n - U) \in \mathbf{S};$$

в силу равенства $D = K - U$, имеем $U = K - (K - U) \in \mathbf{S}$. $\square$

Пусть $\mathbf{C}_0$ — класс всех компактных множеств в $X$, которые суть $G_\delta$, $\mathbf{S}_0$ — $\sigma$-кольцо, порожденное классом $\mathbf{C}_0$, и $\mathbf{U}_0$ — класс всех открытых множеств, принадлежащих $\mathbf{S}_0$. Множества, принадлежащие классу $\mathbf{S}_0$, мы условимся называть *бэровскими множествами* в $X$, так что, например, $U_0$ можно определить как класс всех открытых бэровских множеств. Действительную функцию, заданную на $X$, назовем функцией, *измеримой в смысле Бэра* (или просто *бэровской функцией*), если она измерима относительной $\sigma$-кольца $\mathbf{S}_0$.

Борелевские множества могут показаться естественным объектом изучения с точки зрения теории меры. Однако некоторые соображения заставляют нас ввести понятие бэровского множества, на первый взгляд, довольно искусственное. Приведем некоторые из этих соображений. Во-первых, теория бэровских множеств в некоторых отношениях проще теории борелевских множеств, хотя, в то же время, бэровские множества могут служить средством изучения борелевских множеств; во-вторых, всякая непрерывная функция, равная нулю вне некоторого компактного множества, измерима в смысле Бэра (см. теорему 2); в третьих, $\mathbf{S}_0$ представляет собой наименьшее $\sigma$-кольцо, содержащее запас множеств, достаточный для того, чтобы с его помощью можно было задать топологию в $X$ (см. теорему 3); в-четвертых, во всех классических частных случаях, когда теория меры применяется в топологических пространствах (например, в эвклидовых пространствах), понятия борелевского и бэровского множеств совпадают (см. теорему 5 § 51).

Теорема 2. *Если действительная непрерывная функция $f$ на $X$ такова, что множество $N(f)=\{x\colon f(x)\neq 0\}$ $\sigma$-ограничено, то $f$ измерима в смысле Бэра.*

Доказательство. Если некоторое $\sigma$-ограниченное открытое множество $U$ есть $F_\sigma$, то существует последовательность компактных множеств $\{C_n\}$, такая, что $U=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Согласно теореме 5 § 50, $C_n\subset \subset D_n\subset U$, где $n$ — произвольное целое положительное число и $D_n$ — компактное бэровское множество. Отсюда следует, что $U=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ и $U$ является бэровским множеством. Из предположений, относящихся к $f$, следует, что при любом действительном числе $c$ множество $N(f)\cap\{x\colon f(x)<c\}$ представляет собой $\sigma$-ограниченное множество и в то же время множество $F_\sigma$. □

Теорема 3. *Если* $\mathbf{B}$ *есть подбазис, а* $\widehat{\mathbf{S}}$ *— какое-нибудь $\sigma$-кольцо, содержащее* $\mathbf{B}$, *то* $\widehat{\mathbf{S}}\supset \mathbf{S}_0$.

Доказательство. Если $C$ — компактное множество, а $U$ — открытое множество, содержащее $C$, то существует множество $E$, такое, что $C\subset E\subset U$ и $E$ представляет собой конечное соединение конечных пересечений некоторых множеств из $\mathbf{B}$, откуда следует, что $E$ принадлежит классу $\widehat{\mathbf{S}}$. Следовательно, если $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, где $U_n$ — открытые множества, то для всякого $n=1,2,\ldots$ существует $E_n$ из $\widehat{\mathbf{S}}$, такое, что $C\subset E_n\subset U_n$; итак, $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\in\widehat{\mathbf{S}}$. Мы доказали, таким образом, что $\mathbf{C}_0\subset\widehat{\mathbf{S}}$, и утверждение теоремы вытекает из определения $\mathbf{S}_0$. □

Класс бэровских множеств был определен как $\sigma$-кольцо, порожденное компактными $G_\delta$. Можно поставить вопрос, нет ли среди бэровских множеств компактных множеств, не являющихся $G_\delta$. Следующая теорема показывает, что таких множеств в классе $\mathbf{S}_0$ нет.

Теорема 4. *Всякое компактное бэровское множество есть* $G_\delta$.

Доказательство. Пусть $C$ — компактное множество, принадлежащее классу $\mathbf{S}_0$. Согласно теореме 4 § 5, существует последовательность множеств $\{C_n\}$ из $\mathbf{C}_0$, такая, что $C\in\mathbf{S}(\{C_n\})$. В силу теоремы 3 § 50, при любом $n=1,2,\ldots$ существует функция $f_n$ из $\mathcal{F}$, для которой $C_n=\{x\colon f_n(x)=0\}$. Если для любой пары точек $x$ и $y$ из $X$ мы положим

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|f_n(x)-f_n(y)|,$$

то $d(x,x)=0$, $d(x,y)=d(y,x)$ и $0\leqslant d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$. Таким образом, если под $x\equiv y$ условиться понимать, что $d(x,y)=0$, то отношение $\equiv$ оказывается отношением эквивалентности (т. е. оно рефлективно, симметрично и транзитивно); класс всех множеств, попарно эквивалентных, в указанном смысле,точек пространства $X$ обозначим $\Xi$. При любом $x$ из $X$ пусть $\xi=T(x)$ обозначает (единственный) элемент из $\Xi$, содержащий $x$.

Если $T(x_1)=T(y_1)$ и $T(x_2)=T(y_2)$ (т. е. если $x_1\equiv y_1$ и $x_2\equiv y_2$), то

$$d(x_1,x_2)\leqslant d(x_1,y_1)+d(y_1,y_2)+d(y_2,x_2)=d(y_1,y_2).$$

Точно так же можно доказать, что $d(y_1,y_2)\leqslant d(x_1,x_2)$, следовательно, $d(x_1,x_2)=d(y_1,y_2)$. Таким образом, если $\xi_1=T(x_1)$ и $\xi_2=T(x_2)$ — два элемента из $\Xi$, то равенство $\delta(\xi_1,\xi_2)=d(x_1,x_2)$ однозначно определяет число $\delta(\xi_1,\xi_2)$. Так как из $\delta(\xi_1,\xi_2)=0$ следует, что $\xi_1=\xi_2$, то функция $\delta$ определяет в $\Xi$ некоторую метрику. Пусть $\xi_0=T(x_0)$ — произвольная точка метрического пространства $\Xi$, $r_0$ — любое положительное число; тогда если $E=\{\xi\colon\ \delta(\xi_0,\xi)<r_0\}$, то $T^{-1}(E)=\{x\colon\ d(x_0,x)<r_0\}$. Так как $d(x_0,x)$ зависит от $x$ непрерывно, то $T$ представляет собой непрерывное отображение $X$ на $\Xi$.

Множество $A$ в $X$ служит прообразом (при отображении $T$ некоторого множества в $\Xi$ тогда и только тогда, когда, коль скоро $A$ содержит какую-нибудь точку $x$, оно содержит одновременно все точки, эквивалентные $x$ (иначе говоря, когда $A$ является соединением некоторого класса множеств, эквивалентных друг другу точек). Каждое $C_n$ обладает этим свойством; класс прообразов всевозможных множеств из $\Xi$ образует $\sigma$-кольцо и, наконец, $C\in\mathbf{S}(\{C_n\})$, поэтому в $\Xi$ существует такое множество $\Gamma$, что $T^{-1}(\Gamma)=C$. Из того, что $T(T^{-1}(\Gamma))=\Gamma$, $T$ непрерывно, а $C$ компактно, вытекает, что множество $\Gamma$ компактно. Так как всякое замкнутое (а следовательно, и всякое компактное) множество в метрическом пространстве есть $G_\delta$, то в $\Xi$ существует такая последовательность открытых множеств $\{\Delta_n\}$, что

$$\Gamma=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Delta_n.$$

Положим $U_n=T^{-1}(\Delta_n)$, $n=1,2,\ldots$; тогда, в силу непрерывности отображения $T$, все $U_n$ — открытые множества. При этом $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_n$, так что $C\in\mathbf{C}_0$. □

Т е о р е м а 5. *Если $X$ и $Y$ — локально компактные хаусдорфовы пространства и если $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{C}_0$ — $\sigma$-кольца бэровских множеств соответственно в $X$, $Y$ и $X\times Y$, то $\mathbf{S}_0=\mathbf{A}_0\times\mathbf{B}_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $A$ и $B$ — компактные бэровские множества соответственно в $X$ и $Y$, то $A\times B$ — компактное $G_\delta$ и, следовательно, компактное бэровское множество в $X\times Y$. Так как $\mathbf{A}_0\times\mathbf{B}_0$ представляет собой $\sigma$-кольцо, порожденное классом множеств вида $A\times B$, то $\mathbf{A}_0\times\mathbf{B}_0\subset\mathbf{S}_0$. Пусть теперь $U$ и $V$ — открытые бэровские множества соответственно в $X$ и $Y$, тогда $U\times V\in\mathbf{A}_0\times\mathbf{B}_0$, а так как класс множеств вида $U\times V$ является базисом в пространстве $X\times Y$, то, согласно теореме 3, $\mathbf{A}_0\times\mathbf{B}_0\supset\mathbf{S}_0$. □

В заключение этого параграфа мы сформулируем одну теорему, касающуюся строения классов бэровских и борелевских множеств (см. упр. 2 и 3 § 5); доказательство ее очень простое.

Т е о р е м а 6. *Всевозможные конечные соединения непересекающихся собственных разностей множеств из $\mathbf{C}$ (или из $\mathbf{C}_0$) образуют кольцо; порожденное ими $\sigma$-кольцо совпадает с $\mathbf{S}$ (соответственно с $\mathbf{S}_0$).*

### Упражнения

1. Если в качестве локально компактного пространства взять числовую прямую, то определение борелевского множества в таком пространстве согласуется с определением, данным в § 15.

2. Все пространство $X$ представляет собой борелевское множество тогда и только тогда, когда оно $\sigma$-компактно.

3. $\sigma$-кольцо, порожденное классом всех ограниченных открытых множеств, или, что то же самое, $\sigma$-кольцо, порожденное классом $\mathbf{U}$, совпадает с $\mathbf{S}$. [Указание. Для любого компактного множества $C$ следует взять открытое множество $U$, содержащее $C$, и рассмотреть $U-(U-C)$.]

4. Если $X$ — произведение пространств, описанное в упр. 4 § 50, то бэровские множества в $X$ совпадают с измеримыми множествами (см. определение в § 38).

5. $\sigma$-кольцо, порожденное классом всех ограниченных открытых бэровских множеств, или, что то же самое, $\sigma$-кольцо, порожденное классом $\mathbf{U}_0$, совпадает с $\mathbf{S}_0$. [Указание. Если $C$ — компактное множество, $U$ — открытое множество и $C \subset U$, то существует такое ограниченное открытое бэровское множество $U_0$, что $C \subset U_0 \subset U$.]

6. Термин «бэровское множество» подсказан термином «бэровская функция». Пусть $\mathcal{B}$ — наименьший класс функций, охватывающий все непрерывные функции и содержащий предел любой сходящейся (не обязательно равномерно) последовательности функций, принадлежащих $\mathcal{B}$; функции, входящие в $\mathcal{B}$, называются *бэровскими функциями* на $X$. Для того, чтобы множество в $X$ было бэровским множеством, необходимо и достаточно, чтобы оно было борелевским, а его характеристическая функция была бэровской функцией.

7. Всякая булевская $\sigma$-алгебра изоморфна классу бэровских множеств, приведенному по модулю бэровских множеств первой категории, в некотором вполне несвязном компактном хаусдорфовом пространстве. [Указание. См. упр. 15, «в», § 40; заметим, что $\sigma$-кольцо, порожденное классом всех одновременно открытых и замкнутых множеств во вполне несвязном компактном хаусдорфовом пространстве, совпадает с классом всех бэровских множеств.]

## § 52. Регулярные меры

*Борелевской мерой* назовем меру $\mu$, заданную на классе $\mathbf{S}$ всех борелевских множеств и обладающую тем свойством, что $\mu(C) < \infty$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$; *бэровской мерой* условимся называть меру $\mu_0$, заданную на классе $\mathbf{S}_0$ всех бэровских множеств и обладающую тем свойством, что $\mu_0(C_0) < \infty$ для любого $C_0$ из $\mathbf{C}_0$.

Теория борелевских мер и теория бэровских мер в некоторых отношениях весьма похожи друг на друга; целесообразно поэтому ряд теорем изложить так, чтобы одновременно охватить и борелевские, и бэровские меры. Для этого условимся под $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{U}}$, $\widehat{\mathbf{S}}$ понимать соответственно либо $\mathbf{C}$, $\mathbf{U}$ и $\mathbf{S}$, либо $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{S}_0$. При этом $\widehat{\mu}$ будет обозначать борелевскую меру $\mu$ тогда, когда $\widehat{\mathbf{S}}$ есть $\mathbf{S}$, и бэровскую меру тогда, когда $\widehat{\mathbf{S}}$ есть $\mathbf{S}_0$.

Множество $E$ из $\widehat{\mathbf{S}}$ назовем *внешне регулярным* (по отношению к мере $\widehat{\mu}$), если

$$\widehat{\mu}(E) = \inf\{\widehat{\mu}(U) \colon E \subset U \in \widehat{\mathbf{U}}\};$$

множество $E$ из $\widehat{\mathbf{S}}$ назовем *внутренне регулярным* (по отношению к мере $\widehat{\mu}$), если

$$\widehat{\mu}(E) = \sup\{\widehat{\mu}(\mathrm{C}) \colon E \supset C \in \widehat{\mathbf{C}}\}.$$

Назовем множество $E$ из $\widehat{\mathbf{S}}$ *регулярным*, если оно и внешне и внутренне регулярно. Мера $\widehat{\mu}$ регулярна, если по отношению к ней регулярны все множества $E$ из $\widehat{\mathbf{S}}$.

Грубо говоря, мера $\mu$ регулярна, если она полностью определяется своими значениями на компактных и на открытых множествах, т. е. на множествах, наиболее важных с точки зрения топологии. Свойство регулярности меры, таким образом, означает наличие некоторой связи между топологическими свойствами пространства и его строением как пространства с мерой. С точки зрения теории меры нерегулярные множества обладают чрезвычайно уродливыми свойствами.

Нетрудно убедиться в том, что множество внешне регулярно, в частности, тогда, когда $E \in \widehat{\mathbf{S}}$ и $\widehat{\mu}(E) = \infty$ или когда $E$ принадлежит $\widehat{\mathbf{U}}$ или может быть представлено как пересечение последовательности множеств конечной меры из $\widehat{\mathbf{U}}$. Верно также двойственное предложение: если $E \in \widehat{\mathbf{S}}$ и $\widehat{\mu}(E) = 0$ или если $E$ принадлежит $\widehat{\mathbf{C}}$ или может быть представлено как соединение последовательности множеств из $\widehat{\mathbf{C}}$, то $E$ внутренне регулярно. Теперь мы перейдем к доказательству того, что регулярность некоторых множеств влечет за собой регулярность значительного числа других. Расчленение доказательства на отдельные этапы оправдывается теоремой 6 § 51: от компактных множеств мы переходим к их разностям, а от разностей — к соединениям разностей. После того, как будет показано, что класс регулярных множеств обладает известными свойствами замкнутости, позволяющими применить теорему о монотонных классах, порожденных кольцами (теорему 2 § 6), мы установим регулярность некоторых мер.

Теорема 1. *Если все множества, принадлежащие $\widehat{\mathbf{C}}$, внешне регулярны, то любая собственная разность двух множеств из $\widehat{\mathbf{C}}$ также внешне регулярна. Если все ограниченные множества, принадлежащие $\widehat{\mathbf{U}}$, внутренне регулярны, то любая собственная разность двух множеств из $\widehat{\mathbf{U}}$ также внутренне регулярна.*

Доказательство. Пусть $C$ и $D$ — множества из $\widehat{\mathbf{C}}$, причем $C \supset D$. Если $C$ внешне регулярно, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое множество $U$ из $\widehat{\mathbf{U}}$, что $C \subset U$ и $\widehat{\mu}(U) \leqslant \widehat{\mu}(C) + \varepsilon$. Так как $C - D \subset U - D \in \widehat{\mathbf{U}}$, то, в силу соотношений

$$\widehat{\mu}(U - D) - \widehat{\mu}(C - D) = \widehat{\mu}((U - D) - (C - D)) = \\ = \widehat{\mu}(U - C) = \widehat{\mu}(U) - \widehat{\mu}(C) \leqslant \varepsilon,$$

множество $C - D$ внешне регулярно.

Для того, чтобы доказать утверждение теоремы, касающееся внутренней регулярности, предположим, что $U$ — ограниченное множество из $\widehat{\mathbf{U}}$, такое, что $C \subset U$. Если ограниченное множество $U - D$ (из $\widehat{\mathbf{U}}$) внутренне регулярно, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое множество $E$ из $\widehat{\mathbf{C}}$, что $E \subset U - D$ и $\widehat{\mu}(U - D) \leqslant \widehat{\mu}(E) + \varepsilon$. Так как $C - D = C \cap (U - D) \supset C \cap E \in \widehat{\mathbf{C}}$, то в силу соотношений

$$\widehat{\mu}(C - D) - \widehat{\mu}(C \cap E) = \widehat{\mu}((C - D) - (C \cap E)) = \\ = \widehat{\mu}((C - D) - E) \leqslant \widehat{\mu}((U - D) - E) = \widehat{\mu}(U - D) - \widehat{\mu}(E) \leqslant \varepsilon,$$

множество $C - D$ внутренне регулярно. □

Теорема 2. *Конечное соединение непересекающихся внутренне регулярных множеств конечной меры представляют собой внутренне регулярное множество.*

Доказательство. Если $\{E_1, \ldots, E_n\}$ — конечный класс непересекающихся внутренне регулярных множеств конечной меры, то для любого положительного $\varepsilon > 0$ и для любого $i = 1, \ldots, n$ существует множество $C_i$ из $\widehat{\mathbf{C}}$, такое, что

$$C_i \subset E_i \quad \text{и} \quad \widehat{\mu}(E_i) \leqslant \widehat{\mu}(C_i) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Если $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ и $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, то $E \supset C \in \widehat{\mathbf{C}}$ и внутренняя регулярность множества $E$ следует из соотношений

$$\widehat{\mu}(E) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mu}(E) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mu}(C_i) + \varepsilon = \widehat{\mu}(C) + \varepsilon. \qquad \square$$

Нетрудно было бы доказать соответствующее предложение для внешне регулярных множеств, но надобности в этом нет, так как оно полностью покрывается следующей теоремой.

Теорема 3. *Соединение любой последовательности внешне регулярных множеств внешне регулярно; соединение возрастающей последовательности внутренне регулярных множеств внутренне регулярно.*

Доказательство. Пусть $\{E_i\}$ — последовательность внешне регулярных множеств; тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $i = 1, 2, \ldots$ существует множество $U_i$ из $\mathbf{U}$, такое, что

$$E_i \subset U_i \quad \text{и} \quad \widehat{\mu}(U_i) \leqslant \widehat{\mu}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Положим $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Если $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ и $\widehat{\mu}(E) = \infty$, то $E$ внешне регулярно; если же $\widehat{\mu}(E) < \infty$, то

$$\widehat{\mu}(U) - \widehat{\mu}(E) = \widehat{\mu}(U - E) \leqslant \widehat{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i - E_i)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{\mu}(U_i - E_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(\widehat{\mu}(U_i) - \widehat{\mu}(E_i)) \leqslant \varepsilon.$$

Пусть теперь $\{E_i\}$ — возрастающая последовательность внутренне регулярных множеств и $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Мы должны доказать, что для всякого действительного числа $c$, меньшего $\widehat{\mu}(E)$, существует множество $C$ из $\widehat{\mathbf{C}}$, такое, что $C \subset E$ и $c < \widehat{\mu}(C)$. Для этого воспользуемся равенством

$$\widehat{\mu}(E) = \lim_i \widehat{\mu}(E_i)$$

и выберем $i$ таким образом, чтобы $c < \widehat{\mu}(E_i)$; далее, так как $E_i$ внутренне регулярно, существует множество $C$ из $\widehat{\mathbf{C}}$, такое, что $C \subset E_i$ и $c < \widehat{\mu}(C)$. $\square$

Теорема 4. *Пересечение последовательности внутренне регулярных множеств конечной меры внутренне регулярно; пересечение убывающей последовательности внешне регулярных множеств конечной меры внешне регулярно.*

Доказательство. Пусть $\{E_i\}$ — последовательность внутренне регулярных множеств конечной меры; тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $i = 1, 2, \ldots$ найдется такое множество $C_i$ из $\widehat{\mathbf{C}}$, что

$$C_i \subset E_i \quad \text{и} \quad \widehat{\mu}(E_i) \leqslant \widehat{\mu}(C_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Положим $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. Если $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, то $E \supset C \in \widehat{\mathbf{C}}$ и

$$\widehat{\mu}(E) - \widehat{\mu}(C) = \widehat{\mu}(E - C) \leqslant \widehat{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i - C_i)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \widehat{\mu}(E_i - C_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(\widehat{\mu}(E_i) - \widehat{\mu}(C_i)) \leqslant \varepsilon.$$

Пусть теперь $\{E_i\}$ — убывающая последовательность внешне регулярных множеств и $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$. Мы должны показать, что для всякого действительного числа $c$, большего $\widehat{\mu}(E)$, существует множество $U$ из $\widehat{\mathbf{U}}$, такое, что $E \subset U$ и $c > \widehat{\mu}(U)$. Для этого воспользуемся равенством

$$\widehat{\mu}(E) = \lim_i \widehat{\mu}(E_i)$$

и выберем $i$ таким образом, чтобы $c > \widehat{\mu}(E_i)$; далее, так как $E_i$ внешне регулярно, существует множество $U$ из $\mathbf{U}$, такое, что $E_i \subset U$ и $\widehat{\mu}(U) < c$. □

Двойственность между свойствами внешней и внутренней регулярности, проявившаяся в сходстве двух последних доказательств, в действительности весьма глубока. Эта двойственность может быть точно сформулирована в виде следующей теоремы.

Теорема 5. *Для того, чтобы все множества, принадлежащие $\widehat{\mathbf{C}}$, были внешне регулярны, необходимо и достаточно, чтобы все множества, принадлежащие $\widehat{\mathbf{U}}$, были внутренне регулярны.*

Доказательство. Предположим, что все множества из $\widehat{\mathbf{C}}$ внешне регулярны, и возьмем любое ограниченное множество $U$ из $\widehat{\mathbf{U}}$; пусть $\varepsilon$ — произвольное положительное число. $U$ содержится в некотором множестве $C$ из $\widehat{\mathbf{C}}$; так как $C - U$ компактно и принадлежит классу $\widehat{\mathbf{S}}$, то, согласно теореме 4 § 51, $C - U \in \widehat{\mathbf{C}}$ и, следовательно, существует множество $V$ из $\widehat{\mathbf{U}}$, такое, что

$$C - U \subset V \quad \text{и} \quad \widehat{\mu}(V) \leqslant \widehat{\mu}(C - U) + \varepsilon.$$

Так как $U = C - (C - U) \supset C - V \in \widehat{\mathbf{C}}$, то внутренняя регулярность множества $U$ вытекает из соотношений

$$\widehat{\mu}(U) - \widehat{\mu}(C - V) = \widehat{\mu}(U - (C - V)) = \widehat{\mu}(U \cap V) \leqslant \\ \leqslant \widehat{\mu}(V - (C - U)) = \widehat{\mu}(V) - \widehat{\mu}(C - U) \leqslant \varepsilon.$$

Теперь предположим, что все множества из $\widehat{\mathbf{U}}$ внутренне регулярны; возьмем какое-нибудь множество $C$ из $\widehat{\mathbf{C}}$ и произвольное положительное число $\varepsilon$. $C$ содержится в некотором ограниченном множестве $U$ из $\widehat{\mathbf{U}}$; так как $U - C$ ограничено и принадлежит $\widehat{\mathbf{U}}$, то существует множество $D$ из $\widehat{\mathbf{C}}$, такое, что

$$D \subset U - C \quad \text{и} \quad \widehat{\mu}(U - C) \leqslant \widehat{\mu}(D) + \varepsilon.$$

Так как $C = U - (U - C) \subset U - D \in \widehat{\mathbf{U}}$, то внешняя регулярность множества $C$ вытекает из соотношений

$$\widehat{\mu}(U - D) - \widehat{\mu}(C) = \widehat{\mu}((U - D) - C) = \widehat{\mu}((U - C) - D) = \\ = \widehat{\mu}(U - C) - \widehat{\mu}(D) \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 6. *Для того, чтобы мера $\widehat{\mu}$ была регулярна, необходимо и достаточно любое из двух следующих условий: все множества, принадлежащие $\widehat{\mathbf{C}}$, внешне регулярны; все ограниченные множества, принадлежащие $\widehat{\mathbf{U}}$, внутренне регулярны.*

Доказательство. Необходимость обоих условий очевидна. Для того, чтобы доказать достаточность, нужно установить, в силу теоремы 3, регулярность всех ограниченных множеств, принадлежащих $\widehat{\mathbf{S}}$, так как любое множество из $\widehat{\mathbf{S}}$ может быть представлено в виде соединения возрастающей последовательности ограниченных множеств из $\widehat{\mathbf{S}}$. Пусть $E_0$ — ограниченное множество из $\widehat{\mathbf{S}}$ и $C_0$ — множество из $\widehat{\mathbf{C}}$, содержащее $E_0$. Согласно теореме 5 § 5, класс всех множеств вида $C \cap C_0$, где $C \in \widehat{\mathbf{C}}$, порождает $\sigma$-кольцо $\widehat{\mathbf{S}} \cap C_0$, а, в силу теоремы 6 § 51, это $\sigma$-кольцо порождается кольцом всех множеств вида $E \cap C_0$, где $E$ — конечное соединение непересекающихся собственных разностей множеств из $\widehat{\mathbf{C}}$. Исходим ли мы из условия, наложенного на $\widehat{\mathbf{C}}$, или из условия, наложенного на $\widehat{\mathbf{U}}$, мы получим, в силу теорем 1, 2 или 3, что любое множество, принадлежащее $\sigma$-кольцу $\widehat{\mathbf{S}} \cap C_0$, внешне или внутренне регулярно. Согласно теоремам 3 и 4, внешне регулярные подмножества множества $C_0$ и внутренне регулярные подмножества множества $C_0$ образуют монотонные классы; поэтому, согласно теореме 2 § 6 и теореме 5, при том или другом условии, высказанном в теореме, если какое-нибудь подмножество множества $C_0$ принадлежит $\widehat{\mathbf{S}}$, то оно регулярно; в частности, регулярно само $E_0$. $\square$

Теорема 7. *Всякая бэровская мера $\nu$ регулярна; если $C \in \mathbf{C}$, то*

$$\nu^*(C) = \inf\{\nu(U_0)\colon C \subset U_0 \in \mathbf{U}_0\},$$

*и если $U \in \mathbf{U}$, то*

$$\nu_*(U) = \sup\{\nu(C_0)\colon U \supset C_0 \in \mathbf{C}_0\}.$$

Доказательство. Так как любое множество из $\mathbf{C}_0$ может быть представлено в виде пересечения последовательности множеств конечной меры, принадлежащих $\mathbf{U}$, то регулярность меры $\nu$ следует из теоремы 6. Далее, в силу определения внешней меры,

$$\nu^*(C) = \inf\{\nu(E_0)\colon C \subset E_0 \in \mathbf{S}_0\} \leqslant \inf\{\nu(U_0)\colon C \subset U_0 \in \mathbf{U}_0\};$$

для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E_0$ из $\mathbf{S}_0$, такое, что $C \subset E_0$ и $\nu(E_0) \leqslant \nu(C) + \frac{\varepsilon}{2}$. Но множество $E_0$ внешне регулярно, поэтому найдется такое множество $U_0$ из $\mathbf{U}_0$, что

$$E_0 \subset U_0 \quad \text{и} \quad \nu(U_0) \leqslant \nu(E_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что $C \subset U_0$ и $\nu(U_0) \leqslant \nu^*(C) + \varepsilon$. Утверждение, касающееся внутренней меры, доказывается совершенно так же, только при этом используется регулярность бэровских множеств $E_0$. □

Теорема 8. *Пусть $\mu$ — борелевская мера, а $\nu$ — мера, определенная на бэровских множествах $E$ равенством $\nu(E) = \mu(E)$. Для того чтобы мера $\mu$ была регулярна, необходимо и достаточно любое из двух следующих условий:*

$$\mu(C) = \nu^*(C) \quad \textit{для всех } C \textit{ из } \mathbf{C};$$

$$\mu(U) = \nu_*(U) \quad \textit{для всех ограниченных открытых } U \textit{ из } \mathbf{U}.$$

*Если две регулярные борелевские меры совпадают на всех бэровских множествах, то они совпадают и на всех борелевских множествах.*

Доказательство. Если $\mu(C) = \nu^*(C)$ для некоторого $C$ из $\mathbf{C}$, то, согласно теореме 7, для всякого $\varepsilon > 0$ существует множество $U_0$ из $\mathbf{U}_0$ такое, что

$$C \subset U_0 \quad \text{и} \quad \mu(U_0) = \nu(U_0) \leqslant \nu^*(C) + \varepsilon = \mu(C) + \varepsilon;$$

таким образом, множество $\mathbf{C}$ внешне регулярно и, следовательно, мера $\mu$ регулярна. Достаточность условия, относящегося к $\nu_*$, устанавливается совершенно так же, но с использованием последнего утверждения теоремы 7.

Предположим теперь, что $\mu$ регулярна. Каково бы ни было положительное число $\varepsilon$, для любого $C$ из $\mathbf{C}$ существует такое множество $U$ из $\mathbf{U}$, что $C \subset U$ и $\mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon$; точно так же для любого ограниченного множества $U$ из $\mathbf{U}$ существует такое $C$ из $\mathbf{C}$, что $C \subset U$ и $\mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon$. В обоих случаях существуют множества $C_0$ из $\mathbf{C}_0$ и $U_0$ из $\mathbf{U}_0$, такие, что $C \subset U_0 \subset C_0 \subset U$ (см. теорему 5 § 50). Из теоремы 7 следует, что

$$\nu^*(C) \leqslant \nu(U_0) = \mu(U_0) \leqslant \mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon$$

и

$$\nu_*(U) \geqslant \nu(C_0) = \mu(C_0) \geqslant \mu(C) \geqslant \mu(U) - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon$ произвольно, то

$$\nu^*(C) \leqslant \mu(C) \quad \text{и} \quad \nu_*(U) \geqslant \mu(U);$$

обратные неравенства в обоих случаях очевидны. Мы показали, что значения регулярной меры на произвольных компактных множествах однозначно определяются ее значениями на бэровских множествах. Отсюда, в силу теоремы 6 § 51, вытекает последнее утверждение доказываемой теоремы. □

В заключение этого параграфа мы введем одно понятие, с помощью которого иногда удается упростить доказательства регулярности. Пусть $\mu$ — произвольная борелевская мера, $\mu_0$ — бэровская мера, определенная равенством $\mu_0(E) = \mu(E)$, где $E \in \mathbf{S}_0$. Если любое множество из $\mathbf{C}$ или любое множество из $\mathbf{U}$ и, следовательно, в обоих случаях любое множество из $\mathbf{S}$ оказывается $\mu_0^*$-измеримым (т. е. все компактные, а вместе с ними и все борелевские множества принадлежат области определения пополнения меры $\mu_0$), то мы будем называть борелевскую меру $\mu$ *регулярно пополнимой*. Если $\mu$ регулярно пополнима, то для любого борелевского множества $E$ существуют такие бэровские множества $A$ и $B$, что

$$A \subset E \subset B \quad \text{и} \quad \mu_0(B - A) = 0;$$

из теоремы 8 следует, что регулярно пополнимая мера регулярна.

### Упражнения

1. Всякая борелевская мера $\sigma$-конечна.

2. Если пространство $X$ компактно, то класс всех регулярных множеств в $X$ нормален (см. упр. 2 § 6).

3. Если $\mu$ — борелевская мера и если существует такое счетное множество $Y$, что $\mu(E) = \mu(E \cap Y)$ для любого борелевского множества $E$, то мера $\mu$ регулярна.

4. Если $X$ — эвклидова плоскость и $\mu$ — лебеговская мера, определенная на всех борелевских множествах из $X$, то $\mu$ представляет собой регулярную борелевскую меру в смысле, сформулированном в этом параграфе. Если же для любого борелевского множества $E$ определить $\mu(E)$ как сумму мер (на прямой) всех горизонтальных сечений множества $E$, то $\mu$ не будет борелевской мерой.

5. Предположим, что пространство $X$ компактно и $x^*$ — точка этого пространства, такая, что множество $\{x^*\}$ не есть $G_\delta$ (см., например, упр. 3 § 50). Тогда мера $\mu$ на $\mathbf{S}$, определенная равенством $\mu(E) = \chi_E(x^*)$, является регулярной борелевской мерой, но не обладает свойством регулярной пополнимости.

6. Если $\mu_1$, $\mu_2$ и $\mu$ — борелевские меры, причем $\mu = \mu_1 + \mu_2$, то, когда регулярны две из этих трех мер, регулярна и третья. [Указание. Если $C \in \mathbf{C}$, $U \in \mathbf{U}$, $C \subset U$ и $\mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon$, то

$$\mu_1(C) + \mu_2(U) \leqslant \mu(U) \leqslant \mu_1(C) + \mu_2(C) + \varepsilon.]$$

7. Предположим, что $X$ и $Y$ — компактные хаусдорфовы пространства, $T$ — непрерывное отображение $X$ на $Y$ и $\mu$ — борелевская мера в $X$. Если $\nu = \mu T^{-1}$, то компактное множество $D$ в $Y$ регулярно по отношению к $\nu$ тогда и только тогда, когда $C = T^{-1}(D)$ регулярно по отношению к $\mu$. [Указание. Если $C \subset U \in \mathbf{U}$, то $T(X - Y)$ и $D$ представляют собой непересекающиеся компактные множества в $Y$. Если $V$ — окрестность множества $D$, не пересекающаяся с $T(X - Y)$, то $C \subset T^{-1}(V) \subset U$.]

8. Если $\mu$ — регулярная борелевская мера, то для любого $\sigma$-ограниченного множества $E$

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U)\colon E \subset U \in \mathbf{U}\} \quad \mu_*(E) = \sup\{\mu(C)\colon E \supset C \in \mathbf{C}\}.$$

9. Если $\mu$ и $\nu$ — борелевские меры, такие, что $\mu$ регулярна и $\nu \ll \mu$, то $\nu$ также регулярна.

10. а) Пусть $\Omega$ — наименьшее несчетное порядковое число и $\overline{X}$ — множество всех порядковых чисел, меньших или равных $\Omega$. Положим $X = \overline{X} - \{\Omega\}$. Если в качестве базиса в $\overline{X}$ взять класс всех «интервалов» вида $\{x\colon \alpha < x \leqslant \beta\}$, присоединив к нему множество $\{0\}$, то $\overline{X}$ окажется компактным множеством.

б) Класс всех неограниченных замкнутых множеств в $X$ замкнут относительно образования счетных пересечений.

в) Если для любого борелевского множества $E$ в $X$ положить $\mu(E) = 1$ или 0, в зависимости от того, содержит или не содержит $E$ неограниченное замкнутое подмножество, то $\mu$ будет представлять собой борелевскую меру.

г) Борелевская мера $\mu$, описанная в «в», не регулярна. (Указание. Всякий интервал, содержащий $\Omega$, имеет меру 1.)

## § 53. Построение борелевских мер

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы показать, каким образом можно построить некоторые (регулярные) борелевские меры, исходя из более простых функций множества.

Назовем *объемом* неотрицательную конечную монотонную аддитивную и полуаддитивную функцию множества, заданную на всевозможных компактных множествах. Итак, функция множества $\lambda$, заданная на $\mathbf{C}$, представляет собой объем, если она обладает следующими свойствами: а) $0 \leqslant \lambda(C) < \infty$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$, б) если $C$ и $D$ — компактные множества и $C \subset D$, то $\lambda(C) \leqslant \lambda(D)$, в) если $C$ и $D$ — непересекающиеся компактные множества, то $\lambda(C \cup D) = \lambda(C) + \lambda(D)$, г) если $C$ и $D$ — любые компактные множества, то $\lambda(C \cup D) \leqslant \lambda(C) + \lambda(D)$. Заметим, что $\lambda$ должна обращаться в нуль на пустом множестве, так как $\lambda(0) + \lambda(0) = \lambda(0 \cup 0) = \lambda(0) < \infty$.

Исходя из заданного объема $\lambda$, мы построим некоторую функцию множества $\lambda_*$ на всех борелевских множествах. С ее помощью мы зададим на всех $\sigma$-ограниченных множествах внешнюю меру $\mu^*$. Мера $\mu$, индуцированная этой внешней мерой, окажется, как мы увидим, регулярной борелевской мерой.

*Внутренним объемом, индуцированным объемом* $\lambda$, мы назовем функцию множества $\lambda_*$, заданную на $\mathbf{U}$ равенством

$$\lambda_*(U) = \sup\{\lambda(C)\colon U \supset C \in \mathbf{C}\}.$$

Теорема 1. *Внутренний объем $\lambda_*$, индуцированный каким-либо объемом $\lambda$, представляет собой функцию множества, монотонную, счетно-полуаддитивную, счетно-аддитивную и обращающуюся в нуль на пустом множестве.*

Доказательство. Очевидно, что $\lambda_*(0) = 0$. Пусть $U$ и $V$ принадлежат классу $\mathbf{U}$, причем $U \subset V$, и $C$ — компактное множество, заключенное в $U$; тогда $C \subset V$ и, следовательно, $\lambda(C) \leqslant \lambda_*(V)$. Поэтому

$$\lambda_*(U) = \sup \lambda(C) \leqslant \lambda_*(V).$$

Если $U$ и $V$ — множества из $\mathbf{U}$ и $C$ — компактное множество, заключенное в $U \cap V$, то, в силу теоремы 1 § 50, существуют компактные множества $D$ и $E$, такие, что $D \subset U$, $E \subset V$ и $C = D \cup E$. Так как $\lambda(C) \leqslant \lambda(D) + \lambda(E) \leqslant \lambda_*(U) + \lambda_*(V)$, то

$$\lambda_*(U \cup V) = \sup \lambda(C) \leqslant \lambda_*(U) + \lambda_*(V),$$

т. е. функция $\lambda_*$ полуаддитивна. Конечная полуаддитивность $\lambda_*$ устанавливается без труда методом индукции. Если $\{U_i\}$ — последовательность множеств из $\mathbf{U}$, а $C$ — компактное множество, заключенное в $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, то, так как $C$ компактно, существует такое целое положительное число $n$, что $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Отсюда вытекает, что

$$\lambda(C) \leqslant \lambda_*(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_*(U_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i)$$

и, следовательно,

$$\lambda_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = \sup \lambda(C) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i);$$

таким образом, $\lambda_*$ счетно-полуаддитивна.

Пусть теперь $U$ и $V$ — непересекающиеся множества из $\mathbf{U}$, а $C$ и $D$ — компактные множества, такие, что $C \subset U$ и $D \subset V$. Так как $C$ и $D$ не пересекаются и $C \cup D \subset U \cup V$, то

$$\lambda(C) + \lambda(D) = \lambda(C \cup D) \leqslant \lambda_*(U \cup V)$$

и, следовательно,

$$\lambda_*(U) + \lambda_*(V) = \sup \lambda(C) + \sup \lambda(D) \leqslant \lambda_*(U \cup V).$$

Отсюда и из полуаддитивности функции $\lambda_*$ вытекает, что $\lambda_*$ аддитивна; конечная аддитивность доказывается по индукции. Если $\{U_i\}$ — последовательность непересекающихся множеств из $\mathbf{U}$, то

$$\lambda_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \geqslant \lambda_*(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_*(U_i).$$

Так как эти неравенства верны при любом $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\lambda_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i),$$

и счетная аддитивность функции $\lambda_*$ следует из ее счетной полуаддитивности, уже доказанной выше. □

Пусть $\lambda$ — какой-либо объем и $\lambda_*$ — индуцированный им внутренний объем; на наследственном $\sigma$-кольце всех $\sigma$-ограниченных множеств определим функцию множества $\mu^*$, положив

$$\mu^*(E) = \inf\{\lambda_*(U)\colon E \subset U \in \mathbf{U}\}.$$

Будем называть $\mu^*$ *внешней мерой, индуцированной объемом* $\lambda$; это название оправдывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Внешняя мера $\mu^*$, порожденная объемом $\lambda$, обладает всеми свойствами внешней меры, сформулированными в* § 10.

Доказательство. Так как $0 \subset 0 \in \mathbf{U}$ и $\lambda_*(0) = 0$, то $\mu^*(0) = 0$. Пусть $E$ и $F$ — $\sigma$-ограниченные множества, причем $E \subset F$. Возьмем такое множество $U$ из $\mathbf{U}$, что $F \subset U$; тогда $E \subset U$ и $\mu^*(E) \leqslant \lambda_*(U)$. Отсюда следует, что

$$\mu^*(E) \leqslant \inf \lambda_*(U) = \mu^*(F).$$

Пусть теперь $\{E_i\}$ — некоторая последовательность $\sigma$-ограниченных множеств. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $i = 1, 2, \dots$ существуют такие множества $U_i$ из $\mathbf{U}$, что

$$E_i \subset U_i \quad \text{и} \quad \lambda_*(U_i) \leqslant \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Отсюда следует, что

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leqslant \lambda_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon$ произвольно, то из этих неравенств следует, что $\mu^*$ счетно-полуаддитивна. □

От описанных здесь функций $\lambda_*$ и $\mu^*$ можно было бы ожидать, что $\lambda_*$ служит продолжением функции $\lambda$, а $\mu^*$ — продолжением функции $\lambda_*$, так что, например, $\mu^*(C) = \lambda(C)$ для любого компактного множества $C$. Однако, вообще говоря, это неверно; все, что можно утверждать в этом направлении, высказано в следующей теореме.

Теорема 3. *Если $\lambda_*$ — внутренний объем и $\mu^*$ — внешняя мера, индуцированные объемом $\lambda$, то $\mu^*(U) = \lambda_*(U)$ для любого $U$ из $\mathbf{U}$ и $\mu^*(C^0) \leqslant \lambda(C) \leqslant \mu^*(C)$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$.*

(Напоминаем, что $C^0$ обозначает открытое ядро множества $C$.)

Доказательство. Если $U \in \mathbf{U}$, то из соотношений $U \subset U \in \mathbf{U}$ следует, что $\mu^*(U) \leqslant \lambda_*(U)$. Если $V \in \mathbf{U}$ и $U \subset V$, то $\lambda_*(U) \leqslant \lambda_*(V)$ и, следовательно,

$$\lambda_*(U) \leqslant \inf \lambda_*(V) = \mu^*(U).$$

Если $C \in \mathbf{C}$, $U \in \mathbf{U}$ и $C \subset U$, то $\lambda(C) \leqslant \lambda_*(U)$, откуда

$$\lambda(C) \leqslant \inf \lambda_*(U) = \mu^*(C).$$

Если $C \in \mathbf{C}$, $D \in \mathbf{C}$ и $D \subset C^0$ $(\subset C)$, то $\lambda(D) \leqslant \lambda(C)$ и, следовательно,

$$\mu^*(C^0) = \lambda_*(C^0) = \sup \lambda(D) \leqslant \lambda(C). \qquad \square$$

Теорема 4. *Если $\mu^*$ — внешняя мера, индуцированная объемом $\lambda$, то $\sigma$-ограниченное множество $E$ $\mu^*$-измеримо тогда и только тогда, когда*

$$\mu^*(U) \geqslant \mu^*(U \cap E) + \mu^*(U \cap E')$$

*при любом $U$ из $\mathbf{U}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_*$ — внутренний объем, индуцированный объемом $\lambda$, $A$ — произвольное $\sigma$-ограниченное множество и $U$ — какое-нибудь множество из $\mathbf{U}$, содержащее $A$. Из соотношений

$$\lambda_*(U) = \mu^*(U) \geqslant \mu^*(U \cap E) + \mu^*(U \cap E') \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu * (A \cap E')$$

следует, что

$$\mu^*(A) = \inf \lambda_*(U) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E');$$

обратное неравенство следует из полуаддитивности $\mu^*$, а необходимость высказанного условия — из определения $\mu^*$-измеримости. □

Теорема 5. *Если $\mu^*$ — внешняя мера, индуцированная объемом $\lambda$, то функция множества $\mu$, определенная на всевозможных борелевских множествах равенством $\mu(E)=\mu^*(E)$, представляет собой регулярную борелевскую меру.*

Будем называть $\mu$ борелевской мерой, *индуцированной* объемом $\lambda$.

Доказательство. Сначала мы покажем, что всякое компактное (а следовательно, и всякое борелевское) множество $\mu^*$-измеримо; отсюда прямо будет следовать, что $\mu$ представляет собой меру на борелевских множествах. Пусть $C$ — компактное множество; в силу теоремы 4, достаточно доказать, что

$$\mu^*(U) \geqslant \mu^*(U \cap C) + \mu^*(U \cap C')$$

для любого $U$ из $\mathbf{U}$. Пусть $D$ и $E$ — компактные множества, заключенные соответственно в $U \cap C'$ и $U \cap D'$; заметим, что как $U \cap C'$, так и $U \cap D'$ принадлежат $\mathbf{U}$. Так как $D \cap E = 0$ и $D \cup E \subset U$, то

$$\mu^*(U) = \lambda_*(U) \geqslant \lambda(D \cup E) = \lambda(D) + \lambda(E),$$

где $\lambda_*$ — внутренний объем, индуцированный объемом $\lambda$. Отсюда вытекает, что

$$\mu^*(U) \geqslant \lambda(D) + \sup \lambda(E) = \lambda(D) + \lambda_*(U \cap D') = \\ = \lambda(D) + \mu^*(U \cap D') \geqslant \lambda(D) + \mu^*(U \cap C)$$

и, следовательно,

$$\mu^*(U) \geqslant \mu^*(U \cap C) + \sup \lambda(D) = \mu^*(U \cap C) + \lambda_*(U \cap C') = \\ = \mu^*(U \cap C) + \mu^*(U \cap C').$$

Для того чтобы доказать, что $\mu(C) < \infty$, возьмем компактное множество $F$, открытое ядро которого содержит $C$; тогда

$$\mu(C) = \mu^*(C) \leqslant \mu^*(F^0) \leqslant \lambda(F) < \infty.$$

Наконец, регулярность меры $\mu$ следует из соотношений

$$\mu(C) = \mu^*(C) = \inf\{\lambda_*(C)\colon C \subset U \in \mathbf{U}\} = \\ = \inf\{\mu^*(U)\colon C \subset U \in \mathbf{U}\} = \inf\{\mu(U)\colon C \subset U \in \mathbf{U}\}. \qquad \square$$

В заключение этого параграфа приведем еще одну теорему, которая нам понадобится позднее.

Теорема 6. *Предположим, что $T$ — гомеоморфизм пространства $X$ самого на себя и $\lambda$ — некоторый объем. Для произвольного $C$ из $\mathbf{C}$ положим $\widehat{\lambda}(C) = \lambda(T(C))$. Если $\mu$ и $\widehat{\mu}$ — борелевские меры, индуцированные соответственно объемами $\lambda$ и $\widehat{\lambda}$, то $\widehat{\mu}(E) = \mu(T(E))$ для любого борелевского множества $E$. Если, в частности, объем $\lambda$ инвариантен относительно $T$, то инвариантна и $\mu$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_*$ и $\widehat{\lambda}_*$ — внутренние объемы, индуцированные соответственно объемами $\lambda$ и $\widehat{\lambda}$. Если $U \in \mathbf{U}$, то из соотношений

$$\{\widehat{\lambda}(C)\colon U \supset C \in \mathbf{C}\} = \{\lambda(T(C))\colon U \supset C \in \mathbf{C}\} = \\ = \{\lambda(D)\colon D = T(C),\ U \supset C \in \mathbf{C}\} = \{\lambda(D)\colon U \supset T^{-1}(D) \in \mathbf{C}\} = \\ = \{\lambda(D)\colon T(U) \supset D \in \mathbf{C}\}$$

следует равенство $\widehat{\lambda}_*(U)=\lambda_*(T(E))$. Если $\mu^*$ и $\widehat{\mu}^*$ — внешние меры, индуцированные соответственно объемами $\lambda$ и $\widehat{\lambda}$, то аналогичные соотношения приводят к равенству $\widehat{\mu}^*(E)=\mu^*(T(E))$; отсюда следует, что $\widehat{\mu}(E)=\mu(T(E))$ для любого борелевского множества $E$. Последнее утверждение теоремы вытекает непосредственно из предыдущих. □

### Упражнения

1. Здесь приведены примеры неотрицательных конечных функций множества, каждая из которых определена на всех компактных множествах какого-либо локально компактного хаусдорфова пространства. Из них одни представляют собой объемы, другие нарушают какое-нибудь одно из условий (монотонность, аддитивность и полуаддитивность), определяющих объем:

а) $X^*$ — компактное пространство, полученное из некоторого бесконечного дискретного пространства $X$ путем присоединения к $X$ одной точки $x^*$; функция $\lambda$ задана на компактных множествах $C$ в $X^*$ следующим образом: $\lambda(C)=0$, если $C$ конечно, и $\lambda(C)=1$, если $C$ бесконечно.

б) $X$ — дискретное пространство, состоящее из конечного числа точек; $\lambda(C)=1$ для любого компактного множества $C$.

в) $X$ — замкнутый интервал $[-1;+1]$; $\lambda(C)=1$ или 0, в зависимости от того $0\in C^0$ или $0\notin C^0$.

г) $X^*=\{X, x^*\}$ — то же пространство, что в примере «а»; $\lambda(C)=1$ или 0, в зависимости от того, содержит $C$ точку $x^*$ или нет.

д) $X=\left\{0, \pm\frac{1}{n}: n=1,2,\ldots\right\}$. Если $C$ содержит бесконечно много отрицательных чисел, то $\lambda(C)=0$; в противном случае $\lambda(C)=1$ или 0 в зависимости от того, $0\in C$ или $0\notin C$.

е) В $X$ определена борелевская мера $\mu_0$; для любого $C$ из $\mathbf{C}$ мы полагаем

$$\lambda(C)=\sup\{\mu_0(C_0)\colon\ C\supset C_0\in\mathbf{C}_0\}.$$

ж) В $X$ определена борелевская мера $\mu$; $\lambda(C)=\mu(C^0)$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$.

2. Даны два объема $\lambda$ и $\widehat{\lambda}$; $\mu^*$ и $\widehat{\mu}^*$ — индуцированные ими внешние меры. Если $\lambda(C)\leqslant\widehat{\lambda}(C)\leqslant\mu^*(C)$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$, то $\mu^*=\widehat{\mu}^*$. (Указание. В силу первой части теоремы 3, достаточно доказать, что $\mu^*(U)=\sup\{\widehat{\lambda}(C)\colon\ U\supset C\in\mathbf{C}\}$ для всех $U$ из $\mathbf{U}$.)

3. Усилением результата упр. 2 является следующая теорема, обратная теореме 3: если $\lambda$ и $\widehat{\lambda}$ — объемы, $\mu^*$ и $\widehat{\mu}^*$ — индуцированные ими внешние меры и если $\mu^*(C^0)\leqslant\widehat{\lambda}(C)\leqslant\mu^*(C)$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$, то $\mu^*=\widehat{\mu}^*$. (Указание. В силу теоремы 5,

$$\mu^*(E)=\sup\{\mu^*(C)\colon\ U\supset C\in\mathbf{C}\}$$

для любого $U$ из $\mathbf{U}$; мы хотим доказать, что

$$\mu^*(U)=\sup\{\widehat{\lambda}(C)\colon\ U\supset C\in\mathbf{C}\}$$

Если $\varepsilon>0$ и $U\in\mathbf{U}$, то существуют множество $C$ из $\mathbf{C}$, такое, что $C\subset U$ и $\mu^*(U)\leqslant\mu^*(C)+\varepsilon$, и множество $D$ из $\mathbf{C}$ такое, что $C\subset D^0\subset D\subset U$.)

4. Если объем $\lambda$ таков, что $\lambda(C)>0$, коль скоро $C^0\neq 0$, то индуцированная этим объемом борелевская мера $\mu$ положительна на любом непустом множестве из $\mathbf{U}$.

5. Независимо от каких бы то ни было объемов можно рассматривать внешние меры $\mu$ на всевозможных $\sigma$-ограниченных множествах, обладающие тем свойством, что для любого $C$ из $\mathbf{C}$

$$\mu^*(C)=\inf\{\mu^*(U)\colon\ C\subset U\in\mathbf{U}\}<\infty.$$

Верны ли для таких внешних мер теоремы 4 и 5?

## § 54. Регулярные объемы

Выше было отмечено, что значения объема могут не совпадать (на компактных множествах, конечно) со значениями борелевской меры, индуцированной этим объемом. Однако для некоторого важного класса объемов построение, описанное в § 53, приводит к функции множества, являющейся продолжением исходного объема. В этом параграфе мы исследуем такие объемы и, воспользовавшись полученными при этом результатами, докажем одну важную теорему, устанавливающую в определенных случаях существование борелевской меры; некоторая теорема единственности для борелевских мер была, как мы помним, доказана выше (см. теорему 8 § 52).

Объем $\lambda$ назовем *регулярным*, если для любого $C$ из $\mathbf{C}$

$$\lambda(C) = \inf\{\lambda(D)\colon C \subset D^0 \subset D \in \mathbf{C}\}.$$

Это определение представляет собой возможно более точную (с учетом того, что объем задан лишь на компактных множествах) имитацию определения (внешней) регулярности меры.

Теорема 1. *Если $\mu$ — борелевская мера, индуцированная некоторым регулярным объемом $\lambda$, то $\mu(C) = \lambda(C)$ для любого множества $C$ из $\mathbf{C}$.*

Доказательство. Если $C \in \mathbf{C}$, то, в силу регулярности $\lambda$, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое принадлежащее $\mathbf{C}$ множество $D$, что

$$C \subset D^0 \quad \text{и} \quad \lambda(D) \leqslant \lambda(C) + \varepsilon.$$

Согласно теореме 3 § 53,

$$\lambda(C) \leqslant \mu(C) \leqslant \mu(D^0) \leqslant \lambda(D) \leqslant \lambda(C) + \varepsilon;$$

так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то теорема доказана. □

Следующая теорема содержит утверждение обратного характера.

Теорема 2. *Пусть $\mu$ — регулярная борелевская мера. Если для любого $C$ из $\mathbf{C}$ положить $\lambda(C) = \mu(C)$, то так определенная функция множества $\lambda$ представляет собой регулярный объем, и борелевская мера, индуцированная объемом $\lambda$, совпадает с $\mu$.*

Доказательство. Функция $\lambda$, очевидно, является объемом. Так как мера $\mu$ регулярна, то для любого $C$ из $\mathbf{C}$ и для любого $\varepsilon > 0$ в $\mathbf{U}$ найдется такое множество $U$, что

$$C \subset U \quad \text{и} \quad \mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon.$$

Если компактное множество $D$ таково, что $C \subset D^0 \subset D \subset U$, то

$$\lambda(D) = \mu(D) \leqslant \mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon = \lambda(C) + \varepsilon,$$

и регулярность $\lambda$ таким образом доказана. Пусть $\widehat{\mu}$ — борелевская мера, индуцированная объемом $\lambda$; тогда, согласно теореме 1, $\widehat{\mu}(C) = \lambda(C) = \mu(C)$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$ и, следовательно, $\widehat{\mu} = \mu$. □

Теорема 3. *Если $\mu_0$ — бэровская мера и если для любого множества $C$ из $\mathbf{C}$*

$$\lambda(C) = \inf\{\mu_0(U_0)\colon C \subset U_0 \in \mathbf{U}_0\},$$

*то $\lambda$ представляет собой регулярный объем.*

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что $\lambda$ конечна, неотрицательна и монотонна.

Пусть $C$ и $D$ — множества из $\mathbf{C}$, а $U_0$ и $V_0$ — множества из $\mathbf{U}_0$, такие, что $C \subset U_0$ и $D \subset V_0$; тогда $C \cup D \subset U_0 \cup V_0 \in \mathbf{U}_0$ и, следовательно,

$$\lambda(C \cup D) \leqslant \mu_0(U_0 \cup V_0) \leqslant \mu_0(U_0) + \mu_0(V_0),$$

откуда

$$\lambda(C \cup D) \leqslant \inf \mu_0(U_0) + \inf \mu_0(V_0) = \lambda(C) + \lambda(D);$$

таким образом, полуаддитивность $\lambda$ доказана.

Пусть $C$ и $D$ — непересекающиеся множества из $\mathbf{C}$; тогда в $\mathbf{U}_0$ существуют такие непересекающиеся множества $U_0$ и $V_0$, что $C \subset U_0$ и $D \subset V_0$. Если $C \cup D \subset W_0 \in \mathbf{U}_0$, то

$$\lambda(C) + \lambda(D) \leqslant \mu_0(U_0 \cap W_0) + \mu_0(V_0 \cap W_0) \leqslant \mu_0(W_0)$$

и, следовательно,

$$\lambda(C) + \lambda(D) \leqslant \inf \mu_0(W_0) = \lambda(C \cup D).$$

Аддитивность $\lambda$ вытекает из этого неравенства и из доказанной выше полуаддитивности.

Для того чтобы доказать, что объем $\lambda$ регулярен, возьмем произвольное компактное множество $C$ и произвольное положительное число $\varepsilon$. Согласно определению $\lambda$, найдется такое множество $U_0$ из $\mathbf{U}_0$, что

$$C \subset U_0 \quad \text{и} \quad \mu_0(U_0) \leqslant \lambda(C) + \varepsilon.$$

Если $C \subset D^0 \subset D \subset U_0$, где $D$ — компактное множество, то

$$\lambda(D) \leqslant \mu_0(U_0) \leqslant \lambda(C) + \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 4. *Если $\mu_0$ — бэровская мера, то существует единственная регулярная борелевская мера $\mu$, такая, что $\mu(E) = \mu_0(E)$ для любого бэровского множества $E$.*

Доказательство. Положим, для любого $C$ из $\mathbf{C}$,

$$\lambda(C) = \inf\{\mu_0(U_0)\colon C \subset U_0 \in \mathbf{U}_0\};$$

тогда, в силу теоремы 3, $\lambda$ будет представлять собой регулярный объем. Рассмотрим индуцированную этим объемом борелевскую меру $\mu$. Согласно теореме 1, $\mu(C) = \lambda(C)$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$. Так как всякая бэровская мера регулярна (см. теорему 7 § 52), то $\lambda(C) = \mu_0(C)$ и, следовательно, $\mu(C) = \mu_0(C)$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$. Существование меры $\mu$, обладающей требуемыми свойствами, доказано; единственность ее вытекает из теоремы 8 § 52. $\square$

### Упражнения

1. Какие из функций, заданных в упр. 1 § 53, представляют собой регулярные объемы?

2. Если, в обозначениях теоремы 6 § 53, $\lambda$ представляет собой регулярный объем, то $\widehat{\lambda}$ — также регулярный объем.

3. Если $\mu$ — борелевская мера и $\lambda(C) = \sup\{\mu(C_0)\colon C \supset C_0 \in \mathbf{C}_0\}$ для всякого $C$ из $\mathbf{C}$, то мера $\mu$ регулярно пополнима тогда и только тогда, когда $\lambda$ является регулярным объемом (см. пример «е» в упр. 1 § 53).

4. Назовем объем $\lambda$ *внутренне регулярным*, если $\lambda(C)=\sup\{\lambda(D)\colon C^0\supset D\in\mathbf{C}\}$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$. Справедливы следующие теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2:

а) Если $\mu$ — борелевская мера, индуцированная внутренне регулярным объемом $\lambda$, то $\mu(C^0)=\lambda(C)$ для любого множества $C$ из $\mathbf{C}$.

б) Если $\mu$ — регулярная борелевская мера и $\lambda(C)=\mu(C^0)$, где $C\in\mathbf{C}$, то $\lambda$ представляет собой внутренне регулярный объем, и индуцированная им борелевская мера совпадает с $\mu$.

## § 55. Некоторые классы непрерывных функций

Пусть $X$, как обычно, локально компактное хаусдорфово пространство. Класс всех действительных непрерывных функций, каждая из которых тождественно равна нулю вне некоторого компактного множества, условимся обозначать $\mathcal{L}(X)$ или просто $\mathcal{L}$. Таким образом, $\mathcal{L}$ представляет собой класс всех тех действительных непрерывных функций $f$, для которых множества

$$N(f)=\{x\colon f(x)\neq 0\}$$

ограничены. В том случае, когда пространство $X$ не компактно и превращается в компактное пространство $X^*$ присоединением одной точки $x^*$, эта последняя называется иногда *бесконечно удаленной точкой* пространства $X$. При этом $\mathcal{L}$ можно определить как класс всех непрерывных функций, каждая из которых равна нулю в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки. Подкласс класса $\mathcal{L}(X)$, состоящий из всех неотрицательных функций, принадлежащих $\mathcal{L}$, будем обозначать $\mathcal{L}_+(X)$ или $\mathcal{L}_+$. Следующая теорема устанавливает некоторый результат, неявно фигурировавший ранее во многих наших построениях.

Теорема 1. *Если $C$ — произвольное компактное бэровское множество, то в $\mathcal{L}_+$ существует такая убывающая последовательность функций $\{f_n\}$, что*

$$\lim_n f_n(x)=\chi_C(x)$$

*в любой точке $x$ из $X$.*

Доказательство. Пусть $C=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, где $U_n$ — ограниченные открытые множества; тогда для любого целого положительного $n$ существует такая функция $g_n$ из $\mathcal{F}$ (см. § 50), что

$$g_n(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in C,\\ 0, & \text{если } x\notin U_n.\end{cases}$$

Положим $f_n=g_1\cap\ldots\cap g_n$; тогда последовательность $\{f_n\}$ — убывающая и

$$\lim_n f_n(x)=\chi_C(x)$$

во всякой точке $x$ из $X$. Так как $U_n$ ограничены, то $f_n\in\mathcal{L}_+$, $n=1,2,\ldots$ □

Пусть $\mu_0$ — бэровская мера, $f$ — какая-нибудь функция, принадлежащая классу $\mathcal{L}$, и $\{x\colon f(x)\neq 0\}\subset C\in\mathbf{C}_0$. Так как $\mu_0(C)<\infty$ и $f$ ограничена и измерима в смысле Бэра (см. теорему 2 § 51), то $f$ интегрируема по $\mu_0$ и

$$\int f\,d\mu_0=\int_C f\,d\mu_0.$$

Это верно, в частности, тогда, когда имеется некоторая борелевская мера $\mu$, и $\mu_0$ определена на бэровских множествах $E$ равенством $\mu_0(E)=$ $=\mu(E)$.

Теорема 2. *Если $\mu$ — бэровская мера, принимающая положительные значения на всех непустых открытых бэровских множествах, и $f\in\mathcal{L}_+$, то $\int f\,d\mu=0$ тогда и только тогда, когда $f(x)=0$ для всех $x$ из $X$.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Чтобы доказать его необходимость, предположим, что $\int f\,d\mu=0$, и возьмем ограниченное открытое бэровское множество $U$ такое, что $\{x\colon f(x)\neq 0\}\subset U$. Пусть $E=\{x\colon f(x)=0\}$. Так как

$$0=\int f\,d\mu\geqslant\int\limits_{U-E}f\,d\mu$$

и $f$ неотрицательна, то $\mu(U-E)=0$. Множество $U-E$ — открытое бэровское, поэтому $U-E=0$, т. е. $U\subset E$. □

Теорема 3. *Если $\mu_0$ — бэровская мера и $\varepsilon>0$, то, какова бы ни была интегрируемая простая бэровская функция $f$, существует интегрируемая простая функция*

$$g=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{C_i},$$

*такая, что $C_i$ — компактные бэровские множества, $i=1,\ldots,n$, и*

$$\int|f-g|\,d\mu_0\leqslant\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $f=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$ и $c$ — такая положительная постоянная, что $|f(x)|\leqslant c$ всюду на $X$ (т. е. $|\alpha_i|\leqslant c$, $i=1,\ldots,n$). Мера $\mu_0$ регулярна, поэтому для любого $i=1,\ldots,n$ существует такое компактное бэровское множество $C_i$, что

$$C_i\subset E_i\quad\text{и}\quad\mu_0(E_i)\leqslant\mu_0(C_i)+\frac{\varepsilon}{nc}.$$

Если $g=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{C_i}$, то

$$\int|f-g|\,d\mu_0=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\mu_0(E_i-C_i)\leqslant\varepsilon.\qquad\square$$

Теорема 4. *Если $\mu_0$ — бэровская мера, $\varepsilon$ — произвольное положительное число и $g=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{C_i}$ — простая функция, причем все $C_i$ — компактные бэровские множества, $i=1,\ldots,n$, то существует такая функция $h$, принадлежащая классу $\mathcal{L}$, что*

$$\int|g-h|\,d\mu_0\leqslant\varepsilon.$$

Доказательство. Так как $\{C_i, \ldots, C_n\}$ — конечный класс непересекающихся компактных множеств, то существует конечный класс $\{U_1, \ldots, U_n\}$ непересекающихся ограниченных открытых бэровских множеств, таких, что $C_i \subset U_i$, $i = 1, \ldots, n$. Мера $\mu_0$ регулярна, поэтому мы вправе предположить, что

$$\mu_0(U_i) \leqslant \mu_0(C_i) + \frac{\varepsilon}{nc}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $c > 0$ таково, что $|g(x)| \leqslant c$ для всех $x$ из $X$. Для каждого $i = 1, \ldots n$ существует функция $h_i$ из $\mathcal{F}$, равная нулю на $X - U_i$ и равная единице на $C_i$. Положим $h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$. Так как $h_i \in \mathcal{L}_+$, $i = 1, \ldots, n$, то $h \in \mathcal{L}$; далее, $|h(x)| \leqslant c$ всюду на $X$, потому что $U_i$ не пересекаются. Таким образом,

$$\int |f - g| \, d\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{U_i - C_i} |h| \, d\mu_0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} c\mu_0(U_i - C_i) \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

### Упражнения

1. Если $\mu$ — регулярная борелевская мера, то совокупность всевозможных конечных линейных комбинаций характеристических функций компактных множеств плотна в $\mathcal{L}_p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.

2. Если $\mu$ — регулярная борелевская мера, то $\mathcal{L}$ плотно в $\mathcal{L}_p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.

3. Если $\mu$ — регулярная борелевская мера, $E$ — борелевское множество конечной меры и $f$ — функция на $E$, измеримая в смысле Бореля, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $C$ в $E$, такое, что $\mu(E - C) \leqslant \varepsilon$ и $f$ непрерывна на $C$. [Указание. В том случае, когда $f$ — простая функция, этот результат можно получить тем же способом, каким была доказана теорема 3. В общем случае нужно взять последовательность простых функций $\{f_n\}$, сходящуюся к $f$; так как мера $\mu$ регулярна, то, в силу теоремы Егорова, существует компактное множество $C_0$ в $E$, такое, что $\mu(E) \leqslant \mu(C_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ и $\{f_n\}$ сходится на $C_0$ равномерно. Выберем в $E$ подмножество $C_n$ так, чтобы $\mu(E) \leqslant \mu(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ и $f_n$ была непрерывна на $C_n$. Тогда множество

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

будет обладать требуемыми свойствами.] Это — известная *теорема Лузина.*

## § 56. Линейные функционалы

*Линейным функционалом* на $\mathcal{L}$ называется функция $\Lambda$, заданная на $\mathcal{L}$ и обладающая тем свойством, что

$$\Lambda(\alpha f + \beta g) = \alpha \Lambda(f) + \beta \Lambda(g)$$

для любых двух функций $f$ и $g$ из $\mathcal{L}$ и для любых действительных чисел $\alpha$ и $\beta$. Линейный функционал $\Lambda$ назовем *положительным*, если $\Lambda(f) \geqslant 0$ для любой функции $f$ из $\mathcal{L}_+$. Заметим, что положительный линейный функционал $\Lambda$ обладает свойством монотонности, в том смысле, что если $f \in \mathcal{L}$, $g \in \mathcal{L}$ и $f \geqslant g$, то $\Lambda(f) \geqslant \Lambda(g)$. Легко видеть, что если $\mu_0$ — бэровская мера и $\Lambda(f) = \int f \, d\mu_0$, где $f \in \mathcal{L}$, то $\Lambda$ представляет собой положительный линейный функционал на $\mathcal{L}$. Основная цель настоящего параграфа состоит в доказательстве того, что любой положительный линейный функционал может быть представлен в таком виде.

Здесь удобно прибегнуть к следующему, несколько необычному, но весьма выразительному способу записи: условимся писать $E \subset f$ (или $E \supset f$), где $E$ — множество в $X$, а $f$ — любая действительная функция на $X$, если $\chi_E(x) \leqslant f(x)$ (соотв. $\chi_E(x) \geqslant f(x)$) во всех точках $x$ из $X$.

Теорема 1. *Если $\Lambda$ — положительный линейный функционал и если*

$$\lambda(C) = \inf\{\Lambda(f)\colon C \subset f \in \mathcal{L}_+\},$$

*где $C \in \mathbf{C}$, то $\lambda$ представляет собой регулярный объем. Если $\mu$ — борелевская мера, индуцированная этим объемом, то*

$$\mu(U) \leqslant \Lambda(f)$$

*для любого ограниченного открытого множества $U$ и для любой функции $f$ из $\mathcal{L}_+$ таких, что $U \subset f$.*

Доказательство. Так как функционал $\Lambda$ положителен, то $\lambda(C) \geqslant 0$, каково бы ни было $C$ из $\mathbf{C}$. Чтобы показать, что функция $\lambda$ конечна, возьмем произвольное компактное множество $C$ и любое ограниченное открытое множество $U$, содержащее $C$. Существует функция $f$ из $\mathcal{L}_+$, равная единице на $C$ и нулю на $X - U$; при этом $C \subset f \in \mathcal{L}_+$ и, следовательно,

$$\lambda(C) \leqslant \Lambda(f) < \infty.$$

Если $C$ и $D$ — компактные множества, такие, что $C \supset D$ и $C \subset f \in \mathcal{L}_+$, то, очевидно, $D \subset f$ и $\lambda(D) \leqslant \Lambda(f)$. Отсюда следует, что $\lambda(D) \leqslant \inf \Lambda(f) = \lambda(C)$, т. е. функция $\lambda$ монотонна.

Пусть $C$ и $D$ — компактные множества; если $C \subset f \in \mathcal{L}_+$ и $D \subset g \in \mathcal{L}_+$, то

$$C \cup D \subset f + g \in \mathcal{L}_+,$$

так что $\lambda(C \cup D) \leqslant \Lambda(f+g) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$. Отсюда следует, что

$$\lambda(C \cup D) \leqslant \inf \Lambda(f) + \inf \Lambda(g) = \lambda(C) + \lambda(D),$$

т. е. $\lambda$ полуаддитивна.

Пусть теперь $C$ и $D$ — непересекающиеся компактные множества; возьмем непересекающиеся ограниченные открытые множества $U$ и $V$ такие, что $C \subset U$ и $D \subset V$. Пусть $f$ — функция из $\mathcal{L}_+$, равная единице на $C$ и нулю на $X - U$, а $g$ — функция из $\mathcal{L}_+$, равная единице на $D$ и нулю на $X - V$. Если $C \cup D \subset h \in \mathcal{L}_+$, то

$$\lambda(C) + \lambda(D) \leqslant \Lambda(hf) + \Lambda(hg) = \Lambda(h(f+g)) \leqslant \Lambda(h).$$

Отсюда следует, что

$$\lambda(C) + \lambda(D) \leqslant \inf \Lambda(h) = \lambda(C \cup D);$$

так как полуаддитивность $\lambda$ была установлена выше, то тем самым доказано, что $\lambda$ аддитивна.

Итак, мы доказали, что $\lambda$ есть объем; остается только установить его регулярность. Для любого $C$ из $\mathbf{C}$ и для любого $\varepsilon > 0$ в $\mathcal{L}_+$ найдется такая функция $f$, что

$$C \subset f \quad \text{и} \quad \Lambda(f) \leqslant \lambda(C) + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Если $\gamma$ — действительной число, $0 < \gamma < 1$, и $D = \{x\colon f(x) \geqslant \gamma\}$, то

$$C \subset \{x\colon f(x) \geqslant 1\} \subset \{x\colon f(x) > \gamma\} \subset D^0 \subset D \in \mathbf{C}.$$

Так как $D \subset \frac{1}{\gamma} f \in \mathcal{L}_+$, то

$$\lambda(D) \leqslant \frac{1}{\gamma}\Lambda(f) \leqslant \frac{1}{\gamma}\left(\lambda(C) + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Выберем $\gamma$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\gamma}\left(\lambda(C) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \lambda(C) + \varepsilon;$$

тогда

$$\lambda(D) \leqslant \lambda(C) + \varepsilon$$

и, так как $\varepsilon$ произвольно, мы видим, что $\lambda$ — регулярный объем.

Последнее утверждение теоремы вытекает из регулярности меры $\mu$. В самом деле, если $C$ — компактное множество, содержащееся в $U$, то $C \subset f$ и, следовательно,

$$\mu(C) = \lambda(C) \leqslant \Lambda(f),$$

откуда $\mu(U) = \sup \mu(C) \leqslant \Lambda(f)$. □

Теорема 2. *Пусть $\Lambda$ — положительный линейный функционал на $\mathcal{L}$. Если*

$$\lambda(C) = \inf\{\Lambda(f)\colon C \subset f \in \mathcal{L}_+\}$$

*для любого $C$ из $\mathbf{C}$, и если $\mu$ — борелевская мера, индуцированная объемом $\lambda$, то*

$$\int f\, d\mu \leqslant \Lambda(f)$$

*для любой функции $f$ из $\mathcal{L}_+$.*

Доказательство. Так как $\int f\, d\mu$ и $\Lambda(f)$ зависят от $f$ линейно, то достаточно доказать это неравенство для функций $f$, подчиненных для всех $x$ из $X$ условию $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Фиксируем целое положительное число $n$ и полагаем для $i = 1, \ldots, n$

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) < \frac{i-1}{n}, \\ \dfrac{f(x) - \frac{i-1}{n}}{\frac{1}{n}} = nf(x) - (i-1), & \text{если } \frac{i-1}{n} < f(x) \leqslant \frac{i}{n}, \\ 1, & \text{если } \frac{i}{n} \leqslant f(x). \end{cases}$$

Так как

$$f_i = ([nf - (i-1)] \cup 0) \cap 1 = ([nf - (i-1)] \cap 1) \cup 0,$$

то все $f_i$ принадлежат $\mathcal{L}_+$. Если в какой-либо точке $x$

$$\frac{j-1}{n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{j}{n},$$

то

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant j-1, \\ 0, & \text{при } j+1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

откуда следует, что $f(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$ всюду на $X$.

Положим $U_i = \{x\colon f(x) > \frac{i}{n}\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$; тогда $U_i$ — ограниченные открытые множества, такие, что $U_i \subset f_i$ и, в силу теоремы 1, $\mu(U_i) \leqslant \Lambda(f_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Так как $U_0 \supset U_1 \supset \ldots \supset U_n = 0$, то

$$\Lambda(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda(f_i) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu(U_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)\mu(U_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n}[\mu(U_i) - \mu(U_{i+1})] = \sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n}\mu(U_i - U_{i+1}) - \frac{1}{n}\mu(U_1) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{U_i - U_{i+1}} f\,d\mu - \frac{1}{n}\mu(U_1) = \int\limits_{U_1} f\,d\mu - \frac{1}{n}\mu(U_1) \geqslant \int f\,d\mu - \frac{1}{n}\mu(U_0).$$

Так как $\mu(U_0) < \infty$, а $n$ произвольно, то теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть $\Lambda$ — положительный линейный функционал на $\mathcal{L}$. Если*

$$\lambda(C) = \inf\{\Lambda(f)\colon C \subset f \in \mathcal{L}_+\},$$

*где $C \in \mathbf{C}$, и если $\mu$ — борелевская мера, индуцированная объемом $\lambda$, то для любого компактного множества $C$ и для любого положительного числа $\varepsilon$ существует функция $f_0$ из $\mathcal{L}_+$, такая, что $C \subset f_0$ и*

$$\Lambda(f_0) \leqslant \int f_0\,d\mu + \varepsilon.$$

Доказательство. Выберем функцию $f_0$ из $\mathcal{L}_+$ таким образом, чтобы

$$C \subset f_0 \quad \text{и} \quad \Lambda(f_0) \leqslant \lambda(C) + \varepsilon;$$

при этом будут выполняться неравенства

$$\Lambda(f_0) \leqslant \mu(C) + \varepsilon \leqslant \int f_0\,d\mu + \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 4. *Для всякого положительного линейного функционала $\Lambda$ существует такая борелевская мера $\mu$, что*

$$\Lambda(f) = \int f\,d\mu$$

*для всех $f$ из $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Для множеств $C$ из $\mathbf{C}$ положим

$$\lambda(C) = \inf\{\Lambda(f)\colon C \subset f \in \mathcal{L}_+\}$$

и возьмем борелевскую меру $\mu$, индуцированную объемом $\lambda$. Пусть $f$ — произвольная функция из $\mathcal{L}$.

Возьмем компактное множество $C$, такое, что $\{x\colon f(x) \neq 0\} \subset C$, и положительное число $\varepsilon$. Согласно теореме 3, существует функция $f_0$ из $\mathcal{L}_+$, обладающая следующими свойствами:

$$C \subset f_0 \quad \text{и} \quad \Lambda(f_0) \leqslant \int f_0\,d\mu + \varepsilon.$$

Заметим, что так как $C \subset f_0$, то $ff_0 \geqslant f$. Если $c$ — такая положительная постоянная, что $|f(x)| \leqslant c$ для всех $x$ из $X$, то функция $(f+c)f_0$ принадлежит $\mathcal{L}_+$ и, в силу теоремы 2,

$$\Lambda(f) + c\Lambda(f_0) = \Lambda((f+c)f_0) \geqslant \int (f+c)f_0\, d\mu = \int f\, d\mu + c \int f_0\, d\mu.$$

Отсюда следует, что

$$\Lambda(f) \geqslant \int f\, d\mu + c\left[\int f_0\, d\mu - \Lambda(f_0)\right] \geqslant \int f\, d\mu - c\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon$ произвольно, то $\Lambda(f) \geqslant \int f\, d\mu$ (т. е. теорема 2 распространяется на все функции $f$ из $\mathcal{L}$). Применив это неравенство к функции $-f$, мы получим обратное неравенство для $f$. □

Теорема 5. *Пусть $\mu$ — регулярная борелевская мера. Если $\Lambda(f) = \int f\, d\mu$, где $f \in \mathcal{L}$, и $\lambda(C) = \inf\{\Lambda(f)\colon C \subset f \in \mathcal{L}_+\}$, где $C \in \mathbf{C}$, то $\mu(C) = \lambda(C)$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$. Отсюда, в частности, следует, что представление положительного линейного функционала в виде интеграла по регулярной борелевской мере единственно.*

Доказательство. Очевидно, что $\mu(C) \leqslant \lambda(C)$. Если $C \in \mathbf{C}$ и $\varepsilon > 0$, то, так как $\mu$ регулярна, существует такое содержащее $C$ ограниченное открытое множество $U$, что $\mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon$. Пусть $f$ — функция из $\mathcal{F}$, равная единице на $C$ и нулю на $X - U$; тогда $C \subset f \in \mathcal{L}_+$ и

$$\lambda(C) \leqslant \Lambda(f) = \int f\, d\mu \leqslant \mu(U) \leqslant \mu(C) + \varepsilon;$$

так как $\varepsilon$ произвольно, то теорема доказана. □

**Упражнения**

1. Если $x_0$ — точка из $X$, $\Lambda(f) = f(x_0)$ для любой $f$ из $\mathcal{L}$ и $\mu(E) = \chi_E(x_0)$ для борелевских множеств $E$, то $\Lambda(f) = \int f\, d\mu$.

2. Если $\mu_0$ — бэровская мера, $\Lambda(f) = \int f\, d\mu_0$ для $f$ из $\mathcal{L}$ и если $\mu$ — борелевская мера, такая, что $\Lambda(f) = \int f\, d\mu$, то $\mu(E) = \mu_0(E)$ для любого бэровского множества $E$.

3. Пусть $\mu_0$ — бэровская мера и $\Lambda(f) = \int f\, d\mu_0$ для $f$ из $\mathcal{L}$. Положим

$$\lambda_*(U) = \sup\{\Lambda(f)\colon U \supset f \in \mathcal{L}_+\}$$

для произвольного $U$ из $\mathbf{U}$ и

$$\mu^*(E) = \inf\{\lambda_*(U)\colon E \subset U \in \mathbf{U}\}$$

для произвольного $\sigma$-ограниченного множества $E$. Тогда $\mu^*(E) = \mu_0(E)$ для любого бэровского множества $E$.

4. Пусть $X$ — компактное пространство, полученное путем присоединения символа $\infty$ к дискретному пространству целых положительных чисел. В этом случае функция $f$, принадлежащая $\mathcal{L}$, представляет собой последовательность $\{f(n)\}$ действительных чисел, сходящуюся к $f(\infty)$. Наиболее общий положительный линейный функционал имеет в этом случае вид

$$\Lambda(f) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant \infty} f(n)\Lambda_n,$$

где $\sum\limits_n \Lambda_n$ — произвольный сходящийся ряд положительных чисел.

5. Линейный функционал $\Lambda$ на $\mathcal{L}$ называется *ограниченным*, если существует такое постоянное число $k$, что $|\Lambda(f)| \leqslant k \sup\{|f(x)|\colon x \in X\}$ для любой функции $f$ из $\mathcal{L}$. Всякий ограниченный линейный функционал представляется в виде разности двух положительных линейных функционалов. Доказательство этого предложения нетривиально, его можно получить, построив аналог жордановского разложения обобщенной меры.

6. Если $X$ — компактное пространство, то всякий положительный линейный функционал на $\mathcal{L}$ ограничен.

# ГЛАВА 11

# МЕРА ХААРА

## § 57. Открытые подгруппы

Прежде чем излагать теорию меры в топологических группах, мы приведем в этом параграфе три топологические теоремы, находящие важное применение в теории меры. Эти теоремы касаются открытых подгрупп; подгруппа $Z$ топологической группы $X$ называется *открытой* если $Z$ представляет собой открытое подмножество. Мы покажем, что все топологические свойства группы $X$ присущи всякой ее открытой подгруппе $Z$; прочие свойства находят свое отражение в строении класса левых смежных подмножеств по $Z$, топология его оказывается дискретной. Мы покажем, кроме того, что всякая локально компактная топологическая группа обладает достаточно малой открытой подгруппой, т. е. такой открытой подгруппой, в которой не могут иметь места патологические явления, связанные с поведением меры « на бесконечности».

Теорема 1. *Для того чтобы подгруппа $Z$ топологической группы $X$ была открытой, необходимо и достаточно, чтобы ее открытое ядро $Z^0$ было не пусто.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Докажем его достаточность. Так как по условию $Z^0 \neq 0$, то существует элемент $z_0$, входящий в $Z^0$. Если $z$ — произвольный элемент из $Z$, то $zz_0^{-1} \in Z$ и, следовательно, $zz_0^{-1}Z = Z$. Таким образом, $zz_0^{-1}Z^0 = Z^0$, откуда

$$z = (zz_0^{-1})z_0 \in Z^0.$$

Так как элемент $z$ из $Z$ был выбран произвольно, то $Z \subset Z^0$, т. е. $Z$ — открытое множество. □

Теорема 2. *Если $Z$ — открытая подгруппа топологической группы $X$, то соединение любого класса левых смежных подмножеств по $Z$ одновременно замкнуто и открыто в $X$.*

Доказательство. Так как дополнение соединения произвольного класса смежных множеств само является соединением такого рода, а всякое множество, обладающее открытым дополнением, замкнуто, то достаточно доказать, что любое соединение левых смежных подмножеств представляет собой открытое множество. Далее,соединение открытых множеств непременно открыто, поэтому достаточно доказать, что всякое левое смежное подмножество открыто, а это, в свою очередь, непосредственно вытекает из того, что сама подгруппа $Z$ является открытым множеством. □

Теорема 3. *Если $E$ — любое борелевское множество в локально компактной топологической группе $X$, то в $X$ существует такая $\sigma$-компактная открытая подгруппа $Z$, что $E \subset Z$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 § 51, достаточно доказать, что если $\{C_n\}$ — последовательность компактных множеств в $X$, то все $C_n$, $n = 1, 2, \ldots$, заключены в некоторой $\sigma$-компактной подгруппе $Z$.

Пусть $D$ — компактное множество, содержащее некоторую окрестность единичного элемента $e$. Положим $D_0 = D$ и

$$D_{n+1} = D_n^{-1} D_n \cup C_{n+1}$$

для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$; тогда множество $Z$ $\sigma$-компактно, содержит внутренние точки и покрывает все $C_n$. Доказательство теоремы будет завершено, если мы покажем, что $Z^{-1} Z \subset Z$.

Прежде всего докажем, что если $e \in D_n$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, то $D_n \subset D_{n+1}$. В самом деле, если $e \in D_n$, то $e \in D_n^{-1}$; тогда предположив, что $x \in D_n$, получим

$$x \in D_n^{-1} x \subset D_n^{-1} D_n \subset D_{n+1}.$$

Так как $e \in D_0$, то $D_n \subset D_{n+1}$ при любом $0, 1, 2, \ldots$.

Если $x$ и $y$ — любые два элемента из $Z$, то $x$ и $y$ оба принадлежат некоторому $D_n$ и, согласно выводу предыдущего абзаца,

$$x^{-1} y \in D_n^{-1} D_n \subset D_{n+1} \subset Z. \qquad \square$$

## § 58. Существование меры Хаара

Мерой Хаара называется борелевская мера $\mu$ в локально компактной топологической группе $X$, обладающая следующими свойствами: $\mu(U) > 0$ для любого непустого борелевского открытого множества $U$ и $\mu(xE) = \mu(E)$ для любого борелевского множества $E$. В этом параграфе мы докажем, что во всякой локально компактной топологической группе существует хотя бы одна мера Хаара.

Второе условие, фигурирующее в определении меры Хаара, можно назвать левой инвариантностью (или инвариантностью относительно левых переносов). Заметим, что первое условие равносильно требованию, чтобы $\mu$ не равнялось нулю тождественно. Можно, очевидно, предположить, что $e \in U$. Если теперь $\mu(U) = 0$, где $U$ — некоторое непустое борелевское открытое множество, а $C$ — любое компактное множество, то класс $\{xU \colon x \in C\}$ образует открытое покрытие множества $C$. Так как $C$ компактно, то в нем содержится такое конечное подмножество $\{x_1, \ldots, x_n\}$, что $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i U$ и, в силу инвариантности меры $\mu$ слева, $\mu(C) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i U) = n\mu(U) = 0$. Если же $\mu$ равна нулю на всех компактных множествах, то она равна нулю и на всех борелевских множествах. Таким образом, можно сказать, что мера Хаара есть инвариантная слева борелевская мера, не равная тождественно нулю.

Прежде чем осуществить построение меры Хаара, отметим еще наличие некоторой асимметрии в ее определении. Левые и правые переносы в группе совершенно симметричны, потому выделение именно левых переносов в нашем определении кажется неестественным. То, что мы здесь определили, лучше было бы назвать «левой мерой Хаара»; одновременно следовало бы ввести «правую меру Хаара» и подробно изучить связь между той и другой. Действительно, в дальнейшем мы иногда будем пользоваться этими более точными терминами. Однако в большинстве случаев, в частности в вопросе существования, имеет место полная симметрия между правыми и левыми мерами Хаара, и именно это обстоятельство оправдывает «несимметричный» подход к ним. В самом деле, так как отображение группы $X$ самой на себя, переводящее $x$ в $x^{-1}$, сохраняя все групповые и топологические свойства, преобразует все «левые» свойства в «правые» и наоборот, то из всякой «левой теоремы» следует соответствующая «правая теорема» и обратно. В частности, нетрудно убедиться в том, что если $\mu$ — левая мера Хаара, то функция множества $\nu$, определенная для любого борелевского множества $E$ равенством $\nu(E)=\mu(E^{-1})$, представляет собой правую меру Хаара; обратно, если $\mu$ — правая мера Хаара, то $\nu$ — левая.

Пусть $E$ — произвольное ограниченное множество, а $F$ — произвольное множество, такое, что $F^0 \neq 0$; определим «отношение» $E:F$ как наименьшее целое положительное число $n$, обладающее следующим свойством: в $X$ есть множество $\{x_1, \ldots, x_n\}$, состоящее из $n$ элементов, такое, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i F$. Легко видеть, что, так как $E$ ограничено и $F^0 \neq 0$, то такое конечное $n$ существует; кроме того, если множество $A$ ограничено и в то же время содержит внутренние точки, то

$$E:F \leqslant (E:A)(A:F).$$

Наш подход к построению меры Хаара оправдывается следующими соображениями. Как было показано в предыдущей главе, для того чтобы в локально компактной топологической группе задать борелевскую меру, достаточно построить некоторый объем $\lambda$, т. е. функцию множества на $\mathbf{C}$, обладающую известными свойствами аддитивности. Для компактного множества $C$ и непустого открытого множества $U$ отношение $C:U$ служит мерой сравнения размеров $C$ и $U$. Умножая $C:U$ на некоторый множитель, зависящий от размеров множества $U$, и затем совершая в этом произведении некоторый предельный переход, в предположении, что $U$ неограниченно уменьшается, мы получим в качестве предела значение $\lambda$ на множестве $C$.

Сказанное в предыдущем абзаце не вполне точно. Чтобы обнаружить это и заодно сделать последующее изложение более наглядным, рассмотрим такой пример. Пусть $X$ — эвклидова плоскость, $\mu$ — лебеговская мера и $C$ — произвольное компактное множество. Внутренность круга произвольного радиуса $r>0$ обозначим $U_r$ и положим $n(r)=C:U_r$. При этом, очевидно, $n(r)\pi r^2 \geqslant \mu(C)$. Известно, что $\lim\limits_{r\to 0} n(r)\pi r^2$ существует, но равен не $\mu(C)$, а $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\mu(C)$. Иначе говоря, при заданной мере, принимающей значение $\pi r^2$ на $U_r$, указанный процесс приводит к новой мере, отличающейся от исходной некоторым постоянным множителем. С целью исключить этот множитель мы будем рассматривать вместо $C : U$ частное двух отношений $\frac{C:U}{A:U}$, где $A$ — некоторое фиксированное компактное множество с внутренними точками.

Теорема 1. *Каково бы ни было непустое открытое множество $U$ и компактное множество $A$, имеющее внутренние точки, функция множества $\lambda_U$, определенная на компактных множествах $C$ равенством*

$$\lambda_U(C) = \frac{C:U}{A:U},$$

*неотрицательна, конечна, монотонна, полуаддитивна и инвариантна слева; кроме того, она обладает тем свойством, что если $C$ и $D$ — любые компактные множества, для которых $CU^{-1} \cap DU^{-1} = 0$, то*

$$\lambda_U(C \cup D) = \lambda_U(C) + \lambda_U(D).$$

Доказательство. Все перечисленные здесь свойства функции $\lambda_U$, кроме, может быть, последнего, вытекают непосредственно из определения отношения $C : U$. Для доказательства последнего утверждения подвергнем $U$ левому переносу с помощью некоторого элемента $x$; заметим, что если $C \cap xU \neq 0$, то $x \in CU^{-1}$, и если $D \cap xU \neq 0$, то $x \in DU^{-1}$. Следовательно, никакое $xU$ не может пересекаться одновременно с $C$ и $D$, а отсюда и вытекает последнее указанное в теореме свойство функции $\lambda_U$. □

Теорема 2. *Во всякой локально компактной топологической группе $X$ существует хотя бы одна регулярная мера Хаара.*

Доказательство. В силу теорем 5 и 7 § 53, достаточно построить инвариантный слева объем, не равный тождественно нулю. В силу теоремы 3 § 53, мера, индуцированная таким объемом, не равна нулю тождественно. Это и будет искомая регулярная мера Хаара.

Пусть $A$ — какое-нибудь фиксированное множество и $\mathbf{N}$ — класс всех окрестностей единичного элемента. Для любой окрестности $U$ из $\mathbf{N}$ возьмем соответствующую функцию $\lambda_U$, определенную на компактных множествах $C$ равенством

$$\lambda_U = \frac{C:U}{A:U}.$$

Так как $C : U \leqslant (C : A)(A : U)$, то

$$0 \leqslant \lambda_U(C) \leqslant C : A$$

для любого $C$ из $\mathbf{C}$. Согласно теореме 1, функция $\lambda_U$ отличается от объема только тем, что она может не быть аддитивной. Сейчас, прибегнув к теореме Тихонова о компактности произведения пространств, мы выделим такую функцию, предельную для функций $\lambda_U$, которая обладает всеми свойствами объема, в том числе свойством аддитивности.

Каждому множеству $C$ и $\mathbf{C}$ поставим в соответствие замкнутый интервал $[0, C : A]$ и возьмем тихоновское произведение $\Phi$ всех таких интервалов. $\Phi$ представляет собой компактное хаусдорфово пространство, точками которого служат действительные функции $\varphi$, определенные на $\mathbf{C}$; при этом $0 \leqslant \varphi(C) \leqslant C : A$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$. Функция $\lambda_U$, при любом фиксированном $U$ из $\mathbf{N}$, представляет собой точку пространства $\Phi$.

Для любого $U$ из $\mathbf{N}$ пусть $\Delta(U)$ означает множество всех тех функций $\lambda_V$, для которых $V \subset U$, т. е.

$$\Delta(U) = \{\lambda_V\colon U \supset V \in \mathbf{N}\}.$$

Если $\{U_1, \ldots, U_n\}$ — любой конечный класс окрестностей единичного элемента, т. е. любой конечный подкласс класса $\mathbf{N}$, то $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ также является окрестностью единичного элемента и

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \subset U_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Delta(U_i)$$

и, так как всякое $\Delta(U)$ содержит $\lambda_U$ и, следовательно, непусто, то любой конечный подкласс класса множеств вида $\Delta(U)$, где $U \in \mathbf{N}$, имеет непустое пересечение. В силу компактности пространства $\Phi$, существует точка $\lambda$, принадлежащая пересечению замыканий всех $\Delta(U)$:

$$\lambda \in \bigcap \{\overline{\Delta(U)}\colon U \in \mathbf{N}\}.$$

Мы покажем, что эта функция $\lambda$ и есть искомый объем.

Ясно, что $0 \leqslant \lambda(C) \leqslant C : U < \infty$ для любого $C$ из $\mathbf{C}$. Покажем, что функция $\lambda$ монотонна; для этого заметим, что при любом фиксированном $C$ из $\mathbf{C}$ функция $\xi_C$ определенная на $\Phi$ равенством $\xi_C(\varphi) = \varphi(C)$, непрерывна, а потому, каковы бы ни были компактные множества $C$ и $D$, множество

$$\Delta = \{\varphi\colon \varphi(C) \leqslant \varphi(D)\} \subset \Phi$$

замкнуто. Если $C \subset D$ и $U \in \mathbf{N}$, то $\lambda_U \in \Delta$ и, следовательно, $\Delta(U) \subset \Delta$, а так как $\Delta$ замкнуто, то $\lambda \in \overline{\Delta(U)} \subset \Delta$; таким образом, $\lambda$ монотонна.

Доказательство полуаддитивности функции $\lambda$ проводится с помощью вполне аналогичного рассуждения; поэтому мы его опускаем и переходим к доказательству того, что $\lambda$ аддитивна. Пусть $C$ и $D$ — непересекающиеся компактные множества; тогда существует окрестность $U$ единичного элемента $e$, такая, что $CU^{-1} \cap DU^{-1} = 0$. Если $V \in \mathbf{N}$ и $V \subset U$, то $CV^{-1} \cap DV^{-1} = 0$, и (см. теорему 1)

$$\lambda_V(C \cup D) = \lambda_V(C) + \lambda_V(D).$$

Это означает, что при $V \subset U$ функция $\lambda_V$ принадлежит замкнутому множеству $\Delta' = \{\varphi\colon \varphi(C \cup D) = \varphi(C) + \varphi(D)\}$ и, следовательно, $\Delta(U) \subset \Delta'$. Отсюда вытекает, что $\lambda \in \overline{\Delta(U)} \subset \Delta'$, т. е. $\lambda$ аддитивна.

Еще раз повторяя рассуждение такого типа, мы докажем, что $\lambda(A) = 1$ (в силу того, что $\lambda_U(A) = 1$ при любом $U$ из $\mathbf{N}$). Таким образом, функция $\lambda$, относительно которой мы уже знаем, что она является объемом, не равна нулю тождественно. Инвариантность функции $\lambda$ слева следует из соответствующего свойства всех $\lambda_U$. □

### Упражнения

1. Существование правой меры Хаара можно получить, опираясь на существование левой меры Хаара, если ввести группу $\widehat{X}$, двойственную к $X$ в следующем смысле. По определению, $\widehat{X}$ состоит из тех же элементов обладает такой же топологией, что и $X$, а произведение элемента $x$ на элемент $y$, т. е. $xy$, в $\widehat{X}$ определяется как произведение $y$ на $x$, т. е. $yx$, в $X$.

2. Мера Хаара, очевидно, не единственна, так как если $\mu$ — мера Хаара, то $c\mu$, где $c$ — любое положительное число, также представляет собой меру Хаара.

3. Если функция $\lambda_U$, где $U \in \mathbf{N}$, определена так, как в теореме 1, то для любого компактного множества $C$, содержащего хотя бы одну внутреннюю точку, выполняются неравенства $0 < \frac{1}{A:C} \leqslant \lambda_U(C)$. Отсюда следует, что $\lambda_U(C) > 0$, коль скоро $C^0 \neq 0$.

4. Приведем известный пример группы, в которой левые и правые меры Хаара существенно различны. Пусть $X$ — множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $0 < x < \infty$ и $-\infty < y < \infty$; легко видеть, что относительно обычного матричного умножения $X$ является группой. Если $X$ топологизирована естественным образом как полуплоскость эвклидовой плоскости, то $X$ оказывается локально компактной топологической группой. Если мы положим для произвольного борелевского множества $E$

$$\mu(E) = \int_E\int \frac{1}{x^2}\,dx\,dy \quad \text{и} \quad \nu(E) = \int_E\int \frac{1}{x}\,dx\,dy$$

(где интегралы берутся по лебеговской мере в плоскости), то $\mu$ и $\nu$ будут представлять собой соответственно левую и правую меры Хаара. Так как $\mu(E^{-1}) = \nu(E)$, то на этом примере мы видим, что могут существовать измеримые множества $E$, для которых $\mu(E) < \infty$ и $\mu(E^{-1}) = \infty$.

5. $C$ и $D$ — компактные множества; следует ли из $\mu(C) = \mu(D) = 0$, что $\mu(CD) = 0$?

6. Пусть $\mu$ — мера Хаара в $X$; для того чтобы группа $X$ была дискретной, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(\{x\}) \neq 0$ хотя бы для одного $x$ из $X$.

7. Всякая локально компактная топологическая группа $X$ удовлетворяет условию, сформулированному в упр. 10 § 31 (см. § 57).

8. Если мера Хаара в $X$ конечна, то группа $X$ компактна.

9. Если $\mu$ — мера Хаара в $X$, то следующие четыре условия взаимно-эквивалентны: а) группа $X$ $\sigma$-компактна, б) мера $\mu$ вполне $\sigma$-конечна, в) всякий класс непересекающихся непустых открытых борелевских множеств конечнен или счетен, г) для любого непустого открытого борелевского множества $U$ существует последовательность $\{x_n\}$ элементов из $X$, такая, что

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n U.$$

## § 59. Измеримые группы

Топологическая группа, по определению, представляет собой группу $X$ с топологией, удовлетворяющей некоторой аксиоме отделимости, и обладающую тем свойством, что отображение (произведения $X \times X$ на $X$), которое переводит $(x, y)$ в $x^{-1}y$, непрерывно. Здесь для нас будет более полезно другое определение, содержащее требование, чтобы отображение $S$ (произведения $X \times X$ самого на себя), заданное равенством $S(x, y) = (x, xy)$, было гомеоморфизмом. Оба эти определения эквивалентны. В самом деле, если $X$ — топологическая группа в смысле первого определения, то отображение $S$ непрерывно; а так как оно, очевидно, взаимно-однозначно и $S^{-1}(x, y) = (x^{-1}, x^{-1}y)$, то и $S^{-1}$ непрерывно, т. е. $S$ представляет собой гомеоморфизм. Если, наоборот, дано, что $S$ есть гомеоморфизм, то $S^{-1}$ непрерывно; непрерывным будет и отображение, состоящее из $S^{-1}$ с последующим проектированием $X \times X$ на $X$. (В том случае когда $X$ — числовая прямая и групповой операцией служит сложение, отображение $S$ имеет простой геометрический смысл: оно смещает любую точку $(x, y)$ плоскости в вертикальном направлении на отрезок, равный $x$.)

Назовем теперь *измеримой группой* пространство $(X, \mathbf{S}, \mu)$ с $\sigma$-конечной мерой, обладающее следующими свойствами: а) $\mu$ не равна тождественно нулю, б) $X$ есть группа, в) $\sigma$-кольцо $\mathbf{S}$ и мера $\mu$ инвариантны относительно левых переносов в $X$ и г) отображение $S$ произведения $X \times X$ самого на себя, определенное равенством $S(x, y) = (x, xy)$, переводит измеримые множества в измеримые. (Инвариантность $\mathbf{S}$ относительно левых переносов означает, конечно, что $xE \in \mathbf{S}$ при любых $x$ из $X$ и $E$ из $\mathbf{S}$; измеримыми множествами в $X \times X$ называются, как обычно, множества, принадлежащие $\sigma$-кольцу $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$.)

Если $X$ — локально компактная группа, $\mathbf{S}$ — класс всех бэровских множеств в $X$ в $\mu$ — мера Хаара, то $(X, \mathbf{S}, \mu)$ представляет собой измеримую группу; это вытекает из того, что $S$ есть гомеоморфизм (следовательно, $S$ преобразует бэровские множества в бэровские множества), а класс всех бэровских множеств в $X \times X$ совпадает с $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$ (в силу теоремы 5 § 51). Дальнейшее исследование измеримых групп имеет своей целью выяснение того, какие сведения о топологической группе можно извлечь, изучая ее лишь с точки зрения теории меры.

Если $X$ — любое измеримое пространство (в частности, если $X$ — любая измеримая группа), то взаимно-однозначное отображение $R$ произведения $X \times X$ самого на себя, определенное равенством $R(x, y) = (y, x)$, преобразует измеримые множества в измеримые; чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что если $E$ — измеримый прямоугольник, то $R(E)$ и $R^{-1}(E) (= R(E))$ также являются измеримыми прямоугольниками. Так как произведение двух отображений, переводящих измеримые множества в измеримые, обладает тем же свойством, то в нашем распоряжении оказывается значительный запас таких отображений — именно всевозможные произведения степеней $S$ и $R$. Помимо преобразования $S$ мы часто будем пользоваться еще его «отражением» $T = R^{-1}SR$; заметим, что $T(x, y) = (yx, y)$.

До конца этого параграфа мы будем предполагать, что $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(X, \mathbf{S}, \nu)$ — измеримые группы, $\mu$ и $\nu$ — меры (вообще говоря, различные), $R$, $S$ и $T$ — отображения, описанные в предыдущих абзацах.

Теорема 1. *Если $E$ — любое множество в $X \times X$, то*

$$(S(E))_x = xE_x \quad \text{и} \quad (T(E))^y = yE^y$$

*для любых $x$ и $y$ из $X$.*

Доказательство. Утверждение, касающееся $S$, следует из равенства

$$\chi_{S(E)}(x, y) = \chi_E(x, x^{-1}y),$$

а также из того факта, что $y \in (S(E))_x$ тогда и только тогда, когда $\chi_{S(E)}(x, y) = 1$, и $x^{-1}y \in E_x$ тогда и только тогда, когда $\chi_E(x, x^{-1}y) = 1$. Утверждение, относящееся к $T$, доказывается подобным же образом. □

Теорема 2. *Отображения $S$ и $T$ преобразуют $(X \times X, \mathbf{S} \times \mathbf{S}, \mu \times \nu)$ само на себя с сохранением меры.*

Доказательство. Пусть $E$ — измеримое множество в $X \times X$. Тогда, согласно теореме Фубини и теореме 1,

$$(\mu \times \nu)(S(E)) = \int \nu((S(E))_x)\, d\mu(x) = \int \nu(xE_x)\, d\mu(x) =$$
$$= \int \nu(E_x)\, d\mu(x) = (\mu \times \nu)(E);$$

таким образом, $S$ сохраняет меру. Соответствующее свойство отображения $T$ устанавливается подобным же образом с помощью сечений $(T(E))^y$. □

Теорема 3. *Если* $Q = S^{-1}RS$, *то*

$$(Q(A \times B))_{x^{-1}} = xA \cap B^{-1}$$

*и*

$$(Q(A \times B))^{y^{-1}} = \begin{cases} Ay, & \text{когда } x \in B, \\ 0, & \text{когда } x \notin B \end{cases}.$$

Доказательство. Заметим, что $Q(x, y) = (xy, y^{-1})$ и $Q^{-1} = Q$. Мы имеем равенства

$$\chi_{Q(A \times B)}(x^{-1}, y) = \chi_{A \times B}(x^{-1}y, y^{-1}) = \chi_{xA}(y)\chi_B(y^{-1});$$

далее, $y \in (Q(A \times B))_{x^{-1}}$ в том и только в том случае, если $\chi_{Q(A \times B)}(x^{-1}, y) = 1$, а $y \in xA \cap B^{-1}$ в том и только в том случае, если $\chi_{xA}(y)\chi_B(y^{-1}) = 1$. Отсюда следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение следует из равенств

$$\chi_{Q(A \times B)}(x, y^{-1}) = \chi_{A \times B}(xy^{-1}, y) = \chi_{Ay}(x)\chi_B(y)$$

и из того факта, что $y \in (Q(A \times B))^{y^{-1}}$ тогда и только тогда, когда $\chi_{Q(A \times B)}(x, y^{-1}) = 1$, а $x \in Ay$ и $y \in B$ тогда и только тогда, когда $\chi_{Ay}(x)\chi_B(y) = 1$. □

Теорема 4. *Если $A$ — измеримое множество в $X$ (положительной меры) и $y \in X$, то $Ay$ — измеримое множество (положительной меры) и $A^{-1}$ — измеримое множество (положительной меры). Если $f$ — измеримая функция, $A$ — измеримое множество положительной меры и для любого $x$ из $X$*

$$g(x) = \frac{f(x^{-1})}{\mu(Ax)},$$

*то $g$ — измеримая функция.*

Доказательство. Множество $Ay$ измеримо, так как если $B$ — какое-нибудь измеримое множество, содержащее элемент $y$, то, согласно теореме 3, $Ay$ представляет собой сечение измеримого множества $Q(A \times B)$, где $Q = S^{-1}RS$. Чтобы доказать остальные утверждения теоремы, воспользуемся тем, что $Q$ отображает $(X \times X, \mathbf{S} \times \mathbf{S}, \mu \times \nu)$ само на себя с сохранением меры. Поэтому, если $\mu(A) > 0$, то, согласно теореме 3,

$$0 < (\mu(A))^2 = (\mu \times \nu)(Q(A \times A)) = \int \mu(x^{-1}A \cap A^{-1})\, d\mu(x)$$

и, следовательно, $x^{-1}A \cap A^{-1}$ хотя бы при одном $x$ имеет положительную меру. Иначе говоря, мы доказали, что если $A$ — измеримое множество положительной меры, то $A^{-1}$ содержит измеримое подмножество $B$ положительной меры. (Отсюда, в частности, когда мы установим измеримость $A^{-1}$, сразу будет следовать, что $\mu(A^{-1}) > 0$.) Так как $y^{-1}B \subset y^{-1}A^{-1}$, коль скоро $B \subset A^{-1}$ и $\mu(y^{-1}B) = \mu(B)$, то, еще раз воспользовавшись полученным выводом, мы обнаружим существование измеримого множества $C$ положительной меры, такого, что $C \subset \subset (y^{-1}B)^{-1} \subset (Y^{-1}A^{-1})^{-1} = Ay$. Все утверждения, касающиеся множества $Ay$, таким образом, доказаны. Для доказательства измеримости $A^{-1}$ заметим, что если $\mu(A)>0$, то, в силу теоремы 3 и только что установленных результатов,

$$\{y: \mu((Q(A\times))^y)>0\}=A^{-1}.$$

Итак, если $\mu(A)>0$, то множество $A^{-1}$ измеримо. Если же $\mu(A)=0$, то измеримость $A^{-1}$ следует из равенства $A^{-1}=(A\cup B)^{-1}-B^{-1}$, где $B$ — измеримое множество, такое, что $\mu(B)>0$ и $B\cap A=0$.

Из уже установленных результатов вытекает, что если функция $f$ измерима и $\widehat{f}(x)=f(x^{-1})$, то функция $\widehat{f}$ также измерима. Если $A$ и $B$ — измеримые множества, $f_0(y)=\mu((Q(A\times B))^y)$ и $\widehat{f_0}(y)=f_0(y^{-1})$, то функции $f_0$ и $\widehat{f_0}$ измеримы и, в силу теоремы 3,

$$\widehat{f_0}(y)=\mu(Ay)\chi_B(y).$$

Иначе говоря, мы доказали, что если $h(y)=\mu(Ay)$, то функция $h$ измерима на всяком измеримом множестве и, следовательно, $\frac{1}{h}$ обладает тем же свойством. □

Теорема 5. *Если $A$ и $B$ — измеримые множества положительной меры, то существуют измеримые множества $C_1$ и $C_2$ положительной меры и элементы $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$, такие, что*

$$x_1C_1\subset A,\quad y_1C_1\subset B,\quad C_2x_2\subset A,\quad C_2y_2\subset B.$$

Доказательство. Если $\mu(B)>0$, то $\mu(B^{-1})>0$, следовательно, $(\mu\times\mu)(A\times B^{-1})=\mu(A)\mu(B^{-1})>0$. В силу теоремы 3, множество $x^{-1}A\cap B$ при любом $x$ измеримо и хотя бы при одном $x$ имеет положительную меру. Если элемент $x_1$ таков, что $\mu(x_1^{-1}A\cap B)>0$, и $y_1=e$, то, положив $C_1=x_1^{-1}A\cap B$, получим $x_1C_1\subset A$ и $y_1C_1\subset B$.

Применяя этот результат к множествам $A^{-1}$ и $B^{-1}$, мы найдем множество $C_0$ и точки $x_0$, $y_0$, такие, что $x_0C_0\subset A^{-1}$ и $y_0C_0\subset B^{-1}$; теперь мы можем положить $C_2=C_0^{-1}$, $x_2=x_0^{-1}$, $y_2=y_0^{-1}$. □

Теорема 6. *Если $A$ и $B$ — измеримые множества и $f(x)=\mu(x^{-1}A\cap B)$, то функция $f$ измерима и*

$$\int f\,d\mu=\mu(A)\mu(B^{-1}).$$

*Если $g(x)=\mu(xA\Delta B)$ и $\varepsilon<\mu(A)+\mu(B)$, то множество $\{x: g(x)<\varepsilon\}$ измеримо.*

Первая часть этого предложения называется иногда *теоремой о среднем.*

Доказательство. К первому утверждению нас приведут следующие соображения: если, как и выше, $Q=S^{-1}RS$, то $Q$ отображает $(X\times X, \mathbf{S}\times\mathbf{S}, \mu\times\mu)$ само на себя с сохранением меры и при этом

$$f(x)=\mu((Q(A\times B^{-1}))_x).$$

Если $\widehat{f}(x)=f(x^{-1})$, то $\widehat{f}$ — измеримая функция. Отсюда, а также из равенства

$$\{x: g(x)<\varepsilon\}=\left\{x: \widehat{f}(x)>\tfrac{1}{2}(\mu(A)+\mu(B)-\varepsilon)\right\}$$

следует второе утверждение. □

**Упражнения**

1. Является ли измеримой группой декартово произведение двух измеримых групп?

2. Если $\mu$ — мера Хаара в компактной группе $X$, причем мощность $X$ выше мощности континуума, то $(X, \mathbf{S}, \mu)$ не является измеримой группой. [Указание. Пусть $D = \{(x, y): x = y\} = S(X \times \{e\})$. Если допустить, что $D$ принадлежит классу $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$, то существует счетный класс $\mathbf{R}$ измеримых прямоугольников, такой, что $D \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$. Пусть $\mathbf{E}$ — (счетный) класс сторон прямоугольников, принадлежащих $\mathbf{R}$. Так как $D \in \mathbf{S}(\mathbf{E}) \times \mathbf{S}(\mathbf{E})$, то любое сечение множества $D$ принадлежит классу $\mathbf{S}(\mathbf{E})$. Но мощность класса $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ не превосходит мощности континуума (см. утверждение «в» в упр. 9 § 5), что противоречит предположению относительно мощности пространства $X$.]

3. Пусть $\mu$ — мера Хаара в локально компактной группе $X$, $E$ — произвольное бэровское множество в $X$, $x$ — произвольный элемент из $X$; тогда если одно из чисел

$$\mu(E), \quad \mu(xE), \quad \mu(Ex) \quad \text{и} \quad \mu(E^{-1})$$

равно нулю, то и остальные равны нулю.

4. Пусть $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — измеримая группа, причем мера $\mu$ вполне конечна; если $A$ — измеримое множество, такое, что $\mu(xA - A) = 0$ при любом $x$ из $X$, то либо $\mu(A) = 0$, либо $\mu(X - A) = 0$. [Указание. Примените к множествам $A$ и $X - A$ теорему о среднем.] Этот результат, в соответствующей формулировке, справедлив и без предположения, что $\mu$ конечна; на языке эргодической теории это означает, что измеримая группа, если ее рассматривать как группу преобразований, сохраняющих меру, самой на себя,обладает свойством метрической транзитивности.

5. Если $\mu$ — мера Хаара в компактной группе $X$, то для любого бэровского множества $E$ и для любого $x$

$$\mu(E) = \mu(xE) = \mu(Ex) = \mu(E^{-1}).$$

## § 60. Единственность меры Хаара

В этом параграфе мы покажем, что мера Хаара, по существу говоря, единственна.

Теорема 1. *Если $\mu$ и $\nu$ — две меры, такие, что $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(X, \mathbf{S}, \nu)$ представляют собой измеримые группы, и если множество $E$ из $\mathbf{S}$ таково, что $0 < \nu(E) < \infty$, то, какова бы ни была неотрицательная измеримая функция $f$ на $X$,*

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \mu(E) \int \frac{f(y^{-1})}{\nu(Ey)}\, d\nu(y).$$

Этот результат интересен для нас в данный момент своей качественной стороной: всякий интеграл относительно меры $\mu$ выражается в виде некоторого интеграла относительно меры $\nu$.

Доказательство. Если $g(y) = \frac{f(y^{-1})}{\nu(Ey)}$, то, в силу результатов предыдущего параграфа, функция $g$, так же как $f$, неотрицательна и измерима. Положим, как и раньше,

$$S(x, y) = (x, xy) \quad \text{и} \quad T(x, y) = (yx, y).$$

$S$ и $T$ отображают пространство с мерой $(X \times X, \mathbf{S} \times \mathbf{S}, \mu \times \mu)$ само на себя с сохранением меры; поэтому так же ведет себя и отображение $S^{-1}T$. Так как $S^{-1}T(x, y) = (yx, x^{-1})$, то, согласно теореме Фубини,

$$\mu(E) \int g(y)\, d\nu(y) = \int \chi_E(x)\, d\mu(x) \int g(y)\, d\nu(y) =$$

$$= \int \chi_E(x) g(y)\, d(\mu \times \nu)(x, y) = \iint \chi_E(yx) g(x^{-1}) d\nu(y) d\mu(x) =$$

$$= \int g(x^{-1}) \nu(Ex^{-1})\, d\mu(x).$$

Так как $g(x^{-1})\nu(Ex^{-1}) = f(x)$, то теорема доказана. □

Теорема 2. *Если $\mu$ и $\nu$ — две меры, такие, что $(X, \mathbf{S}, \mu)$ и $(X, \mathbf{S}, \nu)$ представляют собой измеримые группы, и если $0 < \nu(E) < \infty$, где $E$ — некоторое множество из $\mathbf{S}$, то для любого $F$ из $\mathbf{S}$*

$$\mu(E)\nu(F) = \nu(E)\mu(F).$$

Заметим, что это — настоящая теорема единственности. Она утверждает, что, каково бы ни было множество $F$ из $\mathbf{S}$, $\mu(F) = c\nu(F)$, где $c = \frac{\mu(E)}{\nu(E)}$ — неотрицательная постоянная, т. е. $\mu$ и $\nu$ отличаются лишь постоянным множителем.

Доказательство. Пусть $f$ — характеристическая функция множества $F$. Так как теорема 1 верна, в частности, тогда, когда мера $\mu$ совпадает с $\nu$, то

$$\int f(x)\, d\nu(x) = \nu(E) \int \frac{f(y^{-1})}{\nu(Ey)}\, d\nu(y).$$

Умножив на $\mu(E)$ и применив теорему 1, получим отсюда равенство

$$\mu(E) \int f(x)\, d\nu(x) = \nu(E) \int f(x)\, d\mu(x). \qquad \square$$

Теорема 3. *Если $\mu$ и $\nu$ — регулярные меры Хаара в локально компактной топологической группе $X$, то существует конечная положительная постоянная $c$, такая, что $\mu(E) = c\nu(E)$ для любого борелевского множества $E$.*

Доказательство. Если $\mathbf{S}_0$ — класс всех бэровских множеств $E$ в $X$, то $(X, \mathbf{S}_0, \mu)$ и $(X, \mathbf{S}_0, \nu)$ представляют собой измеримые группы, и, согласно теореме 2, $\mu(E) = c\nu(E)$ для любого бэровского множества $E$, где $c$ — некоторая конечная неотрицательная постоянная. Взяв в качестве $E$ любое ограниченное открытое бэровское множество, мы обнаружим, что $c > 0$. Если же две регулярные борелевские меры (в нашем случае $\mu$ и $c\nu$) совпадают на бэровских множествах, то они совпадают и на всех борелевских множествах (см. теорему 8 § 52). □

**Упражнения**

1. Мера Хаара мультипликативной группы всех отличных от нуля действительных чисел абсолютно непрерывна относительно лебеговской меры. Что является ее производной в смысле Радона-Никодима?

2. Если $\mu$ и $\nu$ — мера Хаара соответственно в локально компактных группах $X$ и $Y$, а $\lambda$ — мера Хаара в $X \times Y$, то на бэровских множествах в $X \times Y$ мера $\lambda$ отличается от $\mu \times \nu$ постоянным множителем.

3. Теорему единственности меры Хаара для измеримой группы с конечной мерой можно доказать, опираясь на свойство метрической транзитивности, установленное в упр. 4 § 59. Предположим, что меры $\mu$ и $\nu$ инвариантны слева и $\nu \ll \mu$; тогда существует неотрицательная измеримая функция $f$, такая, что

$$\nu(E) = \int\limits_E f(x)\, d\mu(x)$$

для любого измеримого множества $E$. Отсюда следует, что

$$\nu(yE) = \int\limits_{yE} f(x)\, d\mu(x) = \int\limits_E f(y^{-1}x)\, d\mu(x)$$

и, так как $\nu$ инвариантна слева, $f(x) = f(y^{-1}x)[\mu]$. Если $N_t = \{x\colon f(x) < t\}$, то

$$\mu(yN_t - N_t) = \mu(\{x\colon f(y^{-1}x) < t\} - \{x\colon y(x) < t\}) = 0.$$

Таким образом, для любого действительного числа $t$ либо $\mu(N_t) = 0$, либо $\mu(N_t') = 0$. Отсюда следует, что $f$ постоянна почти всюду $[\mu]$ и $\nu = c\mu$. Если не предполагать, что $\nu$ абсолютно непрерывна относительно $\mu$, то вместо $\mu$ следует рассмотреть $\mu + \nu$. Так же как в упр. 4 § 59, в этом рассуждении можно освободиться от предположения, что меры конечны.

4. Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — измеримая группа, а $E$ и $F$ — измеримые множества в $X$, то существуют последовательности элементов $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ из $X$ и последовательность измеримых множеств $\{A_n\}$, такие, что а) $\{x_n A_n\}$ представляет собой последовательность непересекающихся подмножеств множества $E$ и $\{y_n A_n\}$ — последовательность непресекающихся подмножеств $F$, б) по меньшей мере одно из измеримых множеств

$$E_0 = E - \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n A_n \quad \text{и} \quad F_0 = F - \bigcup_{n=1}^{\infty} y_n A_n$$

имеет меру нуль. [Указание. Если $E$ и $F$ имеет меру нуль, то утверждение тривиально. Если $E$ и $F$ — множества положительной меры, то, согласно теореме 5 § 59, можно указать такие $x_1$, $y_1$ и $A_1$, что $(A_1) > 0$, $x_1 A_1 \subset E$, $y_1 A_1 \subset F$. Если $E - x_1 A_1$ или $F - y_1 A_1$ имеет меру нуль, то утверждение тривиально. Если оба эти множества имеют положительную меру, то мы снова воспользуемся теоремой 5 § 59. Доказательство завершается применением трансфинитной (хотя и счетной) индукции.]

С помощью этой теоремы можно получить еще одно доказательство теоремы единственности. Для этого нужно подробно рассмотреть отображение множества значений $\mu$ на множество значений $\nu$, которое получится, если при любом измеримом $E$ числу $\mu(E)$ поставить в соответствие число $\nu(E)$. Если $\mu$ и $\nu$ — левые меры Хаара, то такое отображение взаимнооднозначно.

5. Пусть $\mu$ — регулярная мера Хаара в локально компактной группе $X$. Каков бы ни был элемент $x$ из $X$, функция множества $\mu_x$, заданная на борелевских множествах $E$ равенством $\mu_x(E) = \mu(Ex)$, также представляет собой регулярную меру Хаара. Отсюда, в силу теоремы единственности, следует, что $\mu(Ex) = \Delta(x)\mu(x)$, где $0 < \Delta(x) < \infty$. Отметим следующие свойства функции $\Delta(x)$:

а) $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$; $\Delta(e) = 1$.

б) Если $x$ принадлежит центру группы $X$, то $\Delta(x) = 1$.

в) Если $x$ — какой-нибудь коммутатор или если $x$ принадлежит коммутанту группы $X$, то $\Delta(x) = 1$.

г) Функция $\Delta(x)$ непрерывна. [Указание. Пусть $C$ — компактное множество положительной меры и $\varepsilon$ — произвольное положительное число. Так как мера $\mu$ регулярна, то существует такое ограниченное открытое множество $U$, что $C \subset U$ и $\mu(U) \leqslant (1+\varepsilon)\mu(C)$. Пусть $V$ — окрестность единичного элемента $e$, обладающая тем свойством, что $V = V^{-1}$ и $CV \subset U$; тогда если $x \in V$, то

$$\Delta(x)\mu(C) = \mu(Cx) \leqslant \mu(U) \leqslant (1+\varepsilon)\mu(C)$$

и

$$\frac{\mu(\Delta)}{\Delta(x)} = \mu(Cx^{-1}) \leqslant \mu(U) \leqslant (1+\varepsilon)\mu(C),$$

откуда

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \leqslant \Delta(x) \leqslant 1 + \varepsilon.]$$

д) Мы получаем еще одно доказательство тождества мер, инвариантных слева, и мер, инвариантных справа, в компактной группе $X$, так как, в силу «а» и «г», множество $\Delta(X)$ оказывается компактной мультипликативной группой положительных чисел.

е) Для любого борелевского множества $E$

$$\mu(E^{-1}) = \int\limits_E \frac{1}{\Delta(x)}\, d\mu(x).$$

[У к а з а н и е. В силу теоремы единственности, для мер, инвариантных *справа*,

$$\mu(E^{-1}) = c \int\limits_E \frac{1}{\Delta(x)}\, d\mu(x),$$

где $c$ — некоторая положительная постоянная. Отсюда для любой интегрируемой функции $f$

$$\int f(x^{-1})\, d\mu(x) = c \int \frac{f(x)}{\Delta x}\, d\mu(x).$$

Взяв $f(x^{-1})$ вместо $f(x)$, положив $g(x^{-1}) = \dfrac{f(x)}{\Delta(x)}$ и воспользовавшись последним равенством, получим

$$\frac{1}{c} \int g(x^{-1})\, d\mu(x) = c \int g(x^{-1})\, d\mu(x)].$$

ж) Если $\Gamma(x)$ — «правый аналог» функции $\Delta(x)$, т. е. если $\nu(xE) = \Gamma(x)\nu(E)$, где $\nu$ — мера, инвариантная справа, то $\Gamma(x) = \dfrac{1}{\Delta(x)}$.

6. *Относительно инвариантной* мерой в локально компактной группе $X$ называется бэровская мера $\nu$, не равная тождественно нулю и обладающая тем свойством, что для любого фиксированного $x$ из $X$ мера $\nu_x$, определенная равенством $\nu_x(E) = \nu(xE)$, отличается от $\nu$ постоянным, не равным нулю множителем. Для того чтобы мера $\nu$ была относительно инвариантна, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$\nu(E) = \int\limits_E \varphi(y)\, d\mu(y),$$

где $\mu$ — некоторая мера Хаара, а $\varphi$ — непрерывный гомоморфизм группы $X$ в мультипликативную группу положительных чисел. [У к а з а н и е. Если $\varphi$ неотрицательна, непрерывна, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ и

$$\nu(xE) = \int\limits_E \varphi(y)\, d\mu(y),$$

то

$$\nu(xE) = \int\limits_{xE} \varphi(y)\, d\mu(y) = \int\limits_E \varphi(xy)\, d\mu(y) = \int\limits_E \varphi(x)\varphi(y)\, d\mu(y) = \varphi(x)\nu(E).$$

Если, обратно, $\nu(xE) = \varphi(x)\nu(E)$, то (см. упр. 5) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ и $\varphi$ непрерывна; следовательно, существует

$$\tilde{\mu}(E) = \int\limits_E \varphi(y^{-1})\, d\nu(y)$$

и, в силу теоремы единственности, $\tilde{\mu} = \mu$.]

7. Если $\mu$ — $\sigma$-конечная инвариантная слева мера на бэровских множествах в локально компактной группе $X$, то она отличается от меры Хаара (на бэровских множествах) постоянным множителем. Отсюда, в частности, следует, что на компактных множествах $\mu$ конечна. [У к а з а н и е. Если $\mu$ не равна тождественно нулю, то $(X, \mathbf{S}_0, \mu)$, где $\mathbf{S}_0$ — класс всех бэровских множеств, представляет собой измеримую группу.]

ГЛАВА 12

# МЕРА И ТОПОЛОГИЯ В ГРУППАХ

## § 61. Задание топологии посредством меры

В предыдущей главе мы показали, что в любой локально компактной группе можно задать инвариантную слева бэровскую меру (или инвариантную слева регулярную борелевскую меру), притом, по существу, единственным образом. В этой главе мы обнаружим теснейшую связь между свойствами группы как пространства с мерой и как топологического пространства. В частности, в итоге ряда отдельных теорем мы получим, что не только мера может быть задана на основе топологических свойств группы, но и обратно, топологические понятия в группе могут быть определены в терминах теории меры.

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что $X$ — локально компактная топологическая группа, $\mu$ — регулярная мера Хаара в $X$ и $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$, где $E$ и $F$ — произвольное борелевские множества в $X$.

Теорема 1. *Если $E$ — борелевское множество конечной меры и $f(x) = \rho(xE, E)$, то функция $f$ непрерывна.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$; в силу регулярности меры $\mu$, существуют компактное множество $C$ и открытое борелевское множество $U$, содержащее $C$, такие, что $\rho(E, C) < \frac{\varepsilon}{4}$ и $\rho(U, C) < \frac{\varepsilon}{4}$. Пусть $V$ — окрестность единичного элемента $e$, такая, что $V = V^{-1}$ и $VC \subset U$. Если $y^{-1}x \in V$, то и $x^{-1}y \in V$, откуда

$$\rho(xC, yC) = \mu(xC - yC) + \mu(yC - xC) = \\ = \mu(y^{-1}xC - C) + \mu(x^{-1}yC - C) \leqslant 2\mu(VC - C) \leqslant 2\mu(U - C) < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$|\rho(xE, E) - \rho(yE, E)| \leqslant \rho(xE, yE) \leqslant \\ \leqslant \rho(xE, xC) + \rho(xC, yC) + \rho(yC, yE) < \varepsilon. \qquad \square$$

Из теоремы 1 вытекает, что, каковы бы ни были борелевское множество $E$ конечной меры и положительное число $\varepsilon$, $\{x\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\}$ представляет собой открытое множество. Наш следующий результат состоит в том, что открытых множеств такого рода достаточно много.

Теорема 2. *Если $U$ — любая окрестность единичного элемента $e$, то существует бэровское множество $E$ конечной положительной меры и положительное число $\varepsilon$, такие, что $\{x\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\} \subset U$.*

Доказательство. Пусть $V$ — окрестность единичного элемента, такая, что $VV^{-1} \subset U$, и $E$ — бэровское множество конечной положительной меры, содержащееся в $V$. Если $0 < \varepsilon < 2\mu(E)$, то

$$\{x\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\} \subset \{x\colon xE \cap E \neq 0\} = EE^{-1} \subset VV^{-1} \subset U. \qquad \square$$

Из теорем 1 и 2 следует, что класс множества вида $\{x\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\}$ представляет собой базис в точке $e$, и, следовательно, мы действительно имеем возможность описать все топологические свойства группы $X$ в терминах теории меры. В качестве примера такого описания мы сформулируем сейчас условие ограниченности.

Теорема 3. *Множество $A$ ограничено тогда и только тогда, когда существуют бэровское множество $E$ конечной положительной меры и число $\varepsilon$, такие, что $0 \leqslant \varepsilon < 2\mu(E)$ и*

$$A \subset \{x\colon \rho(xE, E) \leqslant \varepsilon\}.$$

Доказательство. Чтобы установить достаточность высказанного здесь условия, покажем, что если $E$ — бэровское множество конечной положительной меры и $0 \leqslant \varepsilon < 2\mu(E)$, то множество $\{x\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\}$ ограничено. Возьмем положительное число $\delta$, такое, что $4\delta < 2\mu(E) - \varepsilon$, и выберем в $E$ компактное подмножество $C$, удовлетворяющее условию: $\mu(E) - \delta < \mu(C)$. Тогда

$$\rho(xC, C) \leqslant \rho(xC, xE) + \rho(xE, E) + \rho(E, C) < 2\delta + \rho(xE, E),$$

откуда

$$\{x\colon \rho(xE, E) \leqslant \varepsilon\} \subset \{x\colon \rho(xC, C) \leqslant \varepsilon + 2\delta\}.$$

Так как $\varepsilon + 2\delta < 2\mu(C)$, то

$$\{x\colon \rho(xE, E) \leqslant \varepsilon\} \subset \{x\colon \mu(xC \cap C) \neq 0\} \subset CC^{-1}.$$

Теперь докажем необходимость условия; пусть $C$ — компактное множество, содержащее $A$, а $D$ — какое-нибудь компактное множество положительной меры. Выберем бэровское множество $E$ конечной положительной меры так, чтобы $E \supset C^{-1}D \cup D$. Так как $D \subset E$ и, когда $x \in C$, $D \subset xC^{-1}D \subset xE$, то $D \subset xE \cap E$, когда $x \in C$. Отсюда

$$A \subset C \subset \{x\colon D \subset xE \cap D\} \subset \{x\colon \rho(xE, E) \leqslant \varepsilon\},$$

где $\varepsilon = 2(\mu(E) - \mu(D))$. $\square$

### Упражнения

1. Справедливы теоремы, аналогичные теоремам 1, 2, и 3, если в этих последних вместо $\rho(xE, E)$ взять $\mu(xE \cap F)$, где $E$ и $F$ — бэровские множества конечной положительной меры.
2. Если фиксировать борелевское множество $E$ конечной меры и положить $f(x) = xE$, то определенное таким образом отображение $f$ группы $X$ в метрическое пространство множеств конечной меры непрерывно.
3. Для любого борелевского множества $E$ конечной меры существует окрестность $U$ единичного элемента $e$, такая, что $U \subset EE^{-1}$.
4. Группа $X$ сепарабельна тогда и только тогда, когда метрическое пространство ее измеримых подмножеств конечной меры сепарабельно.

5. Если для произвольного ограниченного борелевского множества $E$ положить

$$f_U(x) = \frac{\mu(E \cap U_x)}{\mu(U_x)},$$

где $U$ — любая ограниченная окрестность единичного элемента $e$, а $x$ — произвольная точка, то, когда $U \to e$, $f_U$ сходится в среднем (и, следовательно, по мере) к $\chi_E$. Другими словами, для всякого положительного числа $\varepsilon$ существует ограниченная окрестность $V$ единичного элемента, такая, что если $U \subset V$, то $\int |f_U - \chi_E|\, d\mu < \varepsilon$. Этот результат можно назвать *теоремой о точках плотности* в топологических группах. [Указание. Возьмем в качестве $V$ такую окрестность единичного элемента, чтобы при любом выборе точки $y$ из $V$ выполнялось неравенство $\rho(yE, E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда если $U \subset V$ и $F$ — любое борелевское множество, то

$$\frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{\mu(U)} \int\limits_U \int\limits_F |\chi_E(yx) - \chi_E(x)|\, d\mu(x) d\mu(y) \geqslant$$

$$\geqslant \left| \int\limits_F d\mu(x) \int\limits_U \frac{1}{\mu(U)} \chi_{Ex^{-1}}(y)\, d\mu(y) - \int\limits_F \chi_E(x)\, d\mu(x) \int\limits_U \frac{d\mu(y)}{\mu(U)} \right| = \left| \int\limits_F (f_U(x) - \chi_E(x))\, d\mu(x) \right|.$$

(Напоминаем, что $\frac{\mu(A)}{\mu(B)} = \frac{\mu(Ax)}{\mu(Bx)}$, каковы бы ни были борелевские множества $A$ и $B$ и точка $x$ из $X$; см. упр. 5 § 60.) Теперь остается воспользоваться полученным неравенством, взяв в качестве $F$ сначала множество $\{x\colon f_U(x) - \chi_E(x) > 0\}$, а затем — множество $\{x\colon f_U(x) - \chi_E(x) < 0\}$.]

6. Если $\nu$ — любая конечная обобщенная мера, заданная на бэровских множествах в $X$, то существует такое бэровское множество $N_\nu$, что $\nu(E) = \nu(E \cap N_\nu)$, каково бы ни было бэровское множество $E$ (см. упр. 3 § 17). *Сверткой* двух конечных обобщенных мер $\lambda$ и $\nu$ называется функция $\lambda * \nu$, заданная на бэровских множествах $E$ равенством

$$(\lambda * \nu)(E) = \int\limits_{N_\lambda \times N_\nu} \chi_E(xy)\, d(\lambda \times \nu)(x, y).$$

В том случае, когда $\lambda$ и $\nu$ являются неопределенными интегралами (относительно меры Хаара $\mu$) интегрируемых функций $f$ и $g$, их свертка $\lambda * \nu$ также представляет собой неопределенный интеграл функции $h$, где

$$h(y) = \int f(x) g(x^{-1}y)\, d\mu(x).$$

7. Если $\lambda$ и $\nu$ — конечные обобщенные меры, то

$$(\lambda * \nu)(E) = \int\limits_{N_\lambda} \nu(x^{-1}E)\, d\lambda(x).$$

Если группа $X$ — абелева, то $\lambda * \nu = \nu * \lambda$.

8. Если $\lambda$ и $\nu$ — конечные меры, заданные на бэровских множествах в локально компактной, $\sigma$-компактной абелевой группе $X$, то

$$\int \lambda(xE)\, d\nu(x) = \int \nu(xE^{-1})\, d\lambda(x).$$

[Указание. Если $\bar\nu(E) = \nu(E^{-1})$, то

$$\int \lambda(xE)\, d\nu(x) = \int \lambda(x^{-1}E)\, d\bar\nu(x), \qquad \int \nu(xE^{-1})\, d\lambda(x) = \int \bar\nu(x^{-1}E)\, d\lambda(x),$$

и требуемый результат следует из равенства $\lambda * \bar\nu = \bar\nu * \lambda$.]

9. Если $f$ и $g$ — ограниченные непрерывные монотонные функции на числовой прямой, то (см. упр. 4 § 25)

$$\int\limits_a^b f\, dg + \int\limits_a^b g\, df = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

т. е. справедливо обычное правило интегрирования по частям.

[Указание. Примените результат упр. 8, положив $E = \{x\colon -\infty < x < 0\}$, к мерам $\lambda$ и $\nu$, индуцированным соответственно функциями $f$ и $g$.]

## § 62. Вейлевская топология

Мы убедились в том, что произвольная локально компактная группа $X$ представляет собой измеримую группу, если измеримость понимать в смысле Бэра, и, более того, сама топология локально компактной группы однозначно определяется строением $X$ как измеримой группы. В этом параграфе мы рассмотрим обратную задачу: в заданной измеримой группе $X$ определить топологию так, чтобы $X$ стала локально компактной топологической группой. Мы увидим, что эта задача разрешима.

Всюду в этом параграфе рассматривается фиксированная измеримая группа $(X, \mathbf{S}, \mu)$; как обычно, мы полагаем $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$, где $E$ и $F$ — измеримые множества. Пусть, далее, $\mathbf{A}$ обозначает класс всех множеств вида $EE^{-1}$, где $E$ — произвольное измеримое множество конечной положительной меры, а $\mathbf{N}$ — класс всех множеств вида $\{x\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\}$, где $E$ — произвольное измеримое множество конечной положительной меры и $\varepsilon$ — положительное число, такое, что $0 < \varepsilon < 2\mu(E)$.

Т е о р е м а 1. *Если $N = \{x\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\} \in \mathbf{N}$, то всякое измеримое множество $F$ положительной меры содержит измеримое подмножество $G$ конечной положительной меры, такое, что $GG^{-1} \subset N$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай, когда $F$ имеет конечную меру. Если $T(x, y) = (yx, y)$, то $T(E \times F)$ — измеримое множество конечной меры в $X \times X$; следовательно, в $X \times X$ существует множество $A$, представляющее собой соединение конечного числа измеримых прямоугольников, для которого

$$\frac{\varepsilon}{4}\mu(F) > \rho(T(E \times F), A) = \iint |\chi_{T(E\times F)}(x, y) - \chi_A(x, y)| d\mu(x) d\mu(y) \geqslant$$
$$\geqslant \int_F \int |\chi_E(y^{-1}x) - \chi_A(x, y)|\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Положим

$$C = \left\{y\colon \int |\chi_E(y^{-1}x) - \chi_A(x, y)|\, d\mu(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\};$$

тогда $\mu(F \cap C) \leqslant \frac{1}{2}\mu(F)$ и, следовательно,

$$\mu(F - C) \geqslant \frac{1}{2}\mu(F) > 0.$$

Если $y \in F - C$, то

$$\rho(yE, A^y) = \int |\chi_E(y^{-1}x) - \chi_A(x, y)|\, d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $A$ представляет собой соединение конечного числа измеримых прямоугольников, то существует лишь конечное число различных множеств вида $A^y$; обозначим их $A_1, \ldots, A_n$. То, что мы доказали, можно теперь записать в виде

$$F - C \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{y\colon \rho(yE, A_i) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Так как $\frac{\varepsilon}{2} < \mu(E) = \mu(yE)$, то согласно теореме 7 § 59, множества

$\left\{y\colon \rho(yE, A_i) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ измеримы и, в силу неравенства $\mu(F - C) > 0$, хотя бы одно из них пересекается с $F - C$ по множеству положительной меры. Положим

$$G_0 = (F - C) \cap \left\{y\colon \rho(yE, A_i) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

и фиксируем значение $i$ так, чтобы $\mu(G_0) > 0$. Множество $G_0$, очевидно, измеримо, имеет конечную меру и $G_0 \subset F$. Если $y_1 \in G_0^{-1}$ и $y_2 \in G_0^{-1}$, то

$$\rho(y_1 y_2^{-1}E, E) = \rho(y_2^{-1}E, y_1^{-1}E) \leqslant \rho(y_2^{-1}E, A_i) + \rho(y_1^{-1}E, A_i) < \varepsilon,$$

так что $G_0^{-1} G_0 \subset N$. Таким образом, мы установили существование множества $G_0$, обладающего всеми свойствами, указанными в теореме, с той лишь разницей, что вместо $GG^{-1} \subset N$ имеет место соотношение $G_0^{-1} G_0 \subset N$. Если теперь вместо $F$ взять множество $F^{-1}$, а соответствующее его подмножество записать в виде $G^{-1}$, то $G$ будет обладать всеми требуемыми свойствами. □

Теорема 1 утверждает, в частности, что всякое множество из класса $\mathbf{N}$ содержит некоторое подмножество, принадлежащее классу $\mathbf{A}$. Следующая теорема содержит обратный результат.

Теорема 2. *Если* $A = EE^{-1} \in \mathbf{A}$, $0 < \varepsilon < 2\mu(E)$ *и*

$$N = \{x\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\},$$

*то* $N \in \mathbf{N}$ *и* $N \subset A$.

Доказательство. Первое утверждение тривиально; чтобы доказать второе, достаточно заметить, что $N \subset \{x\colon xE \cap E \neq 0\} = EE^{-1}$. □

Теорема 3. *Если* $N = \{x\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\} \in \mathbf{N}$, *то* $N$ — *измеримое множество положительной меры. Если* $\mu(N^{-1}) < \infty$, *то и* $\mu(N) < \infty$.

Доказательство. Так как $N = \left\{x\colon \mu(xE \cap E) > \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, то измеримость $N$ следует из теоремы 7 § 59. Неравенство $\mu(N) > 0$ следует из теоремы 1: пусть $G$ — измеримое множество положительной меры, такое, что $GG^{-1} \subset N$; тогда, в частности, $Gy^{-1} \subset N$ при любом $y$ из $G$. Последнее утверждение теоремы следует из неравенств

$$\left(\mu(E) - \frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(N) \leqslant \int\limits_{\mathbf{N}} \mu(xE \cap E)\, d\mu(x) \leqslant$$
$$\leqslant \int \mu(xE \cap E)\, d\mu(x) = \mu(E)\mu(E^{-1}). \qquad \square$$

Теорема 4. *Для любых двух множеств* $A$ *и* $B$ *из* $\mathbf{A}$ *существует множество* $C$, *также принадлежащее классу* $\mathbf{A}$, *такое, что* $C \subset A \cap \cap B$.

Доказательство. Пусть $A = EE^{-1}$ и $B = FF^{-1}$, где $E$ и $F$ — измеримые множества конечной положительной меры. В силу теоремы 5 § 59, можно выбрать измеримое множество $G$ конечной положительной меры и два элемента $x$ и $y$ таким образом, что

$$Gx \subset E \quad \text{и} \quad Gy \subset F.$$

Если $C = GG^{-1}$, то $C \in \mathbf{A}$ и

$$C = (Gx)(Gx)^{-1} \subset A, \quad C = (Gy)(Gy)^{-1} \subset B. \qquad \square$$

Прежде чем ввести в $X$ обещанную топологию, нам придется определить еще одно понятие. Мы помним, что в определении измеримой группы вовсе не фигурировали свойства отделимости, играющие существенную роль в определении топологической группы. Аксиому отделимости в топологической группе можно сформулировать так: для любого отличного от $e$ элемента $x$ существует окрестность $U$ элемента $e$, такая, что $x \notin U$. Руководствуясь этими соображениями, а также результатами § 61, мы дадим следующее определение: будем говорить, что измеримая группа обладает *свойствами отделимости*, если для любого отличного от $e$ элемента $x$ существует такое измеримое множество $E$ конечной положительной меры, что $\rho(xE, E) > 0$.

Теорема 5. *Если в измеримой группе $X$, обладающей свойством отделимости, взять класс $\mathbf{N}$ в качестве базиса в точке $e$, то, с заданной таким образом топологией, $X$ оказывается топологической группой.*

Такую топологию в измеримой группе мы условимся называть *вейлевской топологией.*

Доказательство. Мы проверим, что $\mathbf{N}$ обладает свойствами «а»—«д», определяющими базис в точке $e$, которые перечислены на стр. 13. Пусть $x_0 \in X$, $x_0 \neq e$ и $E$ — измеримое множество конечной положительной меры, такое, что $\rho(x_0E, E) > 0$. Если $\varepsilon$ удовлетворяет неравенствам $0 < \varepsilon < \rho(x_0E, E)$, то $\varepsilon < 2\mu(E)$. Если мы положим $N = \{x\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\}$, то $N \in \mathbf{N}$ и, очевидно, $x_0 \notin N$.

Если $N \in \mathbf{N}$ и $M \in \mathbf{N}$, то,согласно теореме 1, существуют множества $A$ и $B$ из $\mathbf{A}$, содержащиеся соответственно в $N$ и $M$. В силу теоремы 4, класс $\mathbf{A}$ содержит такое множество $C$, что $C \subset A \cap B$. Воспользовавшись теоремой 2, мы найдем множество $K$, обладающее такими свойствами: $K \in \mathbf{N}$ и

$$K \subset C \subset A \cap B \subset N \cap M.$$

Если $N = \{x\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\}$, то возьмем $M = \left\{x\colon \rho(xE, E) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Для любых двух элементов $x_0$ и $y_0$ из $M$ будет иметь

$$\rho(x_0y_0^{-1}E, E) \leqslant \rho(y_0^{-1}E, E) + \rho(x_0^{-1}E, E) = \rho(y_0E, E) + \rho(x_0E, E) < \varepsilon,$$

откуда следует, что $MM^{-1} \subset N$.

Если $N \in \mathbf{N}$ и $x \in X$, то, в силу теоремы 1, существует измеримое множество $E$ конечной положительной меры, такое, что $EE^{-1} \subset N$. Применив к множеству $(xE)(xE)^{-1}$, принадлежащему классу $\mathbf{A}$, теорему 2, мы обнаружим существование множества $M$ из $\mathbf{N}$, которое удовлетворяет условию

$$M \subset (xE)(xE)^{-1} = xEE^{-1}x^{-1} \subset xNx^{-1}.$$

Наконец, если $N = \{x\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\} \in \mathbf{N}$ и $x_0 \in N$, то $\rho(x_0E, E) < \varepsilon$. Так как $\varepsilon < 2\mu(E)$, то $\varepsilon - \rho(x_0E, E) < 2\mu(x_0E)$; отсюда, если

$$M = \{x\colon \rho(xx_0E, x_0E) < \varepsilon - \rho(x_0E, E)\},$$

то $M \in \mathbf{N}$. Так как

$$Nx_0^{-1} = \{x_{x_0^{-1}}\colon \rho(xE, E) < \varepsilon\} = \{x\colon \rho(xx_0E, E) < \varepsilon\},$$

то, каково бы ни было $x$ из $M$,

$$\rho(xx_0E, E) \leqslant \rho(xx_0E, x_0E) + \rho(x_0E, E) < \varepsilon - \rho(x_0E, E) + \rho(x_0E, E) = \varepsilon.$$

Таким образом, $x \in Nx_0^{-1}$, следовательно, $Mx_0 \subset N$. □

Теорема 6. *Если $X$ — измеримая группа со свойством отделимости, то $X$ локально ограничена относительно своей вейлевской топологии. Если измеримое множество $E$ содержит непустое открытое множество, то $\mu(E)>0$; если измеримое множество $E$ ограничено, то $\mu(E)<\infty$.*

Доказательство. Пусть $N_0$ — произвольное множество конечной меры из $\mathbf{N}$ (см. теорему 3), а $M_0$ — множество из $\mathbf{N}$, такое, что $M_0M_0^{-1}\subset N_0$. Покажем, что множество $M_0$ ограничено. Допустим противное: тогда существует множество $N$ из $\mathbf{N}$ и последовательность $\{x_n\}$ элементов из $M_0$, такие, что

$$x_{n+1}\notin\bigcup_{i=1}^{n}x_iN,\quad n=1,2,\ldots$$

Согласно теореме 1, существует множество $E$ конечной положительной меры, обладающее следующее свойствами: $E\subset M_0^{-1}$ и $EE^{-1}\subset N$. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что множества $x_1E$, $x_2E,\ldots$ не пересекаются, а так как $x_nE\subset M_0M_0^{-1}\subset N_0$, то $\mu(N_0)=\infty$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение теоремы.

То, что измеримое множество с непустым открытым ядром имеет положительную меру, вытекает из теоремы 3. Последнее утверждение доказываемой теоремы следует из теоремы 3 и из того факта, что ограниченное множество может быть покрыто конечным числом множеств вида $xN$, где $N$ принадлежит классу $\mathbf{N}$. □

Результат, содержащийся в теореме 6, в известном смысле нельзя улучшить. Однако ему можно придать более полезную форму, если воспользоваться тем, что всякая локально ограниченная группа может быть представлена как всюду плотная подгруппа некоторой локально компактной группы. Соответствующая формулировка содержится в теореме 8. Предварительно, однако, мы установим некоторый вспомогательный результат, касающийся произвольных (т. е. необязательно инвариантных слева и справа) бэровских мер в локально компактных группах.

Теорема 7. *Пусть $\mu$ — произвольная бэровская мера в локально компактной группе $X$. Если $Y$ — множество всех тех элементов $y$, для которых $\mu(yE)=\mu(E)$ при любом бэровском множестве $E$, то $Y$ представляет собой замкнутую подгруппу группы $X$.*

Доказательство. То, что $Y$ является подгруппой, тривиально. Для того чтобы доказать, что $Y$ замкнуто, рассмотрим произвольный фиксированный элемент $y_0$ из $\overline{Y}$ и произвольное компактное бэровское множество $C$. Если $U$ — какое-нибудь открытое бэровское множество, содержащее $y_0C$, то существует окрестность $V$ единичного элемента $e$, такая, что $Vy_0C\subset U$. Так как $Vy_0$ представляет собой окрестность элемента $y_0$, то $Y$ содержит элемент $y$, такой, что $y\in Vy_0$. Так как $yC\subset Vy_0C\subset U$, то

$$\mu(C)=\mu(yC)\leqslant\mu(U),$$

откуда, в силу регулярности меры $\mu$, получаем $\mu(C)\leqslant\mu(y_0C)$. Применив это рассуждение к элементу $y_0^{-1}$ и множеству $y_0C$ (вместо $y_0$ и $C$), мы получим обратное неравенство. Итак, $\mu(C)=\mu(y_0C)$, каково бы ни было $C$. Отсюда следует, что $\mu(E)=\mu(y_0E)$ для любого бэровского множества $E$, т. е. элемент $y_0$ принадлежит множеству $Y$. □

*Массивной подгруппой* мы будем называть подгруппу, одновременно являющуюся массивным подмножеством группы (см. § 17).

Теорема 8. *Если $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — измеримая группа, обладающая свойством отделимости, то существует локально компактная топологическая группа $\widehat{X}$ с мерой Хаара $\widehat{\mu}$, определенной в классе $\widehat{\mathbf{S}}$ всех бэровских множеств, такая, что $X$ представляет собой массивную подгруппу группы $\widehat{X}$, $\mathbf{S} \supset \widehat{\mathbf{S}} \cap X$ и $\mu(E) = \widehat{\mu}(\widehat{E})$, коль скоро $\widehat{E} \in \widehat{\mathbf{S}}$ и $E = \widehat{E} \cap X$.*

Доказательство. Пусть $\widehat{X}$ — пополнение группы $X$ относительно ее вейлевской топологии. Тогда $\widehat{X}$ будет представлять собой локально компактную группу, содержащую $X$ в качестве плотной подгруппы. Рассмотрим класс всех тех множеств $\widehat{E}$ и $\widehat{X}$, для которых $\widehat{E} \in \widehat{\mathbf{S}}$. Ясно, что этот класс является $\sigma$-кольцом; чтобы показать, что это $\sigma$-кольцо содержит все бэровские множества, мы установим, что оно содержит некоторый базис группы $\widehat{X}$.

Пусть $\widehat{x}$ — произвольный элемент группы $\widehat{X}$, а $\widehat{U}$ — произвольная окрестность единичного элемента $\widehat{e}$ в $\widehat{X}$. Возьмем окрестность $\widehat{V}$ элемента $\widehat{e}$, такую, что $\widehat{V}^{-1}\widehat{V} \subset \widehat{U}$. Так как $\widehat{V} \cap X$ представляет собой открытое множество в $X$, то $\widehat{V} \cap X$ содержит некоторое измеримое открытое (в $X$) множество $W$. Так как (согласно определению группы $\widehat{X}$) топология в $X$ является относительной топологией $X$ как подпространства пространства $\widehat{X}$, то в $\widehat{X}$ существует такое открытое множество $\widehat{W}$, что $W = \widehat{W} \cap X$. Множество $\widehat{W}$ можно всегда заменить множеством $\widehat{W} \cap \widehat{V}$, поэтому, не нарушая общности, мы можем сразу предположить, что $\widehat{W} \subset \widehat{V}$. В силу того, что $X$ плотно в $\widehat{X}$, в $X$ существует такая точка $x$, что $x \in \widehat{x}\widehat{W}^{-1}$; отсюда

$$\widehat{x} \in x\widehat{W} \subset \widehat{x}\widehat{W}^{-1}\widehat{W} \subset \widehat{x}\widehat{V}^{-1}\widehat{V} \subset \widehat{x}\widehat{U}.$$

Определим теперь на множествах $\widehat{E}$ из $\widehat{\mathbf{S}}$ меру $\widehat{\mu}$, положив $\widehat{\mu}(\widehat{E}) = \mu(\widehat{E} \cap X)$. Легко видеть, что $\widehat{\mu}$ оказывается бэровской мерой в $\widehat{X}$. Так как $\widehat{\mu}(x\widehat{E}) = \widehat{\mu}(\widehat{E})$, когда $x \in X$ и $\widehat{E} \in \widehat{\mathbf{S}}$, то, в силу теоремы 7, мера $\widehat{\mu}$ инвариантна слева. Согласно теореме единственности, $\widehat{\mu}$ совпадает на $\widehat{\mathbf{S}}$ с мерой Хаара в группе $\widehat{X}$. Отсюда следует, что если $\widehat{E} \in \widehat{\mathbf{S}}$ и $\widehat{E} \cap X = 0$, то $\widehat{\mu}(\widehat{E}) = \mu(\widehat{E} \cap X) = 0$, т. е. множество $X$ массивно в $\widehat{X}$. □

## Упражнения

1. Пусть $X$ — локально компактная топологическая группа, $\mathbf{S}$ — класс всех ее бэровских множеств, $\mu$ — заданная на $\mathbf{S}$ мера Хаара. Пусть, далее, $\widetilde{X} = X \times X$ и $\widetilde{\mathbf{S}}$ — класс всех множеств вида $E \times X$, где $E \in \mathbf{S}$. Если $\widetilde{\mu}(E \times X) = \mu(E)$, то $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathbf{S}}, \widetilde{\mu})$ оказывается измеримой группой, не обладающей свойством отделимости. Какой степенью общности обладает этот прием построения измеримых групп без свойств отделимости?

2. Если $X$ — измеримая группа со свойством отделимости, то множество $E$ в $X$ ограничеио (в смысле вейлевской топологии в $X$) тогда и только тогда, когда существует измеримое множество $A$ конечной положительной меры, такое, что $EA$ содержится в измеримом множестве конечной меры.

3. Справедлива ли теорема 7 для борелевских мер?

4. Всегда ли инвариантна подгруппа $Y$, описанная в теореме 7?

5. В предположениях теоремы 7, положим $f(x)=\mu(xE)$ для любого $x$ из $X$ и для произвольного бэровского множества $E$. Непрерывна ли функция $f$?

6. Приведем нетривиальный пример массивной подгруппы. Пусть $X$ — числовая прямая, рассмотрим локально компактную топологическую группу $X \times X$. Множество $B$ в $X$ назовем *линейно независимым*, если из соотношения вида $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$, $x_i \in B$, $i=1,\ldots,n$, с рациональными $r_i$, следует, что $r_1 = \ldots = r_n = 0$:

а) Если $E$ — борелевское множество в $X \times X$ положительной меры и $B$ — линейно независимое множество в $X$ мощности, меньшей мощности континуума, то существует такая, принадлежащая $E$, точка $(x, y)$, что множество $B \cup \{x\}$ линейно независимо. [Указание. Можно указать такое $y$, при котором мера сечения $E^y$ положительна, следовательно, $E^y$ имеет мощность континуума.]

б) в $X \times X$ существует такое множество $C$, что (1) $C \cap E \neq 0$, каково бы ни было борелевское множество $E$ в $X \times X$ положительной меры, (2) множество значений первой координаты точек из $C$ линейно независимо, (3) с любой вертикальной прямой $C$ имеет не более одной точки пересечения. [Указание. $C$ можно построить с помощью трансфинитной индукции, вполне упорядочив класс всех борелевских множеств положительной меры в $X \times X$ и воспользовавшись только что полученным результатом «а».]

в) *Базисом Гамеля* называется линейно независимое множество $B$ в $X$, обладающее следующим свойством: для всякого $x$ из $X$ в $B$ существует такое конечное подмножество $\{x_1,\ldots,x_n\}$, что $x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$, где $\{r_1,\ldots,r_n\}$ — некоторое множество рациональных чисел. Представление $x$ в виде линейной комбинации элементов из $B$ с рациональными коэффициентами единственно. Всякое линейно независимое множество содержится в некотором базисе Гамеля. [Указание. Воспользоваться трансфинитной индукцией или леммой Цорна[1]).]

г) В силу «б» и «в», в $X \times X$ существует множество $C$, обладающее свойствами (1), (2), (3), указанными в «б», и такое, что множество $B$ значений первой координаты точек из $C$ образует базис Гамеля. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$, где $r_i$ рациональны, и $(x_i, y_i) \in C$, $i=1,\ldots,n$; положим $f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i y_i$. Тогда множество $Z = \{(x,y)\colon y = f(x)\}$ (т. е. график функции $f$) представляет собой массивную подгруппу группы $X \times X$.

## § 63. Фактор-группы

Всюду в этом параграфе предполагается, что $X$ — локально компактная топологическая группа; $\mu$ — мера Хаара в $X$; $Y$ — некоторый компактный нормальный делитель группы $X$; $\nu$ — мера Хаара в $Y$, такая, что $\nu(Y)=1$; $\pi$ — проекция группы $X$ на фактор — группу $\widehat{X} = X/Y$.

Большинство результатов этого параграфа справедливо в предположении, что $Y$ — замкнутый (не обязательно компактный) нормальный делитель. Однако мы ограничимся случаем компактного $Y$, во-первых, потому, что это предположение достаточно для наших целей, а во-вторых, потому, что доказательства в этом случае, сравнительно с общим, несколько проще.

Теорема 1. *Если компактное множество $C$ в $X$ представляет собой соединение произвольного класса смежных подмножеств по $Y$, а $U$ — открытое множество, содержащее $C$, то в $\widehat{X}$ существует такое открытое множество $\widehat{V}$, что*

$$C \subset \pi^{-1}(\widehat{V}) \subset U.$$

[1]) См. Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, М., 1951, с. 17, — *Прим. ред.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не нарушая общности, можно предположить, что $U$ — ограниченное множество. Если мы положим $X_0 = \overline{UY}$, то множество $X_0$ окажется компактным. Мы утверждаем, что $X_0$, так же как $UY$, является соединением некоторого класса смежных подмножеств относительно $Y$. Для того чтобы это установить, допустим, что $x_1 \in X$ и $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ (так что $x_1^{-1}x_2 \in Y$); мы должны показать, что при этом $x_2 \in X_0$. Если $V$ — произвольная окрестность точки $x_2$, то $Vx_2^{-1}x_1$ является окрестностью точки $x_1$ и, следовательно, $UY \cap \cap Vx_2^{-1}x_1 \neq 0$. Так как $x_1^{-1}x_2 \in Y$, то

$$UY \cap V = UYx_1^{-1}x_2 \cap Vx_2^{-1}x_1x_1^{-1}x_2 = (UY \cap Vx_2^{-1}x_1)x_1^{-1}x_2 \neq 0;$$

окрестность $V$ точки $x_2$ была выбрана произвольно, поэтому $x_2 \in X_0$.

Так как $C$ является соединением некоторого класса смежных подмножеств по $Y$, то $\pi(X_0 - C) \cap \pi(C) = \pi((X_0 - U) \cap C) = 0$. Множества $\pi(X - C)$ и $\pi(C)$ компактны, а $\pi(U)$ представляют собой открытое множество, содержащее $\pi(C)$, поэтому в $\hat{X}$ существует такое открытое множество $\hat{V}$, что

$$\pi(C) \subset \hat{V} \subset \pi(U) \subset \pi(X_0) \quad \text{и} \quad \hat{V} \cap \pi(X_0 - U) = 0.$$

Если $x \in \pi^{-1}(\hat{V})$, так что $\pi(x) \in \hat{V}$, то $\pi(x) \notin \pi(X_0 - U)$ и, следовательно, $x \notin X_0 - U$. Однако $x \in X_0$; отсюда следует, что $x \in U$. Таким образом, $C \subset \pi^{-1}(\hat{V}) \subset U$. □

Т е о р е м а 2. *Если $\hat{C}$ — компактное множество в $\hat{X}$, то $\pi^{-1}(\hat{C})$ представляет собой компактное множество в $X$; если $\hat{E}$ — бэровское (или борелевское) множество в $\hat{X}$, то $\pi^{-1}(\hat{E})$ представляет собой бэровское (соотв. борелевское) множество в $X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\mathbf{K}$ — какое-нибудь открытое покрытие множества $\pi^{-1}(\hat{C})$. При любом $\hat{x}$ из $\hat{C}$ множество $\pi^{-1}(\{\hat{x}\})$ представляет собой смежное подмножество по $Y$, следовательно, оно компактно; поэтому $\mathbf{K}$ содержит конечный подкласс $\mathbf{K}(\hat{x})$, такой, что $\pi^{-1}(\{\hat{x}\}) \subset U(\hat{x}) = \bigcup \mathbf{K}(\hat{x})$. В силу теоремы 1,

$$\pi^{-1}(\{\hat{x}\}) \subset V(\hat{x}) = \pi^{-1}(\hat{V}(\hat{x})) \subset U(\hat{x}),$$

где $\hat{V}(\hat{x})$ — некоторое открытое множество в $\hat{X}$. Так как $\hat{C}$ компактно, то $\hat{C}$ содержит такое конечное подмножество $\{\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n\}$, что

$$\hat{C} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \hat{V}(\hat{x}_i);$$

откуда

$$\pi^{-1}(\hat{C}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(\hat{x}_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup \mathbf{K}(\hat{x}_i),$$

следовательно, $\pi^{-1}(\hat{C})$ компактно.

Утверждение теоремы, касающееся бэровских множеств и борелевских множеств, вытекает из первого, только что доказанного утверждения, а также из следующих замечаний: прообраз (при отображении $\pi$) множества типа $G_\delta$ является множеством типа $G_\delta$; класс всех тех множеств в $\hat{X}$, прообразы которых принадлежат какому-либо фиксированному $\sigma$-кольцу, представляет собой $\sigma$-кольцо. □

Из теоремы 2 следует, что если измеримость множеств, как в $X$, так и в $\widehat{X}$, понимать в смысле Бэра или в смысле Бореля, то преобразование $\pi$ оказывается измеримым. Таким образом, по отношению к измеримым множествам $\pi^{-1}$ ведет себя удовлетворительно. А что происходит с мерой множеств при таком отображении? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 3. *Если $\widehat{\mu} = \mu\pi^{-1}$, то $\widehat{\mu}$ является мерой Хаара в $\widehat{X}$.*

Доказательство. Так как прообразы (при отображении $\pi$) компактных множеств и непустых открытых множеств соответственно компактны и открыты, то $\widehat{\mu}$ конечна на компактных множествах и положительна на непустых открытых борелевских множествах. Остается доказать, что мера $\widehat{\mu}$ инвариантна слева.

Пусть $\widehat{E}$ — какое-нибудь борелевское множество в $\widehat{X}$ и $x_0$ — такой элемент из $X$, что $\pi(x_0) = \widehat{x}_0$. Если $x \in x_0\pi^{-1}(\widehat{E})$, то, так как $\pi$ является гомоморфизмом, $\pi(x) \in \widehat{x}_0\widehat{E}$ и

$$x_0\pi^{-1}(\widehat{E}) \subset \pi^{-1}(\widehat{x}_0\widehat{E}).$$

Обратно, если $x \in \pi^{-1}(\widehat{x}_0\widehat{E})$, то $\pi(x) \in \widehat{x}_0\widehat{E}$ и $\pi(x_0^{-1}x) = \widehat{x}_0^{-1}\pi(x) \in \widehat{E}$. Отсюда следует, что $x_0^{-1}x \in \pi^{-1}(\widehat{E})$ и, следовательно, $x \in x_0\pi^{-1}(\widehat{E})$.

Таким образом, мы показали, что

$$\pi^{-1}(\widehat{x}_0\widehat{E}) \subset x_0\pi^{-1}(\widehat{E});$$

отсюда

$$\widehat{\mu}(\widehat{x}_0E) = \mu\pi^{-1}(\widehat{x}_0\widehat{E}) = \mu(x_0\pi^{-1}(\widehat{E})) = \mu\pi^{-1}(\widehat{E}) = \widehat{\mu}(\widehat{E}). \qquad \square$$

Теорема 4. *Если $f \in \mathcal{L}_+(X)$ и если*

$$g(x) = \int\limits_Y f(xy)\,d\nu(y),$$

*то $g \in \mathcal{L}_+(X)$, и существует (единственная) функция $\widehat{g}$ из $\mathcal{L}_+(\widehat{X})$ такая, что $g = \widehat{g}\pi$.*

Доказательство. Если $f_x(y) = f(xy)$, то, в силу непрерывности $f$, функция $f_x$ непрерывна и, следовательно, интегрируема на $Y$. Функция $f$ равномерно непрерывна, т. е. для всякого положительного числа $\varepsilon$ существует окрестность $U$ единичного элемента, такая, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ для любых двух элементов $x_1$ и $x_2$, удовлетворяющих условию $x_1x_2^{-1} \in U$. При $x_1x_2^{-1} \in U$ имеем

$$(x_1y)(x_2y)^{-1} = x_1x_2^{-1} \in U,$$

откуда

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant \int\limits_Y |f(x_1y) - f(x_2y)|\,d\nu(y) < \varepsilon;$$

итак, функция $g$ непрерывна. Очевидно, что она неотрицательна; далее, так как $\{x\colon g(x) \neq 0\} \subset \{x\colon f(x) \neq 0\} \cdot Y$, то $g \in \mathcal{L}_+(X)$.

Если $\pi(x_1) = \pi(x_2)$, то $x_1^{-1}x_2 \in Y$ и, так как $\nu$ инвариантна слева,

$$g(x_1) = \int\limits_Y f(x_1y)\,d\nu(y) = \int\limits_Y f(x_1(x_1^{-1}x_2y))\,d\nu(y) = g(x_2).$$

Таким образом, равенство $\widehat{g}(\widehat{x}) = g(x)$, где $\widehat{x} = \pi(x)$, однозначно определяет некоторую функцию $\widehat{g}$ на $\widehat{X}$. При этом, очевидно, $g = \widehat{g}\pi$. Для любого открытого множества $M$ на числовой прямой

$$\{\widehat{x}\colon \widehat{g}(\widehat{x}) \in M\} = \pi(\{x\colon g(x) \in M\})$$

(см. теорему 1 § 39); поэтому, так как $\pi$ — открытое отображение, функция $\widehat{g}$ непрерывна. Так как $\pi$ отображает ограниченное множество $\{x\colon g(x) \neq 0\}$ на некоторое ограниченное множество в $\widehat{X}$, то $\widehat{g} \in \mathcal{L}_+(\widehat{X})$; единственность $\widehat{g}$ обеспечивает тем, что $\pi$ отображает $X$ на все $\widehat{X}$ целиком. □

Теорема 5. *Если $C$ — компактное бэровское множество в $X$ и если $g(x) = \nu(x^{-1}C \cap Y)$, то существует (единственная) измеримая в смысле Бэра интегрируемая функция $\widehat{g}$ на $\widehat{X}$, такая, что $g = \widehat{g}\pi$. Если $C$ представляет собой соединение некоторого класса смежных подмножеств по $Y$, то $\int \widehat{g}\, d\widehat{\mu} = \mu(C)$.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — убывающая последовательность функций из $\mathcal{L}_+(X)$, такая, что $\lim\limits_n f_n(x) = \chi_C(x)$ для всех $x$ из $X$. Если

$$g_n(x) = \int\limits_Y f_n(xy)\, d\nu(y), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то $\{g_n\}$ также представляет собой убывающую последовательность функций из $\mathcal{L}_+(X)$ (см. теорему 4) и, хотя бы в силу теоремы об ограниченно сходящихся последовательностях, для любого $x$ из $X$

$$\lim_n g_n(x) = \int\limits_Y \chi_C(xy)\, d\nu(y) = \int\limits_Y \chi_{x^{-1}C}(y)\, d\nu(y) = \nu(x^{-1}C \cap Y) = g(x).$$

В силу теоремы 4, при любом целом положительном $n$ существует функция $\widehat{g}_n$ из $\mathcal{L}_+(\widehat{X})$, такая, что $g_n = \widehat{g}_n\pi$. Так как последовательность $\{\widehat{g}_n\}$ — убывающая, то при любом $x$ существует $\widehat{g}(x) = \lim\limits_n \widehat{g}_n(x)$; при этом, очевидно, $g = \widehat{g}\pi$. Так как (см. теорему 3 § 39)

$$\int \widehat{g}\, d\widehat{\mu} = \int g\, d\mu = \int \nu(x^{-1}C \cap Y)\, d\mu(x)$$

и

$$\{x\colon \nu(x^{-1}C \cap Y) \neq 0\} \subset \{x\colon x^{-1}C \cap Y\} = CY,$$

то, в силу того, что мера $\nu$ конечна, функция $g$ интегрируема.

Пусть, наконец, $C$ представляет собой соединение произвольного класса смежных подмножеств по $Y$; тогда

$$x^{-1}C \cap Y = \begin{cases} Y, & \text{если } x \in C, \\ 0, & \text{если } x \notin C. \end{cases}$$

Отсюда

$$\int \widehat{g}\, d\widehat{\mu} = \int g\, d\mu = \int \nu(x^{-1}C \cap Y)\, d\mu(x) = \mu(C). \qquad \square$$

Теорема 6. *Если для любого бэровского множества $E$ в $X$*

$$g_E(x) = \nu(x^{-1}E \cap Y),$$

*то существует (единственная) измеримая в смысле Бэра функция $\widehat{g}_E$ на $\widehat{X}$, такая, что $g_E = \widehat{g}_E \pi$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что (в силу определения топологии в $Y$) $x^{-1}E \cap Y$ всегда представляет собой бэровское множество в $Y$, так что $g_E(x)$ определено при любом $x$.

Пусть $\mathbf{E}$ — класс всех тех множеств $E$, для которых справедливо утверждение теоремы. Тогда, согласно теореме 5, все компактные бэровские множества будут принадлежать $\mathbf{E}$. В силу элементарных свойств (конечной) меры $\nu$, класс $\mathbf{E}$ замкнут относительно образования собственных разностей, соединений конечного числа непересекающихся множеств, а также соединений и пересечений монотонных последовательностей множеств. Отсюда следует, что $\mathbf{E}$ охватывает все бэровские множества. □

Теорема 7. *Пусть $E$ — любое бэровское множество в $X$. Если $\widehat{g}_E$ — (единственная) измеримая в смысле Бэра функция на $\widehat{X}$, такая, что*

$$\widehat{g}_E(\pi(x)) = \nu(x^{-1}E \cap Y) = g_E(x)$$

*при любом $x$ из $X$, то*

$$\int \widehat{g}_E \, d\widehat{\mu} = \mu(E).$$

Доказательство. Для произвольного бэровского множества $E$ положим

$$\lambda(E) = \int \widehat{g}_E \, d\widehat{\mu} = \int \nu(x^{-1}E \cap Y) \, d\mu(x).$$

Так как функция $\lambda$, очевидно, неотрицательна и конечна на любом компактном бэровском множестве (см. теорему 5), то $\lambda$ представляет собой бэровскую меру в $X$. Пусть $x_0 \in X$; тогда

$$\lambda(x_0E) = \int g_{x_0E}(x) \, d\mu(x) = \int \nu(x^{-1}x_0E \cap Y) \, d\mu(x) =$$

$$= \int \nu((x_0^{-1}x)^{-1}E \cap Y) \, d\mu(x) = \int g_E(x_0^{-1}x) \, d\mu(x) = \int g_E(x) \, d\mu(x) = \lambda(E).$$

т. е. $\lambda$ инвариантна слева. Согласно теореме единственности, $\lambda(E) = c\mu(E)$, где $c$ — некоторая постоянная. Если $C$ — компактное множество, являющееся соединением какого-нибудь класса смежных подмножеств по $Y$, то, в силу теоремы 5, $\lambda(C) = \mu(C)$, а так как существуют такого рода множества $C$, для которых $\mu(C) > 0$, то $c = 1$. □

## § 64. Регулярность меры Хаара

Цель этого параграфа состоит в доказательстве того, что всякая мера Хаара регулярна. Здесь всюду (кроме последней теоремы) предполагается, что $X$ — локально компактная и $\sigma$-компактная топологическая группа, а $\mu$ — инвариантная слева бэровская мера в $X$, не равная тождественно нулю (и, следовательно, принимающая положительные значения на всех непустых открытых бэровских множествах).

Полезно ввести следующее вспомогательное понятие: $\sigma$-кольцо $\mathbf{T}$ бэровских множеств назовем *инвариантным $\sigma$-кольцом*, если $xE \in \mathbf{T}$ тогда, когда $E \in \mathbf{T}$ и $x \in X$. Так как класс всех бэровских множеств представляет собой инвариантное $\sigma$-кольцо, и пересечение любой системы инвариантных $\sigma$-колец также является инвариантным $\sigma$-кольцом, то, каков бы ни был класс $\mathbf{E}$ бэровских множеств, существует инвариантное $\sigma$-кольцо, *порожденное* классом $\mathbf{E}$ (пересечение всех инвариантных $\sigma$-колец, содержащих $\mathbf{E}$).

Теорема 1. *Если $\mathbf{E}$ — какой-нибудь класс бэровских множеств, а $\mathbf{T}$ — порожденное им инвариантное $\sigma$-кольцо, то $\mathbf{T}$ совпадает с $\sigma$-кольцом $\mathbf{T}_0$, порожденным классом $\{xE\colon x \in X, E \in \mathbf{E}\}$.*

Доказательство. Так как $xE \in \mathbf{T}$ при любых $x$ из $X$ и $E$ из $\mathbf{T}$, то $\mathbf{T}_0 \subset \mathbf{T}$; достаточно поэтому доказать, что $\sigma$-кольцо $\mathbf{T}_0$ инвариантно. Пусть $x_0$ — какой-нибудь фиксированный элемент группы $X$. Класс всех тех бэровских множеств $F$, для которых $x_0 F \in \mathbf{T}_0$, представляет собой $\sigma$-кольцо; так как $x_0(xE) = (x_0 x)E \in \mathbf{T}_0$, каковы бы ни были $x$ из $X$ и $E$ из $\mathbf{E}$, то это $\sigma$-кольцо содержит $\mathbf{T}_0$. Иначе говоря, мы доказали, что если $F \in \mathbf{T}_0$, то $x_0 F \in \mathbf{T}_0$. □

Теорема 2. *Если $\mathbf{E}$ — какой-нибудь счетный класс бэровских множеств конечной меры и $\mathbf{T}$ — инвариантное $\sigma$-кольцо, порожденное классом $\mathbf{E}$, то метрическое пространство $\mathcal{T}$ всех множеств, принадлежащих $\mathbf{T}$ [с метрикой $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$], сепарабельно.*

Доказательство. Так как всякое подпространство сепарабельно метрического пространства сепарабельно, то достаточно доказать, что существует $\sigma$-кольцо $\mathbf{T}_0$, содержащее $\mathbf{T}$ и обладающее счетным числом производящих элементов конечной меры (см. теорему 2 § 40). $X$ представляет собой бэровское множество, потому $X \times E$ есть бэровское множество в $X \times X$, каково бы ни было бэровское множество $E$ из $\mathbf{E}$. Если мы положим $S(x, y) = (x, xy)$, то $S(X \times E)$ также будет бэровским множеством при любом $E$ из $\mathbf{E}$. Следовательно, для любого $E$ из $\mathbf{E}$ найдется счетный класс $\mathbf{R}_E$ прямоугольников конечной меры, такой, что $S(X \times E) \in \mathbf{S}(\mathbf{R}_E)$. Если $T_0$ — $\sigma$-кольцо, порожденное классом сторон всех прямоугольников из всевозможных $\mathbf{R}_E$, $E \in \mathbf{E}$, то очевидно,

$$S(X \times E) \in \mathbf{T}_0 \times \mathbf{T}_0,$$

каково бы ни было $E$ из $\mathbf{E}$. Так как любое сечение множества из $\mathbf{T}_0 \times \mathbf{T}_0$ принадлежит $\mathbf{T}_0$, то для произвольного $E$ из $\mathbf{E}$ и произвольного $x$ из $X$

$$xE = x(X \times E)_x = (S(X \times E))_x \in \mathbf{T}_0,$$

откуда, в силу теоремы 1, следует, что $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}_0$. □

Теорема 3. *Если $\mathbf{T}$ — инвариантное $\sigma$-кольцо, $f$ — измеримая $(\mathbf{T})$ функция из $\mathcal{L}$, а $y$ — элемент из $X$, такой, что $\rho(yE, E) = 0$ для любого $E$ из $\mathbf{T}$, то $f(y^{-1}x) = f(x)$ при любом $x$ из $X$.*

Доказательство. Пусть $E$ — произвольное множество конечной меры из $\mathbf{T}$. Тогда

$$0 = \rho(yE, E) = \int |\chi_{yE}(x) - \chi_E(x)|\, d\mu(x) = \int |\chi_E(y^{-1}x) - \chi_E(x)|\, d\mu(x).$$

Отсюда следует, что

$$\int |g(y^{-1}x) - g(x)|\, d\mu(x) = 0$$

для любой измеримой (**T**) интегрируемой простой функции $g$. Так как $f$ может быть аппроксимирована функциями такого рода, то

$$\int |f(y^{-1}x) - f(x)|\, d\mu(x) = 0.$$

Подынтегральная функция в последнем равенстве принадлежит $\mathcal{L}_+$, поэтому требуемое тождество следует из теоремы 2 § 55. □

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{T}$ — *инвариантное* $\sigma$*-кольцо, порожденное принадлежащими ему множествами конечной меры и содержащее хотя бы одно множество положительной меры. Если* $\mathbf{E}$ — *класс множеств, плотный в метрическом пространстве множеств конечной меры из* $\mathbf{T}$, *и если*

$$Y = \{y\colon\ \rho(yE, E) = 0,\ E \in \mathbf{E}\},$$

*то* $Y$ *представляет собой компактный нормальный делитель в* $X$.

Доказательство. Если $Y_0 = \{y\colon\ \rho(yE, E) = 0,\ E \in \mathbf{T}\}$, то, очевидно, $Y_0 \subset Y$. С другой стороны, если $E_0$ — множество конечной меры, принадлежащее $\mathbf{T}$, то для произвольного положительного $\varepsilon$ существует множество $E$ из $\mathbf{E}$, такое, что $\rho(E_0, E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда, если $y \in Y$, то

$$0 \leqslant \rho(yE_0, E_0) \leqslant \rho(yE_0, yE) + \rho(yE, E) + \rho(E, E_0) < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon$ произвольно, то $y \in Y_0$, т. е. $Y = Y_0$.

Если $y_1$ и $y_2$ — точки из $Y$, а $E$ принадлежат классу $\mathbf{T}$, то

$$0 \leqslant \rho(y_1^{-1}y_2E, E) \leqslant \rho(y_1^{-1}y_2E, y_2E) + \rho(y_2E, E).$$

Так как $y_2E \in \mathbf{T}$ и $\rho(y_1^{-1}y_2E, y_2E) = \rho(y_2E, y_1y_2E)$, то $y_1^{-1}y_2 \in Y$; таким образом, $Y$ является подгруппой группы $X$. Пусть $y \in Y$, $x \in X$ и $E \in \mathbf{E}$, тогда $xE \in \mathbf{T}$ и $\rho(x^{-1}yxE, E) = \rho(yxE, xE) = 0$; следовательно, $Y$ представляет собой нормальный делитель.

Если $E_0$ — множество из $\mathbf{T}$, ограниченное и положительной меры, то равенство $\rho(yE_0, E_0) = 0$, выполняющееся при любом $y$ из $Y$, влечет за собой соотношение $yE_0 \cap E_0 \neq 0$. Таким образом, $y \in E_0E_0^{-1}$ и, следовательно, $Y$ заключено в ограниченном множестве $E_0E_0^{-1}$. Докажем, что $Y$ замкнуто (и, следовательно, компактно); для этого достаточно заметить, что

$$Y = \bigcap_{E \in \mathbf{E}} \{y\colon\ \rho(yE, E) = 0\},$$

и воспользоваться теоремой 1 § 61. □

Теорема 5. *Для любого бэровского множества* $E$ *в* $X$ *существует компактный нормальный делитель* $Y$, *являющийся бэровским множеством, такой, что* $E$ *представляет собой соединение некоторого класса смежных подмножеств по* $Y$.

Доказательство. Пусть $\{C_i\}$ — последовательность компактных бэровских множеств, такая, что $E \in \mathbf{S}(\{C_i\})$ и хотя бы одно из $C_i$ имеет положительную меру. Для любого $i$ возьмем убывающую последовательность функций $\{f_{ij}\}$ из $\mathcal{L}_+(X)$, сходящуюся к $\chi_{C_i}(x)$ при любом $x$ из $X$. Каково бы ни было положительное рациональное число $r$, $\{x\colon f_{ij}(x) \geqslant r\}$ представляет собой компактное бэровское множество; инвариантное $\sigma$-кольцо, порожденное классом всех множеств такого вида, обозначим $\mathbf{T}$. Согласно теореме 2, метрическое пространство, образованное множествами конечной меры, принадлежащими $\mathbf{T}$, сепарабельно; возьмем последовательность $\{E_n\}$, плотную в этом метрическом пространстве. Если

$$Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{y\colon \rho(yE_n, E_n) = 0\},$$

то, в силу теоремы 4, $Y$ будет компактным нормальным делителем группы $X$ и, по теореме 1 § 61, бэровским множеством.

Так как все $f_{ij}$ измеримы $(\mathbf{T})$, то, в силу теоремы 3, $f_{ij}(y^{-1}x) = f_{ij}(x)$ при любых $y$ из $Y$ и $x$ из $X$. Отсюда следует, что $\chi_{C_i}(y^{-1}x) = \chi_{C_i}(x)$, т. е. $yC_i = C_i$ при любом $y$ из $Y$ и любом $i = 1, 2, \ldots$. Так как, каков бы ни был $y$ из $Y$, класс всех тех множеств $F$, для которых $yE = F$, представляет собой $\sigma$-кольцо, то $yE = E$. Следовательно, $E = YE = \bigcup_{x \in E} Yx$, т. е. $E$ является соединением некоторого класса смежных подмножеств по нормальному делителю $Y$. □

Теорема 6. *Если $\{e\}$ — бэровское множество, то группа $X$ сепарабельна.*

Доказательство. Пусть $\{U_n\}$ — последовательность ограниченных открытых множеств, такая, что $\{e\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Как мы видели выше, можно, не нарушая общности, предположить, что

$$\overline{U}_{n+1} \subset U_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Существует последовательность компактных множеств $\{C_i\}$, такая, что $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Так как каждое $C_i$ компактно, то для любых $i$ и $n$ можно выделить в $C_i$ такое конечное подмножество $\{x_{ij}^{(n)}\}$, что $C_i \subset \bigcup_j x_{ij}^{(n)} U_n$. Докажем теперь, что счетный класс $\{x_{ij}^{(n)} U_n\}$ представляет собой базис группы $X$. Покажем сначала, что если $U$ — произвольная окрестность $e$, то $e \in U_n \subset U$ при некотором значении $n$. В самом деле, так как

$$\{e\} = \bigcap_n U_n = \bigcap_n \overline{U}_n$$

и $e \in U$, то

$$\bigcap_n (\overline{U}_n - U) = \bigcap_n \overline{U}_n - U = 0.$$

Так как $\{\overline{U}_n - U\}$ — убывающая последовательность компактных множеств с пустым пересечением, то при некотором значении $n$ множество $U_n - U$ (содержащееся в $\overline{U}_n - U$) оказывается пустым.

Предположим, что $x$ — произвольный элемент из $X$, а $V$ — любая его окрестность. Так как $x^{-1}V$ является окрестностью $e$, то существует такая окрестность $U$ элемента $e$, что $\mathbf{U}^{-1}U \subset x^{-1}V$. Как показано в предыдущем абзаце, $e \in U_n - U$ при некотором $n$. Так как $x \in \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, то $x \in C_i$ при некотором $i$ и, следовательно, $x \in x_{ij}^{(n)}U_n$ при некотором $j$. Отсюда следует, что $x_{ij}^{(n)} \in xU_n^{-1}$ и

$$x \in x_{ij}^{(n)}U_n \subset xU_n^{-1}U_n \subset xU^{-1}U \subset xx^{-1}V = V. \qquad \square$$

Теоремы 5 и 6 дают нам следующий замечательный и весьма полезный результат.

Теорема 7. *Для любого бэровского множества $E$ в $X$ существует такой компактный нормальный делитель $Y$, что $E$ представляет собой соединение некоторого класса смежных подмножеств по $Y$, а фактор-группа $X/Y$ сепарабельна.*

Доказательство. В силу теоремы 5, существует компактный нормальный делитель $Y$, являющийся одновременно бэровским множеством, такой, что $E$ представляет собой соединение некоторого класса смежных подмножеств по $Y$. Пусть $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, где $\{U_n\}$ — последовательность открытых множеств. Тогда для любого целого положительного $n$ в фактор-группе $\widehat{X} = X/Y$ существует такое открытое множество $\widehat{\mathbf{U}}_n$, что

$$Y \subset \pi^{-1}(\widehat{U}_n) \subset U_n,$$

где $\pi$ — проекция $X$ на $\widehat{X}$ (см. теорему 1 § 63). Отсюда $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi^{-1}(\widehat{U}_n)$ и, следовательно, $\{\widehat{e}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{U}_n$; сепарабельность группы $\widehat{X}$ следует из теоремы 6. $\square$

Теорема 8. *Всякая мера Хаара регулярно пополнима.*

Доказательство. Достаточно показать, что в любом ограниченном открытом множестве $U$ содержится такое бэровское множество $E$, что $U - E$ может быть покрыто бэровским множеством меры нуль. Для заданного $U$ выберем бэровское множество $E(\subset U)$ таким образом, чтобы значение $\mu(E)$ было наибольшим. Согласно теореме 7, в $X$ содержится компактный нормальный делитель $Y$, такой, что $E$ представляет собой соединение некоторого класса смежных подмножеств по $Y$, и фактор-группа $\widehat{X}(= X/Y)$ сепарабельна.

Положим $F = \pi^{-1}\pi(U - E)$, где $\pi$ — проекция $X$ на $\widehat{X}$; покажем, что $F$ является бэровским множеством меры нуль. В силу того, что $E$ есть соединение смежных подмножеств по $Y$, имеет место равенство $\pi(U - E) = \pi(U) - \pi(E)$; будучи открытым множеством в сепарабельном пространстве, $\pi(U)$ является бэровским множеством в $\widehat{X}$ (см. теорему 5 § 50). Из равенства $F = \pi^{-1}\pi(U) - E$ вытекает, что и $F$ представляет собой бэровское множество.

Так как открытые бэровские множества в $X$ образуют базис, то для всякой точки $x$ из $U - E$ существует такое бэровское множество $V(x)$, такое, что $x \in V(x) \subset U$. Класс множеств $\{\pi(V(x)): x \in V - E\}$ образует открытое покрытие множества $\pi(U - E)$, поэтому, в силу сепарабельности $\widehat{X}$, существует такая последовательность точек $\{x_i\}$ из $U-E$, что

$$\pi(U-E)\subset\bigcup_i \pi(V(x_i)).$$

Так как $\pi(U-E)=\pi(U)-\pi(E)$, то

$$\pi(U-E)\subset\left(\bigcup_i \pi(V(x_i i))\right)-\pi(E)=\bigcup_i \pi(V(x_i)-E).$$

Отсюда следует, что для доказательства теоремы достаточно теперь установить равенство

$$\mu(\pi^{-1}(\pi(V-E))=0$$

для любого открытого бэровского множества $V$, заключенного в $U$. Для того чтобы это доказать, заметим прежде всего, что проведенное нами рассуждение, относившееся к $U$, применимо и к $V$.

Если $V$ — открытое бэровское множество, содержащееся в $U$, то, в силу выбора $E$, $\mu(V-E)=0$. Пусть $\nu$ — мера Хаара в $Y$, причем $\nu(Y)=1$; положим $\widehat{\mu}=\mu\pi^{-1}$ и $g(x)=\nu(x^{-1}(V-E)\cap Y)$. Тогда (см. теорему 7 § 63) существует (неотрицательная) измеримая в смысле Бэра функция $\widehat{g}$ на $\widehat{X}$, такая, что $g=\widehat{g}\pi$ и

$$0=\mu(V-E)=\int \widehat{g}\,d\widehat{\mu}=\int g\,d\mu\geqslant\int\limits_{\pi^{-1}\pi(V-E)}\nu(x^{-1}(V-E)\cap Y)\,d\mu(x)\geqslant 0.$$

Из равенства

$$x^{-1}(V-E)\cap Y=(x^{-1}V\cap Y)-(x^{-1}E\cap Y)$$

следует, что если $x\in V$, то $e\in x^{-1}V\cap Y$, и если $x\notin E$, то $x^{-1}E\cap Y=0$. Таким образом, если $x\in V-E$, то $x^{-1}(V-E)\cap Y$ представляет собой непустое открытое множество в $Y$. Отсюда если $x\in\pi^{-1}\pi(V-E)$, так что $\pi(x)=\pi(x_0)$ при некотором $x_0$ из $V-E$, то

$$g(x)=\widehat{g}(\pi(x))=\widehat{g}(\pi(x_0))=g(x_0)>0$$

и, в силу теоремы 4 § 25, $\mu(\pi^{-1}\pi(V-E))=0$. □

Теорема 9. *Любая инвариантная слева борелевская мера $\mu$ в произвольной локально компактной (не обязательно $\sigma$-компактной) топологической группе $X$ регулярно пополнима.*

Доказательство. Для любого борелевского множества $E$ в $X$ существует такая $\sigma$-компактная открытая подгруппа $Z$, что $E\subset Z$. Согласно теореме 8, мера $\mu$ регулярно пополнима на $Z$, потому $Z$ содержит подмножества $A$ и $B$, являющиеся бэровскими множествами в $Z$ и обладающие следующими свойствами:

$$A\subset E\subset B\quad\text{и}\quad\mu(B-A)=0.$$

Так как подгруппа $Z$ одновременно замкнута и открыта в $X$, то $A$ и $B$ представляют собой бэровское множества также и в $X$. □

## Указатель обозначений

## Ссылки на литературу

(*Цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы, приведенному ниже*)

Предварительные сведения. (1)–(7): [7] и [15]. Топология: [1, гл. I и II] и [42, гл. I]. Метрические пространства: [41]. Теорема Тихонова: [14]. Топологические группы: [58, гл. I, II и III] и [73, гл. I]. Пополнение топологических групп: [72].

§ 4. Кольца и алгебры: [27]. Полукольца: [52].

§ 5. Структуры: [6]. Упр. 3: [52, стр. 70].

§ 6. Упр. 2: [61, стр. 85].

§ 7. Упр. 5: [52, стр. 77–78].

§ 9. Упр. 10: [57, стр. 561].

§ 11. Внешние меры и измеримость: [12, гл. V]. Метрические внешние меры: [61, стр. 43–47] и [10].

§ 12. Хаусдорфова мера: [29, гл. VII].

§ 17. Массивные множества: [3, стр. 108]. Теорема 1 и упр. 1: [19, стр. 109–110].

§ 18. Упр. 10: [51, стр. 602–603] и [20, стр. 91–92]. Функции распределения: [16].

§ 21. Теорема Егорова: [61, стр. 18–19].

§ 26. Упр. 7: [63].

§ 29. Разложение в смысле Жордана, упр. 3: [61, стр. 10–11].

§ 31. Теорема Радона–Никодима: [56, стр. 168], [61, стр. 32–36] и [74].

§ 37. Упр. 4: [12, стр. 340–349].

§ 38. Теорема 2: [64]; см. также [32].

§ 39. [25].

§ 40. Булевские кольца: [6, гл. 6] и [68]. Упр. 8: [49]. Упр. 12: [59] и [60]. Упр. 15, “а”: [21] и [66]. Упр. 15, “б”: [68] и [69]. Упр., 15, “в”: [47].

§ 41. Теорема 3 [22]. Упр. 2: [50, стр. 85–87]. Упр. 1, 2, 3 и 4: [11], [24] и [44]. Теорема 3 и упр. 7: [48]; см. также [8].

§ 42. Неравенства Гельдера и Минковского: [26, стр. 139–143 и 146–150]. Пространства функций: [5]. Упр. 3: [54, стр. 130].

§ 43. Функции точки и функции множества: [28]. Теорема 5: [28, стр. 338 и 603].

§ 44. [23], [45] и [67].

§ 46. [71]. Неравенство Колмогорова: [37, стр. 310]. Теорема о рядах: [35], [37], [38].

§ 47. Закон больших чисел: [30] и [39]. Нормальные числа: [9, стр. 260].

§ 48. Условные вероятности и математические ожидания: [40, гл. V]. Упр. 4: [18] и [20, стр. 96].

§ 49. Теорема 1: [40, стр. 24–30]. Теорема 2: [43, стр. 129–130]. Упр. 3: [20, стр. 92] и [65].

§ 51. Борелевские и бэровские множества: [33] и [36].

§ 52. [55]. Упр. 10: [17].

§ 54. Регулярные объемы: [2].

§ 55. Теорема Лузина: [61, стр. 62 и 72].

§ 56. Линейные функционалы: [5, стр. 61] и [31, стр. 1008].

§ 58. [73, стр. 33–34]. Покрытия множеств в плоскости: [34].

§ 59. [73, стр. 140–149].

§ 60. [13], [46], [53].

§ 61. Интегрирование по частям: [61, стр. 102] и [70].

§ 62. Упр. 6: [36, стр. 93].

§ 63. [4]; см. также [73, стр. 42–45].

§ 64. [33].

## Список литературы


1. *P. Alexandroff* und *H. Hopf*, Topologie, Berlin, 1935.
2. *W. Ambrose*, Lectures on topological groups (неопубл.), Ann. Arbor, 1943.
3. *W. Ambrose*, Measures on locally compact topological groups, Trans. A.M.S., **61** (1947), 106–121.
4. *W. Ambrose*, Direct sum theorem for Haar measures, Trans. A.M.S., **61** (1947), 122–127.
5. *S. Banach*, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.
6. *G. Birkhoff*, Lattice theory, New York, 1940. [Есть русский перевод. См. Г. Биркгоф, Теория структур, Москва, 1952.]
7. *G. Birkhoff* and *S. MacLane*, A survey of modern algebra, New York, 1941.
8. *A. Bischof*, Beitäge zur Carathéodoryschen Algebraisierung des Integralbegriffs, Schr. Math. Inst. u. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin, 5 (1941), 237–262.
9. *E. Borel*, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Circ. Palermo, **27** (1909), 247–271.
10. *N. Bourbaki*, Sur un théorème de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques, C.R. Acad. Sci. Paris, **201** (1935), 1309–1311.
11. *K.R. Buch*, Some investigations of the set of values of measures in abstract space, Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd., **21**, № 9 (1945).
12. *C. Carathéodory*, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig-Berlin, 1927.
13. *H. Cartan*, Sur la mesure de Haar, C.R. Acad. Sci. Paris, **211** (1940), 759–762.
14. *C. Chevalley* and *O. Frink*, Bicompactness of Cartesian products, Bull. A.M.S., **47** (1941), 612–614.
15. *R. Courant*, Differential and integral calculus, London-Glasgow, 1934. [Есть русский перевод. См. Р. Курант. Дифференциальное и интегральное исчисление, Москва, 1933.]
16. *H. Cramér*, Random variables and probability distributions, Cambridge, 1937. [Есть русский перевод. См. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, Москва, 1947.]
17. *J. Dieudonné*, Un exemple d'espace normal non susceptible d'une structure uniforme d'espace complet, C.R. Acad. Sci. Paris, **209** (1939), 145–147.
18. *J. Dieudonné*, Sur le théorème de Lebesgue-Nicodym (III), Ann. Univ. Grenoble, **23** (1948), 25–53.
19. *J. L. Doob*, Stochastic processes depending on a continuous parameter, Trans. A.M.S., **42** (1937), 107–140.
20. *J. L. Doob*, Stochastic processes depending on an integral-valued parameter. Trans. A.M.S., **44** (1938), 87–150.
21. *O. Frink*, Representations of Boolean algebras, Bull. A.M.S., **47** (1941), 755–756.
22. *P. R. Halmos* and *J. v. Neumann*, Operator methods in classical mechanics, II, Ann. Math., **43** (1942), 332–350.
23. *P. R. Halmos*, The foundations of probability, Amer. Math. Monthly, **51** (1944), 493–510.
24. *P. R. Halmos*, The range of a vector measure, Bull. A.M.S., **54** (1948), 416–421.
25. *P. R. Halmos*, Measurable transformations, Bull. A.M.S., **55** (1949).
26. *G. H. Hardy*, *J. E. Littlewood* and *G. Pólya*, Inequalities, Cambridge, 1934. [Есть русский перевод. См. *Г. Г. Харди*, *Дж. Е. Литтльвуд* и *Г. Полиа*, Неравенства, Москва, 1948.]

27. *F. Hausdorff*, Mengenlehre, Berlin-Leipzig, 1927. [Есть русский перевод. См. *Ф. Хаусдорф*, Теория множеств, Москва, 1937.]
28. *E. W. Hobson*, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Vol. I, Cambridge, 1927.
29. *W. Hurewicz* and *H. Wallman*, Dimension theory, Princeton, 1941. [Есть русский перевод. См. *В. Гуревич* и *Г. Волмен*, Теория размерности, Москва, 1948.]
30. *M. Kac*, Sur les fonctions indépendante, I, Studia Math., **6** (1936), 46–58.
31. *S. Kakutani*, Concrete representation of abstract $(M)$-spaces. Ann. Math., **42** (1941), 994–1024.
32. *S. Kakutani*, Notes on infinite product measure spaces, I, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **19** (1943), 148–151.
33. *S. Kakutani* und *K. Kodaira*, Über das Haarsche Mass in der lokal bikompakten Gruppe, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20** (1944), 444–450.
34. *R. Kershner*, The number of circles covering a set, Amer. Journ. Math., **61** (1939), 665–671.
35. *А. Я. Хинчин* и *А. Н. Колмогоров*, Über Konvergenz der Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Мат. сборник, **32** (1925), 668–677.
36. *K. Kodaira*, Über die Beziehung zwischen den Massen und Topologien in einer Gruppe, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **23** (1941), 67–119.
37. *А. Н. Колмогоров*, Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, Math. Ann., **99** (1928), 309–319.
38. *А. Н. Колмогоров*, Bemerkungen zu meiner Arbeit «Über die Summen der zufälliger Grössen», Math. Ann., **102** (1930), 484–488.
39. *А. Н. Колмогоров*, Sur la loi forte des grands nombres, C.R. Acad. Sci. Paris, **191** (1930), 910–912.
40. *А. Н. Колмогоров*, основные понятия теории вероятностей, Москва, 1936.
41. *C. Kuratowski*, Topologie, Warszawa-Lwow, 1933.
42. *S. Lefschetz*, Algebraic topology, New York, 1942. [Есть русский перевод. См. *С. Лефшец*, Алгебраическая топология, Москва, 1949.]
43. *P. Lévy*, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937.
44. *А. А. Ляпунов*, О вполне аддитивных векторных функциях, Изв. АН СССР, **4** (1940), 465–478.
45. *A. Lomnicki*, Nouveaux fondements du calcul des probabilités, Fund. Math., **4** (1923), 34–71.
46. *L. H. Loomis*, Abstract congruence and the uniqueness of Haar measure, Ann. Math., **46** (1945), 348–355.
47. *L. H. Loomis*, On the representation of $\sigma$-complete Boolean algebras, Bull. A.M.S., **53** (1947), 757–760.
48. *D. Maharam*, On homogeneous measure algebras, Proc. N.A.S., **28** (1942), 108–111.
49. *E. Marczewski*, Sur l'isomorphie des mesures séparables, Coloq. Math., **1** (1947), 39–40.
50. *K. Menger*, Untersuchungen über allgemeine Metrik, Math. Ann., **100** (1928), 75–163.
51. *J. v. Neumann*, Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, Ann. Math., **33** (1932), 587–642.
52. *J. v. Neumann*, Functional operators, Princeton 1933–1935.
53. *J. v. Neumann*, The uniqueness of Haar's measure, Мат. сборник, **1** (1936), 721–734.

54. *J. v. Neumann*, On rings of operators, III, Ann. Math., **41** (1940), 94–161.

55. *J. v. Neumann*, Lectures on invariant measures (неопубл.) Princeton, 1940.

56. *O. Nikodym*, Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, Fund. Math., **15** (1930), 131–179.

57. *J. C. Oxtoby* and *S. M. Ulam*, On the existence of a measure invariant under a transformation, Ann. Math., **40** (1939), 560–566.

58. *Л. С. Понтрягин*, Непрерывные группы, Москва, 1938.

59. *S. Saks*, On some functionals, Trans. A.M.S., **35** (1933), 549–556.

60. *S. Saks*, Addition to the note on some functionals, Trans. A.M.S., **35** (1933), 965–970.

61. *S. Saks*, Theory of the integral, Warszawa-Lwów, 1937. [Есть русский перевод. См. *С. Сакс*, Теория интеграла, Москва, 1949.]

62. *H. M. Schaerf*, On the continuity of measurable functions in neighborhood spaces, Portugaliae Math., **6** (1947), 33–44.

63. *H. Scheffé*, A useful convergence theorem for probability distributions. Ann. Math. Stat., **18** (1947), 434–438.

64. *E. Sparre Andersen* and *B. Jessen*, Some limit theorems on integrals in an abstract set, Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd., **22** № 14 (1946).

65. *E. Sparre Andersen* and *B. Jessen*, On the introduction of measures in infinite product sets, Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd., **25 № 4** (1948).

66. *E. R. Stabler*, Boolean representation theory, Amer. Math. Monthly, **51** (1944), 129–132.

67. *H. Steinhaus*, Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, Fund., Math., **4** (1923), 286–310.

68. *M. H. Stone*, The theory of representations for Boolean algebras, Trans. A.M.S., **40** (1936), 37–111.

69. *M. H. Stone*, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. A.M.S., **41** (1937), 375–481.

70. *G. Tautz*, Eine Verallgemeinerung der partiellen Integration; uneigentliche mehrdimensionale Stieltjesintegrale, Jber. Deutsch. Math. Verein., **53** (1943), 136–146.

71. *E. R. van Kampen*, Infinite product measures and infinite convolutions, Amer. Journ. Math., **62** (1940), 417–448.

72. *A. Weil*, Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie générale, Paris, 1938.

73. *A. Weil*, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, 1940. [Есть русский перевод. См. *А. Вейль*, Интегрирование в топологических группах и его применения, Москва, 1950.]

74. *K. Yosida*, Vector lattices and additive set functions, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **17** (1941), 228–232.

# Предметный указатель