

емой волны. Амплитуды радиосигналов, принимаемых антенной от передатчиков, одинаковы. При одновременной работе передатчиков мощность принимаемого сигнала меняется в очень широких пределах. Объясните явление и оцените суммарный процент времени, в течении которого мощность принимаемого сигнала составляет менее $1/1000$ среднего значения принимаемой мощности. Отражением радиосигналов от земли пренебречь.

Р.Александров

Решения задач М1451-1460, Ф1468-1477

М1451. Даны натуральные числа a и b такие, что числа $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит числа $\sqrt{a+b}$.

Пусть d – наибольший общий делитель чисел a и b .

Так как

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}$$

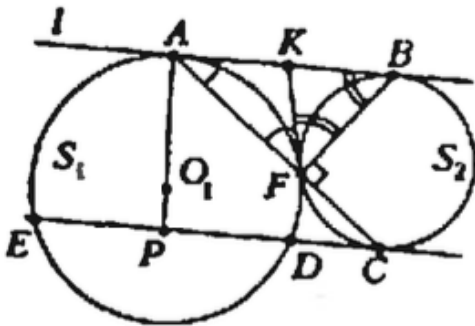
и ab делится на d^2 , то $a^2 + b^2 + a + b$ делится на d^2 . Число $a^2 + b^2$ также делится на d^2 . Поэтому $a + b$ делится на d^2 и $\sqrt{a+b} \geq d$.

А.Голованов, Е.Малинникова

М1451. Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке F . Прямая l касается S_1 и S_2 в точках A и B соответственно. Прямая параллельная прямой l касается S_2 в точке C и пересекает S_1 в точках D и E . Докажите, что а) точки A, F и C лежат на одной прямой; б) общая хорда окружностей, описанных около треугольников ABC и BDE , проходит через точку F .

а) Первое решение. Так как касательные к окружности S_2 в точках B и C параллельны, то BC – ее диаметр, и $\angle BFC = 90^\circ$. Проведем через точку F общую касательную к окружностям (см. рисунок), пусть она пересекает прямую l в точке K . Из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что треугольники AKF и BKF равнобедренные. Следовательно,

$$\angle AFB = \angle AFK + \angle KFB = \angle FAB + \angle FBA = 180^\circ/2 = 90^\circ$$



Второе решение. Рассмотрим гомотегию с центром F и коэффициентом, равным $-r_1/r_2$, где r_1 и r_2 – радиусы окружностей S_1 и S_2 . При этой гомотегии S_1 переходит в S_2 , а прямая l – касательная к S_1 – переходит в параллельную прямую – касательную к S_2 . Следовательно, точка A переходит в точку C , поэтому точка F лежит на отрезке AC .

б) Ниже мы покажем, что центр окружности BDE находится в точке A . Поскольку центр окружности ABC есть середина

AC ($\angle ABC = 90^\circ$), а $\angle BFC = 90^\circ$ (см. первое решение а)), отсюда будет следовать, что BF есть перпендикуляр, опущенный из общей точки окружностей BDE и ABC на прямую, соединяющую их центры. А это и значит, что прямая BF содержит искомую хорду.

Итак, нам достаточно доказать, что $AD = AE = AB$. Первое из этих равенств очевидно (ибо касательная к S_1 в точке A параллельна DE). Пусть r_1 и r_2 – радиусы S_1 и S_2 .

Опуская перпендикуляр AP на DE , найдем, что $AP = BC = 2r_2$ и по теореме Пифагора для треугольников APD и O_1PD , где O_1 – центр S_1 , $PD^2 = O_1D^2 - O_1P^2 = r_1^2 - (2r_2 - r_1)^2 = 4r_1r_2 - 4r_2^2$, $AD^2 = AP^2 + PD^2 = 4r_1r_2$. Но легко найти, что общая касательная AB окружностей S_1 и S_2 равна $2\sqrt{r_1r_2}$.

А.Калинин, В.Дубровский

М1453. Существует ли квадратный трехчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа n , в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $P(n)$ также записывается одними единицами?

Ответ: существует.

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$P(x) = x(9x + 2)$$

Если $n = \underbrace{11\dots11}_k$, то $9n + 2 = \underbrace{100\dots001}_{k-1}$.

Следовательно, $P(n) = \underbrace{11\dots11}_k \cdot \underbrace{100\dots001}_{k-1} = \underbrace{11\dots11}_{2k}$.

Значит, этот квадратный трехчлен удовлетворяет условию.

А.Перлин

М1454. Прямоугольник $m \times n$ разрезан на уголки:



Докажите, что разность между количеством уголков вида a и количеством уголков вида b делится на 3.

Ясно, что если прямоугольник $m \times n$ разрезан на уголки, то mn делится на 3. Расставим в клетках прямоугольника числа так, как показано на рисунке.

1	2	3	4	...	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
2	3	4	5	...	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$
3	4	5	6	...	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$
...
$m-1$	m	$m+1$	$m+2$...	$m+n-5$	$m+n-4$	$m+n-3$	$m+n-2$
m	$m+1$	$m+2$	$m+3$...	$m+n-4$	$m+n-3$	$m+n-2$	$m+n-1$

Сумма всех этих чисел равна $mn(m+n)/2$. Сумма чисел, стоящих в уголке вида a , дает при делении на 3 остаток 2; сумма чисел, стоящих в уголке вида b , – остаток 1 (или, что тоже самое, -2); суммы чисел, стоящих в уголках вида c и d , делятся на 3. Если n_a и n_b – количество уголков вида a и b соответственно, то сумма всех чисел в прямоугольнике имеет вид $3N + 2(n_a - n_b)$, где N – некоторое число. Из равенства