INTRODUCTION TO METAMATHEMATICS

by

STEPHEN COLE KLEENE

Professor of Mathematics at the University of Wisconsin (Madison, Wis., USA)

1952

D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC.

New York *Toronto*

Стефен К. КЛИНИ

ВВЕДЕНИЕ В МЕТАМАТЕМАТИКУ

Перевод с английского
А. С. ЕСЕНИНА-ВОЛЬПИНА

Под редакцией
В. А. УСПЕНСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва — 1957

Книга является самой обширной из имеющихся монографий по математической логике и теории рекурсивных функций. Она не предполагает со стороны читателя никаких специальных познаний и поэтому может считаться общедоступной. Книга предназначена для глубокого изучения предмета и рассчитана как на специалистов по математической логике и теории рекурсивных функций, так и на лиц, желающих впервые, но серьезно, изучить эти науки.

Редакция литературы по математическим наукам

Заведующий редакцией профессор А. Г. КУРОШ

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Хотя математическая логика существует как наука по крайней мере с середины прошлого столетия, круг специалистов в этой области невелик и результаты ее известны недостаточно широко. Однако за последние десятилетия—и в особенности начиная с 1930 г.—в ней были сделаны важнейшие открытия и развитие ее приняло настолько бурный характер, что теперь трудно уже охватить все полученные результаты одной монографией, во всяком случае, такая монография до сих пор никем не написана. Имеются всё же две монографии, которые играют ведущую роль в мировой литературе по математической логике,— это книга Гильберта и Бернайса «Grundlagen der Mathematik» (т. I—1934 г., т. II—1939 г.) и предлагаемая вниманию читателя более современная книга Клини «Введение в метаматематику» (1952 г.).

Написанная одним из крупнейших специалистов, книга Клини содержит очерк современного состояния оснований математики и возникших в этой связи основных направлений.

От читателя не требуется никаких предварительных познаний в логике или математике. Однако подробное проведение всех опущенных автором деталей доказательств требует некоторой тренировки (которую, впрочем, можно приобрести в процессе тщательного изучения этой книги). Таким образом, книгу можно рекомендовать и начинающему—при условии, что он не боится трудностей. Читателю, уже знакомому с излагаемым материалом, книга будет полезна не только благодаря оригинальности изложения и обилию тонких замечаний, но и потому, что она может служить удобным библиографическим источником.

Часть III этой монографии может в основном читаться независимо от остальных частей и служить руководством для изучения теории рекурсивных функций, более сжатым и потому более трудным, чем выпущенная недавно Издательством иностранной литературы книга Р. Петер «Рекурсивные функции», (1951 г.; третья часть книги Клини содержит более полное изложение теории обще-рекурсивных функций и вовсе отсутствующую у Петер теорию частично-рекурсивных функций, но зато монография Петер богаче материалом, связанным с примитивными рекурсиями).

В нескольких местах автор счел возможным отослать читателя за доказательствами к упомянутой книге Гильберта и Бернайса. Мы в специальных добавлениях восполнили эти отсутствующие звенья в изложении автора.

Если принять во внимание сделанные нами добавления и ряд подстрочных примечаний, то по сравнению с материалом, изложенным у Гильберта и Бернайса, в настоящей книге отсутствует теория одноместных предикатов, а также изложенные в последних двух дополнениях к книге Гильберта и Бернайса теория положительных форм (относящаяся к исчислению высказываний) и формальное построение анализа на основе арифметики с переменными функциями (для которого, впрочем, до сих пор не известно никакого доказательства непротиворечивости).

Зато налицо подробное рассмотрение интуиционистских систем, общая теория как обще-, так и частично-рекурсивных функций, исчисление Генцена, реализуемость, т. е. вещи, более современные и заведомо перевешивающие упомянутый не вошедший сюда материал книги Гильберта и Бернайса.

Мы глубоко благодарны автору за присланный им перечень опечаток и отдельных мелких погрешностей, имевшихся в английском издании. В русском издании соответствующие места исправлены.

Выражаем благодарность также А. А. Курмитису (Рига), указавшему на одну неточность, допущенную автором (в замечании 1 § 27).

Ряд мелких исправлений внесен нами без специальных оговорок.

В оригинале при переносе формул последний знак, стоящий перед переносом, не повторяется. Следуя установившейся у нас традиции, мы, как правило, повторяем этот последний знак, если он не является знаком отрицания или запятой.

Обращаем особое внимание читателя на различие между двумя шрифтами— курсив и плантин, которое начинает появляться в IV главе, и особенно начиная с § 40 гл. VIII.

Курсив: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, \ldots, l, m, n, p, r, s, \ldots, x, y, z$
Плантин: $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}, \mathrm{i}, \ldots, \mathrm{l}, \mathrm{m}, \mathrm{n}, \mathrm{p}, \mathrm{r}, \mathrm{s}, \ldots, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$

(Плантин употребляется для обозначения формальных переменных, а курсив—для содержательных.)

А. С. Есенин-Вольпин.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Две последовательные эры исследований по основаниям математики в девятнадцатом столетии, достигшие своего наивысшего развития в теории множеств и арифметизации анализа, сменились около 1900 г. новым кризисом и новой эрой, отмеченной господством программ Рассела и Уайтхэда, Гильберта и Брауэра.

Появление в 1931 г. двух теорем Гёделя о неполноте, в 1933 г. работы Тарского о понятии истины в формализованных языках, в 1934 г. эрбран-гёделевского понятия „обще-рекурсивной функции" и в 1936 г. связанного с ним тезиса Чёрча возвещает уже новейшую эру, в которой математические средства применяются как для оценки прежних программ, так и в новых, не предвиденных прежде направлениях.

Цель этой книги—дать связное введение в область математической логики и теории рекурсивных функций и в новейшие исследования по основаниям математики вообще.

Пришлось произвести некоторый отбор. В основном это было сделано с тем, чтобы сосредоточиться после части I на метаматематическом исследовании элементарной арифметики с необходимым материалом из математической логики, оставив в стороне исчисление предикатов высших ступеней, анализ, теорию типов и теорию множеств. Этот отбор был сделан потому, что в арифметике мы находим пример первого и простейшего применения новейших методов и концепций, тогда как распространение их на другие отрасли математики пока еще находится в стадии становления (и будет приобретать, повидимому, все бо́льшую и бо́льшую важность в ближайшем будущем).

Книга написана с таким расчетом, чтобы она могла служить учебником для аспирантов-математиков первого года обучения[1] (и старше) и для других лиц, достигших этого уровня владения математикой, независимо от их познаний в том или ином разделе математики.

При использовании книги в качестве учебника рекомендуется быстро (в течение двух или трех недель при аудиторных занятиях по три раза в неделю) пройти часть I (главы I—III), которая содержит необходимый подготовительный материал. Интенсивное изучение должно начаться с части II (глава IV), где

[1]) First year graduate students in mathematics.—*Прим. перев.*

существенно, чтобы изучающий сосредоточился на приобретении прочного навыка в обращении с метаматематическим методом.

Параграфы, отмеченные звездочкой, могут быть при первом чтении опущены или рассмотрены бегло. К изучению некоторых из них придется в дальнейшем вернуться (например, § 37 нужно изучить перед чтением § 72).

Обе знаменитые теоремы Гёделя о неполноте изложены в главе VIII, причем доказательство одной леммы отложено до главы X. Автору удавалось закончить эти десять глав (а иногда даже несколько больше) в течение семестрового курса, который он неоднократно читал в Висконсинском университете.

Остальные пять глав можно использовать для расширения такого курса до годичного или при параллельном чтении, сопровождающем семинар.

Семестровый курс по рекурсивным функциям при наличии у студентов некоторого предварительного знакомства с математической логикой или под руководством осведомленного преподавателя можно начать с части III (глава IX). Имеются и другие возможности выбора материала; например, тем, кто интересуется преимущественно математической логикой, многое из части IV можно читать непосредственно за частью II или даже за главой VII.

Автор благодарен Сондерсу Маклэйну, склонившему его к написанию этой книги и сделавшему ценные критические замечания в связи с первыми черновиками некоторых глав. Джон Аддисон полностью прочитал гранки с большой тщательностью и независимо от автора. Среди многих других, оказавших помощь, были Эверт Бет, Роберт Бройш, Аренд Гейтинг, Нэнси Клини, Леонард Линский, Дэвид Нельсон, Джеймс Ренно и Джин Роуз. Научные заимствования отмечены ссылками на библиографию; особенно много использована книга Гильберта и Бернайса «Grundlagen der Mathematik» в двух томах, 1934 и 1939 гг

Июль 1952 г. *С. К. Клини.*

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ПРОБЛЕМЫ ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ

Глава I

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

§ 1. СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Прежде чем приступить к нашему основному предмету, полезно бегло рассмотреть канторовскую теорию множеств.

Стадо из четырех овец и роща из четырех деревьев находятся между собой в таком отношении, в каком ни одно из них не находится с кучей из трех камней или с рощей из семи деревьев. Хотя для печатного выражения этого труизма мы использовали слова, обозначающие числа, отношение, о котором идет речь, само лежит в основе понятия кардинального числа. Не прибегая к пересчету овец или деревьев, их можно попарно сопоставить друг другу, например привязав овец к деревьям так, что каждая овца и каждое дерево будут принадлежать в точности к одной паре. Такое попарное соответствие между элементами двух коллекций или „множеств" предметов называется взаимно однозначным или *одно-однозначным соответствием* [короче, *1—1-соответствием*].

В 1638 г. Галилей заметил, что *квадраты целых положительных чисел* могут быть поставлены в 1—1-соответствие с самими *целыми положительными числами* следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 4, & 9, & 16, & \ldots, & n^2, \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, \ldots, \end{array}$$

несмотря на древнюю аксиому, что целое больше любой своей части. Кантор первый предпринял, между 1874 и 1897 гг., систематическое сравнение бесконечных множеств в терминах возможности установления 1—1-соответствия.

Два множества из «парадокса» Галилея и множество *натуральных чисел*

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ \ldots$$

служат примерами „счетных" бесконечных множеств. Выбирая последнее из этих множеств в качестве стандартного образца, мы будем называть бесконечное множество *счетным*, если можно установить 1—1-соответствие между его элементами и натуральными числами.

Чтобы установить счетность некоторого бесконечного множества, надо лишь указать, каким образом его элементы могут быть заданы (без повторений) в виде „бесконечного перечня". Тогда первый в этом перечне элемент соответствует числу 0, второй—числу 1 и т. д. Хотя сам этот перечень и бесконечен, каждый его элемент занимает в нем некоторое конечное положение.

Такой бесконечный (без повторений) перечень элементов множества, или 1—1-соответствие между элементами множества и натуральными числами, называется *пересчетом* множества. Число, соответствующее данному элементу, служит *индексом* этого элемента в пересчете.

Элементы конечного множества также могут быть даны в виде списка, т. е. конечного перечня. Поэтому термин *счетный* иногда применяется к множествам, которые или являются бесконечными и счетными, т. е *счетно-бесконечными*, или же конечны.

Множество *целых чисел* может быть пересчитано посредством расположения их в следующем порядке:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots$$

Множество *рациональных чисел* также является счетным, и это обстоятельство может показаться удивительным при сравнении их с целыми числами в обычном алгебраическом порядке. Точки с целочисленными абсциссами расположены на оси x-ов изолированно, а точки с рациональными абсциссами—„всюду плотно", т. е. между любыми двумя сколь угодно близкими из них имеются такие же точки. Этот пересчет может быть выполнен при помощи следующего приема, который мы изложим для *положительных рациональных чисел*, предоставляя случай всех рациональных чисел читателю.

Пусть дроби с положительными числителем и знаменателем расположены в виде следующей бесконечной матрицы:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
{}^1/_1 \arrow[d] & {}^1/_2 \arrow[r] & {}^1/_3 \arrow[dl] & {}^1/_4 \arrow[r] & \cdots \\
{}^2/_1 \arrow[ur] & {}^2/_2 \arrow[dl] & {}^2/_3 \arrow[ur] & {}^2/_4 & \cdots \\
{}^3/_1 \arrow[d] & {}^3/_2 \arrow[ur] & {}^3/_3 & {}^3/_4 & \cdots \\
{}^4/_1 \arrow[ur] & {}^4/_2 & {}^4/_3 & {}^4/_4 & \cdots \\
 & & \cdots\cdots & &
\end{tikzcd}$$

Пусть теперь эти дроби пересчитаны в порядке, указанном стрелками. Положительное рациональное число может быть представлено в виде дроби с целым положительным числителем и знаменателем. Будем двигаться по направлению стрелок, вычеркивая каждую дробь, которая по величине равна некоторой предыдущей дроби. Тогда получится следующее перечисление положительных рациональных чисел:

$$1,\ 2,\ {}^1/_2,\ {}^1/_3,\ 3,\ 4,\ {}^3/_2,\ {}^2/_3,\ {}^1/_4,\ \ldots.$$

Этот метод матрицы является общим при пересчете *упорядоченных пар элементов счетного множества*, например упорядоченных пар натуральных чисел или упорядоченных пар целых чисел. Каждая строка матрицы служит пересчету пар с фиксированным первым элементом. *Упорядоченные тройки элементов счетного множества* могут затем быть пересчитаны при помощи повторного применения метода матрицы, при котором в качестве строк выбираются уже полученные пересчеты троек с фиксированным первым элементом. Повторяя этот прием, можно получить пересчет *упорядоченных n-ок элементов счетного множества* для каждого фиксированного натурального n. Все эти пересчеты, включая пересчет первоначального множества, можно выбрать в качестве строк новой матрицы, чтобы получить пересчет упорядоченных n-ок для переменного n, т. е. пересчет *конечных последовательностей элементов счетного множества*.

С помощью этого результата можно получить пересчет *алгебраических уравнений*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

с целыми коэффициентами, потому что каждое уравнение можно описать заданием последовательности

$$(a_0,\ a_1, \ldots, a_{n-1},\ a_n)$$

его коэффициентов. „Действительным алгебраическим числом" называется действительный корень уравнения такого вида. Так как данное уравнение имеет не более n различных корней, то *алгебраические числа* образуют счетное множество.

Еще один прием, иллюстрирующий возможности пересчета множеств. При рассмотрении (конечного или бесконечного) счетного множества числа, соответствующие его элементам в некотором фиксированном пересчете, можно употреблять в качестве индивидуальных обозначений или названий этих элементов. Но и обратно, если название или явное выражение в некоторой заранее данной недвусмысленной системе обозначений может быть индивидуальным образом сопоставлено каждому элементу некоторого множества, то это множество (конечное или бесконечное) счетно при том условии, что название или выражение должно быть конечной последовательностью символов, выбранных из данного конечного алфавита доступных нам символов. Например, алгебраические уравнения с целыми коэффициентами могут быть записаны с помощью десятичных обозначений для коэффициентов и показателей. Запись показателей вверху является несущественной особенностью наших обозначений, которую можно устранить с помощью подходящего соглашения. Действительно, коль скоро мы имеем дело только с этими уравнениями, мы можем писать показатели просто в той же строке, что и x. Тогда требуются в точности следующие символы:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ x, +, -, =.$$

Первый символ в уравнении отличен от 0. Будем теперь рассматривать эти символы как цифры (!) в четырнадцатиричной системе счисления, т. е в системе исчисления, основанной на числе 14 таким же образом, каким десятичная система основана на числе 10 Каждое уравнение станет натуральным числом (и различные уравнения станут различными числами). Уравнения можно пересчитать в порядке возрастания этих чисел.

§ 2. КАНТОРОВСКИЙ ДИАГОНАЛЬНЫЙ МЕТОД

Посредством знаменитого „диагонального метода“ Кантора было доказано, что в математике рассматриваются и такие бесконечные множества, которые не могут быть пересчитаны. Множество *действительных чисел* несчетно.

Рассмотрим сначала *действительные числа x в полуинтервале* $0<x\leqslant 1$. Каждое действительное число из этого полуинтервала однозначно представляется посредством некоторой правильной бесконечной десятичной дроби, т. е. десятичной дроби, первая значащая цифра которой стоит правее запятой и в которой имеется бесконечно много цифр, отличных от 0. Число может представляться в виде конечной десятичной дроби, т. е. дроби с повторяющимися нулями, но такую дробь можно заменить на бесконечную с повторяющимися девятками. Например, 0,483 или 0,483000... можно заменить на 0,482999.... Обратно, каждая правильная бесконечная десятичная дробь представляет единственное число из этого полуинтервала.

Допустим теперь, что

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

—бесконечный перечень или пересчет некоторых, но не обязательно всех, действительных чисел, принадлежащих этому полуинтервалу. Напишем теперь одну под другой соответствующие им бесконечные десятичные дроби

$$\begin{array}{lllll}
0, & x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \ldots \\
 & \searrow & & & \\
0, & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \ldots \\
 & & \searrow & & \\
0, & x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \ldots \\
 & & & \searrow & \\
0, & x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \ldots \\
 & \ldots & & & \quad\searrow
\end{array}$$

Образуем диагональную дробь, указанную стрелками. Заменим в ней каждую из последовательных цифр x_{nn} на отличную от нее цифру x'_{nn} так, чтобы при этом не получилась конечная дробь. Например, пусть $x'_{nn}=5$, если $x_{nn}\neq 5$, и $x'_{nn}=6$, если $x_{nn}=5$.

Полученная дробь

$$0,\ x'_{00}\,x'_{11}\,x'_{22}\,x'_{33}\ \ldots$$

представляет некоторое действительное число x, которое принадлежит нашему полуинтервалу, но не входит в рассматриваемый пересчет. Действительно, эта дробь отличается от первой из данных дробей своей первой цифрой после запятой, от второй — своей второй цифрой после запятой, от третьей — третьей цифрой после запятой и т. д.

Поэтому данный пересчет не является пересчетом всех действительных чисел полуинтервала $0 < x \leqslant 1$. Пересчета всех действительных чисел этого полуинтервала не существует.

Чтобы применить диагональный метод ко всем действительным числам, не ограничиваясь полуинтервалом $0 < x \leqslant 1$, достаточно представить действительные числа в форме характеристика-плюс-мантисса, например $37{,}142\ldots = 37 + 0{,}142\ldots$, $-2{,}813\ldots = -3 + 0{,}186\ldots$, и применить этот метод к мантиссам.

Ясно, что этим обнаруживается существенное различие между множеством рациональных чисел или множеством алгебраических чисел с одной стороны, и множеством действительных чисел с другой.

Исторически интересно отметить, как открытия Кантора [1874] (см. библиографию) проливают свет на более раннее открытие Лиувилля в 1844 г. Лиувилль при помощи особого метода сумел построить некоторые трансцендентные (т. е. неалгебраические) действительные числа. Канторовский диагональный метод позволяет обнаружить существование трансцендентных чисел с помощью очень общих изложенных выше соображений. В самом деле, для любого данного пересчета $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ алгебраических чисел при помсщи диагонального метода можно получить индивидуальные трансцендентные числа.

Множество (действительных) *трансцендентных чисел* несчетно, потому что если бы оно, подобно множеству алгебраических чисел, было счетно, то, комбинируя пересчеты обоих множеств, можно было бы получить пересчет всех действительных чисел. Итак, в некотором смысле большинство действительных чисел трансцендентно.

Другим примером несчетного множества служит множество (однозначных) функций, у которых как независимая, так и зависимая переменная пробегают счетное множество. Для определенности рассмотрим множество всех *функций от натурального числа, принимающих натуральные числа в качестве значений* (иначе говоря, множество всех *бесконечных последовательностей натуральных чисел*). Допустим, что дан пересчет некоторых, не обязательно всех, таких функций

$$f_0(n),\quad f_1(n),\quad f_2(n),\quad f_3(n),\ \ldots.$$

Напишем последовательности значений идущих друг за другом функций одну под другой, как строки бесконечной матрицы

$$\begin{array}{cccc}
f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3)\ldots \\
f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & f_1(3)\ldots \\
f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & f_2(3)\ldots \\
f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3)\ldots \\
 & \cdots & &
\end{array}$$

Возьмем последовательность значений, стоящих на диагонали. Изменим каждое из этих значений, например прибавляя 1. Функция $f(n)$ с полученной последовательностью значений, которую можно записать в виде

$$f(n) = f_n(n) + 1,$$

не может принадлежать нашему пересчету, так как она отличается от первой из пересчитанных функций значением, которое она принимает для 0, от второй — значением для 1 и т. д.

Чтобы иначе выразить это рассуждение, допустим, что функция $f(n)$ входит в пересчет, т. е. допустим, что для некоторого натурального числа q

$$f(n) = f_q(n),$$

каково бы ни было натуральное число n. Подставляя число q вместо переменного n в это и в предыдущее уравнения, получаем

$$f(q) = f_q(q) = f_q(q) + 1.$$

Это невозможно, потому что натуральное число $f_q(q)$ не может равняться самому себе, увеличенному на единицу.

Дальнейшим примером несчетного множества служит множество всех *множеств натуральных чисел*. (Но множество всех конечных множеств натуральных чисел счетно. Почему?) Мы можем выразить множество натуральных чисел посредством *представляющей функции*, которая принимает значение 0 для натуральных чисел, принадлежащих этому множеству, и значение 1 для остальных натуральных чисел. Последовательность значений представляющей функции некоторого множества натуральных чисел — бесконечная последовательность из 0 и 1. Например, эта последовательность для множества, содержащего 0, 2 и 3 и не содержащего 1 и 4, начинается с 01001 .... Эти последовательности берутся в качестве строк бесконечной матрицы. Изменения, которые производятся на диагонали, — это взаимная замена 0 и 1.

Могут ли эти несчетные множества быть поставлены друг с другом в 1 — 1-соответствие и нет ли еще и других типов бесконечных множеств? Рекомендуем читателю попытаться самостоятельно ответить на эти вопросы (ответы даны в § 5). Рассмотрим теперь теорию Кантора в ее общем виде.

§ 3. КАРДИНАЛЬНОЕ ЧИСЛО

Канторовская теория „абстрактных множеств" имеет дело с множествами вообще. (Кантор построил также теорию „точечных множеств".) Введенные им термины *множество* и *элемент* Кантор описывает следующим образом: «Под „множеством" мы понимаем любое объединение в одно целое M определенных вполне различаемых объектов m из нашего восприятия или мысли (которые называются „элементами" M)» [1895, стр. 481].

К множествам присоединяются *пустое* множество, не имеющее элементов, и *единичные* множества, каждое из которых обладает одним единственным элементом. Пустое множество мы будем обозначать через O [1]), единичное множество с единственным элементом a — через $\{a\}$, а множество с элементами a, b, c, ... — через $\{a, b, c, \ldots\}$.

Множество называют также *совокупностью*, *классом*, *системой*, *семейством*, *комплексом*, *областью* [2]). То, что a является элементом M, можно

---

[1]) Употребляется также обозначение Λ. — *Прим. ред.*

[2]) В подлиннике — *aggregate, collection, class, domain, totality*. — *Прим. ред.*

выразить еще словами: a есть *член* M, или *принадлежит* M, или *находится в* M, или *входит в* M; символически $a \in M$. Если a не является элементом M, то в символах это записывается так: $a \bar{\in} M$ [1]).

Мы считаем, что два множества M и N совпадают (и пишем $M = N$), если они имеют одни и те же элементы, т. е. $a \in M$ для любого предмета a тогда и только тогда, когда $a \in N$.

Два множества M и N мы называем *эквивалентными* (и пишем $M \sim N$), если существует $1-1$-соответствие (§ 1) между ними. (Иногда мы будем писать „соответствие $M \sim N$" для обозначения некоторого индивидуального $1-1$-соответствия между M и N, которое должно существовать, если $M \sim N$.)

Отношение $M \sim N$, очевидно, „рефлексивно", „симметрично" и „транзитивно", т. е. для любых множеств M, N и P справедливы соотношения: $M \sim M$; если $M \sim N$, то $N \sim M$; если $M \sim N$ и $N \sim P$, то $M \sim P$.

Кардинальное число множества M вводится как некоторый объект $\overline{\overline{M}}$, сопоставляемый всем тем и только тем множествам, которые эквивалентны M (включая само M). По этому определению $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ тогда и только тогда, когда $M \sim N$.

Что представляют собой, помимо сказанного, кардинальные числа — это, пожалуй, несущественно, но мы все же отметим некоторые интерпретации. Кантор описывает их следующим образом: «То общее понятие, которое мы получаем с помощью нашей интеллектуальной активности, когда, отправляясь от множества M, мы абстрагируемся от природы его различных элементов и от порядка, в котором они нам даны, мы называем „мощностью" или „кардинальным числом" множества M». Эта двойная абстракция подсказывает канторовское обозначение «$\overline{\overline{M}}$» для кардинального числа множества M. Фрэге [1884] и Рассел [1902] отождествляют кардинальное число $\overline{\overline{M}}$ с множеством множеств, эквивалентных M, тогда как Нейман [1928] выбирает в каждом из этих множеств множеств („классов эквивалентности") некоторое индивидуальное множество, служащее кардинальным числом любого множества этого класса.

Понятие „части" множества вводится посредством следующего определения. Множество M_1 называют *подмножеством* множества M и пишут $M_1 \subseteq M$, если каждый элемент M_1 является элементом M [2]).

Пример 1. Множество $\{a, b, c\}$ из трех элементов a, b, c имеет восемь $(= 2^3)$ подмножеств: O, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Заметим, что среди подмножеств множества M имеются пустое множество O и само множество M. Последнее называется *неистинным* подмножеством, а остальные подмножества — *истинными* [3]). Очевидно, что если $M_2 \subseteq M_1$ и $M_1 \subseteq M$ (сокращенно $M_2 \subseteq M_1 \subseteq M$), то $M_2 \subseteq M$.

Объединением, или *суммой* $M + N$ двух множеств M и N называется множество предметов, принадлежащих хотя бы одному из множеств M и N (т. е. принадлежащих множеству M или множеству N), а их *пересечением*, или *общей частью* $M \cdot N$ называется множество предметов, принадлежащих

---

[1]) В зарубежной литературе (в том числе в подлиннике) вместо $a \in M$ пишут также $a \varepsilon M$, а вместо $a \bar{\in} M$ пишут $a \not\varepsilon M$. — *Прим. ред.*

[2]) Во многих зарубежных работах (в том числе в подлиннике) часто для обозначения того, что M_1 является подмножеством множества M, пишут $M_1 \subset M$. В советской литературе символом $M_1 \subset M$ обозначают обычно утверждение, состоящее в том, что $M_1 \subseteq M$ и $M_1 \neq M$, т. е. что M_1 является истинным подмножеством множества M (см. ниже). — *Прим. ред.*

[3]) Всякое подмножество множества M, отличное от O и M (иначе говоря, всякое непустое истинное подмножество множества M), называется *собственным подмножеством*, или *правильной частью* множества M. — *Прим. ред.*

обоим множествам M и N (т. е. принадлежащих множеству M или множеству N). Аналогично для более чем двух множеств. *Разность* $M-N$ множеств M и N (при $N \subseteq M$, называемая также *дополнением* множества N *до множества* M или *в множестве* M) определяется как множество предметов, принадлежащих M, но не принадлежащих N [1]).

Пример 2. $\{a, b, c\}+\{b, d\}=\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c\} \cdot \{b, d\}=\{b\}$, $\{a, b, c\}-\{b, d\}=\{a, b, c\}-\{b\}=\{a, c\}$.

Очевидно, $M-M_1 \subseteq M$; в случае, если $M_1 \subseteq M$, и только в этом случае, $M_1+(M-M_1)=M$. Два множества M и N *не пересекаются*, если они не имеют общих элементов, т. е. если $M \cdot N=\mathrm{O}$. Например, M_1 и $M-M_1$ не пересекаются. Если M и N не пересекаются, то или $M \neq N$, или $M=N=\mathrm{O}$.

Обратимся к важному вопросу сравнения кардинальных чисел. Если даны два множества M и N, то может существовать 1—1-соответствие между M и некоторым подмножеством N_1 множества N, а может такого соответствия не существовать. С другой стороны, может существовать, а может и не существовать подмножество M_1 множества M, эквивалентное N. Комбинируя эти две возможности, мы получаем четыре случая, один и только один из которых должен иметь место для любой данной пары множеств M и N:

(1a) Для некоторого N_1 выполняется соотношение $M \sim N_1 \subseteq N$, но ни для какого M_1 не выполняется соотношение $N \sim M_1 \subseteq M$.

(1b) Ни для какого N_1 не выполняется соотношение $M \sim N_1 \subseteq N$, но для некоторого M_1 выполняется соотношение $N \sim M_1 \subseteq M$.

(2) Для некоторого N_1 выполняется соотношение $M \sim N_1 \subseteq N$ и для некоторого M_1 выполняется соотношение $N \sim M_1 \subseteq M$.

(3) Ни для какого N_1 не выполняется соотношение $M \sim N_1 \subseteq N$ и ни для какого M_1 не выполняется соотношение $N \sim M_1 \subseteq M$.

В случае (1a) говорят, что кардинальное число множества M *меньше*, чем кардинальное число множества N (обозначается $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$). Чтобы оправдать рассмотрение $<$ как отношения между кардинальными числами $\overline{\overline{M}}$ и $\overline{\overline{N}}$, а не просто между множествами M и N, следует заметить, что если $M' \sim M$ и $N' \sim N$, то случай (1a) имеет место для пары множеств M', N' тогда и только тогда, когда он имеет место для пары M, N.

Отношение порядка для кардинальных чисел транзитивно, т. е. для любых трех кардинальных чисел $\overline{\overline{M}}, \overline{\overline{N}}, \overline{\overline{P}}$ из $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ и $\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{P}}$ следует $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{P}}$.

Положим по определению $\overline{\overline{M}} > \overline{\overline{N}}$, если $\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{M}}$. Тогда соотношение $\overline{\overline{M}} > \overline{\overline{N}}$ имеет место в точности в случае (1b).

Отношение $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, т. е. $M \sim N$, очевидно, подпадает под случай (2), если выбрать в качестве N_1 и M_1 несобственные подмножества. Следовательно, для любых двух кардинальных чисел и $\overline{\overline{M}}$ и $\overline{\overline{N}}$ три отношения $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$, $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ и $\overline{\overline{M}} > \overline{\overline{N}}$ „взаимно исключают друг друга", иначе говоря, не более чем одно из них может иметь место.

Только после значительного продвижения в рассматриваемой теории (см. ссылки в § 5) можно выяснить, являются ли эти три отношения „исчерпывающими", другими словами, должно ли иметь место хотя бы одно из них. Ситуация отчасти прояснится в результате следующей теоремы, после которой останется только вопрос, может ли встретиться случай (3).

---

[1]) Часто сумма множеств M и N обозначается $M \cup N$, их пересечение $M \cap N$ и их разность $M \setminus N$. — *Прим. ред.*

*§ 4. ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, КОНЕЧНЫЕ И БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

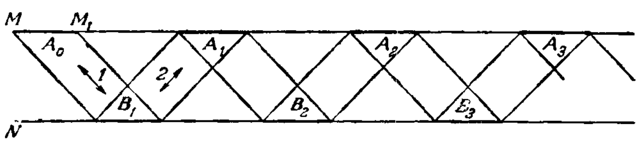
Теорема А. *Если* $M \sim N_1 \subseteq N$ и $N \sim M_1 \subseteq M$, *то* $M \sim N$. Другими словами, *в случае* (2) § 3 *обязательно* $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$. (Бернштейн [1898].)

Доказательство. По условию, можно считать, что дано некоторое $1-1$-соответствие $M \overset{1}{\sim} N_1$ между M и подмножеством N_1 множества N и аналогично $N \overset{2}{\sim} M_1$. Задача состоит в том, чтобы найти третье $1-1$-соответствие $M \overset{3}{\sim} N$.

Пусть $A_0 = M - M_1$. В данном соответствии $M \overset{1}{\sim} N_1$ элементы подмножества A_0 множества M будут отвечать элементам, образующим некоторое подмножество B_1 множества N_1 (а значит, и множества N), или, в символах, $A_0 \overset{1}{\sim} B_1$. Тогда в другом данном соответствии $N \overset{2}{\sim} M_1$ элементы подмножества B_1 множества N будут отвечать элементам, образующим подмножество A_1 множества M_1 (а значит, и множества M), или, в символах, $B_1 \overset{2}{\sim} A_1$, и т. д. Итак,

$$A_0 \overset{1}{\sim} B_1 \overset{2}{\sim} A_1 \overset{1}{\sim} B_2 \overset{2}{\sim} A_2 \overset{1}{\sim} B_3 \overset{2}{\sim} A_3 \overset{1}{\sim} \ldots .$$

Эту ситуацию можно описать, изображая M и N в виде зеркал, в которых часть A_0 множества M, лежащая вне M_1, многократно отражается, порождая бесконечную последовательность изображений $A_1, A_2, A_3, \ldots$ в M и $B_1, B_2, B_3, \ldots$ в N, как показано на чертеже. (Множества M, M_1 и N изображены частями горизонтальных линий направо от надписей «M», «M_1» и «N», множества $A_0, B_1, A_1, \ldots$ — выделенными отрезками.)



Пусть $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$, т. е. A есть подмножество M, содержащее те элементы, которые попадают в A_0 или в любое из его изображений $A_1, A_2, A_3, \ldots$ в M. Пусть также $B = B_1 + B_2 + B_3 + \ldots$, т. е. B есть подмножество N, содержащее те его элементы, которые попадают в одно из изображений $B_1, B_2, B_3, \ldots$ множества A_0 в N.

Чтобы получить $1-1$-соответствие $M \overset{3}{\sim} N$, мы установим правило, которое для каждого элемента m множества M определяет соответствующий элемент n множества N, и докажем, что полученное соответствие является $1-1$-соответствием между M и N.

Правило. Рассмотрим любой элемент m множества M. Или m принадлежит подмножеству A, или m не принадлежит A, т. е. m принадлежит $M - A$. Если m принадлежит A, то соответствующим элементом n из N будет тот, который сопоставляется с m в соответствии $M \overset{1}{\sim} N_1$. Если m принадлежит $M - A$ (в этом случае m принадлежит M_1), то соответствующим элементом n из N будет тот, с которым m сопоставлен в соответствии $N \overset{2}{\sim} M_1$.

Полученное соответствие является $1-1$-соответствием между M и N, так как:

(а) Различным элементам m из M, например m_1 и m_2, соответствуют различные элементы n_1 и n_2 из N. Это ясно, когда m_1 и m_2 оба принадлежат A или оба принадлежат $M - A$. Но это ясно и когда $m_1 \in A$ и $m_2 \in M - A$, потому что тогда $n_1 \in B$ и $n_2 \in N - B$.

(b) Каждый элемент из N соответствует некоторому элементу m из M. Именно, все элементы B соответствуют элементам A, а все элементы $N-B$ соответствуют элементам $M-A$.

Этот метод приведения M и N в $1-1$-соответствие можно рассматривать как сдвиг на предыдущем чертеже каждой из частей A_0, A_1, A_2, A_3, ... множества M на одно положение вправо, так что A_0 переходит на место A_1, A_1 — на место A_2, A_2 — на место A_3, ... При этом $N \overset{2}{\sim} M_1$ превратится в $N \overset{3}{\sim} M$.

Следствие А. *Если* $M \subseteq N$, *то* $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{N}}$.

($\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{N}}$ означает, что $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ или $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$.) Действительно, если $M \subseteq N$, то имеет место или случай (1a), или случай (2) с M в качестве N_1.

Кардинальное число пустого множества O мы будем обозначать через 0. (Замечание: $M' \sim O$ только при $M' = O$.) Кардинальное число любого множества $N + \{a\}$, где $a \overline{\in} N$, мы будем обозначать через $\overline{\overline{N}} + 1$. (Замечание: $M' \sim N + \{a\}$, где $a \overline{\in} N$, тогда и только тогда, когда $M' = N' + \{a'\}$, где $a' \overline{\in} N'$ и $N' \sim N$.)

Если рассматривать натуральные числа $0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$ как последовательность уже известных нам предметов, то два только что сформулированных определения сопоставляют каждому натуральному числу n соответствующее кардинальное число, которое мы также будем обозначать через n. Эти кардинальные числа мы будем называть *конечными кардинальными числами*, а множества с этими кардинальными числами — *конечными множествами*. Следующие два предложения будут доказаны в примере 1 § 7

(1) *Для каждого натурального числа n конечное кардинальное число n служит кардинальным числом для множества натуральных чисел, предшествующих натуральному числу n в их обычном порядке; или, в символах,* $n = \overline{\overline{\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}}}$.

(2) *Если* $\overline{\overline{M}} = n$ *(для натурального n) и* $M \sim M_1 \subseteq M$, *то* $M_1 = M$. Иначе говоря, *конечное множество не эквивалентно никакому своему истинному подмножеству.*

Из этих двух предложений нетрудно усмотреть, что отношение равенства $m = n$ и отношение порядка $m < n$, установленные для конечных кардинальных чисел определениями § 3, согласуются с обычными отношениями равенства и порядка для натуральных чисел (в частности, $n < n+1$ для конечных кардинальных чисел). Итак, не возникнет никакой путаницы, если мы отождествим натуральные числа с конечными кардинальными числами.

Множество, не являющееся конечным, мы будем называть *бесконечным*, а его кардинальное число — *бесконечным* или *трансфинитным кардинальным числом*. Кардинальное число множества всех натуральных чисел, а следовательно, и каждого счетно-бесконечного множества (§ 1) мы будем называть $\aleph_0$ (читается «алеф-нуль»).

Следствие В. *Если n — конечное кардинальное число, то* $n < \aleph_0$.

Доказательство. Так как n — кардинальное число подмножества $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ множества всех натуральных чисел, то в силу следствия А $n \leqslant \aleph_0$. Допустим, что $n = \aleph_0$. Так как $n+1$ также конечное кардинальное число, то аналогично $n+1 \leqslant \aleph_0$, что вместе с $n=\aleph_0$ дает $n+1 \leqslant n$, в противоречие с $n < n+1$. Следовательно, допущение $n=\aleph_0$ неверно и остается единственная возможность: $n < \aleph_0$.

Теорема B. *Всякое бесконечное множество M имеет счетно-бесконечное подмножество.*

Доказательство. Множество M непусто, так как в противном случае оно имело бы конечное кардинальное число 0. Поэтому в M имеется некоторый элемент a_0. Тогда $M-\{a_0\}$ непусто, так как в противном случае M имело бы конечное кардинальное число 1. Поэтому в M имеется другой элемент a_1. Продолжая таким образом, мы выберем различные элементы a_0, a_1, a_2, a_3, ..., соответствующие натуральным числам 0, 1, 2, 3, ..., что доказывает теорему. Если P есть множество $M-\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ невыбранных элементов M, то

$$M=P+\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

Следствие A. *Если $\overline{\overline{M}}$ — бесконечное кардинальное число, то $\aleph_0 \leqslant \overline{\overline{M}}$.*

Для доказательства надо воспользоваться теоремой B и следствием A из теоремы A.

Следствие B. *Бесконечное множество M эквивалентно некоторому своему истинному подмножеству.*

Действительно, M (в тех же обозначениях, что и выше) эквивалентно своему истинному подмножеству

$$M-\{a_0\}=P+\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}.$$

Это следствие вместе с приведенным выше предложением (2) было предложено Дедекиндом [1888] в качестве другого определения различия между конечными и бесконечными множествами. (Таким образом, свойство, отмеченное в «парадоксе» Галилея, оказывается характеристическим для бесконечных множеств.)

Следствие C. *Кардинальное число любого бесконечного множества M не изменяется от присоединения к M конечного или счетно-бесконечного множества элементов.*

Действительно, новые элементы b_0, b_1, b_2, b_3, ... можно ввести так:

$$M+\{b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots\}=P+\{a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots\}.$$

Обратно, это следствие утверждает, что удаление счетного множества элементов из некоторого множества не изменяет кардинального числа при условии, что остающееся множество M бесконечно. Если первоначальное множество несчетно, то остающееся множество должно быть бесконечным, потому что в противном случае имелся бы очевидный пересчет первоначального множества. Итак:

Следствие D. *Кардинальное число несчетного множества не изменится от удаления конечного или счетно-бесконечного подмножества элементов.*

* § 5. ВЫСШИЕ ТРАНСФИНИТНЫЕ КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Первая из теорем этого параграфа является общей формулировкой той ситуации, с которой мы встретились в последнем примере § 2. Для читателя будет полезно, если он попробует самостоятельно рассмотреть эту теорему или ее лемму для случая, когда M—небольшое конечное множество. Вторая теорема является обобщением той ситуации, с которой мы столкнулись в следствии В из теоремы А.

Чтобы проще изложить доказательства, мы воспользуемся теоремой эквивалентности, а именно ее следствием А. Но можно доказать эти теоремы, только слегка изменив рассуждения, и не пользуясь теоремой эквивалентности.

Лемма А. *Если* $\mathbf{S}$ — *некоторая совокупность подмножеств множества* M *и* $M \sim \mathbf{S}$, *то имеется подмножество* T *множества* M, *которое не принадлежит* $\mathbf{S}$.

Доказательство проводится с помощью диагонального метода Кантора. Подмножество M определено, если установлено, каковы те элементы M, которые принадлежат этому подмножеству. Этого можно добиться, установив общий критерий, который для любого элемента m множества M определяет, принадлежит этот элемент подмножеству или не принадлежит. Дадим теперь критерий такого рода для определения подмножества T.

Критерий. В $1-1$-соответствии, которое дано по условию $M \sim \mathbf{S}$, любой элемент m множества M отвечает некоторому элементу S множества $\mathbf{S}$. Но S является одним из подмножеств M. Следовательно, или m принадлежит S, или m не принадлежит S. Если m принадлежит S, то m не будет принадлежать T. Если m не принадлежит S, то m будет принадлежать T.

Допустим теперь, в противоречие с утверждением леммы, что T принадлежит $\mathbf{S}$. Выберем тот элемент M, скажем m_1, который отвечает T в $1-1$-соответствии $M \sim \mathbf{S}$.

Принадлежит ли m_1 множеству T? Применяем критерий с m_1 в качестве m. Так как m_1 соответствует T, то в качестве подмножества S критерия надо взять T. Критерий приводит к противоречию как в том случае, когда m_1 принадлежит T, так и в том, когда m_1 не принадлежит T.

Таким образом, предположение, что T принадлежит $\mathbf{S}$, приводит к противоречию. Поэтому методом *reductio ad absurdum*[1]) (согласно которому отрицание предложения доказывается путем вывода противоречия из этого предложения) мы заключаем, что T не принадлежит $\mathbf{S}$.

Если M - данное множество, то множество всех подмножеств M, т. е. множество, элементами которого служат (все) подмножества множества M, обозначается через $\mathfrak{U}M$ («$\mathfrak{U}$» от немецкого «Untermenge»[2])).

Теорема С. *Для любого множества* M *справедливо соотношение* $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathfrak{U}M}}$ (теорема Кантора).

Доказательство. Если N_1 — совокупность единичных подмножеств множества M, то $M \sim N_1 \subset \mathfrak{U}M$. Значит, по следствию А из теоремы А, $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N_1}} \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{U}M}}$. Допустим, в противоречие с теоремой, что $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{\mathfrak{U}M}}$, т. е.

---

[1]) Приведение к нелепости (лат.).—*Прим. перев.*

[2]) «Untermenge» означает «подмножество».—*Прим. ред.*

$M \sim \mathfrak{U}M$. Тогда $\mathfrak{U}M$ будет удовлетворять условиям для S леммы А. В силу леммы найдется подмножество T множества M, которое не принадлежит $\mathfrak{U}M$. Это невозможно, потому что $\mathfrak{U}M$ есть множество всех подмножеств M. Следовательно, должно иметь место неравенство $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathfrak{U}M}}$.

Если в качестве множества M этой теоремы мы возьмем множество с трансфинитным кардинальным числом $\aleph_0$, мы получим множества $\mathfrak{U}M$, $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M, \ldots$, которые имеют все бóльшие и бóльшие трансфинитные кардинальные числа. Эти новые кардинальные числа обозначаются через $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}, \ldots$. (Вообще, для любого множества M кардинальное число множества $\mathfrak{U}M$ обозначается через $2^{\overline{\overline{M}}}$. Заметим, что это согласуется с обычной арифметикой, если M конечно.)

Лемма В. *Если S — множество, а M — некоторое множество подмножеств S и для каждого элемента M из M найдется другой элемент M' из M такой, что $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{M'}}$, то $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{S}}$ для каждого элемента M из M.*

Доказательство. Так как $M \subseteq S$, то, по следствию А из теоремы А, $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{S}}$. Допустим, что, в противоречие с леммой, $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{S}}$. Но аналогично $\overline{\overline{M'}} \leqslant \overline{\overline{S}}$, что вместе с $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{S}}$ дает $\overline{\overline{M'}} \leqslant \overline{\overline{M}}$, в противоречие с $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{M'}}$. Поэтому допущение $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{S}}$ ложно и имеет место случай $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{S}}$.

Если M — множество, элементами которого являются множества, то множество (всех) предметов, каждый из которых принадлежит некоторому элементу M из M, называется *объединением* или *суммой* множеств, принадлежащих M, и обозначается посредством $\mathfrak{S}\mathsf{M}$. Множество предметов, каждый из которых принадлежит каждому элементу M из M, называется *пересечением* или *общей частью* множеств, принадлежащих M, и обозначается посредством $\mathfrak{D}\mathsf{M}$ («$\mathfrak{D}$» от немецкого «Durchschnitt»[1]). Эти понятия совпадают с введенными в § 3, за исключением того, что теперь они выражены в виде операций над множеством M множеств M, которые складываются или перемножаются. Например, $M + N = \mathfrak{S}\{M, N\}$, $M \cdot N = \mathfrak{D}\{M, N\}$.

Теорема D. *Если M — некоторое множество множеств и если для каждого элемента M из M найдется другой элемент M' из M такой, что $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{M'}}$, то $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathfrak{S}\mathsf{M}}}$ для каждого элемента M из M.*

Доказательство. В силу определения $\mathfrak{S}\mathsf{M}$ каждый элемент M из M является подмножеством множества $\mathfrak{S}\mathsf{M}$. Теперь теорема следует из леммы В, если взять в ней $\mathfrak{S}\mathsf{M}$ в качестве S.

Согласно этой теореме, сумма множеств M, $\mathfrak{U}M$, $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M, \ldots$, которые имеют возрастающие трансфинитные кардинальные числа $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}, \ldots$, является множеством с еще бóльшим трансфинитным кардинальным числом, чем любое из этих кардинальных чисел. Исходя из этого множества, можно с помощью теоремы С получить новую возрастающую последовательность. Эта иерархия продолжается неограниченно.

Более глубокое изложение канторовской теории абстрактных множеств можно найти, например, у Кантора [1895—97], Хаусдорфа [1914 или 1927] или у Френкеля [1928, 1952]. Имеется родственная отрасль этой теории, изучающая «ординальные числа». «Теорема сравнимости для кардинальных чисел», которая утверждает, что возможности $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$, $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ и $\overline{\overline{M}} > \overline{\overline{N}}$ являются исчерпывающими (конец § 3), оказывается следствием из

[1]) Пересечение. — *Прим. ред.*

„теоремы о полном упорядочении“ Цермело [1904] (см., например, Хаусдорф [1914 или 1927, стр. 61[1])] или Френкель [1928, стр. 205]). Краткое рассмотрение знаменитой «континуум-проблемы», состоящей в решении вопроса, существует ли хоть одно кардинальное число между $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$, см. у Гёделя [1947].

Мы начали с рассмотрения теории Кантора по двум противоположным причинам. Во-первых, некоторые идеи и методы, которые в дальнейшем окажутся основными, встречаются в ней в их первоначальной и простейшей форме. Во-вторых, в этой теории, если ее проследить достаточно далеко, обнаруживаются логические трудности, которые явятся отправной точкой нашего основного исследования. Это будет обнаружено в гл. III.

Примеры. Множества с кардинальным числом $2^{\aleph_0}$. Это — кардинальное число, приписанное множеству всех подмножеств множества всех натуральных чисел, которое мы описали в § 2 как множество всех *множеств натуральных чисел*. Там мы представили элементы этого множества *бесконечными последовательностями из нулей и единиц*. Эти нули и единицы можно рассматривать как цифры в двоичной (или диадической) системе счисления, т. е. в системе счисления, основанной на числе 2, так же как десятичная система основана на числе 10, — так что мы получаем множество всех *правильных двоичных дробей*. Удаляя с помощью следствия D теоремы B конечные дроби, которые образуют счетное множество, мы получаем *правильные бесконечные двоичные дроби*. Они взаимно однозначно представляют все *действительные числа x в полуинтервале* $0 < x \leqslant 1$. Из правильных бесконечных двоичных дробей мы взаимно однозначно получаем *бесконечные последовательности натуральных чисел* или *функции от натурального числа, принимающие натуральные значения*, сопоставляя каждой дроби ту функцию $f(n)$, для которой $f(0)$ = числу нулей (после запятой) до первой единицы в дроби, $f(1)$ = числу нулей между первой единицей и второй единицей и т. д. (например, функция n^2 соответствует дроби 0,1010000100000000001...).

Выкинем теперь число $x=1$ из полуинтервала $0 < x \leqslant 1$, после чего останутся *действительные числа x в интервале* $0 < x < 1$. Можно найти функцию $y = f(x)$, которая, в то время как x пробегает этот интервал, принимает в качестве значения y каждое из *действительных чисел*, и притом в точности один раз; например, функция $y = \operatorname{ctg} \pi x$. Если удалить рациональные числа, то останутся (действительные) *иррациональные числа*; или, если удалить алгебраические числа, то останутся *трансцендентные числа*. В аналитической геометрии Декарта действительные числа служат координатами *точек действительной эвклидовой прямой*. Это множество есть „линейный континуум“ [2]), и в соответствии с этим кардинальное число $2^{\aleph_0}$ является „мощностью континуума“.

Теперь мы можем следующим образом получить множество *упорядоченных пар действительных чисел* или, рассматривая пару (x, y) как декартовы координаты на плоскости, *точек действительной эвклидовой плоскости*. В силу уже установленной эквивалентности между действительными числами и бесконечными последовательностями нулей и единиц любые два действительных числа x, y соответствуют последовательностям нулей и единиц

$$\begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \ldots, \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \ldots, \end{matrix}$$

[1]) Стр. 65 русского издания книги Хаусдорфа. См. также теорему 19 на стр. 107 книги П. С. Александрова [1948]. — *Прим. ред.*

[2]) От латинского слова continuum — непрерывное. — *Прим. перев.*

которые можно свернуть в одну-единственную последовательность

$$x_0 \quad y_0 \quad x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \ldots,$$

соответствующую некоторому единственному действительному числу. Обратно, всякая последовательность может быть по этому методу развернута с получением определенной пары последовательностей. Аналогичный процесс дает *n-ки действительных чисел* или *точки действительного эвклидова n-мерного пространства* для любого фиксированного натурального n и даже *бесконечные последовательности действительных чисел* или *точки действительного эвклидова $\aleph_0$-мерного пространства.* Этот последний пример можно рассмотреть с помощью метода § 1, посредством которого $\aleph_0$ последовательностей нулей и единиц

$$\begin{tikzcd}
x_{00} \arrow[d] & x_{01} \arrow[r] & x_{02} \arrow[dl] & x_{03} \arrow[r] & \cdots \\
x_{10} \arrow[ur] & x_{11} \arrow[dl] & x_{12} \arrow[ur] & x_{13} & \cdots \\
x_{20} \arrow[d] & x_{21} \arrow[ur] & x_{22} & x_{23} & \cdots \\
x_{30} \arrow[ur] & x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\
 & & \cdots & &
\end{tikzcd}$$

свертываются в одну-единственную последовательность

$$x_{00}\ x_{10}\ x_{01}\ x_{02}\ x_{11}\ x_{20}\ x_{30}\ x_{21}\ x_{12}\ x_{03} \ldots,$$

где каждый член каждой из данных последовательностей занимает определенное положение.

Для всякой *действительной непрерывной функции от действительной переменной* все значения функции определены по непрерывности, коль скоро заданы значения функции для рациональных значений независимой переменной. Эти значения можно задать в виде бесконечной последовательности действительных чисел, если рациональные числа рассматривать в порядке некоторого их фиксированного пересчета. Поэтому в силу следствия А из теоремы А множество этих функций имеет кардинальное число, не бо́льшее чем $2^{\aleph_0}$. Но оно должно иметь по меньшей мере это кардинальное число и, следовательно, в точности это кардинальное число, потому что функции-константы образуют подмножество с этим кардинальным числом.

Множества с кардинальным числом $2^{2^{\aleph_0}}$. Это — кардинальное число множества всех *множеств множеств натуральных чисел.* Из эквивалентности между множествами натуральных чисел и действительными числами или точками n-мерного или $\aleph_0$-мерного пространства следует, что этим кардинальным числом обладают множество всех *множеств действительных чисел*, или *точечных множеств действительного эвклидова n-мерного* или *$\aleph_0$-мерного пространства. Действительные функции от действительной переменной* могут быть представлены их графиками, которые являются точечными множествами на плоскости, а потому множество их имеет кардинальное число, не большее $2^{2^{\aleph_0}}$. Оно имеет в точности это кардинальное число, так как функции, принимающие в качестве значений только 0 и 1, служат представляющими функциями для множеств действительных чисел и тем самым составляют подмножество с этим кардинальным числом. Распространяя на этот пример геометрическую терминологию, можно сказать, что мы имеем дело с множеством *точек действительного эвклидова $2^{\aleph_0}$-мерного пространства.*

Глава II

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ КОНЦЕПЦИИ

§ 6. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Цель этой главы—сопоставить (отчасти для ссылок, отчасти для более внимательного рассмотрения) некоторые идеи и методы математики.

Когда мы выписываем натуральный ряд чисел

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

мы предполагаем, что точки «...» указывают на продолжение последовательности за указанные несколько ее членов.

Кронекер заметил в 1886 г.: «Бог создал целые числа, все остальное—творение человека». Мы не можем надеяться, что наше познание натурального ряда сведется к познанию чего-либо существенно более простого.

Но исследуя, что содержится в нашем понимании натурального ряда, мы можем преуспеть в выяснении основ наших рассуждений о натуральных числах.

Мы начнем с описания натуральных чисел как объектов, которые могут быть порождены, если отправляться от начального объекта 0 (*нуль*) и последовательно переходить от уже порожденного объекта n к другому объекту $n+1$ или n' (*следующему за* n).

При этом мы считаем возможным, как бы далеко мы уже ни зашли при получении n, сделать еще один шаг и получить n'. Употребление обозначения со штрихом «n'» вместо более обычного «$n+1$» подчеркивает, что $'$ есть первичная унарная[1]) операция или функция, употребляемая при порождении натуральных чисел, тогда как $+$ может быть определен на дальнейшей стадии как бинарная операция или функция от двух натуральных чисел.

Чтобы получить натуральные числа с их обычными обозначениями, остается лишь разъяснить, что 0, 1, 2, 3,... заменяют соответственно

$$0,\ 0',\ 0'',\ 0''',\ \ldots.$$

Это относится уже к специфике десятичных обозначений.

В этом описании мы апеллировали к нашему пониманию последовательности дискретных шагов. Последние состояли в отправлении от 0 и повторном переходе от n к следующему натуральному числу n'. Это описание можно следующим образом разбить на несколько пунктов:

1. 0 является *натуральным числом*. 2. Если n—*натуральное число*, то и n'—*натуральное число*. 3. Никаких *натуральных чисел*, кроме тех, которые получаются согласно 1 и 2, нет.

В этой форме наша последовательность дискретных шагов становится применением пункта 1 и последовательностью применений пункта 2. Все три пункта вместе образуют пример того, что мы будем называть *индуктивным определением*. Определяемый термин („натуральное число“) выделен курсивом. Эти пункты,

[1]) Т. е. с одним аргументом.—*Прим. перев.*

за исключением последнего, предусматривают случаи, в которых определен этот термин; они называются *прямыми пунктами*; последний пункт называется *косвенным пунктом*; в нем утверждается, что случаи, когда этот термин определен, исчерпывающим образом рассмотрены в предыдущих пунктах.

В этом индуктивном определении не выражено условие различия, а именно, что числа, различным образом порожденные применениями пунктов 1 и 2, должны быть различными объектами. Это условие можно разбить на два следующих предложения.

4. Для любых натуральных чисел m и n из $m'=n'$ следует $m=n$. 5. Для любого натурального числа n, $n'\neq 0$.

При этом подразумевается, что $'$ есть унивалентный оператор, или однозначная функция, так что, обратно к 4: для любых натуральных чисел m и n из $m=n$ следует $m'=n'$.

Чтобы убедиться в том, что предложения 4 и 5 требуют различия любых двух различно порожденных чисел, мы можем рассуждать следующим образом. Допустим, что на некоторой данной стадии порождения чисел все до сих пор порожденные числа $0, 1, \ldots, n$ различны. Тогда ближайшее из далее порождаемых чисел—число n' должно отличаться от тех чисел $1, \ldots, n$, которые среди ранее порожденных следуют за какими-то числами (в силу 4), и от 0 (в силу 5). Таким образом, каждый следующий шаг в этом порождении производит некоторое новое число.

Например, $0'''' \neq 0''$, в чем можно убедиться следующим образом. В силу 4, примененного с $0'''$ в качестве m и $0'$ в качестве n, $0''''=0''$ возможно только при $0'''=0'$. Опять в силу 4, $0'''=0'$ влечет $0''=0$. Но в силу 5 с $0'$ в качестве n $0''\neq 0$.

Эти пять предложений 1—5 с одним отличием были выбраны Пеано [1889, 1891*] в качестве аксиом, характеризующих натуральный ряд чисел. Пеано вместо предложения 3 сформулировал принцип математической индукции (§ 7) и поместил его в списке на пятом месте, сдвинув предложения 4 и 5 соответственно на третье и четвертое места.

Здесь мы не рассматриваем внутреннюю природу натуральных чисел; нас интересует только, как они образуют натуральный ряд. Каждое индивидуальное натуральное число рассматривается только как объект, занимающий некоторое конкретное место в натуральном ряду. Другими словами, индивидуальное натуральное число задано, если задано его порождение согласно индуктивному определению. Например, натуральное число 4 задается как объект, который мы получаем, отправляясь от начального объекта 0, путем применения операции «следующий за» однажды, затем опять, опять и опять; или, короче, 4 задается как $0''''$. Число вроде 872656 (в десятичном обозначении) также в принципе может быть выписано при помощи применения $'$ к 0, хотя на практике мы так не поступаем.

Разумеется, имея дело с предложениями типа «некоторое уравнение имеет два корня», мы продолжаем пользоваться тем, что натуральные числа суть кардинальные числа конечных множеств (§ 4).

Порядок. Согласно индуктивному определению натуральных чисел, они порождаются в некотором (обычном) порядке. Таким образом, мы определяем, что $m<n$, если m порождается раньше n по ходу порождения n. Расчленяя это, мы получаем следующее индуктивное определение отношения $m<n$ (где m, n пробегают натуральный ряд).

O1. $m<m'$. O2. Если $m<n$, то $m<n'$. O3. $m<n$ в том и только в том случае, если это вытекает из O1 и O2.

Если взять это определение для некоторого фиксированного m в качестве индуктивного определения класса чисел n, больших m, то оно имеет вид первоначального индуктивного определения натуральных чисел с заменой 0 на m'.

§ 7. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Пусть P—некоторое свойство натуральных чисел. Допустим, что:

(1) 0 обладает свойством P.

(2) Если какое-нибудь натуральное число n обладает свойством P, то и следующее за ним число n' обладает свойством P.

Тогда каждое натуральное число обладает свойством P.

Это—принцип *математической индукции*. Мы можем высказать его немного короче, пользуясь «n» в качестве переменной для натурального числа и «$P(n)$» как обозначением для предложения, состоящего в том, что n обладает свойством P: если (1) $P(0)$ и (2) для любого n из $P(n)$ следует $P(n')$, то $P(n)$ для всех n.

Обоснование этого принципа индукции является почти непосредственным, если натуральные числа рассматриваются как объекты, порожденные согласно индуктивному определению 1—3 § 6. Предположим, что имеется свойство P, для которого справедливы свойства (1) и (2). Должно ли тогда каждое натуральное число n обладать свойством P? Мы рассматриваем положительный ответ просто как утверждение, что, если нам дано произвольное натуральное число n, мы можем быть уверены в том, что n обладает свойством P. Но любое натуральное число n дано в точности тогда, когда (фактически или в принципе) мы имеем его порождение согласно индуктивному определению, отправляясь от 0 и применяя некоторое указанное число раз операцию «следующий за». При этих обстоятельствах, чтобы заключить, что n обладает свойством P, мы можем воспользоваться (1) и (2). Например, $P(4)$ потому, что 4 задается как $0''''$; в силу (1) $P(0)$; отсюда в силу (2) $P(0')$; опять в силу (2) $P(0'')$; опять в силу (2) $P(0''')$ и опять в силу (2) $P(0'''')$.

Иначе говоря, (1) и (2) служат орудиями, которые позволяют нам, параллельно с порождением натуральных чисел согласно пунктам 1 и 2 индуктивного определения, проверять для каждого порождаемого числа, что оно обладает свойством P.

Это рассуждение зависит, конечно, от косвенного пункта 3 индуктивного определения. Обратно, наш принцип индукции можно применить для доказательства пункта 3, применяя его со следующим предложением в качестве $P(n)$: n дано как натуральное число посредством пунктов 1 и 2, т. е. может быть порождено путем применений операции «следующий за» отправляясь от 0.

В связи с доказательством посредством математической индукции мы будем пользоваться следующей терминологией. Предложение $P(n)$, зависящее от переменного натурального числа n, мы будем называть *индукционным предложением*, или *предложением индукции*, а переменную *n—индукционной переменной*, или *индукционным числом*, или *переменной индукции*, или переменной, *по* которой производится индукция. Часть доказательства, состоящую в установлении (1), т. е. доказательство предложения $P(0)$, мы будем называть *базисом* индукции. Часть доказательства, состоящую в установлении (2), т. е. доказательство того, что если $P(n)$, то $P(n')$, мы будем называть *индукционным шагом*, или *шагом индукции*. Внутри индукционного шага допущение $P(n)$, из которого мы выводим $P(n')$, будем называть *индуктивным предположением*, или *предположением индукции*.

Иногда для проведения индукционного шага необходимо допустить в качестве индуктивного предположения не просто $P(n)$, а то, что $P(m)$ для всех $m \leqslant n$. Читателю предоставляется самостоятельно убедиться в том, что принцип индукции сохраняет силу и в этой измененной форме, которая называется *возвратной индукцией*, или *индукцией пробега*. Индукцией можно пользоваться при доказательстве предложения, зависящего не от натурального, а от целого положительного числа; в этом случае базис состоит из доказательства $P(1)$.

Изучающий встречался с математической индукцией в курсах элементарной алгебры. В качестве примеров предложений, требующих доказательства по индукции и не очевидных, пока эти доказательства не проведены, часто приводят формулы для суммирования прогрессий. Многие предложения, которые обычно принимаются на веру, при строгом доказательстве зависят от индукции, а в других случаях индукционный шаг настолько прост, что от него отделываются словами «и так далее» или чем-нибудь в этом роде (например, теоремы A и B из § 4).

Пример 1. Докажем предложения (1) и (2) из § 4 при помощи индукции по n. Мы проделаем это для (2), предоставляя (1) читателю. Индукционное предложение таково: *Для любых множеств* M *и* M_1 *из* $\overline{\overline{M}}=n$ *и* $M \sim M_1 \subseteq M$ *следует* $M_1 = M$. Базис: $n=0$. Пусть M и M_1 — такие множества, что $\overline{\overline{M}}=0$, т. е. $M=O$ и $O \sim M_1 \subseteq O$. Тогда $M_1=O$. Индукционный шаг. Допустим (в качестве индуктивного предположения), что индукционное предложение установлено. Пусть теперь M и M_1 — такие множества, что $\overline{\overline{M}}=n+1$, т. е. $M=N+\{a\}$, где $\overline{\overline{N}}=n$ и $a \bar{\in} N$ и $N+\{a\} \sim M_1 \subseteq N+\{a\}$. Нам надо доказать, что при этом $M_1=N+\{a\}$. В данном 1—1-соответствии $N+\{a\} \sim M_1$ элемент a множества $N+\{a\}$ соответствует некоторому элементу b из M_1. Поэтому $N \sim M_1-\{b\} \subseteq (N+\{a\})-\{b\}$. Кроме того, $(N+\{a\})-\{b\} \sim N$. Поэтому $\overline{\overline{(N+\{a\})-\{b\}}}=n$ и $(N+\{a\})-\{b\} \sim M_1-\{b\} \subseteq (N+\{a\})-\{b\}$. По индуктивному предположению, примененному с $(N+\{a\})-\{b\}$ в качестве M и $M_1-\{b\}$ в качестве M_1, $M_1-\{b\}=(N+\{a\})-\{b\}$. Следовательно (ввиду того, что $b \in M_1$ и $b \in N+\{a\}$), $M_1=N+\{a\}$.

Пример 2. В математических формулах скобки вводятся попарно, чтобы показать, каким образом формула составляется из связанных между собой частей. В более сложных случаях употребляют скобки разных родов, например, ( ), { }, [ ], а очень сложных случаев удается избежать при помощи различных сокращений. Однако принципиально остается вопрос, можно ли, пользуясь только одним родом скобок, однозначно установить распадение формулы на части. (Этот вопрос допускает эквивалентную геометрическую формулировку, связанную с погружением интервалов.)

Чтобы уточнить этот вопрос, допустим, что у нас имеется $2n$ скобок, из них n левых скобок «(» и n правых скобок «)» и что они расположены в линейном порядке слева направо. Именно таким образом они могут встретиться в математической формуле, причем между ними будут как-то расположены другие символы этой формулы, которыми мы сейчас не интересуемся.

Мы будем говорить, что две пары скобок *разделяют друг друга*, если они встречаются в порядке $(_i\ (_j\ )_i\ )_j$, где индексы i служат для указания одной пары, а индексы j — для указания другой, и другие скобки также могут встретиться в каком-нибудь расположении относительно этих четырех указанных.

Мы будем называть 1—1-соответствие между n левыми скобками и n правыми скобками (короче, *спаривание* этих $2n$ скобок) *собственным*, если каждой левой скобке ставится в соответствие (спаривается с ней) некоторая правая скобка, расположенная правее ее, и если никакие две пары спаренных скобок не разделяют друг друга.

Почти очевидно, что если $2n$ скобок спарены собственным образом, то после удаления любой из этих пар остающиеся скобки спарены собственным образом. Кроме того, скобки, заключенные между обеими скобками некоторой пары спаренных скобок из собственного спаривания $2n$ скобок, спарены собственным образом.

Следующие три леммы содержат ответ на поставленный вопрос и некоторые относящиеся к нему сведения.

Лемма 1. *При всяком собственном спаривании $2n$ скобок ($n>0$) имеется по крайней мере одна самая внутренняя пара, т. е. пара скобок, между которыми нет никаких других скобок.*

Это доказывается возвратной индукцией по n. Можно по желанию рассматривать n как целое положительное или как натуральное число. В последнем случае базис *выполняется тривиально*, т. е. является истинным предложением в силу того, что условие не выполнено. (Указание. При индукционном шаге самая левая скобка будет некоторой левой скобкой $(_i$, которая вместе со второй скобкой своей пары $)_i$ или образует самую внутреннюю пару, или окружает некоторое множество скобок, к которым можно применить индуктивное предположение.)

Лемма 2. *Всякое множество из $2n$ скобок допускает не более одного собственного спаривания.*

Это доказывается (простой) индукцией по n. (Указание. В индукционном шаге в силу леммы 1 среди данных скобок имеется самая внутренняя пара. Если ее удалить,то к множеству оставшихся скобок будет применимо индуктивное предположение.)

Лемма 3. *Если множество из $2n$ скобок и подмножество последовательных $2m$ скобок из их числа оба допускают собственные спаривания, то собственное спаривание этого подмножества образует часть собственного спаривания всего множества, т. е. каждая скобка подмножества спарена с одной и той же скобкой в обоих спариваниях.*

Это доказывается индукцией по m.

Например, рассмотрим 22 скобки:

$$(^1_7\ (^2_6\ (^3_4\ (^4_2\ (^5_1\ )^6_1\ )^7_2\ (^8_3\ )^9_3\ )^{10}_4\ (^{11}_5\ )^{12}_5\ )^{13}_6\ )^{14}_7\ (^{15}_{11}\ (^{16}_{10}\ (^{17}_8\ )^{18}_8\ (^{19}_9\ )^{20}_9\ )^{21}_{10}\ )^{22}_{11}$$

Собственное спаривание, указанное нижними индексами, обнаруживается посредством следующего „алгоритма" (подсказанного доказательством леммы 2): на каждой стадии, двигаясь слева, находим первую самую внутреннюю пару среди еще не использованных и присоединяем эту пару к спариванию. По лемме 2 никакого другого собственного спаривания найти невозможно. Скобки с третьей по двенадцатую образуют подмножество последовательных скобок, собственное спаривание которых уже получено в процессе спаривания всего множества. По лемме 3, не существует никакого подмножества последовательных скобок, допускающего собственное спаривание, отличное от каждого из тех, которые уже введены при собственном спаривании всего множества.

§ 8. СИСТЕМЫ ОБЪЕКТОВ

Под системой S объектов мы будем иметь в виду (непустое) множество класс, или область D (или, может быть, несколько таких множеств) объектов, между которыми установлены некоторые соотношения.

Например, натуральный ряд (§ 6) образует систему типа $(D, 0, ')$, где D—множество, 0—элемент множества D, а $'$—унарная операция над элементами множества D. Другой простой тип системы—это $(D, <)$, где D—множество, а $<$—бинарное отношение между элементами этого множества.

Если об объектах системы мы ничего не знаем, кроме соотношений, имеющихся между ними в системе, то такая система называется *абстрактной*. В этом случае устанавливается только структура системы, а природа ее объектов остается неопределенной во всех отношениях, кроме одного,—что они согласуются с этой структурой.

Всякая дальнейшая спецификация природы объектов дает *представление* (или *модель*) этой абстрактной системы, т. е. систему объектов, удовлетворяющих соотношениям абстрактной системы и, кроме того, обладающих, вообще говоря, и другими свойствами. Эти объекты не обязаны быть более конкретными, потому что они могут быть выбраны из некоторой другой абстрактной системы (или даже из той же самой, но при новой интерпретации соотношений).

Вот несколько представлений абстрактного натурального ряда: (a) натуральные числа как мощности конечных множеств; (b) целые положительные числа (1 представляет абстрактный объект 0); (c) четные натуральные числа ($+2$ представляет абстрактную операцию $'$). (d) Иногда товары упаковывают в ящики, снабженные этикеткой, на которой изображен рисунок самого этого ящика. Физически точность такого рисунка должна быть ограниченной. Но если мы вообразим идеальную точность рисунка, то можно представить 0 посредством самого ящика, 1 — посредством рисунка ящика, помещенного на ящике, 2 — посредством рисунка ящика в рисунке ящика, помещенном на ящике, и т. д.

Два представления одной и той же абстрактной системы (*просто*) *изоморфны*, т. е. могут быть поставлены в 1—1-соответствие, сохраняющее отношения. Точнее, две системы $(D_1, 0_1, {}'_1)$ и $(D_2, 0_2, {}'_2)$ типа $(D, 0, ')$ просто изоморфны, если существует 1—1-соответствие между D_1 и D_2, при котором 0_1 соответствует 0_2 (что обозначается через $0_1 \leftrightarrow 0_2$), и если $m_1 \leftrightarrow m_2$, то $m_1{}'_1 \leftrightarrow m_2{}'_2$. Две системы $(D_1, <_1)$ и $(D_2, <_2)$ типа $(D, <)$ изоморфны, если существует 1—1-соответствие между D_1 и D_2, при котором. если $m_1 \leftrightarrow m_2$ и $n_1 \leftrightarrow n_2$, то $m_1 <_1 n_1$ тогда и только тогда, когда $m_2 <_2 n_2$.

Обратно, любые две изоморфные системы служат представлениями одной и той же абстрактной системы, которая получается путем абстрагирования от любой из них, т. е. путем игнорирования всех отношений и свойств, за исключением тех, которые рассматриваются в этой абстрактной системе.

Второй пример абстрактной системы типа $(D, 0, ')$. Пусть D содержит ровно два (различных) объекта 0 и 1 и пусть $0' = 1$ и $1' = 0$. Это будет так называемая система *вычетов по модулю* 2. Натуральный ряд превращается в эту систему, если каждое число заменять его остатком от деления на 2 (т. е. его *вычетом* по модулю 2), так что получается

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad \ldots .$$

(Системы вычетов впервые были рассмотрены Гауссом в 1801 г.)

Третий пример. Пусть S состоит из двух последовательностей

$$(1) \qquad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots ; \quad \omega, \quad \omega+1, \quad \omega+2, \quad \omega+3, \ldots ,$$

каждая из которых имеет ту же структуру, что и натуральный ряд, и притом ни один элемент какой-либо из этих последовательностей не является непосредственно следующим за каким-либо элементом другой последовательности.

Каждый из этих трех примеров можно очевидным образом изменить так, что получится система типа $(D, <)$. В третьем примере мы при этом будем рассматривать элементы в порядке, показанном в строке (1), и называть их *ординальными числами, ме́ньшими чем* 2ω (из канторовской теории ординальных чисел).

Система вычетов по модулю 2 (или ее представление) не изоморфна натуральному ряду (или его представлению), так как между обеими этими системами невозможно установить 1—1-соответствия. Система ординальных чисел, меньших 2ω, не изоморфна натуральному ряду, потому что при установлении 1—1-соответствия невозможно сохранить операцию „следующий за“ (или отношение порядка $<$).

В этом параграфе мы будем употреблять «S» для обозначения системы и «D» для обозначения ее множества объектов, в случае когда система имеет одно такое множество. Часто можно, не боясь путаницы, упростить обозначения, пользуясь одной буквой в обеих целях. Например, это можно сделать, если понимать натуральный ряд N как выше. Этого нельзя сделать, если речь идет о системе $(N, <)$, состоящей из натурального ряда чисел, причем четные (нечетные) числа упорядочены, как обычно, и все четные числа предшествуют всем нечетным. (Эта система служит представлением для ординальных чисел, меньших 2ω.)

При введении в математику систем объектов можно исходить из двух противоположных методов, или точек зрения (см. Гильберт [1900]).

Генетический, или *конструктивный*, метод иллюстрируется индуктивным определением натуральных чисел (§ 6). В этой связи натуральные числа рассматриваются как порождаемые (generated), или конструируемые в некотором определенном порядке. (Этим не исключается их абстрактное рассмотрение.)

При *аксиоматическом* методе, или методе *постулатов*, с другой стороны некоторые предложения, именуемые *аксиомами* или *постулатами*, с самого начала кладутся в основу в качестве допущений или условий относительно системы S объектов. Затем получаются следствия из этих аксиом, которые и образуют теорию относительно любой существующей системы объектов S, удовлетворяющей этим аксиомам.

Например, рассмотрим пять аксиом Пеано. Чтобы пояснить нашу точку зрения, перепишем эти аксиомы, подставляя понятие «элемент D» вместо «натуральное число»:

P1. $0 \in D$. P2. Если $n \in D$, то $n' \in D$. P3. Если $m \in D$ и $n \in D$, то $m' = n'$ только в том случае, если $m = n$. P4. Если $n \in D$, то $n' \neq 0$. P5. Пусть $P \subseteq D$, причем P обладает следующими свойствами: (1) $0 \in P$ и (2), если $n \in P$, то $n' \in P$; тогда $P = D$.

Мы уже знаем, что только одна абстрактная система S удовлетворяет этим пяти аксиомам, а именно, натуральный ряд чисел, который мы прежде ввели с генетической точки зрения.

Но с аксиоматической точки зрения мы можем с равным успехом рассматривать и другие списки аксиом, например P1—P4. Тогда S может быть системой натуральных чисел, или ординальных чисел, меньших 2ω, или любой из многих других абстрактно различных, т. е. неизоморфных систем.

Если вместо этого рассматривать аксиомы P1—P3, P5, то различными абстрактными системами, удовлетворяющими этим аксиомам, будут следующие и только следующие системы: натуральный ряд чисел и системы вычетов по модулю m для каждого целого положительного числа m.

Допустим теперь, что мы не просто откинули P4, но заменили ее аксиомой P6. Если $n \in D$, то $n' \neq n$, но $n'' = n$.

Тогда опять только одна система удовлетворяет аксиомам—система вычетов по модулю 2.

Для шести аксиом P1—P6 не существует никакой системы S, которая удовлетворяла бы всем этим аксиомам, потому что только натуральный ряд удовлетворяет P1—P5 и только система вычетов по модулю 2 удовлетворяет P1—P3, P5, P6.

Иногда говорят, что аксиомы аксиоматической теории служат неявным определением системы объектов этой теории, но это может означать только, что аксиомы определяют то, к каким системам, определенным вне теории, эта теория применима При этом возможны три случая. Или аксиомам не удовлетворяет никакая система объектов (например, P1—P6), или удовлетворяет в точности одна абстрактная система, так что любые две системы, удовлетворяющие аксиомам, изоморфны (например, P1—P5 или P1—P3, P5, P6), или удовлетворяет более чем одна абстрактная система, т. е. существуют неизоморфные системы, удовлетворяющие аксиомам (например, P1—P4, или P1—P3, P5). В первом случае мы будем называть множество аксиом *невыполнимым*, в последних двух—*выполнимым*, и притом во втором случае—*категорическим* (Веблен [1904]), а в третьем—*неполным* (ambiguous). (С другой стороны, при генетическом методе процесс порождения обычно претендует на полное определение абстрактной структуры системы, т. е. служит категорическим определением системы.)

По данной аксиоматике, вообще говоря, совершенно не видно, какой из этих трех случаев имеет место. Исторически это иллюстрируется примером эвклидовой геометрии без постулата Эвклида о параллельных, от которого зависит теорема, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной. От «Начал» Эвклида (около 330—320 гг. до н. э.) до открытия неэвклидовой геометрии Лобачевским (1829) и Больаи (1833) обычно предполагалось, что эти аксиомы являются категорическими; или по крайней мере, что если бы вопрос был задан в этих терминах, то на него, вероятно, был бы получен такой ответ.

Вера греков в то, что они имели дело с однозначно определенной структурой пространства, не была выражена посредством современной терминологии. Эвклид полагал, что его аксиомы выражают известные основные свойства реального пространства. Аксиоматический метод в этом старинном понимании, согласно которому объекты системы S предполагаются известными прежде аксиом, можно охарактеризовать как метод *содержательной* (неформальной), или *материальной аксиоматики*. При этом аксиомы только выражают те свойства объектов, которые с самого начала были приняты как очевидные в силу их построения или, в случае теорий, которые применяются к эмпирическому миру, непосредственно абстрагируются из опыта или постулируются.

Аксиоматический метод в новом, описанном выше понимании, при котором аксиомы предшествуют всякому описанию системы S объектов, о которых идет речь в аксиомах (и служат для введения или «неявного определения» системы S), был впервые систематически рассмотрен в книге Гильберта «Основания геометрии» [1899] и может быть охарактеризован как *формальная* или *экзистенциальная* аксиоматика. Заметим, что вопрос о том, существует ли—и если да, то единственна ли—абстрактная система S, удовлетворяющая аксиомам некоторой аксиоматической теории, можно исследовать только средствами, внешними по отношению к этой аксиоматической теории (т. е. в некоторой другой теории). В самой же формальной аксиоматической теории область D из S играет роль фиксированного и полного множества объектов, причем существование всех этих объектов предполагается сразу, независимо от какого-либо порядка порождения, и к этим объектам применяются операции, отношения и т. д. из системы S.

В системе S типа $(D, 0, ')$ понятия 0 и $'$ или D, 0 и $'$ называются *первоначальными*, или *техническими*, или *неопределяемыми*, т. е. эти понятия не определены, пока не введены аксиомы. Остальные термины в аксиомах являются *обычными*, или *логическими*, или *определяемыми*, т. е. их значения должны быть предварительно объяснены. Относительно D, 0 и $'$ заранее должно быть указано только, что D—множество, 0—предмет, принадлежащий D, $'$—операция над элементом D; иначе говоря, заранее должны быть определены только грамматические категории, к которым принадлежат «D», «0» и «$'$». Аналогично для системы вида $(D, <)$ неопределяемыми понятиями являются или $<$, или D и .

В математической практике генетический и аксиоматический методы введения систем объектов часто оказываются связанными, когда генетически строится пример системы объектов, удовлетворяющей аксиомам. В других случаях пример заимствуется из другой формальной аксиоматической теории. (Во всех случаях, когда S для данной формальной аксиоматической теории отождествляется с некоторой системой объектов, заимствованной извне, налицо *применение* рассматриваемой формальной аксиоматической теории, при котором она становится материальной аксиоматической теорией.)

Формальный аксиоматический метод часто с успехом применяется в связи с неполными системами аксиом в целях одновременного построения общей части теории для многих различных систем. Знаменитым примером является „теория групп" из алгебры.

В качестве другого примера рассмотрим следующие аксиомы *линейного порядка*, которые применяются к системам типа $(D, <)$:

L1. Если $m<n$ и $n<p$, то $m<p$. L2. Имеет место не более чем одно из соотношений $m<n$, $m=n$, $m>n$. L3. Имеет место по крайней мере одно из соотношений $m<n$, $m=n$, $m>n$.

Здесь $m>n$ означает $n<m$. Переменные m, n, p относятся к произвольным элементам области D. Эти аксиомы выполняются, если в качестве D взять натуральный ряд, или множество ординальных чисел, меньших 2ω, или множество целых, или рациональных, или действительных чисел, а в качестве $<$—обычное отношение порядка для каждой из этих областей, а также для многих других систем. Опуская L3, получаем множество аксиом *частичного порядка*.

*§ 9. АРИФМЕТИКА И АНАЛИЗ

Арифметику, или *теорию чисел*, можно рассматривать как отрасль математики, в которой изучаются натуральные числа и другие (категорически определенные) счетные системы объектов, например целые или рациональные числа. Всякую конкретную систему такого рода (или соответствующую этой системе теорию) можно называть *арифметикой* (an arithmetic). Рассмотрение обычно происходит абстрактно (§ 8). Объекты обычно рассматриваются как *индивидуумы* (т. е. без анализа их построения из других объектов), исключая некоторые случаи (например, основные свойства неотрицательных рациональных чисел изучаются при помощи представления их в виде упорядоченных пар натуральных чисел).

В *арифметике в узком смысле* рассматриваются главным образом конкретные операции, именуемые $+$(сложение) и $\cdot$ (умножение), а иногда также некоторые другие связанные с ними операции. В *арифметике в широком смысле*, или *теории чисел*, используется более широкий класс понятий.

Эти определения мы привели для разъяснения нашей терминологии. Иногда термин «арифметика» употребляется и по отношению к теории операций $+$ и $\cdot$ для несчетных систем чисел (например, „арифметика трансфинитных кардинальных чисел").

В то время как арифметика, или теория чисел, изучает системы мощности $\aleph_0$ (а иногда конечные), *анализ* имеет дело с действительными числами и другими системами объектов мощности $2^{\aleph_0}$ (а иногда и бо́льшей мощности). Как и в теории чисел, в анализе подлежащие рассмотрению системы объектов считаются обычно категорически определенными.

Результаты анализа иногда применяются в теоретико-числовых исследованиях—такие исследования составляют *аналитическую теорию чисел*. Теория чисел, не использующая анализа, называется *чистой*, или *элементарной*, теорией чисел[1]).

[1]) Согласно сказанному, термины «теория чисел» и «арифметика» являются синонимами (поэтому английский термин «number theory» переводится обычно в дальнейшем словом «арифметика»). Повидимому, синонимами следует считать также термины «арифметика в узком смысле» и «элементарная теория чисел». При этом в дальнейшем (как в английском тексте, так и в переводе) эпитеты «в узком смысле» и «элементарная» обычно опускаются.—*Прим. ред.*

Рассмотрим теперь бегло основную систему объектов анализа—континуум действительных чисел.

Та теория действительных чисел, которая обычно кладется в основу анализа (за исключением исследований по критике оснований анализа), является продуктом раннего критического движения, начатого Гауссом (1777—1855), Коши (1789—1857) и Абелем (1802—1829).

Это направление привело в конце девятнадцатого столетия к так называемой *арифметизации анализа*, произведенной Вейерштрассом (1815—1897), Дедекиндом (1831—1916), Мерэ (1835—1911) и Кантором (1845—1918). Доверие к несколько туманной геометрической интуиции было заменено определением действительных чисел как некоторых объектов, построенных из натуральных, целых или рациональных чисел. При этом свойства действительных чисел сводились в конечном счете к свойствам натуральных чисел. Как сказал Пуанкаре [1900], «сегодня в анализе остаются только целые числа, а также конечные и бесконечные системы целых чисел, связанных между собой сетью отношений равенства и неравенства».

Определение действительных чисел через натуральные, целые или рациональные может быть дано несколькими способами. Все они приводят к одной и той же абстрактной структуре континуума действительных чисел. Другими словами, то, что дает каждое из этих определений, является представлением (§ 8) действительных чисел посредством объектов, построенных (прямо или косвенно) из натуральных чисел.

Мы уже пользовались представлениями действительных чисел посредством бесконечных десятичных или двоичных дробей (§ 2, 5). В принципе можно пользоваться любым множеством, эквивалентность которого множеству таких дробей доказана (см. § 5), например множеством всех множеств натуральных чисел. Но на практике выбирают такие представления, которые упрощают определения свойств действительных чисел.

Упорядочение действительных чисел оказывается особенно прозрачным в случае представления посредством дедекиндовых сечений (Дедекинд [1872]). Допустим, что множество R всех рациональных чисел разбито на два непустых класса X_1, X_2, таких, что каждое рациональное число из X_1 меньше каждого рационального числа из X_2. Такое разбиение называется *дедекиндовым сечением* R. В случае, если не существует ни наибольшего рационального числа в нижнем классе X_1, ни наименьшего в верхнем классе X_2, сечение называется *открытым*. Согласно идее Дедекинда, иррациональные числа должны быть именно там, где встречаются открытые сечения. Рациональное число появляется в связи с любым из двух *замкнутых* сечений: одним — для которого оно оказывается наибольшим числом в X_1, и другим — для которого оно наименьшее число в X_2. Чтобы представление каждого действительного числа (рационального или иррационального) было однозначным, можно пользоваться только нижними множествами X_1 сечений, у которых X_1 не имеет наибольшего числа. Это приводит к следующему определению (в котором мы пишем $\mathbf{x}$ вместо X_1 и $R-\mathbf{x}$ вместо X_2).

Действительное число — это такое множество $\mathbf{x}$ рациональных чисел, что (a) ни $\mathbf{x}$, ни $R-\mathbf{x}$ не пусто; (b) $\mathbf{x}$ не содержит наибольшего рационального числа; (c) каждое рациональное число из $\mathbf{x}$ меньше каждого рационального числа из $R-\mathbf{x}$.

Множество $\mathbf{C}$ всех действительных чисел — это множество всех таких множеств $\mathbf{x}$ рациональных чисел.

В этом определении предполагается, что уже имеется система R всех рациональных чисел и эта система используется для построения представителей действительных чисел таким образом, что R не оказывается подсистемой полученной системы $\mathbf{C}$. (Если элементы R — индивидуумы, то элементами $\mathbf{C}$ будут множества этих индивидуумов.)

Назовем теперь действительное число $\mathbf{x}$ *рациональным*, если $R-\mathbf{x}$ имеет наименьший элемент x, и в этом случае будем говорить, что $\mathbf{x}$ *соответствует* этому рациональному числу x (системы R). В противном случае $\mathbf{x}$ называется *иррациональным* числом.

Рациональные числа среди действительных образуют подсистему $\mathbf{C}_R$ системы $\mathbf{C}$, изоморфную (§ 8) первоначальной системе R рациональных чисел; это подтверждается каждый раз, когда с помощью описанного представления для действительных чисел определяется некоторое понятие, которое первоначально было определено для чисел рациональных.

Примеры. Действительное число $\mathbf{2}$ — это множество рациональных чисел, меньших рационального числа 2, которому оно соответствует. Действительное число $\sqrt{\mathbf{2}}$ — это множество рациональных чисел, которые или отрицательны, или имеют квадраты, меньшие рационального числа 2 (среди этих рациональных чисел нет наибольшего). Ввиду того, что не существует рационального числа, квадрат которого $=2$ (как открыл Пифагор в шестом веке до н. э.), $R-\sqrt{\mathbf{2}}$ состоит из положительных рациональных чисел, квадраты которых больше 2 (среди этих рациональных чисел нет наименьшего), так что число $\sqrt{\mathbf{2}}$ иррационально.

Отношение порядка для действительных чисел определяется таким образом: $\mathbf{x}<\mathbf{y}$, если существует рациональное число r, которое входит в $\mathbf{y}$, но не в $\mathbf{x}$. (Теперь докажите, что $\mathbf{C}$ линейно упорядочено посредством отношения $<$ и что система $(\mathbf{C}_R, <)$ изоморфна системе $(R, <)$.)

Действительное число $\mathbf{v}$ называется *верхней гранью* множества $\mathbf{M}$ действительных чисел, если $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{x}$ для каждого действительного числа $\mathbf{x}$, принадлежащего $\mathbf{M}$.

(A) *Если непустое множество $\mathbf{M}$ действительных чисел имеет верхнюю грань, то оно имеет и наименьшую верхнюю грань* $\mathbf{u}$ ($=$н. в. г. $\mathbf{M}$).

Доказательство. Нам надо построить $\mathbf{u}$ как множество рациональных чисел, обладающее свойствами (a) — (c). $\mathbf{M}$ дано нам как множество таких множеств рациональных чисел. Множество $\mathbf{u}$ мы определяем так: рациональное число $r \in \mathbf{u}$ тогда и только тогда, когда $r \in \mathbf{x}$ для некоторого действительного числа $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. В обозначениях § 5 $\mathbf{u}=\mathfrak{S}\mathbf{M}$. Читателю предоставляется доказать, что $\mathbf{u}=$н. в. г. $\mathbf{M}$. (Доказать, что $\mathbf{u}$ — действительное число, $\mathbf{u}$ является верхней гранью множества $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}$ не имеет верхней грани $\mathbf{v}<\mathbf{u}$.)

Аналогично определяются нижние грани. Если действительное число $\mathbf{x}$ рационально, положим $\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}+\{x\}$; в противном случае пусть $\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}$. Пусть $-\mathbf{x}$ — множество рациональных чисел $-r$ для $r \in R-\bar{\mathbf{x}}$. (Если $\mathbf{x}$ рационально, то $-\mathbf{x}$ соответствует $-x$.) Пусть $-\mathbf{M}$ — множество действительных чисел $-\mathbf{x}$ для $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. Если $\mathbf{w}$ — нижняя грань для $\mathbf{M}$, то $-\mathbf{w}$ — верхняя грань для $-\mathbf{M}$, так что $-\mathbf{M}$ имеет н. в. г. и $-$ (н. в. г. $-\mathbf{M}$) $=$ н. н. г. $\mathbf{M}$[1]).

Если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — действительные числа, то пусть $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ будет множеством рациональных чисел $r+s$ для $r \in \mathbf{x}$ и $s \in \mathbf{y}$; пусть $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{x}+(-\mathbf{y})$; наконец, пусть $|\mathbf{x}|=\mathbf{x}$, если $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, и $|\mathbf{x}|=-\mathbf{x}$, если $\mathbf{x}<\mathbf{0}$. (Не следует путать $+$ и $-$ со сложением и вычитанием множеств, которые обозначаются через $+$ и $-$.)

Пусть дана бесконечная последовательность $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots$ действительных чисел и действительное число $\mathbf{a}$; мы говорим, что $\lim \mathbf{a}_n=\mathbf{a}$,

[1]) н. н. г. — наибольшая нижняя грань. — *Прим. перев.*

если для каждого действительного числа $e>0$ найдется натуральное число n_e, такое, что для каждого $n>n_e$ имеет место $|\mathbf{a}_n-\mathbf{a}|<\mathbf{e}$. Например, $\lim\frac{1}{2^n}=0$ $\left(\text{где } \frac{1}{2^n}\text{ — действительное число, соответствующее рациональному числу } \frac{1}{2^n}\right)$.

(B) *Если* $\mathbf{u}=$ *н. в. г.* M *(как в* (A)), *то существует такая последовательность* $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots$ *элементов* M, *что* $\lim\mathbf{a}_n=\mathbf{u}$.

Доказательство. Пусть M_n есть множество действительных чисел, принадлежащих M и $>\mathbf{u}-\frac{1}{2^n}$. (Доказать, что M_n непусто.) Пусть $\mathbf{a}_n$ — любое действительное число, выбранное из M_n. (Доказать, что $\lim\mathbf{a}_n=\mathbf{u}$.)

Несмотря на то, что в этой теории анализ оказывается «арифметизованным», сохраняется глубокое различие между арифметикой и анализом, потому что в качестве объектов анализа приходится пользоваться бесконечными множествами объектов арифметики.

§ 10. ФУНКЦИИ

В самом общем смысле (однозначная) *функция* f, или $f(x)$, или $y=f(x)$ *от одной переменной* x — это соответствие, в силу которого каждому элементу x некоторого множества X отвечает единственный элемент y некоторого множества Y.

Множество X называется при этом *областью изменения независимой переменной*, или *областью определения функции*. Функцию называют также *отображением* X *в* Y (или *функцией от* элемента множества X, *принимающей в качестве значения* элемент множества Y, или *операцией над* элементом множества X, *дающей* элемент множества Y, и т. д.).

Область изменения зависимой переменной y, или $f(x)$, — это подмножество Y_1 множества Y, состоящее из тех элементов Y, которые используются при этом соответствии, т. е. из тех, которые посредством функции f поставлены в соответствие каким-нибудь элементам множества X. При этом X и Y_1 находятся в *много-однозначном соответствии*, потому что каждому элементу из X соответствует ровно один элемент из Y_1, но элемент из Y_1 может (вообще говоря) соответствовать многим элементам из X. Элемент x из X является *аргументом функции*, или *значением независимой переменной*. Соответствующий элемент y из Y является *соответствующим значением функции*, или *зависимой переменной*, или *значением функции для этого аргумента*. (Иногда «аргумент» употребляется в смысле «независимой переменной».)

(Однозначная) *функция* f, или $f(x_1, \ldots, x_n)$, или $y=f(x_1, \ldots, x_n)$, *от* n *переменных* $x_1, \ldots, x_n$ — это соответствие, в силу которого каждой упорядоченной n-ке $(x_1, \ldots, x_n)$ объектов, где $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2, \ldots, x_n\in X_n$ отвечает единственный объект y, где $y\in Y$. Функцию от n переменных можно рассматривать как функцию от одной переменной, множеством X для которой служит класс всех упорядоченных n-ок $(x_1, \ldots, x_n)$ указанного вида. Терминология, введенная для функций от одной переменной, распространяется на случай n переменных. Так, X_1 есть *область изменения* переменной x_1, X_2 — *область изменения* $x_2, \ldots, X_n$ — *область изменения* x_n. При этом множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$ могут все совпадать, или же может иметься и несколько (вплоть до n) различных областей изменения. Всякая отдельная последовательность $x_1, \ldots, x_n$ элементов соответственно из $X_1, \ldots, X_n$ является *истемой*, или *набором* (или *n-кой*) *аргументов*.

В этой обильной терминологии можно распознать смешение терминологий, основанных на двух идеях: идее функции как много-однозначного соответствия и идее функции как переменной y, которая изменяется в связи с другой переменной x таким образом, что значение y всегда определяется значением x.

Первая идея является более объемлющей, и изучающий должен иметь в виду прежде всего ее. Но вторая идея естественным путем приводит к полезным соглашениям, касающимся обозначений, в силу которых, например, если «$f(x)$» обозначает некоторую функцию от независимой переменной x, а a, b и т. д. являются значениями этой независимой переменной (т. е. аргументами), то «$f(a)$» обозначает значение функции для этого аргумента a, «$f(b)$» — значение функции для $x=b$ и т. д.

Нужно иметь в виду, что «$f(x)$» можно понимать в каждом из следующих двух значений: 1. Как саму функцию (т. е. как много-однозначное соответствие между X и Y_1). 2. Если x означает некоторый объект из области, то как соответствующее этому объекту значение функции (т. е. как некоторый элемент y из Y_1). Если x никак не зафиксирован, то $f(x)$ в последнем смысле называется *общим значением* рассматриваемой функции.

Пример 1. Когда мы говорим «$x+y$ симметрична», мы подразумеваем под «$x+y$» саму функцию. Когда мы говорим «сумма $x+y$ любых двух натуральных чисел x и y должна быть $\geqslant x$», мы подразумеваем под «$x+y$» не функцию, а число (общее значение функции).

Этой неопределенности можно избежать, если для обозначения функции употреблять «f» вместо «$f(x)$», коль скоро речь идет о функциях, для каждой из которых был введен символ, например «f», «g», «$+$» или «φ». Но обозначения, в которых указываются независимые переменные, очень удобны для получения обозначений других функций, составленных из данных функций (и констант), например «$f(g(x))$», «x^2+3x» или «$\varphi(2, x)$».

Пример 2. Чтобы рассмотреть это подробнее, допустим, что f и g — данные *арифметические функции* от одной переменной, т. е. отображения множества натуральных чисел на это же множество. Пусть x — произвольное натуральное число. Тогда $g(x)$ будет натуральным числом, т. е. значением функции g для x как аргумента, и $f(g(x))$ будет натуральным числом, т. е. значением функции f для натурального числа $g(x)$ как аргумента. Таким образом, для любого натурального числа x определено другое число $f(g(x))$. Итак, «$f(g(x))$» обозначает общее значение новой функции (смысл 2); удобно также пользоваться этим обозначением в качестве названия для самой новой функции (смысл 1).

Имеется и другой способ обозначения (введенный Чёрчем [1932]), в котором участвуют независимые переменные, но функция f обозначается иначе, чем ее общее значение, а именно «$\lambda x\, f(x)$» или, для функции от n переменных, «$\lambda x_1 \ldots x_n\, f(x_1, \ldots, x_n)$», например «$\lambda x\, f(g(x))$», «$\lambda x\, x^2+3x$», «$\lambda x\, \varphi(2, x)$». Мы будем для ясности пользоваться этими λ-обозначениями в тех случаях, когда нужна будет особенная осторожность.

Пример 3. Пусть φ — функция от двух натуральных чисел. Используя λ-обозначения надлежащим образом, т. е. как раз всюду там, где имеется в виду функция, а не ее общее значение, мы можем различать между собой: (a) число $\varphi(x, y)$, (b) функцию $\lambda x\, \varphi(x, y)$ от одной переменной x с параметром y, (c) функцию $\lambda xy\, \varphi(x, y)$ от двух переменных, для которой x — первая, а y — вторая переменная, (d) функцию $\lambda yx\, \varphi(x, y)$, для которой

y — первая, а x — вторая переменная, (е) функцию $\lambda x \lambda y \varphi(x, y)$ от одной переменной x, значениями которой служат функции от другой переменной y, и т. д. (Шейнфинкель [1924] и Чёрч отождествляют (с) и (е), но в этом нет для нас необходимости.)

Для любой n-ки $t_1, \ldots, t_n$ аргументов функции f

$$\{\lambda x_1 \ldots x_n f(x_1, \ldots, x_n)\}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n).$$

Например,

$$\{\lambda x\, x^2 + 3x\}(2) = 10, \quad \{\lambda x \varphi(x, y)\}(0) = \varphi(0, y),$$

$$\{\lambda yx \varphi(x, y)\}(0, 3) = \varphi(3, 0), \quad \{\lambda xy \varphi(x, y)\}(z, x) = \varphi(z, x).$$

Мы рассматриваем функцию как много-однозначное соответствие. Можно пойти дальше и определить, что такое много-однозначное соответствие, в зависимости от того, в какой теории производится все рассмотрение. В теоретико-множественных терминах это соответствие можно отождествить с множеством всех упорядоченных пар (x, y) соответствующих элементов множеств X и Y_1. Вместо этого можно говорить и о законе или правиле установления соответствия, по крайней мере если рассматриваются такие функции, что для каждой из них может быть задан такой закон или правило в некотором принятом смысле. В случае, когда X — конечное множество, функцию можно задать в виде таблицы.

Пример 4. Пусть X и Y оба являются системой вычетов по модулю 2, т. е. $X = Y = \{0, 1\}$. Функции x' и $x \cdot y$ можно определить посредством следующих таблиц:

x'

x	0	1
	1	0

$x \cdot y$

	y	0	1
x	0	0	0
	1	0	1

Тогда по второй таблице $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ и $1 \cdot 1 = 1$.

Глава III

КРИТИКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ РАССУЖДЕНИЙ

§ 11. ПАРАДОКСЫ

В этой главе мы постараемся изложить, какова была та ситуация в области оснований математики, которая породила исследования, являющиеся темой остальной части этой книги; речь будет идти о ситуации, предшествовавшей этим исследованиям (но не происшедшим с тех пор переменам).

При арифметизации анализа (§ 9) бесконечная совокупность (например, рациональных чисел, образующих нижнюю половину дедекиндова сечения, или цифр последовательности, образующих бесконечную десятичную дробь, и т. п.) составляла один объект, и множество всех таких объектов рассматривалось как новая совокупность. Отсюда напрашивался переход к канторовской общей теории множеств.

Едва окрепли эти теории, как законность всего их построения была подвергнута сомнению благодаря открытию парадоксов, или антиномий, на окраинах теории множеств.

(A) *Парадокс Бурали-Форти* [1897*], известный также Кантору еще в 1895 г., возник в канторовской теории трасфинитных ординальных чисел[1]).

(B) Несколько аналогичных антиномий встречается в теории трансфинитных кардинальных чисел, в частности *парадокс Кантора* (найденный им в 1899 г.). Рассмотрим множество всех множеств; обозначим его через $\mathbf{M}$. По теореме Кантора (теорема C § 5) $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} > \overline{\overline{\mathbf{M}}}$. Кроме того, так как $\mathbf{M}$ есть множество всех множеств, а $\mathfrak{U}\mathbf{M}$ — некоторое множество множеств (именно, множество всех подмножеств $\mathbf{M}$), то $\mathfrak{U}\mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}$. Поэтому, в силу следствия A из теоремы A, $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{M}}}$, а значит, в силу § 3, неверно, что $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} > \overline{\overline{\mathbf{M}}}$. Итак, мы доказали как то, что $\overline{\overline{\mathfrak{U}\mathbf{M}}} > \overline{\overline{\mathbf{M}}}$, так и то, что это неверно.

Отправляясь от того же самого $\mathbf{M}$, мы можем получить парадокс также следующим образом. Для каждого элемента M из $\mathbf{M}$, т. е. для произвольного множества M, по теореме C найдется другой элемент M' из $\mathbf{M}$, а именно $\mathfrak{U}M$, такой, что $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{M'}}$. Отсюда, по теореме D, $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}}$ для любого элемента M из $\mathbf{M}$. Но $\mathbf{M}$ — множество всех множеств, так что $\mathfrak{S}\mathbf{M}$ является одним из его элементов. Выбирая этот элемент в качестве M для только что доказанного неравенства, получаем $\overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}} < \overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}}$. Но в силу § 3, для любого множества M неверно, что $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{M}}$; поэтому, в частности, неверно, что $\overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}} < \overline{\overline{\mathfrak{S}\mathbf{M}}}$.

---

[1]) Речь идет о парадоксе, к которому приводит рассмотрение порядкового типа множества всех порядковых чисел. Ср. Хаусдорф. Теория множеств [1937, стр. 65]. — *Прим. перев.*

Парадокс с $\mathfrak{S}$M получится таким же образом, если, отправляясь от множества всех мощностей, мы выберем в качестве M множество, содержащее для каждой мощности некоторое множество M этой мощности.

Если использованное здесь понятие множеств произвольных элементов кажется слишком расплывчатым и потому нематематическим, можно условиться, что допустимыми элементами множеств являются (a_1) натуральные числа 0, 1, 2, ... (или (a_2) пустое множество O) и (b) всякое множество, элементы которого являются допустимыми. При этом условии предыдущие парадоксы и следующий получаются, как прежде (с (a_1), см. Генцен [1936]).

(C) *Парадокс Рассела* [1902 – 1903*], независимо от него открытый также Цермело, связан с множеством всех множеств, которые не являются элементами самих себя. Обозначим это множество через T. Является ли T элементом самого себя?

Допустим, что T является элементом самого себя, т. е. $T \in T$. Согласно этому допущению, T является элементом T, т. е. T — элемент множества всех множеств, не являющихся элементами самих себя, т. е. T – это множество, которое не является элементом самого себя, т. е. $T \bar{\in} T$. Это противоречит допущению $T \in T$. Пока что еще нет парадокса, потому что противоречие между $T \in T$ и $T \bar{\in} T$ возникло только в результате допущения $T \in T$. Посредством reductio ad absurdum мы заключаем, что это допущение ложно. Итак, полностью, без каких-либо допущений, доказано, что $T \bar{\in} T$.

Продолжим рассуждения, отправляясь теперь от полученного результата $T \bar{\in} T$. Этот результат состоит в том, что T — не элемент множества всех множеств, которые не являются элементами самих себя, т. е. T — это не множество, которое не является элементом самого себя[1]), т. е. T — это множество, которое является элементом самого себя, т. е. $T \in T$. Теперь установлено как то, что $T \bar{\in} T$, так и то, что $T \in T$, и мы получили парадокс.

Этот парадокс можно следующим образом извлечь из парадокса Кантора. Если мы условимся, что допустимыми элементами являются только (a_2) и (b), так что элементами множеств могут служить только множества, то, коль скоро M является множеством всех множеств, $\mathfrak{U}$M = M и множество T парадокса Рассела получается, если доказательство леммы A § 5 применить к тождественному 1 — 1-соответствию M $\sim$ $\mathfrak{U}$M, при котором каждый элемент множества M соответствует в $\mathfrak{U}$M самому себе. Популяризируя этот парадокс, Рассел [1919] рассматривает деревенского парикмахера, который бреет всех тех и только тех жителей своей деревни, которые не бреются сами. Бреет ли он самого себя? (Конечно, здесь мы не можем избежать парадокса просто путем заключения, что никогда не было такого парикмахера[2]).)

Каждый муниципалитет в Голландии должен иметь мэра, и два разных муниципалитета не могут иметь одного и того же мэра. Иногда оказывается, что мэр не проживает в своем муниципалитете. Допустим, что издан закон, по которому некоторая территория S выделяется исключительно для таких мэров, которые не живут в своих муниципалитетах, и предписывающий всем этим мэрам поселиться на этой территории. Допустим, далее, что этих мэров оказалось столько, что S образует муниципалитет. Где должен проживать мэр S? (Маннури, ср. ван Данциг [1948].)

Можно говорить также о библиотекаре конгресса, составляющем для библиотеки конгресса библиографию всех тех библиографий, имеющихся в библиотеке конгресса, которые не перечисляют самих себя (Гонсет [1933]).

---

[1]) Без этого снятия двойного отрицания можно обойтись.—*Прим. перев.*

[2]) Но зато удается избежать парадокса путем заключения, что такого парикмахера вообще не может существовать, и это заключение как раз доказывается этим парадоксом,— только и всего.—*Прим. перев.*

Рассел указал также, как можно изложить его парадокс посредством логической терминологии вместо теоретико-множественной. Свойство называется „предикабельным", если оно имеет место по отношению к самому себе, и „импредикабельным", если оно не имеет места по отношению к самому себе. Например, свойство „абстрактно" является абстрактным, а потому предикабельным; но свойство „конкретно" также является абстрактным, а не конкретным и потому импредикабельно. Каково свойство „импредикабельно"?

(D) *Парадокс Ришара* [1905], полученный по существу также Диксоном [1906], связан с понятием конечной определимости. Для конкретности мы будем иметь в виду конечную определимость в некотором языке—например русском[1])—с заранее данными алфавитом, запасом слов и грамматикой. Алфавит мы будем считать состоящим из пробела (для разделения слов), 33 русских букв и запятой. Под „выражением" этого языка мы будем понимать просто произвольную последовательность из этих 35 символов, не начинающуюся с пробела. Все такие выражения можно пересчитать при помощи того метода, которым мы воспользовались в конце § 1 для пересчета всех алгебраических уравнений.

Выражение может служить определением арифметической функции от одной переменной (т. е. функции от натурального числа, принимающей в качестве значений только натуральные числа). Опуская в упомянутом выше пересчете всех выражений русского языка те выражения, которые не являются определениями арифметических функций, мы получаем некоторый пересчет E_0, E_1, E_2,... тех выражений, которые служат такого рода определениями (а сами определяемые функции пусть будут соответственно $f_0(n)$, $f_1(n)$, $f_2(n)$,...).

Рассмотрим теперь следующее выражение: «Функция, значение которой для любого данного натурального числа в качестве аргумента равно увеличенному на единицу значению для этого же аргумента той функции, которая определяется выражением, соответствующим в только что упомянутом пересчете этому натуральному числу».

В этом заключенном в кавычки выражении упоминается вышеописанный пересчет всех выражений русского языка, служащих определением арифметической функции, но не дается определения этого пересчета. Однако нетрудно в качестве части взятого в кавычки выражения полностью выписать определение этого пересчета. Тогда мы получим определение некоторой функции (короче говоря, функции $f_n(n)+1$) посредством некоторого выражения русского языка. Эта функция, в силу ее определения, должна отличаться от каждой функции, определимой посредством какого-либо выражения русского языка.

Этот парадокс представляет особый интерес ввиду его применимости к таким языкам, как русский, и в связи с тем, что он так сходен с канторовским доказательством неперечислимости всех арифметических функций (§ 2). Ришар дал этот парадокс в форме, связанной с определением действительного числа, параллельно канторовскому доказательству неперечислимости всех действительных чисел.

Рассмотрим выражение «наименьшее натуральное число, которое нельзя назвать посредством меньше чем тридцати трех слогов». Это выражение при помощи тридцати двух слогов называет некоторое число, которое по определению нельзя назвать посредством меньше чем тридцати трех слогов! (Берри [1906])

(E) Эти современные парадоксы, более или менее связанные с теорией множеств, родственны одному очень древнему.

Высказывание «все критяне—лжецы...» приписывается критскому философу Эпимениду (шестой век до н. э.). (Это высказывание приводится апостолом

---

[1]) В подлиннике речь идет об английском языке.—*Прим. перев.*

Павлом в «Послании к Титу» I, 12, как принадлежащее одному критскому «пророку», которого раннее христианство, согласно позднейшим исследованиям, отождествляло с Эпименидом. См. Вейль [1949, стр. 228].)

Будем различать два рода лжецов: лжецы первого рода, которые иногда говорят правду, и лжецы второго рода, которые говорят только ложь. Будем понимать высказывание Эпименида в том смысле, что все критяне являются лжецами второго рода. Допустим, что это высказывание истинно. В силу его смысла и того факта, что Эпименид—критянин, оно должно быть тогда ложным. Получилось противоречие; отсюда путем reductio ad absurdum заключаем, что это высказывание ложно. Из ложности этого высказывания вытекает, что существовал или будет существовать некоторый критянин, который иногда говорит правду. Если бы это высказывание было единственным, которое когда-либо произносил хоть один критянин, мы получили бы парадокс. Логически неудовлетворительно то, что парадокса можно избежать только с помощью исторического предположения, что существовал критянин, который иногда говорил правду.

Парадокс Эпименида, известный также как *парадокс лжеца*, встречается также в сильной форме, когда некоторое лицо говорит просто «высказывание, которое я сейчас произношу, ложно». Стоящее в кавычках высказывание не может быть без противоречия ни истинным, ни ложным. Этот вариант парадокса приписывается Эвбулиду (четвертый век до н. э.) и был хорошо известен в древности. (См. Рюстов [1910].) Если высказывание «все критяне—лжецы...» не принадлежит Эпимениду или первоначально не воспринималось как парадокс, то эвбулидовский вариант лжеца может быть древнее, чем вариант «лгущего критянина».

В древней «дилемме крокодила» крокодил украл ребенка. Крокодил обещал отцу вернуть ребенка, если отец угадает, вернет ему крокодил ребенка или нет. Что должен сделать крокодил, если отец скажет, что крокодил не вернет ему ребенка? (См. Прандтль [1855, стр. 493].)

С этим парадоксом связана следующая загадка. Путешественник попал к людоедам. Они разрешают ему произнести какое-нибудь высказывание и ставят условие, что если его высказывание будет истинным, то его сварят, а если ложным—то его зажарят. Какое высказывание следует произнести путешественнику? (В другой форме эта загадка встречается в «Дон Кихоте» Сервантеса, 1605, II, 51.)

§ 12. ПЕРВЫЕ ВЫВОДЫ ИЗ ПАРАДОКСОВ

Читатель может испробовать свои силы, пытаясь разрешить эти парадоксы. За половину столетия с тех пор, как возникла эта проблема, не было найдено ни одного решения, с которым бы все согласились.

Решение простейшего рода состояло бы в локализации ошибки наподобие ученической ошибки в алгебраическом или геометрическом упражнении на доказательство, без необходимости каких-либо дальнейших изменений.

Мысль, что парадоксы следует решать в этом направлении, приходит на ум при первом знакомстве с ними. Можно предположить, что в парадоксах (A)—(C) ошибка состоит в употреблении слишком обширных множеств, таких, как множество всех множеств или множество всех кардинальных чисел, или в разрешении рассматривать множества как элементы самих себя, что опять-таки служит возражением против множества всех множеств. Отвергать эти предположения не обязательно, но только их нельзя считать простыми. Они ставят нас перед проблемой перестройки теории множеств на совершенно измененной основе, детали которой содержатся в них разве что в виде намека. Например, если мы запретим множество всех кардинальных чисел, мы не сможем рассматривать множество всех натуральных чисел, пока нам не станет известно, что этими числами не исчерпываются все кардинальные числа, и та же самая трудность возникает на более высоких ступенях. Если мы запретим множество всех множеств, то получим конфликт с канторовским определением множества. Чтобы вообще имелась теория множеств, надо иметь теоремы, справедливые для всех множеств, а все множества, по канторовскому определению, образуют множество. Если это не так, то мы должны указать, каким определением множества мы будем пользоваться взамен, или же дополнить канторовское определение некоторым дальнейшим критерием, устанавливающим, когда описанная в его определении совокупность объектов образует множество (Сколем [1929—30]).

Аксиоматическая теория множеств. Были предложены построения теории множеств, в которых понятие множества связано лишь такими ограничениями, исключающими образование слишком обширных множеств, какие необходимы для предупреждения известных антиномий. Ввиду того, что свободное пользование нашими понятиями при построении множеств согласно канторовскому определению приводит к крушению, употребление теоретико-множественных понятий регулируется аксиомами вроде тех, которым подчиняются „точка" и „прямая" в эвклидовой планиметрии. Первая система *аксиоматической теории множеств* принадлежит Цермело [1908]. Френкель [1922, 1925], Сколем [1922—23, 1929], Нейман [1925, 1928], Бернайс [1937—54] и другие улучшили аксиоматическое рассмотрение множеств. На базе аксиоматической теории множеств можно обосновать анализ, и эта база является, пожалуй, простейшей базой, предложенной для построения существующей математики с тех пор, как были обнаружены парадоксы. В связи с аксиоматической теорией множеств были сделаны некоторые очень интересные открытия, особенно Сколемом [1922—23] (см. ниже § 75) и Гёделем [1938, 1939, 1940][1]).

Широкая постановка проблемы оснований математики. Допустим, что при аксиоматизации теории множеств парадоксы устраняются—а у нас имеется лишь единственный довод в пользу этого допущения, состоящий в том, что до сих пор при упомянутых выше аксиоматизациях не было обнаружено ни одного парадокса,—означает ли это, что мы получили полное решение той проблемы, которая была поставлена в связи с парадоксами?

Что касается геометрии, то со времени открытия неэвклидовой геометрии математики стали понимать, что имеется несколько возможных видов пространства Системы аксиом выделяют тот или иной вид пространства или некоторые общие свойства различных пространств, которыми геометр должен заниматься. Если в формальной аксиоматической теории возникнет противоречие, то это будет означать просто, что была постулирована неосуществимая комбинация свойств.

Но что касается кульминирующих в теории множеств арифметики и анализа, то до современной эпохи критицизма математики обычно считали, что они имеют дело с системами объектов, порождаемыми генетически теми определениями, которые предназначены для полного описания их структуры. Считали, что теоремы выражают истины, относящиеся к этим системам, а не предложения, гипотетически приложимые ко всяким системам объектов, удовлетворяющим аксиомам (если такие системы объектов существуют). А тогда, как могут в этих областях появляться противоречия, если только нет какого-нибудь дефекта в логике или ошибки в тех методах построения и рассуждений о математических объектах, которым мы до сих пор доверяли?

Сказать, что теперь эти области надо строить на аксиоматической основе,—это еще не значит избавиться от проблемы. И после аксиоматизации на некотором уровне остаются еще истина и ложь. Если аксиоматика содержательна

[1]) А также П. С. Новиковым [1951°].—*Прим. ред.*

(т. е. не формальна), то аксиомы должны быть истинными. Если же аксиоматика формальна, то по крайней мере нам нужна уверенность, что теоремы следуют из аксиом; и, кроме того, чтобы математическое творчество не сводилось к бессмыслице, должно иметься какое-то соответствие между этими результатами и некоторой действительностью, лежащей вне аксиоматической теории. Формально аксиоматизированные математические предложения не могут составить всей математики; должна иметься также интуитивно понимаемая математика. Если мы вынуждены отказаться от нашей прежней веры, что она содержит всю арифметику, анализ и теорию множеств, то мы не можем испытать полного удовлетворения, пока не узнаем, в чем была ошибочность этой веры и где теперь должна проходить разделительная черта.

Таким образом, непосредственная проблема устранения парадоксов поглощается более широкой проблемой обоснования математики и логики. Какова природа математической истины? Какой смысл имеют математические предложения и на какого рода доказательствах они основаны? С этой широкой проблемой или комплексом проблем философия имеет дело независимо от того, что в окраинных областях математики появились парадоксы. Исторически последнее обстоятельство привело к более интенсивному изучению этого вопроса математиками, чем это, вероятно, было бы при других обстоятельствах; очевидно, что эти парадоксы накладывают условия на решение задачи[1]).

Непредикативные определения. Пусть множество M и объект m определены таким образом, что, с одной стороны, m является элементом M, а с другой стороны, определение m зависит от M; тогда мы будем говорить, что процесс (или определение m, или определение M) является *непредикативным*. Аналогично, когда свойством P обладает некоторый объект m, определение которого зависит от P (при этом множеством M служит множество объектов, обладающих свойством P). Непредикативное определение является порочным[2]), по крайней мере по виду, так как то, что в нем определяется, принимает участие в своем собственном определении.

Каждая из антиномий § 11 использует непредикативное определение. В (B) множество $\mathfrak{M}$ всех множеств содержит в качестве элементов множества $\mathfrak{U}\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{S}\mathfrak{M}$, определяемые через $\mathfrak{M}$. В парадоксе Рассела (C) непредикативный процесс бросается в глаза после следующей переработки определения T Мы разделим множество $\mathfrak{M}$ всех множеств на две части, из которых первая содержит те элементы, которые содержат самих себя, а вторая (которая и есть T)—те, которые не содержат самих себя. Затем мы помещаем T (определенное этим разделением $\mathfrak{M}$ на две части) обратно в $\mathfrak{M}$ и спрашиваем, в какую часть $\mathfrak{M}$ оно при этом попадает. В парадоксе Ришара (D) совокупность всех выражений русского языка, которые образуют определение функции (действительного числа или натурального числа), рассматривается как содержащая выражение, стоящее в кавычках и определяемое через эту совокупность. В парадоксе Эпименида (E) совокупность всех высказываний разделяется на две части—совокупность всех истинных и совокупность всех ложных высказываний. Высказывание, зависящее от этого разделения, считается затем принадлежащим первоначальной совокупности, когда мы спрашиваем, истинно оно или ложно.

Пуанкаре [1905—06, 1908] считал, что причина парадоксов лежит в этих непредикативных определениях, а Рассел [1906, 1910] провозгласил это же объяснение в своем принципе порочного круга: никакая совокупность не может содержать элементов, определимых только в терминах этой совокупности, а также элементов, включающих в себя или предполагающих эту совокупность. Возможно, что в этом состоит достаточное разрешение и точное проникнове-

[1]) Интересные результаты, проливающие свет на проблему парадоксов, принадлежат Д. А. Бочвару [1938°, 1944°] и П. С. Новикову [1947°].—*Прим. ред.*

[2]) В подлиннике circular.—*Прим. перев.*

ние в сущность парадоксов, но возникает следующее затруднение: части математики, которые мы желаем сохранить, и в том числе анализ, также содержат непредикативные определения.

Примером служит определение u=н. в. г. M (§ 9 (A)). Согласно дедекиндовскому определению действительных чисел, множество C всех действительных чисел—это множество всех тех множеств x рациональных чисел, которые обладают тремя свойствами (a), (b), (c). Эта совокупность разбивается затем на две части M и C—M. Мы определяем u как 𝔖M и затем рассматриваем это множество 𝔖M как элемент C. Это определение u=𝔖M в общем случае зависит от C, так как M в общем случае определяется как множество тех элементов C, которые обладают некоторым свойством P.

Можно пытаться защищать это непредикативное определение, истолковывая его не как определение или создание в первый раз действительного числа u (при таком истолковании определение совокупности C всех действительных чисел было бы порочным[1]), а только как описание, которое выделяет это индивидуальное число u из уже существующей совокупности C всех действительных чисел. Но этот же довод можно применить для защиты непредикативных определений в парадоксах.

Конструктивный континуум Вейля. Непредикативный характер некоторых определений анализа особенно подчеркивался Вейлем, который в своей книге «Das Kontinuum» (Континуум) [1918] предпринял исследование того, какая часть анализа может быть построена без непредикативных определений. Можно указать ряд операций, достаточных для построения многих частных категорий иррациональных чисел. Вейлю удалось на этом пути получить значительную часть анализа—но не теорему о том, что произвольное непустое множество M действительных чисел, имеющее верхнюю границу, имеет наименьшую верхнюю границу (см. также Вейль [1919]).

Имеются три основных направления в основаниях математики: (i) логицистическая школа (Рассел и Уайтхед, Англия), (ii) интуиционистская школа (Брауэр, Голландия) и (iii) формалистическая, или аксиоматическая, школа (Гильберт, Германия). (Иногда вместо «логицистическая» говорят «логистическая»; но термин «логистика» имеет также другой смысл, см. § 15.) Эта широкая классификация не включает различных других точек зрения, которые не столь широко культивировались или не совмещают в такой же степени реконструкцию математики и философию, лежащую в ее основе.

Логицизм. Логицистический тезис состоит в том, что математика является отраслью логики. Математические понятия следует определять в терминах логических понятий. Теоремы математики следует доказывать как теоремы логики.

Лейбниц [1666] первый рассматривал логику как науку, идеи и принципы которой лежат в основе всех других наук. Дедекинд [1888] и Фреге [1884, 1893, 1903] занимались определением математических понятий в терминах логических, а Пеано [1889, 1894—1908]—выражением математических теорем в логическом символизме.

Для иллюстрации того, каким образом математические понятия определяются через логические, примем сначала определение кардинального числа по Фреге—Расселу (§ 3) и определения кардинального числа 0 и кардинального числа $n+1$ для каждого кардинального числа n[2] (§ 4). Тогда *конечное кардинальное* (или *натуральное*) *число* можно определить как кардинальное число, обладающее каждым свойством P, таким, что (1) 0 обладает свойством P и (2)

[1] В подлиннике circular.—*Прим. перев.*

[2] Имеется в виду определение $n+1$ на стр. 19.—*Прим. перев.*

$n+1$ обладает свойством P, коль скоро n обладает свойством P. Короче говоря, натуральное число определяется как кардинальное число, для которого имеет место математическая индукция. Эта точка зрения резко отличается от той, которая была принята в §§ 6 и 7, где мы, исходя из интуитивного понимания натурального ряда, извлекли принцип, что если дано некоторое частное свойство P натуральных чисел, такое, что (1) и (2), то любое натуральное число должно обладать свойством P. Здесь же мы исходим из совокупности всех свойств кардинальных чисел, предполагая тем самым ее существование в логике, и затем уже определяем натуральный ряд чисел. Заметим, что это определение непредикативно, потому что определяемое свойство—быть натуральным числом—принадлежит совокупности свойств кардинальных чисел, которая предполагается в определении.

Чтобы приспособить логицистическое построение математики к той ситуации, которая возникла в связи с открытием парадоксов, Рассел посредством своей *разветвленной теории типов* [1908, 1910][1]) исключил непредикативные определения. Грубо говоря, эта теория состоит в следующем. Первичные объекты или индивидуумы (т. е. данные вещи, которые не подвергаются логическому анализу) приписываются одному типу (скажем, *типу* 0), свойства индивидуумов—*типу* 1, свойства свойств индивидуумов—*типу* 2 и т. д.; не допускается никаких свойств, которые не попадали бы в один из этих логических типов (например, свойства „предикабельно" и „импредикабельно" из § 11 при этом исключаются из логики). При более подробном изложении описываются также допустимые типы для других объектов, таких, как отношения и классы[2]). Затем, чтобы исключить непредикативные определения внутри каждого типа, типы, отличные от типа 0, разделяются далее на порядки. Так, для типа 1 свойства, определяемые без упоминания о какой-либо совокупности, принадлежат *порядку* 0, а свойства, определяемые при помощи совокупности свойств данного порядка, принадлежат следующему за ним порядку. (Логицистическое определение натурального числа становится теперь предикативным, если в нем P рассматривать как пробегающее только по свойствам данного порядка, а свойство быть натуральным числом относится при этом к следующему порядку.) Но это разделение на порядки делает невозможным построение обычного анализа, который, как мы видели выше, содержит непредикативные определения. Чтобы избежать этого затруднения, Рассел постулировал свою *аксиому сводимости*, которая утверждает, что для каждого свойства, принадлежащего ненулевому порядку, имеется равнообъемное (т. е. имеющее место в точности для тех же объектов) свойство порядка 0. Если только определимые свойства рассматриваются как существующие, то эта аксиома означает, что для каждого непредикативного определения внутри данного типа имеется эквивалентное ему предикативное.

Дедукция математики как области логики была выполнена на этой основе с помощью некоторого логического символизма в фундаментальном труде Уайтхеда и Рассела «Principia mathematica» (в трех томах [1910—13]). Эта книга имела огромное влияние на последующее развитие символической логики.

---

[1]) См. также Гильберт и Аккерман [1928].—*Прим. ред.*

[2]) Каждый класс приписывается тому же типу, что и соответствующее свойство, т. е. свойство, присущее всем элементам данного класса и только им, а каждое n-аргументное ($n>1$) отношение—типу $(i_1, \ldots, i_n)$, где i_p $(1 \leqslant p \leqslant n)$—тип p-го аргумента отношения. Таким образом, типы отношений—это уже не числа. Но можно и не вводить этих типов, определяя вместо этого отношения через классы упорядоченных n-ок; при этом n-ка $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ определяется при $n>2$ как $\langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n\rangle\rangle$, а $\langle x, y\rangle$ определяется как $((x)(x, y))$, так что в конечном счете теория отношений сводится к теории классов и можно обойтись натуральными типами. См. *Гильберт и Аккерман*, Основы теоретической логики, М.—Л., 1947, стр. 192 и 199; Гёдель [1940]. Такое описание разветвленной теории типов в деталях отличается от ступенчатого исчисления Гильберта и Аккермана.—*Прим. перев.*

Эта дедукция математики из логики была предложена в качестве интуитивной аксиоматики. В аксиомы предлагается поверить или, по крайней мере, предлагается принять их как вероятные гипотезы о мире.

Теперь возникает трудность: на каком основании будем мы верить в аксиому сводимости? Если свойство надлежит строить, то этот вопрос должен быть решен на основе построения, а не посредством аксиомы. Как допускают авторы во введении ко второму изданию их книги (1925), «эта аксиома имеет чисто прагматическое оправдание: она приводит к желаемым результатам и, насколько известно, ни к каким другим. Но, конечно, эта аксиома не такого рода, чтобы мы могли остаться ею довольны».

Рамсей [1926] обнаружил, что желаемые результаты, и только они, могут быть, повидимому, получены без иерархии порядков (т. е. при помощи *простой теории типов*). Он классифицирует известные антиномии, разделяя их на два рода, именуемые теперь „логическими" (например, антиномии Бурали—Форти, Кантора и Рассела) и „эпистемологическими" или „семантическими" (например, антиномии Ришара и Эпименида), и он заметил, что логические антиномии (повидимому) исключаются простой иерархией типов, а семантические (повидимому) не могут появиться внутри символического языка простой теории типов из-за отсутствия в ней тех средств, которые требуются для описания выражений того же языка. Но доводы Рамсея для обоснования непредикативных определений внутри данного типа предполагают понятие совокупности всех предикатов этого типа как существующей независимо от их конструируемости[1]) или определяемости. Эти доводы были названы «теологическими». Таким образом, ни Уайтхеду и Расселу, ни Рамсею не удалось конструктивным путем достичь логицистической цели. (Интересный план обоснования непредикативных определений внутри данного типа, предложенный Лангфордом [1927] и Карнапом [1931—32], также не свободен от трудностей.)

Вейль [1946] утверждает, что в системе «Principia mathematica» «математика основывается уже не на логике, а на своего рода логическом рае...», и он замечает, что тот, кто готов поверить в этот «трансцендентный мир», может также принять систему аксиоматической теории множеств (Цермело, Френкеля и т. д.), которая для дедукции математики имеет то преимущество, что устроена проще.

Логицизм рассматривает существование натурального ряда как гипотезу о действительном мире („аксиому бесконечности"). Совершенно отличный подход к проблеме бесконечности предлагается интуиционистами (§ 13) и формалистами (§ 14).

Как с интуиционистской, так и с формалистской точки зрения (абстрактный) натуральный ряд является более элементарным, чем понятия кардинального числа и всех тех свойств кардинальных чисел, которые используются в логицистическом описании натурального ряда.

Логицистический тезис может быть, наконец, подвергнут сомнению по той причине, что логика уже предполагает математические идеи в своей формулировке. С интуиционистской точки зрения существенное математическое ядро содержится в идее итерации, которой приходится пользоваться, например, при описании иерархии типов или понятия вывода из данных посылок.

К числу более новых работ логицистической школы относится работа Куайна [1940*]. Критическое, но сочувственное обсуждение логицистического хода мысли дано Гёделем [1944]. Вводное изложение имеется у Рассела [1919] и Блэка [1933].

§ 13. ИНТУИЦИОНИЗМ

В 1880-х годах, когда процветали методы Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора, Кронекер настойчиво утверждал, что их фундаментальные понятия—

[1]) Т. е. возможности построить их намеченным выше способом.—*Прим. перев.*

это только слова, потому что они, вообще говоря, не дают нам возможности решить, удовлетворяет ли данный объект определению.

Пуанкаре, защищавший математическую индукцию как ни к чему не сводимое орудие интуитивных математических рассуждений (Пуанкаре [1902, 1905—6]), также был предшественником современной интуиционистской школы.

Брауэр [1908] в статье, озаглавленной „Недостоверность логических принципов", бросил вызов вере в то, что правила классической логики, дошедшие до нас по традиции в основном от Аристотеля (384—322 до н. э.), являются абсолютно законными, независимо от содержания того, к чему они прилагаются. Цитируем по Вейлю [1946]: „Согласно его взглядам и пониманию истории, классическая логика была абстрагирована от математики конечных множеств и их подмножеств... Забывая об этом ограниченном происхождении, впоследствии эту логику приняли ошибочно за нечто высшее и первичное по отношению ко всей математике и в конце концов стали применять ее без какого-либо оправдания к математике бесконечных множеств".

Два очевидных примера показывают, что принципы, истинные при рассмотрении конечных множеств, не обязательно переносятся на бесконечные множества. Один из них—принцип, заключающийся в том, что целое больше любой собственной части, в применении к 1—1-соответствиям между множествами (§§ 1, 3, 4). Другой принцип состоит в том, что во всяком множестве натуральных чисел имеется наибольшее число.

Принципом классической логики, который является истинным при рассуждениях о конечных множествах, но который Брауэр не принимает для бесконечных множеств, является закон исключенного третьего. Этот закон, в его общем виде, утверждает, что *для каждого предложения A либо A, либо не-A*. Пусть теперь A будет предложением *существует элемент множества* (*или области*) D, *обладающий свойством* P. Тогда *не-A* эквивалентно предложению *каждый элемент D не обладает свойством P* или, другими словами, *каждый элемент D обладает свойством не-P*. Значит, в применении к этому A закон исключенного третьего дает: *или существует элемент D, обладающий свойством P, или каждый элемент D обладает свойством не-P*.

Для ясности пусть свойство P выбрано так, что для любого данного элемента D мы можем определить, обладает этот элемент свойством P или нет.

Допустим теперь, что D—конечное множество. Тогда мы можем исследовать все элементы D по очереди и таким образом либо найти элемент, обладающий свойством P, либо убедиться в том, что все элементы обладают свойством *не-P*. Возможны практические трудности, например, для очень большого множества, имеющего, например, миллион элементов, или даже для малого D, если решение вопроса, обладает ли данный элемент свойством P, оказывается слишком громоздким. Но в принципе имеется возможность закончить исследование. С точки зрения Брауэра, именно эта возможность делает закон исключенного третьего справедливым принципом при рассуждениях о конечных множествах D и свойствах P указанного рода.

Для бесконечного множества D ситуация в корне другая, так как принципиально невозможно закончить исследование всего множества D.

Более того, в этой ситуации, с точки зрения Брауэра, закон исключенного третьего нельзя спасти, заменяя невозможное исследование всех элементов бесконечного множества D каким-либо математическим решением поставленной проблемы. Мы можем в некоторых случаях, т. е. для некоторых множеств D и свойств P, преуспеть в нахождении элемента D, обладающего свойством P, а в других случаях мы можем преуспеть в доказательстве посредством математического рассуждения, что каждый элемент D обладает свойством *не-P*, например путем вывода противоречия из допущения, что какой-то произвольный (т. е. никак не определенный) элемент D обладает свойством P. (Пример второго рода решения получаем, когда D—множество всех упорядоченных пар (m, n) целых положительных чисел, а P—свойство пары (m, n), заключающееся в том что $m^2=2n^2$. Результатом служит тогда пифагорово открытие иррациональности $\sqrt{2}$.) Но у нас нет оснований утверждать возможность получения в общем случае одного из этих двух родов решения.

Примером из истории современной математики может служить «великая теорема» Ферма, которая утверждает, что уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет решения в целых положительных числах x, y, z, n при $n>2$. (Для $n=2$ имеются тройки целых положительных чисел, называемые пифагоровыми числами, которые удовлетворяют этому уравнению, например, $x=3$, $y=4$, $z=5$ или $x=5$, $y=12$, $z=13$.) Здесь D является множеством всех упорядоченных четверок (x, y, z, n) целых положительных чисел с $n>2$, а P—свойством четверки (x, y, z, n), состоящим в том, что $x^n+y^n=z^n$. Около 1637 г. Ферма написал на полях своего экземпляра Диофанта в издании Баше, что он открыл поистине изумительное доказательство этой «теоремы», но поля слишком узки, чтобы уместить его. Несмотря на огромную затрату усилий, никому с тех пор не удалось доказать или опровергнуть эту «теорему»; более того, нам неизвестно никакого систематического метода, следуя которому, мы принципиально должны были бы в конце концов установить ее истинность или ложность. (Подробности см. у Вандивера [1946].)

Непринятие Брауэром закона исключенного третьего для бесконечных множеств D не основано на том, что математикам до сих пор не удалось решить ту или иную конкретную проблему. Чтобы предупредить брауэровскую критику, пришлось бы изобрести метод, принципиально годящийся для решения не только всех замечательных нерешенных математических проблем, но и любых других, которые могут быть когда-либо предложены в будущем. О том, насколько правдоподобно, что такой метод будет найден, мы пока предоставляем размышлять читателю. Позже мы вернемся к этому вопросу (§ 60).

Обычную математику с ее методами и логикой в том виде, в каком она развивалась до критики Брауэра или не принимая ее во внимание, мы будем называть *классической*, а математику, с методами и логикой которой согласны Брауэр и его школа, мы будем называть *интуиционистской*[1]). Классическая математика содержит как интуиционистскую, так и неинтуиционистскую часть.

Неинтуиционистская математика, которая кульминировала в теориях Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора, и интуиционистская математика Брауэра существенно различаются в их точке зрения на бесконечность. В классической математике бесконечность рассматривается как *актуальная*, или *завершенная*, или *протяженная*, или *экзистенциальная*. Бесконечное множество рассматривается как существующее в виде завершенной совокупности, до и независимо от всякого процесса порождения или построения его человеком, как если бы оно полностью лежало перед нами для нашего обозрения. В интуиционистской математике бесконечность рассматривается только как *потенциальная*, или *становящаяся*, или *конструктивная*. Осознание этого различия в понимании бесконечных величин восходит к Гауссу, который в 1831 г. писал: «Я возражаю... против употребления бесконечной величины, как чего-либо завершенного, что никогда не позволительно в математике». (Werke, VIII, стр. 216.)

Согласно Вейлю [1946], «Брауэр выяснил и, как мне кажется, не оставил никакого сомнения в том, что не существует доводов, защищающих веру в экзи-

---

[1]) Хотя основы этой математики действительно были заложены возглавляемой Брауэром школой интуиционистов, употребление многими авторами (в том числе и автором настоящей книги) терминов «интуиционистская математика», «интуиционистская логика» и т. п. следует признать не совсем удачным, поскольку охватываемое этими терминами положительное содержание не имеет обычно (как, например, и в этой книге) никакого отношения к философии интуиционизма. Лучше было бы говорить «конструктивная математика», «конструктивная логика» и т. п.—*Прим. ред.*

стенциальный характер совокупности всех натуральных чисел... Этот ряд чисел, который растет, не останавливаясь ни на какой стадии, за счет перехода к следующему числу, представляет собой многообразие возможностей, открытых для бесконечности; он вечно остается в состоянии становления, а не является замкнутым царством вещей, существующих в себе. То, что мы слепо превращаем одно в другое, является истинным источником наших трудностей, в том числе антиномий,—источником более глубокой природы, чем указанный Расселом принцип порочного круга. Брауэр открыл нам глаза и показал, как далеко классическая математика, вскормленная превосходящей всякую человеческую способность реализации верой в „абсолютное“, идет дальше таких утверждений, которые могут претендовать на реальный смысл и истинность, основанную на доказательствах».

Брауэровская критика классической логики в применении к бесконечному множеству D (например, натуральному ряду чисел) возникает вследствие этой точки зрения на бесконечность. Это ясно видно из рассмотрения значений, которые интуиционисты связывают с различными видами высказываний.

Универсальное высказывание *все натуральные числа n обладают свойством P* или, короче, *$P(n)$ для всех n* интуиционисты понимают как гипотетическое утверждение, согласно которому, если дано какое-нибудь натуральное число n, то можно быть уверенным в том, что это число n обладает свойством P. При таком понимании не требуется принимать во внимание классическую завершенную бесконечную совокупность натуральных чисел.

Математическая индукция служит примером интуиционистского метода доказательства универсальных предложений о натуральных числах. Доказательство по индукции предложения *$P(n)$ для всех n* показывает, что любое данное n должно обладать свойством P, посредством рассуждения, в котором используются только числа от 0 до n (§ 7). Конечно, для того чтобы некоторое доказательство по индукции было интуиционистским, рассуждения, использованные в его базисе и индукционном шаге, также должны быть интуиционистскими.

Экзистенциальное высказывание *существует натуральное число n, обладающее свойством P*, или, короче, *существует n, такое, что $P(n)$*, интуиционистами рассматривается как частичное сообщение о высказывании (или абстракция от такого высказывания), которое дает конкретный пример натурального числа n со свойством P или хотя бы метод, позволяющий в принципе найти такой пример[1]).

Поэтому интуиционистское доказательство предложения *существует такое n, что $P(n)$*, должно быть *конструктивным* в следующем (узком) смысле: это доказательство действительно представляет пример такого n, что $P(n)$, или, по крайней мере, указывает метод, позволяющий в принципе найти такой пример.

В классической математике встречаются *неконструктивные* или *косвенные* доказательства существования, которых не принимают интуиционисты. Например, чтобы доказать предложение *существует n такое, что $P(n)$*, классически настроенный математик может вывести противоречие из допущения, что *для всех n не-$P(n)$*. Согласно обеим логикам—классической и интуиционистской—это в силу reductio ad absurdum дает предложение *не для всех n не-$P(n)$*[2]). Классическая логика позволяет преобразовать этот результат в утверждение

[1]) П. С. Новиков [1939, 1943] (см. добавление VII) показал, что при некоторых условиях из неконструктивного доказательства существования можно извлечь конструктивное доказательство.—*Прим. ред.*

[2]) А. Н. Колмогоров [1932] высказал мысль, что при последовательном проведении конструктивной (интуиционистской) точки зрения *для высказывания о всеобщности* (т. е. имеющего форму «для всех n имеет место $P(n)$»), *вообще говоря, является бессмысленным рассматривать его отрицание как определенное высказывание.—Прим. ред.*

существует n, такое, что P(n), но (вообще говоря) этого не позволяет сделать логика интуиционистская. Такое классическое доказательство существования не приближает нас к обладанию примером числа n, такого, что $P(n)$ (хотя иногда мы все же можем получить такой пример другим способом)[1]). Интуиционисты отказываются принять такое доказательство существования, потому что его заключение *существует n, такое, что P(n)*, они могут воспринимать только как ссылку на пример числа n, такого, что $P(n)$, а такого примера получено не было. Классическое понимание, обозначающее что где-то в завершенной бесконечной совокупности всех натуральных чисел встречается такое n, что $P(n)$, для них не годится, поскольку они не рассматривают натуральные числа как образующие завершенную совокупность.

В качестве другого примера неконструктивного доказательства существования предположим, что для некоторого свойства P интуиционистскими методами показано, что если «великая теорема» Ферма верна, то число 5013 обладает свойством P, а также, что если «великая теорема» Ферма ложна, то 10 обладает свойством P. Классически этого достаточно, чтобы доказать существование числа n такого, что $P(n)$. Но пока проблема «великой теоремы» не решена, Брауэр не согласился бы с таким доказательством существования, потому что оно не дает никакого примера. Нам неизвестно ни то, что 5013 служит нужным примером, ни то, что 10 служит таким примером. Нам также не известен никакой процесс, который в принципе (т. е. отвлекаясь от практических ограничений, относящихся к длине выполнимого процесса) дал бы нам некоторое конкретное число, относительно которого мы могли бы быть уверены, что оно служит примером. То, что нам дано, Брауэр принял бы только в качестве доказательства импликации (или условного высказывания) *если F или не-F, то существует n такое, что P(n)*, где F—это высказывание *для всех x, y, z, n, таких, что x, y, $z>0$ и $n>2$, имеет место* $x^n+y^n \neq z^n$. Классически настроенный математик, в силу его закона исключенного третьего, имеет посылку *F или не-F* этой импликации, поэтому он может вывести ее заключение *существует n, такое, что P(n)*. Но при настоящем состоянии науки Брауэр не воспринимает как известную посылку *F или не-F*.

Как видно из этого примера, интуиционистские методы следует отличать от классических не только в случае доказательств, но и в случае определений. При существующем состоянии науки Брауэр не воспринимает слова *число n, которое равно* 5013, *если F, и равно* 10, *если не-F*, как законное определение некоторого натурального числа n.

Дизъюнкция *A или B* является для интуициониста неполным сообщением о высказывании, которое утверждает, что A имеет место или что B имеет место или по крайней мере дает метод, посредством которого из A и B можно выбрать одно, которое имеет место. Конъюнкция *A и B* означает, что оба высказывания, A и B, имеют место. Импликация *A влечет B* (или *если A, то B*) выражает, что B следует из A в силу интуиционистского рассуждения, или, более явно, что имеется метод, который по каждому доказательству A позволяет получить некоторое доказательство B. Отрицание *не-A* (или *A абсурдно*) означает, что противоречие *B и не-B* следует из A в силу интуиционистского рассуждения, или, более явно, что имеется метод, который по любому доказательству A позволяет получить доказательство противоречия *B и не-B* (или утверждения, абсурдность которого уже известна, например, $1=0$). Дополнительные замечания о таком интуиционистском понимании будут приведены в § 82[2]).

---

[1]) См. примечание [1]) к стр. 50.—*Прим. ред.*

[2]) А. Н. Колмогоров [1932] открыл интерпретацию конструктивной (интуиционистской) логики в виде логики решения *задач*, или *проблем*. Возможны различные способы уточнения используемого в этой интерпретации интуитивного понятия «проблема». Один из таких способов предложил Клини (см. ниже § 82); рассматриваемые им проблемы суть проблемы построения реализаций. Другой способ предложен в последнее время Ю. Т. Медве-

Цитируем Гейтинга [1934]: «Согласно Брауэру, математика тождественна с точной частью нашего мышления... Никакая наука—в частности, ни философия, ни логика—не может служить предпосылкой для математики. Было бы порочным кругом применять в качестве средств для доказательств какие-либо философские или логические принципы, потому что в формулировке таких принципов уже предполагаются математические понятия». Для математики не остается «никакого другого источника, кроме интуиции, которая с непосредственной ясностью помещает перед нашими глазами математические понятия и выводы». Эта интуиция «является не чем иным, как способностью рассматривать в отдельности различные понятия и выводы, регулярно встречающиеся в обычном мышлении». Анализируя идею натурального ряда чисел, мы видим, что она может быть основана на возможности, во-первых, рассматривать какой-либо предмет или опыт как данный нам независимо от всего остального мира, во-вторых, отличать одно такое рассмотрение от другого и, в-третьих, представлять себе неограниченное повторение второго процесса. «В интуиционистской математике выводы не извлекаются по фиксированным правилам, которые можно объединить в логику, а каждый вывод в отдельности непосредственно подтверждается своей очевидностью». Но, кроме того, «имеются общие правила, посредством которых из данных математических теорем можно интуитивно ясным образом получать другие; теорию этих соотношений можно рассматривать в некоторой „математической логике“, которая при этом является отраслью математики и не имеет ощутимых применений вне математики».

Обратимся теперь к вопросу, как велика та роль, которую в классической математике играют неинтуиционистские методы.

То обстоятельство, что неинтуиционистские методы встречаются в классической элементарной теории чисел, является существенным: оно позволяет элементарной теории чисел служить первым и простейшим пробным камнем для тех исследований по основаниям математики, которые вырастают из интуиционистского и формалистского мышления. В этой книге мы будем почти все время интересоваться элементарной теорией чисел.

В действительности в построении современной элементарной теории чисел неинтуиционистские методы не играют большой роли. В большинстве случаев неконструктивные доказательства существования можно заменять конструктивными.

С другой стороны, в анализе (и в еще более абстрактных областях математики) неинтуиционистские способы определения и доказательства проходят через всю методологию. Действительные числа в дедекиндовом представлении являются бесконечными множествами рациональных чисел (§ 9). Таким образом, уже для того, чтобы рассматривать их как объекты в обычном смысле, мы пользуемся завершенной бесконечностью. И даже в связи с простейшими определениями теории мы применяем закон исключенного третьего к этим множествам. Например, чтобы показать, что для любых двух действительных чисел $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ либо $\mathbf{x}<\mathbf{y}$, либо $\mathbf{x}=\mathbf{y}$, либо $\mathbf{x}>\mathbf{y}$, мы применяем его дважды в следующей форме: или существует рациональное число r в $\mathbf{y}$, не принадлежащее $\mathbf{x}$, или все рациональные числа из $\mathbf{y}$ принадлежат $\mathbf{x}$; аналогично с переменой ролей $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. В непредикативном определении н. в. г. множества M (§ 9 (A), § 12) мы таким же образом пользуемся совокупностью всех действительных чисел. Неконструктивное рассуждение другого рода встречается в доказательстве (B) § 9, где мы допускаем законность выбора элемента $\mathbf{a}_n$ из множества M_n одновременно для бесконечно многих значений n, когда не дано никакого свой-

девым [1955]. Каждая из рассматриваемых им проблем есть проблема построения арифметической (см. § 10, пример 2) функции, принадлежащей заданному классу функций. К кругу вопросов, связанных с истолкованием конструктивной логики, примыкают также исследования Н. А. Шанина [1953, 1955] о *частных типах понятий конструктивной истинности и конструктивной ложности*.—*Прим. ред.*

ства, определяющего то, какой элемент выбирается. (Это—частный случай «аксиомы выбора», на которую как на допущение впервые обратил внимание Цермело [1904][1]). Этим допущением мы пользовались также при доказательстве теоремы В § 4.)

Хотя в качестве величины завершенная бесконечность была уничтожена (к чему призывал нас Гаусс), она вновь появляется в полной мере при рассмотрении совокупностей. Гильберт и Бернайс в их «Grundlagen der Mathematik» («Основания математики», т. I, 1934, стр. 41) следующим образом описывают эту ситуацию: «... Арифметизация анализа оказалась неполной, так как с нею были введены некоторые систематические основные идеи, не принадлежащие области интуитивного арифметического мышления. Строгое обоснование анализа убедило нас только в том, что эти немногие основные допущения достаточны для построения теории величин как теории множеств целых чисел».

Далее возникает вопрос: какова та математика, которую можно построить при интуиционистских ограничениях? Если при этих ограничениях можно заново построить существующую классическую математику без слишком большой дополнительной затраты усилий и без слишком больших жертв в получаемых результатах, то проблема обоснования математики была бы, пожалуй, решена.

Интуиционисты построили целую новую математику, включая теорию континуума и теорию множеств (см. Гейтинг [1934]). В этой математике, посвоему очень заманчивой, встречаются понятия и различия, которых нет в классической математике. В качестве замены для классической математики интуиционистская математика оказалась менее мощной и во многих случаях более сложной. Например, в брауэровской теории континуума мы не может утверждать, что любые два действительных числа a и b либо равны, либо неравны. Наши знания о равенстве или неравенстве a и b могут иметь более или менее точный характер. Под $a \neq b$ понимается, что $a=b$ приводит к противоречию, тогда как $a \# b$ является неравенством более строгого вида и означает, что можно указать пример рационального числа, разделяющего a и b. Конечно, $a \# b$ влечет $a \neq b$. Но имеются пары действительных чисел a и b, для которых неизвестно, что либо $a=b$, либо $a \neq b$ (или $a \# b$). Ясно, что при таких усложнениях классическая теория континуума заменяется чем-то менее прозрачным по форме.

Однако не следует исключать другую (недавно обнаруженную возможность) интуиционистского построения классической математики, основанного на интерпретации (см. § 81).

§ 14. ФОРМАЛИЗМ

Брауэр показал, что происходит при последовательном проведении генетической, или конструктивной, точки зрения; Гильберт проделал то же самое для аксиоматической, или экзистенциальной, точки зрения (§ 8). Аксиоматический метод был уточнен уже при переходе от материальной аксиоматики Эвклида к формальной аксиоматике гильбертовских «Оснований геометрии» [1899]. Формализм возникает в результате дальнейшего шага, направленного на преодоление кризиса, причиненного парадоксами и тем вызовом классической математике, который был брошен Брауэром и Вейлем. Этот шаг был намечен Гильбертом [1904]; серьезное продвижение было осуществлено его сотрудниками Бернайсом, Аккерманом, Нейманом и другими после 1920 года (см. Бернайс [1935а], Вейль [1944]).

Гильберт признавал, что предложения классической математики, содержащие завершенную бесконечность, выходят за пределы интуитивной очевид-

[1]) Согласно Серпинскому [1928], на необходимость аксиомы выбора для многих теоретико-множественных доказательств, в частности для доказательства теоремы В § 4, еще в 1902 г. указал Беппо-Леви.—*Прим. перев.*

ности. Но он не соглашался, следуя Брауэру, отказаться от классической математики.

Чтобы спасти классическую математику от интуиционистской критики, он предложил программу, которую можно предварительно выразить следующим образом: следует сформулировать классическую математику в виде аксиоматической теории и затем доказать непротиворечивость этой теории.

Метод, которым пользовались при доказательствах непротиворечивости аксиоматических теорий до этого предложения Гильберта, особенно в круге его ранних аксиоматических идей, состоял в задании „модели". *Модель* для некоторой аксиоматической теории—это просто система объектов, взятая из некоторой другой теории и удовлетворяющая аксиомам данной теории (§ 8). Иными словами, каждому объекту или первоначальному понятию данной аксиоматической теории сопоставляется объект или понятие другой теории таким образом, что аксиомы оказываются теоремами этой другой теории (или соответствуют им). Если эта вторая теория непротиворечива, то должна быть непротиворечивой и данная аксиоматическая теория. Действительно, допустим, что в данной аксиоматической теории из аксиом можно вывести противоречие. Тогда и в другой теории из соответствующих теорем можно было бы вывести противоречие, пользуясь соответствующими выводами по отношению к объектам, образующим модель.

Бельтрами (1868) в знаменитом старом примере показал, что прямые плоской неэвклидовой геометрии Лобачевского—Больаи (плоской гиперболической геометрии) могут быть представлены геодезическими некоторой поверхности постоянной отрицательной кривизны в эвклидовом пространстве[1]). Таким образом, плоская гиперболическая геометрия непротиворечива, если непротиворечива эвклидова геометрия. (Клейн (1871) достиг той же цели другим методом, пользуясь плоской проективной геометрией с метрикой Кэли (1859), а для этой последней можно построить модель в эвклидовой плоскости. См. Юнг [1911], лекции II и III.)

Аналитическая геометрия Декарта (1619), т. е. употребление координат для представления геометрических объектов, является общим методом установления непротиворечивости геометрических теорий на основе анализа, т. е. теории действительных чисел.

Доказательства непротиворечивости методом модели являются относительными. Теория, для которой строится модель, непротиворечива, если непротиворечива та теория, из которой модель берется.

Только если эта последняя теория безупречна, модель дает нам абсолютное доказательство непротиворечивости. Веблен и Басси [1906] получили абсолютные доказательства непротиворечивости для некоторых рудиментарных проективных геометрий при помощи моделей, в которых точки представляются элементами некоторого конечного (sic!) класса объектов (см. Юнг [1911], лекции IV и V).

Для абсолютного доказательства непротиворечивости классической арифметики, анализа и теории множеств (аксиоматизированных надлежащим образом) метод моделей не подает надежды. Не видно никакого математического источника для получения модели, которая не возвращала бы нас попросту к одной из теорий, предварительно сведенной к только что перечисленным теориям посредством метода моделей.

---

[1]) Здесь и в следующей фразе автор допускает неточность.

Представление, о котором идет речь, осуществимо только локально, именно, оно дает возможность наложить на поверхность постоянной отрицательной кривизны в эвклидовом пространстве некоторый круг плоскости Лобачевского, но не всю эту плоскость. Поэтому результата Бельтрами недостаточно для высказанного автором утверждения о непротиворечивости. Однако модель Клейна может служить этой цели. См. Ефимов Н. В., Высшая геометрия, М.—Л., 1945, гл. V, §§ 6 и 8; гл. VII, § 3.—*Прим. перев.*

Гильберт и Бернайс [1934, стр. 15—17] показали, что для построения модели невозможно воспользоваться воспринимаемым, или физическим миром. Они иллюстрируют это, рассматривая первый парадокс Зенона (пятое столетие до н. э.), согласно которому бегун не может пробежать дистанцию за конечное время, так как для этого он должен был бы пробежать сначала первую половину дистанции, затем следующую четверть, затем следующую восьмую часть и т. д., и таким образом ему пришлось бы совершить бесконечное число действий. Обычное решение этого парадокса состоит в замечании, что ряд интервалов времени, нужный для пробега последовательных отрезков пути, сходится. «В действительности имеется гораздо более радикальное решение этого парадокса. Оно состоит в указании на то обстоятельство, что мы вовсе не обязательно должны верить в то, что математическое пространственно-временнóе представление движения имеет физическое значение для произвольно малых интервалов пространства и времени; скорее мы имеем все основания предполагать, что эта математическая модель экстраполирует факты из некоторой области опыта, а именно, из области движений в пределах того порядка величин, который пока что доступен нашему наблюдению, экстраполирует просто в смысле образования идей, подобно тому, как механика сплошной среды совершает экстраполяцию, предполагающую непрерывное заполнение пространства материей... Ситуация оказывается сходной во всех случаях, когда имеется вера в возможность непосредственного узрения (актуальной) бесконечности как данной посредством опыта или восприятия... Более подробное исследование показывает затем, что бесконечность на самом деле вовсе не была нам дана, а была только интерполирована или экстраполирована посредством некоторого интеллектуального процесса».

Следовательно, если мы хотим доказать непротиворечивость арифметики (включая ее неинтуиционистскую часть), анализа и т. д., то это надо делать другим методом. Заслуга Гильберта состоит в нахождении нового прямого подхода и в распознании того, чтó при этом требуется от аксиоматизации. Этот прямой метод содержится неявно в самом понятии непротиворечивости (по крайней мере в современном понимании этого слова[1])), означающем, что никакое противоречие (т. е. ситуация, при которой некоторое предложение *A* и его отрицание *не-A* оба являются теоремами) не может возникнуть в рассматриваемой теории в процессе вывода из аксиом. Итак, чтобы непосредственно доказать непротиворечивость какой-либо теории, нужно доказать некоторое предложение о самой этой теории, а также о всех возможных в этой теории доказательствах теорем. Математическая теория, непротиворечивость которой пытаются доказать, становится, в свою очередь, предметом изучения некоторой математической науки, названной Гильбертом «метаматематикой» или «теорией доказательств». Каким образом это возможно и каковы должны быть методы этой науки, это мы рассмотрим в следующем параграфе.

А пока мы рассмотрим дальнейшие выводы из гильбертовой концепции. Гильберт [1926, 1928] устанавливает различие между „действительными" и „идеальными" предложениями классической математики, сущность которого состоит в следующем. *Действительные предложения*—это те, которые рассматриваются как имеющие содержательный смысл, а *идеальные предложения*—это те, которые так не рассматриваются. Предложения, соответствующие употреблению актуальной бесконечности, идеальны. Классическая математика присоединяет идеальные предложения к действительным, чтобы простые правила аристотелевской логики были попрежнему применимы к рассуждениям о бесконечных множествах.

---

[1]) В подлиниике непротиворечивость называется consistency (согласованность, совместиость).—*Прим. перев.*

Присоединение „идеальных элементов“ к системе с целью пополнить ее структуру и упростить теорию этой системы является обычным и плодотворным методом в современной математике. Например, в плоской геометрии Эвклида две различные прямые пересекаются в единственной точке, за исключением случая, когда эти прямые параллельны. Чтобы избавиться от этого исключения, Понселе в своей проективной геометрии [1822] ввел *бесконечно удаленную точку* на каждой из первоначальных прямых таким образом, что параллельные прямые имеют одну и ту же бесконечно удаленную точку, а непараллельные прямые имеют различные бесконечно удаленные точки. Совокупность этих бесконечно удаленных точек образует *бесконечно удаленную прямую*. Если вокруг конечной точки проективной плоскости вращать прямую, то бесконечно удаленная точка этой прямой опишет бесконечно удаленную прямую. В результате этого приема соотношения инцидентности между точками и прямыми упрощаются. Две различные точки определяют единственную прямую (которая находится „на“ обеих этих точках, т. е. проходит через обе эти точки), и две различные прямые определяют единственную точку (которая находится на обеих прямых). Эти два предложения *двойственны* друг другу. Имеется общий принцип, называемый *принципом двойственности* для плоской проективной геометрии, который утверждает, что для каждой теоремы этой области предложение, получающееся из нее взаимной заменой слов «точка» и «прямая», также является теоремой[1]).

В качестве другого примера добавления элементов к ранее имевшейся системе элементов с некоторой теоретической целью мы приведем последовательные расширения числовой системы, когда, например, отправляясь от натуральных чисел, присоединяют затем отрицательные целые числа, затем дроби, затем иррациональные и, наконец, комплексные числа. Присоединение отрицательных целых чисел упрощает теорию сложения, так как делает обратную операцию (вычитание) всегда выполнимой, и т. д.

Грубо говоря, задача Гильберта аналогична той, которая существовала, когда впервые начали употреблять мнимые числа. Так как ясного понимания этих чисел тогда не было, то кто-нибудь мог предложить скептикам в качестве обоснования употребления мнимых чисел доказательство того, что если мнимые числа используются согласно предписанным правилам для получения результата, выраженного в терминах одних только действительных чисел, то этот результат должен быть верным. Конечно, в наше время нет надобности в такого рода относительном обосновании мнимых чисел, потому что имеется известная интерпретация этих чисел точками плоскости (Вессель, 1799 г.) и парами действительных чисел (Гаусс, 1831 г.).

Ввиду этой аналогии напрашивается следующий вопрос: если бы удалось найти доказательство непротиворечивости в гильбертовском смысле для части классической математики, содержащей как действительные, так и идеальные предложения,—могли бы мы тогда заключить, что действительные предложения, доказанные при помощи идеальных, истинны интуиционистски? Вопрос о том, в какой мере можно было бы прийти к такому заключению, мы рассмотрим впоследствии (конец § 42, конец § 82); это будет зависеть от того, какие рассуждения охватываются доказательством непротиворечивости и какие предложения берутся в качестве действительных. В той мере, в какой это заключение было бы возможно, успешное выполнение гильбертовской программы позволило бы применять классическую математику в интуиционистских доказательствах.

В первые годы после того, как оформилась гильбертовская программа, возник острый спор между Брауэром и Гильбертом. Брауэр [1923] говорил: «Неправильная теория, не натолкнувшаяся на противоречие, не становится

[1]) При этом к числу теорем относятся также и аксиомы.—*Прим. перев.*

от этого менее неправильной, подобно тому как преступное поведение, не остановленное правосудием, не становится от этого менее преступным». Гильберт [1928] возразил: «Отнять у математиков закон исключенного третьего—это то же, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксерам пользоваться кулаками»[1]).

Согласно Брауэру [1928] и Гейтингу [1931—1932, 1934], возможно соглашение между интуиционизмом и формализмом при условии (по Нейману [1931—1932]), что формалисты не станут приписывать неинтуиционистской классической математике содержательного значения, благодаря которому доказательство непротиворечивости служило бы ее обоснованием. Такое обоснование,—говорит Брауэр,—«содержит порочный круг потому, что оно зависит от (содержательной (inhaltlichen)) истинности предложения, что из непротиворечивости некоторого высказывания следует его истинность, т. е. от (содержательной) истинности закона исключенного третьего», который является подлежащей обоснованию частью формалистской математики.

Для формалистской позиции будет затруднительным объяснить, каким образом неинтуиционистская классическая математика оказывается осмысленной, если согласиться с интуиционистами в том, что ее теоремам недостает реального смысла, в терминах которого они были бы истинны.

Классическая математика строит теории совершенно не в том смысле, как интуиционистская. Гильберт [1928] говорит: «Выставить общее требование, согласно которому каждая отдельная формула сама по себе допускала бы истолкование,—отнюдь не разумно...» В теоретической физике «только известная часть комбинаций и следствий из физических законов может быть проверена опытом—подобно тому как в моей теории доказательств только действительные предложения могут быть непосредственно проверяемы».

Классическую математическую теорию можно рассматривать как простую и изящную систематизирующую схему, благодаря которой совокупность (вероятно) истинных высказываний, сначала казавшихся разнородными и не связанными друг с другом и зачастую сначала неизвестных, объединяется в виде следствий из идеальных теорем этой теории (ср. Нейман [1947], Эйнштейн [1944, стр. 288]).

Пример аналитической теории чисел показывает, что теоремы анализа (не имеющие смысла, приемлемого для интуиционистов) часто влекут теоремы арифметики, осмысленные интуиционистски, для которых либо вовсе не известны неаналитические доказательства, либо известны лишь гораздо более сложные.

Для того чтобы теория могла приносить такого рода пользу, содержащиеся в ней действительные предложения должны быть истинными. Прежде математики считали, что это обеспечивается истинностью тех теорем, которые мы теперь воспринимаем как идеальные; мы же теперь надеемся обеспечить это посредством доказательства непротиворечивости.

Теория посредством легких переходов может подниматься на более высокие уровни, на которых она только очень косвенно связана с систематизацией действительных предложений; теснее она связана с систематизацией идеальных предложений на промежуточных уровнях. В этой связи интересно, увеличивают ли последовательно все более высокие теоретические построения область охваченных ими действительных предложений первоначального рода, а также

---

[1]) Приведенная фраза едва ли является серьезным возражением ввиду принципиальной беспощадности критики Брауэра. Такое возражение могло оказаться убедительным для самого Гильберта, но не для Брауэра. Но в той же статье Гильберт приводит и другие серьёзные соображения, например то, что не закон исключенного третьего, а недопустимые и бессмысленные образования понятий повинны в парадоксах теории множеств, а также то, что его «игра формулами» содействует изучению «техники нашего мышления». См. Гильберт, Основания геометрии, М., 1948, стр. 382—383.—*Прим. перев.*

вызывают ли они существенные упрощения ранее имевшихся доказательств (см. конец § 42).

Неясным является то, насколько высокие теоретические структуры можно применять для систематизации действительных истин данного рода, например, оправдано ли применение анализа для систематизации арифметических истин. Исторически аналитическая теория чисел явилась побочным продуктом, а действительные движущие силы развития классического анализа возникли из таких наук, как геометрия в ее физическом применении.

Гильберт и Бернайс [1934] подчеркивают, что в науках «мы преимущественно имеем дело с теориями, которые не воспроизводят полностью действительного положения вещей, а являются *упрощающей идеализацией* этого положения вещей, в чем и состоит их значение» (стр. 2—3). Анализ служит «образованием идей (Ideenbildung)», в терминах которых могут быть выражены эти теории или к которым они могут быть сведены посредством метода моделей. Доказательство непротиворечивости анализа убедило бы нас в непротиворечивости идеализаций, которые осуществляются в этих теориях (стр. 19).

Вейль [1926, 1928, 1931] замечает, что в теоретической физике с опытом согласуются не отдельные утверждения, а вся теоретическая система в целом. В результате получается не истинное описание того, что дано, а теоретическое, чисто символическое построение мира. (Он также утверждает, что наш теоретический интерес не заключается исключительно и даже преимущественно в „действительных предложениях", например в том, что данная стрелка находится возле такого-то деления на шкале, а скорее в идеальных предположениях, например в предположении, что электрон является универсальным электрическим квантом). Глубокий философский вопрос состоит в том, какая „истина" или объективность соответствует этому теоретическому построению мира, далеко выходящему за пределы непосредственного опыта. Этот вопрос тесно связан с другим: что побуждает нас принять за основу определенную избранную нами систему аксиом? Непротиворечивость для этого необходима, но не достаточна. Если предоставить математика самому себе, он вместе с Брауэром ограничится интуитивными истинами; у него не найдется достаточного мотива, чтобы идти дальше. Если же заставить математика заняться вместе с физиком процессом теоретического построения мира, он будет на стороне Гильберта.

Заключение о точке зрения формалистов будет частично зависеть от плодов предлагаемой ими программы. Для этой программы нужна область исследования, называемая «метаматематикой», в которой они намерены, в частности, установить непротиворечивость классической математики.

Заметим заранее, что метаматематика потребует строгой математической техники для исследования большого многообразия проблем обоснования математики и логики, и проблема непротиворечивости будет только одной из этих проблем. Например, метаматематические методы применяются теперь при изучении систематизаций математики, возникающих из логицистической и интуиционистской школ, так же как и для возникающих из школы Гильберта. (Обратно, своим возникновением метаматематика многим обязана логицистическим и интуиционистским исследованиям.) В дальнейших частях этой книги наша цель будет состоять не в вынесении окончательного решения, утверждающего или отвергающего формалистскую точку зрения в какой-либо принятой версии, а в рассмотрении существа метаматематического метода и в изучении некоторых результатов, которые были открыты на пути следования этому методу.

§ 15. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ТЕОРИИ

Мы собираемся теперь заняться программой, которая превращает саму математическую теорию в объект точного математического изучения. В математической теории мы изучаем систему математических объектов. Как может математическая теория сама служить объектом математического изучения?

Результат творчества математиков воплощается в предложениях—доказанных предложениях или теоремах данной математической теории. Невозможно в точных терминах изучить, что происходит в уме математика, но можно рассматривать систему этих предложений.

Система этих предложений должна быть высказана полностью. Их нельзя всех выписать, но изучающему должны быть известны все условия, определяющие, какие предложения имеют место в теории.

Прежде всего, предложения теории следует распределить, принимая во внимание их дедуктивные взаимоотношения; те предложения, из которых остальные логически выводимы, следует принять за аксиомы (или постулаты).

Этот первый шаг будет выполнен только после того, как посредством аксиом будут выражены все свойства неопределяемых или технических терминов, существенные для вывода теорем. Тогда можно будет, производя выводы, рассматривать технические термины как слова, сами по себе не имеющие смысла. Ибо утверждение, что они имеют значения, необходимые для вывода теорем и отличные от тех, которые можно вывести из аксиом, регулирующих употребление этих терминов, сводится к утверждению, что не все их свойства, существенные для выводов, выражены посредством аксиом. После того как таким образом исключены из рассмотрения значения технических терминов, мы пришли к точке зрения формальной аксиоматики (§ 8).

Технические термины все еще обладают грамматическими свойствами: они являются существительными, прилагательными, глаголами и т. д. Кроме того, остаются еще обычные, или логические, термины, значения которых используются в выводах. Пункт, на котором формальная аксиоматизация должна остановиться, фактически не определен, потому что не существует никакой абсолютной основы для различения технических и обычных терминов.

Во всяком случае, мы еще не достигли нашей цели—высказать явно все условия, определяющие, какие предложения имеют место в теории. В самом деле, мы не установили, какими логическими принципами надлежит пользоваться при выводах. Как нам теперь хорошо известно, эти принципы различны для различных теорий (§ 13).

Чтобы выразить их явно, необходим второй шаг, который дополняет предыдущий для так называемых технических терминов по отношению к неграмматической стороне их значений. Все значения всех слов исключены из рассмотрения, и все условия, регулирующие употребление этих слов в теории, явно высказаны. Логические принципы, прежде входившие неявно через значение обычных терминов, теперь будут введены в действие—отчасти, может быть, при помощи новых аксиом, но во всяком случае, хотя бы частично, посредством правил, позволяющих вывести одну фразу из другой или других. Так как мы полностью абстрагировались от содержания или сущности, сохранив только форму, то мы будем говорить, что данная теория *формализована*. Будучи формализованной, теория по своей структуре является уже не системой осмысленных предложений, а системой фраз, рассматриваемых как последовательность слов, которые, в свою очередь, являются последовательностями букв. Только по форме будем мы судить о том, какие сочетания слов являются фразами, какие фразы—аксиомами и когда фразы вытекают в качестве непосредственных следствий из других.

Возможна ли такая формализация? В какой мере может быть формализована данная теория, это мы узнаем только после попытки формализации и изучения результатов (например, §§ 29, 42, 60, 72).

То, что для математических теорий формализация возможна, во всяком случае, в весьма значительной мере,—это открытие, полученное в итоге длительного периода истории развития человеческого интеллекта.

Открытие аксиоматико-дедуктивного метода в математике, по древнегреческой традиции, приписывается Пифагору (шестое столетие до н. э.); оно дошло до нас благодаря Эвклиду (365?—275? до н. э.), «Начала» которого, говорят, были некогда самой распространенной книгой после Библии. Эвклид не сумел явно выразить все постулаты, которые требуются для вывода теорем. В новое время были обнаружены другие постулаты, например те, которые регулируют порядок точек на прямой (Паш [1882]).

Открытие формального рассмотрения логики, т. е. открытие того, что дедуктивные рассуждения можно описывать через форму их фраз, принадлежит, повидимому, Аристотелю (384—322 гг. до н. э.). И здесь новое время внесло усовершенствования.

При формализации математических теорий мы пользуемся обоими открытиями. Для строгого выполнения этой задачи практически необходимо заново построить рассматриваемую теорию в особом символическом языке, т. е. *символизировать* ее. Вместо того, чтобы описанные выше шаги выполнять над теорией в том виде, как она дана нам в некотором обычном разговорном языке, например греческом или русском, мы построим новый символический язык специально с целью выразить в нем эту теорию. Обычные разговорные языки слишком обременительны, слишком нерегулярны по своему построению и слишком расплывчаты, чтобы мы могли им следовать. (В символическом языке символы будут обычно соответствовать целым словам, а не буквам, а последовательности символов, соответствующие фразам, будут называться «формулами».)

Этот новый язык будет носить тот общий характер символизма, с которым мы встречаемся в математике. В алгебре мы производим выводы как формальные манипуляции с уравнениями, которые чрезвычайно утомительно было бы производить в обычном языке, как это делалось до того, как Виета (1591) и другие изобрели современные алгебраические обозначения. Открытие простых символических обозначений, которые сами приводят к манипуляциям по формальным правилам, явилось одним из путей, на которых развивалась мощь современной математики. Однако в обычной математической практике мы имеем дело только с частичной символизацией и формализацией, так как часть предложений остается выраженной словами и часть выводов производится в терминах значений слов, а не по формальным правилам.

После того как Лейбниц (1666) пришел к мысли об „универсальной характеристике", в трудах де Моргана [1847, 1864], Буля [1847, 1854], Пирса [1867, 1880], Шрёдера [1877, 1890—1905] и других для формальной логики также был получен символический способ обращения с помощью математической техники.

Эти совпадающие по духу исследования в конечном счете привели к строгим формализациям различных разделов математики—Фреге [1893, 1903], Пеано [1894—1908] и Уайтхед и Рассел [1910—1913]. (Описанный метод явного изложения теории часто называется *логистическим* методом.)

Гильберту принадлежит, во-первых, подчеркивание того, что строгая формализация теории предполагает полную абстракцию от смысла—результат такой формализации называется *формальной системой*, или *формализмом*[1]) (или иногда *формальной теорией*, или *формальной математикой*); во-вторых, ему принадлежит метод, делающий формальную систему в целом предметом изучения математической дисциплины, называемой *метаматематикой* или *теорией доказательств*.

Метаматематика содержит в себе описание или определение формальных систем, а также исследование свойств формальных систем. При рассмотрении конкретной формальной системы мы будем называть эту систему *предметной теорией*, а относящуюся к ней метаматематику—ее *метатеорией*.

---

[1]) Не путать с формализмом как направлением в философии математики.—*Прим. ред.*

С точки зрения метатеории, предметная теория является вовсе не теорией в прежнем смысле этого слова, а системой бессодержательных предметов, аналогичных позициям в шахматной игре, над которыми проделываются механические манипуляции, аналогичные шахматным ходам. Предметная теория описывается и изучается как система символов и предметов, построенных из символов. Символы рассматриваются просто как типы распознаваемых объектов[1]). Для определенности мы можем представлять себе их конкретно как знаки на бумаге, или, точнее, как абстракции от нашего обращения со знаками на бумаге. (Теория доказательств должна быть в известной мере абстрактна, потому что она предполагает выполнимыми построения произвольно длинных последовательностей символов, хотя количество бумаги и чернил во всем мире ограничено.) Остальные предметы системы рассматриваются только в связи со способом их построения из символов[2]). По определению, этим исчерпывается роль формальной системы как предмета изучения метаматематики.

Метатеория принадлежит интуитивной, неформальной математике (если только метатеория не формализуется, в свою очередь, в некоторой метаметатеории, чего мы здесь рассматривать не будем). Метатеория будет выражаться на обычном языке с математическими символами, например метаматематическими переменными, вводимыми по мере надобности. Утверждения метатеории должны быть понимаемы. Ее выводы должны убеждать. Они должны состоять в интуитивных умозаключениях, а не в применении установленных правил, как выводы в формальной теории. Чтобы формализовать предметную теорию, были установлены правила, но теперь без всяких правил мы должны понимать, как эти правила действуют. Интуитивная математика необходима даже для определения формальной.

(Мы будем понимать это в том смысле, что для обоснования метаматематического умозаключения приходится обращаться в конечном счете к смыслу и очевидности, а не к какому-либо множеству условно принятых правил. На практике это не помешает нам систематизировать наши метаматематические результаты как теоремы или правила, которые можно будет затем применять квазиформально для сокращения содержательных рассуждений. Это—обычный процесс в содержательной математике. Иногда мы будем ссылаться даже на формально установленные принципы (интуиционистской) логики, причем формальные выводы этих принципов будут указывать метод, посредством которого рассуждение может быть проведено содержательно.)

В метатеории мы будем применять только те методы, которые формалисты называют *финитными* (finitary) и которые используют только интуитивно представляемые предметы и осуществимые процессы. (Мы переводим немецкое «finit» словом «финитный»[3]); русское «конечный»[4]) соответствует немецкому «endlich».) Мы никогда не будем рассматривать бесконечный класс как завершенное целое. Каждое доказательство существования будет давать, хотя бы неявно, метод для построения предмета, существование которого доказывается (ср. § 13)[5]).

Это ограничение требуется для той цели, с которой Гильберт ввел метаматематику. Предложения данной математической теории могут не иметь ясного смысла, а ее умозаключения могут не иметь в себе несомненной очевидности.

---

[1]) Т. е. таких объектов, любые два из которых могут быть распознаны либо как одинаковые, либо как различные.—*Прим. ред.*

[2]) См. об этом у А. А. Маркова [1951 с (пп. 5—15) или 1954 (гл. I)].—*Прим. ред.*

[3]) В подлиннике—«finitary».—*Прим. ред.*

[4]) В подлиннике—английское «finite».—*Прим. ред.*

[5]) Такая точка зрения не является единственно возможной. Метаматематику (теорию доказательств) можно рассматривать и как содержательную математическую дисциплину (подобную, например, алгебре или топологии), на методы которой не налагается никаких специфических ограничений (см. по этому поводу четвертый абзац следующей страницы).—*Прим. ред.*

Формализация сводит развитие теории к форме и правилу. Она устраняет всякую неопределенность в отношении того, что́ такое предложение теории или что́ такое доказательство в ней. И вопрос о том, не приводят ли к противоречию те методы, которые были формализованы, а также другие вопросы о действии этих методов должны изучаться в метатеории посредством методов, не подверженных тем же сомнениям, что и методы первоначальной теории.

Финитные методы имеют ту же природу, что и методы интуиционистской элементарной арифметики. Некоторые формалисты пытаются ограничить их еще у́же (Гильберт и Бернайс [1934, стр. 43] и Бернайс [1935, 1938]).

Рассмотрение последнего обстоятельства мы отложим до § 81. Чтобы защитить классическую математику от интуиционистов, нет надобности стремиться пользоваться меньшим, чем они разрешают. Но естественно придерживаться строго элементарных методов до тех пор, пока они достаточны. Все приведенные в § 13 примеры интуиционистских арифметических рассуждений мы будем считать финитными. Мы увидим, что вплоть до одной отдаленной стадии наших метаматематических исследований будет достаточно интуиционистских методов совсем элементарного рода. Окончательным критерием допустимости некоторого метода в метаматематике должна быть, конечно, его интуитивная убедительность.

(Некоторые авторы пользуются приставкой «мета» для обозначения языка или теории, в которой другой язык или теория делаются предметом изучения, не ограниченного финитными методами. В этой связи в противовес «предметному языку» («object language») употребляется также термин «синтаксис «syntax language»). Ср. Карнап [1934]; ср. также § 37. В этой книге мы пользуемся приставкой «мета» только тогда, когда методы финитны.)

Формальные системы, изучаемые в метаматематике, выбираются (обычно) так, что они служат моделями для частей содержательной математики и логики, с которыми мы уже более или менее знакомы, и получаются из этих частей путем формализации. Значения, которые связываются с символами, формулами и другими объектами данной формальной системы при рассмотрении ее как формализации содержательной теории, мы будем называть (*подразумеваемой*) *интерпретацией* этой системы (или ее символов, формул и т. п.). Другими словами, интерпретации символов, формул и т. п.—это предметы, предложения и т. п. содержательной теории, сопоставленные с ними посредством того метода, в силу которого система образует модель содержательной теории.

В случае формулы, представляющей идеальное предложение классической математики (§ 14), интерпретация не может быть совершенно интуитивной (или финитной), а должна состоять в чем-либо таком, что классически настроенный математик мыслит в терминах неформального (или не строго формализованного) построения классической математики, т. е. построения, возникшего исторически и общепринятого всюду, где процесс не формализуется сознательно в строгом смысле теории доказательств.

Интерпретация побуждает метаматематика выбрать ту или иную формальную систему, которая вводится посредством определений. Она руководит им при выборе относящихся к этой системе проблем, которыми он будет заниматься. Она может даже доставить ему ключи, существенные для решения этих проблем. Только в окончательных формулировках и доказательствах он (как метаматематик) должен отказаться от пользования интерпретацией.

Насколько стеснительно это ограничение? Метаматематика должна изучать формальную систему как систему символов и т. п., которые рассматриваются совершенно объективно. Это означает попросту, что символы и т. п. сами по себе являются окончательными предметами и не должны использоваться для обозначения чего-либо отличного от них самих. Метаматематик смотрит на них, а не через них и не на то, что за ними; таким образом, они являются предметами без интерпретации или значения.

Изучая эти предметы, метаматематика должна пользоваться своими собственными методами и орудиями. Последние можно выбирать как угодно, лишь бы они были финитны. Например, метаматематика может финитным способом употреблять натуральные числа. Если речь идет о формулах, допускающих (за пределами метаматематики) финитную интерпретацию, то можно внутри метаматематики определить свойства таких формальных объектов, которые (с точки зрения, внешней по отношению к метаматематике) эквивалентны интерпретациям этих формул. Таким образом, финитные интерпретации можно протащить через черный ход. Но метаматематика никоим образом не может иметь дело с нефинитными интерпретациями идеальных предложений классической математики.[1])

Чтобы в дальнейшем всюду было ясно, почему мы интересуемся формальными системами, которые мы рассматриваем, и каким образом они представляют собой формализации тех разделов логики и математики, с которыми содержательно мы уже знакомы, мы в этой книге будем указывать возможные интерпретации и пользоваться естественной терминологией, например, выражением «доказательство» для формальных выводов и «и» как названием символа &. Это необходимо для полного достижения нашей цели, хотя интерпретация сама по себе чужда метаматематике.

Подведем итоги. Если рассматривать картину полностью, то имеются три отдельные и отличные друг от друга «теории»: (a) содержательная (informal) теория, формализацией которой служит формальная система, (b) формальная система или предметная теория и (c) метатеория, в которой описывается и изучается эта формальная система.

Здесь (b), являющаяся формальной, служит не теорией в обычном смысле, а системой символов и предметов, построенных из символов (описанных в (c)), причем эта система является своего рода условным образом, или моделью, для (a). С другой стороны, (a) и (c), являющиеся содержательными, не имеют точно определенной структуры, какую имеет (b).

Далее, (c)—это теория, изучающая (b), и она должна применяться к (b), не взирая на (a), или, точнее, не взирая на интерпретацию (b) в терминах (a).

Кроме того, (c) ограничена употреблением только финитных методов, тогда как для (a), вообще говоря, не имеется такого ограничения.

---

[1]) См. предыдущее подстрочное примечание.—*Прим. ред.*

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Глава IV

ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА

§ 16. ФОРМАЛЬНЫЕ СИМВОЛЫ

Введем теперь некоторую конкретную формальную систему. Система, описываемая в этой главе, явится предметом рассмотрения в четырех последующих главах и в части дальнейших глав. Эта система представляет собой формализацию некоторой части классической элементарной теории чисел и включает необходимую для этого логику.

При построении системы мы использовали следующие работы: Гильберт и Аккерман [1928], Гильберт и Бернайс [1934, 1939], Генцен [1934—35], Бернайс [1936] и некоторые другие не столь явные источники.

Возможны два аспекта нашей задачи. Либо должна быть описана и исследована сама формальная система—финитными методами и без использования какой-нибудь ее интерпретации—это будет метаматематика; либо должна быть найдена интерпретация системы, в силу которой эта система окажется формализацией арифметики.

Возможен подход, при котором подчеркивается второй аспект, а именно, можно анализировать существующую неформальную математику, выбирая и фиксируя основные концепции, предположения и дедуктивные связи, и таким образом прийти в конце концов к формальной системе.

Здесь, однако, мы вместо этого будем с самого начала подчеркивать первый аспект. Формальная система будет введена сразу во всей ее законченной многосложности, и в метаматематических исследованиях мы только при случае будем обращать внимание на интерпретацию. Мы рекомендуем читателю сосредоточиться на внимательном изучении того, что представляет собой формальная система и как она исследуется. Интерпретация и основания, по которым при построении этой конкретной системы был сделан тот или иной выбор, будут постепенно выявляться по мере дальнейшего изложения.

Первый шаг при установлении формальной системы состоит в перечислении *формальных символов*. Перечень формальных символов структурно аналогичен алфавиту языка, хотя при интерпретации многие из формальных символов соответствуют скорее целым словам и фразам, чем отдельным буквам. Перечень формальных символов таков:

Логические символы: $\supset$ (влечет), & (и), $\vee$ (или), $\neg$ (не), $\forall$ (для всех), $\exists$ (существует). *Символы предикатов*: $=$ (равняется). *Символы функций*: $+$ (плюс), $\cdot$ (умножить на), $'$ (следующее за). *Индивидуальные символы*: 0 (нуль). *Переменные*: a, b, c, ... *Скобки*: (,).

Слова, указанные в скобках, могут применяться при чтении этих символов и предназначаются для предварительного указания интерпретаций, например, интерпретации логических символов как „логических констант". Переменные считаются пробегающими натуральные числа. Предполагается, что (потенциально, ср. § 13) имеется налицо бесконечный перечень или нумерация переменных.

Мы повторяем, что интерпретации не существенны при описании формальной системы как таковой. Должна иметься возможность рассматривать формальные символы как простые знаки, а не как символы, которые что-либо означают. Предполагается только, что мы умеем распознавать каждый формальный символ как тот же самый при каждом из его вхождений и отличать его от всех других формальных символов. В частности, предполагается, что мы умеем распознавать переменные.

Формальные символы образуют первую категорию формальных объектов. Исходя из них, мы получаем вторую категорию путем построения конечных последовательностей вхождений формальных символов. Эти последовательности мы будем называть *формальными выражениями*. Употребленное только что слово «вхождение» означает, что члены последовательности рассматриваются именно в качестве членов, т. е. подчеркивает то обстоятельство, что различные члены могут быть одним и тем же символом (что согласуется с нашим прежним употреблением термина „последовательность", см., например, §§ 1, 2). К формальным выражениям относятся также выражения, состоящие из единственного (вхождения) формального символа. Если не оговорено противное, пустая последовательность (не имеющая членов) не будет рассматриваться как формальное выражение. Например, 0, $(a)+(b)$, $(a)=(0)$ и ((0∀00= являются формальными выражениями. Последнее из них состоит из семи (вхождений) символов, т. е. имеет семь членов; третье, пятое и шестое вхождение символов в это формальное выражение являются каждое вхождением 0; различные входящие в него символы—это (, 0, ∀, =. Формальные выражения структурно аналогичны словам языка, но при интерпретации некоторые из них соответствуют целым предложениям, например $(a)=(0)$, а другие не имеют смысла, например ((0∀00=. Здесь снова наша терминология указывает на то обстоятельство, что для формальной системы как таковой выражения ничего не выражают, а являются только некоторыми распознаваемыми и различимыми объектами.

Мы будем также употреблять в качестве третьей категории формальных объектов конечные последовательности (вхождений) формальных выражений.

В рассуждениях о формальных объектах мы часто будем не выписывать их, а представлять (т. е. обозначать) вводимыми для этой цели буквами или же выражениями, содержащими уже введенные таким образом буквы. Например, буква «s» может представлять формальное выражение $(a)+(b)$, а буква «A»—представлять $(a)=(0)$. Читатель очень скоро встретит и другие примеры.

Употребляемые таким образом буквы и выражения являются не формальными символами и выражениями, а содержательными, или метаматематическими, символами и выражениями, которые играют роль названий формальных объектов. Здесь, по сравнению с обычным неформальным употреблением символизма, имеется новая черта—называемые объекты являются, в свою очередь, символами или объектами, построенными из символов. Мы должны, таким образом, проводить различие между символизмами двух родов—формальным символизмом, о котором мы говорим, и интуитивным или метаматематическим символизмом, которым мы говорим о другом символизме. Для каждого из этих символизмов мы будем пользоваться различными шрифтами (a, b, t, x, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ и a, b, t, x, A, B), что поможет нам непосредственно выражать это обстоятельство.

Использование символов и выражений в качестве названий предметов, о которых мы говорим, не является чем-либо новым; именно такова наша повседневная практика построения фразы о каком-либо предмете. Новым, однако, является другой процесс, которым мы отчасти пользуемся в метаматематике,—вставление самого предмета, т. е. экземпляра этого предмета, непосредственно в предложение. Хотя этим и нарушаются обычные грамматические каноны, в метаматематике это не приводит к недоразумениям, потому что в метаматематике нам приходится рассматривать формальные символы как не имеющие смысла, и потому формальные объекты не могут служить названиями для других объектов, а предложение, содержащее экземпляр формального объекта, может говорить только о самом этом формальном объекте.

Эти замечания относятся к нашей метаматематике. Далее в соответствующем пункте, посвященном интерпретации (читатель заметит его по заголовку), мы сможем придать формальным символам содержательное истолкование, рассматривая их как имеющие смысл.

При метаматематическом изучении формальных выражений мы будем пользоваться операцией *соединения* (или *сочленения*), посредством которой две или более последовательности формальных символов соединяются последовательно, образуя новую последовательность. Например, сочленение двух формальных выражений $((0\forall 00=$ и $(a)+(b)$ в указанном порядке образует новое формальное выражение $((0\forall 00=(a)+(b)$, а сочленение семи формальных выражений $($, $(a)+(b)$, $)$, $\cdot$, $($, $(c)'$, $)$ в указанном порядке образует новое формальное выражение $((a)+(b))\cdot((c)')$.

Если некоторые из подлежащих сочленению формальных выражений представлены метаматематическими буквами или выражениями, то последние могут употребляться в записи результата сочленения вместо представляемых ими формальных выражений. Например, если буква «s» представляет некоторое формальное выражение, то результат сочленения семи формальных выражений $($, s, $)$, $\cdot$, $($, $(c)'$, $)$ записывается так: «$(\mathrm{s})\cdot((c)')$». Здесь «$(\mathrm{s})\cdot((c)')$» есть метаматематическое выражение, представляющее формальное выражение, и это формальное выражение зависит от того, какое формальное выражение представляет буква «s». В частности, если s есть $(a)+(b)$, то $(\mathrm{s})\cdot((c)')$ есть $((a)+(b))\cdot((c)')$.

§ 17. ПРАВИЛА ОБРАЗОВАНИЯ

Мы теперь определим некоторые подкатегории формальных выражений посредством определений, аналогичных правилам синтаксиса в грамматике.

Сначала определим „терм", который аналогичен существительному в грамматике. Термы рассматриваемой системы все представляют натуральные числа, фиксированные или переменные. Определение формулируется с помощью метаматематических переменных «s» и «t» и описанной выше операции сочленения. Оно имеет вид индуктивного определения, что позволяет нам переходить от уже известных термов к дальнейшим.

1. 0 есть *терм*. 2. Каждая переменная есть *терм*. 3—5. Если s и t — *термы*, то $(\mathrm{s})+(\mathrm{t})$, $(\mathrm{s})\cdot(\mathrm{t})$ и $(\mathrm{s})'$ — *термы*. 6. Никаких других *термов*, кроме определенных согласно 1—5, нет.

Пример 1. В силу 1 и 2, термами являются 0, a, b и c. Поэтому, в силу 5, $(0)'$ и $(c)'$ являются термами. Снова в силу 5, $((0)')'$ есть терм, а в силу 3, $((c)')+(a)$ есть терм.

Теперь дадим определение „формулы" — аналога (повествовательного) предложения в грамматике.

1. Если s и t — термы, то $(\mathrm{s})=(\mathrm{t})$ — *формула*. 2—5. Если A и B — *формулы*, то $(\mathrm{A})\supset(\mathrm{B})$, $(\mathrm{A})\&(\mathrm{B})$, $(\mathrm{A})\vee(\mathrm{B})$ и $\neg(\mathrm{A})$ — *формулы*. 6—7. Если x — переменная, а A — *формула*, то $\forall\mathrm{x}(\mathrm{A})$ и $\exists\mathrm{x}(\mathrm{A})$ — *формулы*. 8. Никаких *формул*, кроме определенных согласно 1—7, нет.

Пример 2. Используя 1 и уже полученные примеры термов, убеждаемся в том, что $(a)=(b)$ и $(((c)')+(a))=(b)$ — формулы. Поэтому, в силу 5 и 7, $\neg((a)=(b))$ и $\exists c((((c)')+(a))=(b))$ — формулы. Наконец, в силу 2, формулой является

(A) $$(\exists c((((c)')+(a))=(b)))\supset(\neg((a)=(b))).$$

Из индуктивных определений терма и формулы следует, что каждый терм и каждая формула могут быть построены из 0 и переменных посредством ряда шагов, каждый из которых соответствует некоторому прямому пункту одного из этих определений (§ 6) и может быть назван *применением* этого пункта.

Каждый шаг, за исключением применений пунктов 1 или 2 из определения терма, производится следующим образом: вначале нам дано одно или два ранее полученных выражения. Заключаем данное выражение или каждое из данных выражений в скобки и вводим выражение одного из следующих десяти видов:

(B) $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$, $\forall x$, $\exists x$, $=$, $+$, $\cdot$, $'$,

где x — переменная. Выражение каждого из этих десяти видов мы будем называть *оператором*. В частности, $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$ являются *пропозициональными связками*, а операторы вида $\forall x$ или $\exists x$ суть *кванторы*, причем $\forall x$ — *квантор общности*, а $\exists x$ — *квантор существования*; операторы этих шести видов называются *логическими операторами*.

Данное выражение или пара выражений называются *областью действия* оператора в получающемся выражении. Прослеживая все построение терма или формулы, устанавливая очевидным образом соответствие между частями данного выражения или пары выражений и частями выражения получающегося на каждом шаге построения, мы приходим к определению *области действия* не только для оператора, введенного последним в законченный терм или формулу, но и для всякого оператора в этом терме или формуле.

Пример 3. В формуле (A) область действия первого вхождения оператора $=$ состоит из части $((c)')+(a)$ и первого вхождения b, а область действия $\exists c$ есть часть $(((c)')+(a))=(b)$.

Отметим теперь следующий факт, к строгому доказательству которого мы сейчас перейдем. В данном терме или данной формуле области действия операторов можно установить однозначно, исходя из расположения скобок. Другими словами, скобки дают возможность, коль скоро дан терм или формула как конечная последовательность формальных символов, восстановить все существенные детали его (ее) построения согласно индуктивным определениям терма и формулы.

Строгое доказательство этого факта дается леммой 2 (§ 7, пример 2) вместе со следующей леммой, которую можно доказать по индукции, исходя из индуктивных определений терма и формулы.

Лемма 4. *В каждом данном терме или формуле существует собственное спаривание скобок (число всех скобок равно $2n$, из них n левых скобок и n правых), такое, что область действия всякого оператора входит следующим образом:*

(a) *Для операторов, область действия которых состоит только из одного выражения, эта область действия непосредственно заключается в парные скобки и оператор ставится вне этой пары скобок вплотную к ней, т. е. непосредственно слева от левой скобки (в случае $\neg$, $\forall x$, $\exists x$) или непосредственно справа от правой скобки (в случае $'$).*

(b) *Для операторов, область действия которых состоит из двух выражений (именно $\supset$, $\&$, $\vee$, $=$, $+$, $\cdot$), каждое из этих двух выражений непосредственно заключается в парные скобки, а оператор ставится непосредственно между правой скобкой пары, в которую заключено левое выражение, и левой скобкой пары, в которую заключено правое выражение.*

Пример 3 (окончание). Рассмотренный пример формулы (A) содержит 22 скобки. По лемме 4, эти 22 скобки допускают собственное спаривание, которое находится из процесса построения формулы согласно определениям терма и формулы и которое указывает области действия операторов. Так как существует собственное спаривание, то, по лемме 2, это спаривание однозначно и поэтому может быть найдено посредством алгоритма из § 7, без предварительного знания построения формулы согласно определениям терма и формулы. Мы фактически уже проделали это в конце § 7, где те же самые 22 скобки рассматривались независимо от стоящих между ними символов. Пользуясь полученным разбиением на пары для этих 22 скобок, входящих в полную формулу (A), можно заметить, что область действия первого вхождения $=$ состоит из выражения, заключенного между скобками $({}^3_4\ )^{10}_4$, и выражения, заключенного между скобками $({}^{11}_5\ )^{12}_5$. Это согласуется с нашим прежним определением этой области действия. Аналогично, область действия $\exists c$ заключена между скобками $({}^2_6\ )^{13}_6$.

Лемма 3 из § 7, хотя она и не требуется для доказательства того, что области действия могут быть найдены по распределению скобок, полезна при рассуждениях об областях действий в частях и во всем выражении (терме или формуле). Например, если M, N и A — формулы и A входит в $(M) \supset (N)$ как (связная) часть, отличная от всей формулы, то можно заключить, что эта часть (или каждая такая часть) является частью M или частью N.

При выборе наших определений терма и формулы мы, конечно, вводили скобки ради вышеизложенной цели, однозначного определения областей действия. Ясно, однако, что обычно в определениях вводят больше скобок, чем строго необходимо для этой цели. Ничего не меняя в определениях, мы можем согласиться опускать лишние скобки для сокращения записи термов и формул или представляющих их метаматематических выражений.

Возможности в этом направлении расширяются употреблением соглашений, аналогичных тем, которые приняты в алгебре, где «$a \cdot b + c$» понимается в смысле $(a \cdot b) + c$. Мы будем говорить в этом случае, что $+$ имеет *ранг*, более высокий, чем $\cdot$, и припишем нашим операторам ранги, понижающиеся в том порядке, в котором мы их перечислили выше в (B). Чтобы восстановить любые скобки, опущенные при сокращении терма или формулы, можно, выбирая последовательно каждый раз из всех присутствующих операторов тот, который раньше других встречается в списке (B), т. е. оператор наивысшего ранга, придавать ему наибольшую область действия, совместимую с требованием, чтобы все выражение было термом или формулой.

Мы не всегда будем опускать максимальное число скобок, допускаемое нашим соглашением, стремясь обеспечить максимальное удобство для чтения. (С этой целью мы будем также иногда заменять круглые скобки на квадратные или фигурные.)

Пример 4. Восстановление скобок в «$A \supset B \vee C \& D$» дает последовательно «$A \supset (B \vee C \& D)$», «$A \supset ((B \vee C) \& D)$», «$(A) \supset (((B) \vee (C)) \& (D))$». Рассмотренный пример формулы (A) сокращенно записывается в виде

$$\text{(A}') \qquad \exists c\,(c' + a = b) \supset \neg\, a = b.$$

Другого рода сокращения дает нам введение нового символа вместе с методом обратного перевода любого выражения, содержащего новый символ, в выражение, не содержащее последнего. Например, термы $(0)'$, $((0)')'$, $(((0)')')'$ ... мы сокращаем соответственно в «1», «2», «3», ... ; формулу $\neg\, a = b$ сокращаем в «$a \neq b$», а формулу $\exists c\,(c' + a = b)$ сокращаем в «$a < b$». Рассмотренная формула (A) может быть при этом записана так:

$$\text{(A}'') \qquad a < b \supset a \neq b.$$

Общее правило для сокращения «$\neq$» позволяет нам писать «$s \neq t$» как сокращение для $\neg s = t$, где s и t — термы. Общее правило для сокращения «$<$» позволяет нам писать «$s < t$» как сокращение для $\exists x (x' + s = t)$, где x — переменная, а s и t — термы, не содержащие x. При восстановлении сокращения, если оно было связано с опусканием переменной, как в случае «$<$», имеется произвол в отношении выбора подлежащей восстановлению переменной. Так, при восстановлении «$s < t$» мы можем выбрать в качестве x любую переменную, не содержащуюся в s и t. Этот произвол является мало существенным, поскольку утверждения, которые мы собираемся делать о сокращенной формуле, имеют место независимо от выбора допустимой переменной.

Мы будем считать, что все эти сокращения относятся только к изложению метаматематики. Это соответствует нашим целям, и таким путем мы сохраняем теоретически более простые основные определения, посредством которых устанавливается формальная система. Метаматематические утверждения о термах и формулах системы должны поэтому рассматриваться как относящиеся к несокращенным выражениям в буквальном смысле определений, какого бы рода стенографией мы ни пользовались при записи этих утверждений.

§ 18. СВОБОДНЫЕ И СВЯЗАННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Вхождение переменной x в формулу A называется *связанным* (или вхождением в качестве *связанной переменной*), если оно является вхождением в квантор $\forall x$ или $\exists x$ или в область действия квантора $\forall x$ или $\exists x$ (с тем же самым x); в противном случае вхождение называется *свободным* (или вхождением в качестве *свободной переменной*).

Пример 1. В $\exists c (c' + a = b) \supset \neg a = b$, оба вхождения a и оба вхождения b — свободные, а оба вхождения c — связанные. В $\exists c (c' + a = b) \supset \neg a = b + c$ первые два вхождения c — связанные, а третье — свободное. В $\exists c (\exists c (c' + a = b) \supset \neg a = b + c)$ все вхождения c — связанные.

Мы будем говорить также, что любое вхождение переменной x в терм t является *свободным*, как это будет следовать из приведенного определения, если заменить в нем слова «формула A» на «терм t». Различие между свободным и связанным вхождением переменной всегда связано с термом или формулой, для которых (в каждом случае) рассматривается это вхождение.

Пример 2. Третье вхождение c в $\exists c (\exists c (c' + a = b) \supset \neg a = b + c)$ является свободным, если его рассматривать как вхождение в саму эту часть c, или в часть c', или в часть $c' + a$, или в часть $c' + a = b$, и связанным, если его рассматривать как вхождение в часть $\exists c (c' + a = b)$, или в часть $\exists c (c' + a = b) \supset \neg a = b + c$, или во всю формулу.

Если переменная x входит в качестве свободной переменной (коротко: входит свободно) в A, то говорят, что x является *свободной переменной* выражения A, или что A *содержит* x *в качестве свободной переменной* (коротко: A *содержит свободно* x); аналогично для связанных переменных.

Пример 3. Свободные переменные в $\exists c (c' + a = b) \supset \neg a = b + c$ суть a, b и c, а единственная связанная переменная есть c.

Связанное вхождение переменной x в формулу A связано *тем* вхождением квантора $\forall x$ или $\exists x$ (с тем же самым x), в области действия которого оно встречается и которое имеет при этом наименьшую область действия (короче, посредством самого внутреннего квантора, в области действия которого оно встречается), или в случае, когда оно является вхождением в квантор $\forall x$ или $\exists x$, самим этим квантором (говорят также, что квантор *связывает* эту переменную).

Пример 4. В $\exists c (\exists c (c' + a = b) \supset \neg\, a = b + c)$ первое и четвертое вхождения c связаны первым квантором $\exists c$, а второе и третье вхождения c — вторым квантором $\exists c$.

Связанное вхождение переменной в формулу связано тем квантором, введение которого (при построении этой формулы, согласно определениям терма и формулы) впервые превратило это вхождение из свободного в связанное (или, если это переменная в кванторе, — тем квантором, в котором она вводится).

Пример 5. Сравните пример 4 с примером 2.

Сделаем теперь несколько предварительных замечаний об интерпретации свободных и связанных переменных (называемых иногда „действительными“ и „кажущимися“ переменными). Эти замечания, конечно, не являются частью метаматематики, но они должны способствовать усвоению метаматематических различий. Выражение, содержащее свободную переменную, представляет величину или предложение, зависящее от значения этой переменной. Выражение, содержащее связанную переменную, представляет результат операции, примененной к области изменения этой переменной. Наши связанные переменные относятся к логическим операциям квантификации, но имеются примеры с операциями другого рода, обычными в математике. В следующих примерах n и y свободны, а i и x связаны:

$$\text{(A)} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad \lim_{x \to 0} f(x, y), \qquad \int_{-y}^{y} f(x, y)\, dx.$$

В следующем примере вхождение t в качестве верхнего предела интегрирования свободно, а вхождения в подинтегральное выражение — связаны:

$$\text{(B)} \qquad \int_{0}^{t} f(t)\, dt.$$

Возвращаясь к интерпретации, можно отметить некоторые характерные различия, которым она подвергает способ пользования обоими родами переменных в неформальной математике. Связанная переменная является частью описания, выражающего результат операции, выполненной над областью изменения переменной, и поэтому можно (соблюдая некоторые предосторожности), не меняя смысла, заменить эту переменную на любую другую, имеющую ту же самую область изменения. Например,

$$\text{(C)} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j, \qquad \lim_{z \to 0} f(z, y), \qquad \int_{-y}^{y} f(t, y)\, dt$$

означают (обычно) то же самое, что и соответствующие выражения (A), приведенные выше (но $\lim_{y \to 0} f(y, y)$ не совпадает (обычно) с $\lim_{x \to 0} f(x, y)$). Если в некоторое выражение подставить вместо свободной переменной выражение, представляющее постоянный или переменный предмет из области ее изменения, мы (обычно) получим осмысленный результат, но эта же подстановка, примененная к связанной переменной, может привести к бессмыслице. Например (подстановкой в (A)), получаем (обычно) осмысленные выражения

$$\text{(D)} \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i, \qquad \lim_{x\to 0} f(x, 2), \qquad \int_{-z}^{z} f(x, z)\,dx,$$

но этого нельзя сказать о

$$\text{(E)} \qquad \sum_{5=1}^{n} a_5, \qquad \lim_{2\to 0} f(2, y), \qquad \int_{-z}^{z} f(0, z)\,d0.$$

Если одна и та же переменная входит в выражение и как свободная, и как связанная, то представляемая этим выражением величина зависит только от значения этой переменной в ее свободных вхождениях. Таким образом, интеграл (B) является функцией от t, значение которой для $t=3$ есть

$$\text{(F)} \qquad \int_{0}^{3} f(t)\,dt, \quad \text{но не} \quad \int_{0}^{3} f(3)\,d3.$$

Подстановка. При формулировке метаматематических определений следующего параграфа мы используем операцию подстановки, которую мы определим следующим образом. *Подстановка терма* t *вместо* переменной x *в* (или, иначе, *повсюду в*) терм или формулу A состоит в одновременной замене каждого свободного вхождения x в A на вхождение t. Чтобы описать это в терминах сочленения, обозначим через n число свободных вхождений x в A ($n \geqslant 0$) и запишем A в виде «$\mathrm{A_0 x A_1 x} \ldots \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{x A}_n$», указывающем эти вхождения (где $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{n-1}, \mathrm{A}_n$ — части, возможно пустые, не содержащие вхождений x, свободных относительно всего A, и все указанные n вхождений x свободны). Тогда результатом подстановки t вместо x в A будет $\mathrm{A_0 t A_1 t} \ldots \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{t A}_n$.

Для представления результата подстановки будет полезно одно компактное метаматематическое обозначение. Если подстановка производится вместо x, введем сначала для субституэнда[1]) некоторое составное выражение, например «A(x)», показывающее его зависимость от x, согласно способу обозначения для функций в математике (§ 10). Результат подстановки t вместо x в A(x) записывается тогда в виде «A(t)».

Пример 6. Пусть x есть c, а A(x), или A(c), есть $\exists c(c'+a=b) \supset \neg\, a=b+c$. Тогда A(0) есть $\exists c(c'+a=b) \supset \neg\, a=b+0$, а A($a$) есть $\exists c(c'+a=b) \supset \neg\, a=b+a$.

Пример 7. Пусть x есть a, а A(x) есть $a+c=a$. Тогда A(0) есть $0+c=0$, а A(b) есть $b+c=b$.

Подстановка, которая дает A(t), всегда должна производиться вместо первоначальной переменной x в первоначальной формуле A(x), т. е. вместо той переменной и в ту формулу, для которых предварительно было введено обозначение «A(x)».

[1]) Т. е. выражения, в которое производится подстановка. Употребление термина «субституэнд» в данной книге отличается от принятого у Гильберта и Бернайса [1939] дополнение I, где рассматриваются подстановки вместо формульных переменных (ср. ниже стр. 162) и субституэндом называется выражение, которое подставляется вместо данной переменной. — *Прим. перев.*

Пример 7 (окончание). Для указанных выше x и A(x), A(c) есть $c+c=c$. Если подставить b вместо c в A(c), то получится $b+b=b$. Это не совпадает с A(b), которое прежде мы правильно получили посредством подстановки b вместо a в A(a), т. е. вместо первоначального x в первоначальное A(x). (Это же затруднение может встретиться при неправильном употреблении обозначений для функции в неформальной математике.)

Мы не потребовали, чтобы переменная x действительно входила в A(x) в качестве свободной переменной. Если x не является свободной переменной A(x), то результат подстановки A(t) есть само первоначальное выражение A(x).

Аналогично мы определим подстановку, произведенную одновременно вместо нескольких различных переменных; мы будем пользоваться при этом аналогичными обозначениями, например «A($x_1, \ldots, x_n$)» для субституэнда и «A($t_1, \ldots, t_n$)» для результата.

В дальнейшем мы часто будем вводить составные обозначения, например «A(x)» или «A($x_1, \ldots, x_n$)» вместо «A», когда нас будет интересовать зависимость A от переменной x или переменных $x_1, \ldots, x_n$, независимо от того, надо ли нам будет или нет делать подстановку. Например, обычно мы обозначаем формулу «A(x)» вместо «A», если собираемся употребить ее в $\forall$xA(x) (читается «для всех x, A от x») или в $\exists$xA(x) (читается «существует некоторое x, такое, что A от x» или, кратко, «существует x, A от x»). Подчеркнем, что при обозначении «A(x)» (или «A($x_1, \ldots, x_n$)») не подразумевается, что x (или каждое из $x_1, \ldots, x_n$) обязательно входит свободно в обозначенную формулу.

Предварительные замечания об интерпретации проливают свет на то, почему при нашем выборе определения для метаматематической операции подстановки последняя применяется только к свободным вхождениям переменных.

Далее, мы будем говорить, что терм t *свободен при свободных вхождениях* переменной x в формулу A(x) (или, что t *свободен на местах подстановки вместо* x *в* A(x), или, короче, что t *свободен для* x *в* A(x)), если никакое свободное вхождение x в A(x) не входит в область действия какого-нибудь квантора $\forall$y или $\exists$y, где y — переменная из t (т. е. входящая в t).

Пример 8. Термы d, $d+0'$ и $a \cdot d$ свободны для a в первой и не свободны во второй из следующих формул:

$$(\mathrm{I}) \qquad \exists c(c'+a=b)\,\&\,\neg d=0, \qquad \exists d(d'+a=b)\,\&\,\neg d=0.$$

Согласно этому определению, если t свободен для x в A(x) — и только в этом случае — при подстановке t вместо x в A(x) терм t не возникнет в A(x) ни на каком месте, где какая-нибудь (свободная) переменная y из t вошла бы в качестве связанной переменной в результат A(t).

Пример 8 (окончание). Подстановка $d+0'$ вместо a в (I) дает

$$(\mathrm{II}) \qquad \exists c(c'+(d+0')=b)\,\&\,\neg d=0, \qquad \exists d(d'+(d+0')=b)\,\&\,\neg d=0$$

соответственно. В первом случае введенное подстановкой вхождение d из $d+0'$ остается свободным во всей формуле, а во втором случае это не имеет места.

Мы будем говорить, что подстановка t вместо x в A(x) *свободна*, если t свободно для x в A(x). Уже при поверхностном взгляде на указанную выше интерпретацию видно, что подстановка не годится, если она не свободна.

Обе формулы в (I) означают одно и то же, но в (II) это не так.

В качестве содержательного примера рассмотрим второе выражение из (A) или (C). Оно означает некоторую функцию от y, назовем ее

(G) $$f(y)=\lim_{x\to 0} f(x, y)=\lim_{z\to 0} f(z, y).$$

Значение $f(y)$ для $y=z$ правильно записывается в виде

(H) $$f(z)=\lim_{x\to 0} f(x, z),$$

но не в виде $f(z)=\lim\limits_{z\to 0} f(z, z)$.

Пример 9. Для иллюстрации обращения с терминологией и обозначениями, введенными в этом параграфе, предположим, что x — переменная (т. е. «x» обозначает переменную), A(x) — формула (т. е. «A(x)» обозначает формулу), а b есть (т. е. «b» обозначает ...) такая переменная, что (i) b свободна для x в A(x) и (ii) b не входит свободно в A(x) (или b есть x). Согласно нашим обозначениям для подстановки, поскольку обозначение A(x) было введено для «x» и «A(x)», (iii) A(b) есть (по определению) результат подстановки b вместо (свободных вхождений) x в A(x). В силу (i), вхождения b в A(b), введенные этой подстановкой, являются свободными. В силу (ii), других свободных вхождений b в A(b) нет. Итак, свободные вхождения b в A(b) — это в точности вхождения, введенные этой подстановкой. Поэтому (обратно к (i)—(iii)) (iv) x свободно для b в A(b), (v) x не входит свободно в A(b) (или x есть b), и, кроме того, (vi) A(x) является результатом подстановки x вместо (свободных вхождений) b в A(b). Например,

x, A(x), b, A(b)

могут быть соответственно

$$c,\ \exists c(c'+a=b)\supset\neg a=b+c,\ \ d,\ \exists c(c'+a=b)\supset\neg a=b+d.$$

§ 19. ПРАВИЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В этом параграфе мы введем дальнейшие метаматематические определения (называемые *дедуктивными правилами*, или *правилами преобразования*), которые превращают формальную систему в дедуктивную теорию. Чтобы подчеркнуть аналогию с содержательной теорией, мы начнем с перечня «постулатов»; однако для метаматематики они являются не постулатами в смысле допущений, каковыми они действительно не могут быть, поскольку официально они не имеют смысла, а только формулами и формами (или схемами), к которым мы будем прибегать, давая определения.

Прежде чем приводить этот перечень постулатов, мы рассмотрим типы постулатов, которые в нем встречаются. Простейший тип есть „аксиома“ — примером этого типа служит «$\neg a'=0$». Это — формула нашей формальной системы. Затем имеется „форма аксиом“ или „схема аксиом“, примером которой служит «B⊃A∨B». Это — метаматематическое выражение, которое дает конкретную аксиому каждый раз, когда выбраны формулы, представляемые метаматематическими буквами «A» и «B». Например, если A есть $a'=0$, а B есть $\neg a'=0$, получаем аксиому $\neg a'=0\supset a'=0\vee\neg a'=0$. Таким образом, эта схема аксиом является метаматематическим методом для описания бесконечного класса аксиом, имеющих общую форму.

Нам нужны также постулаты другого рода, формализующие операции вывода дальнейших теорем из аксиом. Это — „правила вывода“, например:

$$\frac{A,\ A\supset B}{B}.$$

Это — схема, содержащая три метаматематических выражения «A», «$A \supset B$» и «B», которые представляют формулы, коль скоро выбраны формулы, представленные метаматематическими буквами «A» и «B». Смысл этого правила состоит в том, что формула, представленная выражением, написанным под чертой, может быть „выведена“ из двух формул, представленных двумя выражениями, написанными над чертой. Например, если в качестве A взята формула $\neg a' = 0$, а в качестве B — формула $a' = 0 \vee \neg a' = 0$, то наше правило позволяет из $\neg a' = 0$ и $\neg a' = 0 \supset a' = 0 \vee \neg a' = 0$ вывести $a' = 0 \vee \neg a' = 0$. Так как $\neg a' = 0$ и $\neg a' = 0 \supset a' = 0 \vee \neg a' = 0$ являются (как мы уже видели) аксиомами, то $a' = 0 \vee \neg a' = 0$ будет дальнейшей „формальной теоремой“. (По нашей терминологии аксиомы включаются в число теорем.)

Мы рассмотрим теперь полный перечень постулатов, а затем дадим определения, устанавливающие дедуктивную структуру формальной системы с помощью ссылок на этот перечень. Читатель убедится в том, что в результате этого ряда определений будет определен подкласс формул, называемый классом „доказуемых формул“ или „формальных теорем“.

Постулаты формальной системы

Dramatis personae[1]). В постулатах 1 — 8 A, B и C — формулы. В постулатах 9 — 13 x — переменная, A(x) — формула, C — формула, не содержащая свободно x, а t — терм, свободный для x в A(x).

Группа A. Постулаты исчисления предикатов.

Группа A1. Постулаты исчисления высказываний.

1a.	$A \supset (B \supset A)$.	2.	$\dfrac{A,\ A \supset B}{B}$.
1b.	$(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$.	4a.	$A \& B \supset A$.
3.	$A \supset (B \supset A \& B)$.	4b.	$A \& B \supset B$.
5a.	$A \supset A \vee B$.	6.	$(A \supset C) \supset ((B \supset C)$
5b.	$B \supset A \vee B$.		$\supset (A \vee B \supset C))$.
7.	$(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$.	8°.	$\neg\neg A \supset A$.

Группа A2. (Дополнительные) Постулаты исчисления предикатов.

9.	$\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$.	10.	$\forall x A(x) \supset A(t)$.
11.	$A(t) \supset \exists x A(x)$.	12.	$\dfrac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$.

Группа B. (Дополнительные) Постулаты арифметики.

13.	$A(0) \& \forall x (A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$.		
14.	$a' = b' \supset a = b$.	15.	$\neg a' = 0$.
16.	$a = b \supset (a = c \supset b = c)$.	17.	$a = b \supset a' = b'$.
18.	$a + 0 = a$.	19.	$a + b' = (a + b)'$.
20.	$a \cdot 0 = 0$.	21.	$a \cdot b' = a \cdot b + a$.

(Причина, по которой при постулате 8 поставлен «°», будет выяснена в § 23.)

[1]) Действующие лица (лат.).—*Прим. перев.*

Легко проверить, что 14—21 являются формулами и что 1—13 (или в случаях 2, 9 и 12 выражения, стоящие над и под чертой, являются формулами для каждого выбора A, B, C, или x, A(x), C, t, подчиненного условиям, приведенным в Dramatis personae.

Класс „аксиом“ определяется следующим образом. Формула является *аксиомой*, если она имеет одну из форм 1a, 1b, 3—8, 10, 11, 13 или если она есть одна из формул 14—21.

Отношение „непосредственного следования“ определяется следующим образом. Формула является *непосредственным следствием* (из) одной или двух других формул, если она имеет форму, указанную под чертой, тогда как другая(ие) имеет(ют) форму(ы), указанную(ые) над чертой в 2, 9 или 12.

Это—основное метаматематическое определение, соответствующее постулатам 2, 9 и 12, но мы сформулируем его еще в расширенной терминологии, учитывающей процесс его применения. Постулаты 2, 9 и 12 мы называем *правилами вывода*. Для любого (фиксированного) выбора A и B или x, A(x) и C, подчиненного отмеченным выше условиям, формула(ы), указанная(ые) над чертой, является *посылкой* (являются *первой* и *второй посылкой* соответственно), а формула, указанная под чертой, является *заключением* (для) *применения* правила (или (*формального*) *вывода* по этому правилу). Заключение является *непосредственным следствием* из посылки (посылок) (по рассматриваемому правилу).

Карнап [1934] объединяет оба рода постулатов под общим названием „правил преобразования“, рассматривая аксиомы как результат преобразования с числом посылок, равным нулю.

Определение „(формально) доказуемой формулы“ или „(формальной) теоремы“ может быть теперь дано индуктивно следующим образом:

1. Если D—аксиома, то D *доказуема*. 2. Если E *доказуема*, а D—непосредственное следствие из E, то D *доказуема*. 3. Если E и F *доказуемы*, а D—непосредственное следствие из E и F, то D *доказуема*. 4. Формула является *доказуемой* только в силу 1—3.

Это понятие может быть получено также с помощью промежуточной концепции „формального доказательства“ следующим образом. (*Формальное*) *доказательство* есть (непустая) конечная последовательность (вхождений) формул такая, что каждая формула этой последовательности является или аксиомой или непосредственным следствием из предыдущих формул последовательности. Доказательство называется доказательством *своей последней формулы*, и эта формула называется (*формально*) *доказуемой*, или (*формальной*) *теоремой*.

Пример 1. Приведенная ниже последовательность из 17 формул является доказательством формулы $a=a$. Формула 1 есть аксиома 16. Формула 2 есть аксиома в силу применения схемы аксиомы 1a, при котором A и B схемы оба являются $0=0$; а формула 3—в силу применения, при котором A есть $a=b\supset(a=c\supset b=c)$ и B есть $0=0\supset(0=0\supset 0=0)$. Формула 4 есть непосредственное следствие из формул 1 и 3 как первой и второй посылки соответственно, в силу применения правила 2, при котором A есть $a=b\supset$ $\supset(a=b\supset b=c)$, а B есть $[0=0\supset(0=0\supset 0=0)]\supset[a=b\supset(a=c\supset b=c)]$. Фор-

[1]) Термин «выражение» означает здесь «формальное выражение» в смысле стр. 68, и так как запятая не является формальным символом, то «A, A$\supset$B» ни при каком выборе формул для букв A и B не является выражением; значит оборот «выражение, стоящее в 2 над чертой» может относиться только к A и A$\supset$B (молчаливо предполагается, что этот оборот не относится к другим частям только что названных выражений).—*Прим. перев.*

мула 5 есть непосредственное следствие из формулы 4 в силу применения правила 9 (причем x есть c), A(x) есть $a=b\supset(a=c\supset b=c)$, а C есть $0=0\supset(0=0\supset 0=0)$ (заметим, что последняя формула не содержит свободно x). Формула 9 есть аксиома в силу применения схемы аксиом 10, при котором x есть a, A(x) есть $\forall b\forall c[a=b\supset(a=c\supset b=c)]$, а t есть терм $a+0$ (который, заметим, свободен для x в A(x)). A(t), в силу нашего обозначения для подстановки (§ 18), есть результат подстановки t вместо (свободных вхождений) x в A(x), т. е. в данном случае A(t) есть

$\forall b\forall c[a+0=b\supset(a+0=c\supset b=c)]$.

1. $a=b\supset(a=c\supset b=c)$ — аксиома 16.
2. $0=0\supset(0=0\supset 0=0)$ — схема аксиом 1a.
3. $\{a=b\supset(a=c\supset b=c)\}\supset\{[0=0\supset(0=0\supset 0=0)]\supset$ $[a=b\supset(a=c)\supset b=c)]\}$ — схема аксиом 1a.
4. $[0=0\supset(0=0\supset 0=0)]\supset[a=b\supset(a=c\supset b=c)]$ — правило 2, 1, 3.
5. $[0=0\supset(0=0\supset 0=0)]\supset\forall c[a=b\supset(a=c\supset b=c)]$ — правило 9, 4.
6. $[0=0\supset(0=0\supset 0=0)]\supset\forall b\forall c[a=b\supset(a=c\supset b=c)]$ — правило 9, 5.
7. $[0=0\supset(0=0\supset 0=0)]\supset\forall a\forall b\forall c[a=b\supset(a=c\supset b=c)]$ — правило 9, 6.
8. $\forall a\forall b\forall c[a=b\supset(a=c\supset b=c)]$ — правило 2, 2, 7.
9. $\forall a\forall b\forall c[a=b\supset(a=c\supset b=c)]\supset\forall b\forall c[a+0=b\supset(a+0=c\supset b=c)]$ — схема аксиом 10.
10. $\forall b\forall c[a+0=b\supset(a+0=c\supset b=c)]$ — правило 2, 8, 9.
11. $\forall b\forall c[a+0=b\supset(a+0=c\supset b=c)]\supset\forall c[a+0=a\supset(a+0=c\supset a=c)]$ — схема аксиом 10.
12. $\forall c[a+0=a\supset(a+0=c\supset a=c)]$ — правило 2, 10, 11.
13. $\forall c[a+0=a\supset(a+0=c\supset a=c)]\supset[a+0=a\supset(a+0=a\supset a=a)]$ — схема аксиом 10.
14. $a+0=a\supset(a+0=a\supset a=a)$ — правило 2, 12, 13.
15. $a+0=a$ — аксиома 18.
16. $a+0=a\supset a=a$ — правило 2, 15, 14.
17. $a=a$ — правило 2, 15, 16.

Пример 2. Пусть A — любая формула. Тогда приведенная ниже последовательность из пяти формул является доказательством формулы $A\supset A$. (Другими словами, то, что мы выпишем ниже, является „схемой доказательств", которая превращается в конкретное доказательство при подстановке любой конкретной формулы, например $0=0$, вместо метаматематической буквы «A», а последнее выражение «$A\supset A$» этой схемы является соответственно „схемой теорем".) Формула 1 есть аксиома в силу применения схемы аксиом 1a, при котором в качестве букв A и B схемы берется формула A данного примера. Формула 2 есть аксиома в силу применения схемы аксиом 1b, при котором в качестве букв A и C схемы берется формула A этого примера, а в качестве B схемы — $A\supset A$ данного примера. Формула 3 есть непосредственное следствие из формул 1 и 2 как первой и второй посылки соответственно в силу применения правила 2, при котором в качестве A правила берется $A\supset(A\supset A)$ данного примера, а в качестве B правила — $[A\supset((A\supset A)\supset A)]\supset[A\supset A]$ данного примера.

1. $A \supset (A \supset A)$ — схема аксиом 1a.
2. $\{A \supset (A \supset A)\} \supset \{[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]\}$ — схема аксиом 1b.

(1) 3. $[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]$ — правило 2, 1, 2.

4. $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ — схема аксиом 1a.
5. $A \supset A$ — правило 2, 4, 3.

Термины: *доказательство*, *теорема* и т. п., определенные для формальной системы (т. е. формальное доказательство, формальная теорема и т. п.), следует четко отличать от этих терминов в их обычном содержательном смысле, которым мы пользуемся при изложении метаматематики. Формальная теорема — это формула (т. е. определенного рода конечная последовательность знаков), и ее формальное доказательство — это определенного рода конечная последовательность формул. А метаматематическая теорема — это осмысленное утверждение о формальных объектах, и ее доказательство — это интуитивное обоснование истинности этого утверждения.

Мы рассмотрели три категории формальных объектов (§ 16), но, если понадобится, мы будем вводить при их изучении и другие, коль скоро мы будем иметь дело с финитными методами. Помимо этого, несколько иное расширение нашего предмета изучения имеет место, когда мы переходим к исследованию вида метаматематических определений и теорем. Если бы мы пожелали при этом быть пунктуальными, то пришлось бы построить метаметаматематику. Однако такое положение дел является обычным в других областях неформальной математики, и мы будем рассматривать такие исследования как случайные объяснения, иногда помогающие быстро понять, что делается в метаматематике, а иногда позволяющие нам сократить формулировки метаматематических теорем, которые могли бы быть сформулированы и без них.

Глава V

ФОРМАЛЬНЫЙ ВЫВОД

§ 20. ФОРМАЛЬНЫЙ ВЫВОД

Формальные доказательства даже совсем элементарных теорем оказываются обычно длинными. В расплату за разложение логической дедукции на простые шаги мы вынуждены пользоваться большим числом этих шагов.

Формализация теории имеет целью дать явное определение понятия доказательства в этой теории. После того, как это сделано, нет надобности обращаться каждый раз прямо к определению. Установление формальной доказуемости формул можно значительно упростить, пользуясь метаматематическими теоремами, относящимися к существованию формальных доказательств. Если доказательства этих теорем имеют финитный характер, присущий, как предполагается, метаматематике, то они, хотя бы неявно, указывают методы получения соответствующих формальных доказательств[1]). Употребление метаматематических теорем приводит тогда к сокращению изложения формальных доказательств, часто весьма значительному.

Простейшие из таких метаматематических теорем мы будем называть *выводимыми правилами*; они выражают принципы, которые можно назвать выводимыми из постулированных правил, так как имеются доказательства того, что употребление их в качестве дополнительных средств вывода не увеличивает класса выводимых формул. Мы будем стремиться с помощью выводимых правил приблизить, насколько возможно, методы установления формальной выводимости к содержательным методам формализуемой теории.

При построении формальной системы мы дали выводам простейшую возможную структуру—каждый вывод состоит из единичной последовательности формул. Некоторые из наших выводимых правил, называемые «прямыми правилами», будут служить для сокращения целых отрезков такой последовательности; при построении выводов этими отрезками можно будет пользоваться в качестве, так сказать, «готовых строительных блоков».

Но, кроме того, в математической практике употребительны доказательства более сложной структуры, использующие „вспомогательный вывод", т. е. вывод

[1]) Эта фраза способна создать у читателя впечатление, что теорема о существовании формального доказательства, доказанная нефинитным способом, может и не дава ь метода получения искомого формального доказательства. Однако это не так (если только вообще допускаются нефинитные способы доказательства теорем; если они не допускаются, то не о чем и говорить). В самом деле, пусть теорема о существовании формального доказательства формулы E доказана (неважно, каким способом). Будем в каком-либо определенном порядке строить всевозможные конечные последовательности (вхождений) формальных выражений. Построив каждую такую последовательность, проверяем, не является ли она последовательностью формул, и если да, то не является ли она доказательством формулы E. Если мы признали теорему о существовании формального доказательства формулы E доказанной, то мы должны признать доказанным также и то, что в процессе построения всевозможных конечных последовательностей (вхождений) формальных выражений мы непременно дойдем до такой конечной последовательности, которая является формальным доказательством формулы E.—*Прим. ред.*

при допущениях, служащих для проведения рассуждения, от которых в дальнейшем освобождаются. Например, вспомогательный вывод используется при доказательствах от противного—и с меньшей необходимостью в тех случаях, когда мы пользуемся условием теоремы наравне с доказанными предложениями, чтобы вывести заключение. Эта процедура производится согласно другим выводимым правилам, называемым «правилами вспомогательного вывода».

Введем теперь, с помощью метаматематического определения понятие „формальной выводимости при допущениях". Если дан перечень $D_1, \ldots, D_l$ ($l \geqslant 0$) (вхождений) формул, то непустая конечная последовательность (вхождений) формул называется (*формальным*) *выводом из исходных формул* $D_1, \ldots, D_l$, если каждая формула этой последовательности является или одной из формул $D_1, \ldots, D_l$, или аксиомой, или непосредственным следствием из предыдущих формул последовательности. Вывод называется выводом *своей последней* формулы E, и эта формула называется *выводимой из* исходных формул (обозначается $D_1, \ldots, D_l \vdash E$), а также *заключением* (или *конечной формулой*) вывода[1]). (Символ «$\vdash$» можно читать «дает» («yields»).)

Эти определения вывода и выводимости являются обобщениями определений доказательства и доказуемости (которые содержатся в них как случай $l=0$) и позволяют пользоваться любыми формулами $D_1, \ldots, D_l$, называемыми исходными формулами вывода, временно наравне с аксиомами.

Пример 1. Пусть A, B и C—формулы. Тогда приведенная ниже последовательность из пяти формул является выводом из трех исходных формул $A \supset (B \supset C)$, B и A (приводим „схему вывода"):

1. B — вторая исходная формула.
2. A — третья исходная формула.

(2) 3. $A \supset (B \supset C)$ — первая исходная формула.

4. $B \supset C$ — правило 2, 2, 3.
5. C — правило 2, 1, 4.

Пример 2. Читателю предоставляется построить: (3) вывод $A \& B$ из A и B; (4) вывод C из $A \& B \supset C$, A, B.

Анализом вывода или доказательства $A_1, \ldots, A_k$ мы называем разъяснение для каждого j ($j = 1, \ldots, k$) того, является ли A_j исходной формулой, и тогда — какой именно, из перечня $D_1, \ldots, D_l$; или аксиомой, и тогда— в силу какой схемы аксиом или конкретной аксиомы перечня постулатов; или, наконец, непосредственным следствием из предыдущих формул, и тогда — в силу какого правила вывода и из каких (вхождений) предыдущих формул как соответствующих посылок этого правила. Короче говоря, анализ вывода состоит в разъяснениях, употребляемых для обоснования каждого вхождения формулы в этот вывод (т. е., в наших примерах, в разъяснениях, данных справа от этих формул).

Случайно может оказаться, что вхождение некоторой формулы в вывод (или в доказательство) может быть обосновано более чем одним способом, например, формулы A, B и C могут быть таковы, что одна из пяти формул в (2) оказывается аксиомой. Поэтому в некоторых из дальнейших рассуждений процесс, применяемый к данному выводу, определен однозначно только

[1]) В литературе встречается также такое словоупотребление: говоря о «выводимой формуле» (без указания из каких именно исходных формул), подразумевают, что она выводится из пустого множества исходных формул, т. е. доказуема. Однако во избежание путаницы следует, быть может, признать более желательным употребление в этом случае термина «доказуемая формула».—*Прим. ред.*

в том случае, если вместе с самим этим выводом дан некоторый его конкретный анализ.

Следует подчеркнуть, что выражение «$D_1, \ldots, D_l \vdash E$», которым мы пользуемся для краткого указания, что E выводима из $D_1, \ldots, D_l$, является не формулой системы, а кратким способом записи некоторого метаматематического предложения о формулах $D_1, \ldots, D_l$, E, именно предложения, что существует известного рода конечная последовательность формул. При $l=0$ обозначение принимает вид «$\vdash E$» и означает, что E доказуема. Символ «$\vdash$» восходит к Фреге [1879], данное его употребление — к Россеру [1935*] и Клини [1934*].

Пример 3. Следующие два предложения (1′) и (2′) были обоснованы приведенными выше двумя выводами (1) и (2) соответственно, а (3′) и (4′) обосновываются примером 2.

(1′) $\vdash A \supset A$. (2′) $A \supset (B \supset C), B, A \vdash C$.

(3′) $A, B \vdash A \& B$. (4′) $A \& B \supset C, A, B \vdash C$.

Заметим, что символу «$\vdash$» предшествует в контексте последовательность (может быть, пустая) формул и за ним следует одна формула (вместо формул могут стоять метаматематические буквы или выражения, представляющие формулы). Это делает определенной область действия вхождения символа «$\vdash$» в метаматематическое предложение. В частности, области действия формальных операторов обязательно заключены внутри формул системы, тогда как «$\vdash$» является метаматематическим глаголом, лежащим вне любой формулы системы.

Определение „выводимости из $D_1, \ldots, D_l$“ может быть дано и без помощи промежуточного понятия вывода (ср. первое определение „доказуемости“ в § 19). Мы предоставляем читателю сформулировать пять пунктов этого определения. Короче говоря, «$D_1, \ldots, D_l \vdash E$» означает, что формулу E можно получить посредством правил вывода из (нуля или более) формул $D_1, \ldots, D_l$ и (нуля или более) аксиом. Обе формы этого определения приводятся в согласие тем замечанием, что если выписать в порядке их первого появления формулы, рассматриваемые в процессе перехода от $D_1, \ldots, D_l$ и аксиом к E, то получится вывод E из $D_1, \ldots, D_l$.

Мы пользуемся прописными греческими буквами — такими как «Γ», «Δ», «Θ» и т. д., которые мы ставим вместо конечных, в том числе и пустой, последовательностей (вхождений) формул, когда мы хотим указать множества исходных формул, не называя индивидуально эти формулы (или иногда «$\Gamma(x)$», «$\Delta(x_1, \ldots, x_n)$» и т. д., когда мы желаем также отметить некоторые переменные, которые могут в них входить).

Из определения отношения выводимости $\vdash$ вытекают некоторые *общие свойства* $\vdash$, истинность которых усматривается безотносительно к конкретному перечню постулатов данной формальной системы. (i). $\Gamma \vdash E$, если E входит в список Γ. (ii). Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta, \Gamma \vdash E$ для любого перечня Δ. В частности, можно рассматривать любую доказуемую формулу как вытекающую из любых исходных формул. (iii). Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где Δ получается из Γ путем перестановки формул Γ или опускания любых таких формул, которые тождественны с другими остающимися. (iv). Если $\Gamma \vdash E$, то $\Delta \vdash E$, где Δ получается из Γ опусканием любых формул Γ, которые являются доказуемыми или выводимыми из остающихся формул Γ. Действительно, если дан вывод E из Γ, мы можем получить вывод E из Δ, вставляя в данный вывод вместо каждого вхождения подлежащей удалению исходной формулы вывод этой же формулы из остающихся исходных формул. Эти четыре общих свойства могут быть разложены на более простые свойства следующей ниже леммы. Однако читателю рекомендуется свободно рассуждать со знаком $\vdash$ на основе его смысла (учитывая, что выводы, которые мы делаем на основе общих свойств $\vdash$, в действительности все могут быть проделаны на основе (i) — (iv) или (I) — (V)).

Лемма 5. (I). $E \vdash E$. (II). *Если* $\Gamma \vdash E$, *то* $C, \Gamma \vdash E$. (III). *Если* $C, C, \Gamma \vdash E$, *то* $C, \Gamma \vdash E$. (IV). *Если* $\Delta, D, C, \Gamma \vdash E$, *то* $\Delta, C, D, \Gamma \vdash E$. (V). *Если* $\Delta \vdash C$ *и* $C, \Gamma \vdash E$, *то* $\Delta, \Gamma \vdash E$. (По Генцену [1934 — 35].)

Пример 4. Если $A \vdash B$ и $A, B, C \vdash D$ и $B, D \vdash E$, то $A, C \vdash E$. Читатель может сам убедиться в этом исходя непосредственно из смысла символа $\vdash$ (при обеих формах его определения), а также проверить, что это вытекает из (i) — (iv) и из (I) — (V).

Определение, которое мы дали для $\vdash$, относится к конкретной формальной системе, определяемой перечнем постулатов. Именно, оно зависит как от той части перечня постулатов, которая определяет аксиомы, так и от той его части, которая определяет правила вывода. До сих пор мы имели дело только с одной формальной системой, но мы будем употреблять $\vdash$ в аналогичном смысле в связи с другими формальными системами, например подсистемами этой системы, которые получаются, если при определении класса аксиом и отношения непосредственного следования сохраняются только некоторые постулаты из перечня. Мы всегда будем подразумевать, что $\vdash$ относится к формальной системе, изучаемой в каждый данный момент.

Заметим, что $\Delta, \Gamma \vdash E$ для каждой данной системы эквивалентно $\Delta \vdash E$ для системы, получающейся из данной путем присоединения формул Γ к множеству аксиом.

§ 21. ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ

Следующую теорему мы рассмотрим сначала для исчисления высказываний, т. е. для исчисления, в котором имеют силу только постулаты группы А1.

Теорема 1. *Для исчисления высказываний, если* $\Gamma, A \vdash B$, *то* $\Gamma \vdash A \supset B$. (Теорема о дедукции.)

Доказательство. Условие теоремы означает, что имеется конечная последовательность формул, такая, что: каждая формула последовательности является или (a) одной из формул Γ, или (b) формулой A, или (c) аксиомой, или (d) непосредственным следствием по правилу 2 из двух предыдущих формул (потому что правило 2 является здесь единственным правилом вывода), и последняя формула этой последовательности есть формула B. Эту последовательность мы будем называть „данным выводом“ B из Γ, A.

Заключение теоремы утверждает, что имеется конечная последовательность формул, такая, что: каждая формула последовательности является (a) одной из формул Γ, или (c) аксиомой или (d) непосредственным следствием по правилу 2 из двух предыдущих формул; и последняя формула последовательности есть формула $A \supset B$. Эту последовательность мы будем называть „результирующим выводом“ $A \supset B$ из Γ.

Теорема будет доказана путем возвратной индукции по длине k данного вывода (§ 7), причем B в теореме будет переменной, а Γ, A — фиксированными на протяжении этой индукции.

Индукционное предложение $P(k)$ или $P(\Gamma, A, k)$ таково: *для каждой формулы* B, *если дан вывод* B *из* Γ, A *длины* k, *то может быть найден вывод* $A \supset B$ *из* Γ.

Базис (доказательство этого предложения для $k=1$, т. е. доказательство $P(\Gamma, \mathrm{A}, 1)$). Допустим, что дана формула B и вывод B из Г, A длины 1. Рассмотрим три случая, соответствующих тому, какая из возможностей (a) — (c) имеет место для последней (и, ввиду $k=1$, единственной) формулы B данного вывода. Возможность (d) здесь исключена, так как B — единственная формула.

Для каждого случая мы покажем, как построить результирующий вывод, предоставляя читателю проверить, что предлагаемая в качестве такового последовательность формул имеет требуемый вид.

Случай (a): B — одна из формул Г. Тогда следующая последовательность формул является результирующим выводом:

1. B — одна из формул Г.
2. $\mathrm{B} \supset (\mathrm{A} \supset \mathrm{B})$ — схема аксиом 1a.
3. $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$ — правило 2, 1, 2.

Случай (b): B есть A. Результирующий вывод есть последовательность формул (1), приведенная в примере 2 § 19 в качестве доказательства $\mathrm{A} \supset \mathrm{A}$. Так как B есть A, то формула $\mathrm{A} \supset \mathrm{A}$ есть $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$.

Случай (c): B есть аксиома. Результирующий вывод таков же, как и в случае (a), только первый шаг теперь обосновывается тем, что B является аксиомой.

Индукционный шаг. Допустим (в качестве индуктивного предположения), что $P(\Gamma, \mathrm{A}, l)$ для каждого $l \leqslant k$, т. е. что для каждого $l \leqslant k$ и каждого B, если дан вывод B из Г, A длины l, то может быть найден вывод $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$ из Г. Теперь (чтобы доказать $P(\Gamma, \mathrm{A}, k+1)$) допустим, что дана формула B и вывод B из Г, A длины $k+1$. Рассмотрим четыре случая, соответствующих тому, какая из возможностей (a) — (d) имеет место для последней формулы B данного вывода. Случаи (a) — (c) рассматриваются совершенно так же, как для базиса.

Случай (d): B есть непосредственное следствие по правилу 2 из двух предыдущих формул. Согласно формулировке правила 2, мы можем обозначить эти две формулы P и $\mathrm{P} \supset \mathrm{B}$. (Мы пользуемся здесь буквой P вместо A, употребленной при формулировке правила, потому что A сохраняется для обозначения последней исходной формулы данного вывода.) Если мы отбросим часть данного вывода, следующую за формулой P, то остающаяся часть будет выводом P из Г, A длины $l \leqslant k$. По индуктивному предположению (с P в качестве B) мы можем поэтому найти вывод $\mathrm{A} \supset \mathrm{P}$ из Г. Аналогично, применяя индуктивное предположение к отрезку данного вывода, оканчивающемуся формулой $\mathrm{P} \supset \mathrm{B}$, мы получим вывод $\mathrm{A} \supset (\mathrm{P} \supset \mathrm{B})$ из Г. Мы используем теперь эти два вывода (пусть их длины будут p и q соответственно) для построения результирующего вывода следующим образом:

$p.$	$\cdot\ \cdot\ \cdot$ $\mathrm{A} \supset \mathrm{P}$	вывод $\mathrm{A} \supset \mathrm{P}$ из Г, данный по индуктивному предположению.
$p+q.$	$\cdot\ \cdot\ \cdot$ $\mathrm{A} \supset (\mathrm{P} \supset \mathrm{B})$	вывод $\mathrm{A} \supset (\mathrm{P} \supset \mathrm{B})$ из Г, данный по индуктивному предположению.
$p+q+1.$	$(\mathrm{A} \supset \mathrm{P}) \supset ((\mathrm{A} \supset (\mathrm{P} \supset \mathrm{B})) \supset (\mathrm{A} \supset \mathrm{B}))$ — схема аксиом 1b.	
$p+q+2.$	$(\mathrm{A} \supset (\mathrm{P} \supset \mathrm{B})) \supset (\mathrm{A} \supset \mathrm{B})$ — правило 2, p, $p+q+1$.	
$p+q+3.$	$\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$ — правило 2, $p+q$, $p+q+2$.	

В силу принципа математической индукции, этим завершается доказательство теоремы. Теорема охватывает случай, когда Г пуста: *Для исчисления высказываний, если* $A \vdash B$, *то* $\vdash A \supset B$.

Пример. Как мы уже показали в (2′) выше, $A \supset (B \supset C), B, A \vdash C$. По теореме 1, мы можем отсюда заключить, что $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$.

Для более подробного изучения этого примера рассмотрим вывод (2), приведенный выше в качестве обоснования (2′), как данный вывод C из $A \supset (B \supset C), B, A$. Обращаясь к доказательству теоремы 1, мы можем построить результирующий вывод $A \supset C$ из $A \supset (B \supset C), B$. Так как данный вывод имеет длину > 1 и последняя формула получается из предыдущих формул путем применения правила 2, то при шаге индукции мы имеем дело со случаем (d). Далее мы находим некоторые детали и указания, позволяющие закончить процедуру путем применения теоремы 1 к выводам 1 и 1—4, входящим как части в (2). Продолжая таким же образом, мы получим в конце концов следующий результирующий вывод.

1. B — вторая исходная формула.
2. $B \supset (A \supset B)$ — схема аксиом 1a.
3. $A \supset B$ — правило 2, 1, 2.
4. $A \supset (A \supset A)$ — схема аксиом 1a.
5. $\{A \supset (A \supset A)\} \supset \{[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]\}$ — схема аксиом 1b.
6. $[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]$ — правило 2, 4, 5.
7. $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ — схема аксиом 1a.
8. $A \supset A$ — правило 2, 7, 6.

(5) 9. $A \supset (B \supset C)$ — первая исходная формула.

10. $\{A \supset (B \supset C)\} \supset \{A \supset (A \supset (B \supset C))\}$ — схема аксиом 1a.
11. $A \supset (A \supset (B \supset C))$ — правило 2, 9, 10.
12. $\{A \supset A\} \supset \{[A \supset (A \supset (B \supset C))] \supset [A \supset (B \supset C)]\}$ — схема аксиом 1b.
13. $[A \supset (A \supset (B \supset C))] \supset [A \supset (B \supset C)]$ — правило 2, 8, 12.
14. $A \supset (B \supset C)$ — правило 2, 11, 13.
15. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$ — схема аксиом 1b.
16. $(A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)$ — правило 2, 3, 15.
17. $A \supset C$ — правило 2, 14, 16.

Вывод (5) не является единственным выводом $A \supset C$ из $A \supset (B \supset C), B$. Оказывается, существует и более короткий вывод, который получается из (5) опусканием формул 4—8 и 10—14 и ссылкой на 9 (вместо 14) в качестве первой посылки для вывода по правилу 2 на шаге 17.

Но (5) — это тот конкретный вывод, который получается методом, использованным при доказательстве теоремы 1, если (2) берется в качестве данного вывода. Мы подробно провели вывод (5), чтобы подчеркнуть финитный характер рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 1, и, в частности, показать, что заключает в себе применение математической индукции. В дальнейшем мы будем довольствоваться установлением того, что результирующие выводы существуют и могут быть найдены.

Доказательство теоремы 1 послужит нам образцом метаматематических доказательств некоторого типа. В дальнейшем мы часто будем приводить такие доказательства в сокращенном виде, но читатель сможет восстановить рассуждение, применяя в явном виде индукцию. Для примера некоторые доказательства будут изложены полностью в явном виде.

Предыдущее доказательство теоремы 1 можно изложить сокращенно следующим образом. Припишем спереди $A \supset$ к каждой формуле данного вывода B из Г, A. (В нашем примере мы получим таким образом из формул 1, 2, 3, 4, 5 вывода (2) формулы 3, 8, 11, 14, 17 вывода (5).) Полученная таким путем последовательность формул (с конечной формулой $A \supset B$) не является (вообще говоря) выводом из Г, но может быть превращена в таковой путем вставления добавочных формул способом, указанным при рассмотрении разобранных выше случаев. (Этот простой план доказательства будет слегка изменен, когда мы в § 22 перейдем к обобщению этой теоремы на исчисление предикатов.)

Из $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$ вторичным применением теоремы 1 мы заключаем, что $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$. Эти выводы удобно расположить следующим образом:

(5′)
1. $A \supset (B \supset C),\ B,\ A \vdash C$ — (2).
2. $A \supset (B \supset C),\ B \vdash A \supset C$ — теорема 1,1.
3. $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$ — теорема 1, 2.

Здесь перед нами — последовательность выражений, аналогичная последовательности выражений, образующей формальное доказательство или вывод, но на другом уровне. Выражения этой последовательности служат метаматематическими высказываниями о формальной системе, тогда как в формальном доказательстве или выводе они являются формулами системы.

Приведем другой пример вывода и ряда метаматематических предложений:

(6)
1. $A \& B$ — вторая исходная формула.
2. $A \& B \supset A$ — схема аксиом 4a.
3. A — правило 2, 1, 2.
4. $A \supset (B \supset C)$ — первая исходная формула.
5. $B \supset C$ — правило 2, 3, 4.
6. $A \& B \supset B$ — схема аксиом 4b.
7. B — правило 2, 1, 6.
8. C — правило 2, 7, 5.

(6′)
1. $A \supset (B \supset C),\quad A \& B \vdash C$ — (6).
2. $A \supset (B \supset C) \vdash A \& B \supset C$ — теорема 1,1.

В качестве дальнейших примеров читатель может установить:

(7′) $A \& B \supset C \vdash A \supset (B \supset C)$ — ср. (4′) § 20.

(8′)
1. $A \supset B,\ B \supset C \vdash A \supset C$.
2. $A \supset B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$ — теорема 1,1.

§ 22. ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ (ОКОНЧАНИЕ)

Теорема 1 является выводимым правилом, относящимся к типу *правил вспомогательного вывода* (см. § 20). В применении этого правила данный вывод B из Г, A является *вспомогательным выводом*, а вывод $A \supset B$ из Г, полученный из данного вывода методом, указанным в доказательстве теоремы, мы назвали *результирующим выводом*. Когда мы будем устанавливать существование выводов, не приводя их явно, мы будем примеиять эллиптическую фразеологию, говоря, например, «вывод Г, А $\vdash$ В», понимая под этим «вывод, существование которого утверждается высказыванием Г, А $\vdash$ В».

В теореме 1 последняя исходная формула А вспомогательного вывода Г, А $\vdash$ В не участвует в перечне исходных формул результирующего вывода Г $\vdash$ А $\supset$ В; поэтому мы будем называть это вхождение А в качестве исходной формулы *устраненным*. (Могут присутствовать и другие вхождения А в перечень Г, которые при этом не устраняются.)

Вообще, *правило вспомогательного вывода* — это метаматематическая теорема, которая имеет одно или больше условий вида $\Delta_i \vdash$ E$_i$, называемых *вспомогательными выводами*, и одно заключение вида $\Delta \vdash$ E, называемое *результирующим выводом*. Из каждого вспомогательного вывода одна или более исходных формул могут быть *устранены*.

Пример 1. Правило «*Если* Г, А$\vdash$С *и* Г, В$\vdash$С, *то* Г, А $\vee$ В$\vdash$С», которое будет установлено в следующем параграфе, имеет два вспомогательных вывода Г, А $\vdash$ С и Г, В $\vdash$ С, причем из первого устраняется последняя исходная формула А, а из второго В.

Метаматематическая теорема простого вида $\Delta \vdash$ E является выводимым правилом *прямого* типа. Она утверждает, что можно от формул Δ и аксиом, применяя правила вывода, перейти прямо к формуле E.

Между этими двумя родами выводимых правил имеется следующее важное различие. Прямое правило обязательно остается в силе, если формальная система расширяется за счет присоединения новых аксиом и правил вывода, так как такое правило устанавливает просто, что могут быть построены некоторые выводы, а новые постулаты изменяют ситуацию только тем, что доставляют дополнительные средства для построения тех же выводов. Но вспомогательное правило вывода не обязательно сохраняет силу при добавлении новых постулатов, так как расширение системы может породить новые случаи вспомогательных выводов, и возникает вопрос, существуют ли результирующие выводы, соответствующие этим новым вспомогательным выводам. Большинство вспомогательных правил вывода, которые мы установим (в частности, все такие правила из настоящей главы), имеют повсюду перед символом «$\vdash$» неопределенное множество исходных формул Г, так что добавление новых аксиом не может вызвать никаких затруднений. Но добавление новых правил вывода порождает новые случаи, которые надо рассматривать при доказательстве рассматриваемого правила вспомогательного вывода.

Мы теперь будем рассматривать теорему 1 при условии, что имеют силу все постулаты группы А и, может быть, также и постулаты группы В (среди которых имеются только аксиомы и одна схема аксиом). Для рассмотрения новых случаев в доказательстве потребуется некоторое ограничение.

Кажется удобным провести это рассуждение сейчас, пока еще в памяти читателя свежо доказательство теоремы 1 для исчисления высказываний; но при желании читатель может отложить чтение оставшейся части этой главы, за исключением тех мест § 23, которые относятся к исчислению высказываний, до окончания главы VI.

Мы начнем с некоторых определений, которые будут полезны при формулировке упомянутого ограничения. Для каждого данного вывода $A_1, \ldots, A_k$ из исходных формул $D_1, \ldots, D_l$ и конкретного анализа этого вывода (§ 20) мы следующим образом определим, когда (вхождение) формулы A_i в этот вывод „зависит“ от данного вхождения исходной формулы D_j.

1. Если A_i является в данном анализе формулой D_j, то A_i *зависит* от D_j. 2. Если A_{i_1} *зависит* от D_j и A_i является в данном анализе непосредственным следствием из A_{i_1} (или из A_{i_1} и некоторой A_{i_2} в любом порядке), то A_i *зависит* от D_j. 3. A_i *зависит* от D_j только в том случае, если это имеет место в силу 1 и 2.

Легко видеть, что A_i зависит от D_j тогда и только тогда, когда не существует никакой (необязательно связной) подпоследовательности данного вывода, составляющей при данном анализе вывод A_i из остальных исходных формул $D_1, \ldots, D_{j-1}, D_{j+1}, \ldots, D_l$.

Пример 2. В выводе (6) формулы 4, 5 и 8 зависят от первой исходной формулы $A \supset (B \supset C)$, а остальные формулы не зависят. Формулы 1, 6, 7 (с данным анализом) образуют вывод формулы 7 из другой исходной формулы $A \& B$.

Будем говорить, что переменная y *варьируется в* данном выводе (с данным анализом) *для* данной исходной формулы D_j, если (A) y входит свободно в D_j и (B) этот вывод содержит применение правила 9 или правила 12 по отношению к y (взятой в качестве x при этом применении правила) к формуле, зависящей от D_j (взятой в качестве посылки для этого применения правила). В противном случае мы будем говорить, что y *остается фиксированной* (или *нетронутой*) *в* этом выводе *для* исходной формулы D_j.

Пример 3. Пусть x — переменная, A(x) — формула и b — переменная, такая, что (i) b свободна для x в A(x) и (ii) b не входит свободно в A(x) (или b есть x), и пусть C — формула, не содержащая b свободно. Тогда указанная ниже последовательность формул является выводом $C \supset \forall x A(x)$ из $C \supset A(b)$. При проверке того, что выполняются условия для постулатов 9 и 10, мы пользуемся фактами (iv) — (vi), установленными в примере 9 § 18.

1. $\forall b A(b) \supset A(x)$ — схема аксиом 10 (принимается во внимание (iv) и (vi)).
2. $\forall b A(b) \supset \forall x A(x)$ — правило 9, 1 (принимается во внимание, что, в силу (v), x не входит свободно в $\forall b A(b)$).
3. $C \supset A(b)$ — исходная формула.
4. $C \supset \forall b A(b)$ — правило 9, 3.
6. $C \supset (\forall b A(b) \supset \forall x A(x))$ — из 2, как в случае (a) теоремы 1 § 21.
9. $C \supset \forall x A(x)$ — из 4, 6, как в случае (d) теоремы 1.

Если A(x) содержит x свободно, то b в этом выводе варьируется, так как (в силу (i) и (iii)) исходная формула $C \supset A(b)$ содержит b свободно, и на шаге 4 применяется правило 9 по отношению к посылке 3, которая зависит от исходной формулы. Но x не варьируется[1]), потому что посылка 1 для применения правила 9 по отношению к x на шаге 2 не зависит от исходной формулы.

В данном выводе (с данным анализом) данная переменная y всегда остается фиксированной для каждой исходной формулы, в которую она не входит свободно, тогда как она может варьироваться для некоторых исходных формул, в которые она входит свободно, и оставаться фиксированной для других.

[1]) Если x отлична от b.—*Прим. перев.*

Введенная терминология напрашивается сама собой, потому что правила 9 и 12 («∀-правило» и «∃-правило») являются единственными постулатами группы А, в которых свободная переменная участвует как таковая. Аксиома 10, например, может применяться по отношению к свободной переменной, взятой в качестве t, но эта переменная используется при этом таким же образом, каким можно было бы употребить терм, не являющийся переменной (например 0). (Употребление свободных переменных при формулировке постулатов группы В несущественно.)

Ограничение, налагаемое на теорему 1 для исчисления предикатов, состоит в том, что во вспомогательном выводе свободные переменные должны оставаться фиксированными для подлежащих устранению исходных формул. (На языке интерпретации это будет разъяснено в § 32.)

Теорема 1 (окончание). *Для исчисления предикатов (или полной арифметической формальной системы), если* Γ, $A \vdash B$, *причем все свободные переменные остаются фиксированными для последней исходной формулы* A, *то* $\Gamma \vdash A \supset B$.

Доказательство получается из доказательства § 21 присоединением рассмотрения двух добавочных случаев, которые могут теперь возникнуть при шаге индукции.

Случай (e): В является непосредственным следствием из некоторой предыдущей формулы в силу применения правила 9. Согласно формулировке правила 9, эта предыдущая формула имеет вид $C \supset A(x)$, где x — переменная, $A(x)$ — формула, а C — формула, не содержащая x свободно. Тогда В есть $C \supset \forall x A(x)$. Мы рассмотрим два подслучая, соответствующих тому, зависит или нет эта предыдущая формула $C \supset A(x)$ от исходной формулы A в данном выводе (с данным анализом).

Подслучай (e1): $C \supset A(x)$ зависит от A. Тогда A не содержит x свободно, так как иначе возникло бы противоречие с условием, что свободные переменные в данном выводе остаются фиксированными для A. Так как ни A, ни C не содержат свободно x, то и формула $A \& C$ не содержит x свободно. Это обстоятельство используется ниже при обосновании нового применения правила 9 на шаге $p+q+1$. Применяя индуктивное предположение к отрезку данного вывода, оканчивающемуся формулой $C \supset A(x)$, мы получаем вывод $A \supset (C \supset A(x))$ из Γ. Этот вывод находит следующее применение при построении результирующего вывода:

	...	вывод $A \supset (C \supset A(x))$ из Γ, данный по индуктивному предположению.
p.	$A \supset (C \supset A(x))$	
	...	вывод $A \& C \supset A(x)$ из $A \supset (C \supset A(x))$, данный в (6′): 2 (конец § 21).
$p+q$.	$A \& C \supset A(x)$	
$p+q+1$.	$A \& C \supset \forall x A(x)$ —	правило 9, $p+q$.
	...	вывод $A \supset (C \supset \forall x A(x))$ из $A \& C \supset \forall x A(x)$, данный в (7′).
$p+q+r+1$.	$A \supset (C \supset \forall x A(x))$	

Подслучай (e2): $C \supset A(x)$ (а значит, и $C \supset \forall x A(x)$) не зависит от A. Тогда некоторая подпоследовательность данного вывода образует вывод $C \supset \forall x A(x)$ из остальных исходных формул Γ. Этой последовательностью мы воспользуемся при построении результирующего вывода:

	...	вывод $C \supset \forall x A(x)$ из Γ, данный по допущению о независимости.
p.	$C \supset \forall x A(x)$	
$p+1$.	$(C \supset \forall x A(x)) \supset (A \supset (C \supset \forall x A(x)))$ — схема аксиом 1a.	
$p+2$.	$A \supset (C \supset \forall x A(x))$ — правило 2, p, $p+1$.	

Случай (f): B является непосредственным следствием из предыдущей формулы в силу применения правила 12. Этот случай рассматривается аналогично, с двукратным применением (5′) : 3 в первом подслучае.

Теорема о дедукции впервые была доказана в качестве выводимого правила Эрбраном [1930]. (См. также Эрбран [1928], Тарский [1930], Чёрч [1932], Гильберт — Бернайс [1934, стр. 155], Яськовский [1934].)

§ 23. ВВЕДЕНИЕ И УДАЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ СИМВОЛОВ

Следующая теорема содержит ряд выводимых правил, причем для того, чтобы снабдить их удобными описательными названиями, мы расположим их в виде таблицы с двумя входами. Например, «$\forall x A(x) \vdash A(t)$» — это правило «удаление общности» или, короче, «$\forall$-удаление».

Переменная «x», приписанная к символу «$\vdash$» в качестве верхнего индекса в двух из этих правил, отмечает применение правила 9 или 12 по отношению к x при построении результирующего вывода.

Теорема 2. *В следующих правилах* A, B *и* C *или* x, A(x), C *и* t *подчинены тем же условиям, что и в соответствующих постулатах* (§ 19), *а* Γ *или* $\Gamma(x)$ *есть любой список формул.*

Для исчисления высказываний справедливы правила от «импликации» *до* «отрицания» *включительно.*

Для исчисления предикатов (*или полной арифметической системы*) *справедливы все правила, при условии, что в каждом вспомогательном выводе свободные переменные остаются фиксированными для подлежащих устранению исходных формул.*

	(Введение)	(Удаление)
(Импликация)	*Если* $\Gamma, A \vdash B$, *то* $\Gamma \vdash A \supset B$.	$A, A \supset B \vdash B$. (Modus ponens.)
(Конъюнкция)	$A, B \vdash A \& B$.	$A \& B \vdash A$. $A \& B \vdash B$.
(Дизъюнкция)	$A \vdash A \vee B$. $B \vdash A \vee B$.	*Если* $\Gamma, A \vdash C$ *и* $\Gamma, B \vdash C$, *то* $\Gamma, A \vee B \vdash C$. (Доказательство разбором случаев.)
(Отрицание)	*Если* $\Gamma, A \vdash B$ *и* $\Gamma, A \vdash \neg B$, *то* $\Gamma \vdash \neg A$. (Reductio ad absurdum[1].)	$\neg\neg A \vdash A$. (Устранение двойного отрицания.)°

[1]) Приведение к нелепости (лат.).—*Прим. перев.*

	(Введение)	(Удаление)
(Общность)	$A(x) \vdash^{x} \forall x A(x)$.	$\forall x A(x) \vdash A(t)$.
(Существование)	$A(t) \vdash \exists x A(x)$.	*Если* $\Gamma(x),\ A(x) \vdash C$, *то* $\Gamma(x),\ \exists x A(x) \vdash^{x} C$.

Доказательства. Правило $\supset$-введения есть теорема 1. Остаются десять прямых правил и еще три правила вспомогательного вывода. Прямые правила можно установить выписыванием требуемых выводов. Доказательства правил вспомогательного вывода удобно представлять в виде последовательностей метаматематических высказываний (некоторые из них доказываются выписыванием вывода как при доказательстве прямого правила, а другие следуют из предыдущих высказываний по теореме 1 или в силу общих свойств $\vdash$). В обоих случаях мы в некотором пункте обращаемся к соответствующему постулату. Ниже даются доказательства для некоторых правил каждого типа, а остальные доказательства предоставляются читателю. Однако здесь, как и всегда в аналогичной ситуации, мы настойчиво рекомендуем читателю попробовать сначала провести самостоятельно даже те доказательства, которые мы приводим.

Прямые правила. $\supset$-удаление.

1. A – первая исходная формула.
2. $A \supset B$ — вторая исходная формула.
3. B — правило 2, 1, 2.

Это правило есть просто правило 2 из перечня постулатов («$\supset$-правило», или «modus ponens» традиционной логики), сформулированное в качестве выводимого правила.

&-введение. Оно уже получено нами как (3′) § 20.

$\neg$-удаление, или устранение двойного отрицания.

1. $\neg\neg A$ — исходная формула.
2. $\neg\neg A \supset A$ — схема аксиом 8.
3. A — правило 2, 1, 2.

$\forall$-введение. Пусть C — некоторая аксиома, не содержащая свободно x.

1. $A(x)$ — исходная формула.
2. $A(x) \supset (C \supset A(x))$ — схема аксиом 1a.
3. $C \supset A(x)$ — правило 2, 1, 2.
4. $C \supset \forall x A(x)$ — правило 9, 3.
5. C — аксиома.
6. $\forall x A(x)$ — правило 2, 5, 4.

Правила вспомогательного вывода. $\vee$-удаление.

1. $\Gamma,\ A \vdash C$ — условие.
2. $\Gamma \vdash A \supset C$ — теорема 1, 1.
3. $\Gamma,\ B \vdash C$ — условие.
4. $\Gamma \vdash B \supset C$ — теорема 1, 3.

5. $A \supset C,\ B \supset C \vdash A \vee B \supset C$ — с помощью схемы аксиом 6 и правила 2.
6. $A \vee B,\ A \vee B \supset C \vdash C$ — $\supset$-удаление (или с помощью правила 2).
7. $\Gamma,\ A \vee B \vdash C$ — 2, 4, 5, 6.

$\exists$-удаление.

1. $\Gamma(x),\ A(x) \vdash C$ — условие.
2. $\Gamma(x) \vdash A(x) \supset C$ — теорема 1, 1
3. $A(x) \supset C \vdash^{x} \exists x A(x) \supset C$ — используя правило 12.
4. $\exists x A(x),\ \exists x A(x) \supset C \vdash C$ — $\supset$-удаление.
5. $\Gamma(x),\ \exists x A(x) \vdash^{x} C$ — 2, 3, 4.

Комментарий. Эти правила дают классификацию логических операций в виде операций введения и удаления логических символов, заимствованную у Генцена [1934—35].

Правило, названное «$\vee$-удалением», служит для удаления символа дизъюнкции там, где он используется следующим образом:

1. $\vdash A \vee B$ — предполагается данным.
2. $A \vdash C$ — предполагается данным, причем свободные переменные остаются фиксированными для A.
3. $B \vdash C$ — предполагается данным, причем свободные переменные остаются фиксированными для B.
4. $A \vee B \vdash C$ — $\vee$-удаление (с пустой Γ), 2, 3.
5. $\vdash C$ — 1, 4.

Этот процесс соответствует обычному содержательному методу доказательства разбором случаев: A или B. Случай 1: A; тогда C. Случай 2: B; тогда C. Следовательно, C.

Аналогично, $\exists$-удаление, применяемое следующим образом, удаляет символ существования:

1. $\vdash \exists x A(x)$ — предполагается данным.
2. $A(x) \vdash C$ — предполагается данным, причем C не содержит x в качестве свободной переменной и свободные переменные остаются фиксированными для A(x).
3. $\exists x A(x) \vdash C$ — $\exists$-удаление, 2.
4. $\vdash C$ — 1, 3.

Это соответствует обычному рассуждению: существует x такой, что A(x); рассмотрим такой x; тогда C, которое не зависит от x. Следовательно, C.

Аналогично, $\neg$-введение соответствует методу reductio ad absurdum.

С помощью Г, предусмотренной в теореме, любая из этих процедур может быть проведена при наличии любого числа добавочных исходных формул.

Сейчас мы покажем, что $A,\ \neg A \vdash B$ (словами: из противоречия A и $\neg$A выводима любая формула B). Это обстоятельство мы будем называть в ссылках правилом *слабого $\neg$-удаления*.

1. $A,\ \neg A,\ \neg B \vdash A$.
2. $A,\ \neg A,\ \neg B \vdash \neg A$.

3. A, $\neg$A $\vdash$ $\neg\neg$B — $\neg$-введение, 1, 2.
4. $\neg\neg$B $\vdash$ B — $\neg$-удаление.

(9′) 5. A, $\neg$A $\vdash$ B — 3, 4, что и требовалось доказать.

Шаг 3 состоит в отбрасывании формулы $\neg$B по причине противоречия A и $\neg$A в 1 и 2. Продолжая, мы получаем:

6. $\neg$A $\vdash$ A $\supset$ B — $\supset$-введение, 5.
7. $\vdash$ $\neg$A $\supset$ (A $\supset$ B) — $\supset$-введение, 6.

Наша формальная система предназначена для формализации арифметики, содержащей только методы, приемлемые с классической точки зрения (см. § 13). Однако, если схему аксиом 8 ($\neg\neg$A $\supset$ A) заменить следующей (см. (9′): 7), то все постулаты будут выражать принципы, приемлемые также интуиционистами (см. конец § 30):

$$8^{\mathrm{I}}.\quad \neg A \supset (A \supset B)\ ^{1)}.$$

В терминах выводимых правил теоремы 2 это означает замену $\neg$-удаления на слабое $\neg$-удаление. Поскольку мы желаем рассматривать также и эту систему, мы будем называть первоначальную систему с постулатом 8° *классической системой*, а систему с постулатом 8^{I} вместо него — (*соответствующей*) *интуиционистской системой*. Наши результаты помечены символом «°» в каждом случае, когда доказательство, которое мы приводим, имеет силу не для обеих систем, а только для классической (и не ожидается, что читатель найдет доказательство, которое имеет силу для интуиционистской системы).

Применение $\forall$-введения с последующим $\forall$-удалением дает нам следующее правило:

Подстановка вместо индивидуальной переменной. *Если* x — *переменная*, A(x) — *формула, а* t — *терм, свободный для* x *в* A(x), *то* A(x) $\vdash^{x}$ A(t).

Излагая применения наших выводимых правил, мы для краткости будем молчаливо пользоваться общими свойствами символа $\vdash$.

Пример 1. Рассмотрим следующее рассуждение.

1. A, B $\vdash$ C — предполагается данным.
2. A & B $\vdash$ A — &-удаление.
3. A & B $\vdash$ B — &-удаление.
4. A & B $\vdash$ C — 1, 2, 3.

Это мы сжато выражаем следующим образом:

1. A, B $\vdash$ C — предполагается данным.
2. A & B $\vdash$ C — &-удал., 1.

Запись «Γ $\vdash$ P, P $\vdash$ Q» (что означает: Γ $\vdash$ P и P $\vdash$ Q) мы сокращаем: «Γ $\vdash$ P $\vdash$ Q»; и аналогично для более длинных цепей выводов, каждый из которых, кроме первого, имеет своей единственной исходной формулой заключение предыдущего вывода. (Но «Γ $\vdash$ P, $\vdash$ Q» означает: Γ $\vdash$ P и $\vdash$ Q.)

---

1) Постулат 8^{I} выражает принцип: «из противоречия следует все, что угодно». Исчисление высказываний, не содержащее ни закона исключенного третьего, ни этого принципа, называется минимальным исчислением (Иоганссон [1936]). Это исчисление содержит только постулаты 1—7 исчисления высказываний; по отношению к исчислению предикатов и арифметике без постулата 8 мы также будем пользоваться термином «минимальное исчисление» (ср. добавление VII). — *Прим. перев.*

Пример 2.

1. $A \supset B,\ A \vdash B$ — $\supset$-удаление.
2. $B \vdash B \vee C$ — $\vee$-введение.
3. $A \supset B,\ A \vdash B \vee C$ — 1, 2.

Мы сокращаем это так:

1. $A \supset B,\ A \vdash B \vdash B \vee C$ — $\supset$-удал., $\vee$-введ.

*§ 24. ЗАВИСИМОСТЬ ФОРМУЛ И ВАРЬИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Для исчисления предикатов, чтобы воспользоваться выводом, полученным (т. е. таким, существование которого доказано) с помощью одного из выводимых правил теоремы 2, как вспомогательным выводом для дальнейшего применения одного из этих правил, мы должны (по крайней мере, насколько нам сейчас известно), помимо существования этого вывода, знать еще, что свободные переменные в нем остаются фиксированными для исходных формул, подлежащих устранению.

Чтобы в случае надобности иметь эти сведения под рукой, мы будем пользоваться правилами таким образом, чтобы оставался след от каждого случая, когда переменная может варьироваться в результирующем выводе. Удобно делать это, надписывая любые переменные, которые могут варьироваться; в качестве верхних индексов при символе «$\vdash$». Это обозначение не полностью выявляет картину, потому что оно не показывает, для какой из исходных формул может варьироваться данная переменная, надписанная в виде верхнего индекса. Мы можем поэтому просто связывать верхний индекс с исходными формулами, в которые эта переменная входит свободно. (Там, где нужна бо́льшая подробность, соответствующие обстоятельства можно высказать словесно, например, как в лемме 8а ниже).

Напомним, что, согласно определению варьирования (§ 22), переменная y может варьироваться только для исходной формулы D_j, в которую она входит свободно.

Легко видеть, что для любого данного вывода $D_1, \ldots, D_l \vdash E$, исходной формулы D_j и переменной y, входящей свободно в D_j, можно найти другой вывод E из $D_1, \ldots, D_l$, в котором y варьируется для D_j[1]. (Указание: ввести в вывод некоторые лишние шаги). Поэтому нас всегда будет интересовать только то, существует ли некоторый вывод $D_1, \ldots, D_l \vdash E$, в котором y не варьируется для D_j. Наши высказывания о том, что переменная y варьируется только для таких-то и таких-то исходных формул, будут означать, что имеется некоторый вывод (с данными исходными формулами и заключением), в котором это имеет место.

Аналогично, для любого данного вывода $D_1, \ldots, D_l \vdash E$ всегда можно найти другой вывод E из $D_1, \ldots, D_l$, в котором заключение E зависит от D_j.

Процедура прослеживания варьирования является чисто поступательной (аналогично для зависимости). Пока что единственные наши выводимые правила, требующие введения верхнего индекса,—это $\forall$-введение, $\exists$-удаление и подстановка. (Даже для них верхний индекс не всегда является необходимым—например, он не нужен, если A(x) в $\forall$-введении или подстановке не содержит свободно x. См. также лемму 7b ниже.) Более того, коль скоро верхние индексы введены, мы должны в дальнейшем переносить их очевидным образом от данного вывода к результирующему (если не имеется каких-либо оснований к противному) как при применении правил вспомогательного вывода этого параграфа, так и в сочетании с выводами по общим свойствам $\vdash$ (§ 20).

[1] Здесь и в дальнейшем всюду подразумевается, что вместе с выводом дается и некоторый анализ этого вывода.—*Прим. ред.*

Случаи, которые встречаются на практике, довольно просты и не будут причинять нам больших забот. Варьирующиеся переменные обычно вводятся в этой связи предварительно для некоторой непосредственной цели, поэтому их не так уж легко упустить из виду. Однако для полноты нашей теории выводимых правил эти обстоятельства устанавливаются более детально в следующих леммах.

Лемма 6. *В теореме* 1 $A \supset B$ *зависит от данной формулы из* Γ *в результирующем выводе* $\Gamma \vdash A \supset B$, *только если* B *зависит от этой же формулы в данном выводе* Γ, $A \vdash B$ [1]). *Аналогично, в других правилах вспомогательного вывода теоремы* 2 *заключение зависит в результирующем выводе от данной формулы из* Γ *только в том случае, если заключение зависит от этой же формулы в данном выводе (или по крайней мере в одном из двух данных выводов).*

Действительно, в противном случае эта исходная формула могла бы быть опущена из Γ при применении этого правила, а затем опять введена в силу (II) (и. (IV)) леммы 5.

При $\vee$-удалении, если C не зависит ни от A в Γ, $A \vdash C$, ни от B в Γ, $B \vdash C$, это $\vee$-удаление может быть упразднено вовсе [2]). Аналогично для $\exists$-удаления, если C не зависит от $A(x)$.

Лемма 7a. *В теореме* 1 *переменная варьируется для данной формулы из* Γ *в результирующем выводе* $\Gamma \vdash A \supset B$ *только в том случае, если она варьируется для этой же формулы в данном выводе* Γ, $A \vdash B$. *Аналогично в других правилах вспомогательного вывода теоремы* 2, *за исключением переменной* x *в* $\exists$*-удалении, для которой дело обстоит так, как сформулировано в лемме* 7b.

Лемма 7b. *В* $\exists$*-удалении* x *варьируется в результирующем выводе* $\Gamma(x)$, $\exists x A(x) \stackrel{x}{\vdash} C$ *только для тех формул из* $\Gamma(x)$, *которые содержат этот* x *свободно и от которых* C *зависит в данном выводе* $\Gamma(x)$, $A(x) \vdash C$. *(В* $\exists$*-удалении никакая переменная не варьируется для* $\exists x A(x)$; *аналогично в* $\vee$*-удалении для* $A \vee B$.)

Эти две леммы проверяются рассмотрением доказательств теорем 1 и 2. Для $\exists$-удаления, если x варьируется в данном выводе для какой-либо формулы из $\Gamma(x)$, от которой C не зависит, то эта формула из $\Gamma(x)$ может быть опущена при $\exists$-удалении.

Рассмотрение зависимости и варьирования при шагах, осуществляемых в силу общих свойств знака $\vdash$ (использующее перечень таких свойств, приведенный в лемме 5), предоставляется читателю, за исключением варьирования для формул из Δ в (V). Прежде чем рассматривать этот случай (в лемме 9), докажем следующие основные леммы.

Лемма 8a. *Если*

$$\text{(I)} \qquad D_1, D_2, \ldots, D_l \vdash E,$$

---

[1]) Точный смысл этого утверждения таков: «Если, в условиях теоремы 1, существует такой вывод B из Γ, A (и такой анализ этого вывода), при котором B не зависит от данной формулы из Γ, то существует такой вывод $A \supset B$ из Γ (и такой анализ этого вывода), при котором $A \supset B$ не зависит от этой же формулы. из Γ». В аналогичном смысле надлежит понимать и второе утверждение леммы 6, а также леммы 7a, 7b, 9, касающиеся варьирования переменных. — *Прим. ред.*

[2]) Очевидно, достаточно, чтобы хоть в одном из данных выводов C не зависела от A, соответственно от B. — *Прим. перев.*

где при $j=1, \ldots, l$ *для* D_j *варьируются попарно-различные переменные* $y_{j1}, \ldots, y_{jp_j}$ *и только они (но* $y_{j1}, \ldots, y_{jp_j}$ *не обязательно отличны от переменных* $y_{k1}, \ldots, y_{kp_k}$ *для* $j \neq k$*), то*

$$\text{(II)} \vdash \forall y_{11} \ldots \forall y_{1p_1} D_1 \supset (\forall y_{21} \ldots \forall y_{2p_2} D_2 \supset \ldots (\forall y_{l1} \ldots \forall y_{lp_l} D_l \supset E)\ldots);$$

и обратно.

Действительно, (II) получается из (I) путем $\forall$-удалений и $\supset$-введений. Обратно, (I) получается из (II) путем $\forall$-введений и $\supset$-удалений.

Лемма 8b. *Если дан вывод* E *из* $D_1, \ldots, D_l$, *то можно найти другой вывод* E *из* $D_1, \ldots, D_l$, *в котором при* $j=1, \ldots, l$ *правило* 9 *применяется к посылкам, зависящим от* D_j *только по отношению к переменным, которые варьируются для* D_j *в данном выводе, а правило* 12 *не применяется ни к одной посылке, зависящей от какой-либо исходной формулы.*

Возьмем данный вывод в качестве (I) в лемме 8a, перейдем к (II) и затем перейдем обратно к другому выводу (I). В последнем выводе применения правил 9 и 12, происходящие от доказательства (II), относятся к посылкам, не зависящим ни от каких исходных формул. А применения, происходящие от $\forall$-введений, используемых для получения (I) из (II), в точности таковы, как описано в настоящей лемме.

Лемма 9. *В* (V) *леммы* 5 *переменная* y *варьируется для данной формулы из* Δ *в результирующем выводе* $\Delta, \Gamma \vdash E$ *только* (a) *если* y *варьируется для этой же формулы из* Δ *в первом данном выводе* $\Delta \vdash C$ *или* (b) *если* y *варьируется для* C *во втором данном выводе* $C, \Gamma \vdash E$ *и* C *зависит от этой формулы из* Δ *в первом данном выводе* $\Delta \vdash C$, *причем эта формула из* Δ *содержит* y *свободно.*

Лемма 9 получается сразу, за исключением следующего случая. Возможно, что во втором данном выводе $C, \Gamma \vdash E$ применяется правило 9 или 12 по отношению к y и посылке, зависящей от C, и все же y остается нетронутой для C ввиду того, что C не содержит y свободно. Если этот вывод связать с выводом $\Delta \vdash C$, в котором C зависит от некоторой формулы из Δ, содержащей свободно y, то y варьируется для этой формулы из Δ в результирующем выводе $\Delta, \Gamma \vdash E$. Но с помощью леммы 8b можно заменить данный вывод $C, \Gamma \vdash E$ другим, после чего описанная возможность не может возникнуть ни для какой переменной y [1]).

Теперь для новых выводимых правил факты, относящиеся к зависимости и варьированию, принимают желаемый вид,—все исключения отмечены и все случаи, когда может возникать варьирование, указаны посредством верхнего индекса при «$\vdash$». Вообще, для правил вспомогательного вывода, в которые исходные формулы входят в очевидном соответствии в данный и результирующий выводы, справедливо следующее: заключение зависит от (данная переменная варьируется для) любой данной из исходных формул результирующего вывода, только если оно зависит от (она варьируется для) соответствующей исходной формулы данного вывода или одного из данных выводов. Примерами служат теоремы 3 и 4 § 25 (для зависимости), 15 и 16 § 34, правило формальной индукции § 38, теоремы 41 (b) и (c) § 73, 42 (III)—(V) и 43 (VIIa)—(VIIIb) § 74, 59 и 60 (b2)—(d) § 81.

[1]) Здесь у автора допущена неточность. Лемма 9 доказана только в предположении, что второй данный вывод $C, \Gamma \vdash E$ с самого начала был таков, как вывод, существование которого утверждается леммой 8b. Впрочем, эта неточность несущественна для дальнейшего.—*Прим. перев.*

Сильные $\forall$-введение и $\exists$-удаление. Иногда оказывается полезной несколько усиленная форма $\forall$-введения и $\exists$-удаления, которая допускает замену в переменной.

Лемма 10. *Пусть* x — *переменная,* A(x) — *формула, а* b — *переменная такие, что* (i) b *свободна для* x *в* A(x) *и* (ii) b *не входит свободно в* A(x) (*или* b *есть* x). *Далее* (*для правила* $\exists$-*удаления*), *пусть* C — *формула, не содержащая свободно* b, *и пусть во вспомогательном выводе свободные переменные остаются фиксированными для* A(b). *Тогда*

$$\mathrm{A}(\mathrm{b}) \vdash^{\mathrm{b}} \forall x \mathrm{A}(x). \qquad \textit{Если } \Gamma(\mathrm{b}),\ \mathrm{A}(\mathrm{b}) \vdash \mathrm{C}, \textit{ то } \Gamma(\mathrm{b}),\ \exists x \mathrm{A}(x) \vdash^{\mathrm{b}} \mathrm{C}.$$

(Сильное $\forall$-введение) (Сильное $\exists$-удаление)

Доказательства. В примере 3 § 22 мы вывели правило

$$\mathrm{C} \supset \mathrm{A}(\mathrm{b}) \vdash^{\mathrm{b}} \mathrm{C} \supset \forall x \mathrm{A}(x).$$

Пользуясь в нашем прежнем доказательстве для $\forall$-введения (§ 23) этим правилом вместо постулированного правила 9, мы получим сильную форму.

Выводимые правила и соответствующие постулаты. Мы будем называть постулаты 1a, 1b и 2 *постулатами для* $\supset$ (или $\supset$-*постулатами*), постулаты 3, 4a и 4b — &-*постулатами*, постулаты 7 и 8 (или, для интуиционистской системы, 7 и 8^{I}) — $\neg$-*постулатами* и т. д. Постулаты для $\supset$ используются при установлении всех выводимых правил теоремы 2.

Лемма 11. *Для каждого выбора одного или нескольких логических символов из числа* $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$ *и* $\exists$ *справедливо следующее: правила теоремы 2 для* $\supset$ *и этих выбранных символов* (*а также сильные формы для* $\forall$ *и* $\exists$, *и — для* $\neg$ *интуиционистской системы — правило слабого* $\neg$-*удаления вместо правила обычного* $\neg$-*удаления*) *сохраняют силу для формальной системы, которая имеет в качестве постулатов только* $\supset$-*постулаты, постулаты для выбранных символов, и — в случае, когда среди выбранных символов содержится* $\forall$, *но не содержится* &, — $\forall$-*постулаты содержат еще следующую дополнительную схему аксиом*:

$$9a.\quad \forall x(\mathrm{C} \supset \mathrm{A}(x)) \supset (\mathrm{C} \supset \forall x \mathrm{A}(x))$$

(*здесь* x, A(x) *и* C *удовлетворяют тем же условиям, что и в правиле* 9).

Доказательство. Это может быть проверено путем внимательного чтения доказательств этих правил, за исключением случая, когда среди выбранных символов содержится $\forall$, но не &, потому что рассмотрение подслучая (e1) случая (e) теоремы 1 (§ 22) опирается на &-постулаты. Однако с помощью дополнительной $\forall$-схемы оно может быть заменено следующим:

p.	$\mathrm{A} \supset (\mathrm{C} \supset \mathrm{A}(x))$	— как прежде.
$p+1$.	$\mathrm{A} \supset \forall x(\mathrm{C} \supset \mathrm{A}(x))$	— правило 9, p.
$p+2$.	$\forall x(\mathrm{C} \supset \mathrm{A}(x)) \supset (\mathrm{C} \supset \forall x \mathrm{A}(x))$	— схема аксиом 9a.
	...	— вывод из $p+1$ и $p+2$, данный в (8′): 1 (конец § 21).
$p+q+2$.	$\mathrm{A} \supset (\mathrm{C} \supset \forall x \mathrm{A}(x))$.	

Выводы в виде дерева. До сих пор мы имели дело с выводами в виде линейной последовательности (вхождений) формул. Но иногда вместо этого полезно рассматривать (вхождения) формул в некотором частичном упорядочении, которое прямо представляет логическую структуру вывода. В этом упорядочении посылки каждого вывода пишутся непосредственно над заключением, как при формулировке правил вывода; никакое (вхождение) формулы не служит посылкой более чем для одного вывода. Вывод (или доказательство) в его прежнем расположении мы будем называть выводом в виде последовательности, а в этом новом расположении — выводом в виде дерева.

Метод перехода от вывода E из Г, данного в виде последовательности, с данным анализом к выводу в виде дерева (названному Гильбертом и Бернайсом [1934, стр. 221] «разложением на нити доказательства», Auflösung in Beweisfäden) и обратно станет ясным из примера.

Пример 1. Рассмотрим вывод (6) из § 21. Согласно анализу, нижняя формула 8 является непосредственным следствием из 7 и 5. Напишем 7 и 5 непосредственно над 8. Затем, 7 является непосредственным следствием из 1 и 6; напишем 1 и 6 как раз над 7, и т. д. Рассматривая таким образом числа 1—8, мы получим следующую фигуру:

(a)

$$\dfrac{\dfrac{1 \qquad 6}{7} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{1 \qquad 2}{3} \qquad 4}{5}}{8}$$

Выписывая сами формулы (с новыми номерами 1′—9′ и анализом), мы получим вывод в виде дерева:

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{вторая исходная формула}}{1'.\ A \& B} \qquad \overset{\text{схема аксиом 4b}}{2'.\ A \& B \supset B}}{3'.\ B}\,2 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{вторая исходная формула}}{4'.\ A \& B} \qquad \overset{\text{схема аксиом 4a}}{5'.\ A \& B \supset A}}{6'.\ A}\,2 \qquad \overset{\text{первая исходная формула}}{7'.\ A \supset (B \supset C)}}{8'.\ B \supset C}\,2}{9'.\ C}\,2$$

Обратно, из этого вывода в виде дерева C из $A \supset (B \supset C)$ и $A \& B$, располагая (вхождения) формул в линейную последовательность, например, в порядке номеров 1′—9′, мы получим вывод в виде последовательности (отличный от первоначального).

Короче говоря, *ветвь* вывода в виде дерева состоит из (вхождений) формул в линейную последовательность, проходящую внутри дерева вниз, начинающуюся с формулы, входящей в качестве аксиомы или исходной формулы и оканчивающуюся заключением (или конечной формулой) вывода. *Высота* вывода в виде дерева — это длина его самой длинной ветви (или, иными словами, число уровней). Говорят, что некоторое вхождение формулы *выше* другого (или что последнее *ниже* первого), если первое выше второго в той же ветви.

Пример 1 (окончание). Вывод (b) имеет 5 ветвей, а именно: 1′, 3′, 9′; 2′, 3′, 9′; 4′, 6′, 8′, 9′; 5′, 6′, 8′, 9′; 7′, 8′, 9′. Высота есть 4. Вхождение формулы 4′ выше 8′, но не выше 3′.

Глава VI

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 25. ФОРМУЛЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В этой главе мы выделяем для интенсивного изучения ту часть нашей формальной системы, которая получается при использовании только постулатов группы A1. Соответственно этому и надо понимать значения слов «доказуемая», «выводимая» и символа «$\vdash$».

Согласно определению „формулы", данному в § 17 для полной системы, все наши формулы строятся в терминах арифметического символизма. Но коль скоро мы пользуемся только постулатами группы A1, многие детали этого символизма несущественны.

Нежелательно ограничивать общность нашего рассмотрения исчисления высказываний из-за того, что мы намерены применять его к арифметической системе. С другой стороны, мы должны подготовить почву для этого применения.

Дадим теперь для исчисления высказываний другое определение „формулы", в котором устранены несущественные детали арифметического определения.

Начнем с введения формальных символов нового рода

$$\mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \mathcal{C}, \ldots,$$

называемых пропозициональными буквами, (потенциально) бесконечный перечень которых мы считаем имеющимся в нашем распоряжении. Новое определение „формулы" таково:

1. Пропозициональная буква есть *формула*. 2—5. Если A и B — *формулы*, то и (A) $\supset$ (B), (A)&(B), (A) $\vee$ (B) и $\neg$(A) являются *формулами*. 6. Никаких *формул*, кроме тех, которые получаются согласно 1—5, нет.

По сравнению с определением § 17, пункт 1 прежнего определения заменен новым пунктом 1, а пункты 6—7 откинуты. Если будет желательно проводить различия между обоими понятиями формулы, мы будем называть формулы в смысле § 17 арифметическими формулами, а формулы в только что введенном смысле — формулами исчисления высказываний, или пропозициональными формулами.

Пример 1. $\mathcal{A} \vee (\neg \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})$ является формулой исчисления высказываний (продолжая пользоваться установленными в § 17 соглашениями, мы опускаем некоторые скобки).

Теперь условимся, в пределах этой главы, что если мы употребляем слово «формула», не указывая конкретного смысла, то это слово можно понимать и в смысле формулы исчисления высказываний, и в смысле формулы исчисления предикатов, которая будет определена в следующей главе, и в арифметическом смысле. (Это слово можно понимать еще и в других смыслах. Но для определенности мы ограничиваемся здесь этими тремя, предоставляя рассматривать вопрос о возможности какого-нибудь другого смысла тогда, когда этот смысл понадобится.)

Таким образом, результаты этой главы, сформулированные просто для «формул», приложимы — без помощи каких-либо дополнительных соображений — к любой из трех формальных систем, имеющих общий перечень постулатов (группу А1), но отличающихся по смыслу понятия «формула». Эти три системы можно различать как чистое исчисление высказываний, предикатное исчисление высказываний и арифметическое исчисление высказываний.

Некоторые из наших результатов формулируются, однако, в терминах «формул исчисления высказываний». Они также имеют общую применимость. Причина таких формулировок в том, что эти результаты легче излагать в терминах пропозициональных букв, предоставляя читателю, если ему это нужно, перевести их применительно к «формулам» в других смыслах, пользуясь двумя общими правилами для перевода, которые мы вскоре получим (теоремы 3 и 4).

Пусть $P_1, \ldots, P_m$ — перечень различных пропозициональных букв. (Здесь «P_1», ..., «P_m»—метаматематические буквы, которыми мы пользуемся как названиями для пропозициональных букв, когда не хотим ограничивать наше рассуждение употреблением конкретных пропозициональных букв.)

Пропозициональная формула A называется *составленной* из $P_1, \ldots, P_m$, если никакая пропозициональная буква, отличная от $P_1, \ldots, P_m$, не входит в A.

Пример 2. $\mathscr{A} \vee (\neg \mathscr{A} \,\&\, \mathscr{B})$ есть пропозициональная формула, составленная из $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$.

Подстановка вместо пропозициональной буквы (или одновременно вместо нескольких различных пропозициональных букв) определяется как для переменной в § 18, за исключением того, что подстановка применяется теперь ко всем вхождениям без исключений (так как нет „связанных вхождений"). Кроме того, далее в этом параграфе мы воспользуемся аналогично определяемой операцией, называемой *заменой* некоторой формулы (или одновременно нескольких различных формул) *во всех вхождениях* (x из определения § 18 становится формулой). Эта операция определена однозначно, потому что вхождения не налегают друг на друга.

Теорема 3. Подстановка вместо пропозициональных букв. *Пусть* Γ — *перечень пропозициональных формул, а* E — *пропозициональная формула, составленная из различных пропозициональных букв* $P_1, \ldots, P_m$. *Пусть* $A_1, \ldots, A_m$ — *формулы. Пусть* Γ^* *и* E^* *получаются из* Γ *и* E *соответственно путем одновременной подстановки* $A_1, \ldots, A_m$ *вместо* $P_1, \ldots, P_m$ *соответственно. Если* $\Gamma \vdash E$, *то* $\Gamma^* \vdash E^*$. (Для случая пустой Γ: *если* $\vdash E$, *то* $\vdash E^*$.)

Доказательство. От A, B, C, входящих в постулаты группы A1, требуется только, чтобы они были формулами, фиксированными всюду в данном приложении каждого постулата. Рассмотрим теперь данный вывод E из Γ в чистом исчислении высказываний. Пусть формулы из Γ и формула E являются пропозициональными формулами, составленными из различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$, кроме которых в данный вывод могут входить еще некоторые $P_{m+1}, \ldots, P_{m+r}$. Пусть $A_{m+1}, \ldots, A_{m+r}$ — любые формулы. Вместо каждой пропозициональной буквы $P_1, \ldots, P_{m+r}$ всюду в каждую формулу данного вывода подставим соответствующую формулу $A_1, \ldots, A_{m+r}$. Для каждого применения постулата в данном выводе, A, B, C этого применения переходят при этой подстановке в выражения A^*, B^*, C^* (каждое вхождение A становится вхождением A^* и т. д.). Эти выражения A^*, B^*, C^* будут формулами, так как каждому применению одного из пунктов 2—5 определения пропозициональной формулы, использованному при построении A, B, C из пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_{m+r}$, соответствует применение пункта определения формулы, имеющего тот же номер, используемое при построении A*, B*, C* из формул $A_1, \ldots, A_{m+r}$. Поэтому мы снова будем иметь применение того же постулата. Таким образом, последовательность формул, в которую переходит данный вывод, является снова выводом с тем же самым анализом. Это и есть вывод E* из Г*.

Пример 3. Для иллюстрации доказательства этого правила рассмотрим следующий вывод $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ из $\mathcal{B}$.

1. $\mathcal{B}$ — исходная формула.
(a) 2. $\mathcal{B} \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$ — схема аксиом 1a.
3. $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ — правило 2, 1, 2.

Подставляя $\mathcal{B}$, $\neg \mathcal{A} \& \mathcal{C}$ (или $\exists c(a=c')$, $\neg a=0$) вместо $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, мы получим следующий вывод (b) (или (c)) с тем же анализом, что и (a):

1. $\neg \mathcal{A} \& \mathcal{C}$ — исходная формула.
(b) 2. $\neg \mathcal{A} \& \mathcal{C} \supset (\mathcal{B} \supset \neg \mathcal{A} \& \mathcal{C})$ — схема аксиом 1a.
3. $\mathcal{B} \supset \neg \mathcal{A} \& \mathcal{C}$ — правило 2, 1, 2.

1. $\neg a=0$ — исходная формула.
(c) 2. $\neg a=0 \supset (\exists c(a=c') \supset \neg a=0)$ — схема аксиом 1a.
3. $\exists c(a=c') \supset \neg a=0$ — правило 2, 1, 2.

Для иллюстрации правила подстановки на этих же двух примерах отметим, что (в силу (a))

(a′) $$\mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \supset \mathcal{B}.$$

Правило подстановки дает нам с помощью описанной подстановки

(b′) $$\neg \mathcal{A} \& \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} \supset \neg \mathcal{A} \& \mathcal{C},$$

(c′) $$\neg a=0 \vdash \exists c(a=c') \supset \neg a=0.$$

В одном случае (переход от (a′) к (b′)) мы используем это правило внутри чистого исчисления высказываний, для которого оно является выводимым правилом вспомогательного вывода. В другом случае, подставляя формулы в другом смысле, мы используем это правило для получения (c′) в арифметическом исчислении высказываний из (a′) чистого исчисления.

Очевидно, (a′), (b′), (c′) и т. д. все содержатся в высказывании: если A и B — формулы, то

(10′) $$\mathrm{B} \vdash \mathrm{A} \supset \mathrm{B}.$$

Смысл этого правила состоит просто в том, что если установлено отношение выводимости в терминах конкретных пропозициональных букв $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ..., то можно утверждать наличие того же отношения в виде схемы с метаматематическими буквами «A», «B», «C», ..., соответствующими любым формулам.

Сочетая это замечание с нашим прежним, что правило прямого вида Г ⊢ E всегда сохраняет силу при наличии дополнительных постулатов (§ 22), мы видим, что все результаты вида Г ⊢ E, полученные в этой главе (независимо от того, высказаны ли они здесь в терминах пропозициональных букв), сохраняют силу и для дальнейших глав, где более подробно принимается во внимание структура формул и где мы исходим из большей части перечня постулатов первоначальной формальной системы.

Замечание 1. Внутри чистого исчисления высказываний подстановка может производиться каждый раз вместо всего лишь одной переменной P_j, для чего правило применяется с $P_1, \ldots, P_{j-1}, P_{j+1}, \ldots, P_m$, взятыми в качестве $A_1, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_m$ [1]).

Формула называется *элементарной* (*для исчисления высказываний*), если она не имеет ни одного из видов $A \supset B$, $A \& B$, $A \vee B$, $\neg A$, где A и B — формулы.

Пример 4. $a = 0$, $\exists c(a = c')$ и $\forall c(a = c' \vee a = b)$ — элементарные формулы, а $\neg a = 0$ и $\neg a = 0 \& \exists c(a = c')$ — не элементарные. Пропозициональная формула элементарна только в том случае, если она является пропозициональной буквой.

Из того обстоятельства, что области действия операторов $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$ в формуле можно определить однозначно (§ 17), следует, что любая данная формула построена однозначно определенным образом из элементарных формул с помощью применений пунктов 2—5 определения формулы. Различные элементарные формулы, из которых таким образом построена одна или несколько формул, мы будем называть *различными элементарными компонентами* этой формулы или множества формул (*для исчисления высказываний*).

Пример 5. Различными элементарными компонентами формулы

$$a = 0 \vee (\neg a = 0 \& \exists c(a = c')) \supset \forall c(a = c' \vee a = b) \text{ служат}$$

$$a = 0,\quad \exists c(a = c'),\quad \forall c(a = c' \vee a = b).$$

Теорема 4. Обращение правила подстановки для пропозициональных переменных. *При тех же условиях, что и в теореме* 3, *если* $A_1, \ldots, A_m$ — *различные элементарные формулы, то из* $\Gamma^* \vdash E^*$ *следует* $\Gamma \vdash E$.

Доказательство. Рассмотрим данный вывод E^* из Γ^*. Пусть различными элементарными компонентами формул Γ^* и E^* служат формулы $A_1, \ldots, A_m$. Остальные формулы вывода пусть дают дополнительные различные элементарные компоненты $A_{m+1}, \ldots, A_{m+r}$. Пусть $P_{m+1}, \ldots, P_{m+r}$ будут пропозициональными буквами. Во всех формулах данного вывода заменим $A_1, \ldots, A_{m+r}$ одновременно во всех вхождениях на $P_1, \ldots, P_{m+r}$ соответственно. Рассмотрим любое применение постулата в данном выводе E^* из Γ^*. Легко видеть (используя лемму 3, как показано в § 17), что эти замены произойдут также внутри A, B, C рассматриваемого применения и породят пропозициональные формулы A′, B′, C′ (каждое вхождение A превратится во вхождение A′ и т. д.). Таким образом, последовательность пропозициональных формул, в которую перейдет данный вывод E^* из Γ^* при этих заменах, является выводом E из Γ с тем же анализом. Как видно из доказательства, обратное правило можно формулировать и так:

---

[1]) При этом необходима известная осторожность. Пусть P_1 есть A, P_2 есть B, A_1 есть B, A_2 есть C и формула E, в которую производится подстановка, есть $A \vee B$. Тогда после подстановки A_1, A_2 вместо P_1, P_2 в E получим формулу $B \vee C$. Если теперь производить каждый раз подстановку вместо всего лишь одной переменной, то получим, подставляя A_1 вместо P_1, формулу $B \vee B$; подставляя в получившуюся формулу A_2 вместо P_2, получаем $C \vee C$, т. е. вовсе не то, что нужно. Однако мы можем избежать этой неприятности, введя еще несколько дополнительных подстановок, например, подставив D в E вместо B (получится $A \vee D$), затем B вместо A (получится $B \vee D$) и затем C вместо D (получится $B \vee C$). Ср. пример 3 в § 30. — *Прим. ред.*

Теорема 4. (вторая форма). *Пусть* Γ^* — *формулы, а* E^* — *формула, имеющие различные элементарные компоненты* $A_1, \ldots, A_m$. *Пусть* $P_1, \ldots, P_m$ — *пропозициональные буквы, не обязательно различные. Пусть* Γ, E *получаются из* Γ^*, E^* *соответственно заменой одновременно во всех вхождениях* $A_1, \ldots, A_m$ *на* $P_1, \ldots, P_m$ *соответственно. Тогда* $\Gamma^* \vdash E^*$ *влечет* $\Gamma \vdash E$.

За исключением того, что «формула» здесь понимается не в смысле пропозициональной формулы, теорема 4 содержится в теореме 3.

Пример 6. Для иллюстрации доказательства предположим, что $\neg a = 0 \supset (\exists c(a = c') \supset \neg a = 0)$ входит в данный вывод E^* из Γ^* в качестве аксиомы по схеме 1а (как в примере 3 (с), шаг 2). Заменяя различные элементарные компоненты $a = 0$, $\exists c(a = c')$ пропозициональными буквами $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ соответственно (или оба раза буквой $\mathcal{A}$), получаем $\neg \mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \neg \mathcal{A})$ (или $\neg \mathcal{A} \supset (\mathcal{A} \supset \neg \mathcal{A})$), что является аксиомой по схеме 1а чистого исчисления высказываний. Но замена $a = 0$, $\exists c(a = c') \supset \neg a = 0$ (последняя формула не элементарна) на $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ или замена трех элементарных частей $a = 0$, $\exists c(a = c')$, $a = 0$ (где первая и третья не различны) на $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ не дала бы аксиомы по схеме 1а.

Пример 7. Для иллюстрации применения обратного правила воспользуемся тем обстоятельством (которое мы установим в примере 3 § 28), что $\mathcal{A} \vee (\neg \mathcal{A} \& \mathcal{B})$ недоказуема в чистом исчислении высказываний. Отсюда по обратному правилу следует, если подставить $a = 0$, $\exists c(a = c')$ вместо $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ соответственно, что $a = 0 \vee (\neg a = 0 \& \exists c(a = c'))$ недоказуема в арифметическом исчислении высказываний, т. е. эта формула нашей первоначальной системы не может быть доказана на основе одних только постулатов группы А1 (хотя она и доказуема с помощью полного перечня постулатов, § 39). Но из недоказуемости $\mathcal{A} \vee (\neg \mathcal{A} \& \mathcal{B})$ в чистом исчислении не вытекает, что $a = 0 \vee (\neg a = 0 \& \neg a = 0)$ недоказуема в арифметическом исчислении высказываний. Почему?

§ 26. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ, ЗАМЕНА

Пусть А и В — формулы. Введем запись «$A \sim B$» в качестве сокращения для записи $(A \supset B) \& (B \supset A)$. Символ «$\sim$» можно читать «эквивалентна». Он употребляется в качестве формального оператора, который, будучи помещен между двумя формулами системы, дает другую формулу этой системы. При опускании скобок ему приписывается ранг более высокий, чем другим формальным операторам (§ 17).

Мы будем говорить, что А *эквивалента* В в исчислении высказываний или в другой формальной системе, если в этой формальной системе $\vdash A \sim B$. Здесь слово «эквивалентна» употребляется в качестве метаматематического глагола, который, будучи помещен между двумя формулами системы, дает высказывание об этих формулах.

Теорема 5. *Если* А, В *и* С — *формулы, то*:

*1. $\vdash A \supset A$. *2. $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$.

*3. $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$.

*4. $A \supset (B \supset C) \vdash A \& B \supset C$. *5. $A \& B \supset C \vdash A \supset (B \supset C)$.

(Принцип тождества, цепное заключение, перестановка посылок, импортация, экспортация.)

*6. $A \supset B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$. *7. $A \supset B \vdash (C \supset A) \supset (C \supset B)$.

*8a. $A \supset B \vdash A \& C \supset B \& C$.	*8b. $A \supset B \vdash C \& A \supset C \& B$.
*9a. $A \supset B \vdash A \vee C \supset B \vee C$.	*9b. $A \supset B \vdash C \vee A \supset C \vee B$.

(Введение в импликацию заключения, посылки, конъюнктивного и дизъюнктивного члена.)

*10a. $\neg A \vdash A \supset B$. *10b. $A \vdash \neg A \supset B$. *11. $B \vdash A \supset B$.

(Доказательство импликаций путем опровержения посылки или доказательства заключения.)

*12. $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$. *13. $A \supset \neg B \vdash B \supset \neg A$.

*14°. $\neg A \supset B \vdash \neg B \supset A$. *15°. $\neg A \supset \neg B \vdash B \supset A$.

(Контрапозиция, контрапозиция со снятием двойного отрицания.)

*16. $A \supset B,\ B \supset A \vdash A \sim B$.

*17a. $A \sim B \vdash A \supset B$.	*17b. $A \sim B \vdash B \supset A$.
*18a. $A \sim B,\ A \vdash B$.	*18b. $A \sim B,\ B \vdash A$.

(По определению $\sim$ в терминах $\supset$ и &.)

*19. $\vdash A \sim A$. *20. $A \sim B \vdash B \sim A$. *21. $A \sim B,\ B \sim C \vdash A \sim C$.

(Свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности для эквивалентности.)

*22. $A \supset (B \supset C),\ \neg\neg A,\ \neg\neg B \vdash \neg\neg C$.

*23. $\neg\neg(A \supset B) \vdash \neg\neg A \supset \neg\neg B$.

*24. $\neg\neg(A \supset B),\ \neg\neg(B \supset C) \vdash \neg\neg(A \supset C)$.

*25. $\vdash \neg\neg(A \& B) \sim \neg\neg A \& \neg\neg B$; в частности,

$\vdash \neg\neg(A \sim B) \sim \neg\neg(A \supset B) \& \neg\neg(B \supset A)$.

(Дополнительные результаты, представляющие интерес в связи с интуиционистской системой.)

Доказательства. Восемь из этих утверждений уже установлены, а именно: *1 в § 20 (1′); *2 в § 21 (8′) : 1; *3 в § 21 (5′) : 3; *4 в § 21 (6′) : 2; *5 в § 21 (7′); *6 в § 21 (8′) : 2; *10a в § 23 (9′) : 6; и *11 в § 25 (10′). Остальные читатель может установить с помощью выводимых правил теоремы 2 для исчисления высказываний (§ 23). Например:

*9a. 1. $A \supset B,\ A \vdash B \vdash B \vee C$ — $\supset$-удал., $\vee$-введ.

2. $A \supset B,\ C \vdash B \vee C$ — $\vee$-введ.

3. $A \supset B,\ A \vee C \vdash B \vee C$ — $\vee$-удал., 1, 2.

4. $A \supset B \vdash A \vee C \supset B \vee C$ — $\supset$-введ., 3.

*12. 1. $A \supset B,\ \neg B,\ A \vdash B$ — $\supset$-удал.

2. $A \supset B,\ \neg B,\ A \vdash \neg B$.

3. $A \supset B,\ \neg B \vdash \neg A$ — $\neg$-введ., 1, 2.

4. $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$ — $\supset$-введ., 3.

*14. Аналогично *12, но с дополнительным применением $\neg$-удал. на шаге 3.

*22. 1. $A \supset (B \supset C),\ B \vdash A \supset C$ — $\supset$-удал., *3 (или § 21 (5′) : 2).

2. $A \supset (B \supset C),\ B \vdash \neg\neg A \supset \neg\neg C$ — *12 дважды, 1.

3. $A \supset (B \supset C), \neg\neg A \vdash B \supset \neg\neg C$ — $\supset$-удал., $\supset$-введ., 2.

4. $A \supset (B \supset C), \neg\neg A \vdash \neg\neg B \supset \neg\neg C$ — *13, *12, 3.

*23. Выбирая $A \supset B$, A, B в качестве A, B, C из *22 соответственно, получаем

1. $(A \supset B) \supset (A \supset B), \neg\neg(A \supset B), \neg\neg A \vdash \neg\neg B$. Но:
2. $\vdash (A \supset B) \supset (A \supset B)$ — *1. Следовательно:
3. $\neg\neg(A \supset B), \neg\neg A \vdash \neg\neg B$ — 1, 2.

* 24. Выбирая $A \supset B$, $B \supset C$, $A \supset C$ в качестве A, B, C из *22 соответственно:

1. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)), \quad \neg\neg(A \supset B), \quad \neg\neg(B \supset C) \vdash$ $\vdash \neg\neg(A \supset C)$. Но:
2. $\vdash (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ — $\supset$-введ., *6.

* 25. Выбирая A, B, A&B в качестве A, B, C из *22 соответственно и используя схему аксиом 3 (§ 19), получаем $\neg\neg A, \neg\neg B \vdash \neg\neg(A \& B)$. Применяя дважды *12 к схеме аксиом 4a, получаем $\vdash \neg\neg(A \& B) \supset \neg\neg A$, и т. д.

Замена. Пусть A — формальное выражение. Рассмотрим другое формальное выражение C. Может случиться, что A входит в C как (связная) часть, причем это возможно более чем одним способом. Допустим, что это действительно имеет место и что, если это осуществляется более чем одним способом, то выделено[1]) некоторое конкретное вхождение A в C. Обозначим теперь C вместе с выделенным конкретным вхождением A в C через «C_A». В обозначениях сочленения C_A есть EAF, где E и F — части (возможно, пустые), предшествующая и следующая за этой выделенной частью A. Пусть теперь B — какое-то формальное выражение. Результат *замены* этой выделенной части A выражения C на B есть выражение EBF. Мы будем его обозначать через «C_B».

Сопоставим это определение замены с определением подстановки, данным в § 18. Замена производится вместо некоторого определенного вхождения выражения, состоящего из одного или более символов. Подстановка же производится вместо всех вхождений некоторого единственного символа (если только не делается различия между „свободными“ и „связанными“ вхождениями — в этом случае она производится вместо всех свободных вхождений.) (В § 25 мы пользовались заменой во всех вхождениях. Это эквивалентно последовательному применению только что определенной замены к каждому из первоначальных не налегающих друг на друга вхождений некоторого выражения в другое выражение.)

Пример 1. Если A есть $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$, C_A есть $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \& \neg((\underline{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}}) \vee \neg \mathcal{A})$, а B есть $\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, то C_B есть $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \& \neg((\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A})$.

Предыдущее определение замены установлено для формальных выражений вообще. В случае, когда A, C_A и B являются пропозициональными формулами (как в примере 1), мы имеем следующую ситуацию (что может быть строго доказано при помощи метода определения областей действия для операторов (§ 17) в сочетании с определением пропозициональной формулы (§ 25)). Формулу C_A мы можем построить, отправляясь от выделенной

[1]) В тексте (см. пример 1) такое выделение производится путем подчеркивания. — *Прим. ред.*

части A, с помощью пунктов 2—5 определения пропозициональной формулы, а C_B может быть построена, отправляясь от B, параллельным образом. Число шагов при построении C_A из A, после того как A дано, не считая шагов, нужных для построения частей, не содержащих этого выделенного вхождения A, мы назовем *глубиной* этого вхождения A в C_A. Иными словами, глубина части A в C_A есть число операторов, внутри областей действия которых лежит эта часть.

Пример 1 (продолжение). Параллельные построения C_A из A и C_B из B мы сейчас укажем; глубина равна 3.

$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$	$\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
$(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A}$	$(\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A}$
$\neg ((\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A})$	$\neg ((\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A})$
$(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \& \neg ((\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A})$	$(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \& \neg ((\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A})$

Теорема 6. *Если* A, B, C_A *и* C_B — *пропозициональные формулы, связанные друг с другом, как в предыдущем определении замены, то* $A \sim B \vdash C_A \sim C_B$. (Теорема о замене.)

Доказательство проводится индукцией по глубине A в C_A; A и B — фиксированы на время индукции. Индукционное предложение состоит в том, что утверждение теоремы верно, при фиксированных A и B, для каждого C_A, в котором выделенное вхождение A находится на глубине d.

Базис: A находится в C_A на глубине 0. Тогда C_A есть A, C_B есть B и заключение теоремы есть просто $A \sim B \vdash A \sim B$, что справедливо в силу общих свойств символа $\vdash$.

Индукционный шаг: A находится в C_A на глубине $d+1$. В силу индуктивного предположения, $A \sim B \vdash M_A \sim M_B$ для любой пропозициональной формулы M_A, в которой выделенное вхождение A лежит на глубине d. Наше C_A должно иметь один из семи видов $M_A \supset N$, $N \supset M_A$, $M_A \& N$, $N \& M_A$, $M_A \vee N$, $N \vee M_A$, $\neg M_A$, где M_A и N — пропозициональные формулы и A находится в M_A на глубине d. По индуктивному предположению, $A \sim B \vdash M_A \sim M_B$. Далее, в силу надлежащей из следующих лемм (при выборе M_A в качестве A, M_B — в качестве B, а N — в качестве C леммы), $M_A \sim M_B \vdash C_A \sim C_B$. Следовательно, $A \sim B \vdash C_A \sim C_B$.

Леммы для замены. *Если* A, B *и* C — *формулы, то*:

*26.	$A \sim B \vdash A \supset C \sim B \supset C$.	*27.	$A \sim B \vdash C \supset A \sim C \supset B$.
*28a.	$A \sim B \vdash A \& C \sim B \& C$.	*28b.	$A \sim B \vdash C \& A \sim C \& B$.
*29a.	$A \sim B \vdash A \vee C \sim B \vee C$.	*29b.	$A \sim B \vdash C \vee A \sim C \vee B$.

*30. $A \sim B \vdash \neg A \sim \neg B$.

Доказательства.

*26. 1. $A \sim B \vdash B \supset A$ — &-удал. (*17b).

2. $A \sim B \vdash (A \supset C) \supset (B \supset C)$ — *6, 1.

3. $A \sim B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$ — аналогично, с помощью *17a и *6.

4. $A \sim B \vdash A \supset C \sim B \supset C$ — &-введ. (*16), 2, 3.

*27. Аналогично, используя *17a и *7, затем *17b и *7.

Пример 1 (окончание). Поставим $\sim$ между формулами каждой пары из параллельных построений C_A и C_B. Среди полученных четырех формул вторая выводима из первой в силу *29a, третья из второй в силу *30 и четвертая из третьей в силу *28b. Производя последовательно эти выводы, получим вывод $C_A \sim C_B$ из $A \sim B$ по методу доказательства теоремы 6.

Теорема 6 была сформулирована в терминах пропозициональных формул. Но, в силу правила подстановки (теорема 3, § 25), она применима и к формулам в других смыслах, лишь бы при этом A, B, C_A получались из пропозициональных формул одновременной подстановкой формул вместо пропозициональных букв. Отсюда — или прямо методом предыдущего доказательства теоремы 6:

Теорема 6 (вторая форма). *Если* A *и* B — *формулы*, C_A — *формула, построенная из некоторого конкретного вхождения* A *с помощью одних только операторов* $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, *а* C_B *получается из* C_A *заменой этого вхождения* A *на* B, *то* $A \sim B \vdash C_A \sim C_B$.

Пример 2. Пусть x — переменная, а A, B и C(x) — формулы. Согласно теореме, $A \sim B \vdash A \vee \forall x (A \supset C(x)) \sim B \vee \forall x (A \supset C(x))$. (Можно считать, что это получается из $\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{C} \sim \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ в результате подстановки A, B, $\forall x (A \supset C(x))$ вместо $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ соответственно.) Но в настоящий момент нам не хватает средств для вывода $A \vee \forall x (A \supset C(x)) \sim \sim A \vee \forall x (B \supset C(x))$ из $A \sim B$. Здесь подлежащее замене вхождение A находится внутри части $\forall x (A \supset C(x))$, и поэтому C_A не может быть построена из этого вхождения A с помощью одних только операторов $\supset$, &, $\vee$, $\neg$.

Следствие. *В условиях теоремы (в любой форме)* $A \sim B, C_A \vdash C_B$. (Свойство замены для эквивалентности.)

Это вытекает из теоремы 6, в силу *18a. (Обратно, теорема 6 получается из этого следствия и *19, если взять $C_A \sim C_A$ в качестве C_A теоремы. Теорема содержит леммы *26 — *30 как случаи, когда глубина = 1.)

Наши результаты дают возможность производить замену только для одного вхождения A за один раз. Но, применяя эту замену повторно, можно в конце концов заменить любое множество вхождений.

Цепи эквивалентностей. Теперь мы можем представлять доказательства эквивалентности между пропозициональными формулами с помощью следующего сокращения. Будем писать

$$\vdash C_0 \sim C_1 \sim \ldots \sim C_{n-1} \sim C_n,$$

если для каждого $i\,(i = 1, \ldots, n)$:
(a) формула C_i совпадает с C_{i-1} или (b_1) $\vdash C_{i-1} \sim C_i$ или (b_2) $\vdash C_i \sim C_{i-1}$ или (c) C_i получается из C_{i-1} заменой одного или нескольких вхождений A_i на B_i, где (1) $\vdash A_i \sim B_i$ или (2) $\vdash B_i \sim A_i$.

Здесь „$C_0 \sim C_1 \sim \ldots \sim C_{n-1} \sim C_n$“ мы рассматриваем как сокращение вместо $(\ldots((C_0 \sim C_1) \& (C_1 \sim C_2)) \& \ldots \& (C_{n-2} \sim C_{n-1})) \& (C_{n-1} \sim C_n)$; легко понять, что $\vdash C_j \sim C_k$ для любой пары j, k ($j, k = 0, \ldots, n$). Действительно, для каждого i мы имеем или $\vdash C_{i-1} \sim C_i$, или $\vdash C_i \sim C_{i-1}$, по *19 в случае (a), автоматически в случае (b) и по теореме 6 в случае (c). Отсюда $\vdash C_j \sim C_k$ для всех остальных пар j, k, в силу *19, *20 и *21. Этот метод применяется таким же образом, если всюду перед символом «$\vdash$» стоит любой перечень Γ исходных формул. Между звеньями цепи мы будем иногда вставлять в прямых скобках пояснительные замечания. (Например, см. доказательство формулы *57 в § 27.)

Этот метод цепи будет применяться также, если вместо $\sim$ у нас будет символ некоторого другого отношения, для которого будут установлены свойства рефлексивности, симметрии, транзитивности и замены. Далее, при отсутствии одного из этих свойств (кроме транзитивности) этот метод применим со следующими изменениями. Если отсутствует симметрия, опускаем (b_2) и (c)(2) и требуем $j \leqslant k$. Если отсутствует и рефлексивность, опускаем также (a) и требуем $j < k$. Если отсутствует свойство замены, опускаем (c). (Примеры из гл. VIII: отношение $=$ обладает всеми указанными свойствами; для $\leqslant$ отсутствует симметрия и свойство замены; для $<$ отсутствует также рефлексивность.)

§ 27. ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Теорема 7. *Если* A, B *и* C — *формулы, то*

*31. $\vdash (A \& B) \& C \sim A \& (B \& C)$. *32. $\vdash (A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$.

*33. $\vdash A \& B \sim B \& A$. *34. $\vdash A \vee B \sim B \vee A$.

*35. $\vdash A \& (B \vee C) \sim$
$\sim (A \& B) \vee (A \& C)$. *36. $\vdash A \vee (B \& C) \sim$
$\sim (A \vee B) \& (A \vee C)$.

*37. $\vdash A \& A \sim A$. *38. $\vdash A \vee A \sim A$.

*39. $\vdash A \& (A \vee B) \sim A$. *40. $\vdash A \vee (A \& B) \sim A$.

(Законы ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности, идемпотентности и элиминации.)

*41. $A \vdash A \supset B \sim B$. *42. $B \vdash A \supset B \sim B$.

*43. $\neg A \vdash A \supset B \sim \neg A$. *44. $\neg B \vdash A \supset B \sim \neg A$.

*45. $B \vdash A \& B \sim A$. *46. $B \vdash A \vee B \sim B$.

*47. $\neg B \vdash A \& B \sim B$. *48. $\neg B \vdash A \vee B \sim A$.

(Специальные случаи импликации, конъюнкции и дизъюнкции.)

*49°. $\vdash \neg \neg A \sim A$.

*50. $\vdash \neg (A \& \neg A)$. *51°. $\vdash A \vee \neg A$.

(Закон двойного отрицания, отрицание противоречия, закон исключениого третьего.)

*52°. $\vdash A \& (B \vee \neg B) \sim A$. *53. $\vdash A \vee (B \& \neg B) \sim A$.

*54. $\vdash A \& B \& \neg B \sim B \& \neg B$. *55°. $\vdash A \vee B \vee \neg B \sim B \vee \neg B$.

(Для упрощения дизъюнкции конъюнкций или конъюнкции дизъюнкций.)

*56°. $\vdash A \vee B \sim \neg (\neg A \& \neg B)$. *57°. $\vdash A \& B \sim \neg (\neg A \vee \neg B)$.

*58°. $\vdash A \supset B \sim \neg (A \& \neg B)$. *59°. $\vdash A \supset B \sim \neg A \vee B$.

*60°. $\vdash A \& B \sim \neg (A \supset \neg B)$. *61°. $\vdash A \vee B \sim \neg A \supset B$.

(Выражение каждого члена любой пары из $\supset$, $\&$, $\vee$ через другой член этой пары и $\neg$.)

*62°. $\vdash \neg (A \& B) \sim \neg A \vee \neg B$. *63. $\vdash \neg (A \vee B) \sim \neg A \& \neg B$.

(Перенос $\neg$ через $\&$ и $\vee$ (законы де Моргана [1847].)

*49a. $\vdash A \supset \neg \neg A$. *49b. $\vdash \neg \neg \neg A \sim \neg A$.

*49c. $\vdash A \vee \neg A \supset (\neg\neg A \supset A)$; следовательно, $\vdash A \vee \neg A \supset (\neg\neg A \sim A)$.

*50a. $\vdash \neg (A \sim \neg A)$.

*51a. $\vdash \neg\neg (A \vee \neg A)$.

*56a. $\vdash A \vee B \supset \neg (\neg A \& \neg B)$.

*51b. $\vdash \neg\neg (\neg\neg A \supset A)$.

*56b. $\vdash \neg A \vee B \supset \neg (A \& \neg B)$.

*57a. $\vdash A \& B \supset \neg (\neg A \vee \neg B)$.

*58a. $\vdash (A \supset B) \supset \neg (A \& \neg B)$.

*57b. $\vdash A \& \neg B \supset \neg (\neg A \vee B)$.

*58b—d. $\vdash A \supset \neg B \sim \neg (A \& B) \sim \neg\neg A \supset \neg B \sim \neg\neg (\neg A \vee \neg B)$.

*58e, f. $\neg\neg B \supset B \vdash \neg\neg A \supset B \sim A \supset B \sim \neg (A \& \neg B)$.

*58g. $\vdash (\neg\neg A \supset B) \supset \neg (A \& \neg B)$.

*59a. $\vdash \neg A \vee B \supset (A \supset B)$.

*60a. $\vdash A \& B \supset \neg (A \supset \neg B)$.

*59b. $\vdash (A \supset B) \supset \neg\neg (\neg A \vee B)$.

*60b. $\vdash A \& \neg B \supset \neg (A \supset B)$.

*59c. $\vdash (\neg A \supset B) \supset \neg\neg (A \vee B)$.

*60c. $\vdash \neg\neg A \& B \supset \neg (A \supset \neg B)$.

*61a. $\vdash A \vee B \supset (\neg A \supset B)$.

*60d—f. $\vdash \neg\neg A \& \neg B \sim \neg (A \supset B) \sim \neg (\neg A \vee B) \sim \neg\neg (A \& \neg B)$.

*60g—i. $\vdash \neg\neg (A \supset B) \sim \neg (A \& \neg B) \sim A \supset \neg\neg B \sim \neg\neg A \supset \neg\neg B$.

*62a. $\vdash \neg A \vee \neg B \supset \neg (A \& B)$.

*61b. $\vdash \neg (A \vee B) \sim \neg (\neg A \supset B)$.

(Дополнительные результаты, представляющие интерес в связи с интуиционистской системой.)

Доказательства для классической системы, за исключением *32, *34, *36, *38, *40, *53, *55. С целью некоторой экономии труда мы отложим доказательство этих семи утверждений до тех пор, пока нам не станет доступна двойственность (следствие из теоремы 8).

*35. 1. $A, B \vdash A \& B \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$ — &-введ., $\vee$-введ.

2. $A, C \vdash A \& C \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$ — &-введ., $\vee$-введ.

3. $A, B \vee C \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$ — $\vee$-удал., 1, 2.

4. $A \& (B \vee C) \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$ — &-удал., 3.

5. $\vdash A \& (B \vee C) \supset (A \& B) \vee (A \& C)$ — $\supset$-удал., 4.

6. $A \& B \vdash A$ — &-удал.

7. $A \& B \vdash B \vdash B \vee C$ — &-удал., $\vee$-введ

8. $A \& B \vdash A \& (B \vee C)$ — &-введ., 6, 7.

9. $A \& C \vdash A \& (B \vee C)$ — аналогично.

10. $(A \& B) \vee (A \& C) \vdash A \& (B \vee C)$ — $\vee$-удал., 8, 9.

11. $\vdash (A \& B) \vee (A \& C) \supset A \& (B \vee C)$ — $\supset$-введ., 10.

12. $\vdash A \& (B \vee C) \sim (A \& B) \vee (A \& C)$ — &-введ. (*16), 5, 11.

*49. 1. $\vdash \neg\neg A \supset A$ — $\neg$-удал., $\supset$-введ. (или схема аксиом 8).

2. $A, \neg A \vdash A$.

3. $A, \neg A \vdash \neg A$.

4. $A \vdash \neg\neg A$ — $\neg$-введ., 2, 3; и т. д.

*51. 1. $\neg (A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A$ — $\vee$-введ.

2. $\neg (A \vee \neg A), A \vdash \neg (A \vee \neg A)$.

3. $\neg (A \vee \neg A) \vdash \neg A$ — $\neg$-введ., 1, 2.

4. $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg\neg A$ — аналогично.
5. $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$ — $\neg$-введ., 3, 4.
6. $\vdash A \vee \neg A$ — $\neg$-удал., 5.

Замечание 1. Таким образом, в формальной системе без схемы аксиом 8, $\neg\neg B \supset B \vdash A \vee \neg A$, где B есть $A \vee \neg A$. Обратно, в интуиционистской[1] системе $A \vee \neg A \vdash \neg\neg A \supset A$, а именно:

1. $A \vdash \neg\neg A \supset A$ — *11.
2. $\neg A \vdash \neg\neg A \supset A$ — *10b.
3. $A \vee \neg A \vdash \neg\neg A \supset A$ — $\vee$-удал., 1, 2.

Таким образом, как $\neg\neg A \supset A$, так и $A \vee \neg A$ может быть выбрано в качестве единственного неинтуиционистского постулата классической системы.

*52. В силу *45 и *51.

*54. Аналогично в силу *47 и *50. Скобки в утверждении опущены, так как в силу *31 несущественно, каким образом ассоциируются члены конъюнкции.

*56. 1. $A, \neg A \& \neg B \vdash A$.
2. $A, \neg A \& \neg B \vdash \neg A$ — &-удал.
3. $A \vdash \neg(\neg A \& \neg B)$ — $\neg$-введ., 1, 2.
4. $B \vdash \neg(\neg A \& \neg B)$ — аналогично.
5. $\vdash A \vee B \supset \neg(\neg A \& \neg B)$ — $\vee$-удал., 3, 4, $\supset$-ввод.
6. $\neg(A \vee B), A \vdash A \vee B$ — $\vee$-введ.
7. $\neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)$.
8. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ — $\neg$-введ., 6, 7.
9. $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$ — аналогично.
10. $\vdash \neg(A \vee B) \supset \neg A \& \neg B$ — &-введ., 8, 9, $\supset$-введ.
11. $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \supset A \vee B$ — контрапозиция (*14), 10.

*57. Доказательство представляется в виде цепи эквивалентностей: $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \sim \neg\neg(\neg\neg A \& \neg\neg B)$ [*56] $\sim \neg\neg A \& \neg\neg B$ [*49] $\sim$ $\sim A \& B$ [*49].

*58—63. Построить эти доказательства методом цепи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ДЛЯ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ СИСТЕМЫ [2]. *49c. В силу замечания 1; по *49a, *16 и *17a, $\vdash \neg\neg A \supset A \sim (\neg\neg A \sim A)$. *51a. В силу доказательства *51 без шага 6. *51b. Дважды применить *12 к *49c и воспользоваться *51a. *58d. Использовать *63. *60f. Использовать *25.

[1] В подлиннике ошибочно сказано «в той же».—*Прим. перев.*

[2] Здесь, как и ниже в § 35, автор обходит молчанием интуиционистские доказательства ряда формул, в частности тех формул, которые для классической системы доказываются им с помощью двойственности. Рекомендуем читателю провести самостоятельно эти доказательства, а также другие доказательства, опущенные автором. (Следует обратить внимание на наличие значка ° у некоторых номеров формул!) Приводим, однако, наиболее сложное из них — интуиционистское доказательство формулы *36:

1. $A \vdash A \vee B$ — $\vee$-введ.
2. $A \vdash A \vee C$ — $\vee$-введ.

Заменить друг на друга два выражения A и B в третьем выражении C значит заменить[1]) в C одновременно все вхождения A на B и все вхождения B на A (примеры будут приведены ниже).

Теорема 8°. *Пусть* D — *пропозициональная формула, построенная из различных пропозициональных букв* $P_1, \ldots, P_m$ *и их отрицаний* $\neg P_1, \ldots, \neg P_m$ *с помощью одних только операторов* &, $\vee$. *Тогда формула* $D^\dagger$, *эквивалентная* $\neg D$, *получается в результате замены друг на друга в* D *символов* & *и* $\vee$ *и еще каждой буквы и ее отрицания.*

Другими словами, если D — *пропозициональная формула описанного рода, а* $D^\dagger$ — *результат описанной замены друг на друга в* D, *то* $\vdash \neg D \sim D^\dagger$.

Пример 1°. Возьмем $\neg \mathscr{A} \& (\neg \mathscr{B} \vee \mathscr{B})$ в качестве D, тогда $\neg D$ эквивалентна $\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \& \neg \mathscr{B})$.

Доказательство состоит по существу в следующем: символы $\neg$ в $\neg D$ можно последовательно сдвигать внутрь, пользуясь *62 и *63, а затем можно устранить, пользуясь *49, все двойные отрицания, в результате чего D превращается в $D^\dagger$ (подробности следуют).

Пример 1° (окончание).

$$\begin{aligned}
\vdash \neg(\neg \mathscr{A} \& (\neg \mathscr{B} \vee \mathscr{B})) &\sim \\
\neg\neg \mathscr{A} \vee \neg(\neg \mathscr{B} \vee \mathscr{B}) &\sim \\
\neg\neg \mathscr{A} \vee (\neg\neg \mathscr{B} \& \neg \mathscr{B}) &\sim \\
\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \& \neg \mathscr{B}).&
\end{aligned}$$

Для более подробного доказательства возьмем в качестве индукционного числа (возвратной индукции) число вхождений & и $\vee$ в D; назовем это число *степенью* D.

Базис: D — степени 0. Тогда для некоторой пропозициональной буквы P формула D есть P или D есть $\neg P$. Случай 1: D есть P. Тогда $\vdash \neg D \sim \neg P$ [допущение] $\sim P^\dagger$ [определение†] $\sim D^\dagger$ [допущение]. Случай 2: D есть $\neg P$.

---

3. $A \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$ — &-введ., 1, 2.
4. $B \& C \vdash B \vdash A \vee B$ — &-удал., $\vee$-введ.
5. $B \& C \vdash C \vdash A \vee C$ — &-удал., $\vee$-введ.
6. $B \& C \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$ — &-введ., 4, 5.
7. $A \vee (B \& C) \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$ — $\vee$-удал., 3, 6.
8. $\vdash A \vee (B \& C) \supset (A \vee B) \& (A \vee C)$ — $\supset$-введ., 7.
9. $A \vee C,\ A \vdash A \vee (B \& C)$ — $\vee$-введ.
10. $B,\ C \vdash B \& C \vdash A \vee (B \& C)$ — &-введ., $\vee$-введ.
11. $B,\ A \vdash A \vee (B \& C)$ — $\vee$-введ.
12. $B,\ A \vee C \vdash A \vee (B \& C)$ — $\vee$-удал., 11, 10.
13. $A \vee B,\ A \vee C \vdash A \vee (B \& C)$ — &-удал., 9, 12.
14. $(A \vee B) \& (A \vee C) \vdash A \vee B$ — &-удал.
15. $(A \vee B) \& (A \vee C) \vdash A \vee C$ — &-удал.
16. $(A \vee B) \& (A \vee C) \vdash A \vee (B \& C)$ — 13, 14, 15.
17. $\vdash (A \vee B) \& (A \vee C) \supset A \vee (B \& C)$ — $\supset$-введ., 16.
18. $\vdash A \vee (B \& C) \sim (A \vee B) \& (A \vee C)$ — &-введ. (*16), 8, 17.— *Прим. перев.*

[1]) Т. е. произвести замену в смысле § 26. — *Прим. перев.*

Аналогично, с помощью *49. Индукционный шаг: D — степени $g+1$. Тогда для некоторых пропозициональных формул A и B рассматриваемого типа, имеющих степени $\leqslant g$, формула D есть A & B или D есть A $\vee$ B. Случай 1: D есть A & B. Тогда $\vdash \neg D \sim \neg(A \& B)$ [допущение] $\sim \neg A \vee \neg B$ [*62] $\sim A^{\dagger} \vee B^{\dagger}$ [индуктивное предположение] $\sim (A \& B)^{\dagger}$ [определение $\dagger$] $\sim D^{\dagger}$ [допущение]. Случай 2: D есть A $\vee$ B. Аналогично.

Пример 2°. Подставляя по правилу подстановки (теорема 3, § 25) $\mathcal{B}$, $\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{C}$ вместо $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ в результат примера 1, имеем

$$\vdash \neg(\neg \mathcal{B} \& (\neg[\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{C}] \vee [\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{C}])) \sim \mathcal{B} \vee ([\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{C}] \& \neg[\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{C}]).$$

Действительно, для любых формул A и B

$$\vdash \neg(\neg A \& (\neg B \vee B)) \sim A \vee (B \& \neg B).$$

Как показывает этот пример, в формулировке теоремы 8 можно вместо пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$ говорить о произвольных формулах $A_1, \ldots, A_m$, считая при этом, что $A_1, \ldots, A_m$ сохраняются при построении D и остаются неприкосновенными в процессе замены, о которой идет речь в теореме. (Вторая форма теоремы 8.)

Следствие°. *Эквивалентность между двумя формулами* E *и* F *описанного в теореме* 8 *типа сохраняется при замене друг на друга в* E *и* F *символов* & *и* $\vee$.

Другими словами, *если* E *и* F – *две такие пропозициональные формулы, а* E′ *и* F′ *получаются в результате указанной замены друг на друга в* E *и* F *соответственно, то из* $\vdash E \sim F$ *следует* $\vdash E' \sim F'$ (принцип двойственности).

Пример 3°. В силу *52, $\vdash \mathcal{A} \& (\mathcal{B} \vee \neg \mathcal{B}) \sim \mathcal{A}$. Отсюда (беря $\mathcal{A} \& (\mathcal{B} \vee \neg \mathcal{B})$ в качестве E и $\mathcal{A}$ в качестве F), имеем $\vdash \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \& \neg \mathcal{B}) \sim \mathcal{A}$.

Доказательство. По условию, $\vdash E \sim F$. Подставим вместо каждой пропозициональной буквы P в E и F отрицание $\neg P$ этой буквы, отмечая эту операцию подстановки посредством «*». По правилу подстановки (теорема 3, § 25), получаем $\vdash E^* \sim F^*$. Затем заменим в E^* и F^* каждое двойное отрицание буквы $\neg\neg P$ на саму букву P, отмечая эту операцию посредством «‡». В силу закона двойного отрицания (*49) и свойства замены для эквивалентности (следствие из теоремы 6), $\vdash E^{*\ddagger} \sim F^{*\ddagger}$. Результатом этих двух операций является замена друг на друга в данной эквивалентности пропозициональных букв и их отрицаний. Теперь по теореме 6 (или *30), $\vdash \neg E^{*\ddagger} \sim \neg F^{*\ddagger}$. Выражая эти отрицания по теореме 8, получаем $\vdash E^{*\ddagger\dagger} \sim F^{*\ddagger\dagger}$. Последние два шага осуществляют замену друг на друга символов & и $\vee$, а также вторичную замену друг на друга пропозициональных букв и их отрицаний, которая возвращает их в прежнее состояние. Следовательно, наш окончательный результат есть $\vdash E' \sim F'$.

Пример 3° (окончание).

$\vdash E \sim F$.	$\vdash \mathcal{A} \& (\mathcal{B} \vee \neg \mathcal{B}) \sim \mathcal{A}$.
$\vdash E^* \sim F^*$.	$\vdash \neg \mathcal{A} \& (\neg \mathcal{B} \vee \neg\neg \mathcal{B}) \sim \neg \mathcal{A}$.
$\vdash E^{*\ddagger} \sim F^{*\ddagger}$.	$\vdash \neg \mathcal{A} \& (\neg \mathcal{B} \vee \mathcal{B}) \sim \neg \mathcal{A}$.
$\vdash \neg E^{*\ddagger} \sim \neg F^{*\ddagger}$.	$\vdash \neg(\neg \mathcal{A} \& (\neg \mathcal{B} \vee \mathcal{B}) \sim \neg\neg \mathcal{A}$.
$\vdash E^{*\ddagger\dagger} \sim F^{*\ddagger\dagger}$, т. е. $\vdash E' \sim F'$.	$\vdash \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \& \neg \mathcal{B}) \sim \mathcal{A}$.

Пример 4°. Подставляя любые формулы A, B вместо $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ в результат примера 3 (по теореме 3, § 25), получаем $\vdash A \vee (B \& \neg B) \sim A$. Это — *53.

Аналогично, *32, *34, *36, *38, *40, *55 следуют из *31, *33, *35, *37, *39, *54 соответственно в силу двойственности (следствие из теоремы 8), если A, B, C — пропозициональные буквы; далее пользуемся правилом подстановки (теорема 3) для случая, когда A, B, C — любые формулы.

Пример 5°. В силу двойственности (следствие из теоремы 8):

(a) Если $\vdash \mathscr{A} \vee \mathscr{B} \sim \mathscr{A}$, то $\vdash \mathscr{A} \& \mathscr{B} \sim \mathscr{A}$.

Но мы не можем заключить следующее:

(b) «Для любых формул A и B, если $\vdash A \vee B \sim A$, то $\vdash A \& B \sim A$». (Действительно, если взять $\mathscr{A}$, $\mathscr{B} \& \neg \mathscr{B}$ в качестве A, B в (b), то «$\vdash A \vee B \sim A$» превратится в утверждение «$\vdash \mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \& \neg \mathscr{B}) \sim \mathscr{A}$», которое истинно в силу *53, тогда как «$\vdash A \& B \sim A$» превратится в утверждение «$\vdash \mathscr{A} \& \mathscr{B} \& \neg \mathscr{B} \sim \mathscr{A}$», ложность которого будет показана в примере 4 § 28.) Объяснить. (В чем отличие этой ситуации от примеров 2 и 4?) Чтобы получить вторую форму этого следствия, надо потребовать, чтобы $A_1, \ldots, A_m$ были различными элементарными формулами (ср. теоремы 3 и 4). Так как (b) ложно, то по теореме 3 ложно и

(c) «$\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \sim \mathscr{A} \vdash \mathscr{A} \& \mathscr{B} \sim \mathscr{A}$».

Таким образом, двойственность имеет место только как правило вспомогательного вывода, но не как прямое правило.

Открытие двойственности в логике восходит к Шрёдеру [1877]. Применяя двойственность к формуле, где для сокращения были опущены скобки по соглашению, принятому в § 17, согласно которому & имеет ранг выше чем $\vee$, следует заботиться о том, чтобы области действия операторов были показаны правильно. (Поэтому мы обычно в этой связи предпочитаем не употреблять указанного соглашения по отношению к & и $\vee$.)

В качестве упражнения читателю предлагается проверить следующее добавление к рассмотренному следствию, вновь исследуя приведенное доказательство.

Следствие (вторая часть)°. *При тех же условиях из* $\vdash E \supset F$ *следует* $\vdash F' \supset E'$. (Соотношение обратной двойственности.)

Пример 6°. Для аксиомы $\mathscr{A} \& \mathscr{B} \supset \mathscr{A}$ обратно-двойственной формулой служит аксиома $\mathscr{A} \supset \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$. Доказуемая формула $\mathscr{A} \& \mathscr{B} \supset \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ является обратно-двойственной сама себе.

§ 28. ОЦЕНКА, НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ

С тех пор как была определена формальная система, или — в этой главе — подсистема, наши метаматематические исследования были посвящены главным образом тому, чтобы установить доказуемость некоторых формул и выводимость некоторых формул из других, т. е. построению логики и математики внутри формальной системы. Это — необходимая часть нашей программы; ее выполнение способствует обнаружению того, что эта формальная система является формализацией известной части математики.

Но в метаматематике имеются также и вопросы, относящиеся к формальной системе в целом. Один из них — это вопрос о „непротиворечивости", являющийся основным в программе Гильберта (§ 14).

Исчисление высказываний (и вообще любая формальная система, имеющая символ $\neg$ для отрицания) называется *(просто) непротиворечивой* системой, если ни для какой формулы A формулы A и $\neg$ A не являются обе доказуемыми в этой системе, и (*просто*) *противоречивой* в противном случае, если для некоторой формулы A одновременно $\vdash A$ и $\vdash \neg A$.

Это—строго метаматематическое определение. Оно опирается только на формальный символ $\neg$ и определения формулы и доказуемой формулы. Таким образом, доказательство непротиворечивости данной формальной системы становится точной математической проблемой, которую можно рассматривать в метаматематике.

Это определение и проблема непротиворечивости приобретают значение вне метаматематики, при интерпретации формальной системы как формализации содержательной теории, в которой символ $\neg$ выражает отрицание. Предложения, выраженные двумя арифметическими формулами A и $\neg A$, если A не содержит свободных переменных (а если A содержит свободные переменные, то предложения, которые получаются при каждом конкретном выборе значений переменных), взятые вместе, образуют противоречие. То же самое справедливо для случая пропозициональных формул, если пропозициональные буквы интерпретируются любыми конкретными предложениями. Таким образом, метаматематическое доказательство непротиворечивости формальной системы дает гарантию против возникновения противоречия в соответствующей содержательной теории.

Для исчисления высказываний (и вообще для любой формальной системы, которая содержит &-удаление и слабое $\neg$-удаление в качестве постулируемых или выводимых правил), предыдущее определение эквивалентно следующему. Система (*просто*) *непротиворечива*, если в ней имеется некоторая недоказуемая формула; (*просто*) *противоречива*, если любая формула доказуема. Действительно, если $\vdash A$ и $\vdash \neg A$, то, в силу слабого $\neg$-удаления (§ 23), $\vdash B$ для любой формулы B. В случае непротиворечивости $A \& \neg A$ есть пример недоказуемой формулы, потому что в противном случае в силу &-удаления $\vdash A$ и $\vdash \neg A$.

Определение непротиворечивости (в первой форме) и определение доказуемой формулы (например в первой форме, § 19) подсказывает план, по которому может развиваться попытка решить проблему доказательства непротиворечивости (этот план не является единственным возможным). Предположим, что мы нашли метаматематическое свойство формул, такое, что (a) аксиомы обладают этим свойством, (b) при каждом применении правила вывода, если посылки обладают этим свойством, то и заключение тоже, и (c) две формулы вида A и $\neg A$ не могут обе обладать этим свойством. Тогда в силу (a) и (b) каждая доказуемая формула будет обладать этим свойством и в силу (c) система оказывается непротиворечивой. В этом параграфе мы, следуя этому плану, дадим метаматематическое доказательство непротиворечивости исчисления высказываний.

Свойство формул, которое мы используем, подсказывается логической интерпретацией исчисления высказываний. Каждая пропозициональная буква рассматривается как переменная, значения которой являются предложениями, каждое из которых должно быть или истинным или ложным. Операторы исчисления $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ образуют из этих предложений другие предложения, истинность или ложность которых зависит только от истинности и ложности составляющих предложений в соответствии с таблицей, которая будет сейчас дана. (Поэтому операторы этого исчисления называются иногда „функциями истинности (от) предложений".) Свойство, о котором идет речь, состоит в том, что доказуемые пропозициональные формулы все оказываются тождественно истинными—в том смысле, что они представляют истинные предложения при любом возможном распределении истинных и ложных предложений в качестве значений пропозициональных букв, входящих в эти формулы.

Чтобы воспользоваться этой идеей в целях метаматематического доказательства непротиворечивости нашего исчисления, необходимо освободиться от употребления слов „предложение“, „истинность“ и „ложность“, которые имеют побочное значение, чуждое метаматематике. Это мы можем сделать, так как ничто существенное в описанном выше рассуждении не зависит от того, что значения пропозициональных букв являются предложениями, а также от природы истинности и ложности, кроме того, что истинное и ложное предложения отличны друг от друга.

Чтобы подчеркнуть чисто математический характер того, что мы собираемся делать, проведем аналогию с элементарной школьной арифметикой целых положительных чисел. В то время как числа 1, 2, 3, ... в этой арифметике рассматриваются как осмысленные в связи со счетом и измерением, при рассмотрении таблиц сложения и умножения под ними могут пониматься любые занумерованные объекты. С этой точки зрения арифметика имеет дело с операциями, т. е. с функциями $+$ и $\cdot$, определенными в области предметов $\{1, 2, 3, \ldots\}$, и зависит только от возможности узнавать и различать эти предметы, а не от их внутренней природы.

Мы теперь собираемся построить некоторую арифметику в аналогичном смысле для области только с двумя предметами и четырьмя функциями $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$. Это — сжатое описание того, что мы будем делать. Поскольку для метаматематики $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$ являются объектами, не имеющими смысла, более точное описание состоит в следующем. Мы введем некоторый метаматематический вычислительный процесс (называемый *проведением оценки*), согласно которому с каждым из символов $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$ будет связана некоторая функция из этой арифметики (или таблица для такой функции, называемая *таблицей истинности*). Тем самым с каждой пропозициональной формулой будет связана некоторая такая функция. Затем мы изучим метаматематические свойства пропозициональных формул, определенные в терминах соответствующих функций (или таблиц).

Ввиду того, что для этой абстрактной арифметики требуется только различие упомянутых двух предметов (*значений истинности*), несущественно, как мы их будем называть. Можно обозначать их символами «0» и «1», или «+» и «—», или «↑» и «↓», или «t» и «f» и т. д. Выберем последнюю пару символов, подсказывающую соответствующие значения „истинно“ (true) и „ложно“ (false) из логической интерпретации.

Начнем с рассмотрения пропозициональных букв как переменных, пробегающих область $\{t, f\}$.

Будем затем рассматривать операторы исчисления как функции над этой областью, определенные посредством следующих таблиц, аналогичных таблицам сложения и умножения в арифметике целых положительных чисел. По этим таблицам для любого заданного значения независимых переменных можно прочитать соответствующее значение функции.

$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ \ $\mathcal{B}$	t	f
t	t	f
f	t	t

$\mathcal{A} \& \mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ \ $\mathcal{B}$	t	f
t	t	f
f	f	f

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$

$\mathcal{A}$ \ $\mathcal{B}$	t	f
t	t	t
f	t	f

$\neg \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$	
t	f
f	t

(таблицы для $\neg$ и $\vee$ — те же, что были даны в примере 4 § 10 для $'$ и $\cdot$, где оба предмета записывались в виде «0» и «1»).

Тогда каждая пропозициональная формула A, составленная из данного перечня различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$, представляется как функция от этих букв, рассматриваемых как независимые переменные над областью $\{t, f\}$. Для каждой m-ки значений этих букв соответствующее значение функции может быть вычислено путем последовательного применения этих основных таблиц.

Пример 1. Пропозициональная формула $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, т. е. $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \& (\mathcal{B} \supset \mathcal{A})$ (§ 26), представляет функцию, имеющую следующую таблицу:

$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$

	$\mathcal{B}$: t	f
$\mathcal{A}$: t	t	f
f	f	t

Значение, стоящее в правом верхнем квадрате, вычисляется следующим образом:

$$\begin{array}{c}(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \& (\mathcal{B} \supset \mathcal{A}) \\ (\mathrm{t} \supset \mathrm{f}) \& (\mathrm{f} \supset \mathrm{t}) \\ \mathrm{f} \;\&\; \mathrm{t} \\ \mathrm{f}\end{array}$$

Выписывание таблиц в виде сетки квадратов свойственно случаю двух переменных (в этом случае оно помогает выявлять свойства функций). В общем случае m переменных $P_1, \ldots, P_m$ мы можем расположить 2^m возможных m-ок значений аргументов вертикально в некотором фиксированном порядке и выписать напротив них в *столбце значений* соответствующие значения функции.

Пример 2.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\neg [\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \& \mathcal{C}) \vee \neg \mathcal{A}]$
t	t	t	f
t	t	f	t
t	f	t	t
t	f	f	t
f	t	t	f
f	t	f	f
f	f	t	f
f	f	f	f

Пропозициональная формула E, составленная из различных пропозициональных букв $P_1, \ldots, P_m$, называется *тождественно истинной*, если столбец значений ее таблицы содержит одни только t, и *тождественно ложной*, если он содержит одни только f. Две пропозициональные формулы E и F, составленные из $P_1, \ldots, P_m$, называются *тождественно равными*, если их таблицы имеют один и тот же столбец значений. (Другими словами, тождественно истинная E представляет функцию-константу t, тождественно ложная E — функцию-константу f и тождественно равные E и F — одну и ту же функцию.)

В таком виде первые два из этих определений относятся к E, рассматриваемой в качестве пропозициональной формулы, составленной из некоторого перечня $P_1, \ldots, P_m$ различных пропозициональных букв, причем (согласно § 25) не обязательно каждая из этих букв входит в E. Допустим, что $P_1, \ldots, P_m$ — минимальный возможный перечень, т. е. перечень, состоящий в точности из всех различных пропозициональных букв, входящих в E. Тогда, если мы добавим к перечню другие буквы, каждая строка таблицы попросту распадется на некоторое число строк (именно, на 2^k строк, если было добавлено k букв), показывающих все возможные распределения значений для этих дополнительных букв, а процесс вычисления и соответствующее значение функции останутся прежними. Такое же замечание можно сделать по поводу определения тождественно равных E и F, причем в этом случае минимальный перечень — это перечень всех различных пропозициональных букв, входящих хотя бы в одну из формул E и F. Поэтому, если тождественная истинность (тождественная ложность, тождественное равенство) имеет место по отношению к минимальному перечню, то она имеет место и по отношению к любому другому перечню, и обратно. Поэтому ссылка на перечень может быть опущена.

Теорема 9. *Для того, чтобы пропозициональная формула* E *была доказуемой* (*или выводимой из тождественно истинных формул* Γ) *в исчислении высказываний, необходимо, чтобы она была тождественно истинной, т. е. если* $\vdash$ E, *то* E *тождественно истинна.*

Доказательство проводится возвратной индукцией по длине данного доказательства E с помощью следующих двух лемм:

Лемма 12a. *Пропозициональная формула, являющаяся аксиомой, тождественно истинна.*

Доказательство. Для каждой из десяти схем аксиом исчисления высказываний (постулаты 1a, 1b, 3—8 § 19 или—для интуиционистской системы—8[1] § 23 вместо 8) вычислением легко проверяется следующий факт: таблица, которая получается при всевозможных распределениях значений $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$ непосредственно для частей A, B, C, встречающихся в этой схеме, содержит в столбце значений только $\mathfrak{t}$. Это приводит к утверждению леммы для случая, когда в качестве A, B, C схем берутся просто пропозициональные буквы $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$.

Отсюда следует справедливость леммы. Действительно, рассмотрим любую аксиому, являющуюся пропозициональной формулой. Она получается из некоторой схемы, если выбрать в качестве A, B, C некоторые определенные пропозициональные формулы; пусть $P_1, \ldots, P_m$ — объединенный перечень различных пропозициональных букв, из которых состоят эти формулы. Независимо от того, каким образом выбраны m значений для $P_1, \ldots, P_m$ из числа $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$, получающаяся при этом тройка значений для A, B, C дает в свою очередь (как уже установлено) значение $\mathfrak{t}$ для всей аксиомы.

Лемма 12b. *Если при некотором применении правила вывода посылки являются тождественно истинными пропозициональными формулами, то и заключение является тождественно истинной пропозициональной формулой.*

Доказательство. Рассмотрим следующую таблицу:

A	B	A	A $\supset$ B	B
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$

Мы видим, что единственная пара значений A, B, которая дает значение $\mathfrak{t}$ обеим посылкам A и A $\supset$ B правила вывода исчисления (постулат 2), — эта пара $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}$, а эта пара дает значение $\mathfrak{t}$ для заключения B.

Поэтому, если A и B — пропозициональные формулы из $P_1, \ldots, P_m$, то любая m-ка значений для $P_1, \ldots, P_m$, дающая обеим посылкам значение $\mathfrak{t}$, дает это же значение заключению. По условию, посылки принимают значение $\mathfrak{t}$ при любой m-ке значений для $P_1, \ldots, P_m$. Следовательно, то же самое верно и для заключения.

Пример 3. Формула $\neg[\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \& \mathcal{C}) \vee \neg \mathcal{A}]$ не доказуема в исчислении высказываний, потому что в столбце значений ее таблицы встречаются $\mathfrak{f}$ (пример 2). Аналогично $\mathcal{A} \vee (\neg \mathcal{A} \& \mathcal{B})$ не доказуема, потому что принимает значение $\mathfrak{f}$, когда $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ принимают значения $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}$.

Следствие 1. *Для того, чтобы две пропозициональные формулы* E *и* F *были эквивалентны, необходимо, чтобы они были тождественно равны; иначе говоря, если* $\vdash E \sim F$, *то* E *и* F *тождественно равны.*

Доказательство. Если E и F эквивалентны, то, по определению, эквивалентность $E \sim F$ доказуема. Значит, по доказанной теореме, $E \sim F$ тождественно истинна. Рассматривая таблицу для $\sim$ (пример 1), мы видим, что $E \sim F$ может принять значение $\mathfrak{t}$ только в том случае, если E и F принимают или обе значение $\mathfrak{t}$, или обе значение $\mathfrak{f}$, т. е. если они принимают одно и то же значение. Так как $E \sim F$ тождественно истинна, т. е. всегда принимает значение $\mathfrak{t}$, то E и F всегда принимают одно и то же значение, т. е. они тождественно равны.

Пример 4. $\mathcal{A} \& \mathcal{B} \& \neg \mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ не эквивалентны, потому что они принимают различные значения (именно, $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{t}$ соответственно), когда, например, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ принимают значения $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}$.

Следствие 2. *Исчисление высказываний (просто) непротиворечиво; другими словами, ни для какой формулы* A *не имеют место одновременно* $\vdash A$ *и* $\vdash \neg A$.

Доказательство. Если пользоваться второй формой определения простой непротиворечивости (см. выше), то утверждение уже доказано в примере 3.

Чтобы получить доказательство, исходя непосредственно из первоначального определения, допустим, что одна из формул A и $\neg$A доказуема. Тогда, по теореме, эта формула будет тождественно истинной; с помощью таблицы для $\neg$ убеждаемся в том, что другая формула будет тождественно ложной, следовательно, не тождественно истинной и, значит, по теореме, недоказуемой.

Этим доказана непротиворечивость исчисления высказываний в терминах пропозициональных формул. Если A^* и $\neg A^*$ — доказуемые формулы исчисления с другим понятием формулы, то, в силу обратного правила подстановки (теорема 4 § 25), имеются доказуемые пропозициональные формулы A и $\neg$A. Таким образом, непротиворечивость распространяется и на случаи формул в других смыслах.

Это доказательство непротиворечивости, конечно, теряет силу при добавлении другой группы постулатов, хотя бы эта группа сама по себе и была непротиворечивой.

Доказательство непротиворечивости для исчисления высказываний впервые было дано Постом [1921]. (См. также Лукасевич [1925], Гильберт—Аккерман [1928].)

Арифметику области из двух предметов, использованную в этом параграфе для доказательства непротиворечивости, можно представлять себе как *некоторую* интерпретацию исчисления в следующем смысле. Таблицы оценок дают арифметические значения для операторов исчисления. Пропозициональные буквы рассматриваются как независимые переменные, пробегающие по области {t, f} арифметики. Каждая пропозициональная формула интерпретируется как предложение, что ее значение есть t при всяком выборе значений ее независимых переменных. По теореме 9, доказуемые формулы являются истинными при этой интерпретации. Действительно, предложение, которое при этой интерпретации выражается какой-либо формулой, эквивалентно тому, что эта формула обладает метаматематическим свойством тождественной истинности, определенным выше в терминах процесса вычисления с помощью t и f.

С другой стороны, при (*обычной*) *логической интерпретации* пропозициональные буквы рассматриваются как независимые переменные, пробегающие некоторую область предложений. Пропозициональная формула выражает тогда общее предложение, что истинными являются все те предложения, которые она дает при различных выборах предложений из этой области в качестве значений ее независимых переменных. Эта логическая интерпретация связывается с арифметической, если поставить предложения из рассматриваемой области в такое много-однозначное соответствие с двумя предметами t, f, что предложения, соответствующие t, истинны, а предложения, соответствующие f—ложны. Предложение, выраженное формулой при этой интерпретации, не эквивалентно никакому метаматематически определимому свойству этой формулы, за исключением случаев, когда в качестве значений пропозициональных букв допускаются лишь предложения из некоторых специальным образом ограниченных областей.

§ 29. ПОЛНОТА, НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Другая проблема, которую можно рассматривать средствами метаматематики,—это проблема „полноты" какой-либо данной формальной системы. Например, мы перечислили одиннадцать постулатов для исчисления высказываний (§ 19). Можем ли мы указать причину, по которой мы останавливаемся именно на них? Могли бы мы с успехом пытаться обнаружить другие постулаты, которые можно было бы добавить к прежним, чтобы стало больше доказуемых формул? Чтобы быть в состоянии ответить на эти вопросы, мы должны сперва установить некоторый критерий того, что желательно считать доказуемым в этой системе. Различным выбранным критериям будут соответствовать различные понятия полноты.

Можно дать этому критерию положительную форму и говорить, что система полна, если ее постулаты дают уже все, что нам нужно для некоторой цели. Допустим, например, что определено некоторое свойство формул системы; или же, пусть дана какая-то интерпретация формул системы. В таком случае упомянутое свойство будет состоять в том, что формулы выражают предложения, истинные при этой интерпретации. Относительно такого свойства или интерпретации определения непротиворечивости и полноты могут быть даны следующим образом.

Система *непротиворечива* по отношению к рассматриваемому свойству (или интерпретации), если доказуемы только формулы, обладающие этим свойством (или выражающие предложения, истинные при этой интерпретации). Система *полна* по отношению к этому свойству (или интерпретации), если доказуемы все формулы, обладающие этим свойством (или выражающие предложения, истинные при этой интерпретации).

В отличие от свойства простой непротиворечивости, рассмотренного в предыдущем параграфе, понятия непротиворечивости и полноты относительно некоторого свойства или интерпретации не всегда принадлежат метаматематике. Принадлежат они метаматематике или нет—это вопрос, который в каждом случае надо решать в соответствии с тем, может ли быть сформулировано в метаматематике данное свойство (или интерпретация).

Для исчисления высказываний у нас имеется свойство тождественной истинности (или, если угодно, интерпретация исчисления как арифметики на области из двух предметов), которое может быть сформулировано в метаматематике. Теорема 9 является, таким образом, метаматематической теоремой о непротиворечивости для некоторого свойства пропозициональных формул (или интерпретации исчисления).

Полнота относительно интерпретации означает следующее: система полна для данной интерпретации, если дедуктивные постулаты (или правила преобразования) позволяют доказать в системе все истинные предложения, которые правила образования позволяют в ней выразить.

Мы придем к другой формулировке понятия полноты, если дадим отрицательную форму критерию того, какие формулы должны быть доказуемыми. Будем говорить, что система полна, если постулаты дают все возможное при условии, что не наступает некоторый нежелательный результат. Результат, который сразу приходит на ум,—это простая противоречивость. Полученное таким путем понятие полноты всегда будет метаматематическим, если результат, которого надо избежать, может быть описан метаматематически (как, в частности, может быть описана простая противоречивость). Точные формулировки будут даны для конкретных формальных систем после того, как мы к ним перейдем.

Заметим, что всякая теорема непротиворечивости является теоремой о том, что только такие-то и такие формулы являются доказуемыми, а всякая теорема полноты утверждает, что доказуемы, по крайней мере, все такие-то и такие формулы.

Перейдем теперь от этого общего рассмотрения проблемы полноты к ее рассмотрению для исчисления высказываний. Мы покажем сначала (теорема 10), что это исчисление полно по отношению к свойству тождественной истинности.

Теорема 10° и следствие 1°. *Условия теоремы* 9 *и следствия* 1 *являются достаточными* (так же, как и необходимыми); *иначе говоря, если* E *тождественно истинна, то* $\vdash$ E, *и если* E *и* F *тождественно равны, то* $\vdash$ E $\sim$ F.

Доказательство будет основано на двух леммах. Пусть $P_1, \ldots, P_m$ — различные пропозициональные буквы. Если дана m-ка $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$ в качестве значений $P_1, \ldots, P_m$, то термином *соответствующая m-ка букв* обозначается последовательность $Q_1, \ldots, Q_m$ букв и букв с отрицаниями, где для каждого j ($j = 1, \ldots, m$) Q_j есть P_j или $\neg P_j$ в соответствии с тем, $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$ является данным значением P_j.

Пример 1. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ принимают значения $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{t}$ соответственно. Соответствующая m-ка букв есть $\mathcal{A}$, $\neg\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

Лемма 13. *Пусть* E — *пропозициональная формула из различных пропозициональных букв* $P_1, \ldots, P_m$; *пусть дана некоторая m-ка* $\mathfrak{t}$ *и* $\mathfrak{f}$ *в качестве значений* $P_1, \ldots, P_m$ *и пусть* $Q_1, \ldots, Q_m$ — *соответствующая m-ка букв. Тогда* $Q_1, \ldots, Q_m \vdash$ E *или* $Q_1, \ldots, Q_m \vdash \neg$ E *в соответствии с тем, значение* $\mathfrak{t}$ *или значение* $\mathfrak{f}$ *принимает* E *для данной m-ки значений.*

Пример 2. В соответствии с таблицей в примере 2 § 28 для $\neg[\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C}) \vee \neg\mathcal{A}]$ получаем восемь выводов:

$$\mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \mathcal{C} \quad \vdash \quad \neg\neg[\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C}) \vee \neg\mathcal{A}].$$

$$\mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \neg\mathcal{C} \quad \vdash \quad \neg[\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset (\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C}) \vee \neg\mathcal{A}].$$

$$\begin{array}{rrrcl}
\mathcal{A}, & \neg\mathcal{B}, & \mathcal{C} & \vdash & \neg[\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\supset(\mathcal{B}\&\mathcal{C})\vee\neg\mathcal{A}].\\
\mathcal{A}, & \neg\mathcal{B}, & \neg\mathcal{C} & \vdash & \neg[\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\supset(\mathcal{B}\&\mathcal{C})\vee\neg\mathcal{A}].\\
\neg\mathcal{A}, & \mathcal{B}, & \mathcal{C} & \vdash & \neg\neg[\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\supset(\mathcal{B}\&\mathcal{C})\vee\neg\mathcal{A}].\\
\neg\mathcal{A}, & \mathcal{B}, & \neg\mathcal{C} & \vdash & \neg\neg[\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\supset(\mathcal{B}\&\mathcal{C})\vee\neg\mathcal{A}].\\
\neg\mathcal{A}, & \neg\mathcal{B}, & \mathcal{C} & \vdash & \neg\neg[\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\supset(\mathcal{B}\&\mathcal{C})\vee\neg\mathcal{A}].\\
\neg\mathcal{A}, & \neg\mathcal{B}, & \neg\mathcal{C} & \vdash & \neg\neg[\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\supset(\mathcal{B}\&\mathcal{C})\vee\neg\mathcal{A}].
\end{array}$$

Доказательство леммы 13 проводится возвратной индукцией по числу (вхождений) логических символов в E; число это назовем *степенью*[1]).

Базис: E степени 0. Тогда E есть P_j для некоторого j. В данной m-ке значений значение P_j есть $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$. Случай 1: значение P_j есть $\mathfrak{t}$. Тогда Q_j есть P_j, иначе говоря, Q_j есть E; итак, по общим свойствам $\vdash$, $Q_1, \ldots, Q_m \vdash E$, что и требовалось показать, потому что E в этом случае принимает значение $\mathfrak{t}$. Случай 2: значение P_j есть $\mathfrak{f}$. Тогда аналогично Q_j есть $\neg E$ и потому $Q_1, \ldots, Q_m \vdash \neg E$, что и требовалось показать.

Индукционный шаг: E степени $d+1$. Тогда, для некоторых пропозициональных формул A и B из $P_1, \ldots, P_m$ степеней $\leqslant d$, E есть $A \supset B$, или $A \& B$, или $A \vee B$, или $\neg A$. Случай 1: E есть $A \supset B$. Возможны четыре подслучая в соответствии с тем, какие значения: $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}$, или $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, или $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{t}$, или $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}$, принимают формулы A, B для данной m-ки значений $P_1, \ldots, P_m$. Подслучай 2: A, B принимают значения $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$. Тогда (по правому верхнему значению в таблице для $\supset$) E принимает значение $\mathfrak{f}$, поэтому нам надо показать, что $Q_1, \ldots, Q_m \vdash \neg E$. Но по индуктивному предположению $Q_1, \ldots, Q_m \vdash A$, $Q_1, \ldots, Q_m \vdash \neg B$. К тому же, с помощью *41 или *44 получаем $A, \neg B \vdash \neg(A \supset B)$, т. е. $A, \neg B \vdash \neg E$. Поэтому $Q_1, \ldots, Q_m \vdash \neg E$, что и требовалось показать. Остальные случаи и подслучаи рассматриваются аналогично с помощью *41 — *48, *49a.

Лемма 14. *Пусть* E — *пропозициональная формула из различных пропозициональных букв* $P_1, \ldots, P_m$. *Если для каждой из* 2^m *m-ок* $\mathfrak{t}$ *и* $\mathfrak{f}$ *имеет место* $Q_1, \ldots, Q_m \vdash E$, *где* $Q_1, \ldots, Q_m$ — *соответствующая m-ка букв, то* $P_1 \vee \neg P_1, \ldots, P_m \vee \neg P_m \vdash E$.

Доказательство леммы 14. Надо $2^{m-1}+2^{m-2}+\ldots+1$ раз применить $\vee$-удаление. Например, если $m=2$, то по условию:

$$\text{(a)}\qquad \left\{\begin{array}{rl}
P_1, & P_2 \vdash E.\\
P_1, & \neg P_2 \vdash E.\\
\neg P_1, & P_2 \vdash E.\\
\neg P_1, & \neg P_2 \vdash E.
\end{array}\right.$$

В силу двух применений $\vee$-удаления:

$$\text{(b)}\qquad \left\{\begin{array}{rl}
P_1, & P_2 \vee \neg P_2 \vdash E.\\
\neg P_1, & P_2 \vee \neg P_2 \vdash E.
\end{array}\right.$$

В силу еще одного применения $\vee$-удаления:

$$\text{(c)}\qquad P_1 \vee \neg P_1, \quad P_2 \vee \neg P_2 \vdash E,$$

что и требовалось показать.

---

[1]) В подлиннике здесь degree, а в §§ 27 и 78 — grade. — *Прим. перев.*

Доказательство теоремы 10. Пусть E — пропозициональная формула из $P_1, \ldots, P_m$. По условию, E тождественно истинна, т. е. принимает значение $\mathfrak{t}$ для каждой m-ки из $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$ в качестве значений $P_1, \ldots, P_m$. Тогда, по лемме 13, выполнено условие леммы 14; итак, по лемме 14,

$$P_1 \vee \neg P_1, \ldots, P_m \vee \neg P_m \vdash E.$$

Отсюда, с помощью *51, $\vdash$ E.

Замечание 1. Все доказательство, за исключением последнего шага, проходит и в интуиционистской системе. Поэтому в последней, для любой пропозициональной формулы E, составленной из $P_1, \ldots, P_m$,

(a) $P_1 \vee \neg P_1, \ldots, P_m \vee \neg P_m \vdash E$, если E тождественно истинна,

(b) $P_1 \vee \neg P_1, \ldots, P_m \vee \neg P_m \vdash E \vee \neg E$.

Эта теорема выражает полноту дедуктивных правил исчисления высказываний для цели установления буквенных формул, тождественно истинных при рассмотренной арифметической интерпретации; следствие 1 утверждает, что эта дедуктивная теория полностью описывает равенство функций, определимых в арифметике двух предметов.

Следствие 2°. *Добавление недоказуемой пропозициональной формулы в качестве схемы аксиом к перечню постулатов исчисления высказываний нарушает простую непротиворечивость последнего.*

Доказательство. По теореме 10, эта пропозициональная формула получает значение $\mathfrak{f}$ для некоторого множества значений пропозициональных букв, которые она содержит. Возьмем такое множество значений и подставим в новую схему аксиом $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ вместо букв, получающих значение $\mathfrak{t}$, и $\mathcal{A} \mathbin{\&} \neg \mathcal{A}$ вместо букв, получающих значение $\mathfrak{f}$. Возникающая таким образом новая аксиома будет тождественно ложной. Значит, по следствию 1, она эквивалентна формуле $\mathcal{A} \mathbin{\&} \neg \mathcal{A}$, которая также тождественно ложна. Следовательно (в силу *18a), $\mathcal{A} \mathbin{\&} \neg \mathcal{A}$ будет доказуемой, а потому система — противоречивой (§ 28).

Следствие 2 утверждает, что исчисление высказываний не может быть расширено постулатами того же характера, что и уже имеющиеся, без нарушения простой непротиворечивости. Это — свойство полноты второго рода, описанной во вступительных замечаниях[1]).

Если дана m-ка из $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$ в качестве значений для $P_1, \ldots, P_m$ и $Q_1, \ldots, Q_m$ — соответствующая m-ка букв, мы будем называть $Q_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} Q_m$

[1]) При этом, однако, остается открытым вопрос, можно ли недоказуемую в исчислении высказываний пропозициональную формулу присоединить без появления противоречия к этому исчислению в качестве *аксиомы* (а не схемы аксиом). Оказывается, *присоединение к исчислению высказываний пропозициональной формулы* A *в качестве аксиомы тогда и только тогда нарушает простую непротиворечивость, когда* A *является тождественно ложной формулой* (например, к исчислению высказываний можно без появления противоречия присоединить формулу $\mathcal{A}$). Действительно, если A тождественно ложна, то, в силу следствия 1 теоремы 10, справедливо $\vdash A \sim A \mathbin{\&} A$; поэтому после присоединения A имеем, согласно *18a, $\vdash A \mathbin{\&} \neg A$, откуда (&-удаление) $\vdash A$, $\vdash \neg A$, т. е. противоречие. Обратно: если присоединение A вызывает противоречие, т. е. для некоторой формулы B имеет место $A \vdash B$, $A \vdash \neg B$, то ($\neg$-введение) $\vdash \neg A$, значит (теорема 9) $\neg A$ тождественно истинна и потому A тождественно ложна. Легко показать, далее, что *одновременное присоединение к исчислению высказываний пропозициональных формул* $A_1, \ldots, A_n$ *в качестве аксиом тогда и только тогда нарушает простую непротиворечивость, когда формула* $A_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A_n$ *тождественно ложна.* — *Прим. ред.*

($Q_1^\dagger \vee \ldots \vee Q_m^\dagger$, § 27) *соответствующей элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией).*

Пример 1 (окончание). Соответствующей элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией) служит $\mathscr{A} \& \neg \mathscr{B} \& \mathscr{C}$ $(\neg \mathscr{A} \vee \mathscr{B} \vee \neg \mathscr{C})$.

Теорема 11°. *Пропозициональная формула* E, *составленная из различных пропозициональных букв* $P_1, \ldots, P_m$, *эквивалентна некоторой формуле* F (*называемой совершенной дизъюнктивной нормальной формой формулы* E), *имеющей один из следующих двух видов. Если* E *принимает значение* t *для некоторых m-ок, составленных из* t *и* f *в качестве значений* $P_1, \ldots, P_m$, *то* F — *дизъюнкция* (*в некотором порядке*) *соответствующих элементарных конъюнкций. Если* E *тождественно ложна, то* F *есть* $P_1 \& \neg P_1$. (*Двойственным образом,* E *имеет совершенную конъюнктивную нормальную форму* G, *в которой переставлены роли* $\vee$ *и* &, *а также* t *и* f; $\vdash E \sim G$.)

Пример 2 (продолжение)°. $\neg [\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \supset (\mathscr{B} \& \mathscr{C}) \vee \neg \mathscr{A}]$ имеет с. д. н. ф $(\mathscr{A} \& \mathscr{B} \& \neg \mathscr{C}) \vee (\mathscr{A} \& \neg \mathscr{B} \& \mathscr{C}) \vee (\mathscr{A} \& \neg \mathscr{B} \& \neg \mathscr{C})$ и с. к. н. ф.

$$\neg \mathscr{A} \vee \neg \mathscr{B} \vee \neg \mathscr{C} \& \mathscr{A} \vee \neg \mathscr{B} \vee \neg \mathscr{C} \& \mathscr{A} \vee \neg \mathscr{B} \vee \mathscr{C} \& \mathscr{A} \vee \mathscr{B} \vee \neg \mathscr{C} \& \mathscr{A} \vee \mathscr{B} \vee \mathscr{C}.$$

Доказательство. Теорема верна в силу следствия 1 из теоремы 10, потому что (как легко усмотреть из вида с. д. н. ф. и таблиц оценок для $\neg$, &, $\vee$) E и F тождественно равны.

Исчисление высказываний не только дедуктивно полно в обоих смыслах (теорема 10 и следствие 2), оно также функционально полно в том смысле, что каждая из 2^{2^m} возможных функций истинности от m переменных $P_1, \ldots, P_m$ может быть представлена пропозициональной формулой, составленной из этих букв. Действительно, по данной таблице для функции можно построить с. д. н. ф. (определенную однозначно с точностью до порядка ее дизъюнктивных членов), представляющую эту функцию.

Эти три результата о полноте встречаются впервые у Поста [1921], изложенный метод доказательства теоремы 10 предложен Кальмаром [1934 — 1935]. (Автор также пользовался им в другой связи как применением $\vee$-удаления в одном из черновиков работы [1934].)

Гильберт и Аккерман [1928] излагают вариант доказательства Поста, следуя которому сначала устанавливается теорема о нормальной форме при помощи техники сведéния, восходящей частично к авторам по символической логике девятнадцатого столетия. Кратко говоря, пропозициональная формула E может быть сведена к с. д. н. ф. (или к с. к. н. ф.) с помощью метода цепи § 26 следующим образом. Во-первых, с помощью *58 или *59 удаляются вхождения $\supset$. Во-вторых, повторными применениями теоремы 8 вхождения $\neg$ передвигаются внутри формулы до тех пор, пока областями действия всех вхождений $\neg$ не сделаются части, состоящие только из одной буквы. В-третьих, в полученном выражении производятся все «умножения» с помощью дистрибутивного закона *35 (вместе с *33) как в обыкновенной алгебре с $\vee$, & в роли $+$, $\cdot$ (или, наоборот, с помощью *36 и *34 для с. к. н. ф.). В-четвертых, делаются упрощения, основанные (кроме *31 — *34) на идемпотентных законах *37, *38 и на *52 — *55, так что полученные в результате дизъюнктивные члены (для с. к. н. ф., конъюнктивные члены) или «термы» содержат каждый не более одного вхождения каждой буквы, за исключением случая, когда достигнута с. д. н. ф. $P_1 \& \neg P_1$ (с. к. н. ф. $P_1 \vee \neg P_1$). В-пятых, если нет исключительного случая, то в термы вводятся отсутствующие буквы с помощью *52 и *35 (*53 и *36). В-шестых, с помощью *31 — *34, *37, *38 буквы и отрицания букв располагаются внутри термов в нормальном порядке, в результате чего термы становятся элементарными конъюнкциями (элементарными дизъюнкциями) и устраняются повторения термов.

Пример 2 (окончание)°. Хотя наше доказательство теоремы 11 устанавливает, что $\neg[\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \supset (\mathscr{B} \,\&\, \mathscr{C}) \vee \neg \mathscr{A}]$ эквивалентна $(\mathscr{A} \,\&\, \mathscr{B} \,\&\, \neg \mathscr{C}) \vee$ $\vee (\mathscr{A} \,\&\, \neg \mathscr{B} \,\&\, \mathscr{C}) \vee (\mathscr{A} \,\&\, \neg \mathscr{B} \,\&\, \neg \mathscr{C})$, читателю рекомендуется свести одну формулу к другой только что описанным процессом. Четвертая операция дает $(\mathscr{A} \,\&\, \neg \mathscr{B}) \vee (\mathscr{A} \,\&\, \neg \mathscr{C}) \vee (\mathscr{B} \,\&\, \neg \mathscr{C} \,\&\, \mathscr{A})$. Отсюда, в силу *40, получаем „дизъюнктивную нормальную форму“ (не „совершенную“ $(\mathscr{A} \,\&\, \neg \mathscr{B}) \vee (\mathscr{A} \,\&\, \neg \mathscr{C})$ и далее, в силу *35, еще более короткую эквивалентную формулу (не д. н. ф.) $\mathscr{A} \,\&\, (\neg \mathscr{B} \vee \neg \mathscr{C})$ [1]).

§ 30. РАЗРЕШАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА, ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

В математике известны примеры таких общих вопросов, что на любой частный случай этого вопроса может быть дан ответ посредством заранее предписанного единого метода. Точнее, во всяком примере такого рода имеется бесконечный класс частных вопросов и связанная с этим классом процедура, причем тот и другая описаны заранее таким образом, что если мы выберем любой частный вопрос из этого класса, то наша процедура наверное будет применима к этому вопросу и даст нам на него определенный ответ «да» или «нет».

Пример 1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — полиномы с данными целыми коэффициентами. Является ли $f(x)$ делителем $g(x)$? Мы можем делить $g(x)$ на $f(x)$. Это деление можно осуществлять шаг за шагом заранее предписанным методом. Оно окончится после конечного числа шагов (число это будет зависеть от того, как мы считаем шаги, но это может быть полностью уточнено, и тогда оно будет зависеть от степени уравнения и величины коэффициентов). У нас при этом получится остаток. Мы можем определить, равен этот остаток 0 или отличен от 0. Если он равен 0, то ответ будет «да». Если он отличен от 0, то ответ будет «нет».

Пример 2. Обладает ли уравнение $ax + by = c$, где a, b, c — данные целые числа, решением в целых числах x и y? Имеется хорошо известный метод решения этого вопроса, использующий алгоритм Эвклида.

Такого рода метод, позволяющий ответить «да» или «нет» на любой частный случай общего вопроса, мы будем называть *разрешающей процедурой*, или *разрешающим методом* или *алгоритмом* для этого вопроса. Проблема нахождения такого метода называется *проблемой разрешимости* для этого вопроса. Эта проблема возникает в современной логике у Шрёдера [1895], Лёвенгейма [1915] и Гильберта [1918]. Настоящее изложение является только вводным, и мы постараемся впоследствии (§§ 60, 61) дать более точное определение того, что представляет собой разрешающий метод. Сейчас нам достаточно будет познакомиться с конкретными примерами разрешающих процедур.

---

[1]) Проблема получения возможно более „коротких“ формул, эквивалентных данной, является весьма актуальной, особенно в связи с применением аппарата исчисления высказываний к теории схем релейного действия. — *Прим. ред.*

Аналогично, может иметься *вычисляющая процедура* или *алгоритм вычисления* (а потому и *проблема вычислимости*) в связи с общим вопросом, который требует для ответа не «да» или «нет», а построения некоторого объекта.

Относительно произвольной данной формальной системы такого рода, как та, которой мы занимаемся, возникают некоторые общие вопросы. Например, „является ли формулой данное формальное выражение?" или „является ли доказательством данная конечная последовательность формальных выражений?", для которых разрешающий метод получается прямо из определений, на которых основана система. Действительно, так должно быть, если эта система дает законченную формализацию той или иной теории. Иную природу имеет вопрос „доказуема ли данная формула?" Чтобы понять эту разницу, сравним определения трех понятий: „формула", „доказательство", „доказуемая формула". Относительно каждого из этих трех определений, в применении его к каждому данному объекту, мы должны убедиться в том, что этот объект принадлежит определенному классу (если действительно это имеет место) путем рассмотрения некоторой последовательности объектов, а именно, для каждого из этих определений соответственно: формул, полученных попутно при построении данной формулы, отрезков данного доказательства, формул, входящих в доказательство данной доказуемой формулы. В случаях формулы и доказательства эта последовательность объектов содержится в данном объекте, из которого она может быть извлечена для рассмотрения. Но в случае доказуемой формулы эта последовательность объектов не содержится в данном объекте. Поэтому, если для последнего вопроса и существует разрешающая процедура, то она должна состоять в чем-то отличном от непосредственного или почти ненепосредственного применения определения и проблема разрешимости для этого вопроса не тривиальна. Она часто называется *проблемой разрешимости (в узком смысле)*[1]) для рассматриваемой формальной системы. Эта проблема решается для чистого исчисления высказываний теоремами 9 и 10 (§§ 28, 29).

Теорема 12°. *Алгоритм для определения того, доказуема или нет в исчислении высказываний пропозициональная формула* E, *дается процессом вычисления таблицы для функции от* $\mathfrak{t}$ *и* $\mathfrak{f}$, *представляемой формулой* E. E *доказуема или нет в соответствии с тем, только ли* $\mathfrak{t}$ *или нет входит в столбец значений.*

Далее, разрешающая процедура распространяется на формулы в других смыслах, для чего надо предварительно перейти к соответствующей пропозициональной формуле посредством одновременной замены различных элементарных компонент соответственно различными пропозициональными буквами (теоремы 3 и 4 § 25). Разрешающая процедура для эквивалентности содержится в методе для доказуемости в силу определения эквивалентности (§ 26), а кроме того, он может быть основан аналогично на следствиях 1 (из теорем 9 и 10). Проблема разрешимости для выводимости сводится к таковой для доказуемости, так как в силу выводимых правил для $\supset$ и & (теорема 2 § 23), в исчислении высказываний $D_1, \ldots, D_l \vdash E$ тогда и только тогда, когда $\vdash D_1 \& \ldots \& D_l \supset E$. (Другой ряд разрешающих процедур дается процессом приведения к с. д. н. ф., конец § 29.)

Интерпретация. Наш метаматематический результат, состоящий в том, что исчисление высказываний допускает интерпретацию в арифметике из двух объектов $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, является иллюстрацией обычной логической интерпретации (ср. конец § 28). Мы видим, что наше исчисление высказываний является под-

---

[1]) В оригинале «the decision problem» в отличие от просто «decision problem» раньше.—*Прим. перев.*

ходящим логическим инструментом, (1) когда конкретные высказывания таковы, что каждое, несомненно, является истинным или ложным или (2) когда мы хотим, чтобы в рассматриваемой теории имелось допущение, что каждое высказывание истинно или ложно. Для интуиционистов ситуация (1) имеет место в математике конечной области предметов, а также в рассуждениях с высказываниями об объектах бесконечной области, если эти высказывания относятся к типу, для которого имеются разрешающие методы (см. замечание 1 § 29). Примером ситуации (2) может служить употребление исчисления высказываний в классической математике.

Таблицы истинности с полной точностью определяют, каким образом операторы исчисления должны интерпретироваться в качестве функций истинности высказываний. Например, мы видим, что $\vee$ — это *неразделительное* „или": $A \vee B$ истинно, если A истинно, или B истинно, или оба они истинны. (*Разделительное* „или" может быть выражено так:

$$(A \vee B) \,\&\, \neg (A \,\&\, B).)$$

Импликация $A \supset B$ означает то же самое, что $\neg A \vee B$ (*59 § 27), и называется *материальной импликацией*. Справедливость $A \supset B$ не предполагает какой-либо необходимой связи идей между A и B. Например, утверждение «луна сделана из зеленого сыра» материально имплицирует $2+2=5$ (ибо посылка ложна). «Великая теорема» Ферма материально имплицирует $2+2=4$ (ибо заключение истинно). Некоторыми авторами это рассматривается как нечто парадоксальное (Льюис [1912], [1917]). Не входя глубоко в рассмотрение этого спорного вопроса, ограничимся следующими краткими замечаниями. Роль материальной импликации проще всего понять, если ее рассматривать в более широком контексте, взятом из полной арифметической системы. Запись $\forall x\,(A(x) \supset B(x))$ выражает отношение между $A(x)$ и $B(x)$ как переменными высказываниями (или „пропозициональными функциями от x"), называемое *формальной импликацией*. При построении формальной импликации с помощью материальной импликации и квантора общности свойство материальной импликации быть истинной при ложности первого члена приводит к тому, что теорема вида $\forall x\,(A(x) \supset B(x))$ может иметь место *тривиально*[1]) для некоторых значений x. С этой же целью в числовую систему вводится 0, а в теорию множеств — пустое множество, что приводит к более простым и сжатым формулировкам теорем. То же самое относится к свойству материальной импликации быть истинной при истинности второго члена. В английском языке $\supset$, пожалуй, лучше всего передается как «if..., then...» («если..., то...») или «only if» («только если»). Однако «импликация» является удобным названием[2]) для $\supset$; пользуясь этим названием, мы следуем обычному в математике употреблению одного и того же обозначения для аналогичных понятий, возникающих в смежных конкретных теориях. (Например, большое число различных видов «сложения» и «умножения» в математике.) Оператор $\supset$ имеет характер импликации в нашей формальной системе, в силу двух ее свойств, выраженных теоремой о дедукции и правилом 2 (т. е. двумя $\supset$-правилами теоремы 2). Таким образом, он представляет логическое следование не в каком-либо априорном смысле, а в смысле, определенном для этой формальной системы ее дедуктивными постулатами.

Другие формы исчисления высказываний. В силу *56 — *61, функциональная полнота исчисления высказываний (конец § 29) получается и в том случае, если в качестве примитивных операторов исчисления (формальных символов) взять $\neg$ и только один из трех других операторов $\supset$, $\&$, $\vee$

[1]) В подлиннике — vacuously. — *Прим. перев.*

[2]) По-английски глагол implies означает «влечет», а также «подразумевает» или «предполагает»; одним из общепонятных значений термина implication служит «логическое следование». — *Прим. перев.*

и остальные два из $\supset$, &, $\vee$ определить как символы для сокращения через эти примитивные (как был определен $\sim$ в § 26). Далее, возможна редукция к одному единственному примитивному оператору | (называемому „альтернативным отрицанием“ или „штрихом Шеффера“ [1913*]) с таблицей:

$\mathscr{A} \mid \mathscr{B}$			
	$\mathscr{B}$	t	f
$\mathscr{A}$	t	f	t
	f	t	t

Затем определяют $\neg \mathscr{A}$ как $\mathscr{A} \mid \mathscr{A}$ и $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ как $(\neg \mathscr{A}) \mid (\neg \mathscr{B})$.

Возможно и такое построение исчисления высказываний, при котором правило подстановки, полученное в теореме 3 § 25 в качестве правила вспомогательного вывода, постулируется в качестве прямого правила:

$$\frac{E}{E^*}.$$

В этом случае пропозициональные буквы называются *пропозициональными переменными* и вместо схем аксиом с метаматематическими переменными «А», «В», «С» используются соответствующие этим схемам конкретные аксиомы с формальными переменными $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$. Прямое правило подстановки строится обычно в применении к одной переменной за один раз (см. замечание 1 § 25).

Пример 3. Мы имеем при этом $\mathscr{A} \supset (\mathscr{B} \supset \mathscr{A})$ в качестве аксиомы 1a. Чтобы получить отсюда доказательство $A \supset (B \supset A)$ для каких-нибудь данных формул A и B, мы поступим так. Если A не содержит $\mathscr{B}$, подставим сначала A вместо $\mathscr{A}$, затем B вместо $\mathscr{B}$. Если A содержит $\mathscr{B}$, пусть P — пропозициональная буква, отличная от $\mathscr{A}$ и не входящая в A; подставим последовательно P вместо $\mathscr{B}$, A вместо $\mathscr{A}$, B вместо P.

Это—более обычный метод построения исчисления высказываний[1]); избранный нами метод, использующий схемы аксиом, принадлежит Нейману [1927]. Во всяком случае, правила вывода должны иметь характер схем, т. е. они должны содержать метаматематические переменные, потому что для них должно быть предусмотрено бесконечно много применений. Для исчисления с прямым правилом подстановки понятие доказуемости остается прежним (это мы предоставляем доказать читателю), но отношение выводимости расширяется. Теорема о дедукции и другие зависящие от нее правила вспомогательного вывода теперь справедливы лишь с ограничением, наложенным на употребление пропозициональных переменных во вспомогательных выводах, и это ограничение формулируется по отношению к новому правилу подстановки точно так же, как рассмотренное прежде ограничение в связи с правилами 9 и 12 для индивидуальных переменных в исчислении предикатов[2]).

При каждом из этих различных способов построения исчисления высказываний как формальной системы (а имеются и другие способы) мы, по существу, получаем одно и то же исчисление. При различных выборах примитивных операторов класс доказуемых формул и интерпретация в виде арифметики из двух объектов не меняются (с точностью до подробностей, относящихся к этому выбору). Все эти системы и общая теория, которая получается абстракцией

[1]) Он изложен, в частности, в книге Гильберта и Аккермана [1928].—*Прим. ред.*

[2]) Для исчисления высказываний с прямым правилом подстановки присоединение всякой недоказуемой пропозициональной формулы в качестве аксиомы вызывает противоречие в силу следствия 2 к теореме 10, так как аксиомы выполняют в этом случае функции схем аксиом (ср. подстрочное примечание на стр. 123).—*Прим. ред.*

от частностей их различных формулировок, называются *классическим*, или *двузначным, исчислением высказываний*.

Другие исчисления высказываний. Имеются и другие исчисления высказываний, которые считаются таковыми ввиду того, что высказывания рассматриваются в них только в связи с тем, как они образованы из других высказываний, взятых целиком. Каждое такое исчисление высказываний, следовательно, содержит определение формулы, подобное предыдущим (с точностью до конкретного выбора операторов), но существенно отличается от рассмотренной здесь системы.

Один класс примеров получается путем обобщения двузначного исчисления высказываний на *n-значные исчисления высказываний* для любого положительного целого числа $n \geqslant 2$. Эти исчисления для $n > 2$ были рассмотрены Лукасевичем [1920] ($n=3$) и Постом [1921] (для любого n). Это—исчисления, которые можно рассматривать на основе таблиц истинности в некоторой арифметике n предметов[1]), подобно тому как классическая система рассмотрена нами на основе двух предметов. (См., например, Лукасевич и Тарский [1930], Россер и Туркетт [1945, 1949, 1952][2]).)

Другим примером служит *интуиционистское исчисление высказываний* (Гейтинг [1930]), которое было задумано как формализация интуиционистского математического обращения с высказываниями. Как замечено в § 23, из нашей группы постулатов А1 (или группы А) мы получим перечень постулатов для интуиционистского исчисления высказываний (соответственно предикатов), просто заменяя схему аксиом 8 схемой аксиом 8^I. Это—не первоначальный перечень постулатов Гейтинга, а другой, предложенный Генценом [1934—35]. (Постулаты Гейтинга для исчисления предикатов имеются в его работе [1930a].) Действительно ли наши результаты и теоремы, помеченные символом «°» как неустановленные интуиционистски (по крайней мере в рамках нашего исследования), неверны для интуиционистской системы—это вопрос, который в каждом случае нуждается в дальнейшем рассмотрении. Мы вернемся к этому позже (§§ 80, 82). Результат настоящего параграфа, утверждающий, что существует разрешающий метод для исчисления высказываний, относится к числу результатов, справедливых и для интуиционистской системы (теорема 56 (d) § 80). Известно, что в интуиционистском исчислении высказываний никакой из четырех операторов не выразим в терминах трех остальных (Вайсберг [1938], Мак-Кинси [1939]) и что это исчисление нельзя рассматривать на основе таблиц истинности ни при каком конечном n (Гёдель [1932])[3]), но можно при $n=\aleph_0$ (Яськовский [1936]).

Еще дальше от рассмотренной здесь точки зрения классического исчисления отстоят *исчисления строгой импликации* (Льюис [1912]) и *модальные исчисления высказываний*, которые имеют дело с „возможностью", „необходимостью" и т. п. (ср. Льюис и Лангфорд [1932], Фэйс [1937—38], Мак-Кинси и Тарский [1948], Фэйс и Мак-Кинси [1952]).

---

[1]) При этом некоторые p из этих n объектов называются *выделенными* ($1 \leqslant p < n$); табличная интерпретация исчисления состоит в том, что каждому логическому оператору сопоставляется некоторая функция на области из n предметов со значениями из той же области. Формула называется истинной, если при любых значениях аргументов она получает в интерпретации выделенное значение.—*Прим. перев.*

[2]) Заслуживают внимания также работы С. В. Яблонского [1954, 1956].—*Прим. ред.*

[3]) Если бы существовала интерпретация интуиционистского исчисления высказываний, как n-значного исчисления (см. предыдущее прим. перев.), то формула $(\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2) \vee \ldots \vee (\mathcal{A}_n \supset \mathcal{A}_{n+1})$ (дизъюнкция всех членов $\mathcal{A}_i \supset \mathcal{A}_j$, $i > j$, $i, j \leqslant n+1$) всегда принимала бы выделенное значение (потому что каждая дизъюнкция с членом $A \supset A$ доказуема) и была бы доказуема; по теореме 57 гл. XV этой книги, была бы доказуема некоторая импликация $\mathcal{A}_i \supset \mathcal{A}_j$, $i \neq j$, что противоречит теореме 9.—*Прим. перев.*

Глава VII

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

§ 31. ПРЕДИКАТНЫЕ ФОРМУЛЫ

В этой главе мы будем изучать ту часть нашей формальной системы, которая получится, если пользоваться всеми постулатами группы А.

Исчисление высказываний, изученное в предыдущей главе, является формализацией логических отношений, зависящих только от того, каким образом некоторые высказывания составлены из более простых; при этом рассматривались только такие операции композиции, при которых эти более простые высказывания входят в сложное в качестве его неразложимых частей.

В исчислении предикатов делается дальнейший шаг анализа и разрешается рассматривать также „субъектно-предикатную" структуру простых предложений и пользоваться операциями композиции, зависящими от этой структуры.

Этот анализ все еще не принимает во внимание всех особенностей структуры арифметических предложений. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы, как и в предыдущей главе, введем новое понятие формулы, устраняющее несущественные подробности арифметического определения формулы и открывающее дорогу также и для других приложений.

Начнем с введения формальных выражений нового вида, являющихся обобщением пропозициональных букв, введенных в § 25, а именно:

$$\mathcal{A},\ \mathcal{A}(a),\ \mathcal{A}(a,\ b),\ \ldots,\ \mathcal{B},\ \mathcal{B}(a),\ \mathcal{B}(a,\ b),\ \ldots,\ \mathcal{C},\ \mathcal{C}(a),\ \mathcal{C}(a,\ b),\ \ldots .$$

Эти выражения мы будем называть *предикатными буквами с приданными переменными*, или *переменными в называющей форме*. Каждый из символов, употреблявшихся прежде в качестве пропозициональных букв, образует теперь предикатную букву с любым числом $n \geqslant 0$ приданных переменных, и для $n = 0$ предикатная буква является пропозициональной буквой. n приданных переменных могут быть любыми n различными переменными. Говорят, что различные выборы n различных приданных переменных вместе с данной предикатной буквой образуют различные *называющие формы* этой предикатной буквы, например $\mathcal{A}(a,\ b)$, $\mathcal{A}(b,\ a)$ и $\mathcal{A}(c,\ d)$ — три называющие формы предикатной буквы, образованной $\mathcal{A}$ и двумя приданными переменными, но $\mathcal{A}(a)$ и $\mathcal{A}(a,\ b,\ c)$ — это уже другие предикатные буквы, а $\mathcal{A}(a,\ a)$ не является предикатной буквой. Обычно бывает достаточно в пределах рассуждения иметь дело с предикатными буквами, представленными каждая только в одной называющей форме, т. е. взятыми каждая вместе с фиксированной последовательностью n приданных переменных. Обычно мы выбираем в качестве этих n приданных переменных первые по порядку n переменных из некоторого данного бесконечного перечня переменных $\mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_2,\ \mathrm{a}_3,\ \ldots$ (здесь мы обычно имеем дело с перечнем $a,\ b,\ c,\ \ldots$)[1].

[1] Следует различать понятие просто „предикатной буквы" и понятие „предикатной буквы с приданными переменными", или „предикатной буквы с переменными в называющей

В индуктивном определении *предикатной формулы*, которое следует за этим абзацем, в качестве термов рассматриваются только переменные. Однако мы предпочитаем говорить в одних случаях «терм», а в других — «переменная», для того чтобы было ясно, каким образом нужно произвести обобщение, если в дальнейшем класс термов будет расширен.

1. Если $P(a_1, \ldots, a_n)$ — предикатная буква с приданными переменными, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ — *формула*. 2 — 5. Если A и B — *формулы*, то $(A) \supset (B)$, $(A) \& (B)$, $(A) \vee (B)$ и $\neg (A)$ — *формулы*. 6 — 7. Если x — переменная, а A(x) — *формула*, то $\forall x (A(x))$ и $\exists x (A(x))$ — *формулы*. 8. Никаких *формул*, кроме получающихся согласно 1 — 7, нет.

Пример 1. В силу 1, $\mathscr{A}(b, a)$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{A}(a, b)$ и $\mathscr{A}(a, a)$ — предикатные формулы. Нам здесь достаточно иметь для начала две называющие формы $\mathscr{A}(a, b)$ и $\mathscr{B}$. Последовательно применяя 3 и 2 (и опуская скобки по обычным соглашениям § 17), получаем предикатные формулы $\mathscr{A}(b, a) \& \mathscr{B}$ и $\mathscr{A}(b, a) \& \mathscr{B} \supset \mathscr{A}(a, b)$. Наконец, в силу 6, $\forall b (\mathscr{A}(b, a) \& \mathscr{B} \supset \mathscr{A}(a, b))$ — предикатная формула.

В этой главе там, где употребляются слова «терм» и «формула» без уточнения их значения, их можно понимать и в смысле свободной переменной и предикатной формулы соответственно, и в соответствующих арифметических смыслах (§ 17). Обе формальные системы, имеющие одну и ту же группу A (§ 19) в качестве перечня постулатов, но различающиеся указанным образом по их правилам образования, мы будем различать как *чистое исчисление предикатов* и *арифметическое исчисление предикатов*.

Прежде чем приступить к метаматематике, посмотрим, каким образом интерпретируется этот формализм в качестве исчисления предикатов.

В словесных языках любое предложение выражается посредством фразы. При этом „предикат"[1]) выражается посредством неполной фразы или остова фразы, содержащего пустое место. Например, «___есть человек» выражает некоторый предикат. Если заполнить пустое место именем какого-нибудь субъекта[2]), например «Сократ», то получится фраза—в этом примере «Сократ есть человек». Эта ситуация может быть удобно описана с помощью современного математического понятия „функции" (§ 10). С этой точки зрения предикат является функцией от одной переменной. Эта переменная изменяется в некоторой области, в которой содержатся элементы Сократ, Харон и т. д. Каждому члену этой области функция сопоставляет некоторое предложение; иначе говоря, если независимая переменная принимает значение—элемент области, то предикат принимает значение—соответствующее предложение. Итак, предикат—это *пропозициональная функция от одной переменной*. Предикаты часто называются „свойствами", например в гл. II и III. В этой терминологии «___ есть человек» выражает свойство P: быть человеком, а «Сократ есть

форме" (в переводе, так же как и в оригинале, слова „с приданными переменными" и т. п. часто опускаются, что не приводит к двусмыслице, так как из контекста всегда ясно, о чем идет речь). Пусть C — пропозициональная буква и $z_1, \ldots, z_k$ — попарно различные переменные; формальное выражение $C(z_1, \ldots, z_k)$ называется *предикатной буквой с приданными переменными*, или *предикатной буквой с переменными в называющей форме*. Две предикатные буквы с приданными переменными $C(z_1, \ldots, z_k)$ и $D(u_1, \ldots, u_l)$ называются *называющими формами одной и той же предикатной буквы*, если C совпадает с D, а k совпадает с l. Таким образом, понятие *предикатной буквы* возникает путем абстракции как то общее, что имеется у всех предикатных букв с приданными переменными, являющимися называющими формами одной и той же предикатной буквы. — *Прим. ред.*

[1]) Слово „predicate", переводимое здесь как „предикат", по-английски означает также „сказуемое." — *Прим. перев.*

[2]) Слово „subject", переводимое здесь как „субъект", по-английски означает также „подлежащее". — *Прим. перев.*

человек» выражает предложение, что Сократ обладает свойством P. Другой употребительный в этой связи термин—„класс"; «Сократ есть человек» выражает, что Сократ принадлежит классу C людей. (Понятие „предиката", понимаемого в чисто грамматическом смысле как сказуемое, т. е. как то, что фраза говорит о своем подлежащем, является более узким, чем понятие „пропозициональной функции одной переменной" или „свойства", потому что в случае сказуемого имя, опущенное в остове фразы, должно быть подлежащим этой фразы.)

В качестве второго примера рассмотрим остов фразы «— любит —». По грамматической терминологии, он состоит из переходного глагола и двух пустых мест, одно из которых должно быть заполнено именем субъекта[1]) вроде «Джейн», а другое—именем объекта[2]), скажем, «Джон». Истинное или ложное предложение выражает возникающая фраза,—об этом ничего не говорится. Остов фразы в этом примере выражает *двухместное отношение*, т. е. отношение между двумя элементами, или, другими словами, *пропозициональную функцию от двух переменных*.

В других примерах может быть несколько соотнесенных пустых мест, которые надлежит заполнить одним и тем же именем. Например, «$—_1$ есть отец $—_2$, или $—_1$ есть мать $—_2$» выражает двоичное отношение, которое выражено также посредством «$—_1$ есть родитель $—_2$».

Читатель легко сумеет придумать примеры остовов фраз, содержащих любое большее число n пустых мест или множеств соотнесенных пустых мест. Такой остов фразы выражает *n-местное отношение* или *пропозициональную функцию от n переменных*

С функциональной точки зрения различие между „предикатом" в традиционном смысле первого примера и „отношением" является маловажным; то же самое относится к разнице между „субъектом" и „объектом" в первых двух примерах. Удобнее будет говорить в дальнейшем во всех случаях «предикат» и «объект». В соответствии с этим *предикат* (*от n переменных*) будет означать пропозициональную функцию от n переменных, где n может быть 0, что дает предложение, или 1, что дает предикат в традиционном смысле или свойство, или >1, что дает n-местное отношение. Значения независимых переменных (при $n>0$) мы будем называть *объектами* или *предметами*, а независимые переменные—*предметными переменными*.

Исчисление предикатов рассматривает логику предикатов в этом общем смысле слова „предиката", т. е. в смысле пропозициональной функции. Поэтому некоторые авторы говорят о «функциональном исчислении» вместо «исчисления предикатов».

Мы здесь будем рассматривать только случай исчисления предикатов, которое имеет одну область предметов для всех предметных переменных этого исчисления; в этом случае предметы будут называться также *индивидуумами*, а предметные переменные—*индивидуальными переменными*[3]). Этот случай достаточен для интересующих нас применений к нашей арифметической системе, для которой областью является множество натуральных чисел.

Наши рассуждения об исчислении предикатов не будут зависеть ни от каких допущений относительно области предметов, за исключением того, что она непуста, т. е. содержит хотя бы один элемент. Для чистой формы исчисления мы не заботимся о наличии в области конкретных предметов, т. е. имеются индивидуальные переменные, но нет индивидуальных констант.

---

[1]) См. прим. перев. на стр. 131.—*Прим. перев.*

[2]) Слово «object», переведенное здесь как «объект», по-английски означает также «дополнение».—*Прим. перев.*

[3]) Правильнее было бы говорить «индивидуумные переменные»; термин «индивидуальный» употребляется здесь вместо «индивидуумный» для благозвучия и не имеет ничего общего с повседневным употреблением этого слова в русском языке.—*Прим. ред.*

Покажем теперь, каким образом был выбран именно тот символизм, которым мы пользуемся для представления предикатов. Тире, которыми выше мы пользовались для указания пустых мест в остове фразы, мы заменили, следуя обычному в математике приему, буквами, которые назвали «переменными». Таким образом, вместо «$—_1$ есть отец $—_2$ или $—_1$ есть мать $—_2$», мы пишем с бо́льшим удобством (1) «a есть отец b или a есть мать b». Вот несколько примеров из математики: (2) «a четно», (3) «a равно b» и (4) «a меньше b».

Далее, ввиду того, что предикат есть разновидность функции — именно, функция, значениями которой служат предложения, — мы будем называть предикаты при помощи функциональных обозначений (§ 10), за исключением случаев, когда имеются другие общеупотребительные обозначения. Так, можно обозначить предикат (1) через «$P(a, b)$» (вместо «a есть родитель b»), а предикат (2) через «$E(a)$», используя функциональное обозначение, при котором символ предиката («P» или «E») пишется впереди независимой переменной. (Мы уже делали так в § 7, когда писали «$P(n)$» для выражения того, что n обладает свойством P.) Для (3) и (4) мы пользуемся обычными обозначениями «$a = b$» и «$a < b$», где (как это часто бывает при обозначениях отношений) символ предиката («$=$» или «$<$») пишется между независимыми переменными.

Что касается чистого исчисления предикатов, то предикатные буквы $\mathcal{A}(a, b)$, $\mathcal{B}$ и т. п. интерпретируются посредством неопределенных предикатов, т. е. $\mathcal{A}(a, b)$—посредством какого-либо предиката от двух переменных, $\mathcal{B}$ — посредством какого-либо предиката от нуля переменных (т. е. предложения) и т. д. При этом любая предикатная формула может быть проинтерпретирована посредством предиката, определенного предикатами, представленными различными предикатными буквами, из которых она построена. Например, $\forall b(\mathcal{A}(b, a) \& \mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a, b))$ представляет предикат от одной переменной (соответствующей свободной переменной a), определенный предикатом от двух переменных, представленным посредством $\mathcal{A}(a, b)$, и предложением, представленным посредством $\mathcal{B}$.

Заметим, что если мы пользуемся $\mathcal{A}(a, b)$ как называющей формой для предикатной буквы $\mathcal{A}$ с двумя приданными переменными, то в интерпретации, после того как независимо выбран соответствующий формуле $\mathcal{A}(a, b)$ предикат, значения $\mathcal{A}(c, b)$, $\mathcal{A}(a, a)$, $\mathcal{A}(b, a)$ и т. д. зависят от этого выбора, в соответствии со стандартным соглашением для функциональных обозначений (§ 10).

Аналогично любая формула арифметической системы может интерпретироваться как выражающая некоторый предикат при обычном арифметическом значении символов. Например, $\exists c(a = 0'' \cdot c)$ выражает $E(a)$, или *a четно*, $a = b$ выражает $a = b$, а $\exists c(c' + a = b)$ (сокращенно $a < b$, см. § 17) выражает $a < b$.

Пусть $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ — различные переменные, а $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ формула (в любом смысле). Если мы интерпретируем $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ посредством предиката или выполняем над ней формальные операции, согласующиеся с такой интерпретацией (хотя интерпретации и не требуются для формальных операций), мы называем $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ *называющей формой* по $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ в качестве *переменных называющей формы* и говорим, что $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ обладают *интерпретацией называющей формы*, или *предикатной интерпретацией*. Называющая форма $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ является формулой системы; «$\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$» — метаматематическим названием для этой формулы (согласно нашему обозначению для подстановки § 18); можно в случае надобности ввести «$A(x_1, \ldots, x_n)$» как название для предиката $A(x_1, \ldots, x_n)$, который, согласно интерпретации, выражается формулой $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$.

Естественно интерпретировать формулу со свободными переменными посредством предиката, например, когда мы имеем дело с правилами образования системы, и формула, о которой идет речь, рассматривается как составная часть других формул. Рассмотрение интерпретации формулы посредством предложения будет дано в конце § 32.

§ 32. ВЫВОДИМЫЕ ПРАВИЛА, СВОБОДНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Пользуясь выводимыми правилами теоремы 2 (§ 23) для исчисления предикатов, мы должны тщательно следить за ограничениями, относящимися к переменным: (1) При $\forall$-удалении или $\exists$-введении t должно быть свободным для x в $A(x)$ (см. § 18). (2) При $\exists$-удалении x не может входить свободно в C. (3) Во вспомогательном выводе свободные переменные должны оставаться фиксированными для исходных формул, подлежащих устранению (см. § 22). Первое время замечания в скобках будут напоминать об этих предосторожностях, но впоследствии мы будем в возрастающей мере предоставлять читателю следить за ними самому.

Теорема 13. *В *64—*68 пусть* $x_1, \ldots, x_n$ *— различные переменные,* $A(x_1, \ldots, x_n)$ *— формула, а* $t_1, \ldots, t_n$ *— термы (не обязательно различные), свободные для* $x_1, \ldots, x_n$ *(соответственно) в* $A(x_1, \ldots, x_n)$. *В *67 пусть, кроме того,* C *— формула, не содержащая свободно никакой переменной из числа* $x_1, \ldots, x_n$, *а* $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ *— конечная последовательность из нуля или более формул. Допустим, что во вспомогательном выводе свободные переменные остаются фиксированными для последней исходной формулы* $A(x_1, \ldots, x_n)$. *Тогда:*

*64. $A(x_1, \ldots, x_n) \vdash^{x_1 \ldots x_n} \forall x_1 \ldots \forall x_n A(x_1, \ldots, x_n)$.

*65. $\forall x_1 \ldots \forall x_n A(x_1, \ldots, x_n) \vdash A(t_1, \ldots, t_n)$.

*66. $A(x_1, \ldots, x_n) \vdash^{x_1 \ldots x_n} A(t_1, \ldots, t_n)$.

*68. $A(t_1, \ldots, t_n) \vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n A(x_1, \ldots, x_n)$.

*67. *Если* $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$, $A(x_1, \ldots, x_n) \vdash C$, *то*

$\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$, $\exists x_1 \ldots \exists x_n A(x_1, \ldots, x_n) \vdash^{x_1 \ldots x_n} C$.

(n-кратные $\forall$-введение, $\forall$-удаление, подстановка, $\exists$-введение и $\exists$-удаление.)

Если x *— переменная, а* $A(x)$ *и* $B(x)$ *— формулы:*

*69. $A(x) \supset B(x) \vdash^{x} \forall x A(x) \supset \forall x B(x)$.

*70. $A(x) \supset B(x) \vdash^{x} \exists x A(x) \supset \exists x B(x)$.

Доказательства. *64. Применяем простое $\forall$-введение (§ 23) последовательно n раз.

Для *65 и *66 (а затем *68) различаем два случая.

Случай 1: $t_1, \ldots, t_n$ не содержат $x_1, \ldots, x_n$. Случай 2: противное[1]).

*65. Случай 1. Применяя последовательно n раз простое $\forall$-удаление, получаем

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n A(x_1, \ldots, x_n) \vdash \forall x_2 \ldots \forall x_n A(t_1, x_2, \ldots, x_n) \vdash$$
$$\vdash \forall x_3 \ldots \forall x_n A(t_1, t_2, x_3, \ldots, x_n) \vdash \ldots \vdash \forall x_n A(t_1, \ldots, t_{n-1}, x_n) \vdash$$
$$\vdash A(t_1, \ldots, t_n).$$

[1]) Такое применение закона исключенного третьего является финитным ввиду наличия финитного метода распознавания того, какой из двух случаев 1 и 2 каждый раз имеет место. Аналогичное замечание следует иметь в виду всюду, где в рассуждениях или определениях, претендующих на финитность, встречается слово «противное» (или «в остальных случаях» и т. п.). — *Прим. перев.*

Условие теоремы, что $t_1, \ldots, t_n$ свободны для $x_1, \ldots, x_n$ в $A(x_1, \ldots, x_n)$, вместе с условием случая обеспечивают, что t_1 свободен для x_1 в $\forall x_2 \ldots \ldots \forall x_n A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, t_2 свободен для x_2 в $\forall x_3 \ldots \forall x_n A(t_1, x_2, x_3, \ldots \ldots, x_n)$ и т. д. (Случай 2 следует за *66, случай 1.)

*66. Случай 1. Применяем *64 и *65 случай 1 (или применяем n раз последовательно простое правило подстановки из § 23).

*65. Случай 2. Пусть $w_1, \ldots, w_n$ — переменные, отличные друг от друга и от $x_1, \ldots, x_n$ и не входящие ни в $A(x_1, \ldots, x_n)$, ни в $t_1, \ldots, t_n$. Тогда, в силу случаев 1 *65 и *66,

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n A(x_1, \ldots, x_n) \vdash A(w_1, \ldots, w_n) \vdash^{w_1 \ldots w_n} A(t_1, \ldots, t_n).$$

*68. Случай 2. $A(t_1, \ldots, t_n) \vdash \exists w_1 \ldots \exists w_n A(w_1, \ldots, w_n)$. Кроме того, $A(w_1, \ldots, w_n) \vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n A(x_1, \ldots, x_n)$, откуда, по *67, $\exists w_1 \ldots \exists w_n A(w_1, \ldots, w_n) \vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n A(x_1, \ldots, x_n)$.

*69. 1. $A(x) \supset B(x)$, $A(x) \vdash B(x) \vdash^x \forall x B(x)$ — $\supset$-удал., $\forall$-введ.,

2. $A(x) \supset B(x)$, $\forall x A(x) \vdash^x \forall x B(x)$ — $\forall$-удал., 1 [терм x свободен для x в $A(x)$ по определению из § 18].

3. $A(x) \supset B(x) \vdash^x \forall x A(x) \supset \forall x B(x)$ — $\supset$-введ., 2 [во вспомогательном выводе 2 переменная x остается фиксированной для подлежащей устранению исходной формулы $\forall x A(x)$, потому что x не входит свободно в $\forall x A(x)$].

*70. 1. $A(x) \supset B(x)$, $A(x) \vdash B(x) \vdash \exists x B(x)$ — $\supset$-удал., $\exists$-введ. (ср. *69, шаг 2).

2. $A(x) \supset B(x)$, $\exists x A(x) \vdash^x \exists x B(x)$ — $\exists$-удал., 1 [$\exists x B(x)$ не содержит свободно x, и x остается фиксированной во вспомогательном выводе 1].

3. $A(x) \supset B(x) \vdash^x \exists x A(x) \supset \exists x B(x)$ — $\supset$-введ., 2 [x не входит свободно в $\exists x A(x)$].

Правило $\exists$-удаления, нужное при шаге 2 в доказательстве *70, является правилом вспомогательного вывода, тогда как правило $\forall$-удаления, использованное при шаге 2 в доказательстве *69, было установлено в более сильной прямой форме (хотя в соответствии с сокращенной записью, введенной в примере 1 из § 23, эти шаги и записываются одинаковым образом). Отсюда — большая осторожность при оправдании шага 2 для *70.

Пример 1. $\forall$-введение может быть применено к формуле $\mathcal{A}(a, a)$ только одним способом, тогда как $\exists$-введение (простое или двукратное) — различными способами, а именно:

$\mathcal{A}(a, a) \vdash^a \forall a \mathcal{A}(a, a)$ — $\forall$-введ., где x есть a, а $A(x)$ — $\mathcal{A}(a, a)$.

$\mathcal{A}(a, a) \vdash \exists a \mathcal{A}(a, a)$ — $\exists$-введ., где x есть a, а $A(x)$ — $\mathcal{A}(a, a)$; t есть a.

$\mathcal{A}(a, a) \vdash \exists b \mathcal{A}(a, b)$ — $\exists$-введ., где x есть b, а $A(x)$ — $\mathcal{A}(a, b)$; t есть a.

$\mathscr{A}(a, a) \quad \vdash \exists b \mathscr{A}(b, a)$ — $\exists$-введ., где x есть b, а A(x) есть $\mathscr{A}(b, a)$; t есть a.

$\mathscr{A}(a, a) \quad \vdash \exists a \exists b \mathscr{A}(a, b)$ — двукратное $\exists$-введение, где x_1, x_2 суть a, b, а $A(x_1, x_2)$ есть $\mathscr{A}(a, b)$; t_1, t_2 суть a, a.

$\mathscr{A}(a, a) \quad \vdash \exists a \exists b \mathscr{A}(b, a)$ — двукратное $\exists$-введ., где x_1, x_2 суть a, b, а $A(x_1, x_2)$ есть $\mathscr{A}(b, a)$; t_1, t_2 суть a, a.

Интерпретация формул со свободными переменными. Несколькими замечаниями об интерпретации поясним необходимость ограничения, наложенного в теореме 2 на правила вспомогательного вывода—ограничения, состоящего в том, что свободные переменные должны оставаться фиксированными для каждой исходной формулы, подлежащей устранению. Эти замечания, конечно, не принадлежат метаматематике.

В следующем примере 2 шаг 1 является выводом из исходной формулы $b \neq 0$ с фиксированной b, так что $\supset$-введение здесь применимо. В примере 3 $\supset$-введение не применимо, потому что b варьировалась, хотя оно и становится применимым после $\forall$-удаления. В примере 4 показывается, как при нарушении упомянутого ограничения может получиться ложный (в арифметической интерпретации) результат.

Пример 2.
1. $b \neq 0 \vdash a + b \neq a$ — получается с фиксированной b в арифметической системе (§ 39; «$s \neq t$» — сокращение для $\neg s = t$, § 17).
2. $\vdash b \neq 0 \supset a + b \neq a$ — $\supset$-введ., 1.
3. $\vdash \forall b (b \neq 0 \supset a + b \neq a)$ — $\forall$-введ., 2.

Пример 3.
1. $b \neq 0 \vdash^{b} 0 \neq 0$ — подстановка (§ 23), b варьируется.
2. $\forall b (b \neq 0) \vdash 0 \neq 0$ — $\forall$-удал., 1.
3. $\vdash \forall b (b \neq 0) \supset 0 \neq 0$ — $\supset$-введ., 2.

Пример 4.
1. $b \neq 0 \vdash^{b} 0 \neq 0$ так же, как шаг 1 в примере 3.
2? $\vdash b \neq 0 \supset 0 \neq 0$ — $\supset$-введ., ошибочно примененное к 1.
3? $\vdash \forall b (b \neq 0 \supset 0 \neq 0)$ — $\forall$-введ., 2.
4? $\vdash 0' \neq 0 \supset 0 \neq 0$ — $\forall$-удал., 3.
5. $\vdash 0' \neq 0$ — подстановкой в аксиому 15.
6? $\vdash 0 \neq 0$ — правило 2, 5, 4.

Единственное нарушение формальных правил имеет место в примере 4 на шаге 2. Советуем читателю самому объяснить ошибку в терминах интерпретации, прежде чем он прочтет дальнейшие рассуждения. Особенно рекомендуется обратить внимание на разницу между формулами шага 3 в примерах 3 и 4. Кроме того, читателю предлагается воспроизвести формальные детали в следующих двух примерах и сравнить результаты.

Пример 5. Если даны $A(x) \vdash B$ и $A(x) \vdash \neg B$ с фиксированной x, то $\vdash \neg A(x)$ и $\vdash \forall x \neg A(x)$.

Пример 6. Если даны $A(x) \vdash^{x} B$ и $A(x) \vdash^{x} \neg B$, где x, может быть, варьируется, то $\vdash \neg \forall x A(x)$.

Сходным образом можно было бы рассмотреть правила $\vee$-удаления и $\exists$-удаления.

В содержательной математике при установлении предложений свободные переменные используются двояко, как это видно на алгебраическом примере *тождественного равенства*[1]) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ и *условного равенства*[1]) $x^2 + 2 = 3x$.

Первая из этих интерпретаций — это как раз та, которая применяется к свободным переменным в аксиомах и формальных теоремах нашей системы, и мы будем называть ее *интерпретацией всеобщности*. Например, аксиома 14 $a' = b' \supset a = b$ означает, что для каждой пары a и b натуральных чисел из $a' = b'$ следует $a = b$, а формальная теорема $a = a$, доказанная в примере 1 § 19, выражает, что каждое натуральное число равно самому себе.

Но если формула A(x) со свободной переменной x берется в качестве исходной формулы некоторого вывода, мы стоим перед выбором. Можно понимать исходное допущение в смысле «Допустим, что для всех x $A(x)$», тогда для x имеется интерпретация всеобщности. А можно понимать это допущение в смысле «Пусть x такое число, что $A(x)$», — и в этом случае мы будем говорить, что для x имеется *условная интерпретация*.

Во втором случае употребление при выводе операций, зависящих, при содержательном понимании, от возможности для x изменяться в области предметов, не согласуется с интерпретацией. Для интерпретации всеобщности никакого такого ограничения нет. Шаг 1 примера 2 — это вывод, построенный в согласии с условной интерпретацией, а шаг 1 примеров 3 и 4 — только в согласии с интерпретацией всеобщности. То, что исходная формула $b \neq 0$ ложна при этой последней интерпретации, здесь несущественно, и заключительная формула примера 3 получена совершенно правильно (хотя и не представляет большого интереса).

Изучавшему элементарную математику известно различие между так называемыми постоянными и переменными символами. Внимательное рассмотрение показывает, что это различие в употреблении символов всегда зависит от контекста. Данный символ вводится как название какого-то предмета, и на протяжении некоторого контекста этот символ входит каждый раз в качестве названия этого предмета. Вне контекста указано, что этот предмет может быть произвольным (некоторым и т. п.) элементом какого-то множества. В сущности этот символ является постоянным, т. е. значение его не меняется, внутри контекста, тогда как вне контекста он является переменным.

(Терминология, употребляемая в той или иной теории, обычно соответствует контексту, образованному всей этой теорией в целом. Иногда символы, постоянные в некоторой важной части этого контекста, но переменные для всей теории в целом, называются «параметрами» или «произвольными константами».)

При интерпретации всеобщности для переменной x в формуле A(x) контекстом, внутри которого все (свободные) вхождения x должны представлять один и тот же предмет, является в точности вся формула A(x). Формула A(x) означает в этом случае то же, что и ∀xA(x); поэтому по аналогии с областью действия квантора ∀x, мы также будем называть A(x) *областью* всеобщности, выражаемой свободной переменной x.

При условной интерпретации контекстом, внутри которого все (свободные) вхождения x имеют одно и то же значение, является не формула A(x), а весь вывод из A(x) (или часть этого вывода, зависящая от A(x)).

В шаге 1 примера 4 при интерпретации всеобщности область всеобщности, выражаемая посредством b, — это как раз исходная формула $b \neq 0$.

---

[1]) Обычные русские термины «тождество» и «уравнение» здесь не способствовали бы пониманию дальнейшей терминологии. — *Прим. перев.*

Если бы формула шага 2 была доказуемой, то к этой формуле в целом была бы применима интерпретация всеобщности и область была бы $b \neq 0 \supset \supset 0 \neq 0$, а не только часть $b \neq 0$.

Квантор всеобщности $\forall x$ служит в нашем логическом символизме средством для ограничения области всеобщности, когда нужно, чтобы эта область составляла только часть формулы. Формулы шагов 2 и 3 примера 4 (или обоих заключений примера 5) синонимичны, если первая из них рассматривается в интерпретации всеобщности. Но никакая формула без кванторов не может быть синонимичной с формулой шага 3 примера 3 (или с формулой заключения примера 6).

Пусть A — формула, а $x_1, \ldots, x_n$ — все ее различные свободные переменные в порядке их первого вхождения. В соответствии с тем, $n > 0$ или $n = 0$, мы будем называть A *открытой* или *замкнутой* формулой. Замкнутую формулу $\forall x_1 \ldots \forall x_n$A (иногда сокращенно обозначаемую «$\forall$A») мы будем называть *замыканием формулы* A. В силу *64 и *65, A и $\forall$A *дедуктивно равны* (т. е. каждая из них может быть выведена из другой), причем $x_1, \ldots, x_n$ варьируются при выводе $\forall$A из A. При интерпретации всеобщности A и $\forall$A синонимичны.

§ 33. ЗАМЕНА

Пусть C_A — формула, в которой отмечено некоторое вхождение формулы A, и пусть C_B — результат замены этого вхождения на B (§ 26). Существуют параллельные построения C_A из A и C_B из B, согласно пунктам 2—7 определения формулы (§ 17 или § 31). Число шагов в этом построении C_A (или операторов, в области действия которых лежит часть A) мы называем *глубиной* части A в C_A.

Пример 1. Пусть A будет $\mathcal{A}(b, a)$, C_A будет $\forall b(\mathcal{A}(b, a) \& \mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a, b))$ (отмеченное вхождение в этом случае — единственное), а B будет $\exists d\mathcal{A}(d, a, c)$. Тогда C_B будет $\forall b(\exists d\mathcal{A}(d, a, c) \& \mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a, b))$. Параллельные построения C_A из A и C_B из B таковы:

$\mathcal{A}(b, a)$	$\exists d\mathcal{A}(d, a, c)$
$\mathcal{A}(b, a) \& \mathcal{B}$	$\exists d\mathcal{A}(d, a, c) \& \mathcal{B}$
$\mathcal{A}(b, a) \& \mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a, b)$	$\exists d\mathcal{A}(d, a, c) \& \mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a, b)$
$\forall b(\mathcal{A}(b, a) \& \mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a, b))$	$\forall b(\exists d\mathcal{A}(d, a, c) \& \mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a, b))$.

Глубнна A в C_A равна 3.

Теорема 14. *Если* A, B, C_A *и* C_B — *формулы, связанные друг с другом, как в первом абзаце этого параграфа, то*

$$A \sim B \vdash^{x_1 \ldots x_n} C_A \sim C_B,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — *свободные переменные* A *или* B, *принадлежащие какому-нибудь квантору в* C_A, *в области действия которого находится отмеченное вхождение* A. (Теорема о замене.)

Другими словами, $x_1, \ldots, x_n$ — это свободные переменные формулы $A \sim B$, на которые при построении C_A из отмеченной части A навешиваются кванторы. Доказательство теоремы проводится индукцией по глубине как прежде (теорема 6 из § 26), но с помощью еще следующих двух лемм.

Дополнительные леммы о замене. *Если* x — *переменная*, а A(x) *и* B(x) — *формулы, то*:

$$*71. \quad A(x) \sim B(x) \vdash^{x} \forall x A(x) \sim \forall x B(x).$$

$$*72. \quad A(x) \sim B(x) \vdash^{x} \exists x A(x) \sim \exists x B(x).$$

Доказательства получаются с помощью *69 и *70 соответственно.

Пример 1 (окончание). Поставим $\sim$ между формулами каждой пары в параллельных столбцах. Полученные формулы будут выводимы каждая из предыдущей с помощью *28а, *26 и *71 (с варьированием b) соответственно.

Следствие 1. *В условиях теоремы:*

$$\textit{если } \vdash A \sim B, \quad \textit{то} \quad \vdash C_A \sim C_B.$$

Пример 2°. В силу *49 (и *20), $\vdash A(x) \sim \neg\neg A(x)$.

Отсюда $\vdash \neg\neg \forall x A(x) \sim \neg\neg \forall x \neg\neg A(x)$.

Пример 3. Теперь (ср. пример 2 § 26), если A и B не содержат свободно x, то $A \sim B \vdash A \vee \forall x(A \supset C(x)) \sim A \vee \forall x(B \supset C(x))$. Если A и B могут свободно содержать x, то $A \sim B \vdash^{x} A \vee \forall x(A \supset C(x)) \sim A \vee \forall x(B \supset C(x))$. Если $\vdash A \sim B$, то

$$\vdash A \vee \forall x(A \supset C(x)) \sim A \vee \forall x(B \supset C(x)).$$

Следствие 2. *При условиях теоремы:* $A \sim B, C_A \vdash^{x_1, \ldots, x_n} C_B$, *где* $x_1, \ldots, x_n$ *варьируются только для первой исходной формулы. Если* $\vdash A \sim B$, *то* $C_A \vdash C_B$. (Свойство замены для эквивалентности.)

Замене может предшествовать подстановка вместо индивидуальных переменных (*66).

Пример 4. $b+0=a \sim a=b \vdash^{b} b'+0=a \sim a=b' \vdash^{b} \exists b(b'+0=a) \sim$ $\sim \exists b(a=b')$. Но в § 38 мы получим $\vdash b+0=a \sim a=b$. Следовательно, $\vdash \exists b(b'+0=a) \sim \exists b(a=b')$.

Интерпретация иллюстрирует употребление переменных при замене. В содержательной математике знание того, что $\sin x$ — та же функция, что и $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, т. е. наличие тождественного равенства $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (где для x имеется интерпретация всеобщности, § 32) позволяет нам заменять «$\sin x$» на «$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$» в «$\int_0^t \sin x\,dx$», а также заменять «$\sin 2x$» на «$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$». Но допущение условного равенства $\sin x = 1 - x$ не дает нам права заменять «$\sin x$» на «$1-x$» в «$\int_0^t \sin x\,dx$» или заменять «$\sin 2x$» на «$1-2x$».

Переименование связанных переменных. Две формулы A и B будут называться *конгруэнтными*, если A и B имеют одно и то же число k символов и для каждого i ($i=1, \ldots, k$): (I) если i-й символ в A — не переменная, то он же является i-м символом в B; (II) если i-й символ в A — это свободное вхождение переменной, то i-й символ в B — это свободное вхождение той же переменной; (III) если i-й символ в A — это вхождение переменной, связанное j-м квантором в A, то и i-й символ в B тоже является вхождением переменной (не обязательно той же самой), связанной j-м квантором в B.

Короче, две формулы конгруэнтны, если они отличаются только связанными переменными и соответствующие связанные переменные связаны соответствующими кванторами.

Пример 5. Следующие две формулы конгруэнтны:

$$\forall a(\mathscr{A}(a, c) \vee \exists a\mathscr{B}(a) \supset \exists b\mathscr{C}(a, b)), \qquad \forall b(\mathscr{A}(b, c) \vee \exists c\mathscr{B}(c) \supset \exists a\mathscr{C}(b, a)).$$

Для большей наглядности можно ввести индексы, указывающие, какие вхождения переменных связаны каждым квантором:

$$\forall a_1(\mathscr{A}(a_1, c) \vee \exists a_2\mathscr{B}(a_2) \supset \exists b_3\mathscr{C}(a_1, b_3)), \ \forall b_1(\mathscr{A}(b_1, c) \vee \exists c_2\mathscr{B}(c_2) \supset \exists a_3\mathscr{C}(b_1, a_3)).$$

Если здесь стереть сами связанные переменные, оставляя пустые места, занумерованные индексами, то получим совпадающие выражения.

Лемма 15a. *Если* x — *переменная*, A(x) — *формула и* b — *переменная такая, что* (i) b *свободно для* x *в* A(x) *и* (ii) b *не входит свободно в* A(x) (*или* b *есть* x), *то*:

$$*73. \ \vdash \forall x A(x) \sim \forall b A(b). \qquad *74. \ \vdash \exists x A(x) \sim \exists b A(b).$$

Доказательства. *73. В силу примера 3 § 22 (шаги 1 – 2), $\vdash \forall b A(b) \supset \supset \forall x A(x)$, и аналогично $\vdash \forall x A(x) \supset \forall b A(b)$. Заметим (см. пример 9 § 18), что (i) и (ii) необходимы и достаточны для того, чтобы $\forall b A(b)$ было конгруэнтно $\forall x A(x)$ (или $\exists b A(b)$ — формуле $\exists x A(x)$).

Лемма 15b. *Конгруэнтные формулы эквивалентны; т. е. если* A *конгруэнтна* B, *то* $\vdash A \sim B$.

Доказательство. Пусть A содержит в точности r кванторов с соответствующими (не обязательно различными) переменными $u_1, \ldots, u_r$ (в порядке встречи кванторов в A). Пусть $w_1, \ldots, w_r$ — различные переменные, не входящие ни в A, ни в B. Пусть C получается из A заменой каждого u_j ($j = 1, \ldots, r$) на w_j в точности для тех вхождений, которые связаны j-м квантором. Производя эти замены последовательно r раз, с помощью *73 или *74 и следствия 1 из теоремы 14, получаем $\vdash A \sim C$. Аналогично $\vdash B \sim C$. Следовательно (*20, *21), $\vdash A \sim B$.

Пример 5 (окончание). $\vdash \forall a(\mathscr{A}(a, c) \vee \exists a\mathscr{B}(a) \supset \exists b\mathscr{C}(a, b)) \sim$
$\sim \forall d(\mathscr{A}(d, c) \vee \exists a\mathscr{B}(a) \supset \exists b\mathscr{C}(d, b))$ [*73] $\sim \forall d(\mathscr{A}(d, c) \vee \exists e\mathscr{B}(e) \supset \exists b\mathscr{C}(d, b))$
[*74] $\sim \forall d(\mathscr{A}(d, c) \vee \exists e\mathscr{B}(e) \supset \exists f\mathscr{C}(d, f))$ [74*]. Аналогично
$\vdash \forall b(\mathscr{A}(b, c) \vee \exists c\mathscr{B}(c) \supset \exists a\mathscr{C}(b, a)) \sim \forall d(\mathscr{A}(d, c) \vee \exists e\mathscr{B}(e) \supset \exists f\mathscr{C}(d, f))$.

Замечание 1. (a) Аналогично теореме 14, используя *6 – *9b, *12, *69, *70 (вместо *26 – *30, *71, *72) в качестве лемм, получаем следующее. *Пусть часть* A *стоит в* C_A *только внутри областей действия некоторых символов из числа* $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$. *Тогда* $A \supset B \vdash^{x_1 \ldots x_n} C_A \supset C_B$ *или* $B \supset A \vdash^{x_1 \ldots x_n} C_A \supset C_B$ *в системе, постулатами которой служат только* $\supset$-*постулаты и постулаты для символов, о которых только что шла речь, — с добавлением, в случае, если среди этих символов есть* $\forall$, *но нет* &, *схемы аксиом* 9a *леммы* 11 § 24 *к* $\forall$-*постулатам*. (См. Эрбран [1930, § 3.2], Мак-Лейн [1934, стр. 28 и след.], Карри [1939, стр. 290 – 291].)

$$\text{(b)} \quad \vdash \forall x A(x) \supset \forall b A(b) \quad \textit{и} \quad \vdash \forall b A(b) \supset \forall x A(x)$$

(*аналогично для* $\exists$) *с помощью только постулатов* 9 *и* 10 (11 *и* 12). (c) Следовательно, *если* A *конгруэнтна* B, *то* $\vdash A \supset B$ *и* $\vdash B \supset A$ (*и поэтому* A *и* B *дедуктивно равны*) *с помощью только* $\supset$-*постулатов и постулатов для логических символов, входящих в* A, *с добавлением как в* (a).

Постоянные сокращения. Наше употребление постоянных сокращений типа «$a < b$» (рассмотренных в конце § 17) отличается от использования временных сокращений типа «A(x)», «A($x_1, \ldots, x_n$)» и т. д. (§ 18) в двух отношениях. Во-первых, постоянные сокращения не содержат никаких не указанных свободных переменных („анонимных свободных переменных"). Во-вторых, вместо того чтобы запрещать подстановку термов, не являющихся свободными на местах подстановки, мы разрешаем произвольный выбор связанных переменных, не указанных в сокращении („анонимных связанных переменных"). Это позволяет считать любые термы, которые мы захотим подставить, свободными на местах подстановки. Все правильные восстановления[1]) данного сокращения конгруэнтны и потому, по лемме 15b, эквивалентны. Поэтому при рассмотрении вопросов выводимости и доказуемости безразлично, каким из правильных восстановлений мы будем пользоваться.

Но для вопроса о приложимости того или иного постулата способ восстановления может иметь значение, например $s < t \supset (B \supset s < t)$ есть аксиома по схеме 1а только в том случае, если оба вхождения «$s < t$» восстановлены одинаково. Поэтому в наших утверждениях о приложимости постулатов мы будем молчаливо предполагать, что одинаковые сокращения восстанавливаются одинаковым образом.

* § 34. ПОДСТАНОВКА

Число применений формального правила подстановки вместо предикатных букв можно значительно сократить, если формулировать результаты в форме схем, с метаматематическими буквами вместо конкретных предикатных букв. Применяя эти результаты, мы затем пользуемся неформальной подстановкой, состоящей в перемене значения метаматематических букв, но такая подстановка не является применением формального правила подстановки. Мы уже так поступали постоянно с самого начала нашего изучения формальной системы. Покажем теперь на примере, о чем идет речь.

Пример 1°. В *83 (§ 35) будет установлено, что если x — любая переменная, а A(x) — любая формула, то $\vdash \exists x A(x) \sim \neg \forall x \neg A(x)$. Пусть теперь x — любая переменная, а A(x) — любая формула. Выбирая отрицание $\neg A(x)$ этого A(x) в качестве A(x) из *83, получаем $\vdash \exists x \neg A(x) \sim$ $\sim \neg \forall x \neg\neg A(x)$. Это и пример 2 § 33 объясняют второе и третье звенья следующей цепи: $\vdash \forall x A(x) \sim \neg\neg \forall x A(x)$ [*49] $\sim \neg\neg \forall x \neg\neg A(x)$ [*49] $\sim$ $\neg \exists x \neg A(x)$ [*83].

Единственный случай, когда мы существенно воспользуемся правилом формальной подстановки для исчисления предикатов (теорема 15), — это при установлении двойственности (следствие из теоремы 18 § 35), где вместо предикатных букв мы будем подставлять их отрицания. Эта подстановка может быть обоснована посредством рассуждений, уже использованных при доказательстве правила подстановки для исчисления высказываний (теорема 3 § 25) без каких-либо новых усложнений. Далее, формальная подстановка встречается при переходе от некоторых результатов, доказанных сначала при помощи двойственности в терминах конкретных предикатных букв, к общим результатам той же формы с метаматематическими буквами. Этого применения можно избежать, если пользоваться правилом подстановки только эвристически, для обнаружения доказательств, которые затем можно привести и без его помощи. Поэтому читатель может при желании опу-

[1]) В подлиннике «unabbreviations» (т. е. формулы, из которых получены сокращения, «abbreviations»). — *Прим. перев.*

стить детальное рассмотрение подстановки, приведенное в оставшейся части этого параграфа.

Интерпретации называющей формы соответствует обобщенное понятие „вхождения". В неформальной математике «$\sin x$» входит как выражение для функции в «$3\sin x + \cos x$», в «$\int_0^t \sin x\, dx$» и в «$\cos x \sin 2x$», хотя в качестве выражения для числа он входит только в первое из этих выражений.

Для упрощения обозначений этого параграфа мы будем рассматривать каждую подстановку, выбирая в качестве приданных переменных для каждой из различных предикатных букв первые n переменных из некоторого бесконечного перечня $a_1, a_2, a_3, \ldots$ переменных (ср. § 31). Однако может понадобиться выбирать этот перечень различным образом для разных подстановок (см. ниже).

Вхождением предикатной буквы $P(a_1, \ldots, a_n)$ с приданными переменными в предикатную формулу E мы будем называть (связную) часть E вида $P(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n$ — термы. Предикатная формула E называется предикатной формулой, составленной *из* различных предикатных букв

(1) $\qquad P_1(a_1, \ldots, a_{n_1}), \ldots, P_m(a_1, \ldots, a_{n_m}) \quad (n_1, \ldots, n_m \geqslant 0;\ m \geqslant 1)$,

если никакая предикатная буква, не встречающаяся в (1), не входит в E.

Пример 2. Предикатная буква $\mathscr{A}(a, b)$ дважды входит в $\forall b(\mathscr{A}(b, a) \& \mathscr{B} \supset \mathscr{A}(a, b))$, во-первых, как часть $\mathscr{A}(b, a)$ и, во-вторых, как часть $\mathscr{A}(a, b)$. Формула $\forall b(\mathscr{A}(b, a) \& \mathscr{B} \supset \mathscr{A}(a, b))$—это предикатная формула, составленная из $\mathscr{A}(a, b)$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}(a, b, c)$.

Подстановка формул (в любом из смыслов § 31)

(2) $\qquad A_1(a_1, \ldots, a_{n_1}), \ldots, A_m(a_1, \ldots, a_{n_m})$,

рассматриваемых как *называющие формы* по соответствующим указанным переменным, вместо предикатных букв (1) в E (с результатом E*) состоит в замене, одновременно для каждого j ($j = 1, \ldots, m$), каждого вхождения $P_j(t_1, \ldots, t_{n_j})$ предикатной буквы $P_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$ в E на $A_j(t_1, \ldots, t_{n_j})$.

Переменные называющей формы (т. е. различные буквы a) как таковые в E и E* не встречаются. При рассмотрении вопроса, получается ли данная формула E* из другой данной формулы E посредством подстановки вместо некоторых предикатных букв, достаточно выбрать переменные называющих форм не входящими в E и E* (мы, впрочем, не ограничиваем себя таким выбором переменных называющей формы, хотя другие авторы и поступают таким образом).

Подстановка называется *свободной*, если для каждого j ($j = 1, \ldots, m$) формула $A_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$ „свободна" для $P_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$ в E. При этом $A(a_1, \ldots, a_n)$ называется *свободной* для $P(a_1, \ldots, a_n)$ в E, если для каждого вхождения $P(t_1, \ldots, t_n)$ предикатной буквы $P(a_1, \ldots, a_n)$ в E выполняются следующие условия: (A1) термы $t_1, \ldots, t_n$ свободны для $a_1, \ldots, a_n$ соответственно в $A(a_1, \ldots, a_n)$ и (A2) выражение $P(t_1, \ldots, t_n)$ не встречается в E внутри области действия какого-либо квантора $\forall y$ или $\exists y$, где y — свободная переменная формулы $A(a_1, \ldots, a_n)$, отличная от переменных называющей формы $a_1, \ldots, a_n$.

Пример 3. Пусть $m = 1$; $n = n_1 = 2$; a_1, a_2 пусть будут c, d $P(a_1, a_2)$ пусть будет $\mathscr{A}(c, d)$; $A(a_1, a_2)$ пусть будет $\forall b \mathscr{B}(a, b, c, d) \vee \mathscr{A}(d, c)$; пусть E будет $\exists c \mathscr{A}(c, a)$. Тогда E* будет $\exists c(\forall b \mathscr{B}(a, b, c, a) \vee \mathscr{A}(a, c))$. Подстановка свободна.

Для удобства будем называть свободные вхождения $a_1, \ldots, a_n$ в $A(a_1, \ldots, a_n)$ *явными вхождениями*, а остальные вхождения переменных в $A(a_1, \ldots, a_n)$ — *анонимными вхождениями*. Переменные, входящие явно [анонимно] свободно (связанно) в $A(a_1, \ldots, a_n)$, называются *явными* [*анонимными*] *свободными* (*связанными*) *переменными* формулы $A(a_1, \ldots, a_n)$. Эта терминология распространяется вообще на случай, когда формулы или их части представлены метаматематическими буквами.

Пример 4. Если рассматривать $\mathcal{A}(a, b) \& \exists a\mathcal{B}(a, b, c)$ как называющую форму по a, b и обозначать ее через «$A(a, b)$» (или «$A(a_1, a_2)$», где «a_1» и «a_2» обозначают a и b), то первое вхождение a и оба вхождения b оказываются явными, а второе и третье вхождение a и вхождение c — анонимными. Таким образом, a и b — явные свободные переменные, c — анонимная свободная переменная и a — анонимная связанная переменная. Если воспользоваться «$\forall aA(a, b)$» для обозначения $\forall a(\mathcal{A}(a, b) \& \exists a\mathcal{B}(a, b, c))$, то первые два вхождения a явны, а другие два — анонимны; таким образом, a оказывается явной связанной переменной и анонимной связанной переменной. Квантор $\forall a$ является явным, а квантор $\exists a$ — анонимным.

В наших дальнейших примерах подстановки переменные $a_1, a_2, a_3, \ldots$ будут $a, b, c, \ldots$. (Этот выбор всегда возможен, если только ему не препятствуют, как в примере 3, анонимные переменные для подстановки.)

Нарушение (A1) или (A2) может быть вызвано только присутствием анонимных переменных.

Пример 5. Формула $\exists c\mathcal{A}(c,a,b)$ не свободна для $\mathcal{A}(a)$ в $\mathcal{A}(c) \supset \mathcal{B}$, потому что нарушено (A1) [после подстановки в результате $\exists c\mathcal{A}(c, c, b) \supset \mathcal{B}$, c из $\mathcal{A}(c)$ оказалась бы связанной анонимным квантором $\exists c$ формулы $\exists c\, \mathcal{A}(c, a, b)$], а также в $\forall b(\mathcal{A}(a) \supset \mathcal{B}(b))$, потому что нарушено (A2) [после подстановки в результате $\forall b(\exists c\mathcal{A}(c, a, b) \supset \mathcal{B}(b))$ анонимная свободная b из $\exists c\mathcal{A}(c, a, b)$ оказалась бы связанной квантором $\forall b$ формулы $\forall b(\mathcal{A}(a) \supset \supset \mathcal{B}(b))$].

Условия (A1) и (A2) можно рассматривать как условия того, что каждая часть $A(t_1, \ldots, t_n)$ из E^*, получающаяся путем подстановки формулы $A(a_1, \ldots, a_n)$ вместо $P(a_1, \ldots, a_n)$, образует *вхождение* $A(a_1, \ldots, a_n)$ *в качестве называющей формы по* $a_1, \ldots, a_n$.

Пример 6. В этом примере в качестве различных a берутся a, b, c. Но мы снабдим их индексами для облегчения последующих указаний на различные вхождения этих переменных. Пусть E будет

(i) $$\forall b_1(\mathcal{A}(b_2, a_3) \& \mathcal{B} \supset \mathcal{A}(a_4, b_5)).$$

Пусть $A(a, b)$, B, $C(a, b, c)$ (подлежащие подстановке вместо $\mathcal{A}(a, b)$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}(a, b, c)$ соответственно) будут

(ii) $$\exists c_6\mathcal{C}(c_7, a, b, b), \quad \neg\mathcal{B}(a_8), \quad \mathcal{A}(a, b)$$

(где индексами отмечены анонимные вхождения переменных). Тогда E^* (результат применения подстановки к E) будет

(iii) $$\forall b_1(\exists c_6\mathcal{C}(c_7, b_2, a_3, a_3) \& \neg\mathcal{B}(a_8) \supset \exists c_6\mathcal{C}(c_7, a_4, b_5, b_5)).$$

Подстановка свободна.

Значение следующей леммы станет ясным после приведенного за ней примера.

Лемма 16a. *Если подстановка* (2) *вместо* (1) *в* E *свободна, то в ее результате* E* *каждое свободное вхождение переменной происходит от свободного вхождения этой переменной в* E *или от анонимного вхождения в некоторую формулу* $A_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$, *а каждое связанное вхождение переменной и связывающий это вхождение квантор происходят от находящихся в таком же отношении переменной и квантора, входящих в* E *или анонимно в некоторую формулу* $A_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$.

Пример 6 (продолжение). Оба свободных вхождения a_3 в (iii) происходят от свободного вхождения a_3 в (i). Свободное вхождение a_8 происходит от анонимного свободного вхождения a_8 в (ii). Оба вхождения b_5, связанные квантором $\forall b_1$, происходят от вхождения b_5, связанного $\forall b_1$ в (i). Вхождение c_7, связанное квантором $\exists c_6$, для каждой такой пары происходит от анонимного вхождения c_7, связанного квантором $\exists c_6$ в (ii).

Ход доказательства. Рассмотрим данное вхождение переменной в E*. Оно: или (случай 1) не является вхождением ни в какую из частей $A_j(t_1, \ldots, t_{n_j})$ (например b_1), или (случай 2) является вхождением в одну из частей $A_j(t_1, \ldots, t_{n_j})$, но при этом — ни в какой из термов t_i (например c_6, c_7, a_8), или (случай 3) является вхождением во вхождение некоторого t_i, введенное в $A_j(t_1, \ldots, t_{n_j})$ подстановкой вместо свободного вхождения a_i в $A_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$ (например, b_2, a_3, a_4, b_5). Доказательство леммы получается при помощи условия (A2) для свободы в случае 2 и условия (A1) в случае 3.

Лемма 16b. *Пусть*

$$(\tilde{2}) \qquad \tilde{A}_1(a_1, \ldots, a_{n_1}), \ldots, \tilde{A}_m(a_1, \ldots, a_{n_m})$$

— *формулы, конгруэнтные формулам* (2) *соответственно, и пусть* $\tilde{F}$ — *формула, конгруэнтная* F. *Если подстановка* (2) *вместо* (1) *в* F *с результатом* F* *и подстановка* $(\tilde{2})$ *вместо* (1) *в* $\tilde{F}$ *с результатом* $\tilde{F}^\dagger$ *являются обе свободными, то* $\tilde{F}^\dagger$ *конгруэнтна* F*.

Доказательство основывается на лемме 16a и замечании, что если p-й символ в F* происходит от q-го символа F (или $A_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$), то p-й символ в $\tilde{F}^\dagger$ происходит от q-го символа в $\tilde{F}$ (или $\tilde{A}_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$).

Лемма 17. *Если даны доказательство формулы* F *и список переменных* $z_1, \ldots, z_q$, *то можно найти формулу* $\tilde{F}$, *конгруэнтную* F *и не содержащую ни одной из переменных* $z_1, \ldots, z_q$ *в связанном виде, и доказательство* $\tilde{F}$, *не содержащее применений правил* 9 *и* 12 *по отношению к какой-либо из* $z_1, \ldots, z_q$.

Доказательство. Пусть $b_1, \ldots, b_s$ — все различные свободные переменные в F, в связи с чем будем обозначать F также через «$F(b_1, \ldots, b_s)$». Пусть $u_1, \ldots, u_r$ — все различные переменные, входящие свободно, или связанно хотя бы в одну формулу из данного доказательства F (среди них $b_1, \ldots, b_s$). Пусть $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r$ — новые переменные, отличные друг от друга и от $u_1, \ldots, u_r, z_1, \ldots, z_q$. Все переменные равноправны для определения доказательства в исчислении предикатов (постулаты группы A, § 19). Поэтому, если мы в данном доказательстве формулы F заменим $u_1, \ldots, u_r$

одновременно во всех свободных и связанных вхождениях на $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r$ соответственно, то полученная фигура также будет доказательством. Пусть это будет доказательство формулы $\tilde{F}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s)$; итак, (a) $\vdash \tilde{F}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s)$. Далее, n-кратной подстановкой (*66) получаем (b) $\tilde{F}(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s) \vdash^{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s} \tilde{F}(b_1, \ldots, b_s)$. Согласно доказательству *66 и ввиду того, что $b_1, \ldots, b_s$ отличны от $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s$, вывод (b) использует правило 9 только по отношению к $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s$ (и вовсе не использует правила 12). Пусть $\tilde{F}$ означает $\tilde{F}(b_1, \ldots, b_s)$. Сочетая (a) и (b), мы получим доказательство формулы $\tilde{F}$, в котором правила 9 и 12 используются только по отношению к новым переменным $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r$ (включая $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s$), и, следовательно, они не используются по отношению к какой-либо из $z_1, \ldots, z_q$.

Теорема 15. Подстановка вместо предикатных букв. *Пусть* $D_1, \ldots, D_l$, E — *предикатные формулы, составленные из различных предикатных букв* (1). *Пусть* $D_1^*, \ldots, D_l^*$, E^* *получаются путем подстановки* (2) (*как называющих форм по указанным переменным*) *вместо* (1) *в* $D_1, \ldots, D_l$, E *соответственно. Тогда, при условии, что*

(A) *эта подстановка свободна и*

(B) *для* $j = 1, \ldots, m$ *анонимные свободные переменные из* $A_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$ *остаются фиксированными в данном выводе для каждой исходной формулы, содержащей соответствующую предикатную букву* $P_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$,

из $D_1, \ldots, D_l \vdash E$ *следует* $D_1^*, \ldots, D_l^* \vdash E^*$.

(Оговорка (B), разумеется, выполнена, если все анонимные свободные переменные из (2) остаются фиксированными в данном выводе. В случае $l = 0$ оговорка (B) отпадает, и мы имеем просто: *Если* $\vdash E$, *то* $\vdash E^*$ *при условии, что выполняется* (A), *т. е. подстановка свободна.*)

Доказательство. Возьмем данный вывод $D_1, \ldots, D_l \vdash E$ в качестве (I) леммы 8a (§ 24) и перейдем к доказательству (II). Длинную формулу в (II) мы обозначим через «F». Подстановка (2) вместо (1) в F свободна, что следует из оговорки (A), а также оговорки B, обеспечивающей соблюдение (A2) для y-ов из (II). Если мы сумеем показать, что $\vdash F^*$, то, применяя лемму 8a в обратном направлении, мы получим $D_1^*, \ldots, D_l^* \vdash E^*$, что и требуется доказать.

Рассмотрим теперь данное доказательство формулы F. В формулы этого доказательства могут входить некоторые предикатные буквы, отличные от встречающихся в (1). Присоединяя их к списку (1), получим новый список (1′) и соответственно расширим (2) до некоторого списка (2′), выбирая в качестве дополнительных называющих форм какие-нибудь формулы, не содержащие анонимных переменных.

Допустим, что всюду в данном доказательстве формулы F мы подставили (2′) вместо (1′). Тогда, рассуждая в точности так же, как при доказательстве правила подстановки для пропозициональных букв (теорема 3 § 25), мы заключаем, что полученная фигура является доказательством формулы F^*, если только не имеет место один из следующих двух случаев.

Во-первых, C некоторого применения правила 9 или 12 может быть превращено подстановкой в формулу C^*, содержащую свободно x этого применения; тогда это правило окажется больше неприменимым. Это может случиться только в том случае, если x является одной из анонимных свободных переменных $z_1, \ldots, z_q$ из (2). С помощью леммы 17 заменим данное доказательство на доказательство некоторой формулы $\tilde{F}$, конгруэнтной F, не содержащей в связанном виде ни одной из $z_1, \ldots, z_q$, так что в новом доказательстве правила 9 и 12 по отношению к $z_1, \ldots, z_q$ уже не применяются.

Во-вторых, t для некоторого применения схемы аксиом 10 или 11 может после подстановки перестать быть свободным для x в A(x), из-за введения анонимных кванторов в формулах (2) по переменным, входящим в t. Выберем формулы $(\tilde{2}')$, конгруэнтные $(2')$ и не содержащие в связанном виде переменных, входящих свободно или связанно в какую-либо формулу доказательства $\tilde{F}$.

Если теперь подставить $(\tilde{2}')$ вместо $(1')$ в доказательство $\tilde{F}$, то не может осуществиться ни один из этих случаев, и если подстановку формул $(\tilde{2}')$ обозначать с помощью «$\dagger$», то полученная последовательность формул будет доказательством формулы $\tilde{F}^\dagger$. Итак, $\vdash \tilde{F}^\dagger$.

Благодаря выбору связанных переменных в $(\tilde{2}')$, условие (A1) свободы выполняется для подстановки $(\tilde{2})$ вместо (1) в $\tilde{F}$. Условие (A2) также выполнено, так как $\tilde{F}$ не содержит в связанном виде ни одной из анонимных свободных переменных $z_1, \ldots, z_q$ из (2), а значит, и из $(\tilde{2})$. Итак, подстановка $(\tilde{2})$ вместо (1) в $\tilde{F}$ свободна. Подстановка (2) вместо (1) в F также свободна (как уже отмечалось выше). Следовательно, по лемме 16b, $\tilde{F}^\dagger$ конгруэнтна F^*, и по лемме 15b, $\vdash \tilde{F}^\dagger \sim F^*$. Вместе с $\vdash \tilde{F}^\dagger$ (и *18a) это дает $\vdash F^*$, что как раз и оставалось доказать.

Пример 7°. Мы докажем (пример 2 § 35), что

(a) $\vdash \mathcal{A} \vee \forall a \mathcal{B}(a) \sim \forall a (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(a))$. Отсюда, по лемме 15b,

(b) $\vdash \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x) \sim \forall x (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x))$, где x — любая переменная.

Отсюда, по теореме 15, (c) $\vdash A \vee \forall x B(x) \sim \forall x (A \vee B(x))$, где B(x) — любая формула, а A — любая формула, не содержащая свободно x (иначе было бы нарушено (A2) для оговорки (A)). Это — *92 с теми же условиями, что и в теореме 17. Из (b) легко получаем (d) $\mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x) \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)$ и (e) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x) \vdash^{x} \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x)$. Подстановка вместо $\mathcal{A}$ формулы A, содержащей свободно x, допустима в (d), но оговорка (B) запрещает ее в (e).

В тех случаях, когда наши оговорки и условия, наложенные на метаматематические буквы, запрещают делать подстановку, всегда налицо переменная, имеющая как анонимные, так и явные вхождения. Можно было бы пользоваться более простым общим правилом взамен нашего детального перечисления различных условий, а именно, анонимные переменные должны отличаться от явных. Но, конечно, это правило является несколько более стеснительным, чем необходимо, — например, анонимные связанные x-ы в A из *92, очевидно, безвредны.

Замечание 1. *Если* Γ, E—*предикатные формулы, составленные из предикатных букв* (1), *и* Γ ⊢ E, *то имеется вывод* E *из* Γ, *в который не входят предикатные буквы, не встречающиеся среди* (1). Действительно, в данный вывод мы можем подставить $(2')$ вместо $(1')$, где (2) совпадает с (1), а дополнительные называющие формы в (2′) содержат только формулы и, (1); например, каждая из них может быть $\forall x_1 \ldots \forall x_{n_1} P_1(x_1, \ldots, x_{n_1})$.

Обращение подстановки. Формула $A(a_1, \ldots, a_n)$ называется *элементарной называющей формой* (по различным переменным $a_1, \ldots, a_n$), если (i) она не имеет ни одного из следующих видов: $A \supset B$, $A \& B$, $A \vee B$, $\neg A$, $\forall x A(x)$ или $\exists x A(x)$, где A и B — формулы, x — переменная и A(x) — формула, и (ii) она не содержит свободных переменных, кроме $a_1, \ldots, a_n$, а каждая из этих последних входит в нее свободно ровно один раз. Две элементарные называющие формы $A_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ и $A_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$ считаются *различными* (как элементарные называющие формы), если $A_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$ не имеет вида $A_i(t_1, \ldots, t_{n_i})$, где $t_1, \ldots, t_{n_i}$ является перестановкой из $a_1, \ldots, a_{n_i}$ (так что $n_j = n_i$).

Теорема 16. Обращение подстановки вместо предикатных букв. *В условиях теоремы* 15 *без оговорок* (A) *и* (B), *но зато при условии, что* (2) — *различные элементарные называющие формы, если* $D_1^*, \ldots, D_l^* \vdash E^*$, *то* $D_1, \ldots, D_l \vdash E$.

Это доказывается тем же путем, что и теорема 4 (§ 25), и также допускает вторую форму.

Замена называющей формы. С помощью понятия вхождения называющей формы, о котором упоминалось выше (вслед за примером 5), теория замены (теорема 14 и *66, ср. § 33 после следствия 2) может быть выражена следующим образом: $A(x_1, \ldots, x_n) \sim B(x_1, \ldots, x_n) \vdash^{x_1 \ldots x_n} C_{A(t_1, \ldots, t_n)} \sim C_{B(t_1, \ldots, t_n)}$, коль скоро части $A(t_1, \ldots, t_n)$ и $B(t_1, \ldots, t_n)$ являются соответственно вхождениями $A(x_1, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, \ldots, x_n)$ в качестве называющих форм по $x_1, \ldots, x_n$.

Замечание 2. Результаты, аналогичные теоремам 15 и 16 и замечанию 1, имеют место и для индивидуальных переменных. Мы сформулируем только следующие. (a) *Если* $z_1, \ldots, z_q$ — *различные переменные, не входящие связанно в* $D(z_1, \ldots, z_q)$ *и* $E(z_1, \ldots, z_q)$, *и* $D(z_1, \ldots, z_q) \vdash E(z_1, \ldots, z_q)$, *причем* $z_1, \ldots, z_q$ *остаются фиксированными, то имеется вывод* $E(z_1, \ldots, z_q)$ *из* $D(z_1, \ldots, z_q)$, *в который* $z_1, \ldots, z_q$ *в связанном виде не входят*. Доказательство проведем для $q = 1$ и в предположении, что варьируется только одна переменная y. По лемме 8a, $\forall$-введ. (по z) и переименованию в новую переменную, $\bar{z}$, $\forall \bar{z} [\forall y D(\bar{z}) \supset E(\bar{z})]$ доказуема. Эта формула вовсе не содержит z. Все переменные, не входящие в данную формулу, равноправны относительно определения доказательства этой формулы в исчислении предикатов, следовательно, имеется доказательство формулы $\forall \bar{z} [\forall y D(\bar{z}) \supset E(\bar{z})]$, не содержащее z. Из этой формулы и D(z) можно вывести E(z) с помощью $\forall$-удал. (по $\bar{z}$), $\forall$-введ. (по y) и $\supset$-удал. (b). *Пусть* $z_1, \ldots, z_q$ — *различные переменные, не входящие связанно в* $D(z_1, \ldots, z_q)$ *и* $E(z_1, \ldots, z_q)$, *и пусть* $t_1, \ldots, t_q$ — *различные элементарные термы (т. е. индивидуальные символы или переменные), ни один из которых, кроме совпадающих с каким-нибудь из* $z_1, \ldots, z_q$, *не входит в* $D(z_1, \ldots, z_q)$ *или* $E(z_1, \ldots, z_q)$. *Тогда* $D(z_1, \ldots$ $\ldots, z_q) \vdash E(z_1, \ldots, z_q)$ *с фиксированнными* $z_1, \ldots, z_q$ *равносильно тому, что* $D(t_1, \ldots, t_q) \vdash E(t_1, \ldots, t_q)$, *где все переменные из числа* $t_1, \ldots, t_q$ *фиксированы*. Действительно, в силу (a), $z_1, \ldots, z_q$, $t_1, \ldots, t_q$ могут быть устранены из данного вывода в качестве связанных переменных, после чего каждый шаг вывода будет сохранять силу при подстановке всюду в доказательстве $t_1, \ldots, t_q$ вместо $z_1, \ldots, z_q$ или наоборот.

§ 35. ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ, ПРЕДВАРЕННАЯ ФОРМА

Теорема 17. *Если* x *и* y — *различные переменные*, A, B, A(x), B(
A(x, y) — *формулы, причем* A *и* B *не содержат* x *свободно*, [*а для* *7
*80 *требуется еще, чтобы* x *была свободна для* y *в* A(x, y)], *то*:

*75. $\vdash \forall x A \sim A$. *76. $\vdash \exists x A \sim A$.

*77. $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \sim \forall y \forall x A(x, y)$. *78. $\vdash \exists x \exists y A(x, y) \sim \exists y \exists x A(x$

*79. $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \supset \forall x A(x, x)$. *80. $\vdash \exists x A(x, x) \supset \exists x \exists y A(x,$

*81. $\vdash \forall x A(x) \supset \exists x A(x)$.

*82. $\vdash \exists x \forall y A(x, y) \supset \forall y \exists x A(x, y)$.

(Изменения кванторов.)

*83°. $\vdash \exists x A(x) \sim \neg \forall x \neg A(x)$. *84°. $\vdash \forall x A(x) \sim \neg \exists x \neg A(x)$.

[Выражение каждого из операторов $\exists$ и $\forall$ через другой и $\neg$.]

*85°. $\vdash \neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$. *86. $\vdash \neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$.

*87. $\vdash \forall x A(x) \& \forall x B(x) \sim$
$\sim \forall x (A(x) \& B(x))$. *88. $\vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \sim$
$\sim \exists x (A(x) \vee B(x))$.

*89. $\vdash A \& \forall x B(x) \sim \forall x (A \& B(x))$. *90. $\vdash A \vee \exists x B(x) \sim \exists x (A \vee B($

*91. $\vdash A \& \exists x B(x) \sim \exists x (A \& B(x))$. *92°. $\vdash A \vee \forall x B(x) \sim \forall x (A \vee B($

*93. $\vdash \exists x (A(x) \& B(x)) \supset$
$\supset \exists x A(x) \& \exists x B(x)$. *94. $\vdash \forall x A(x) \vee \forall x (Bx) \supset$
$\supset \forall x (A(x) \vee B($

(Пронесение $\neg$, & и $\vee$ сквозь кванторы.)

*83a. $\vdash \exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$. *84a. $\vdash \forall x A(x) \supset \neg \exists x \neg A(x)$.

*85a. $\vdash \exists x \neg A(x) \supset \neg \forall x A(x)$. *92a. $\vdash A \vee \forall x B(x) \supset \forall x (A \vee B(x))$

(Дополнительные результаты, представляющие интерес в связи с интуиционистской системой.)

*95. $\vdash \forall x (A \supset B(x)) \sim A \supset \forall x B(x)$.

*96. $\vdash \forall x (A(x) \supset B) \sim \exists x A(x) \supset B$.

*97°. $\vdash \exists x (A \supset B(x)) \sim A \supset \exists x B(x)$.

*98°. $\vdash \exists x (A(x) \supset B) \sim \forall x A(x) \supset B$.

*99°. $\vdash \exists x (A(x) \supset B(x)) \sim \forall x A(x) \supset \exists x B(x)$.

*97a. $\vdash \exists x (A \supset B(x)) \supset (A \supset \exists x B(x))$.

*98a. $\vdash \exists x (A(x) \supset B) \supset (\forall x A(x) \supset B)$.

*99a. $\vdash \exists x (A(x) \supset B(x)) \supset (\forall x A(x) \supset \exists x B(x))$.

(Пронесение кванторов сквозь $\supset$ и сравнение классических и интуициони
ских результатов.)

Доказательства[1]) (для классической системы) утверждений *75—*94, за исключением *76, *78, *80, *88, *90, *92 и *94. Для экономии работы мы отложим рассмотрение этих семи до появления двойственности (или, для *80 и *94, соотношения обратной двойственности). После этого, классически, *95—*99 получатся путем использования *59 (§ 27) и *88, *90, *92 и *85, *86.

*75. Если теперь обозначить A через «A(x)», то, ввиду того, что A не содержит x свободно, A(t) также будет A(x) (§ 18). Результат получится с помощью $\forall$-удал., $\supset$-введ. (или схемы аксиом 10), $\forall$-введ., $\supset$-введ. [x не варьируется при $\forall$-введ., потому что A(x) не содержит x свободно] и *16.

*79. 1. $\forall x \forall y A(x, y) \vdash A(x, x) \vdash^{x} \forall x A(x, x)$ — двойное $\forall$-удал. (*65) [x, x есть пара термов, свободных для x, y в A(x, y)], $\forall$-введ.

2. $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \supset \forall x A(x, x)$ — $\supset$-введ., 1 [x не варьируется в 1, потому что $\forall x \forall y A(x, y)$ не содержит x свободно].

*82. 1. $A(x, y) \vdash \exists x A(x, y) \vdash^{y} \forall y \exists x A(x, y)$ — $\exists$-введ., $\forall$-введ.

2. $\forall y A(x, y) \vdash \forall y \exists x A(x, y)$ — $\forall$-удал., 1.

3. $\exists x \forall y A(x, y) \vdash \forall y \exists x A(x, y)$ — $\exists$-удал., 2 [$\forall y \exists x A(x, y)$ не содержит x свободно, и ни одна переменная не варьируется в 2, потому что y (см. 1) не входит свободно в $\forall y A(x, y)$].

4. $\vdash \exists x \forall y A(x, y) \supset \forall y \exists x A(x, y)$ — $\supset$-введ., 3 [ни одна переменная не варьируется в 3 (см. лемму 7b § 24)].

Заметим, что попытка провести соответствующее доказательство для обращения *82 (т. е. *82 с обратным направлением $\supset$) терпит крушение из-за ограничений, наложенных в исчислении предикатов на употребление вспомогательного вывода:

1. $A(x, y) \vdash^{y} \forall y A(x, y) \vdash \exists x \forall y A(x, y)$ — $\forall$-введ., $\exists$-введ.

2? $\exists x A(x, y) \vdash \exists x \forall y A(x, y)$ — $\exists$-удал., 1. Но это не законно, потому что правило $\exists$-удаления (в отличие от правила $\forall$-удаления, использованного при шаге 2 для *82) является правилом вспомогательного вывода и неприменимо здесь из-за того, что во вспомогательном выводе 1 переменная y варьируется для исходной формулы A(x, y), которая подлежит устранению (кроме случая, когда A(x, y) не содержит y свободно).

Эту трудность невозможно обойти, и обращение *82 является недоказуемым для произвольной A(x, y). В терминах интерпретации формула $\exists x \forall y A(x, y)$ утверждает, что существует x такое, что для каждого y A(x, y), а $\forall y \exists x A(x, y)$ утверждает только, что для каждого y существует некоторое x, не обязательно одно и то же для различных y-в, такое, что A(x, y). Это различие хорошо известно математикам по примеру равномерной и обыкновенной сходимости последовательности функций $a_n(x)$ к предельной функции $a(x)$ в некотором интервале или другой области X изменения x. С помощью настоящего логического символизма и переменных p, n и N, пробегающих по натуральному ряду, и x по X, свойства равномерной и обыкновенной сходимости выражаются соответственно следующим образом:

(i) $\forall p \exists N \forall x \forall n (n > N \supset |a_n(x) - a(x)| < 1/2^p)$,

(ii) $\forall p \forall x \exists N \forall n (n > N \supset |a_n(x) - a(x)| < 1/2^p)$.

---

[1]) См. подстрочное примечание[2]) на стр. 111. — *Прим. перев.*

*82 утверждает, что равномерная сходимость влечет обыкновенную, но обратное, вообще говоря, не верно. (Аналогично для равномерной и обыкновенной непрерывности.)

Метаматематическое доказательство недоказуемости формулы $\forall b \exists a \mathfrak{A}(a, b) \supset \exists a \forall b \mathfrak{A}(a, b)$ в исчислении предикатов будет дано в примере 2 § 36.

*83. 1. $A(x), \forall x \neg A(x) \vdash \neg A(x)$ — $\forall$-удал.

2. $A(x), \forall x \neg A(x) \vdash A(x)$.

3. $A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ — $\neg$-введ., 1, 2 [никакая переменная из $\forall x \neg A(x)$ не варьируется в 1 или 2].

4. $\exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ — $\exists$-удал., 3 [$\neg \forall x \neg A(x)$ не содержит x свободно; и ни одна переменная не варьируется в 3].

5. $\vdash \exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$ — $\supset$-введ., 4 [ни одна переменная не варьируется в 4].

6. $\neg \exists x A(x), A(x) \vdash \exists x A(x)$ — $\exists$-введ.

7. $\neg \exists x A(x), A(x) \vdash \neg \exists x A(x)$.

8. $\neg \exists x A(x) \vdash \neg A(x) \vdash^{x} \forall x \neg A(x)$ — $\neg$-введ., 6, 7 [ни одна переменная не варьируется в 6, 7], $\forall$-введ.

9. $\vdash \neg \exists x A(x) \supset \forall x \neg A(x)$ — $\supset$-введ., 8 [x не входит свободно в исходную формулу $\neg \exists x A(x)$ 8, которая подлежит устранению].

10. $\vdash \neg \forall x \neg A(x) \supset \exists x A(x)$ — контрапозиция (*14), 9.

11. $\vdash \exists x A(x) \sim \neg \forall x \neg A(x)$ — &-введ., (*16), 5, 10.

*84. См. пример 1 § 34.

*87. 1. $A(x), B(x) \vdash A(x) \& B(x) \vdash^{x} \forall x (A(x) \& B(x))$ — &-введ., $\forall$-введ.

2. $\forall x A(x), \forall x B(x) \vdash \forall x (A(x) \& B(x))$ — $\forall$-удал. дважды, 1.

3. $\forall x A(x) \& \forall x B(x) \vdash \forall x (A(x) \& B(x))$ — &-удал., 2.

4. $\vdash \forall x A(x) \& \forall x B(x) \supset \forall x (A(x) \& B(x))$ — $\supset$-введ., 3 [ни одна переменная не варьируется в 3, потому что (см. 1) x не входит свободно в $\forall x A(x) \& \forall x B(x)$].

5. $A(x) \& B(x) \vdash A(x) \vdash^{x} \forall x A(x)$ — &-удал., $\forall$-введ.

6. $A(x) \& B(x) \vdash B(x) \vdash^{x} \forall x B(x)$ — &-удал., $\forall$-введ.

7. $A(x) \& B(x) \vdash^{x} \forall x A(x) \& \forall x B(x)$ — &-введ., 5, 6.

8. $\forall x (A(x) \& B(x)) \vdash \forall x A(x) \& \forall x B(x)$ — $\forall$-удал., 7.

9. $\vdash \forall x (A(x) \& B(x)) \supset \forall x A(x) \& \forall x B(x)$ — $\supset$-введ., 8 [ни одна переменная не варьируется в 8, так как (см. 7) x не входит свободно в $\forall x (A(x) \& B(x))$].

10. $\vdash \forall x A(x) \& \forall x B(x) \sim \forall x (A(x) \& B(x))$ — &-введ., 4, 9.

*89, *91, *93. Если в предыдущем доказательстве мы будем читать «A» вместо «A(x)» и «$\forall x A(x)$», опустив одно $\forall$-удаление при шаге 2 и $\forall$-введение при шаге 5, то мы прочтем доказательство *89. Подставляя затем всюду $\exists$ вместо $\forall$, мы получим доказательство *91. Читателю рекомендуется выписать его и удостовериться в том, что выполняются условия для $\exists$-удалений. Но подстановка $\exists$ вместо $\forall$ в доказательство *87 не проходит. (Почему?) Мы, правда, получим таким путем *93, но не его обращение.

В качестве дальнейшего упражнения предлагаем читателю попытаться дать соответствующее доказательство *92 и посмотреть, как оно теряет силу из-за ограничения, наложенного на вспомогательные выводы. Результат *92, который мы получим из *91 после того, как будет обоснована двойственность, интересен в качестве примера формулы, которая не содержит $\neg$, но которую нам не удалось доказать без помощи постулата 8.

Ввиду *49b § 27, может иметься не более $18\,(=3\cdot 2\cdot 3)$ интуиционистски неэквивалентных формул, полученных из $A(x)$ путем квантификации x[1]) и, быть может, применения отрицания. (Сперва надо применить 0, 1 или 2 раза $\neg$, затем $\forall x$ или $\exists x$ и затем опять 0, 1 или 2 раза $\neg$.)

Следствие. *Формулы каждой из следующих таблиц* I—IV *попарно эквивалентны в классическом исключении предикатов. Для каждой из этих таблиц в интуиционистской системе:* a) *каждые две формулы, не разделенные чертой, эквивалентны;* b) *каждая формула влечет любую формулу, стоящую ниже ее, т. е. импликация от первой из них ко второй доказуема;* c) *двойное отрицание импликации от каждой формулы к любой формуле, не отделенной от нее двойной чертой, доказуемо (а потому доказуемо и двойное отрицание эквивалентности*—в силу *49a и *25) (Гейтинг, [1946]).

$$\begin{array}{ll}
 & \text{I} \\
\text{a.} & \forall x A(x) \\ \cline{2-2}
\text{b.} & \neg\neg\forall x A(x) \\ \hline\hline
\text{c}_1. & \forall x \neg\neg A(x) \\
\text{c}_2. & \neg\neg\forall x \neg\neg A(x) \\
\text{c}_3. & \neg\exists x \neg A(x)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & \text{II} \\
\text{a.} & \exists x A(x) \\ \cline{2-2}
\text{b.} & \exists x \neg\neg A(x) \\ \hline
\text{c}_1. & \neg\neg\exists x A(x) \\
\text{c}_2. & \neg\neg\exists x \neg\neg A(x) \\
\text{c}_3. & \neg\forall x \neg A(x)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \text{III} \\
\text{a.} & \exists x \neg A(x) \\ \cline{2-2}
\text{b}_1. & \neg\neg\exists x \neg A(x) \\
\text{b}_2. & \neg\forall x \neg\neg A(x) \\ \hline\hline
\text{c.} & \neg\forall x A(x)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & \text{IV} \\
\text{a}_1. & \forall x \neg A(x) \\
\text{a}_2. & \neg\neg\forall x \neg A(x) \\
\text{a}_3. & \neg\exists x \neg\neg A(x) \\
\text{a}_4. & \neg\exists x A(x)
\end{array}$$

Доказательства для таблицы II в интуиционистской системе.

$\vdash \text{IIa} \supset \text{IIb}$ [*49a, *70]. $\vdash \text{IIb} \supset \text{IIc}_3$ [*85a]. $\vdash \text{IIc}_3 \sim \text{IIc}_1$ [*86].

$\vdash \text{IIc}_3 \sim \neg\forall x \neg\neg\neg A(x)$ [*49b] $\sim \text{IIc}_2$ [*86]. $\vdash \neg\neg(\text{IIc}_2 \supset \text{IIb})$ [*51b].

Аналогично, $\vdash \neg\neg(\text{IIc}_1 \supset \text{IIa})$. Отсюда и в силу $\vdash \text{IIb} \supset \text{IIc}_1$ и *49a и *24, получаем $\vdash \neg\neg(\text{IIb} \supset \text{IIa})$.

Теорема 18°. *Пусть* D — *предикатная формула, построенная из различных предикатных букв* $P_1(a_1, \ldots, a_{n_1}), \ldots, P_m(a_1, \ldots, a_{n_m})$ *и их отрицаний* $\neg P_1(a_1, \ldots, a_{n_1}), \ldots, \neg P_m(a_1, \ldots, a_{n_m})$ *с помощью одних только операторов* &, $\vee$, $\forall x$ *и* $\exists x$ (*где* x — *каждый раз любая переменная*). *Тогда формула* $D^\dagger$, *эквивалентная* $\neg D$, *получается в результате замены друг на друга в* D *символов* & *и* $\vee$, $\forall$ *и* $\exists$ *и еще каждой буквы и ее отрицания.*

Другими словами, если D — *предикатная формула описанного рода, а* $D^\dagger$ — *результат описанной замены друг на друга в* D, *то* $\vdash \neg D \sim D^\dagger$.

---

[1]) Т. е. применение одного из операторов $\forall x$ и $\exists x$.—*Прим. перев.*

Пример 1°. $\vdash \neg \exists a(\forall b \neg \mathcal{A}(b) \,\&\, (\neg \mathcal{B} \vee \exists c \quad \mathcal{C}(a, c, b))) \sim$
$$\sim \forall a(\exists b \quad \mathcal{A}(b) \vee (\quad \mathcal{B} \,\&\, \forall c \neg \mathcal{C}(a, c, b))).$$

Доказательство проводится тем же методом, что и для теоремы 8 (§ 27), с использованием *85 и *86 при рассмотрении двух новых случаев, которые появляются теперь при индукционном шаге. Теорема, как и прежде, допускает вторую форму.

Следствие°. *Эквивалентность между двумя формулами* E *и* F *описанного в теореме* 18 *типа сохраняется при замене друг на друга в* E *и* F *символов* & *и* $\vee$ *и символов* $\forall$ *и* $\exists$.

Другими словами, если E *и* F — *две такие предикатные формулы, а* E′ *и* F′ *получаются в результате указанной замены друг на друга в* E *и* F *соответственно, то из* $\vdash E \sim F$ следует $\vdash E' \sim F'$. (Принцип двойственности.) *При тех же условиях, если* $\vdash E \supset F$, *то* $\vdash F' \supset E'$. (Соотношение обратной двойственности.)

Это следствие вытекает из теоремы, как и прежде (ср. следствие из теоремы 8).

Пример 2°. В силу *91, $\vdash \mathcal{A} \,\&\, \exists a \mathcal{B}(a) \sim \exists a(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}(a))$. Отсюда, в силу двойственности, $\vdash \mathcal{A} \vee \forall a \mathcal{B}(a) \sim \forall a(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(a))$. Это *92 в том виде, как оно встречалось в примере 7 § 34.

Аналогично мы получаем *76, *78, *88, *90 как двойственные к *75, *77, *87, *89 и *80, *94 как обратно-двойственные к *79, *93 соответственно. (Заметим, что каждая из формул *81 и *82 является обратно-двойственной сама себе.)

Теорема 19°. *Если дана любая формула* C, *то можно найти формулу* D [именуемую *предваренной формой* (*для*) *формулы* C], *обладающую следующими двумя свойствами. Формула* C *эквивалентна* D, *т. е.* $\vdash C \sim D$. *В* D *все кванторы* (*если таковые имеются*) *стоят впереди, т. е. все другие логические символы* $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, *встречающиеся в формуле, стоят в области действия каждого квантора* (формула такого вида называется *предваренной*).

Доказательство. Чтобы привести формулу C к предваренной форме, можно шаг за шагом выносить все кванторы за области действия логических символов $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, применяя для этого утверждения *85, *86, *89 — *92, *95 — *98 и замечая следующее. Если в формуле, к которой надо применить одно из утверждений *85 — *92 или *95 – *98, вопреки условию теоремы 17, A — или соответственно B — содержит свободно x, то, в силу *73 или *74, можно переименовать связанные переменные. В случае, если A в *89 — *92 стоит не на той стороне от & или $\vee$, можно применить *33 или *34. (Этот процесс приведения к предваренной форме не требует *87, *88 или *99, но каждый раз, когда может быть применен один из этих результатов, это экономит число шагов и приводит к более короткой предваренной форме.)

Для доказательства того, что этот процесс оканчивается, можно воспользоваться индукцией по числу случаев, когда какой-нибудь квантор встречается внутри области действия одного из $\supset$, &, $\vee$ или $\neg$, т. е. по общему числу упорядоченных пар, первым членом которых служит один из $\supset$, &, $\vee$, или $\neg$, а второй член есть квантор, входящий в область действия первого члена[1]). Если это число отлично от 0, то хотя бы в одном из таких случаев не существует логического символа с промежуточной областью действия[1]). Тогда можно сделать шаг, устраняющий этот случай

---

[1]) Конечно, здесь подразумевается, что речь идет не о логических символах, а об их вхождениях в данную формулу. — *Прим. перев.*

и оставляющий без изменений остальные, от чего индукционное число уменьшается на единицу. (Если применяется *87, *88 или *99, то индукционное число уменьшается на 2 или больше.)

Пример 3°. Приводимые ниже нумерованные формулы последовательно эквивалентны, каждая следующей, в силу замен, основанных на эквивалентностях, цитированных справа. Последняя формула является предваренной формой для первой, а также для любой формулы из следующего списка:

1. $[\neg\exists a\mathscr{A}(a) \vee \forall a\mathscr{B}(a)] \& [\mathscr{C} \supset \forall a\mathscr{D}(a)]$.
2. $[\forall a\neg\mathscr{A}(a) \vee \forall a\mathscr{B}(a)] \& \forall a[\mathscr{C} \supset \mathscr{D}(a)]$ — *86, *95.
3. $\forall a[\forall a\neg\mathscr{A}(a) \vee \mathscr{B}(a)] \& \forall a[\mathscr{C} \supset \mathscr{D}(a)]$ — *92.
4. $\forall a[\forall b\neg\mathscr{A}(b) \vee \mathscr{B}(a)] \& \forall a[\mathscr{C} \supset \mathscr{D}(a)]$ — *73.
5. $\forall a\forall b[\neg\mathscr{A}(b) \vee \mathscr{B}(a)] \& \forall a[\mathscr{C} \supset \mathscr{D}(a)]$ — *34, *92.
6. $\forall a\{\forall b[\neg\mathscr{A}(b) \vee \mathscr{B}(a)] \& [\mathscr{C} \supset \mathscr{D}(a)]\}$ — *87.
7. $\forall a\forall b\{[\neg\mathscr{A}(b) \vee \mathscr{B}(a)] \& [\mathscr{C} \supset \mathscr{D}(a)]\}$ — *33, *89.

§ 36. ОЦЕНКА, НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ

Исчисление предикатов по замыслу является формализацией тех принципов логики предикатов, которые справедливы независимо от числа элементов в предметной области, при условиях, что в этой области имеется хотя бы один элемент (§ 31). В частности, все доказуемые формулы будут истинными, если мы положим, что число элементов области равно k, где k — любое целое $\geqslant 1$. Сопоставим эту идею с той, которой мы воспользовались в § 28, когда мы отвлеклись от истинных и ложных предложений и получили два арифметических объекта $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$. Это подсказывает финитную процедуру оценки, которая позволит нам метаматематически установить непротиворечивость исчисления предикатов.

В этой процедуре оценки каждая предикатная формула рассматривается как представляющая функцию от свободных индивидуальных переменных и от предикатных букв (в том числе пропозициональных букв), которые она содержит, и, возможно, также и от других свободных переменных и предикатных букв. При определении понятия, которое соответствует понятию тождественной истинности в исчислении высказываний, мы потребуем, чтобы формулы, доказуемые в исчислении предикатов, были истинны, не зависимо как от того, какой предикат представлен той или иной предикатной буквой, так и от того, какой предмет из предметной области представлен той или иной свободной индивидуальной переменной (ввиду указанной в § 32 интерпретации всеобщности для свободных индивидуальных переменных).

После того, как выбрано некоторое фиксированное целое положительное число k в качестве мощности предметной области, для процедуры оценки несущественно, чем являются сами предметы этой области. Удобно считать (или называть) их числами $1, \ldots, k$. Эти числа будут служить значениями, которые принимают переменные.

Как и прежде (§ 28), пропозициональные буквы (т. е. буквы для предикатов от 0 переменных) принимают значения $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$.

Теперь рассмотрим предикатные буквы. Для любого данного целого положительного числа $n > 0$ предикатная буква с n приданными переменными при логической интерпретации нашей системы тем отличается от пропозициональных букв, что она представляет не предложение, а пропозициональную функцию от n переменных, т. е. функцию, которая для каждой системы значений приданных переменных (§ 31) принимает в качестве значения некоторое предложение. В соответствии с этим значения, которые мы будем давать предикатным буквам с n приданными переменными в нашей процедуре оценки после того, как эти предложения замещены на $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$, будут не $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$, а функциями от n переменных над областью $\{1, \ldots, k\}$, принимающими значения в области $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$. Таких различных функций имеется ровно 2^{k^n}. Мы будем называть их *логическими функциями* от n переменных над областью из k предметов. Значения истинности $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, которыми мы пользуемся в случае $n=0$, можно рассматривать как $2\,(=2^{k^0})$ логические функции от 0 переменных.

Как и прежде, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ мы интерпретируем как фиксированные функции над областью из двух предметов $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$, принимающие значения в этой же области, определяемые ранее приведенными таблицами (§ 28). Далее, $\forall$ и $\exists$ мы интерпретируем как фиксированные функции над логическими функциями от одной переменной, принимающими значения из области $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$, причем переменная x в $\forall$x или $\exists$x указывает ту индивидуальную переменную, в качестве функции от которой рассматривается область действия данного квантора. Определяются эти две фиксированные логические функции следующим образом. Для данной логической функции A(x) значение $\forall$xA(x) есть $\mathfrak{t}$, если A(x) принимает значение $\mathfrak{t}$ для каждого значения x из области $\{1, \ldots, k\}$, в противном случае значение $\forall$xA(x) есть $\mathfrak{f}$. Значение $\exists$xA(x) есть $\mathfrak{t}$, если A(x) принимает значение $\mathfrak{t}$ для некоторого значения x из области $\{1, \ldots, k\}$; в противном случае значение $\exists$xA(x) есть $\mathfrak{f}$.

Для каждой предикатной формулы мы теперь в состоянии составить таблицу, выражающую зависимость значения функции, представленной формулой, от различных свободных индивидуальных переменных и предикатных букв, входящих в эту формулу (а возможно, и от других переменных и предикатных букв). Для этого удобно сначала перечислить в некотором фиксированном порядке логические функции, которые потребуются в качестве значений предикатных букв, и ввести символы для их обозначения.

Пример 1. Для $k=2$ построим таблицу для предикатной формулы $\forall a(\mathscr{B}\supset\mathscr{A}(a)) \vee (\neg\mathscr{A}(b)\,\&\,\mathscr{B})$, учитывающую входящие в нее свободные переменные и предикатные буквы. Эта формула представляет функцию от трех переменных, а именно b, $\mathscr{B}$ и $\mathscr{A}(a)$, где a — переменная, приданная называющей форме, использованной для $\mathscr{A}$ как предикатной буквы от одной переменной (§ 31). Прежде чем строить таблицу для этой формулы, введем обозначения для логических функций от одной переменной, которые мы будем употреблять в качестве значений переменной $\mathscr{A}(a)$. Так как $k=2$, имеется $4\,(=2^{2^1})$ таких логических функции, $\mathfrak{l}_1(a)$, $\mathfrak{l}_2(a)$, $\mathfrak{l}_3(a)$, $\mathfrak{l}_4(a)$, определенных следующей таблицей их значений.

ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ОБЛАСТИ ИЗ ДВУХ ПРЕДМЕТОВ

Значение независимой переменной	Соответствующее значение функции			
a	$\mathfrak{l}_1(a)$	$\mathfrak{l}_2(a)$	$\mathfrak{l}_3(a)$	$\mathfrak{l}_4(a)$
1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$

Теперь таблица для данной формулы выглядит следующим образом (ниже приводится образец вычисления одного из ее значений):

Значения независимых переменных b	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A}(a)$	Соответствующее значение функции $\forall a(\mathscr{B}\supset\mathscr{A}(a))\vee(\neg\mathscr{A}(b)\,\&\,\mathscr{B})$
1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{l}_1(a)$	$\mathfrak{t}$
1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{l}_2(a)$	$\mathfrak{f}$
1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{l}_3(a)$	$\mathfrak{t}$
1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{l}_4(a)$	$\mathfrak{t}$
1	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{l}_1(a)$	$\mathfrak{t}$
1	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{l}_2(a)$	$\mathfrak{t}$
1	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{l}_3(a)$	$\mathfrak{t}$
1	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{l}_4(a)$	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{l}_1(a)$	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{l}_2(a)$	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{l}_3(a)$	$\mathfrak{f}$
2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{l}_4(a)$	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{l}_1(a)$	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{l}_2(a)$	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{l}_3(a)$	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{l}_4(a)$	$\mathfrak{t}$

Приводим вычисление второго значения (2-я строка таблицы). Для этой цели, приступая к $\forall$-операции, мы должны будем иметь таблицу для $\mathscr{B}\supset\mathscr{A}(a)$, где $\mathscr{B}$ имеет значение $\mathfrak{t}$, а $\mathscr{A}(a)$ — значение $\mathfrak{l}_2(a)$. Приводим сперва эту таблицу (ее вычисление следует).

Значение независимой переменной a	Соответствующее значение функции $\mathfrak{t}\supset\mathfrak{l}_2(a)$
1	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{f}$

Приводим вычисления обоих значений этой вспомогательной таблицы с помощью таблицы для $\mathfrak{l}_2(a)$, приведенной вначале, и таблицы для $\supset$ из § 28

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{t}\supset\mathfrak{l}_2(a) & \qquad \mathfrak{t}\supset\mathfrak{l}_2(a) \\ \mathfrak{t}\supset\mathfrak{l}_2(1) & \qquad \mathfrak{t}\supset\mathfrak{l}_2(2) \\ \mathfrak{t}\supset\mathfrak{t} & \qquad \mathfrak{t}\supset\mathfrak{f} \\ \mathfrak{t} & \qquad \mathfrak{f} \end{array}$$

Возвращаемся теперь к вычислению значения во второй строке таблицы для $\forall a(\mathscr{B}\supset\mathscr{A}(a))\vee(\neg\mathscr{A}(b)\&\mathscr{B})$, т. е. значения, которое принимает эта формула, когда b имеет значение 1, $\mathscr{B}$ — значение $\mathfrak{t}$, а $\mathscr{A}(a)$ — значение $\mathfrak{l}_2(a)$. Начнем следующим образом:

$$\forall a(\mathscr{B}\supset\mathscr{A}(a))\vee(\neg\mathscr{A}(b)\&\mathscr{B})$$
$$\forall a(\mathfrak{t}\supset\mathfrak{l}_2(a))\vee(\neg\mathfrak{l}_2(1)\&\mathfrak{t})$$

Так как столбец значений таблицы для $\mathfrak{t}\supset\mathfrak{l}_2(a)$ состоит не из одних $\mathfrak{t}$, то согласно интерпретации, данной для $\forall$, можно заменить $\forall a(\mathfrak{t}\supset\mathfrak{l}_2(a))$ на $\mathfrak{f}$ и, кроме того, $\mathfrak{l}_2(1)$ можно заменить на $\mathfrak{t}$ согласно таблице для $\mathfrak{l}_2(a)$

$$\mathfrak{f}\vee(\neg\mathfrak{t}\&\mathfrak{t})$$
$$\mathfrak{f}\vee(\mathfrak{f}\&\mathfrak{t})$$
$$\mathfrak{f}\vee\mathfrak{f}$$
$$\mathfrak{f}$$

Читатель может проверить, освоился ли он с этой процедурой, вычисляя другие значения нашей таблицы для $\forall a(\mathscr{B}\supset\mathscr{A}(a))\vee(\neg\mathscr{A}(b)\&\mathscr{B})$. Конечно, обычно имеются более короткие пути составления таблицы для формулы, так что нет необходимости проводить вычисления, следуя описанной процедуре для каждого значения в отдельности (так, в рассматриваемом примере можно сразу узнать, что все восемь значений, для которых $\mathscr{B}$ есть $\mathfrak{f}$, суть $\mathfrak{t}$). Но это вычисление иллюстрирует лежащее в его основе понятие функции, представленной предикатной формулой, для данного целого положительного числа k.

Если для данного k столбец значений таблицы для какой-нибудь предикатной формулы, рассматриваемой как функция от некоторой системы свободных переменных и предикатных букв, охватывающей все свободные переменные и предикатные буквы данной формулы, содержит одни только $\mathfrak{t}$, мы будем говорить, что эта формула является *k-тождественной*, или *всегда-истинной* (иначе *общезначимой*) *в области из k предметов*. Если этот столбец значений содержит хоть одно $\mathfrak{t}$, то формула называется *выполнимой в области из k предметов*.

Как и прежде (§ 28), если формула k-тождественна (или выполнима в области из k-предметов) для минимального перечня свободных переменных и предикатных букв, то это же справедливо и для любого перечня — и обратно. Поэтому и здесь можно опускать ссылку на перечень.

Если столбцы значений таблиц двух предикатных формул, рассматриваемых как функции от системы тех свободных переменных и предикатных букв, которые содержатся хотя бы в одной из этих формул (или же от более широкой системы), совпадают, то эти две формулы называются *k-равными*.

Теорема 20. *При любом фиксированном целом положительном k ($k\geqslant 1$) для того, чтобы предикатная формула* E *была доказуемой (или выводимой из k-тождественных формул* Γ) *в исчислении предикатов, необходимо, чтобы* E *была k-тождественной.*

Доказательство. Теорема вытекает из двух лемм, соответствующих леммам для теоремы 9, но относящихся теперь к списку постулатов исчисления предикатов, предикатным формулам и k-тождественности. Рассуждение, уже приведенное для постулатов группы A1, переносится во всем существенном на рассматриваемый случай, а из четырех постулатов группы A2 мы рассмотрим два.

Схема аксиом 10. Аксиома этой схемы имеет вид $\forall x A(x) \supset A(t)$, где терм t для чистого исчисления предикатов является просто переменной, и эта переменная t свободна для x в A(x).

Переменная t может совпадать с x или отличаться от x, и x может входить или не входить свободно в A(x).

Мы должны показать, что $\forall x A(x) \supset A(t)$ принимает значение t для любого распределения логических функций в качестве значений предикатных букв, а предметов $1, \ldots, k$ в качестве значений свободных переменных, содержащихся в $\forall x A(x) \supset A(t)$.

Рассмотрим произвольное такое распределение. Если фиксированы значения предикатных букв и свободных переменных формулы A(x), кроме x (если x входит свободно в A(x)), то A(x) представляет логическую функцию от переменной x (независимо от того, входит x свободно в A(x) или нет).

Так как t свободна для x в A(x), то в последовательности символов A(t) свободные вхождения t встречаются на тех местах, которые в A(x) заняты свободными вхождениями t или x. Поэтому значение логической функции, представленной формулой A(x), когда x принимает значение t, есть значение A(t) для рассматриваемого распределения значений.

Теперь возможны два случая.

Случай 1: логическая функция, представленная формулой A(x), принимает только значение t. Тогда значение формулы A(t), которое является одним из возможных значений для A(x), есть t. Поэтому, согласно таблице оценок для $\supset$ (§ 28), значение $\forall x A(x) \supset A(t)$ есть t.

Случай 2: логическая функция, представленная формулой A(x), имеет $\mathfrak{f}$ в своем столбце значений. Тогда, по определению процесса оценки для $\forall$, формула $\forall x A(x)$ принимает значение $\mathfrak{f}$ — и опять $\forall x A(x) \supset A(t)$ имеет значение t.

Правило 12. Посылка есть $A(x) \supset C$, а заключение — $\exists x A(x) \supset C$, где C не содержит свободно x.

По условию, $A(x) \supset C$ принимает значение t при любом распределении логических функций в качестве значений предикатных букв и предметов $1, \ldots, k$ в качестве значений свободных переменных, содержащихся в $A(x) \supset C$. Мы должны доказать то же самое для $\exists x A(x) \supset C$.

Рассмотрим произвольное распределение значений для $\exists x A(x) \supset C$, принимая во внимание только предикатные буквы и свободные переменные, содержащиеся в этой формуле. Так как $\exists x A(x) \supset C$ не содержит x свободно, то никакое значение не приписывается при этом x.

Если теперь заданы значения предикатных букв и свободных переменных формулы A(x), кроме x (если x входит свободно в A(x)), то A(x) представляет логическую функцию от переменной x.

Случай 1: логическая функция, представленная формулой A(x), имеет t в своем столбце значений. Выберем значение x, соответствующее одному из этих t, и будем рассматривать данное распределение для $\exists x A(x) \supset C$ вместе с этим значением x как распределение для $A(x) \supset C$. Тогда A(x) получает значение t; по условию, $A(x) \supset C$ получает значение t, значит, согласно таблице оценок для $\supset$, значение C есть t. Так как C не содержит x свободно, то это значение C совпадает с его значением на основе распределения для $\exists x A(x) \supset C$, независимо от значения x. Поэтому, согласно таблице оценок для $\supset$, $\exists x A(x) \supset C$ принимает значение $\mathfrak{t}$ при данном распределении значений.

Случай 2: логическая функция, представленная формулой $A(x)$, принимает только значение $\mathfrak{f}$. Тогда $\exists x A(x)$ получает значение $\mathfrak{f}$ и $\exists x A(x) \supset C$ получает значение $\mathfrak{t}$.

Пример 1 (окончание). $\forall a(\mathscr{B} \supset \mathscr{A}(a)) \vee (\neg \mathscr{A}(b) \& \mathscr{B})$ не k-тождественна, потому что в ее столбце значений встречается $\mathfrak{f}$; следовательно, эта формула недоказуема в исчислении предикатов.

Пример 2. Для $k=2$, если $\mathscr{A}(a, b)$ принимает в качестве значения логическую функцию $\mathfrak{l}(a, b)$ такую, что $\mathfrak{l}(1, 1) = \mathfrak{l}(2, 2) = \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}(1, 2) = \mathfrak{l}(2, 1) = \mathfrak{f}$, то формула $\forall b \exists a \mathscr{A}(a, b) \supset \exists a \forall b \mathscr{A}(a, b)$ принимает значение $\mathfrak{f}$, а следовательно, она недоказуема.

Следствие 1. *При любом целом $k \geqslant 1$ для того, чтобы две предикатные формулы* E *и* F *были эквивалентны, необходимо, чтобы они были k-равны, т. е. если* $\vdash E \sim F$, *то* E *и* F *k-равны.*

Пример 3. Для $k=2$ и при $\mathfrak{l}_1(a)$, $\mathfrak{l}_2(a)$, $\mathfrak{l}_3(a)$, $\mathfrak{l}_4(a)$ как в примере 1, мы имеем следующие таблицы для верхних формул в I—IV следствия из теоремы 17, записанных с конкретной переменной и предикатной буквой:

$\mathscr{A}(a)$	$\forall a \mathscr{A}(a)$	$\exists a \mathscr{A}(a)$	$\exists a \neg \mathscr{A}(a)$	$\forall a \neg \mathscr{A}(a)$
$\mathfrak{l}_1(a)$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{l}_2(a)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{l}_3(a)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{l}_4(a)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$

Отсюда следует, что никакие две из этих формул не эквивалентны.

Следствие 2. *Исчисление предикатов (просто) непротиворечиво, т. е. ни для какой формулы* A *не имеет места одновременно* $\vdash A$ *и* $\vdash \neg A$.

Доказательство. Если A — предикатная формула, то каково бы ни было k, A и $\neg$A не могут оба быть k-тождественными. (Достаточно доказать теорему для произвольного фиксированного k. В первоначальном доказательстве Гильберта и Аккермана [1928], $k=1$.) При другом смысле формулы непротиворечивость вытекает из обращения правила подстановки (теорема 16 § 34).

*§ 37. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ, k-ОБРАЗЫ

Логические функции, которыми мы пользовались в процедуре оценки для данного конечного k, являются финитными объектами в том смысле, что каждая из них представляется таблицей, содержащей только конечное число значений.

Понятие логической функции от n переменных может быть сформулировано аналогичным образом для случая, когда предметная область содержит бесконечное число элементов, но с той разницей, что эти функции не могут быть теперь описаны конечными таблицами. Мы можем поэтому определить понятия *всегда-истинности* (иначе *общезначимости*) *и выполнимости* в данной непустой предметной области. Ясно, что при этом существенна только мощность предметной области, а не природа самих элементов.

Затем, рассуждая как при доказательстве теоремы 20, мы можем доказать, что каждая доказуемая предикатная формула всегда-истинна в любой непустой предметной области. Но в случае бесконечной области это рассуждение уже перестает быть финитным. Нефинитный шаг появляется, например, при рассмотрении схемы аксиом 10, где мы различаем два случая, смотря по тому, все ли значения некоторой функции суть t или среди них имеются также f, где теперь появляется бесконечно много значений, подлежащих рассмотрению. Это является применением закона исключенного третьего к бесконечному множеству (§ 13). Действительно, само понятие всегда-истинности, для случая бесконечной области и формулы, содержащей предикатную букву с $n>0$ приданными переменными, нефинитно. В самом деле, оно требует, чтобы значение некоторой функции было t для всех логических функций от n переменных, взятых в качестве значения этой предикатной буквы, а класс таких логических функций несчетен, и его можно представить себе (следуя обычному пониманию) только в терминах завершенной бесконечности.

Поэтому результат, что каждая доказуемая формула исчисления предикатов общезначима для любой непустой предметной области, не принадлежит метаматематике. Он относится скорее к тому, что можно назвать *теоретико-множественной логикой предикатов* (Гильберт—Бернайс [1934, стр. 125]), которая, как и метаматематика, предметом изучения имеет логические формализмы, но отличается от нее тем, что не ограничивается при этом изучении финитными методами. Основным нашим занятием является метаматематика, внеметаматематические же концепции и результаты теоретико-множественной логики предикатов могут представлять эвристическую ценность, т. е. могут подсказывать нам, что мы можем надеяться обнаружить в метаматематике.

Наша удача при доказательстве непротиворечивости исчисления предикатов (теорема 20, следствие 2) объясняется тем, что нам удалось найти финитную интерпретацию для формул этого исчисления—а именно, интерпретацию посредством истинности в фиксированной конечной области (т. е. k-тождественность). Но это не соответствует обычной интерпретации исчисления предикатов, которая связана с всегда-истинностью в произвольной непустой области.

Исходя из теоретико-множественного результата, что каждая доказуемая формула всегда-истинна в любой области, мы теперь покажем эвристически, что совокупность необходимых условий из теоремы 20, т. е. свойство быть k-тождественной формулой для каждого конечного k, недостаточна для доказуемости.

Это оказывается следствием из того, что некоторая формальная система аксиом (ср. § 8) о множестве D, которая требует, чтобы D было бесконечным, может быть выражена посредством некоторой предикатной формулы. Для описания этой идеи мы сначала приведем эти аксиомы в виде трех формул, записанных в нашем логическом символизме, но с помощью предикатного символа $<$, который должен подсказывать, что они являются аксиомами для некоторого отношения порядка:

$$\neg a<a, \qquad a<b\,\&\,b<c\supset a<c, \qquad \exists b(a<b).$$

Это — свойства порядка, которые выполняются (в старом интуитивном смысле, § 8), когда областью элементов является множество натуральных чисел, а $<$ — обычное отношение порядка для них. Легко видеть, что они не могут быть выполнены ни в какой конечной непустой области элементов. (Детали предоставляются читателю.)

Выразим теперь эту систему аксиом в виде одной предикатной формулы, употребляя $\mathcal{A}(a, b)$ вместо $a<b$ и пользуясь только связанными

переменными:

$$\forall a \neg \mathcal{A}(a, a) \& \forall a \forall b \forall c [\mathcal{A}(a, b) \& \mathcal{A}(b, c) \supset \mathcal{A}(a, c)] \& \forall a \exists b \mathcal{A}(a, b).$$

Эта формула, которую назовем «F», невыполнима (в новом теоретико-множественном смысле) в области из k предметов ни при каком конечном $k > 0$, но выполнима в счетной области натуральных чисел. Следовательно, ее отрицание $\neg$F всегда-истинно в любой области из k предметов при любом конечном $k > 0$, т. е. k-тождественно для каждого конечного $k > 0$, но не всегда-истинно в счетной области. Таким образом, формула $\neg$F удовлетворяет совокупности необходимых условий теоремы 20, но в силу теоретико-множественного результата, что каждая доказуемая формула всегда-истинна в каждой непустой области, она не может быть доказана в исчислении предикатов. Этот пример $\neg$F, а также другие примеры, имеются у Гильберта и Бернайса [1934, стр. 123—124].

В терминах теоретико-множественной интерпретации полнота исчисления предикатов должна означать, что каждая предикатная формула, всегда-истинная в любой непустой области, доказуема. Эта интерпретация нефинитна, в отличие от соответствующей интерпретации для исчисления высказываний (§§ 28, 29), и поэтому проблема полноты для исчисления предикатов не относится к метаматематике. Эти замечания наводят на мысль, что в рассматриваемом случае положение не так просто, как в исчислении высказываний, где мы рассматривали вопрос о полноте и о проблеме разрешимости. Мы вернемся к этим проблемам в одной из дальнейших глав об исчислении предикатов, где будут изложены некоторые результаты частью метаматематического, а частью теоретико-множественного характера (гл. XIV).

Для дальнейших ссылок мы подытожим наши последние заключения в одной теореме и следствии, которые мы помечаем буквой «^{C}» для указания, что они не принадлежат нашей последовательности метаматематических теорем и установлены здесь только с помощью нефинитных классических методов. Хотя мы и употребляем термин «теоретико-множественная» для логики предикатов рассматриваемого рода, но многие из относящихся к ней результатов опираются только на классическую арифметику; например, в то время как теорема 21 во всей ее общности предполагает множества произвольно высокой мощности, ее следствие может быть выведено и из частного случая теоремы 21, относящегося к счетной области натуральных чисел и счетному классу логических функций, выразимых посредством логического символизма, примененного к $<$ (где $a < b$ есть t или f, смотря по тому, является ли a меньшим натуральным числом, чем b, или нет).

Теорема 21^C. *Для каждой непустой предметной области любая предикатная формула, которая доказуема (или выводима из истинных формул) в исчислении предикатов, является всегда-истинной в этой области.*

Следствие ^{C}. *Для того, чтобы предикатная формула была доказуема в исчислении предикатов, (вообще говоря) не достаточно, чтобы эта формула была k-тождественной для каждого целого положительного числа k.*

Аналогия между $\forall$, $\exists$ и $\&$, $\vee$. При интерпретации в конечной области из k предметов $1, \ldots, k$ формула $\forall x A(x)$ является синонимом $A(1) \& \ldots \& A(\boldsymbol{k})$, а $\exists x A(x)$ — синонимом $A(1) \vee \ldots \vee A(\boldsymbol{k})$, где $1, \ldots, \boldsymbol{k}$ — названия в формальной системе для этих предметов. Это подсказывает подход к результатам предыдущего параграфа, несколько отличный от прежнего, и посредством которого мы получим промежуточный метаматематический результат, представляющий некоторый самостоятельный интерес. (Для случая $k=2$ ср. Гильберт — Аккерман [1928, стр. 66—68].)

В качестве 1, 2, ..., k мы выберем формальные выражения $0'$, $0''$, ..., $0'''''$ (последнее с k штрихами), которые мы будем называть *цифрами от* 1 *до* k. (Но равным образом можно для нашей цели пользоваться любыми k индивидуальными символами.)

Мы определим *предикатную формулу с k индивидуумами*, или, короче, *предикатную k-формулу*, пользуясь определением предикатной формулы (§ 31), но с той разницей, что теперь в пункте 1 определения в качестве термов наравне с переменными рассматриваются цифры от 1 до k; исчисление предикатов с этим понятием формулы мы назовем *исчислением предикатов с k индивидуумами*, или, короче, *k-исчислением предикатов*.

Затем мы определим *пропозициональную k-формулу* — или как предикатную k-формулу, не содержащую ни свободных, ни связанных переменных (и, следовательно, не содержащую также кванторов), или, эквивалентным образом, пользуясь определением пропозициональной формулы (§ 25), но относя к формулам пункта 1 этого определения не только пропозициональные буквы, но и выражения, которые получаются из предикатных букв путем подстановки цифр от 1 до k вместо каждой из приданных переменных, например для $k=2$, $\mathscr{A}(1)$, $\mathscr{A}(2)$, $\mathscr{B}(1)$, $\mathscr{A}(1,1)$, $\mathscr{A}(1,2)$, $\mathscr{A}(2,1)$.

Для сокращения удобно записывать последние в виде «$\mathscr{A}_1$», «$\mathscr{A}_2$», «$\mathscr{B}_1$», «$\mathscr{A}_{11}$», «$\mathscr{A}_{12}$», «$\mathscr{A}_{21}$» соответственно, так что фактически мы только расширили прежний перечень пропозициональных букв за счет букв того же алфавита с конечными последовательностями целых положительных индексов $\leqslant k$. Очевидно, что наша прежняя теория чистого исчисления высказываний применима без каких-либо изменений, если рассматривать теперь в качестве различных пропозициональных букв любые две буквы, отличающиеся друг от друга алфавитно или индексами.

Для любой данной замкнутой предикатной k-формулы мы определим ее *k-образ* как пропозициональную k-формулу, которая получается из нее заменой последовательно каждой части вида $\forall x A(x)$, где $A(x)$ — предикатная k-формула, на $A(1) \& \ldots \& A(k)$, а также каждой части $\exists x A(x)$ — на $A(1) \vee \ldots \vee A(k)$ до тех пор, пока не исчезнут все кванторы. Легко видеть, что порядок, в котором производятся эти замены, не влияет на результат.

Пример 1. 2-образом формулы $\forall b \exists a \mathscr{A}(a, b) \supset \exists a \forall b \mathscr{A}(a, b)$ является $(\mathscr{A}(1,1) \vee \mathscr{A}(2,1)) \& (\mathscr{A}(1,2) \vee \mathscr{A}(2,2)) \supset (\mathscr{A}(1,1) \& \mathscr{A}(1,2)) \vee (\mathscr{A}(2,1) \& \mathscr{A}(2,2))$ или, короче,

$$(\mathscr{A}_{11} \vee \mathscr{A}_{21}) \& (\mathscr{A}_{12} \vee \mathscr{A}_{22}) \supset (\mathscr{A}_{11} \& \mathscr{A}_{12}) \vee (\mathscr{A}_{21} \& \mathscr{A}_{22}).$$

Для любой данной предикатной k-формулы $A(x_1, \ldots, x_n)$, для которой $x_1, \ldots, x_n$ — все различные свободные переменные, ее *k-образами* называются k-образы k^n замкнутых предикатных k-формул, полученных из $A(x_1, \ldots, x_n)$ путем подстановки k^n различных n-ок цифр от 1 до k вместо $x_1, \ldots, x_n$.

Пример 2. 2-образами формулы $\forall a \mathscr{A}(a, c) \supset \mathscr{A}(b, c)$ являются $\mathscr{A}_{11} \& \mathscr{A}_{21} \supset \mathscr{A}_{11}$, $\mathscr{A}_{12} \& \mathscr{A}_{22} \supset \mathscr{A}_{12}$, $\mathscr{A}_{11} \& \mathscr{A}_{21} \supset \mathscr{A}_{21}$, $\mathscr{A}_{12} \& \mathscr{A}_{22} \supset \mathscr{A}_{22}$.

Теорема 22. *При любом $k \geqslant 1$, если формула* E *доказуема (выводима из формул* Γ) *в чистом исчислении или k-исчислении предикатов, то все k-образы* E *доказуемы (выводимы из k-образов формул из* Γ) *в исчислении высказываний*. (Гильберт — Бернайс [1934, стр. 119 и след.])

Доказательство предоставляется читателю.

Легко видеть, что предикатная формула является k-тождественной тогда и только тогда, когда все ее k-образы тождественно истинны (§ 28). Поэтому, ввиду теоремы 9, теорема 20 оказывается следствием из теоремы 22.

Пример 1 (окончание). Формула $(\mathscr{A}_{11} \vee \mathscr{A}_{21}) \& (\mathscr{A}_{12} \vee \mathscr{A}_{22}) \supset (\mathscr{A}_{11} \& \mathscr{A}_{12}) \vee \vee (\mathscr{A}_{21} \& \mathscr{A}_{22})$ не доказуема в исчислении высказываний, потому что она принимает значение f, когда $\mathscr{A}_{11}$, $\mathscr{A}_{12}$, $\mathscr{A}_{21}$, $\mathscr{A}_{22}$ принимают значения t, f, f, t соответственно. Следовательно, формула $\forall b \exists a \mathscr{A}(a, b) \supset \exists a \forall b \mathscr{A}(a, b)$ не доказуема в исчислении предикатов. Сравнивая эти значения для $\mathscr{A}_{11}$, $\mathscr{A}_{12}$, $\mathscr{A}_{21}$, $\mathscr{A}_{22}$ с таблицей для $\mathfrak{l}(a, b)$ в примере 2 § 36, мы видим, что это по существу то же самое рассуждение, что и прежде.

Пример 3. Доказуема ли в интуиционистском исчислении предикатов формула $\neg\neg\exists a \mathscr{A}(a) \supset \exists a \neg\neg\mathscr{A}(a)$ (имеющая вид $\mathrm{IIc}_1 \supset \mathrm{IIb}$ следствия из теоремы 17)? По теореме 22 (при $k=2$) это имеет место, только если $\neg\neg(\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{A}_2) \supset \neg\neg\mathscr{A}_1 \vee \neg\neg\mathscr{A}_2$ доказуема в интуиционистском исчислении высказываний (этот результат будет использован в § 80).

Часто при изучении исчисления предикатов эвристически оказывается полезным представлять себе $\forall x A(x)$ как конъюнкцию, распространенную по всем элементам предметной области, а $\exists x A(x)$ — как такую же дизъюнкцию, хотя только в случае конечной области с данным числом k элементов можно построить формальные выражения, соответствующие этому представлению. Ввиду этой аналогии между $\forall$ и $\&$ и между $\exists$ и $\vee$, а также аналогии $\&$ с $\cdot$ и $\vee$ с $+$ (конец § 29), некоторые авторы пишут «$\Pi_x A(x)$» вместо $\forall x A(x)$ и «$\Sigma_x A(x)$» вместо $\exists x A(x)$. (Сравните также определения пересечения и суммы множества множеств, § 5.)

Оглядываясь назад, мы можем понять, каким образом постулаты 3—6 для $\&$ и $\vee$ подготавливают постулаты для $\forall$ и $\exists$. С точностью до некоторой разницы в деталях постулаты группы А2 вызваны как раз этой аналогией. Эта аналогия ясна также в соответствующих выводимых правилах теоремы 2. Что касается наших занумерованных результатов, то, например, *75, *76, *83, *84, *91, *92 аналогичны *37, *38, *56, *57, *35, *36 соответственно.

Исчисление предикатов с постулированным правилом подстановки. Так же, как исчисление высказываний (§ 30), исчисление предикатов обычно формулируется с постулированным правилом подстановки, а именно, в обозначениях теоремы 15 § 34 и при условии (А) этой теоремы:

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}^*}.$$

Предикатные буквы называются при этом *предикатными переменными* (или *переменными предикатами*). Правило подстановки формулируется обычно в применении к одной переменной за один раз. Вместо схем аксиом с метаматематическими переменными A, B, C, x, t, A(x) используются соответствующие этим схемам конкретные аксиомы с формальными переменными $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, x, y, $\mathscr{A}(x)$. Кроме того, постулируется *правило подстановки вместо предметной переменной*, согласно которому эта подстановка производится вместо свободных вхождений в данную формулу, как описано в § 18, и является законной при условии, что она свободна (§ 18). В аксиомах 10 и 11 при этом в качестве t выбирается некоторая фиксированная индивидуальная переменная, например, y. В постулатах 9—12 x всюду означает некоторую фиксированную связанную переменную x, в связи с чем постулируется (в применении к одному квантору с его переменной и областью действия) правило замены („переименования") связанных переменных из § 33.

Число аксиом этой системы конечно[1]). (Первая аккуратная формулировка правила подстановки приведена, повидимому, у Гильберта — Бернайса [1939, стр. 377 — 378] или [1934, стр. 98], в предположении, что ограничение на «подстановку» (Einsetzung) применяется и к «переименованию» (Umbenennung).)

n-ЗНАЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ. (См. Россер и Туркетт [1948 — 51, 1952].)

ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ С НЕСКОЛЬКИМИ СОРТАМИ ПЕРЕМЕННЫХ. Как отмечалось в § 31, можно рассматривать исчисление предикатов с несколькими предметными областями, причем одни переменные изменяются в пределах одной из этих областей, другие — в пределах другой и т. д. Если эти несколько предметных областей рассматриваются просто как несколько различных исходных категорий предметов, то появляется только одна новая особенность, а именно — не допускается никакая операция, при которой термы или переменные одного сорта, т. е. относящиеся к одной из этих областей, подставлялись бы вместо терма или переменной другого сорта. Например, *79 имеет место только в том случае, если x и y — переменные одного и того же сорта. Каждая переменная, приданная какой-нибудь называющей форме, должна относиться к некоторому определенному сорту. (См. Эрбран [1930], Шмидт [1938], Ван Хао [1952] и пример 13 § 74.)

ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ ВЫСШИХ СТУПЕНЕЙ. Однако можно получить исчисления предикатов с несколькими типами переменных и отправляясь сначала от исчисления предикатов с единственной исходной областью предметов, называемых *индивидуумами*, затем — от исчисления с дополнительной областью предметов, состоящей из предикатов над этой первой предметной областью, допуская, таким образом, кванторы $\forall$P и $\exists$P, где P(a_1, ..., a_n) — предикатная переменная первой системы, и т. д. Если рассматривается построенная по этому плану иерархия исчислений предикатов, то первое из них называется *узким* (restricted) *исчислением предикатов* или *исчислением предикатов первой ступени* (order), а остальные — *исчислениями предикатов второй, третьей ступени* и т. д., вообще, — *исчислениями предикатов высшей ступени*. Многие трудные вопросы возникают при рассмотрении иерархий систем этого рода — эти вопросы исследовались школой логицистов (§ 12). Краткое введение изложено в гл. IV (2-го (1938) и 3-го (1949) издания) книги Гильберта — Аккермана [1928]. См. также у Чёрча [1952 — 53, гл. V, том I и гл. VI, том II].

---

[1]) В подлиннике вместо предыдущих фраз, начиная со слов: «Вместо схем аксиом с метаматематическими переменными» следовало: «и как прежде, во вспомогательных выводах эти переменные должны оставаться фиксированными для подлежащих устранению исходных формул». Нам это кажется небрежностью автора.

Переход к этой форме исчисления предикатов от той, которая рассматривалась выше, получается тем же методом, что и теорема 3 гл. VI (с предварительной заменой x в формулах $A_1, \ldots, A_m$). Обратно, для правил 9 и 12 (если x отлична от x): пусть длина доказательства посылки данного применения правила 9 или 12 равна $n+1$ и для всех доказательств длины $\leqslant n$ уже доказана возможность их проведения в исчислении предикатов с постулированным правилом подстановки; заменяем в посылке данного применения правила 9 или 12 переменную x на какую-нибудь другую переменную v, не входящую в данное доказательство. Для преобразованной таким образом посылки в исчислении предикатов с постулированным правилом подстановки тоже найдется доказательство (именно, сперва надо устранить в этой посылке связанные вхождения x, пользуясь правилом переименований, а затем подставить v вместо x, пользуясь правилом подстановки вместо предметной переменной). Затем подставляем x вместо x и применяем правило 9, соответственно 12, для переменной x, а затем восстанавливаем, пользуясь переименованием связанных переменных и подстановкой вместо предметной переменной, прежние связанные и свободные переменные заключения данного применения правила 9, соответственно 12. Получится доказательство заключения данного вывода длины $n+1$ в исчислении предикатов с постулированным правилом подстановки. — *Прим. перев.*

Глава VIII

ФОРМАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА

§ 38. ИНДУКЦИЯ, РАВЕНСТВО, ЗАМЕНА

В этой главе мы возвращаемся к изучению полной формальной системы гл. IV.

Мы теперь будем формулировать наши результаты, употребляя главным образом конкретные формальные переменные, как в постулатах группы B (кроме постулата 13); таким образом, доказуемые формулы будут рассматриваться как конкретные теоремы арифметики, формализованной в символизме нашей системы. Результаты вида $\vdash$ A, сформулированные при помощи конкретных свободных переменных, могут применяться и с термами, подставленными вместо этих переменных, ввиду правила подстановки вместо индивидуальных переменных (§ 23 и *66 § 32).

Из постулата 13 (с помощью $\supset$-введ., $\forall$-введ., &-введ. и $\supset$-удал.) мы получаем следующее формальное правило математической индукции. Это правило формальной индукции надо, конечно, четко отличать от содержательного принципа математической индукции, применяемого в доказательствах метаматематических теорем.

Правило индукции. *Пусть* x — *переменная,* A(x) — *формула, а* Γ — *некоторый список формул, не содержащих свободно* x. *Если* Γ $\vdash$ A(0) *и* Γ, A(x) $\vdash$ A(x′) *с фиксированными свободными переменными для* A(x), *то* Γ $\vdash$ A(x)[1].

Начиная с доказательств следующей теоремы, при доказательствах формальной доказуемости или выводимости мы постоянно будем применять менее формальный способ обозначения. Шагом в этом направлении было уже употребление метода цепи для эквивалентностей (§ 26). Теперь мы пойдем дальше, опуская во многих случаях символ «$\vdash$». Таким образом, мы будем говорить «допустим A», — и это будет означать, что мы хотим взять A в качестве исходной формулы при построении вывода. Собственно говоря, мы, конечно, ничего не допускаем, а только указываем, что следующие формулы формально выводимы из A (и любых других введенных нами исходных формул), и это указание надо иметь в виду до тех пор, пока устранение исходной формулы A не будет указано или не будет вытекать из контекста. На каждой стадии такого содержательного изложения данные формулы надлежит рассматривать как выводимые из еще не устраненных исходных формул.

Пример 1. Приводим в этом изложении доказательство того, что $\vdash \exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$ (см. первую часть доказательства *83, § 35).

---

[1]) Причем, очевидно, x остается фиксированным для любой формулы из Γ. Если не требовать, чтобы каждая формула из Γ не содержала x свободно, то, вообще говоря, Γ $\vdash^{x}$ A(x). — *Прим. ред.*

Подготавливая $\supset$-введ., допустим $\exists x A(x)$. Подготавливая $\exists$-удаление, допустим $A(x)$. При помощи reductio ad absurdum (т. е. $\neg$-введ.) выведем $\neg \forall x \neg A(x)$. Для этого допустим $\forall x \neg A(x)$: Тогда, по $\forall$-удал., $\neg A(x)$, что противоречит $A(x)$. [Далее, $\neg \forall x \neg A(x)$ по $\neg$-введ., чем устраняется исходная формула $\forall x \neg A(x)$. Так как $\neg \forall x \neg A(x)$ не содержит свободно x, то здесь можно применить $\exists$-удал., устраняя $A(x)$. Наконец, $\exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$ посредством $\supset$-введ., и устраняется $\exists x A(x)$.] Шаги, заключенные в прямые скобки, часто будут молча подразумеваться.

Для анализа этого доказательства выпишем формулы, показывая с помощью стрелки, до каких пор остается в силе каждая исходная формула.

1.	$\exists x A(x)$	— допущение.
2.	$A(x)$	— допущение.
3.	$\forall x \neg A(x)$	— допущение.
4.	$\neg A(x)$	— $\forall$-удал., 3.
5.	$\neg \forall x \neg A(x)$	— $\neg$-введ., 2, 4.
6.	$\neg \forall x \neg A(x)$	— $\exists$-удал., 5.
7.	$\exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$	— $\supset$-введ., 6.

Каждая формула выводима из тех исходных формул (допущений), стрелка от которых происходит возле нее, например строка 5 означает, что $\neg \forall x \neg A(x)$ выводима из $\exists x A(x)$ (строка 1) и $A(x)$ (строка 2). Выражая эти факты в $\vdash$-обозначениях, получаем наше доказательство в прежней записи:

1.	$\exists x A(x)$	$\vdash \exists x A(x)$.
2.	$A(x),\ \exists x A(x)$	$\vdash A(x)$.
3.	$\forall x \neg A(x),\ A(x),\ \exists x A(x)$	$\vdash \forall x \neg A(x)$.
4.	$\forall x \neg A(x),\ A(x),\ \exists x A(x)$	$\vdash \neg A(x)$ — $\forall$-удал., 3.
5.	$A(x),\ \exists x A(x)$	$\vdash \neg \forall x \neg A(x)$ — $\neg$-введ., 2, 4.
6.	$\exists x A(x)$	$\vdash \neg \forall x \neg A(x)$ — $\exists$-удал., 5.
7.		$\vdash \exists x A(x) \supset \neg \forall x \neg A(x)$ — $\supset$-введ., 6.

Столбцы исходных формул здесь играют роль стрелок. На шаге 5 можно, в силу общих свойств знака $\vdash$, добавить $\forall x \neg A(x)$ в качестве дополнительной исходной формулы в 2. На шаге 6 $\exists$-удал. дает $\exists x A(x),\ \exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$, а лишнее $\exists x A(x)$ опускается в силу общих свойств $\vdash$. Фактически несущественно, рассматривать $\exists x A(x)$ как исходную формулу в 2—5 или нет.

Применения правила $\vee$-удаления в дальнейшем часто будут описываться на языке «случаев» (ср. § 23). Применения правила формальной индукции часто будут, с использованием терминологии, принятой для содержательной индукции (§ 7), излагаться следующим образом: Базис. ... $A(0)$. Индукционный шаг. Допустим $A(x)$ (индуктивное предположение или гипотеза индукции). Тогда ... $A(x')$. [На этом месте заканчивается индукционный шаг и $A(x)$ перестает быть исходной формулой.] Тогда $A(x)$. [Здесь на протяжении всего доказательства в качестве исходных могут использоваться также другие формулы Γ. Этот метод доказательства того, что $\vdash A(x)$ или $\Gamma \vdash A(x)$, называется «(формальной) индукцией по x»; $A(x)$ является «индукционной формулой».]

Это неформальное изложение удобно, когда формальное построение подробно копирует содержательные рассуждения. Оно экономит место и еще теснее сближает наши приемы для доказательств предложений о формальной доказуемости и выводимости с методами содержательной математики (ср. § 20).

Читатель во всех случаях сумеет понять, каким образом доказательства могут быть строго проведены посредством наших выводимых правил, выраженных с помощью символа «$\vdash$». Мы применяли $\vdash$-обозначение для кратких и точных формулировок выводимых правил и выяснения их структуры. Мы будем продолжать им пользоваться там, где нам надо установить новое правило, а также там, где оно помогает подчеркнуть некоторую форму соотношений выводимости или то обстоятельство, что мы рассуждаем о формулах системы (а не посредством этих формул).

Далее мы будем обычно записывать $a \cdot b$ сокращенно в виде «ab»[1])

Теорема 23. (Свойства равенства.)

*100. $\vdash a = a$. *101. $\vdash a = b \supset b = a$.

*102. $\vdash a = b \,\&\, b = c \supset a = c$.

(Свойства рефлексивности, симметрии и транзитивности.)

*103. (Аксиома 17.) $\vdash a = b \supset a' = b'$.

*104. $\vdash a = b \supset a + c = b + c$. *105. $\vdash a = b \supset c + a = c + b$.

*106. $\vdash a = b \supset ac = bc$. *107. $\vdash a = b \supset ca = cb$.

(Специальные свойства замены, принадлежащие функциональным символам $'$, $+$, $\cdot$.)

*108. (Аксиома 16.) $\vdash a = b \supset (a = c \supset b = c)$.

*109. $\vdash a = b \supset (c = a \supset c = b)$.

(Специальные свойства замены, принадлежащие предикатному символу $=$.)

Доказательства. *100. Мы уже приводили доказательство этой формулы непосредственно из постулатов в примере 1 § 19. Пользуясь выведенными после этого правилами, мы можем резюмировать это доказательство следующим образом. Из аксиомы 16 подстановкой (*66 § 32) получаем $a + 0 = a \supset (a + 0 = a \supset a = a)$ и затем по аксиоме 18 (дважды применяя $\supset$-удал.) получаем $a = a$.

*101. Пользуясь неформальным изложением, допустим $a = b$. По аксиоме 16, $a = c \supset b = c$. Подставляя a вместо c, получаем $a = a \supset b = a$. Теперь, в силу *100, $b = a$.

*104. Доказательство проведем, пользуясь правилом формальной индукции. Как для базиса, так и для индукционного шага мы воспользуемся методом цепи равенств (см. конец § 26). Пользуясь этим методом, мы, таким образом, будем опираться на уже полученные результаты *100 — *102. Поскольку еще не установлено общее свойство замены (теорема 24 (а)), каждый шаг, содержащий замену одного терма другим, данным как равный первому, должен быть обоснован подходящим к случаю частным результатом о замене. Здесь для этой цели мы воспользуемся аксиомой 17 (*103). Подстановки в аксиому или ранее полученную формулу явно отмечаться не будут. Допустим $a = b$. Мы теперь выведем формулу $a + c = b + c$ индукцией по c следующим образом. Базис. $a + 0 = a$ [аксиома 18] $= b$ [допущение] $= b + 0$ [аксиома 18]. Индукционный шаг. Допустим, в качестве индук-

[1]) И вообще r·s (r и s — любые термы) в виде «rs». — *Прим. ред.*

тивного предположения, $a+c=b+c$. Тогда $a+c'=(a+c)'$ [аксиома 19] $=(b+c)'$ [индуктивное предположеиие, аксиома 17] $=b+c'$ [аксиома 19].

*105. Введем для $a=b \supset c+a=c+b$ сокращеиие «$A(a, b)$». Мы докажем $\forall b A(a, b)$ индукцией по a. Проделаем индукционный шаг, предоставляя читателю аналогично провести базис. Инд. шаг. Допустим $\forall b A(a, b)$. По $\forall$-удал., $A(a, b)$. Выведем теперь $A(a', b)$ индукцией по b. Базис. Допустим $a'=0$. Но по аксиоме 15, $\neg a'=0$. Отсюда, в силу слабого $\neg$-удал. (§ 23), $c+a'=c+0$. Инд. шаг. (Гипотеза индукции по b не используется.) Допустим $a'=b'$. Тогда, по акс. 14, $a=b$ и $A(a, b)$ дает $c+a=c+b$. Теперь $c+a'=(c+a)'$ [акс. 19] $=(c+b)'$ [используя $c+a=c+b$ и акс. 17] $=c+b'$ [акс. 19]. (Почему мы выбрали $\forall b A(a, b)$ вместо $A(a, b)$ в качестве индукционной формулы для индукции по a? См. формулировку правила индукции. Для индукции по b внутри индукционного шага индукции по a, $\forall b A(a, b)$ есть Г.)

Другой способ доказательства *105 состоит в том, чтобы сперва доказать *118 и *119, после чего *105 может быть выведено из *104.

*106 и *107. Аналогично *104 и *105. Для обоснования замены ac на bc в $ac+a$ после допущения $ac=bc$ надо использовать *104; и т. д.

Замена. Теорема 24. (a) *Если* $\mathfrak{u}_\mathfrak{r}$ — *терм, содержащий какое-нибудь выделенное вхождение некоторого терма* $\mathfrak{r}$, *а* $\mathfrak{u}_\mathfrak{s}$ — *результат замены этого вхождения на терм* $\mathfrak{s}$, *то*

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{s} \vdash \mathfrak{u}_\mathfrak{r}=\mathfrak{u}_\mathfrak{s}.$$

(b) *Если* $C_\mathfrak{r}$ — *формула, содержащая выделенное вхождение терма* $\mathfrak{r}$ (*не являющееся вхождением переменной в квантор*), *а* $C_\mathfrak{s}$ — *результат замены этого вхождения на терм* $\mathfrak{s}$, *то*

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{s} \vdash^{x_1 \ldots x_n} C_\mathfrak{r} \sim C_\mathfrak{s},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — *переменные, входящие хотя бы в один из термов* $\mathfrak{r}$ *или* $\mathfrak{s}$ *и принадлежащие какому-нибудь квантору из* $C_\mathfrak{r}$, *в области действия которого лежит выделенное вхождение* $\mathfrak{r}$. (Теорема о замене.)

Пример см. ниже. Доказательство проводится тем же методом, что и прежде (§§ 26, 33), с помощью семи дополиительных лемм.

Дополнительные леммы для замены. *Если* $\mathfrak{r}$ *и* $\mathfrak{s}$ — *термы*:

*110. $\mathfrak{r}=\mathfrak{s} \vdash \mathfrak{r}'=\mathfrak{s}'$.

*111. $\mathfrak{r}=\mathfrak{s} \vdash \mathfrak{r}+\mathfrak{t}=\mathfrak{s}+\mathfrak{t}$. *112. $\mathfrak{r}=\mathfrak{s} \vdash \mathfrak{t}+\mathfrak{r}=\mathfrak{t}+\mathfrak{s}$.

*113. $\mathfrak{r}=\mathfrak{s} \vdash \mathfrak{r}\mathfrak{t}=\mathfrak{s}\mathfrak{t}$. *114. $\mathfrak{r}=\mathfrak{s} \vdash \mathfrak{t}\mathfrak{r}=\mathfrak{t}\mathfrak{s}$.

*115. $\mathfrak{r}=\mathfrak{s} \vdash \mathfrak{r}=\mathfrak{t} \sim \mathfrak{s}=\mathfrak{t}$. *116. $\mathfrak{r}=\mathfrak{s} \vdash \mathfrak{t}=\mathfrak{r} \sim \mathfrak{t}=\mathfrak{s}$.

Доказательство. Первые пять из этих лемм следуют из *103—*107 соответственно посредством подстановки (*66) и $\supset$-удал. Последние две следуют из *108 и *109 вместе с *66, *101, $\supset$-удал. и *16.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{r}$ будет b, $\mathfrak{s}$ будет a, а $C_\mathfrak{r}$ будет $\exists d(d'+b=c)$. Параллельные построения $C_\mathfrak{r}$ из $\mathfrak{r}$ и $C_\mathfrak{s}$ из $\mathfrak{s}$ таковы:

b	a
$d'+b$	$d'+a$
$d'+b=c$	$d'+a=c$
$\exists d(d'+b=c)$	$\exists d(d'+a=c)$

Глубина равна 3.

Поставим «$=$» между обоими выражениями в каждой из двух верхних строк и $\sim$ в каждой из двух нижних строк. Полученные формулы будут выводимы, каждая из предыдущей, с помощью *112, *115, *72 (с варьирующимся d). Используя сокращение «$<$» (§ 17), результат можно записать в виде $b=a \vdash b<c \sim a<c$. (Почему в этом результате d не варьируется?)

Следствие 1. *В условиях теоремы из того, что* $\vdash \mathrm{r}=\mathrm{s}$ *следует, что* $\vdash \mathrm{u_r}=\mathrm{u_s}$ *и* $\vdash \mathrm{C_r} \sim \mathrm{C_s}$.

Следствие 2. *В условиях теоремы* $\mathrm{r}=\mathrm{s},\ \mathrm{C_r} \vdash^{x_1 \ldots x_n} \mathrm{C_s}$, *где* $x_1, \ldots, x_n$ *варьируются только для первой исходной формулы. Если* $\vdash \mathrm{r}=\mathrm{s}$, *то* $\mathrm{C_r} \vdash \mathrm{C_s}$. (Свойство замены для равенства.)

Пример 2 (окончание). Используя также *101, получаем: $a=b,\ b<c \vdash$ $\vdash a<c$.

Как и прежде, замене может предшествовать подстановка вместо индивидуальных переменных (ср. § 33 пример 4 и § 34 непосредственно перед замечанием 2).

§ 39. СЛОЖЕНИЕ, УМНОЖЕНИЕ, ПОРЯДОК

Постулаты группы В (§ 19) можно описать следующим образом. Постулаты 14, 15 и 13 формально выражают последние три аксиомы Пеано (§ 6). (Первые две входят в нашу систему, в которой имеются переменные только для натуральных чисел, в виде пунктов 1 и 5 определения терма, § 17.) Аксиомы 16 и 17 дают свойства равенства (в том числе аксиома 17 — однозначность функции $'$, которая в формулировку Пеано входила неявно). Аксиомы 18 и 19 можно назвать „рекурсивными равенствами", определяющими функцию $+$, а аксиомы 20 и 21 представляют то же самое для функции $\cdot$.

О сокращениях «$a \neq b$» и «1», «2», «3», ... см. § 17.

Теорема 25. (Арифметические законы.)

*117. $\vdash (a+b)+c=a+(b+c)$. *121. $\vdash (ab)c=a(bc)$.

*118. $\vdash a'+b=(a+b)'$. *122. $\vdash a'b=ab+b$.

*119. $\vdash a+b=b+a$. *123. $\vdash ab=ba$.

*120. $\vdash a(b+c)=ab+ac$.

(Ассоциативный, коммутативный и дистрибутивный законы для $+$ и $\cdot$ и леммы, нужные для доказательств коммутативных законов.)

*124. (Аксиома 18.) $\vdash a+0=a$. *125. (Аксиома 20.) $\vdash a \cdot 0=0$.

*126. $\vdash a+1=a'$. *127. $\vdash a \cdot 1=a$.

(Прямые законы для 0 и 1.)

*128. $\vdash a+b=0 \supset a=0 \,\&\, b=0$. *129. $\vdash ab=0 \supset a=0 \vee b=0$.

*130. $\vdash a+b=1 \supset a=1 \vee b=1$. *131. $\vdash ab=1 \supset a=1 \,\&\, b=1$.

(Обратные законы для 0 и 1.)

*132. $\vdash a+c=b+c \supset a=b$. *133. $\vdash c \neq 0 \supset (ac=bc \supset a=b)$.

(Обратные законы для $+$ и $\cdot$.)

Доказательства. Теперь, когда у нас уже есть теорема 24(а), мы не должны будем обращаться в наших доказательствах к частным случаям *103—*107 этой теоремы, как нам приходилось в доказательствах теоремы 23.

*117 и *118. Индукцией по c и b соответственно.

*119. Индукцией по a, используя для базиса индукцию по b.

*122. Индукцией по b. Инд. шаг. Допустим $a'b = ab + b$. Тогда $a'b' = a'b + a'$ [акс. 21] $= (ab + b) + a'$ [гип. инд.] $= ((ab + b) + a)'$ [акс. 19] $= (ab + (b + a))'$ [*117] $= (ab + (a + b))'$ [*119] $= ((ab + a) + b)'$ [*117] $= (ab' + b)'$ [акс. 21] $= ab' + b'$ [акс. 19].

*128. *Если* $\vdash A(0)$ *и* $\vdash A(x')$, *то* $\vdash A(x)$. Действительно, из $\vdash A(x')$ по общим свойствам $\vdash$ получается $A(x) \vdash A(x')$, так что применима индукция по x. Это правило мы будем называть *разбором случаев индукции* (*по* x). Для *128 обозначим формулу, которую надо доказать, через «$A(a, b)$». Чтобы доказать $A(a, b)$ разбором случаев индукции по a, достаточно доказать $A(0, b)$ и $A(a', b)$. Чтобы доказать эти две формулы разбором случаев индукции по b, достаточно доказать четыре формулы $A(0, 0)$, $A(0, b')$, $A(a', 0)$, $A(a', b')$, т. е. формулы

$$0 + 0 = 0 \supset 0 = 0 \& 0 = 0, \quad 0 + b' = 0 \supset 0 = 0 \& b' = 0,$$
$$a' + 0 = 0 \supset a' = 0 \& 0 = 0, \quad a' + b' = 0 \supset a' = 0 \& b' = 0.$$

Доказательства этих четырех формул легки, так как в каждом случае мы можем или опровергнуть посылку импликации (с помощью аксиомы 15), или доказать заключение (см. *10а и *11 § 26).

*130. Это доказывается таким же образом, но с помощью итерированного рассмотрения случаев, при котором для доказательства $A(x')$ доказываются $A(0')$ и $A(x'')$. Всего для доказательства $A(a, b)$ достаточно проверить девять формул

$$A(0, 0), \quad A(0, 1), \quad A(0, b''), \quad A(1, 0), \quad A(1, 1),$$
$$A(1, b''), \quad A(a'', 0), \quad A(a'', 1), \quad A(a'', b'').$$

Каждая из этих девяти формул рассматривается по указанному выше трафарету (с помощью аксиом 14 и 15).

*132. Индукцией по c с помощью аксиомы 14.

*133. Пусть «$A(a, b)$» означает сокращение для $ac = bc \supset a = b$. Допустим $c \neq 0$. Выведем $\forall a A(a, b)$ индукцией по b, а именно, следующим образом (см. *95): Базис. Допустим $ac = 0c$. По *125 (и *123), $ac = 0$. Но $c \neq 0$. Отсюда, по *129 и исчислению высказываний, $a = 0$. Инд. шаг. Допустим $\forall a A(a, b)$. По $\forall$-удал., $A(a, b)$. Выведем $A(a, b')$ индукцией по a. Базис. Допустим $0c = b'c$. По *125 (и *123, *101), $b'c = 0$; и по *129 $b' = 0 \vee c = 0$. Но $b' \neq 0$ по акс. 15, а $c \neq 0$ по допущению; отсюда $\neg(b' = 0 \vee c = 0)$. Из этого противоречия с помощью слабого $\neg$-удал. (§ 23) $0 = b'$. Инд. шаг. Допустим $a'c = b'c$. По *122, $ac + c = bc + c$. По *132, $ac = bc$. Отсюда, по $A(a, b)$, $a = b$; по *103, $a' = b'$.

Можно вместо этого отложить *133 до того, как будет установлено *139, а затем *133 может быть доказано аналогично *146b.

Мы будем теперь пользоваться сокращением «$a < b$» вместо $\exists c(c' + a = b)$, следуя при этом соглашениям, рассмотренным в §§ 17 и 33[1]). Кроме того, введем сокращения «$a > b$» вместо $b < a$, «$a \leqslant b$» вместо $a < b \vee a = b$; «$a \geqslant b$» вместо $b \leqslant a$; «$a < b < c$» вместо $a < b \& b < c$ (см. конец § 26)[2]) и т. д.

---

[1]) И вообще «$r < s$» вместо $\exists x(x' + r = s)$, где r, s — любые термы, а x — любая переменная, не входящая ни в r, ни в s. — *Прим. ред.*

[2]) А также «$r > s$» вместо $s < r$; «$r \leqslant s$» вместо $r < s \vee r = s$; «$r \geqslant s$» вместо $s \leqslant r$; «$r < s < t$» вместо $r < s$ & $s < t$. — *Прим. ред.*

Теорема 26. (Свойства порядка.)

*134a. $\vdash a<b<c \supset a<c$. *134b. $\vdash a\leqslant b<c \supset a<c$.

*134c. $\vdash a<b\leqslant c \supset a<c$. *134d. $\vdash a\leqslant b\leqslant c \supset a\leqslant c$.

(Законы транзитивности.)

*135a. $\vdash a<a'$. 135b. $\vdash 0<a'$. *136. $\vdash 0\leqslant a$.

*137. $(=*137_0)$. $\vdash a=0 \vee \exists b(a=b')$. $*137_1$. $\vdash a=0 \vee a=1 \vee \exists b(a=b'')$.

$*137_2$. $\vdash a=0 \vee a=1 \vee a=2 \vee \exists b(a=b''')$. ...

*138a. $\vdash a\leqslant b \sim a<b'$. *138b. $\vdash a>b \sim a\geqslant b'$.

(Свойства порядка для 0 и $'$.)

*139. $\vdash a<b \vee a=b \vee a>b$.

*140. $\vdash \neg a<a$. *141. $\vdash a<b \supset \neg a>b$.

(Сравнимость, иррефлексивность, асимметрия.)

*142a. $\vdash a+b\geqslant a$. *143a. $\vdash b\neq 0 \supset ab\geqslant a$.

*142b. $\vdash b\neq 0 \supset a+b>a$. *143b. $\vdash a\neq 0 \,\&\, b>1 \supset ab>a$.

*143c. $\vdash b\neq 0 \supset a'b>a$; отсюда $\vdash b\neq 0 \supset \exists c(cb>a)$.

*144a. $\vdash a<b \sim a+c<b+c$. *145a. $\vdash c\neq 0 \supset (a<b \sim ac<bc)$.

*144b. $\vdash a\leqslant b \sim a+c\leqslant b+c$. *145b. $\vdash c\neq 0 \supset (a\leqslant b \sim ac\leqslant bc)$.

(Неравенства при сложении и умножении.)

*146a. $\vdash b\neq 0 \supset \exists q \exists r(a=bq+r \,\&\, r<b)$.

*146b. $\vdash a=bq_1+r_1 \,\&\, r_1<b \,\&\, a=bq_2+r_2 \,\&\, r_2<b \supset q_1=q_2 \,\&\, r_1=r_2$.

(Существование и единственность частного и остатка.)

Доказательства. *134a. Допустим $a<b<c$, т. е. $a<b \,\&\, b<c$, т. е. $\exists d(d'+a=b) \,\&\, \exists e(e'+b=c)$. Подготавливая $\exists$- и &-удал., допустим $d'+a=b$ и $e'+b=c$. Тогда $e'+(d'+a)=c$, что можно перегруппировать в $(e'+d)'+a=c$. По $\exists$-введ., $\exists f(f'+a=c)$, т. е. $a<c$.

*134b. Из *134a с помощью доказательства разбором случаев (§ 23). (См. пример 2 § 38.)

*136. Разбором случаев индукции по a, с помощью *135b.

*137, $*137_k$. Надо итерировать рассмотрение случаев индукции или доказывать следующим образом. Формула из *136 эквивалентна формуле из *137, в силу акс. 18 и свойств $=$ (см. пример 4 § 33); далее последовательно вытекают $*137_1$, $*137_2$, ...

*138a. С помощью $\exists$- и $\vee$-удал. и введ. и *137, $\vdash a<b' \sim 0'+a=b' \vee \exists c(c''+a=b')$. С помощью *119 и аксиом 19, 17, 14 и 18, $\vdash 0'+a=b' \sim a=b$. С помощью *119 и аксиом 19, 17 и 14, а также *72 (или $\exists$-удал. и введ.), $\vdash \exists c(c''+a=b') \sim a<b$.

*139. Доказывается индукцией по b с помощью *136 для базиса и *138a, b для индукционного шага.

*140. Допустим $a<a$, т. е. $\exists b(b'+a=a)$. Для $\exists$-удал. допустим $b'+a=a$. Тогда, в силу *132, а также *124 и *119, $b'=0$, что противоречит аксиоме 15. Замечание. Ввиду того что противоречащие друг другу формулы $b'=0$ и $b'\neq 0$ содержат свободно b, мы не можем сразу применять $\exists$-удал. Но с помощью слабого $\neg$-удал. (§ 23), мы можем сперва вывести пару противоречащих друг другу формул, не содержащих свободно b, например $0=0$ и $0\neq 0$.

В силу *140, $\vdash a = b \supset \neg a < b$.

*143b. Допустим $a \neq 0 \& b > 1$. В силу $a \neq 0$ и *137, $\exists c(a = c')$; в силу $b > 1$ и *140, *141 и *135a, $b \neq 0 \& b \neq 1$, а отсюда и $*137_1$, $\exists d(b = d'')$. Подготавливая $\exists$-удаления, допустим $a = c'$ и $b = d''$.

*144a. Из *104, *132, *117 и *72.

*145a. Допустим $c \neq 0$. Часть 1: вывод $a < b \supset ac < bc$. (Предоставляется читателю.) Часть 2: вывод $ac < bc \supset a < b$. Допустим $ac < bc$. Чтобы вывести $a < b$, достаточно разбором случаев ($\vee$-удал.) из *139 вывести $a < b$ при условиях каждого из трех случаев. Случай 1: $a < b$. Случай 2: $a = b$. Тогда $ac = bc$. Это вместе с *140 дает $\neg ac < bc$, что противоречит нашему допущению $ac < bc$. В силу слабого $\neg$-удал., $a < b$. Случай 3: $a > b$, т. е. $b < a$. Тогда, в силу результата части 1, $bc < ac$, т. е. $ac > bc$. Согласно *141, $\neg ac < bc$.

*146a. Воспользоваться индукцией по a (допустив предварительно $b \neq 0$). (Можно также опираться при доказательстве на *143c и *149.)

*146b. Допустим $a = bq_1 + r_1 \& r_1 < b \& a = bq_2 + r_2 \& r_2 < b$. Чтобы вывести $q_1 = q_2$, достаточно, пользуясь разбором случаев из *139 и слабым $\neg$-удал., вывести противоречие из $q_1 < q_2$ и еще из $q_1 > q_2$. Допустим $q_1 < q_2$. Для $\exists$-удал. отсюда, допустим $e' + q_1 = q_2$. Теперь $bq_1 + r_1 = a = bq_2 + r_2 = b(e' + q_1) + r_2 = bq_1 + (be' + r_2)$. Итак, $r_1 = be' + r_2$ [*132] $\geqslant be'$ [*142a] $\geqslant b$ [*143a]. Это противоречит $r_1 < b$, в силу *140 и *141. Случай $q_1 > q_2$ рассматривается так же. После того, как формула $q_1 = q_2$ выведена, получаем $a = bq_1 + r_1 = bq_1 + r_2$, откуда $r_1 = r_2$, в силу *132.

*§ 40. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ПОСТРОЕНИЕ АРИФМЕТИКИ

Наша формальная система арифметики отличается от содержательной теории тем, что логика применяется в ней явно. Мы уже довели наше знакомство с логикой до такого состояния, что дальнейшее построение арифметики в формальной системе может развиваться методом, хорошо известным нам из содержательной теории. Мы не будем систематически продолжать это построение, а только отметим некоторые его особенности, прежде чем перейти к общим метаматематическим вопросам о нашей системе.

Условимся, что в этом параграфе x *означает переменную*, A(x) — *формулу, а* y *и* z — *переменные, отличные от* x *и друг от друга, которые свободны для* x *в* A(x) *и не входят свободно в* A(x).

Принцип наименьшего числа (или *полного упорядочения* натуральных чисел) утверждает, что если существует натуральное число x такое, что $A(x)$, то существует наименьшее такое x; назовем его y. Это свойство y можно выразить в формальном символизме посредством формулы $\mathrm{A(y)} \& \forall \mathrm{z}(\mathrm{z} < \mathrm{y} \supset \neg \mathrm{A(z)})$ или в другой, эквивалентной форме, используя следующее утверждение:

*147. $\vdash \mathrm{z} < \mathrm{y} \supset \neg \mathrm{A(z)} \sim \mathrm{A(z)} \supset \mathrm{y} \leqslant \mathrm{z}$.

(*147 доказывается с помощью *13, *139.) Мы установим сперва:

*148°. $\vdash \exists \mathrm{y}[\mathrm{y} < \mathrm{x} \& \mathrm{A(y)} \& \forall \mathrm{z}(\mathrm{z} < \mathrm{y} \supset \neg \mathrm{A(z)})] \vee \forall \mathrm{y}[\mathrm{y} < \mathrm{x} \supset \neg \mathrm{A(y)}]$.

(Закон исключенного третьего и принцип наименьшего числа для начального отрезка натурального ряда.)

*148a. $\mathrm{A(x)} \vee \neg \mathrm{A(x)} \vdash^{\mathrm{x}} \exists \mathrm{y}[(\mathrm{y} < \mathrm{x} \& \mathrm{A\,y}) \& \forall \mathrm{z}(\mathrm{z} < \mathrm{y} \supset \neg \mathrm{A(z)})] \vee$
$\vee \forall \mathrm{y}[\mathrm{y} < \mathrm{x} \supset \neg \mathrm{A(y)}]$.

*148b. $\vdash \neg\neg \{\exists \mathrm{y}[\mathrm{y} < \mathrm{x} \& \mathrm{A(y)} \& \forall \mathrm{z}(\mathrm{z} < \mathrm{y} \supset \neg \mathrm{A(z)})] \vee$
$\vee \forall \mathrm{y}[\mathrm{y} < \mathrm{x} \supset \neg \mathrm{A(y)}]\}$.

(Интуиционистские формы этого принципа.)

Доказательства. *148. Индукцией по x следующим образом. Формулу *148 будем записывать сокращенно «$P(x) \vee Q(x)$». Базис. Из *136, *140, *141 и *10a, $\vdash Q(0)$, откуда $\vdash P(0) \vee Q(0)$. Инд. шаг. Допустим $P(x) \vee Q(x)$. Отсюда разбором случаев ($\vee$-удал.) выведем $P(x') \vee Q(x')$. Для случая 1, $P(x) \vdash P(x') \vdash P(x') \vee Q(x')$ с помощью *135a, *134a. Для случая 2 используем подслучаи $A(x) \vee \neg A(x)$ (*51). Для подслучая 2a, $Q(x)$, $A(x) \vdash P(x') \vdash P(x') \vee Q(x')$ с помощью *135a. Для подслучая 2b, $Q(x)$, $\neg A(x) \vdash Q(x') \vdash P(x') \vee Q(x')$ с помощью *138a.

*148a. Так как в интуиционистской системе мы не можем воспользоваться *51, то возьмем $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ в качестве исходной формулы Г для индукции.

*148b. Из схемы аксиом 6, применяя $\supset$-удал. и дважды контрапозицию (*13, *12), получаем $A \supset \neg\neg C$, $B \supset \neg\neg C \vdash A \vee B \supset \neg\neg C \vdash \neg\neg(A \vee B) \supset \supset \neg\neg C$. Отсюда с помощью $\supset$-правил получаем теорему: *Если* Г, $A \vdash \neg\neg C$ *и* Г, $B \vdash \neg\neg C$ (*с фиксированными свободными переменными для* A *и* B *соответственно*), *то* Г, $\neg\neg(A \vee B) \vdash \neg\neg C$. Мы, таким образом, обосновали модифицированное правило разбора случаев, в котором «формула случаев» $A \vee B$ и заключение C дважды отрицаются. Поэтому, если заменить индукционную формулу в доказательстве *148 на $\neg\neg(P(x) \vee Q(x))$, а другую формулу случаев на $\neg\neg(A(x) \vee \neg A(x))$ (согласно *51a доказуемую интуиционистски), то индукция опять работает (с помощью *49a) и дает нам *148b.

Теперь мы можем установить принцип наименьшего числа.

*149°. $\vdash \exists x A(x) \supset \exists y[A(y) \& \forall z(z < y \supset \neg A(z))]$.

(Принцип наименьшего числа.)

*149a. $A(x) \vee \neg A(x) \vdash^{x} \exists x A(x) \supset \exists y[A(y) \& \forall z(z < y \supset \neg A(z))]$.

*149b. $\vdash \neg\neg\{\exists x A(x) \supset \exists y[A(y) \& \forall z(z < y \supset \neg A(z))]\}$.

(Интуиционистские формы принципа наименьшего числа.)

Доказательства. *149 (или *149a). Допустим $\exists x A(x)$; и для $\exists$-удал., $A(x)$. Подставляя x' вместо x в *148 (или в заключение *148a), получим $P(x') \vee Q(x')$. Случай 1: $P(x')$. Тогда $\exists y[A(y) \& \forall z(z < y \supset \neg A(z))]$. Случай 2: $Q(x')$. Тогда с помощью *135a получается $\neg A(x)$, что противоречит $A(x)$. Посредством слабого $\neg$-удал., $\exists y[A(y) \& \forall z(z < y \supset \neg A(z))]$.

*149b. Пользуясь теперь *148b и модифицированным правилом разбора случаев, получим $\exists x A(x) \supset \neg\neg \exists y[A(y) \& \forall z(z < y \supset \neg A(z))]$. Теперь остается применить *60h, g.

Другие следствия из *148a:

*150. $A(x) \vee \neg A(x) \vdash^{x} \exists y[y < x \& A(y)] \vee \neg \exists y[y < x \& A(y)]$.

*151. $A(x) \vee \neg A(x) \vdash^{x} \forall y[y < x \supset A(y)] \vee \neg \forall y[y < x \supset A(y)]$.

(Представляют интерес в связи с интуиционистской системой.)

Доказательства. *150. В силу *148a, $A(x) \vee \neg A(x) \vdash^{x} \exists y[y < x \& A(y)] \vee \forall y[y < x \supset \neg A(y)]$. Но $\vdash \forall y[y < x \supset \neg A(y)] \sim \forall y \neg [y < x \& A(y)]$ [*58b] $\sim \neg \exists y[y < x \& A(y)]$ [*86].

*151. Аналогично, применяя *148a к $\neg A(x)$ и заменяя $\neg\neg A(x)$ на $A(x)$ (ибо, в силу *49c, $A(x) \vee \neg A(x) \vdash \neg\neg A(x) \sim A(x)$).

В качестве примера арифметической теоремы, требующей некоторых дальнейших понятий, мы рассмотрим теорему Эвклида о том, что существует бесконечно много простых чисел. Ее можно выразить утверждением, что для любого числа a имеется простое число, большее чем a. В действительности должно найтись простое число между $a+1$ и $a!+1$ включительно, в силу следующего рассуждения. Каждое целое положительное число $n \leqslant a$ делит $a!$. Поэтому ни одно из них, кроме 1, не делит $a!+1$. Но $a!+1>1$, поэтому оно само или некоторый его множитель является простым. Это простое число содержится между $a+1$ и $a!+1$ включительно.

Оба случая можно объединить в замечании, что наименьший делитель числа $a!+1$, превосходящий 1, является простым числом, превосходящим a. Рассуждение остается в силе, если в нем вместо $a!$ взять любое общее кратное чисел $1, \ldots, a$.

Подготавливая формальное изложение теоремы Эвклида, введем теперь «$a \mid b$» (читается «a делит b» или «a является множителем (делителем) b») как сокращение для $\exists c(ac=b)$. Можно показать:

*152. $\vdash a \mid ab$. *153. $\vdash a \mid a$. *154. $\vdash a \mid b \,\&\, b \mid c \supset a \mid c$.

*155. $\vdash a>1 \supset \neg(a \mid b \,\&\, a \mid b')$. *156. $\vdash b \neq 0 \supset (a \mid b \supset 0<a \leqslant b)$.

(Свойства $\mid$.)

(Указания. Для доказательства *155 применить *137_1, *145a (и *135a), *132, акс. 15. Для доказательства *156 применить *143a.) Затем введём «$\mathrm{Pr}(a)$» («a — простое») в качестве сокращения для $a>1 \,\&\, \neg \exists c(1<c<a \,\&\, c \mid a)$. После этого теорема Эвклида выразится в нашей формальной системе формулой $\exists b(\mathrm{Pr}(b) \,\&\, b>a)$.

При формализации изложенного выше доказательства появляется то затруднение, что наша система не имеет терма для выражения функции $a!$. Мы обойдем это затруднение, установив

*157. $\vdash \exists d[d>0 \,\&\, \forall b(0<b \leqslant a \supset b \mid d)]$.

(Существование общего кратного для $1, \ldots, a$.)

(Доказательство — индукцией по a. Обозначим эту формулу «$\exists d \mathrm{A}(a, d)$». Для базиса, $\vdash \mathrm{A}(0, 1)$. Для инд. шага (подготавливая $\exists$-удал.), $\mathrm{A}(a, d) \vdash \mathrm{A}(a', da')$.) Теперь, подготавливая $\exists$-удал., допустим

(1) $$d>0 \,\&\, \forall b(0<b \leqslant a \supset b \mid d).$$

Переменная d, подчиненная этой формуле, будет играть роль $a!$; точнее, она может представлять в интерпретации любое общее кратное для $1, \ldots, a$.

В силу (1), *144a и *153, $d'>1 \,\&\, d' \mid d'$. Отсюда $\exists e(e>1 \,\&\, e \mid d')$. В силу принципа наименьшего числа (*149), $\exists b[b>1 \,\&\, b \mid d' \,\&\, \forall c(c<b \supset \neg(c>1 \,\&\, c \mid d'))]$. Для $\exists$-удал. допустим

(2) $$b>1 \,\&\, b \mid d' \,\&\, \forall c(c<b \supset \neg(c>1 \,\&\, c \mid d')).$$

Допустим $1<c<b \,\&\, c \mid b$. Из $c<b$, в силу (2), $\neg(c>1 \,\&\, c \mid d')$; но, в силу $1<c$, $c \mid b$, $b \mid d'$ (из (2)) и *154, $c>1 \,\&\, c \mid d'$. С помощью $\neg$- и $\forall$-введ., $\forall c \neg(1<c<b \,\&\, c \mid b)$; откуда, по *86, $\neg \exists c(1<c<b \,\&\, c \mid b)$. Используя еще $b>1$ из (2), $\mathrm{Pr}(b)$.

В силу (2), $b>1 \,\&\, b \mid d'$. Отсюда, *155, $\neg b \mid d$. Значит, по (1), $b>a$.

В силу &- и $\exists$-введ., $\exists b(\mathrm{Pr}(b) \,\&\, b>a)$. Так как эта формула не содержит свободно b или d, то допущения (2) и (1) устраняются посредством $\exists$-удал. Этим завершается доказательство теоремы Эвклида в классической системе.

Чтобы доказать ее и в интуиционистской системе, применяя *149a вместо *149, остается доказать $(e>1 \,\&\, e \mid d') \vee \neg(e>1 \,\&\, e \mid d')$. Для этой цели установим сначала

*158. $\vdash a=b \vee \neg a=b$. *159. $\vdash a<b \vee \neg a<b$.

*160. $\vdash a \mid b \sim \exists c (c \leqslant b \,\&\, ac = b)$.

(Используются в интуиционистском доказательстве теоремы Эвклида.) (*158 и *159 доказываем посредством *139—*141; *160—аналогично *156.) Затем доказываем последовательно $e > 1 \vee \neg e > 1$ (посредством *159), $e \mid d' \vee \neg e \mid d'$ (посредством *160, *138a, *150, *158) и $(e > 1 \,\&\, e \mid d') \vee \vee \neg (e > 1 \,\&\, e \mid d')$ (из предыдущих двух формул, в силу замечания 1 (b) § 29 и теоремы 3 § 25). Таким образом, классически и интуиционистски

*161. $\vdash \exists b (\mathrm{Pr}(b) \,\&\, b > a)$. (Теорема Эвклида.)

Установление формализуемости в данной формальной системе доказательств некоторой содержательной теории является постоянным методом анализа и стандартизации рассуждений этой теории; этот метод по мере развития теории следует за все большим сгущением ее содержательных рассуждений. Последовательно убеждаясь в формализуемости этих типов содержательных рассуждений, мы собираем полученные таким образом результаты в качестве выводимых правил формальной системы. Это очень похоже на полуформальный процесс построения самой содержательной теории из явно сформулированных постулатов, но здесь мы глубже проникаем в основания, постулируя не только математические (в обычном смысле), но и логические принципы.

Содержательно мы пользовались математической индукцией не только в ее простой (или обычной) форме, но и в модернизированной форме так называемой „возвратной индукции", или „индукции пробега" (ср. § 7, включая пример 2, доказательство теоремы 1 § 21 и т. д.). Интересно, что в нашей формальной системе эта модифицированная форма индукции может быть выведена из обычной, которая является постулатом системы. Мы сформулируем ее в виде схемы теорем; метод, которым получается формулировка правила на основе схемы, достаточно проиллюстрирован на примере простой индукции (ср. схему аксиом 13 в § 19 с правилом индукции в § 38).

В первой схеме *162a выражения $\mathrm{A}(0)$ и $\forall \mathrm{x} [\forall \mathrm{y} (\mathrm{y} \leqslant \mathrm{x} \supset \mathrm{A}(\mathrm{y})) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}')]$ формализуют базис и индукционный шаг соответственно; в более компактной форме *162b оба они объединены в единое выражение

$$\forall \mathrm{x} [\forall \mathrm{y} (\mathrm{y} < \mathrm{x} \supset \mathrm{A}(\mathrm{y})) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x})].$$

*162a. $\vdash \mathrm{A}(0) \,\&\, \forall \mathrm{x} [\forall \mathrm{y} (\mathrm{y} \leqslant \mathrm{x} \supset \mathrm{A}(\mathrm{y})) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}')] \supset \mathrm{A}(\mathrm{x})$.

*162b. $\vdash \forall \mathrm{x} [\forall \mathrm{y} (\mathrm{y} < \mathrm{x} \supset \mathrm{A}(\mathrm{y})) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x})] \supset \mathrm{A}(\mathrm{x})$.

(Возвратная индукция.)

Доказательства. *162a. Допустим $\mathrm{A}(0) \,\&\, \forall \mathrm{x} [\forall \mathrm{y} (\mathrm{y} \leqslant \mathrm{x} \supset \mathrm{A}(\mathrm{y})) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}')]$, выведем $\forall \mathrm{y} (\mathrm{y} \leqslant \mathrm{x} \supset \mathrm{A}(\mathrm{y}))$ простой индукцией по x и затем получим $\mathrm{A}(\mathrm{x})$ с помощью $\forall$-удал.

Иногда для индукции требуется *двойной базис*, т. е. мы устанавливаем $A(0)$ и $A(1)$ в качестве базиса и затем в качестве индукционного шага получаем $A(x'')$ из двух предыдущих случаев $A(x)$ и $A(x')$. Это можно рассматривать формально как возвратную индукцию, рассматривая при индукционном шаге случаи, соответствующие $\mathrm{x}' = 1$ и $\mathrm{x}' > 1$. Можно рассматривать это и как простую индукцию, выбирая $\mathrm{A}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{A}(\mathrm{x}')$ в качестве индукционной формулы. Этот метод использования конъюнкции в качестве индукционного предложения применим также к *индукции с k-кратным базисом* для любого фиксированного $k \geqslant 2$, а также к *доказательству по индукции нескольких предложений одновременно*.

Рассуждения по индукции появляются иногда в другой форме доказательства *методом бесконечного спуска*. Согласно этому методу, для того чтобы доказать ложность $A(x)$ при любом x, достаточно показать, что если $A(x)$ истинно для некоторого x, то имеется меньшее число, для которого оно тоже истинно.

*163. $\vdash \forall x[\mathrm{A}(x) \supset \exists y(y < x \,\&\, \mathrm{A}(y))] \supset \neg \mathrm{A}(x)$.

(Метод бесконечного спуска.)

*163a. $\vdash \forall x[\mathrm{A}(x) \supset \neg\neg \exists y(y < x \,\&\, \mathrm{A}(y))] \supset \neg \mathrm{A}(x)$.

(Другая форма, представляющая интерес в связи с интуиционистской системой.)

Доказательства. Если допустить посылку любого из утверждений *163 или *163a, то $\neg \mathrm{A}(x)$ получится возвратной индукцией.

Другой метод. Если выбрать $\neg \mathrm{A}(x)$ в качестве $\mathrm{A}(x)$ из *162b, то результат эквивалентен *163a, в силу следующего: $\vdash \forall y(y < x \supset \neg \mathrm{A}(y)) \supset \supset \neg \mathrm{A}(x) \sim \neg [\forall y \neg (y < x \,\&\, \mathrm{A}(y)) \,\&\, \mathrm{A}(x)]$ [*58b дважды] $\sim \mathrm{A}(x) \supset \neg \forall y \neg (y < x \,\&\, \mathrm{A}(y))$ [*33, *58b] $\sim \mathrm{A}(x) \supset \neg\neg \exists y(y < x \,\&\, \mathrm{A}(y))$ [*86]. Затем *163 вытекает из *163a.

*163a и *163 можно доказать также от противного, исходя из *149 или из *149b. Обратно, *149b может быть доказано от противного исходя из *163a (с помощью *60h, g). (В каждом случае соответствующая формула выводима из другой в интуиционистском исчислении предикатов.)

Эти примеры наводят на мысль, что виды рассуждений, обычно встречающиеся в содержательной элементарной арифметике, формализуемы в нашей формальной системе. Отсутствие таких функций, как $a!$, еще продолжает вызывать некоторые сомнения (хотя мы обошлись без этой функции при доказательстве теоремы Эвклида). Мы еще вернемся к этому вопросу о функциях в §§ 41, 49, 59, 74, 82.

В § 42 мы займемся вопросом о полноте нашей формальной системы. С точки зрения интерпретации, мы при этом должны установить, верно ли, что все возможные рассуждения элементарной арифметики (а не только те, которые встречаются обычно) формализуемы в этой системе, по крайней мере постольку, поскольку речь идет о доказательствах предложений, выразимых в системе. Будет рассмотрено и более специальное, чисто метаматематическое понятие полноты.

§ 41. ФОРМАЛИЗОВАННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Формула A называется (*формально*) *опровержимой*, если $\neg$ A доказуема. Замкнутая формула A (см. конец § 32) называется (*формально*) *разрешимой*, если A доказуема или опровержима, т. е. если $\vdash$ A или $\vdash \neg$ A.

Формальная арифметическая система (или вообще система с аналогичными правилами образования) называется (*просто*) *полной*, если каждая замкнутая формула A формально разрешима, и (*просто*) *неполной* в противном случае, т. е. если в ней имеется формально неразрешимая замкнутая формула[1]).

[1]) Формальная система S_1 называется *усилением* или *расширением* формальной системы S, если всякая формула, доказуемая в S, доказуема в S_1. Система S называется *непополнимой*, если она не допускает полного и непротиворечивого усиления, т. е. если всякое непротиворечивое усиление системы S содержит неразрешимую замкнутую формулу. Если такая формула может быть эффективно построена по всякому непротиворечивому усилению системы S, то система S называется *эффективно-непополнимой* (В. А. Успенский [1953]). Понятие эффективной непополнимости уточняется следующим образом. Гёделевские номера (см. ниже, § 42) формул, доказуемых в формальной системе, образуют ре-

Замкнутость A здесь является ограничением, существенным для того, чтобы метаматематическое понятие простой полноты имело нужный нам смысл. Иначе при интерпретации всеобщности для свободных переменных в A и $\neg$ A вторая из этих формул не выражала бы отрицания того предложения, которое выражает первая (§ 32).

Пример 1. Формула $2|a$ (т. е. $\exists c(0''\cdot c = a)$ выражает предложение: каждое число a четно; формула $\neg 2|a$ выражает: каждое число a нечетно. Ни одно из этих предложений не является истинным; надеемся, ни одна из этих формул не доказуема. Но $\forall a 2|a$ выражает: каждое число a четно; $\neg \forall a 2|a$ выражает: не каждое число a четно. По классическому закону исключенного третьего, одно из этих двух предложений должно быть истинным. В действительности из них истинно второе, и формула $\neg \forall a 2|a$ доказуема.

Мы не вводили понятия простой полноты по отношению к исчислениям высказываний и предикатов, потому что пропозициональные и предикатные буквы в интерпретации играли роль свободных переменных (§§ 28, 29, 36, 37). Простая полнота является примером понятия полноты, соответствующего положительному критерию (§ 29)[1]).

Термы 0, 0′, 0″, ..., представляющие в интерпретации системы конкретные натуральные числа, мы будем называть *цифрами* (numerals) и будем обозначать их сокращенно (как и в §§ 17, 37) теми же символами «0», «1», «2», ... соответственно, которыми мы пользуемся для содержательно понимаемых натуральных чисел. Далее, если у нас введена курсивная буква, например «x», для обозначения некоторого натурального числа (в содержательном понимании), то соответствующая жирная курсивная буква «$\boldsymbol{x}$» будет обозначать соответствующую цифру $0^{(x)}$, т. е. $0'^{\cdots\prime}$ с x штрихами ($x \geqslant 0$) (как в § 37). В этой связи мы также будем употреблять «$\boldsymbol{x}-1$» для обозначения цифры с $x-1$ штрихами (при $x > 0$); это не может вызвать путаницы, потому что у нас нет формального «—». Но «$\boldsymbol{x}+1$» означает $0^{(x)}+0'$.

Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ — арифметический предикат (в содержательном понимании). Мы будем говорить, что $P(x_1, \ldots, x_n)$ *нумерически выразим* в нашей формальной системе, если в ней имеется формула $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, не содержащая свободных переменных, отличных от $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, — а эти последние все различны между собой, и такая, что для любой конкретной n-ки натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$,

(i) если $P(x_1, \ldots, x_n)$ истинно, то $\vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, и

(ii) если $P(x_1, \ldots, x_n)$ ложно, то $\vdash \neg \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$.

В этом случае формула $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ *нумерически выражает* предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ (причем формальные переменные $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ соответствуют содержательно понимаемым переменным $x_1, \ldots, x_n$)[2]).

курсивно-перечислимое множество (см. § 60). Система называется эффективно-неполнимой, если существует частично-рекурсивная (см. гл. XII) функция γ, обладающая следующим свойством: если n есть гёделевский номер рекурсивно-перечислимого множества гёделевских номеров формул, доказуемых в системе S_1, где S_1 есть непротиворечивое усиление системы S, то значение $\gamma(n)$ определено и есть гёделевский номер формулы, неразрешимой в S_1. — *Прим. ред.*

[1]) Автор здесь непоследователен: простая полнота не связана определением с понятием истинности или каким-нибудь свойством, как в § 29, и потому не подходит под положительный критерий. — *Прим. перев.*

[Однако, если система непротиворечива по отношению к какой-либо интерпретации (§ 29), то, как легко заметить, простая полнота этой системы и ее полнота по отношению к выбранной интерпретации (§ 29) эквивалентны, так что в этом случае понятие простой полноты действительно соответствует положительному критерию. — *Прим. ред.*]

[2]) Заметим, что если формула $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ нумерически выражает предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$, а $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n$ — различные индивидуальные переменные, свободные соот-

Применяя это понятие в метаматематике, мы будем ограничиваться случаями, когда имеется разрешающая процедура для предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$ (§ 30), так что для каждой n-ки $x_1, \ldots, x_n$

(iii) $P(x_1, \ldots, x_n)$ истинно или $P(x_1, \ldots, x_n)$ ложно[1].

(iii) вместе с (i) и (ii) даёт

(iv) $\vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ или $\vdash \neg \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$.

Итак, $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ разрешима для любых $x_1, \ldots, x_n$, или, как мы будем говорить, $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ *нумерически разрешима*. Формула $\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ при этом нумерически выражает предикат не-$P(x_1, \ldots, x_n)$.

Понятие нумерической выразимости — это только один из смыслов, в которых формула $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ может выражать предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$. Это понятие больше требует от дедуктивного аппарата системы, чем просто то, что $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ выражает $P(x_1, \ldots, x_n)$ в интерпретации нашего символизма (с интерпретацией называющей формы для $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, § 31); последнее понятие не содержит, в конце концов, никаких дедуктивных требований. Понятие нумерической выразимости не требует, однако, формальной доказуемости формул, выражающих различные общие свойства предикатов.

Пример 2. Каждая из формул $\exists c(c' + a = b)$ и $\exists c(a + c' = b)$ выражает $a < b$ (причем $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ соответствуют a, b) согласно истолкованию формальных символов, как мы могли бы видеть даже в § 17, когда мы еще ничего не знали о дедуктивных правилах.

Первая формула $\exists c(c' + a = b)$ (та, для которой в §§ 17 и 39 мы ввели постоянное сокращение «$a < b$») нумерически выражает $a < b$ в нашей формальной арифметической системе, и даже, как мы сейчас покажем, в системе без схемы индукции (и аксиом 20 и 21).

Для (i) мы должны показать, что если a и b — любые два натуральных числа, такие, что $a < b$, то $\vdash \exists c(c' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b})$. Пусть, например, $a = 3$, $b = 5$. Тогда $\vdash 0'' + 0''' = (0'' + 0'')'$ [акс. 19] $= (0'' + 0')''$ [акс. 19, акс. 17] $= (0'' + 0)'''$ [акс. 19, акс. 17 дважды] $= 0'''''$ [акс. 18, акс. 17 трижды]. Итак (пользуясь неявно *102), $\vdash 0'' + 0''' = 0'''''$. В силу $\exists$-введ., $\vdash \exists c(c' + 0''' = 0''''')$, т. е. $\vdash \exists c(c' + 3 = 5)$. Аналогичная последовательность шагов даст нам $\vdash \exists c(c' + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b})$ для любых a и b таких, что $a < b$. Чтобы доказать это в общем виде, можно сначала посредством содержательной индукции по k

---

ветственно для $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ в $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, то $\mathrm{P}(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ также нумерически выражает $P(x_1, \ldots, x_n)$. Для дальнейшего важно установить, что *если $P(x_1, \ldots, x_n)$ — нумерически выразимый предикат, а $\mathrm{x}_1^0, \ldots, \mathrm{x}_n^0$ — произвольный набор n различных индивидуальных переменных, то $P(x_1, \ldots, x_n)$ нумерически выражается некоторой формулой $\mathrm{P}^0(\mathrm{x}_1^0, \ldots, \mathrm{x}_n^0)$, где формальные переменные $\mathrm{x}_1^0, \ldots, \mathrm{x}_n^0$ соответствуют* $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$. В самом деле, пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ нумерически выражается формулой $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ и пусть $\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m$ — все различные связанные переменные этой формулы. Выберем различные переменные $\mathrm{z}_1, \ldots, \mathrm{z}_m$ с тем единственным условием, чтобы никакая из них не совпадала ни с какой из $\mathrm{x}_1^0, \ldots, \mathrm{x}_n^0$, и заменим каждую переменную y_i на z_i. Полученная формула $\widetilde{\mathrm{P}}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ будет конгруентна и, в силу леммы 15b (§ 33), эквивалентна формуле $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$; поэтому $\widetilde{\mathrm{P}}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ также нумерически выражает $P(x_1, \ldots, x_n)$. Так как $\mathrm{x}_1^0, \ldots, \mathrm{x}_n^0$ свободны соответственно для $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ в $\widetilde{\mathrm{P}}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, то, в силу сделанного замечания, в качестве $\mathrm{P}^0(\mathrm{x}_1^0, \ldots, \mathrm{x}_n^0)$ можно взять $\widetilde{\mathrm{P}}(\mathrm{x}_1^0, \ldots, \mathrm{x}_n^0)$. — *Прим. ред.*

[1]) С точки зрения классической логики утверждение (iii) справедливо для любого предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$. С точки зрения конструктивной (интуиционистской) логики, которую автор кладет в основу метаматематики, необходимым и достаточным условием верности утверждения (iii) для каждого набора $x_1, \ldots, x_n$ является наличие разрешающей процедуры для предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$. — *Прим. ред.*

получить лемму, что для любого терма t, в силу аксиом 17—19 (и *102), $\vdash \mathrm{t}+0^{(k)}=\mathrm{t}^{(k)}$.

Для доказательства (ii) мы должны показать, что если a и b — любые два натуральных числа, для которых неверно, что $a<b$, то $\vdash \neg \exists c(c'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b})$. Если не $a<b$, то $a\geqslant b$. Пусть, например, $a=3$, $b=2$. Применяя аксиомы 17—19 совершенно так же, как выше, только считая, что c' заменяет $0''$ (или выбирая c' вместо $0''$ в качестве t упомянутой леммы), имеем $\vdash c'+0'''=c''''$. Отсюда $c'+0'''=0'' \vdash c''''=0'' \vdash c''=0$ [дважды применяя акс. 14]. Но, по акс. 15, $\vdash \neg c''=0$. От противного ($\neg$-введ.), $\vdash \neg c'+0'''=0''$, откуда посредством $\forall$-введ. и *86 § 35, $\vdash \neg \exists c(c'+0'''=0'')$, т. е. $\vdash \neg \exists c(c'+3=2)$. Аналогично для любых других a и b таких, что $a\geqslant b$, $\vdash \neg \exists c(c'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b})$.

Итак, $\exists c(c'+a=b)$ нумерически выражает $a<b$ в нашей формальной системе без схемы аксиом 13. Но мы не можем ожидать, что в этой системе доказуемы формулы, выражающие общие свойства $<$, такие, как в *134a — — *146b (где «$a<b$» служит сокращением для $\exists c(c'+a=b)$), за исключением немногих случаев (например, *135b).

Другая формула $\exists c(a+c'=b)$ (эквивалентная, в силу *119, формуле $\exists c(c'+a=b)$ в полной системе со схемой аксиом 13), повидимому, не выражает нумерически $a<b$ в системе без схемы аксиом 13. Конечно, она тоже нумерически выражает $a<b$ в полной системе (или даже в системе без схемы аксиом 13, при условии, что *118 или *119 добавлено в качестве аксиомы).

Отмеченные номерами результаты этого параграфа (начиная с *(164)) относятся в основном к полной арифметической системе (как всюду в этой главе). Но на самом деле для них не требуется снова применять правило формальной индукции (или схему аксиом 13), если пользоваться некоторыми отдельными формулами, доказанными с помощью этого правила. Точнее, можно будет обойтись средствами исчисления предикатов, отдельными арифметическими аксиомами 14—21 и свойством замены для равенства, для которого дополнительно требуются только *104—*107 § 38 и *137 (или *136) § 39, за исключением немногих случаев, которые будут отмечены и перечислены в конце этого параграфа. (Эта подсистема полной системы выделена Рафаэлем Робинсоном [1950, резюме*] в одной связи, о которой будет идти речь в § 76.)

Предикаты

*(164) $a=b$ *(165) $a<b$

нумерически выражаются формулами $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$, *т. е.* $\exists c(c'+a=b)$ *соответственно.*

Доказательства. *(165). Нужно воспользоваться примером 2 или (для полной арифметической системы) утверждениями *135a, *134a, *140, *141.

Если x — *переменная,* A(x) *и* B(x) — *формулы,* k — *натуральное число,* y — *переменная, отличная от* x *и свободная для* x *в* A(x) *и не входящая свободно в* A(x), *а* t — *терм, не содержащий* x *и свободный для* x *в* A(x), *то:*

*166. $\mathrm{A}(0), \mathrm{A}(1), \ldots, \mathrm{A}(\boldsymbol{k}-1) \vdash \forall \mathrm{x}(\mathrm{x}<\boldsymbol{k} \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}))$.

*166a. $\mathrm{A}(0), \mathrm{A}(1), \ldots, \mathrm{A}(\boldsymbol{k}) \vdash \forall \mathrm{x}(\mathrm{x}\leqslant\boldsymbol{k} \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}))$.

*167. $\forall \mathrm{x}(\mathrm{x}<\boldsymbol{k} \supset \mathrm{A}(\mathrm{x})) \vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{i})$ для $i=0, 1, \ldots, k-1$.

*167a. $\forall \mathrm{x}(\mathrm{x}\leqslant\boldsymbol{k} \supset \mathrm{A}(\mathrm{x})) \vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{i})$ для $i=0, 1, \ldots, k$.

*168. $\mathrm{A}(\mathrm{t}) \vdash \forall \mathrm{x}[\mathrm{x}\geqslant\mathrm{t} \supset \exists \mathrm{y}(\mathrm{y}\leqslant \mathrm{x} \,\&\, \mathrm{A}(\mathrm{y}))]$.

*169. $\forall x[x < t \supset A(x)],\ \forall x[x \geqslant t \supset B(x)] \vdash \forall x[A(x) \vee B(x)]$.

При $k=0$ список исходных формул $A(0), A(1), \ldots, A(\boldsymbol{k}-1)$ для *166 пуст, а для *167 вовсе нет формул $A(\boldsymbol{i})$.

Доказательства. *166. Если мы покажем, что $A(0), A(1), \ldots, A(\boldsymbol{k}-1), x < \boldsymbol{k} \vdash A(x)$, то *166 будет следовать по $\supset$- и $\forall$-введ. В силу *137_k (или при помощи доказательства *137_k, исходя из *137 или *136), $\vdash x=0 \vee x = 1 \vee \ldots \vee x = \boldsymbol{k}-1 \vee x = \boldsymbol{k} \vee \exists y(x = y^{(k+1)})$. Благодаря $\vee$-удал. со слабым $\neg$-удал. и $\exists$-удал., достаточно вывести $A(x)$ или противоречие из $A(0), A(1), \ldots, A(\boldsymbol{k}-1)$, $x < \boldsymbol{k}$, взятых вместе с каждой из $x=0, x=1, \ldots, x=\boldsymbol{k}-1$, $x=\boldsymbol{k}$, $x=y^{(k+1)}$ по очереди. Мы проделаем это в неформальном изложении (см. начало § 38): из каждой формулы $x=0, x=1, \ldots, x=\boldsymbol{k}-1$ и соответствующей ей формулы из $A(0), A(1), \ldots, A(\boldsymbol{k}-1)$ мы получим $A(x)$ путем замены (следствие 2 теоремы 24 § 38). Из $x=\boldsymbol{k}$ и $x<\boldsymbol{k}$ путем замены получим $\boldsymbol{k}<\boldsymbol{k}$, что противоречит соотношению $\neg\,\boldsymbol{k}<\boldsymbol{k}$, доказуемому по *(165). Из $x=y^{(k+1)}$ и $x<\boldsymbol{k}$ путем замены получаем $y^{(k+1)}<\boldsymbol{k}$, т. е. $\exists z(z'+y^{(k+1)}=\boldsymbol{k})$. Допустим $z'+y^{(k+1)}=\boldsymbol{k}$ (для $\exists$-удал.). Тогда, в силу $k+1$ применений акс. 19 (и нескольких применений акс. 17), $(z'+y)^{(k+1)}=\boldsymbol{k}$; отсюда, k раз применяя акс. 14, получаем $(z'+y)'=0$, в противоречие с акс. 15. (Ср. замечание в доказательстве *140 § 39.)

*167. Так как $i<k$, то, в силу *(165), $\vdash \boldsymbol{i}<\boldsymbol{k}$.

*169. Пользуясь случаями из *139. Замечание. Нам требуется *139 только с t, подставленным вместо b. Если t — цифра $\boldsymbol{k}$, то эту формулу $a<\boldsymbol{k} \vee a=\boldsymbol{k} \vee a>\boldsymbol{k}$ можно доказать, исходя из *137 или *136, аналогично *166. (Для первых k случаев воспользоваться *(165). Для $(k+2)$-го случая $a=b^{(k+1)}=(b')^{(k)}=(b'+0)^{(k)}$ [акс. 18, 17] $=b'+\boldsymbol{k}$ [акс. 19, 17].)

Хотя, по доказанному, каждая из формул $a<0 \vee a=0 \vee a>0$, $a<1 \vee a=1 \vee a>1$, $a<2 \vee a=2 \vee a>2$, ... доказуема в системе без схемы аксиом 13 (и даже без аксиом 14, 15, 20, 21), но с формулой из *137 или *136 в качестве дополнительной аксиомы, мы не имеем никакого основания верить, что и сама формула $a<b \vee a=b \vee a>b$ из *139 доказуема в этой системе.

Чтение остальной части этого параграфа читатель может отложить до начала § 49.

При интерпретации формального символизма арифметическая функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ выражается термом $t(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 3. Функция $(a+1)^2$ выражается при интерпретации термами $(a')\cdot(a')$, $aa+(2a+1)$, и т. д.

Единственные арифметические функции, которые допускают такое непосредственное выражение, — это полиномы. Мы, однако, покажем, что многие предложения, в которых встречаются другие арифметические функции, можно перефразировать таким образом, что эти предложения становятся выразимыми в формальном символизме, несмотря на отсутствие термов, выражающих эти функции.

Действительно, пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — данная арифметическая функция, а $P(x_1, \ldots, x_n, w)$ — предикат $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=w$, который мы будем называть *представляющим предикатом* функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Если предикат $P(x_1, \ldots, x_n, w)$ выражен в системе формулой $P(x_1, \ldots, x_n, w)$, а $C(x)$ — предикат, выраженный формулой $C(x)$, то $C(\varphi(x_1, \ldots, x_n))$ выражается посредством $\exists w(P(x_1, \ldots, x_n, w) \& C(w))$ (а также посредством $\forall w(P(x_1, \ldots, x_n, w) \supset C(w))$).

Это наводит на мысль, что если представляющий предикат функции выразим в нашей системе, то можно надеяться, что в ней удастся выразить и построить теорию этой функции так же, как если бы терм для самой этой функции имелся в наличии. Это предположение будет впоследствии подтверждено метаматематическим исследованием (§ 74).

Сейчас (и в § 49) мы постараемся получить некоторые сведения по вопросу о том, для каких функций выразимы представляющие предикаты или, короче, какие функции являются „представимыми". До сих пор мы говорили только об интерпретации символизма, но теперь мы введем понятие для представления функций, аналогичное „нумерической выразимости" для выражения предикатов.

Необходимое и достаточное условие, для того, чтобы предикат $P(x_1, \ldots, x_n, w)$ был представляющим предикатом некоторой (однозначной) функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, состоит в том, что для каждой n-ки $x_1, \ldots, x_n$ существует единственное w, такое, что $P(x_1, \ldots, x_n, w)$. Если это условие выполнено, то представляемую функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ можно определить „описательно" с помощью предиката $P(x_1, \ldots, x_n, w)$, как *то* w, *для которого* $P(x_1, \ldots, x_n, w)$.

Мы теперь введем «$\exists!x\mathrm{A}(x)$» при обычных условиях относительно букв (начало § 40 и конец § 33) как сокращение для $\exists x[\mathrm{A}(x) \& \forall y(\mathrm{A}(y) \supset x = y)]$ (читать: «существует единственное x, такое, что A(x)»). Тогда, если предикат $P(x_1, \ldots, x_n, w)$ выражен формулой $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n, w)$, то условие, что $P(x_1, \ldots, x_n, w)$ является представляющим предикатом, выражается формулой $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! w\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n, w)$, или просто $\exists! w\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n, w)$, где $x_1, \ldots, x_n$ имеют интерпретацию всеобщности (§ 32).

Пусть x, y *и* z — *различные переменные*, A(x) — *формула*, t, r *и* s — *термы*, Γ — *формулы, не содержащие* x *свободно*, y, z, r, s *и* t *свободны для* x *в* A(x), z *и* x *не входят в* t *и* y *и* z *не входят свободно в* A(x); *тогда справедливы следующие утверждения:*

*170. *Если* $\Gamma, \mathrm{A}(t), \mathrm{A}(x) \vdash t = x$ *с фиксированными свободными переменными для* A(x), *то* $\Gamma, \mathrm{A}(t) \vdash \exists! x\mathrm{A}(x)$.

*171. $\vdash \exists! x(t = x)$.

*172. $\mathrm{A}(r), \mathrm{A}(s), \exists! x\mathrm{A}(x) \vdash r = s$.

*173. $r \neq s, \mathrm{A}(r), \exists! x\mathrm{A}(x) \vdash \neg \mathrm{A}(s)$.

(Свойства $\exists!$.)

*174a. $\mathrm{A}(t) \& \forall z(z < t \supset \neg \mathrm{A}(z)) \vdash \exists! y[\mathrm{A}(y) \& \forall z(z < y \supset \neg \mathrm{A}(z))]$.

*174b. $\vdash \exists y[\mathrm{A}(y) \& \forall z(z < y \supset \neg \mathrm{A}(z))] \sim \exists! y[\mathrm{A}(y) \& \forall z(z < y \supset \neg \mathrm{A}(z))]$.

(Единственность наименьшего x, такого, что A(x).)

Доказательства. *174a. С помощью *170, *139. Ср. замечание в доказательстве *169.

Арифметическая функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (в содержательном понимании) называется *нумерически представимой* в формальной системе, коль скоро существует формула $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n, w)$, в которой, кроме различных переменных $x_1, \ldots, x_n, w$, нет других свободных переменных, такая, что для каждой данной n-ки натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$ имеют место следующие предложения:

(v) если $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w$, то $\vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{w})$ и

(vi) $\vdash \exists! w\mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, w)$.

В этом случае формула $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n, w)$ *нумерически представляет* функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (при очевидном соответствии между переменными).

При нашем финитном (т. е. интуиционистском) употреблении этого понятия мы будем ограничиваться случаями, когда имеется вычислительная процедура для функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (§ 30), так что w в (v) может быть найдено для любых данных $x_1, \ldots, x_n$ (или мы будем молчаливо пользоваться этим как гипотезой).

Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ нумерически представляется формулой $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$, то эта формула нумерически выражает представляющий предикат $P(x_1, \ldots \ldots, x_n, w)$ функции φ. Действительно, из (v) и (vi) мы следующим образом можем заключить, что для каждого w:

(vii) из $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \neq w$ следует $\vdash \neg \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{w})$.

Возьмем $\boldsymbol{w}$ из (v) в качестве r, а $\boldsymbol{w}$ из (vii) в качестве s для *173. Доказуемость $\mathrm{r} \neq \mathrm{s}$ установим с помощью *(164).

Нет никаких оснований верить, что, обратно, (vii) для каждого w и (v) необходимо влекут (vi).

Мы воспользовались $\exists!$-обозначением для компактной формулировки (vi). Формула $\exists!\mathrm{x}\mathrm{A}(\mathrm{x})$ эквивалентна формуле $\exists\mathrm{x}\mathrm{A}(\mathrm{x}) \& \forall\mathrm{x}\forall\mathrm{y}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \& \mathrm{A}(\mathrm{y}) \supset \mathrm{x}=\mathrm{y})$, в которой первая часть выражает существование, а вторая — единственность. Часть (vi), выражающая существование, вытекает уже из (v); (vi) добавляет единственность.

Изучая нумерическую представимость функций, мы (как и при изучении нумерической выразимости предикатов) ограничиваемся рассмотрением значений для данных аргументов, оставляя в стороне общие свойства. Вопросы, которые при этом рассматриваются, аналогичны вычислительным вопросам содержательной арифметики.

Например, в определении „нумерической представимости" мы не потребовали, чтобы была доказуема формула $\exists!\mathrm{w}\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ с формальными переменными $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$. Это было бы сильнее, чем наше требование, чтобы выполнялось (vi) для каждых $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ — переменные в содержательном понимании; это наше требование вытекало бы из предыдущего путем подстановки (*66) § 32 с $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ в качестве $\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n$). Это более сильное условие (без (v)) придется потребовать для построения теории, которую мы рассмотрим в § 74. Для шести функций, которые мы сейчас будем рассматривать, оно получается легко.

Функции

$$*(175)\ a', \qquad *(176)\ a+b, \qquad *(177)\ ab$$

нумерически представляются формулами $a'=b$, $a+b=c$, $ab=c$ соответственно.

Доказательства. *(176). Из *171 и вида представляющей формулы $a+b=c$ немедленно вытекает (vi) (и даже $\vdash \exists!c(a+b=c)$). Для (v) мы должны показать, что для каждой пары a, b натуральных чисел из $c=a+b$ следует $\vdash \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. Например, если $a=2$, а $b=3$ (тогда $c=5$), мы имеем $\vdash \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ (т. е. $\vdash 0''+0'''=0'''''$) как для (i) в примере 2.

*(177) рассматривается аналогично. Доказательство (v) удобно провести содержательной индукцией по b. Инд. шаг. Пусть $c=ab$, $d=ab'$ ($=ab+a=$ $=c+a$). Тогда $\vdash \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ [акс. 21] $=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$ [инд. предп., *104] $=\boldsymbol{d}$ [в силу (v) для *(176)].

Наш метод рассмотрения ближайших примеров становится понятным на основе некоторых общих принципов. *Элементарной* формулой называется формула, не содержащая логических символов; в рассматриваемой системе элементарная формула — это просто $\mathrm{s}=\mathrm{t}$, где s и t — некоторые термы.

(A) *Каждая замкнутая элементарная формула* $\mathrm{s}=\mathrm{t}$ *формально разрешима (причем доказуема или опровержима в соответствии с тем, одно и то же или разные числа выражают термы* s *и* t *при обычной интерпретации* $0, ', +, \cdot$). *Каждая элементарная формула нумерически разрешима.*

Доказательство проводится с помощью *(176), *(177), теоремы 24 § 38 и *(164).

Пример 4. Пусть s = t будет $0'''\cdot 0'''' + 0' = (0'''\cdot 0'')''$, т. е. сокращенно $3\cdot 4+1=(3\cdot 2)''$. Тогда $\vdash 3\cdot 4+1=(3\cdot 2)'' \sim 12+1=(3\cdot 2)''$ [так как, согласно *(177), $\vdash 3\cdot 4=12] \sim 13=(3\cdot 2)''$ [так как, согласно *(176), $\vdash 12+1=13] \sim 13=8$ [так как, согласно *(177), $\vdash 3\cdot 2=6$ и замечая, что $6''$, т. е. $(0'''''')''$, есть 8]. Но в силу *(164), $\vdash \neg\, 13=8$. Поэтому $\vdash \neg\, 3\cdot 4+1=(3\cdot 2)''$. Мы молчаливо пользуемся теоремой 24(b) или ее следствием 1, а также *21 § 26, когда заключили по этой цепи, что $\vdash 3\cdot 4+1=(3\cdot 2)'' \sim 13=8$, а сопоставляя этот результат с $\vdash \neg\, 13=8$ для получения $\vdash \neg\, 3\cdot 4+1=(3\cdot 2)''$, мы пользуемся *30, *18b — или *20 и следствием из теоремы 6.

(B) *Пусть* $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n)$ — *формула, содержащая свободно только попарно различные переменные* $x_1, \ldots, x_n$. *Допустим, что* $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n)$ *нумерически разрешима* (*и нумерически выражает* $P(x_1, \ldots, x_n)$). *Тогда: если* $t_1, \ldots, t_n$ — *термы, не содержащие переменных* (*а потому выражающие некоторые числа* $t_1, \ldots, t_n$), *то* $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)$ *разрешима* (*и притом доказуема или опровержима, в зависимости от того, истинно или ложно* $P(t_1, \ldots, t_n)$). *Если* $t_1, \ldots, t_n$ — *термы, свободные для* $x_1, \ldots, x_n$ *в* $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n)$, *то* $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)$ *нумерически разрешима*[1]).

Доказывается как предложение (A), которое является частным случаем (B), когда $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n)$ есть $x_1 = x_2$.

(C). *Формула, составленная из замкнутых разрешимых формул с помощью одних только операторов* $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ *исчисления высказываний, разрешима* (*а доказуема она или опровержима — это можно установить, пользуясь классическими двузначными таблицами истинности* (§ 28), *выбирая в качестве* t *и* f *слова „доказуема“ и „опровержима“ соответственно*).

Утверждение (C) вытекает из леммы 13 § 29 и теоремы 3 § 25.

(D). Поэтому: *Каждая формула без переменных разрешима. Каждая формула без кванторов нумерически разрешима.*

(E). *Пусть* $\mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n, y)$ — *нумерически разрешимая формула, содержащая свободно только различные переменные* $x_1, \ldots, x_n, y$, *и пусть* z — *переменная, отличная от* $x_1, \ldots, x_n, y$. *Тогда формулы* $\forall y (y < z \supset \mathrm{A}(x_1, \ldots x_n, y))$ *и* $\exists y (y < z \,\&\, \mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n, y))$ *нумерически разрешимы* (*и притом* $\forall y (y < \boldsymbol{z} \supset \mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, y))$ *доказуема или опровержима, в зависимости от того, все ли формулы* $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, 0)$, $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, 1)$, $\ldots, \mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{z}-1)$ *доказуемы или среди них есть хотя бы одна опровержимая*; $\exists y (y < \boldsymbol{z} \,\&\, \mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, y))$ — *смотря по тому, имеется ли среди только что указанных формул хотя бы одна доказуемая или все они опровержимы*). *Аналогично для* $\leqslant$ *вместо* $<$.

Доказательство (для $<$). С помощью *166, *167, *(165) (а также *58b § 27, *86 § 35).

Рассмотрим деление двух целых чисел a на b. Например, $13=5\cdot 2+3$, где $3<5$. Словами: при делении 13 на 5 частное есть 2, а остаток есть 3.

---

[1]) Т. е. при каждом замещении свободных переменных формулы $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)$ цифрами либо сама получившаяся при этом формула, либо ее отрицание доказуемо. — *Прим. ред.*

Обычно действие деления — и тем самым функции частное $[a/b]$ и остаток $\mathrm{rm}(a, b)$ — определено только для $b \neq 0$. Чтобы избежать трудностей, связанных с рассмотрением здесь частично определенных функций, мы распространим эти определения на случай $b = 0$, положив $[a/0] = 0$, $\mathrm{rm}(a, 0) = a$. При этом сохраняется закон $a = b[a/b] + \mathrm{rm}(a, b)$. Далее, $b \mid a$ («b делит a») тогда и только тогда, когда $\mathrm{rm}(a, b) = 0$.

Функции

$$*(178)\ [a/b], \qquad *(179)\ \mathrm{rm}(a, b)$$

нумерически представляются формулами $\mathrm{Q}(a, b, q)$ *и соответственно* $\mathrm{R}(a, b, r)$, *такими, что для любых цифр* $\boldsymbol{q}$ *и* $\boldsymbol{r}$:

$$*178a.\quad \mathrm{Q}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{q}) \vdash \exists! q \mathrm{Q}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, q), \qquad *179a.\quad \mathrm{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r}) \vdash \exists! r \mathrm{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, r).$$

Доказательства. *(179) и *179a. Пусть $\mathrm{S}(a, b, r)$ будет формулой

$$\exists q (q \leqslant a \,\&\, a = bq + r \,\&\, r < b) \vee (b = 0 \,\&\, r = a).$$

Далее, пусть $\mathrm{R}(a, b, r)$ будет

$$\mathrm{S}(a, b, r) \,\&\, \forall e (e < r \supset \neg \mathrm{S}(a, b, e)).$$

*179a немедленно вытекает из *174a (где в качестве t надо взять $\boldsymbol{r}$).

Чтобы получить (v) для *(179), рассмотрим любую пару чисел a и b. Пусть $r = \mathrm{rm}(a, b)$, $q = [a/b]$. Случай 1: $b \neq 0$. Имеем $a = bq + r$; отсюда, в силу (A), $\vdash \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$. Кроме того, $r < b$; отсюда, согласно *(165), $\vdash \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$. По &-введ. (или (C)) $\vdash \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r} \,\&\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$. Но $q \leqslant a$, так что, в силу (E), $\vdash \exists q (q \leqslant \boldsymbol{a} \,\&\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}q + \boldsymbol{r} \,\&\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b})$. По $\vee$-введ., $\vdash \exists q (q \leqslant \boldsymbol{a} \,\&\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}q + \boldsymbol{r} \,\&\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{b} = 0 \,\&\, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a})$, т. е. $\vdash \mathrm{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$. Пусть теперь e—любое число, меньшее r. Тогда $e < b$ (так что, по *(165), $\vdash \boldsymbol{e} < \boldsymbol{b}$). Для любого числа p, $a \neq bp + e$ (потому что q, r — единственная пара чисел с $r < b$, такая, что $a = bq + r$); значит, в силу (A), $\vdash \neg \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{e}$. Отсюда, по (C), $\vdash \neg (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{e} \,\&\, \boldsymbol{e} < \boldsymbol{b})$. В частности, это справедливо для $p = 0, 1, \ldots, a$, так что, в силу (E), $\vdash \neg \exists q (q \leqslant \boldsymbol{a} \,\&\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}q + \boldsymbol{e} \,\&\, \boldsymbol{e} < \boldsymbol{b})$. Но $b \neq 0$; отсюда, по *(164), $\vdash \neg \boldsymbol{b} = 0$. По *(164), $\vdash \boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}$ или $\vdash \neg \boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}$. Сопоставляя эти результаты, с помощью (C) получаем $\vdash \neg (\exists q (q \leqslant \boldsymbol{a} \,\&\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}q + \boldsymbol{e} \,\&\, \boldsymbol{e} < \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{b} = 0 \,\&\, \boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}))$, т. е. $\vdash \neg \mathrm{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e})$. В этих рассуждениях e — любое число $< r$, значит, результат верен для $e = 0, 1, \ldots, r-1$; следовательно, в силу (E), $\vdash \forall e (e < \boldsymbol{r} \supset \neg \mathrm{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, e))$. Отсюда и из $\vdash \mathrm{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$ с помощью &-введ. получаем $\vdash \mathrm{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r}) \,\&\, \forall e (e < \boldsymbol{r} \supset \neg \mathrm{S}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, e))$, т. е. $\vdash \mathrm{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$, что и требовалось доказать. Случай 2. $b = 0$. Аналогично. (Резюмируем: по одному только виду $\mathrm{R}(a, b, r)$, при помощи (A), *(165), (C) и (E), можно сразу заключить, что $\mathrm{R}(a, b, r)$ нумерически разрешима. При помощи формальных шагов, соответствующих шагам содержательной интерпретации, убеждаемся в том, что при $r = \mathrm{rm}(a, b)$ формула $\mathrm{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$ доказуема, а не опровержима.)

Теперь (vi) для *(179) получается, если подставить любые цифры $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ вместо a, b в *179a и применить (v)[1]).

Функция

*(180) $\quad \mathrm{rm}(c, (i' \cdot d)')$

---

[1]) В качестве $\mathrm{Q}(a, b, q)$ следует взять формулу

$$\exists r (a = bq + r \,\&\, r < b) \vee (b = 0 \,\&\, q = 0) \text{ из } 178b.$$

— *Прим. перев.*

нумерически представляется формулой B (c, d, i, w), *такой, что для любой цифры* $\mathfrak{w}$:

*180a. $\qquad$ B (c, d, i, $\mathfrak{w}$) $\vdash$ ∃!wB (c, d, i, w).

Доказательство. Пусть «c», «d», «i», «v», «w» означают c, d, i, q, r соответственно, и пусть B (c, d, i, w) будет R (c, (i′·d)′, w). Применим *179a, подстановку (*66), *(179) и (B).

Из предыдущего изложения не вытекало, что формулы, нумерически представляющие $[a/b]$, $\mathrm{rm}(a,b)$ и $\mathrm{rm}(c, (i'\cdot d)')$, обладают сильным свойством $\vdash \exists! w P(x_1, \ldots, x_n, w)$. Но применяя *146a и 146b (а также *123, *140, *141, *142 и *143a), можно установить и это, а также построить более простые представляющие формулы, эквивалентные прежним.

*178b. $\quad \vdash Q(a, b, q) \sim \exists r (a = bq + r \,\&\, r < b) \vee b = q = 0.$

*179b. $\quad \vdash R(a, b, r) \sim \exists q (a = bq + r \,\&\, r < b) \vee (b = 0 \,\&\, r = a).$

*180b. $\quad \vdash B(c, d, i, w) \sim \exists v (c = (i'\cdot d)'\cdot v + w \,\&\, w < (i'\cdot d)').$

*178c. $\quad \vdash \exists! q\, Q(a, b, q)$. $\qquad$ *179c. $\quad \vdash \exists! r R(a, b, r).$

*180c. $\quad \vdash \exists! w B(c, d, i, w).$

Лемма 18a. *Результаты* *(164) — *180c *и* (A) — (E) *этого параграфа, за исключением* *169 *и* *174a, *если* t *не цифра, а также* *174b, *178b, c, *179b, c *и* *180b, c, *имеют место для формальной системы гл.* IV *без схемы аксиом* 13, *но с формулами из* *104 — *107 *и из* *137 *или* *136, *взятыми в качестве дополнительных арифметических аксиом* («система Робинсона»).

§ 42. ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ

В силу результата Пресбургера [1930], для формальной системы гл. IV без правил образования и аксиом для · могут быть даны метаматематические доказательства непротиворечивости и полноты, а также разрешающая процедура. (См. пример 2 § 79[1].) Пресбургер рассматривает некоторую классическую систему арифметики натуральных чисел. Гильберт и Бернайс [1934, стр. 359 и след.] приспосабливают затем его метод к классической системе, по существу совпадающей с системой гл. IV, а Джоан Росс устанавливает, что этот приспособленный метод пригоден и для интуиционистской системы.)

Для полной системы гл. IV (или для систем, по существу ей эквивалентных) эти вопросы не поддавались никаким усилиям. Доказательства непротиворечивости Аккермана [1924—25] и Неймана [1927] проходят только в том случае, если ограничить применимость постулата индукции (схема аксиом 13) случаем, когда индукционная переменная x не входит свободно в область действия какого-нибудь квантора индукционной формулы A(x). (См. теорему 55 § 79. При этом ограничении не проходят, например, наши доказательства *105, *136 и *148.)

На эти трудности был пролит свет, когда появились две замечательные теоремы Гёделя [1931] «о формально неразрешимых предложениях Principia Mathematica и родственных систем». Первую из этих теорем, из которой вторая получается как следствие, мы будем называть «теоремой Гёделя»,—хотя это только один из ряда важных результатов этого автора. Эти две теоремы,

[1]) И добавление IV в конце книги.—*Прим. перев.*

которые затем стали наиболее широко известными результатами из этой области, несут в себе целую программу и философию метаматематики.

Метаматематические результаты, изложенные до сих пор в этой книге, были получены методами, которые более или менее подсказывались интерпретацией системы. Результаты Гёделя получаются с помощью метаматематических рассуждений, глубже проникающих в структуру формальной системы как системы объектов.

Как изложено в § 16, объектами нашего изучения при рассмотрении формальных систем являются формальные символы, формальные выражения (т. е. конечные последовательности формальных символов) и конечные последовательности формальных выражений. Вначале имеется бесконечная счетная совокупность формальных символов. Поэтому, в силу методов § 1, формальные объекты образуют счетный класс. Если указать для них какой-нибудь пересчет и считать, что наши метаматематические утверждения относятся к индексам в этом пересчете, а не к самим пересчитываемым объектам, то метаматематика окажется отраслью арифметики. Вместе с тем может оказаться, что некоторые формулы системы, если рассматривать их в связи с нумерацией, выражают предложения, относящиеся к метаматематике этой системы.

При дальнейшем изучении окажется, что можно использовать эту возможность и с помощью канторовского диагонального метода (§ 2) построить замкнутую формулу A, которая с точки зрения лица, знающего эту нумерацию, выражает свою собственную недоказуемость.

Формула A представляет аналогию с предложением из парадокса Эпименида (§ 11). Но здесь можно избежать парадокса. По построению A,

(1) A означает, что A недоказуема.

Допустим, что формулы, которые выражают ложные предложения, недоказуемы в системе (мы надеемся, что это действительно так), т. е.

(2) ложные формулы недоказуемы.

Тогда A не может быть ложной, потому что, в силу (1), это означало бы, что она не является недоказуемой, в противоречие с (2). Но A может быть истинной при условии, что она недоказуема. Так и должно быть. Действительно, если допустить, что A доказуема, то, по (1), A ложна и значит, по (2), недоказуема. В силу (содержательного) reductio ad absurdum, это означает, что A недоказуема, ввиду чего, в силу (1), A истинна. Итак, система неполна в том смысле, что не для каждой формулы, истинной при интерпретации, в ней имеется доказательство (при условии (2), или, по крайней мере, при условии, что эта формула A недоказуема, если она ложна).

Отрицание $\neg$A этой формулы также недоказуемо. Действительно, формула A истинна; поэтому $\neg$A ложна; в силу (2), $\neg$A недоказуема. Значит, система неполна и в простом смысле, определенном метаматематически в предыдущем параграфе (при условии (2) или, по крайней мере, при условии, что каждая из формул A и $\neg$A недоказуема, если ложна).

Все это является, конечно, только предварительным эвристическим изложением рассуждений Гёделя. Ввиду природы этого содержательного рассуждения, которое проходит совсем рядом с парадоксом и все же на него не наталкивается, очень важно иметь строго финитное метаматематическое доказательство теоремы Гёделя. Если это метаматематическое доказательство рассмотреть во всех деталях, то оно окажется по своей природе обыкновенным математическим доказательством. Действительно, если рассматривать нашу метаматематику как часть арифметики (лучше в этом случае содержательной, чем формальной), занимающуюся рассуждениями об индексах в нумерации, и если не принимать во внимание интерпретаций предметной системы (в данном случае арифметической), то эта теорема становится предложением обыкновенной элементарной арифметики. Ее доказательство, хотя чрезвычайно длинное и утомительное в этих терминах, не подвержено никаким возражеииям, которые в равной мере не относились бы к частям традиционной математики, почитаемым за наиболее достоверные.

Мы можем теперь провести строгое метаматематическое доказательство, заимствуя одну лемму из результатов следующих двух глав. Наша нумерация лемм и теорем будет соответствовать логическому порядку.

Когда мы пользуемся идеей нумерации формальных объектов, то из практических соображений желательно, чтобы номера этих объектов были связаны с самими объектами посредством как можно более простых правил. Можно (несущественным образом) изменить предыдущее эвристическое рассуждение, пользуясь вместо нумерации в обычном смысле нумерацией с пропусками в натуральном ряде, т. е. соответствием между различными натуральными числами и различными формальными объектами, при котором используются не все натуральные числа. Мы будем называть такое соответствие гёделевской нумерацией, а соответствующее при нем какому-нибудь формальному объекту число — гёделевским номером этого формального объекта. (Иногда рассматриваются отдельно три гёделевские нумерации: для формальных символов, для формальных выражений и для конечных последовательностей формальных выражений. В этом случае, говоря о каком-нибудь числе как о гёделевском номере некоторого символа, или выражения, или последовательности выражений, каждый раз надо указывать, о каком соответствии идет речь.)

Если дана какая-нибудь гёделевская нумерация, то для любого n, являющегося гёделевским номером формулы, мы обозначаем через «A_n» эту формулу. (Для других n нам не требуется определять A_n.) Мы будем также записывать эту формулу A_n в виде «$\mathrm{A}_n(a)$», указывая свободную переменную a, которой мы будем пользоваться в соответствии с обозначением для подстановки (§ 18).

Лемма 21. *Имеется такая гёделевская нумерация формальных объектов, что следующим образом определенные предикаты $A(a, b)$ и $B(a, c)$ нумерически выразимы* (§ 41) *в формальной системе гл.* IV:

$A(a, b)$: a является гёделевским номером формулы (именно, формулы $\mathrm{A}_a(a)$), а b — гёделевским номером доказательства формулы $\mathrm{A}_a(\boldsymbol{a})$.

$B(a, c)$: a является гёделевским номером формулы (именно, формулы $\mathrm{A}_a(a)$), а c — гёделевским номером доказательства формулы $\neg\, \mathrm{A}_a(\boldsymbol{a})$.

Пусть теперь $\mathrm{A}(a, b)$ и $\mathrm{B}(a, c)$ — те формулы, которые нумерически выражают предикаты $A(a, b)$ и соответственно $B(a, c)$ для нумерации, имеющейся согласно лемме[1]). Эти две формулы $\mathrm{A}(a, b)$ и $\mathrm{B}(a, c)$ можно будет действительно написать после того, как будет закончено доказательство леммы (в § 52).

Рассмотрим формулу $\forall b \neg\, \mathrm{A}(a, b)$, которая содержит свободно только переменную a. Эта формула имеет некоторый гёделевский номер, назовем его p, а потому она совпадает с формулой, которую мы обозначили «$\mathrm{A}_p(a)$». Рассмотрим теперь формулу $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$, т. е.

$$\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p}): \qquad \forall b \neg\, \mathrm{A}(\boldsymbol{p}, b),$$

в которой нет свободных переменных. Заметим, что при получении этой формулы мы воспользовались канторовским диагональным методом, когда подставляли цифру $\boldsymbol{p}$ вместо a в $\mathrm{A}_p(a)$.

---

[1]) Выбрать в качестве свободных переменных формул, нумерически выражающих $A(a, b)$ и $B(a, c)$, переменные a, b и a, c мы можем в силу утверждения, доказанного в подстрочном примечании на стр. 176—177. — *Прим. ред.*

Для связи с предварительным эвристическим изложением заметим, что формулу $A_p(p)$ можно с точки зрения гёделевской нумерации рассматривать как выражающую предложение, что $A_p(p)$ недоказуема, иными словами, это есть формула A, которая выражает свою собственную недоказуемость.

В метаматематическом изложении исходные допущения эвристического рассуждения, что система не допускает доказательства формулы A или $\neg$ A, если эта формула ложна, должны быть заменены метаматематическими эквивалентами. Для недоказуемости формулы A в случае ее ложности таким эквивалентом будет (простая) непротиворечивость системы (§ 28). Для недоказуемости формулы $\neg$ A в случае ее ложности нам потребуется более сильное условие, так называемая „ω-непротиворечивость", к определению которой мы сейчас приступаем.

Формальная система гл. IV (или система с аналогичными правилами образования) называется *ω-непротиворечивой*, если ни для какой переменной x и формулы A(x) не оказываются истинными все следующие предложения:

$$\vdash A(0),\ \vdash A(1),\ \vdash A(2),\ \ldots,\ \vdash \neg \forall x A(x)$$

(иными словами, если неверно, что одновременно $\vdash A(\boldsymbol{n})$ для каждого натурального числа n и $\vdash \neg \forall x A(x)$). В противном случае, когда для некоторых x и A(x) все формулы A(0), A(1), A(2), ..., а также $\neg \forall x A(x)$ доказуемы, система называется *ω-противоречивой*.

Заметим, что ω-непротиворечивость влечет простую непротиворечивость. Действительно, если A — любая доказуемая формула, не содержащая свободных переменных, то, записав ее в виде «A(x)», где x — переменная, получим, что все формулы A(0), A(1), A(2), ... доказуемы (согласно обозначению для подстановки § 18, каждая из этих формул просто совпадает с A); а потому, если система ω-непротиворечива, то $\neg \forall x A(x)$ служит примером недоказуемой формулы (ср. § 28).

Теорема 28. *Если арифметическая формальная система гл.* IV (*просто*) *непротиворечива, то не* $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$; *если эта система ω-непротиворечива, то не* $\vdash \neg A_p(\boldsymbol{p})$. *Таким образом, если эта система ω-непротиворечива, то она* (*просто*) *неполна и* $A_p(\boldsymbol{p})$ *служит примером неразрешимой формулы.* (Теорема Гёделя в первоначальной форме.)

Доказательство того, что если эта система непротиворечива, то не $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$. Допустим (для содержательного reductio ad absurdum), что $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$, т. е. допустим, что $A_p(\boldsymbol{p})$ доказуема. Тогда имеется доказательство этой формулы; пусть k — гёделевский номер этого доказательства. Тогда предложение $A(p, k)$ истинно. Значит, ввиду того, что A(*a*, *b*) введено согласно лемме как формула, которая нумерически выражает $A(a, b)$, $\vdash A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k})$. По $\exists$-введ., $\vdash \exists b A(\boldsymbol{p}, b)$. Отсюда, по *83a, $\vdash \neg \forall b \neg A(\boldsymbol{p}, b)$. Это есть $\vdash \neg A_p(\boldsymbol{p})$. Вместе с нашим допущением, что $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$, это противоречит условию, что система непротиворечива. Следовательно, в силу reductio ad absurdum, не $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$, что и требовалось доказать. (Можно было бы также прийти к противоречию с непротиворечивостью, получив путем $\forall$-удал. $\vdash \neg A(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k})$ из $\vdash A_p(\boldsymbol{p})$.)

Доказательство того, что если система ω-непротиворечива (и, следовательно, также непротиворечива), то не $\vdash \neg A_p(\boldsymbol{p})$. В силу непротиворечивости и первой части теоремы $A_p(\boldsymbol{p})$ не доказуема. Поэтому каждое из натуральных чисел 0, 1, 2, ... не является гёделевским номером доказательства $A_p(\boldsymbol{p})$; иначе говоря, предложения $A(p, 0)$, $A(p, 1)$, $A(p, 2)$, ... все ложны. Значит, ввиду того, что A(*a*, *b*) нумерически выражает $A(a, b)$, $\vdash \neg A(\boldsymbol{p}, 0)$,

$\vdash \neg A(\boldsymbol{p}, 1)$, $\vdash \neg A(\boldsymbol{p}, 2)$, ... Поэтому, в силу ω-непротиворечивости, не $\vdash \neg \forall b \neg A(\boldsymbol{p}, b)$. Но это и есть не $\vdash \neg A_p(\boldsymbol{p})$, что и требовалось доказать.

Мы привели сначала оригинальную гёделевскую форму этой теоремы, поскольку ее доказательство содержательно проще и следует в общих чертах эвристическому образцу. Но Россер [1936] показал, что, пользуясь чуть-чуть более сложным примером неразрешимой формулы, можно обойтись без условия ω-непротиворечивости и доказать неполноту с помощью одной только (простой) непротиворечивости. Рассмотрим формулу $\forall b [\neg A(a, b) \vee \exists c (c \leqslant b \,\&\, B(a, c))]$. У нее есть гёделевский номер, назовем его q. Рассмотрим теперь формулу $A_q(\boldsymbol{q})$, т. е.

$$A_q(\boldsymbol{q}): \qquad \forall b [\neg A(\boldsymbol{q}, b) \vee \exists c (c \leqslant b \,\&\, B(\boldsymbol{q}, c))].$$

С точки зрения гёделевской нумерации формулу $A_q(\boldsymbol{q})$ можно интерпретировать как утверждение, что для любого доказательства $A_q(\boldsymbol{q})$ существует доказательство формулы $\neg A_q(\boldsymbol{q})$ с меньшим номером, что при условии простой непротиворечивости влечет недоказуемость $A_q(\boldsymbol{q})$.

Теорема 29. *Если арифметическая формальная система гл.* IV *(просто) непротиворечива, то не* $\vdash A_q(\boldsymbol{q})$ *и не* $\vdash \neg A_q(\boldsymbol{q})$; *иначе говоря, если эта система непротиворечива, то она (просто) неполна и* $A_q(\boldsymbol{q})$ *является неразрешимой формулой.* (Теорема Гёделя в форме Россера[1].)

Доказательство того, что если система непротиворечива, то не $\vdash A_q(\boldsymbol{q})$. Допустим, что $\vdash A_q(\boldsymbol{q})$. Как прежде (пользуясь q вместо p), $\vdash A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k})$. Кроме того, по условию непротиворечивости, допущение $\vdash A_q(\boldsymbol{q})$ влечет, что не $\vdash \neg A_q(\boldsymbol{q})$, т. е. $\neg A_q(\boldsymbol{q})$ недоказуема. Поэтому, в частности, каждое из утверждений $B(q, 0)$, $B(q, 1)$, ..., $B(q, k)$ ложно. Так как $B(a, b)$ нумерически выражает $B(a, b)$, то $\vdash \neg B(\boldsymbol{q}, 0)$, $\vdash \neg B(\boldsymbol{q}, 1)$, ..., $\vdash \neg B(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k})$. Отсюда, в силу *166a, $\vdash \forall c (c \leqslant \boldsymbol{k} \supset \neg B(\boldsymbol{q}, c))$. Это вместе с $\vdash A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k})$ дает, по &- и ∃-введ., $\vdash \exists b [A(\boldsymbol{q}, b) \,\&\, \forall c (c \leqslant b \supset \neg B(\boldsymbol{q}, c))]$. Отсюда, согласно *58b и *86[2]), $\vdash \exists b [A(\boldsymbol{q}, b) \,\&\, \neg \exists c (c \leqslant b \,\&\, B(\boldsymbol{q}, c))]$. Отсюда, по *57b (и *70), $\vdash \exists b \neg [\neg A(\boldsymbol{q}, b) \vee \exists c (c \leqslant b \,\&\, B(\boldsymbol{q}, c))]$. Отсюда, по *85a, $\vdash \neg \forall b [\neg A(\boldsymbol{q}, b) \vee \exists c (c \leqslant b \,\&\, B(\boldsymbol{q}, c))]$. Но это и есть $\vdash \neg A_q(\boldsymbol{q})$. Отсюда, как и прежде, не $\vdash A_q(\boldsymbol{q})$, что и требовалось доказать.

Доказательство того, что если система непротиворечива, то не $\vdash \neg A_q(\boldsymbol{q})$. Допустим, что $\vdash \neg A_q(\boldsymbol{q})$, т. е. что $\neg A_q(\boldsymbol{q})$ доказуема. Тогда имеется доказательство этой формулы; пусть k — гёделевский номер этого доказательства. Тогда $B(q, k)$ истинно. Отсюда $\vdash B(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k})$. В силу *168, $\vdash \forall b [b \geqslant \boldsymbol{k} \supset \exists c (c \leqslant b \,\&\, B(\boldsymbol{q}, c))]$. Как и прежде (с q вместо p), $\vdash \neg A(\boldsymbol{q}, 0)$, $\vdash \neg A(\boldsymbol{q}, 1)$, ..., $\vdash \neg A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k} - 1)$. В силу *166, $\vdash \forall b [b < \boldsymbol{k} \supset \neg A(\boldsymbol{q}, b)]$. Наконец, в силу *169, $\vdash \forall b [\neg A(\boldsymbol{q}, b) \vee \exists c (c \leqslant b \,\&\, B(\boldsymbol{q}, c))]$. Но это есть $\vdash A_q(\boldsymbol{q})$. Отсюда не $\vdash \neg A_q(\boldsymbol{q})$, что и требовалось доказать.

---

[1]) По существу здесь доказана не только неполнота, но и непополнимость формальной системы S гл. IV. Действительно, пусть S_1 — непротиворечивое усиление системы S. Для S_1, как и для S, справедлива лемма 21; предикаты, о которых говорится в лемме (в применении к S_1), обозначим $A_1(a, b)$ и $B_1(a, b)$, поскольку в их определении фигурирует теперь „доказуемость в S_1“; формулы, нумерически выражающие эти предикаты, обозначим $A_1(a, b)$ и $B_1(a, b)$. Применяя затем к S_1 теорему 29, получаем, что система S_1 неполна и содержит неразрешимую формулу $A_{q_1}(\boldsymbol{q}_1)$. Поскольку эта неразрешимая формула строится эффективно, то система S даже эффективно-непополнима. — *Прим. ред.*

[2]) И следствия 1 из теоремы 14. — *Прим. перев.*

Заметим, что мы не доказали прямо, что $A_p(p)$, $\neg A_p(p)$, $A_q(q)$, $\neg A_q(q)$ недоказуемы, а только что если система (просто) непротиворечива, то $A_p(p)$, $A_q(q)$, $\neg A_q(q)$ недоказуемы, и если система ω-непротиворечива, то $\neg A_p(p)$ недоказуема.

Рассмотрим наше доказательство[1]) того, что $A_p(p)$ недоказуема, если система непротиворечива. Если теперь будет получено доказательство[1]) непротиворечивости системы, то, приставляя его спереди к предыдущему, мы получим полное доказательство[1]) того, что $A_p(p)$ недоказуема.

В предположении, что такое доказательство[1]) недоказуемости $A_p(p)$ существует, можно было бы, представляя формальные объекты их гёделевскими номерами, выразить его как доказательство[1]) в содержательной арифметики. Займемся вопросом, может ли это последнее доказательство быть формализовано в системе гл. IV.

При такой формализации формула $A_p(p)$ сама являлась бы формализованной записью результата доказательства[1]), то есть того, что $A_p(p)$ недоказуема. Таким образом, формализованное доказательство[1]) того, что $A_p(p)$ недоказуема, само было бы формальным доказательством $A_p(p)$. По теореме 28, такое доказательство не может существовать, если система непротиворечива.

Итак, если бы имелось содержательное доказательство[1]) того, что $A_p(p)$ недоказуема, то это доказательство[1]) не могло бы быть формализуемым в системе гл. IV, если эта система непротиворечива. Предполагаемое содержательное доказательство[1]) при этом должно состоять из двух частей: первая — предполагаемое доказательство непротиворечивости системы, а вторая — уже проведенное (для первой части теоремы 28) доказательство того, что $A_p(p)$ недоказуема, если система непротиворечива.

Показав, что вторая часть действительно может быть формализована в нашей системе, мы получаем метод доказательства того, что для первой части это невозможно, если эта система непротиворечива. Это приводит к следующей теореме. Мы повторим вкратце последнее рассуждение, прежде чем формулировать эту теорему.

Утверждение, что система (просто) непротиворечива, может быть выражено в формальной системе гл. IV с помощью гёделевской нумерации различными способами. Пусть $C(a, b)$ (соответственно, $D(a, c)$) — предикат, означающий: a — гёделевский номер формулы, а именно формулы A_a, а b (соответственно, c) есть гёделевский номер какого-нибудь доказательства формулы A_a (соответственно, формулы $\neg A_a$). Имеются формулы $C(a, b)$ и $D(a, c)$, выражающие $C(a, b)$ и $D(a, c)$ соответственно (§ 52). Первоначальное определение непротиворечивости из § 28 непосредственно выражается в формализме посредством формулы $\neg \exists a[\exists b C(a, b) \& \exists c D(a, c)]$. В силу второй формы этого определения и ввиду того, что формула $\neg 1=0$ доказуема (аксиома 15), рассматриваемая система непротиворечива в том и только том случае, если формула $1=0$ недоказуема. Пусть r — гёделевский номер этой формулы. Тогда $A_r(r)$ есть эта же формула и непротиворечивость выражается посредством $\neg \exists b A(r, b)$ или $\forall b \neg A(r, b)$. Любую из этих формул — по выбору читателя — назовем „Consis".

Утверждение, что $A_p(p)$ недоказуема, выражается посредством гёделевской нумерации формулой $\forall b \neg A(p, b)$, которая есть $A_p(p)$.

Рассуждение первой половины доказательства[1]) теоремы 28 является содержательным доказательством того, что

(I) {система непротиворечива} влечет {$A_p(p)$ недоказуема}.

---

[1]) Здесь в подлиннике demonstration (а не proof; последний термин применяется автором по отношению к формальным доказательствам). — *Прим. перев.*

Предположим теперь, что все метаматематическое доказательство[1]) утверждения (I) формализуется в нашей системе с помощью гёделевской нумерации. Тогда должно иметь место

(II) $\vdash \mathrm{Consis} \supset \mathrm{A}_p(p)$.

Теперь допустим метаматематически, что $\vdash \mathrm{Consis}$. Тогда из (II) по $\supset$-удал. получаем $\vdash \mathrm{A}_p(p)$. По теореме 28, это невозможно, если система непротиворечива. В силу метаматематического reductio ad absurdum, это должно дать следующую теорему. (Доказательство можно провести также, опираясь на теорему 29, потому что $\vdash \forall b \neg \mathrm{A}(q, b) \supset \mathrm{A}_q(q)$[2]).)

Теорема 30. *Если арифметическая формальная система гл.* IV (*просто*) *непротиворечива, то не* $\vdash \mathrm{Consis}$; *иначе говоря, если указанная система непротиворечива, то не существует доказательства ее непротиворечивости, проведенного средствами, формализуемыми в этой системе.* (Вторая теорема Гёделя.)

Доказательства теорем 28 и 29 будут закончены, когда мы установим лемму 21 в гл. X. Что касается доказательства теоремы 30, то остается пробел при переходе от (I) к (II). Восполнение этого пробела является упражнением в формализации довольно длинного содержательного доказательства, которое мы не станем проводить в этой книге[3]).

Гильберт и Бернайс [1939] проводят его до конца для некоторой формальной системы Z_μ (ср. стр. 283 и след., особенно стр. 306—324) и заключают отсюда (стр. 324—328), что теорема справедлива также и для некоторой системы Z, которая лишь несущественно отличается от нашей системы для классической арифметики. (Эти отличия состоят главным образом в использовании предикатных переменных, см. конец § 37, и в постулатах равенства, см. § 73.) Отсюда следует, что теорема 30 справедлива для нашей классической системы; можно убедиться в ее справедливости и для нашей интуиционистской системы (по крайней мере, если Consis есть $\forall b \neg \mathrm{A}(r, b)$ или $\neg \exists b \mathrm{A}(r, b)$ и $\mathrm{A}(a, b)$ выбрано надлежащим образом), если воспользоваться методами работы Гёделя [1932—33] (ср. теорему 60(b2) § 81 и Нельсона [1947, стр. 326—327]).

Следует заметить, что это упражнение требуется только, если мы хотим использовать в качестве формулы Consis непосредственную формализацию первоначального определения (простой) непротиворечивости или какой-либо близкий эквивалент. Содержательно формула $\mathrm{A}_p(p)$ сама выражает некоторый эквивалент, что следует из длинного содержательного доказательства теоремы Гёделя. Действительно, по теореме 28, если система непротиворечива, то $\mathrm{A}_p(p)$ недоказуема, а по § 28, если $\mathrm{A}_p(p)$ недоказуема, то система непротиворечива; недоказуемость же $\mathrm{A}_p(p)$ выражается самой этой формулой $\mathrm{A}_p(p)$.

Каково значение этих результатов для изложенной программы метаматематики? Мы, конечно, надеемся, что наша формальная система непротиворечива. Если это так, то, по теореме 29, она обязательно неполна. Нам не удалось формализовать содержательную арифметику полным и явным образом так, чтобы каждое предложение или его отрицание было следствием по явно сформулированным правилам из явно сформулированных аксиом (§ 15).

Если понимать предположение (простой) непротиворечивости в финитном смысле, т. е. если непротиворечивость поддается метаматематическому доказа-

---

[1]) См. прим. перев. на стр. 189.—*Прим. перев.*

[2]) По аксиоме 5а и *69.—*Прим. перев.*

[3]) См. добавление I в конце книги.—*Прим. перев.*

тельству, то система неполна и в том смысле, что имеются выразимые в ней предложения, истинные в финитном смысле, но не доказуемые формально; три таких предложения выражаются формулами $A_p(p)$, $A_q(q)$ и Consis.

Для проблемы метаматематического доказательства непротиворечивости теорема 30 имеет своим последствием то, что среди методов, на которых мы можем основывать доказательство, должны содержаться такие методы, которые не формализуются в системе. Это не является a priori несовместимым с другим требованием, а именно, чтобы среди этих методов не содержались все те, которые формализуются в системе (и недоверие к некоторым из которых и породило формалистский план получения доказательства). Это обстоятельство ставит метаматематика перед задачей употреблять методы финитного доказательства более мощные, чем те, которыми обыкновенно пользуются в элементарной арифметике.

Имеется дальнейшее применение этих теорем к проблемам полноты и непротиворечивости. Допустим, что наша система (просто) непротиворечива. Тогда, как в доказательстве второй половины теоремы 28, $A_p(p)$ недоказуема, но $\vdash \neg A(p, 0)$, $\vdash \neg A(p, 1)$, $\vdash \neg A(p, 2)$, ... Итак, мы имеем формулу A(x) (а именно $\neg A(p, b)$), такую, что $\vdash A(0)$, $\vdash A(1)$, $\vdash A(2)$, ..., но не $\vdash \forall x A(x)$ (последняя формула есть $A_p(p)$). Тарский [1933a] ввел для этой ситуации название *ω-неполноты*. Если в этой ситуации $\vdash \neg \forall x A(x)$ (последняя формула есть $\neg A_p(p)$), то система будет ω-противоречивой. Открытие, что система может быть ω-неполной, обнаруживает возможность того, что она является ω-противоречивой, не будучи просто противоречивой. Такого рода системой, несомненно, является та, которая получается из системы гл. IV добавлением формулы $\neg A_p(p)$ в качестве новой аксиомы, в предположении, что система гл. IV просто непротиворечива. Чтобы убедиться в том, что при этом предположении расширенная система также непротиворечива, заметим, что если бы в последней были доказуемы формулы B и $\neg$ B, то в первоначальной B и $\neg$ B были бы выводимы из $\neg A_p(p)$ (конец § 20); отсюда, по $\neg$-введ., $\neg \neg A_p(p)$ была бы доказуема, а по $\neg$-удал. (или интуиционистски, в силу $IVa_2 \supset IVa_1$ следствия из теоремы 17 § 35), $A_p(p)$ была бы доказуема, в противоречие с теоремой 28. Очевидно, определимы понятия полноты и непротиворечивости еще более высоких порядков.

Мы не хотим, чтобы наша система была ω-противоречивой, даже если она непротиворечива. В частности, если бы простая непротиворечивость была доказуема метаматематически, то формула $\neg A_p(p)$ выражала бы в интерпретации предложение, противоречащее некоторому другому, истинному в финитном смысле предложению; в случае, если бы $\neg A_p(p)$ была доказуема, мы бы, следуя Гильберту и Бернайсу [1939, стр. 282], назвали бы эту систему *внешне противоречивой*, т. е. противоречащей естественной финитной интерпретации. Итак, доказательство простой непротиворечивости само по себе не дает гарантии, что в формализованной системе не окажется выводимой какая-нибудь содержательно ложная формула. (Это впервые было отмечено Финслером [1926] в связи с одной системой, которая в нашем смысле не является формальной. См. также Гёдель [1931—32a].)

Допустим, что наша система просто непротиворечива. Для краткости будем называть формулу «истинной» («ложной»), если она выражает при интерпретации инстинное (ложное) предложение. Пусть B(x) — формула, нумерически выражающая предикат $B(x)$, который она выражает при интерпретации. Тогда для каждого натурального числа x формула $B(x)$ доказуема в том и только в том случае, если она истинна. Формула $\forall x B(x)$ истинна, если она доказуема (в силу $\forall$-удал.), но обратное, вообще говоря, не имеет места (например, $A_p(p)$). Формула $\exists x B(x)$ доказуема, если она истинна (в силу $\exists$-введ.), но обратное не было показано метаматематически (например, формула $\exists b A(p, b)$, из которой $\neg A_p(p)$ вытекает по *83a и для которой мы таким образом умеем установить ложность, но не умеем — без допущения об ω-непротиворечивости — показать недоказуемость).

Итак (см. § 14), доказательства (простой) непротиворечивости достаточно для того, чтобы обосновать использование нашей классической системы для интуиционистского доказательства «действительных» предложений путем обзора «идеальных» для случая «действительных» предложений видов B(*x*) и $\forall$xB(x), но, насколько нам пока известно, не для предложений вида $\exists$xB(x) [1]).

Допустим, что мы добавляем к системе одну из формул $A_p(p)$, $A_q(q)$ или Consis в качестве новой аксиомы и, повторяя этот процесс, получаем последовательность систем. Можно показать, что если эти системы непротиворечивы, то класс доказуемых формул вида $\forall$xB(x) последовательно расширяется. Гёдель [1931—32] утверждает, что то же самое справедливо для систем, полученных путем последовательного присоединения переменных все более высоких типов (по крайней мере, в предположении ω-непротиворечивости). Если пренебречь тем, что нам неизвестны доказательства соответствующих свойств непротиворечивости, то это показывает (см. § 14), что последовательное применение все более высоких теоретических построений увеличивает класс охваченных ими «действительных» предложений указанного вида. Гёдель [1936] показывает также, что в более высокой системе бесконечно много ранее доказуемых формул приобретает гораздо более короткие доказательства [2]).

До сих пор мы имеем теорему Гёделя только для нашей конкретной формальной системы гл. IV (не считая последних замечаний, которые относятся к последовательности систем). Теперь возникает вопрос, зависит ли эта теорема от некоторых особенностей рассмотренной формализации логики и нельзя ли избавиться от нее в какой-нибудь другой формализации. В ближайших главах мы не только закончим доказательство леммы, требуемой для теоремы Гёделя, но и достигнем точки зрения, которая позволит нам рассматривать эти вопросы для формальных систем вообще, а рассмотренная здесь формальная система гл. IV будет только примером (§§ 60, 61).

---

[1]) См. добавление VII в конце книги. — *Прим. перев.*

[2]) Речь идет о следующей теореме: *Пусть S—непротиворечивая система такого же типа, как в добавлении* I, *S_1—ее расширение, полученное присоединением переменных высшего типа, и пусть в S_1 свободно допускаются непредикативные определения* (см. § 12; предикат $T(a)$, см. конец § 81, в таком случае может быть определен в S_1, а потому в S_1 доказуема формула Consis, выражающая в S непротиворечивость S). *Тогда для любой вычислимой функции $\varphi(n)$ найдется формула* F *такая, что для длин l и l_1* (определяемых как число формул) *самых коротких ее доказательств в S и в S_1 имеет место $l > \varphi(l_1)$.*

Доказательство этой теоремы впервые опубликовано Крейселом и Ваном [1955]. При этом вычислимость $\varphi(n)$ несущественна и в качестве S_1 можно взять любое расширение S, в котором доказуема Consis, а в качестве F—формулу $F(l)$ при достаточно большом l, где $F(l)$ есть формула, отличающаяся от $A_p(p)$ только тем, что в определении $A(a, b)$ слово «доказательство» заменено на «доказательство длины $\leqslant l$». Методом I-й части доказательства теоремы 28 доказывается, что $F(l)$ не имеет в S доказательства длины $\leqslant l$. В то же время в S доказуема формула Consis$\supset \forall$nF(n), что доказывается методом дополнения I.— *Прим. перев.*

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ
РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава IX.

ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 43. ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Чтобы доказать лемму, нужную нам для теоремы Гёделя, мы построим содержательную теорию одного класса арифметических функций и предикатов и покажем затем, что каждый предикат этого класса нумерически выразим в формальной системе гл. IV (§ 49) и что оба предиката $A(a, b)$ и $B(a, c)$ нашей леммы принадлежат этому классу (§ 52). Это позволит обойтись без того большого труда, который пришлось бы затратить при последовательном построении формул, выражающих эти предикаты в нашей формальной системе.

За исключением только что описанного применения, теория этих функций и предикатов будет строиться независимо от формальной системы предыдущих глав. В этой теории, как и в метаматематике, мы будем пользоваться только финитными методами[1]).

Ряд натуральных чисел

$$0,\ 0',\ 0'',\ 0''',\ \ldots,$$

или 0, 1, 2, 3, ..., был нами описан как класс объектов, порожденных из одного первоначального объекта 0 средствами одной первоначальной операции $'$ или $+1$. Это составляет индуктивное определение класса натуральных чисел (§ 6).

Доказательство по индукции как метод доказательства теоремы $T(y)$ для всех натуральных чисел y прямо соответствует этому способу порождения чисел (§ 7). *Определение по индукции*[2]) (которое не следует смешивать с „индуктивным определением", §§ 6, 53), называемое также *рекурсивным определением*, является аналогичным методом определения арифметической функции $\varphi(y)$ или предиката $P(y)$. Сначала даются $\varphi(0)$ или $P(0)$ (значение функции или предиката для 0 в качестве аргумента). Затем для любого натурального числа y значение $\varphi(y')$ или $P(y')$ (значение, следующее за значением для y) выражается в терминах y и $\varphi(y)$ или $P(y)$, т. е. значения для y. Так же, как и для доказательства по индукции, мы можем заключить, что при этих обстоятельствах значение $\varphi(y)$ или $P(y)$ функции или предиката определено для каждого натурального числа y. Действительно, обе части определения позволяют нам, как только порождено произвольное натуральное число y, определить в то же время значение $\varphi(y)$ или $P(y)$.

---

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 61. По мнению редактора, автор в дальнейшем не всегда последовательно придерживается декларированной им „финитной" точки зрения (см., напр., подстрочные примечания на стр. 203, 237 и 291).—*Прим. ред.*

[2]) Иногда будет употребляться также выражение *определение с помощью индукции* или *путем индукции* и т. п.—*Прим. перев.*

Чтобы исследовать это подробнее, напишем пару равенств[1])

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(0)=q, \\ \varphi(y')=\chi(y, \varphi(y)), \end{cases}$$

выражающую определение функции $\varphi(y)$ с помощью индукции по y, где q — данное натуральное число, а $\chi(y, z)$ — данная арифметическая функция от двух переменных.

Тогда, например, значение $\varphi(4)$ определяется следующим образом. Чтобы породить 4, мы порождаем последовательно 0, 1, 2, 3, 4. По первому равенству, значением $\varphi(0)$ должно быть данное число q; затем, по второму равенству, значением $\varphi(1)$ должно быть $\chi(0, \varphi(0))$, т. е. (мы пользуемся уже найденным значением $\varphi(0)$) $\chi(0, q)$, которое (ввиду того что $\chi(y, z)$ — данная функция) является некоторым данным числом; далее, значением $\varphi(2)$ должно быть $\chi(1, \varphi(1))$, т. е. $\chi(1, \chi(0, q))$; значением $\varphi(3)$ должно быть $\chi(2, \varphi(2))$, т. е. $\chi(2, \chi(1, \chi(0, q)))$; наконец, значением $\varphi(4)$ должно быть $\chi(3, \varphi(3))$, т. е. $\chi(3, \chi(2, \chi(1, \chi(0, q))))$.

Итак, мы имеем процесс, который для каждого натурального числа y определяет соответствующее число $\varphi(y)$, исходя из порождения y в последовательности натуральных чисел. Так как каждому y сопоставлено таким образом некоторое число $\varphi(y)$, то определена некоторая арифметическая функция φ, значениями которой являются эти числа $\varphi(y)$.

Эта функция φ удовлетворяет равенствам (1), если рассматривать их как равенство относительно одной неизвестной функции φ, потому что каждое единичное равенство, заключенное в (1) (а именно, $\varphi(0)=q$, $\varphi(0')=\chi(0, \varphi(0))$, $\varphi(1')=\chi(1, \varphi(1))$, ...), оказывается выполненным по мере нахождения последовательных чисел $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... Притом эта φ — единственная функция, удовлетворяющая равенствам (1), рассматриваемым как функциональные уравнения, ибо процесс, посредством которого мы находим последовательные числа $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... из равенств (1), можно рассматривать как доказательство того, что любая функция φ, удовлетворяющая этим равенствам, должна иметь найденные значения.

В других определениях по индукции определяемая функция φ зависит от дополнительных переменных $x_2, \ldots, x_n$, называемых *параметрами*, которые принимают фиксированные значения на протяжении индукции по y.

Пример 1. Рассмотрим содержательно равенства

$$\begin{cases} a+0=a, \\ a+b'=(a+b)', \end{cases}$$

которые уже встречались нам как аксиомы 18 и 19 формального символизма. Они определяют функцию $a+b$ путем индукции по b, где a есть параметр, a' есть ранее известная функция. Далее, равенства

$$\begin{cases} a \cdot 0=0, \\ a \cdot b'=(a \cdot b)+a \end{cases}$$

определяют $a \cdot b$ с помощью индукции по b, причем известной функцией является $a+b$; наконец, равенства

$$\begin{cases} a^0=1, \\ a^{b'}=a^b \cdot a \end{cases}$$

определяют a^b при помощи индукции по b с известной функцией $a \cdot b$.

[1]) В подлиннике здесь и ниже «уравнений» (equation). — *Прим. перев.*

Пример определения предиката по индукции будет дан ниже (пример 2, § 45).

Какие арифметические функции могут быть определены по индукции? Для точной постановки этого вопроса мы должны условиться, какие функции считаются известными первоначально и какие операции, в том числе какие виды определения по индукции, допустимы при определении дальнейших функций.

Мы выберем эти условия так, чтобы функции, определимые по индукции, можно было получить элементарным путем. Эти функции мы будем называть „примитивно-рекурсивными“.

Каждое из следующих равенств и систем равенств (I) — (V) определяет некоторую арифметическую функцию φ, если n и m — целые положительные числа, i — целое положительное число такое, что $1 \leqslant i \leqslant n$, q — натуральное число и $\psi, \chi_1, \ldots, \chi_m, \chi$ — данные арифметические функции от указанного числа переменных.

(I) $\varphi(x) = x'$.

(II) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = q$.

(III) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

(IV) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$.

(Va) $\begin{cases} \varphi(0) = q, \\ \varphi(y') = \chi(y, \varphi(y)). \end{cases}$

(Vb) $\begin{cases} \varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n), \\ \varphi(y', x_2, \ldots, x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$

((Va) — вид, который принимает (V) при $n = 1$, а (Vb) — при $n > 1$.)

Функция называется *примитивно-рекурсивной*, если она может быть определена посредством ряда применений этих пяти операций.

Это определение можно сделать более подробным, по аналогии с определением доказуемой формулы формальной системы (§ 19), например, во второй форме, а именно, следующим образом.

Предыдущие равенства[1]) и пары равенств[1]) (I) – (V) мы будем при ссылках на них называть *схемами*. Они аналогичны постулатам, причем (I) — (III) играют роль схем аксиом (в том числе (I) — отдельной аксиомы), а (IV) и (V) – роль правил вывода.

Функция φ называется *первоначальной*, если она удовлетворяет равенству (I), или равенству (II) при каких-либо n и q, или равенству (III) при каких-либо n и i.

Функция φ называется *непосредственно зависящей* от некоторых других функций, если она удовлетворяет равенству (IV) при каких-либо n и m с $\psi, \chi_1, \ldots, \chi_m$ в качестве этих других функций, или равенствам (Va) при каких-либо q с χ в качестве другой функции, или равенствам (Vb) при каком-либо n с ψ и χ в качестве других функций.

Функция φ называется *примитивно-рекурсивной*, если имеется конечная последовательность $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ ($k \geqslant 1$) (вхождений) функций (именуемая *примитивно-рекурсивным описанием* φ), такая, что каждая функция этой последовательности является или первоначальной, или непосредственно зависящей от предыдущих функций последовательности, а последняя функция φ_k есть φ.

[1]) См. сноску на стр. 196.—*Прим. перев.*

§ 44. ЯВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Первая задача, которой мы займемся в этой главе, — проверка примитивной рекурсивности различных функций, которые, вероятно, уже известны читателю из других источников. (Аналогично, при изучении формальной системы мы из аксиом выводили дальнейшие формальные теоремы, а также выводимые правила как общие методы для получения новых формальных теорем.)

Мы исходим из схем фиксированного вида, чтобы легче было определить класс примитивно-рекурсивных функций. В этом параграфе мы займемся обозрением некоторых применений этих схем.

Схема (I) дает *функцию „следования за“* (successor function) в качестве одной из первоначальных функций. В этой связи мы будем обозначать ее через S. Первоначальные функции, которые дает схема (II), мы будем называть *функциями-константами* и обозначать через C^n_q. Первоначальные функции, которые дает схема (III), мы будем называть *функциями тождества* и обозначать через U^n_i.

Схему (IV) мы будем называть схемой *определения путем подстановки*. Выражение для общего значения φ получается путем подстановки выражений для общих значений $\chi_1, \ldots, \chi_m$ вместо переменных в ψ (ср. § 10). Функцию φ, определенную посредством применения этой схемы, мы будем иногда записывать в виде $S^n_m(\psi, \chi_1, \ldots, \chi_m)$.

Явное определение функции состоит в задании выражения для ее общего значения, построенного синтаксически из ее независимых переменных (никакие другие переменные свободно в это выражение не входят) и символов для данных функций, констант, операторов и т. д. В частности, мы говорим, что функция φ *явно определима* через функции $\psi_1, \ldots, \psi_l$ и константы $q_1, \ldots, q_s$, если для ее общего значения $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ можно задать выражение в терминах переменных $x_1, \ldots, x_n$, констант $q_1, \ldots, q_s$ и функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$ (ср. пример 2 § 10). (Будем говорить также, что φ является *явной* функцией от (относительно) функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$ и констант $q_1, \ldots, q_s$.) В этом случае φ можно получить из $\psi_1, \ldots, \psi_l$ путем ряда применений схем (II) — (IV). Действительно, по схемам (II) и (III), каждую константу и каждую из переменных $x_1, \ldots, x_n$ можно ввести как функцию от всех переменных $x_1, \ldots, x_n$; тогда все подстановки, примененные для построения выражения для общего значения $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, производятся по стандартной форме (IV).

Пример 1. Возьмем явное определение

$$\text{(a)} \qquad \varphi(x, z, y) = \zeta(x, \eta(y, \theta(x)), 2).$$

Рассматривая каждое x, y и 2 справа как функцию от x, z, y, имеем

$$\varphi(x, z, y) = \zeta(U^3_1(x, z, y), \eta(U^3_3(x, z, y), \theta(U^3_1(x, z, y))), C^3_2(x, z, y)).$$

Отсюда мы видим, что для определения φ через ζ, η, θ можно воспользоваться следующим рядом применений схем (II) — (IV). Слева называются или определяются последовательно используемые функции, а справа анализируются применения схем. Например, на шаге 5 применяется схема (IV) с $n = 3$ и $m = 1$ и с предыдущими функциями шагов 3 и 4 в качестве ψ и χ из (IV).

1. ζ — первая данная функция.
2. η — вторая данная функция.
3. θ — третья данная функция.
4. $U^3_1(x, z, y) = x$ — (III), $n = 3$, $i = 1$.

5. $\theta_1(x, z, y) \doteq \theta(U_1^3(x, z, y)) - $ (IV), $n=3$, $m=1$; 3, 4.
6. $U_3^3(x, z, y) = y - $ (III), $n=3$, $i=3$.
7. $\psi(x, z, y) = \eta(U_3^3(x, z, y), \theta_1(x, z, y)) - $ (IV), $n=3$, $m=2$; 2, 6, 5.
8. $C_2^3(x, z, y) = 2 - $ (II), $n=3$, $q=2$.
9. $\varphi(x, z, y) = \zeta(U_1^3(x, z, y), \psi(x, z, y), C_2^3(x, z, y)) - $ (IV), $n=3$, $m=3$; 1, 4, 7, 8.

Заметим, что это определение φ через ζ, η, θ может быть символически выражено так:

(b) $$\varphi = \mathrm{S}_3^3(\zeta, U_1^3, \mathrm{S}_2^3(\eta, U_3^3, \mathrm{S}_1^3(\theta, U_1^3)), C_2^3).$$

Если ζ, η, θ — примитивно-рекурсивны, то и φ примитивно-рекурсивна, и примитивно-рекурсивным описанием $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ функции φ является тогда $\ldots, \zeta, \ldots, \eta, \ldots, \theta, U_1^3, \theta_1, U_3^3, \psi, C_2^3, \varphi$, где $\ldots, \zeta$; $\ldots, \eta$; $\ldots, \theta$ — описания функций ζ, η, θ соответственно.

Это применение функций тождества U_i^n при анализе явных определений дано Гёделем [1934].

Схема (V) называется схемой *примитивной рекурсии* без параметров — (Va), или с параметрами — (Vb). Функцию φ, определенную по этой схеме, мы будем иногда записывать в виде $\mathrm{R}_q^1(\chi)$ (для (Va)) или $\mathrm{R}^n(\psi, \chi)$ (для (Vb)). Но, говоря о «примитивной рекурсии», мы будем считать, что к применениям (V) могут примешиваться шаги явного определения.

Пример 2. Анализируя примитивную рекурсию для $a+b$ (пример 1 § 43), сперва воспроизведем ее, пользуясь обозначением $\varphi(b, a)$ для $a+b$:

$$\begin{cases} \varphi(0, a) = a & [=U_1^1(a)], \\ \varphi(b', a) = (\varphi(b, a))' & [=\chi(b, \varphi(b, a), a), \text{ если } \chi(b, c, a) = c' = S(U_2^3(b, c, a))]. \end{cases}$$

Это соответствует схеме (Vb), если правые части выразить, как указано в прямых скобках. Определение проводится следующим образом:

1. $S(a) = a' - $ (I).
2. $U_1^1(a) = a - $ (III), $n=1$, $i=1$.
3. $U_2^3(b, c, a) = c - $ (III), $n=3$, $i=2$.
4. $\chi(b, c, a) = S(U_2^3(b, c, a)) - $ (IV), $n=3$, $m=1$; 1, 3.
5. $\begin{cases} \varphi(0, a) = U_1^1(a) \\ \varphi(b', a) = \chi(b, \varphi(b, a), a) \end{cases} - $ (Vb), $n=2$; 2, 4.

Это показывает, что функция $a+b$, рассматриваемая как $\varphi(b, a)$ (т. е. $\varphi = \lambda ba\ a+b$, ср. пример 3 § 10), примитивно-рекурсивна с примитивно-рекурсивным описанием S, U_1^1, U_2^3, χ, φ. Можно получить $a+b$ в виде $\varphi_1(a, b)$ (т. е. $\varphi_1 = \lambda ab\ a+b$), применяя три лишних шага. Символически,

$$\lambda ba\ a+b = \mathrm{R}^2(U_1^1, \mathrm{S}_1^3(S, U_2^3)),$$
$$\lambda ab\ a+b = \mathrm{S}_2^2(\mathrm{R}^2(U_1^1, \mathrm{S}_1^3(S, U_2^3)), U_2^2, U_1^2).$$

Этим иллюстрируется общий метод. В силу коммутативного свойства $a+b$, $\varphi_1(a, b) = \varphi(a, b)$, так что три последних шага могут быть опущены в этом примере — но не в примере, скажем, рекурсии для a^b.

Мы теперь воспользуемся этой техникой, чтобы установить примитивную рекурсивность ряда функций. Каждая из функций, перечисленных ниже слева, примитивно-рекурсивна. Чтобы убедиться в этом, читатель может проверить, во-первых, что явные определения и примитивные рекурсии, выписанные справа, порождают примитивно-рекурсивные функции и, во-вторых, что порожденные функции совпадают с теми, которые определяются или называются слева.

#1. $a+b$. $\begin{cases} a+0=a, \\ a+b'=(a+b)'. \end{cases}$

#2. $a \cdot b$. $\begin{cases} a \cdot 0=0, \\ a \cdot b'=a \cdot b+a. \end{cases}$

#3. a^b (пишется также: $a \exp b$). $\begin{cases} a^0=1, \\ a^{b'}=a^b \cdot a. \end{cases}$

#4. $a!$. $\begin{cases} 0!=1, \\ a'!=a! \cdot a'. \end{cases}$

#5. $\mathrm{pd}(a)=\begin{cases} \text{предшественнику } a, \\ \text{если } a>0, \\ 0, \text{ если } a=0. \end{cases}$ $\begin{cases} \mathrm{pd}(0)=0, \\ \mathrm{pd}(a')=a. \end{cases}$

#6. $a \dot{-} b=\begin{cases} a-b, \text{ если } a \geqslant b, \\ 0, \text{ если } a<b. \end{cases}$ $\begin{cases} a \dot{-} 0=a, \\ a \dot{-} b'=\mathrm{pd}(a \dot{-} b). \end{cases}$

#7. $\min(a, b)$. $\min(a, b)=b \dot{-}(b \dot{-} a)$.

#7a. $\min(a_1, \ldots, a_n)$. $\min(a_1, \ldots, a_n)=\min(\ldots \min(\min(a_1, a_2), a_3), \ldots, a_n)$.

#8. $\max(a, b)$. $\max(a, b)=(a+b) \dot{-} \min(a, b)$.

#8a. $\max(a_1, \ldots, a_n)$. Аналогично #7a.

#9. $\overline{\mathrm{sg}}(a)=\begin{cases} 1, \text{ если } a=0, \\ 0, \text{ если } a>0; \end{cases}$ или $\overline{\mathrm{sg}}(a)=1 \dot{-} a$; или $\overline{\mathrm{sg}}(a)=0^a$; или $\begin{cases} \overline{\mathrm{sg}}(0)=1, \\ \overline{\mathrm{sg}}(a')=0. \end{cases}$

#10. $\mathrm{sg}(a)=\begin{cases} 0, \text{ если } a=0, \\ 1, \text{ если } a>0; \end{cases}$ или $\mathrm{sg}(a)=\overline{\mathrm{sg}}(\overline{\mathrm{sg}}(a))$; или $\mathrm{sg}(a)=\min(a, 1)$, или $\begin{cases} \mathrm{sg}(0)=0, \\ \mathrm{sg}(a')=1. \end{cases}$

#11. $|a-b|$. $|a-b|=(a \dot{-} b)+(b \dot{-} a)$.

#12. $\mathrm{rm}(a, b)$ (см. § 41). $\begin{cases} \mathrm{rm}(0, b)=0, \\ \mathrm{rm}(a', b)=(\mathrm{rm}(a, b))' \cdot \mathrm{sg}|b-(\mathrm{rm}(a, b))'|^{1)}. \end{cases}$

#13. $[a/b]$. $\begin{cases} [0/b]=0, \\ [a'/b]=[a/b]+\overline{\mathrm{sg}}|b-(\mathrm{rm}(a, b))'|^{1)}. \end{cases}$

Замечание 1. Приведенный выше список (I)—(V) схем для порождения примитивно-рекурсивных функций (Базис A) оказывается удобным. Если рассматривать константы как примитивно-рекурсивные функции от 0 переменных, то можно получить другой базис, заменяя (II) на

(IIв) $\varphi=0,$

допуская $n=0$ или $m=0$ в (IV), опуская (Va) и допуская $n=1$ в (Vb) (Базис B). Этим базисом подчеркивается фундаментальная роль 0 и $'$.

[1]) $\mathrm{sg}|x-y|$ и $\overline{\mathrm{sg}}|x-y|$ пишутся вместо $\mathrm{sg}(|x-y|)$ и $\overline{\mathrm{sg}}(|x-y|)$ соответственно. — *Прим. перев.*

Функции-константы C_q^0 при $q>0$ вводятся путем последовательного применения (IV) с $n=0$, $m=1$, S в качестве ψ и C_{q-1}^0 в качестве χ, а C_q^n при $n>0$ — посредством (IV) с $m=0$ и C_q^0 в качестве ψ. Существенные сокращения базиса для порождения примитивно-рекурсивных функций были даны Петер [1934] (см. также Нельсон [1947, часть II]) и Рафаэлем Робинсоном [1947]. (В настоящей главе всюду, кроме этого замечания и замечания 1 в конце § 47, подразумевается, что мы пользуемся базисом A.)

§ 45. ПРЕДИКАТЫ, ПРЕДСТАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРОСТЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

Следующее понятие относительной примитивной рекурсивности естественно появляется в нашей теории как средство установления примитивной рекурсивности функций, подобно тому, как понятие выводимости возникло в нашей теории как средство установления доказуемости формул.

Функция φ называется *примитивно-рекурсивной относительно*, или *над* $\psi_1, \ldots \psi_l$ (короче, относительно Ψ), если существует конечная последовательность $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ (вхождений) функций (называемая *примитивно-рекурсивным построением* (*для*) φ *из* Ψ), такая, что каждая функция этой последовательности является или одной из функций Ψ (*исходных функций*), или первоначальной функцией, или непосредственно зависящей от предыдущих функций, а последняя функция φ_k есть φ.

Ввиду того что это определение имеет тот же вид, что и определение выводимости, для каждого из общих свойств знака $\vdash$ (§ 20), мы теперь можем утверждать соответствующий принцип. Например, если φ примитивно-рекурсивна относительно Ψ и некоторые из функций Ψ примитивно-рекурсивны, то φ примитивно-рекурсивна относительно остальных функций Ψ. Впоследствии будет дан пример (с $l=1$), в котором предложение «если $\psi_1, \ldots, \psi_l$ примитивно-рекурсивны, то φ примитивно-рекурсивна» истинно, но предложение «φ примитивно-рекурсивна относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$» ложно (пример 2 § 55).

Пример 1. В примере 1 § 44 φ примитивно-рекурсивна относительно ζ, η, θ с примитивно-рекурсивным построением ζ, η, θ, U_1^2, θ_1, U_3^3, ϕ, C_2^3, φ.

Наш общий результат о явном определении (§ 44) может быть теперь сформулирован следующим образом.

#A. *Функция φ, явно определимая через функции Ψ и константы $q_1, \ldots, q_s$, примитивно-рекурсивна относительно Ψ.*

Под $\sum_{y<z} \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ мы понимаем сумму чисел $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ для всех натуральных чисел y, таких, что $y<z$ при $z>0$, и 0 при $z=0$. Это есть функция от $x_1, \ldots, x_n$, z для любой данной функции $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$. Аналогично, под $\prod_{y<z} \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ мы понимаем произведение чисел $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$, таких, что $y<z$ при $z>0$, и 1 при $z=0$.

#B. *Конечные сумма $\sum_{y<z} \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ и произведение $\prod_{y<z} \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ примитивно-рекурсивны относительно ψ.*

Доказательство. Сумма $\sum_{y<z} \psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ получается из $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ с помощью следующей рекурсии по z:

$$\begin{cases} \sum_{y<0} \psi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0, \\ \sum_{y<z'} \psi(x_1, \ldots, x_n, y) = \psi(x_1, \ldots, x_n, z) + \sum_{y<z} \psi(x_1, \ldots, x_n, y). \end{cases}$$

Другие конечные суммы и произведения сводятся к этим посредством явного определения; например:

$$\sum_{y\leq z} \phi(y) = \sum_{y=0}^{z} \phi(y) = \sum_{y<z'} \phi(y), \qquad \sum_{w<y<z} \phi(y) = \sum_{y<z\dot{-}w'} \phi(y+w'),$$

$$\sum_{w\leq y\leq z} \phi(y) = \sum_{y=w}^{z} \phi(y) = \sum_{y<z'\dot{-}w} \phi(y+w).$$

Хотя в этой главе мы строим содержательную теорию, а не формальную, нам иногда будет полезна сжатость выражений, которую дает логический символизм, и особенно нам понадобится такой символизм при построении обозначений для предикатов и функций. Для этих двух целей мы введем теперь новый логический символизм. Этот символизм следует рассматривать как содержательный и осмысленный, в противоположность символизму формальной системы как предмету метаматематики. Выражения нового содержательного символизма следует отличать от формул прежнего формального символизма по различию в символах (за исключением «&») и по контексту. Это различие между обоими символизмами введено для указанных целей в настоящей книге (и у Гёделя [1931]), но оно не является установившимся в литературе обычаем. (Символы нашего содержательного логического символизма, за исключением знаков «$\equiv$», «$(E!y)$» и операторов с «$x<y$» и т. д., суть символы формального символизма Гильберта и Бернайса [1934, 1939][1]), а символы нашего формального логического символизма, за исключением знаков «$\sim$» и «$\exists!$y», суть символы формального символизма Генцена [1934—35].)

Символы в содержательном символизме	Слова в русском языке	Символы в формальном символизме
$Q \equiv R$	Q эквивалентно R	Q $\sim$ R
$Q \rightarrow R$	Q влечет R (если Q, то R)	Q $\supset$ R
$Q \& R$	Q и R	Q & R
$Q \vee R$	Q или R	Q $\vee$ R
$\overline{Q}$	не Q	$\neg$ Q
$(y)\, R(y)$	для всех y, $R(y)$	$\forall$yR (y)
$(Ey)\, R(y)$	существует y, такой, что $R(y)$	$\exists$yR (y)
$(E!y)\, R(y)$	существует единственный y, такой, что $R(y)$	$\exists$!yR (y)
$(y)_{y<z} R(y)$	для всех $y<z$, $R(y)$	$\forall$y (y < z $\supset$ R (y))
$(Ey)_{y<z} R(y)$	существует $y<z$, такой, что $R(y)$	$\exists$y (y < z & R (y))
$\mu y_{y<z} R(y)$	наименьший $y<z$, такой, что $R(y)$, если $(Ey)_{y<z} R(y)$; в противном случае z.	

Аналогичные обозначения образуются при употреблении символов «(y)», «(Ey)» и «μy» вместе с неравенствами «$y\leqslant z$», «$w<y<z$», «$w<y\leqslant z$», «$w\leqslant y<z$», «$w\leqslant y\leqslant z$». Если указанная область изменения y пуста, то выражение, начинающееся с «(y)», истинно, а выражение, начинающееся с «(Ey)», ложно. Если указанная область не содержит y, таких, что $R(y)$, то значение выражения с «μy» есть кардинальное число этой области.

В данной теории мы часто говорим о значениях истинности „истина" (сокращенно t) и „ложь" (сокращенно f) предложений вместо самих этих предло-

[1]) Для эквивалентности Гильберт и Бернайс употребляют знак $\sim$. —*Прим. перев.*

жений. (Это употребление «t» и «f» можно отличить по контексту от аналогичного употребления их в применении к формулам в процедуре оценки, §§ 28, 36.) При этом мы сразу получаем четыре типа функций. (a) Функции, определенные на $\{0, 1, 2, \ldots\}$, со значениями из $\{0, 1, 2, \ldots\}$, называемые *арифметическими функциями*, или (здесь) просто *функциями*[1]. (b) Функции, определенные на $\{0, 1, 2 \ldots\}$, со значениями из $\{t, f\}$, называемые *арифметическими предикатами*, или (здесь) просто *предикатами*[2]. (c) Функции, определенные на $\{t, f\}$, со значениями из $\{t, f\}$, называемые *функциями истинности*, или *пропозициональными связками*. Нам будут нужны пять из них: $\equiv$, $\rightarrow$, &, $\vee$, $\overline{}$, определенные теми же таблицами, приведенными в § 28, что и соответствующие формальные операторы $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$. (d) Функции, определенные на $\{t, f\}$, со значениями из $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Функция этого типа, которая сопоставляет 0 значению t и 1 — значению f, входит в приводимое ниже определение „представляющей функции".

Конечно, если не отождествлять предложений с их значениями истинности, то „предикат" означает *пропозициональную функцию от натуральных чисел* (§ 31). Наша манера говорить иногда о значениях истинности t, f вместо предложений требует пояснений. Дело в том, что во многих случаях неважно, считаем ли мы значения предикатов предложениями или значениями истинности t, f. Это связано с тем, что существенный для математики смысл этих предложений исходит от определения предикатов, значениями которых они являются. Для примера рассмотрим два предложения $3 < 5$ и $3 \leqslant 5$. Это разные предложения, и они отличаются по смыслу. На первый взгляд, что-то может потеряться, если мы отождествим их оба с одним и тем же предметом t. Однако если мы отождествим предложение $3 < 5$ с t, указывая в то же время, что это есть значение предиката $<$ для 3 и 5 как аргументов, то таким образом полностью будет выражен смысл первоначального предложения. Иными словами, предложение $3 < 5$ является другой формой утверждения, что предикат $<$, рассматриваемый как имеющий значения в области $\{t, f\}$, принимает значение t для 3 и 5 как аргументов. (Более того, здесь несущественно, означает ли „t" и „f" „истину" и „ложь", как принято выше, или просто это любые два различных предмета, как в §§ 28, 36. Предикаты, получающиеся при обеих интерпретациях, изоморфны, так что абстрактное математическое содержание предложения, что значение $3 < 5$ есть t, одно и то же.)

Имея дело непосредственно с функциями, мы должны помнить о двух отмеченных в § 10 смыслах обычного функционального обозначения. Для пре-

---

[1]) Заметим, что с «финитной» точки зрения имеет смысл говорить лишь о таких функциях, для которых существуют вычисляющие их алгоритмы (такие функции в § 60 будут отождествлены с обще-рекурсивными функциями). Однако в дальнейшем, повидимому, автор не ограничивается рассмотрением лишь функций этого типа (см., например, подстрочное примечание на стр. 245).—*Прим. ред.*

[2]) Это определение нуждается в пояснениях. Дело в том, что если истолковать его в духе принятой автором «финитной» установки, то получится, что имеет смысл говорить только о таких предикатах, для которых существует разрешающая процедура (такие предикаты будут в § 60 отождествлены с обще-рекурсивными предикатами). При сформулированном узком понимании термина «предикат» (расходящемся с общепринятым) запись $(Ey)R(x, y)$ может и не выражать никакого предиката, поскольку может не существовать алгоритма, позволяющего для каждого x узнавать, существует ли y, удовлетворяющий предикату $R(x, y)$ или нет. В дальнейшем, однако, автор не придерживается этого узкого понимания, рассматривая и предикаты, не являющиеся обще-рекурсивными. В таком случае следует признать одно из двух: а) либо автор понимает термин «предикат» в классическом, широком смысле, рассматривая произвольные, пусть не конструктивные, функции, отображающие натуральный ряд в $\{t, f\}$ (и тем самым отказывается здесь от своей «финитной» точки зрения); б) либо автор понимает термин «предикат» в некотором «конструктивном», но не объясненном в этой книге, смысле (согласованное с таким смыслом определение понятия предиката можно, например, дать путем точного описания конструкций, с помощью которых разрешается строить предикаты).—*Прим. ред.*

дикатов имеются три возможных смысла (или шесть, если мы различаем предложения и значения истинности).

Значения «$P(x_1, \ldots, x_n)$».	Другие обозначения
1. Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$.	P, или $\lambda x_1 \ldots x_n\ P(x_1, \ldots, x_n)$.
2. Значение предиката P для $x_1, \ldots, x_n$ как аргументов (общее значение).	Другого обозначения нет.
3. Утверждение, что $P(x_1, \ldots, x_n)$ истинно для всех $x_1, \ldots, x_n$.	$(x_1) \ldots (x_n) P(x_1, \ldots, x_n)$.

Эти три значения соответствуют трем интерпретациям свободных переменных $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ в формуле $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ формальной системы — а именно: интерпретации называющей формы (§ 31), условной (§ 32) и всеобщности (§ 32).

Пример 2. Два утверждения

$$\begin{cases} E(0) \text{ (или } E(0) \equiv \mathfrak{t}), \\ E(a') \equiv \overline{E}(a), \end{cases}$$

определяют по рекурсии предикат $E(a)$ ($\equiv \{a$ четно$\}$). Можно посредством примитивной рекурсии определить функцию $\varepsilon(a)$:

$$\begin{cases} \varepsilon(0) = 0, \\ \varepsilon(a') = \overline{\mathrm{sg}}(\varepsilon(a)) \end{cases}$$

(см. #9 § 44). Тогда $E(a) \equiv \varepsilon(a) = 0$.

Мы будем говорить, что $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ является *представляющей функцией* для предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$, если φ принимает значения только 0 и 1 и удовлетворяет эквивалентности:

$$P(x_1, \ldots, x_n) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0;$$

или, другими словами (коль скоро значениями P считаются $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$), если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть 0, когда $P(x_1, \ldots, x_n)$ есть $\mathfrak{t}$, и $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть 1, когда $P(x_1, \ldots, x_n)$ есть $\mathfrak{f}$.

Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется *примитивно-рекурсивным*, если его представляющая функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ примитивно-рекурсивна (например, $E(a)$ в примере 2). Это определение принадлежит Гёделю [1931].

В качестве другого примера приведем предикат равенства, указывая справа представляющую функцию (см. ## 10, 11).

#14. $a = b$. $\qquad\qquad$ $\mathrm{sg}\,|a - b|$.

Далее мы будем говорить, что функция φ или предикат P *примитивно-рекурсивны относительно* предикатов и функций Ψ, если верно соответствующее утверждение, получающееся путем замены предикатов среди P, Ψ на их представляющие функции.

Гёдель [1931] доказал некоторые теоремы, относящиеся к примитивной рекурсивности функций и предикатов, которые мы сейчас изложим (## C—E). Эти результаты были получены также Сколемом [1923].

#C. *Предикат P, полученный путем подстановки функций $\chi_1, \ldots, \chi_m$ вместо соответствующих переменных предиката Q, примитивно-рекурсивен относительно $\chi_1, \ldots, \chi_m, Q$.*

Доказательство. Если представляющая функция данного предиката $Q(y_1, \ldots, y_m)$ есть $\phi(y_1, \ldots, y_m)$ и подставляются функции $\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n)$, то представляющая функция нового предиката $Q(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$ есть $\phi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$. Эта функция примитивно-рекурсивна относительно $\phi, \chi_1, \ldots, \chi_m$ по схеме (IV). Из § 44 нам известно, что можно без потери общности рассматривать подстановку только этого частного вида, и аналогично в #D:

#D *Предикат* $\overline{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ *примитивно-рекурсивен относительно предиката* Q. *Предикаты* $Q(x_1, \ldots, x_n) \vee R(x_1, \ldots, x_n)$, $Q(x_1, \ldots, x_n) \& R(x_1, \ldots, x_n)$, $Q(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow R(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv R(x_1, \ldots, x_n)$ *примитивно-рекурсивны относительно* Q *и* R.

Доказательство. Пусть представляющими функциями предикатов $Q(x_1, \ldots, x_n)$ и $R(x_1, \ldots, x_n)$ будут $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ соответственно. Тогда представляющей функцией для $\overline{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ будет функция $\overline{sg}(\phi(x_1, \ldots, x_n)$ (#9), которая примитивно-рекурсивна относительно ϕ. Представляющей функцией для $Q(x_1, \ldots, x_n) \vee R(x_1, \ldots, x_n)$ будет $\phi(x_1, \ldots, x_n) \cdot \chi(x_1, \ldots, x_n)$, которая примитивно-рекурсивна относительно ϕ и χ. Оставшаяся часть теоремы вытекает из известных эквивалентностей для &, $\rightarrow$, $\equiv$ в терминах $^{-}$ и $\vee$ (ср. гл. VI, с точностью до различий в символизме).

#E. *Предикаты* $(Ey)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ *и* $(y)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ *и функция* $\mu y_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ *примитивно-рекурсивны относительно предиката* R.

Доказательство. Пусть $\chi(x_1, \ldots, x_n, y)$ — представляющая функция для $R(x_1, \ldots, x_n, y)$. Тогда $\prod\limits_{y<z} \chi(x_1, \ldots, x_n, y)$ будет представляющей функцией для $(Ey)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$. Эта функция примитивно-рекурсивна относительно χ в силу #B. Аналогично $sg(\sum\limits_{y<z} \chi(x_1, \ldots, x_n, y))$ будет представляющей функцией для $(y)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ (#10). Доказательство для $\mu y_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ мы продемонстрируем на примере. Фиксируем значения $x_1, \ldots, x_n$ и будем писать просто «$\chi(y)$» вместо $\chi(x_1, \ldots, x_n, y)$ с этими фиксированными значениями $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $z = 7$ и для $y = 0, 1, \ldots, 6$ (первая строка) $\chi(y)$ принимает значения, указанные во второй строке:

y	0	1	2	3	4	5	6	$7=z$
$\chi(y)$	1	1	1	0	1	0	0	
$\pi(y) = \prod\limits_{s \leq y} \chi(s)$	1	1	1	0	0	0	0	
$\sigma(y) = \sum\limits_{t<y} \pi(t)$	0	1	2	3	3	3	3	3

Искомое число $\mu y_{y<z} R(y)$ есть наименьшее y (первая строка) $< z$, для которого $R(y)$ истинно, т. е. для которого во второй строке появляется 0, если только имеется такое y. В нашем примере такое y имеется, и наименьшее есть 3. Это число встречается также в качестве последнего числа $\sigma(z)$ в четвертой строке. Очевидно, что разобранный метод применим в любом случае. Изменим пример: если $\overline{(Ey)_{y<z} R(y)}$, так что 0 во второй строке не встречается, то $\sigma(z)$ будет z, а это, по определению, есть значение $\mu y_{y<z} R(y)$ в этом случае. В полной записи функция $\sigma(z)$ есть $\sum\limits_{t<z} \prod\limits_{s \leq t} \chi(x_1, \ldots, x_n, s)$. В силу #B, она примитивно-рекурсивна относительно χ.

При употреблении этих теорем можно объединять несколько применений схем в один шаг. В силу #14 и #C, предикат $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \chi(x_1, \ldots, x_n)$ примитивно-рекурсивен относительно ϕ, χ; например, согласно § 44, предикат $c' + a = b$ примитивно-рекурсивен. Согласно ## E, C и § 44, предикат $(Ey)_{y < \phi(x_1, \ldots, x_n)} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ примитивно-рекурсивен относительно ϕ, R; например, в силу дальнейших применений результатов § 44, примитивно-рекурсивен предикат

#15. $a < b$. $\quad a < b \equiv (Ec)_{c<b}[c' + a = b]$, или $\operatorname{sg}(a' \dot{-} b) = 0$.

Неравенство «$y < z$» в #E можно заменить на «$y \leqslant z$», «$w < y < z$», «$w < y \leqslant z$», «$w \leqslant y < z$» или «$w \leqslant y \leqslant z$»; например,

$$(y)_{w \leqslant y \leqslant z} R(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv (y)_{y < z' \dot{-} w} R(x_1, \ldots, x_n, y + w).$$

Предикаты $Q_1, \ldots, Q_m$ *исключают друг друга*, если для каждого множества значений аргументов не более чем один из них истинен (ср. § 3).

#F. *Пусть функция* φ *определяется следующим образом:*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } Q_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots & \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } Q_m(x_1, \ldots, x_n), \\ \varphi_{m+1}(x_1, \ldots, x_n) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $Q_1, \ldots, Q_m$ — *исключающие друг друга предикаты (или* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *принимает значение, которое дает первый применимый пункт). Тогда* φ *примитивно-рекурсивна относительно* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+1}, Q_1, \ldots, Q_m$. (Определение путем разбора случаев.)

Доказательство для взаимно исключающих $Q_1, \ldots, Q_m$. Первый метод. Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_m$ — представляющие функции для $Q_1, \ldots, Q_m$. Тогда (опускаем «$(x_1, \ldots, x_n)$» для экономии места)

$$\varphi = \overline{\operatorname{sg}}(\psi_1) \cdot \varphi_1 + \ldots + \overline{\operatorname{sg}}(\psi_m) \cdot \varphi_m + \psi_1 \cdot \ldots \cdot \psi_m \cdot \varphi_{m+1}.$$

Второй метод.

$$\varphi = \mu y_{y \leqslant \varphi_1 + \ldots + \varphi_{m+1}} (Q_1 \,\&\, y = \varphi_1) \vee \ldots \vee (Q_m \,\&\, y = \varphi_m) \vee$$
$$\vee (\overline{Q}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{Q}_m \,\&\, y = \varphi_{m+1}).$$

Представления с помощью простых множителей. Пусть $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ — простые числа в порядке возрастания (т. е. $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5, \ldots$). Основная теорема арифметики (Гаусс, 1801) утверждает, что любое данное целое положительное число a может быть разложено на простые множители, которые определены однозначно с точностью до их порядка[1]. Таким образом, мы имеем единственное представление числа a в виде

(1) $$a = p_0^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_i^{a_i} \ldots \quad (a \neq 0),$$

где a_i есть число, показывающее, сколько раз p_i встречается в a в качестве множителя (0, если p_i не является множителем a). Мы можем рас-

[1] Доказательство этой теоремы, удобное для проведения в системе главы IV и для дальнейших применений в этой книге, изложено, например, у Хассе, Лекции по теории чисел, стр. 10—13. — *Прим. перев.*

сматривать произведение (1) как продолжающееся неограниченно, причем все показатели, за исключением конечного числа их, являются 0.

Добавим теперь к нашему списку еще несколько примитивно-рекурсивных функций и предикатов.

#16. $a \mid b \equiv a$ делит b. $a \mid b \equiv (Ec)_{c \leqslant b}[ac = b]$, или $\operatorname{sg}\operatorname{rm}(b, a) = 0$.

#17. $\Pr(a) \equiv a$ есть простое число. $\Pr(a) \equiv a > 1 \mathbin{\&} \overline{(Ec)}_{1<c<a}[c \mid a]$.

#18. $p_i = i + 1$-му простому числу. $\begin{cases} p_0 = 2, \\ p_{i'} = \mu x_{p_i < x \leqslant p_i! + 1} \Pr(x), \end{cases}$

где верхняя грань $p_i! + 1$ для x дается евклидовским доказательством того, что для любого p имеется простое число, большее p и не превосходящее $p! + 1$ (§ 40). Это сочетание применения #E с примитивной рекурсией законно, потому что оно просто объединяет введение $\chi(c) = \mu x_{c < x \leqslant c! + 1} \Pr(x)$ с последующей примитивной рекурсией

$$p_0 = 2, \quad p_{i'} = \chi(p_i).$$

#19. $(a)_i = \begin{cases} \text{показателю } a_i \text{ числа } p_i \text{ в (1),} \\ \text{если } a \neq 0; \ 0, \text{ если } a = 0. \end{cases}$ $(a)_i = \mu x_{x<a}[p_i^x \mid a \mathbin{\&} \overline{p_i^{x'} \mid a}]$.

Мы будем писать $(a)_{i,j}$ вместо $((a)_i)_j$, $(a)_{i,j,k}$ вместо $(((a)_i)_j)_k$ и т. д.

#20. $\operatorname{lh}(a) = \begin{cases} \text{числу отличных} \\ \text{от нуля показа-} \\ \text{телей в (1), если} \\ a \neq 0; \\ 0, \text{ если } a = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} \operatorname{lh}(0, a) = 0, \\ \operatorname{lh}(i', a) = \begin{cases} \operatorname{lh}(i, a) + 1, \text{ если } p_i \mid a, \\ \operatorname{lh}(i, a) \text{ в противном случае.} \end{cases} \\ \operatorname{lh}(a) = \operatorname{lh}(a, a). \end{cases}$

Конечные последовательности $a_0, \ldots, a_s$ целых положительных чисел мы будем представлять числами $a = p_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$; тогда $\operatorname{lh}(a)$ есть длина $s + 1$ последовательности, представленной числом a.

#21. $a * b = a \cdot \prod\limits_{i < \operatorname{lh}(b)} p_{\operatorname{lh}(a)+i}^{(b)_i}$.

Тогда если $a = p_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$ $(a_0, \ldots, a_s > 0)$ и $b = p_0^{b_0} \cdot \ldots \cdot p_t^{b_t}$ $(b_0, \ldots, b_t > 0)$, то $a * b = p_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s} \cdot p_{s+1}^{b_0} \cdot \ldots \cdot p_{s+t+1}^{b_t}$. Для любого a и любого такого b имеем $a * 1 = a$, $1 * b = b$, $1 * 1 = 1$.

§ 46. ВОЗВРАТНАЯ РЕКУРСИЯ

При доказательстве какой-либо теоремы $T(y)$ по индукции может оказаться, что случай $T(y')$ этой теоремы зависит не только от непосредственно предшествующего случая $T(y)$, но и от одного или нескольких предыдущих случаев. Этот вид доказательства по индукции мы назвали „возвратной индукцией“ (или „индукцией пробега“). Ее можно свести к простой индукции, если доказать сначала путем простой индукции лемму $(s)_{s \leqslant y} T(s)$, после чего теорема получается подстановкой $s = y$ (ср.* 162a § 40).

Аналогичная ситуация возникает при определении по индукции. Пусть значение функции $\varphi(0)$ задано, а значение $\varphi(y')$ выражается в терминах y и одного или нескольких предыдущих значений $\varphi(s)$ для $s \leqslant y$. Такая рекурсия называется *возвратной рекурсией*, или *рекурсией пробега*. Мы увидим, что она аналогичным методом может быть сведена к примитивной рекурсии (ср. Петер [1934]).

Оба случая определения φ можно объединить (ср. *162b), считая, что $\varphi(y)$ выражается через y и $\varphi(s)$ при $s < y$. Если $y = 0$, это означает, что $\varphi(0)$ задано, потому что множество значений $\varphi(s)$ при $s < y$ в этом случае пусто.

Более общо, пусть определяемая функция будет $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_2, \ldots, x_n$ — параметры (фиксированные на время рекурсии). Введем вспомогательную функцию

(1) $$\tilde{\varphi}(y; x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<y} p_i^{\varphi(i, x_2, \ldots, x_n)},$$

которую мы будем называть *производящей функцией* (*по* y) для данной функции $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n)$.

Если дана последовательность значений $\varphi(s, x_2, \ldots, x_n)$ нашей первоначальной функции для $s < y$, то с помощью (1) мы получим значение $\tilde{\varphi}(y; x_2, \ldots, x_n)$ производящей функции. Обратно, если дано $\tilde{\varphi}(y; x_2, \ldots, x_n)$, мы можем получить все значения $\varphi(s, x_2, \ldots, x_n)$ при $s < y$ с помощью #19, а именно:

(2) $$\varphi(s, x_2, \ldots, x_n) = (\tilde{\varphi}(y; x_2, \ldots, x_n))_s \quad \text{при} \quad s < y.$$

Итак, обладание значением $\tilde{\varphi}(y; x_2, \ldots, x_n)$ производящей функции в некотором смысле эквивалентно обладанию последовательностью значений $\varphi(0, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \varphi(y-1, x_2, \ldots, x_n)$ первоначальной функции.

#G. *Если* φ *удовлетворяет уравнению*

(3) $$\varphi(y, x_2, \ldots, x_n) = \chi(y, \tilde{\varphi}(y; x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n),$$

то φ *примитивно-рекурсивна относительно* χ.

Доказательство. $\tilde{\varphi}$ может быть задана такой примитивной рекурсией:

(4) $$\begin{cases} \tilde{\varphi}(0; x_2, \ldots, x_n) = 1, \\ \tilde{\varphi}(y'; x_2, \ldots, x_n) = \tilde{\varphi}(y; x_2, \ldots, x_n) \cdot p_y^{\chi(y, \tilde{\varphi}(y; x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)}. \end{cases}$$

Функция φ получается затем из $\tilde{\varphi}$ путем явного определения

(5) $$\varphi(y, x_2, \ldots, x_n) = (\tilde{\varphi}(y'; x_2, \ldots, x_n))_y.$$

Пример 1. Пусть

(a) $$\varphi(y) = \prod_{s<y} (y + \varphi(s)).$$

Последовательности значений этой функции и ее производящей функции таковы:

y	0	1	2	3	4	...
$\varphi(y)$		2	12	300	145 920	...
$\tilde{\varphi}(y)$	1	2^1	$2^1 \cdot 3^2$	$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^{12}$	$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^{12} \cdot 7^{300}$	...

Заметим, что последний показатель в $\tilde{\varphi}(y')$ всегда является значением $\varphi(y)$; например, $(\tilde{\varphi}(3))_2 = 12 = \varphi(2)$. Для применения #G заметим, что, в силу (2),

(b) $$\varphi(y) = \prod_{s<y} (y + (\tilde{\varphi}(y))_s).$$

Это уравнение имеет вид (3), и, в силу ##1, 19, B и G, функция φ примитивно-рекурсивна.

Утверждение #G осуществляет сведение возвратной рекурсии к примитивной для случаев, когда возвратная рекурсия задана в форме зависимости $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n)$ от чисел $\tilde{\varphi}(y; x_2, \ldots, x_n)$ и $y, x_2, \ldots, x_n$, как в (3).

Покажем, далее, как происходит сведе́ние возвратной рекурсии, заданной не в форме (3).

Пример 2. Рекурсия по двойному базису.

(a)
$$\begin{cases} \varphi(0) = q_0, \\ \varphi(1) = q_1, \\ \varphi(y'') = \chi(y, \varphi(y), \varphi(y')). \end{cases}$$

Сначала мы перепишем это в более компактной форме (пользуясь ## 6, F)

(b)
$$\varphi(y) = \begin{cases} q_0, \text{ если } y = 0, \\ q_1, \text{ если } y = 1, \\ \chi(y \dot{-} 2, \varphi(y \dot{-} 2), \varphi(y \dot{-} 1)) \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Затем выразим $\varphi(y \dot{-} 2)$, $\varphi(y \dot{-} 1)$ в виде $(\tilde{\varphi}(y))_{y \dot{-} 2}$, $(\tilde{\varphi}(y))_{y \dot{-} 1}$ соответственно.

Этот метод применим также к определениям предикатов посредством возвратной рекурсии.

Пример 3. Рассмотрим эквивалентность

(a)
$$T(y) \equiv y = 23 \vee V(y) \vee [y = 2^{17} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \,\&\, T((y)_1) \,\&\, T((y)_2)] \vee$$
$$\vee [y = 2^{19} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \,\&\, T((y)_1) \,\&\, T((y)_2)] \vee [y = 2^{21} \cdot 3^{(y)_1} \,\&\, T((y)_1)],$$

где V — данный предикат. Из нее $T(y)$ определяется возвратной рекурсией по y. Действительно, если $y = 0$, то все дизъюнктивные члены справа ложны, за исключением, может быть, второго; поэтому $T(0) \equiv V(0)$. Если $y > 0$, то $(y)_1 < y$ и $(y)_2 < y$.

Итак, $T(y)$ выражается через y, V и $T(s)$ при $s < y$. Пусть $\tau(y)$ — представляющая функция для $T(y)$; выразим $T((y)_1)$, $T((y)_2)$ в правой части (a) в виде $(\tilde{\tau}(y))_{(y)_1} = 0$, $(\tilde{\tau}(y))_{(y)_2} = 0$ соответственно. Тогда определение T приобретает вид

(b)
$$T(y) \equiv R(y, \tilde{\tau}(y)),$$

где, в силу ## 2, 3, 14, 19, A, C и D, предикат $R(y, z)$ примитивно-рекурсивен относительно V. Это означает попросту, что представляющая функция ρ для R примитивно-рекурсивна относительно представляющей функции υ для V; итак, мы имеем уравнение вида

(c)
$$\tau(y) = \rho(y, \tilde{\tau}(y)),$$

где ρ примитивно-рекурсивна относительно υ. В силу #G, τ примитивно-рекурсивна относительно ρ, а потому и относительно υ; иначе говоря, T примитивно-рекурсивен относительно V (и примитивно-рекурсивен, если таковым является V).

В приведенных примерах нам каждый раз удавалось, пользуясь (2), свести данную возвратную рекурсию к виду (3). Более тщательное рассмотрение этого вопроса в § 47 покажет нам причину этого и позволит сформулировать #G в такой форме, которая уже содержит указанное сведе́ние.

Пример 4. Одновременная рекурсия. Значения функций $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ выражены через y и значения $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ при $s < y$. Сводим к #G с помощью вспомогательной функции:

$$\varphi(y) = 2^{\varphi_1(y)} \cdot 3^{\varphi_2(y)}.$$

*§ 47. РАВНОМЕРНОСТЬ

В ##A—G наше внимание было занято в основном не произвольными конкретными функциями φ и Ψ, а способами, посредством которых функция φ определялась через произвольные функции Ψ (мы на время оставляем в стороне предикаты и рассматриваем только функции). При доказательстве того, что функция φ от n переменных примитивно-рекурсивна относительно Ψ для любого из таких способов, наши применения схем (I) — (V) не зависели от того, какими были функции Ψ, коль скоро фиксированы их число l и соответствующие числа $m_1, \ldots, m_l$ их аргументов. Другими словами, мы давали *примитивно-рекурсивную схему построения для* φ *из* Ψ с фиксированным *анализом*. Определение „анализа" аналогично данному в § 20. Для применения схемы (II) анализ должен содержать указание n и q; для (III) — n и i; и т. д. (Аналогично, мы часто получали выводимые правила для формальной системы, выписывая „схему вывода" с метаматематическими буквами вместо произвольных формул, переменных и т. д.) В таких случаях мы говорим, что φ *равномерно примитивно-рекурсивна относительно* Ψ [1]).

Это понятие равномерности можно уточнить следующим образом. Имея конкретный способ определения арифметической функции φ через арифметические функции Ψ, мы можем писать $\varphi = \mathsf{F}(\Psi)$ для выражения того факта, что задание функции φ определяется заданием функций Ψ. При этом F — фиксированная математическая функция более высокого типа, именно, функция от l арифметических функций Ψ, каждая с $m_1, \ldots, m_l$ переменными соответственно, значениями которой являются функции от n переменных. Такую функцию F мы будем называть *функцией-схемой*, или *схемой*, или *оператором*. Можно также писать $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{F}(\Psi; x_1, \ldots, x_n)$ (с тем же самым F), чтобы выразить тот факт, что (посредством схемы F) задание натурального числа $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определяется заданием функций Ψ и чисел $x_1, \ldots, x_n$.

При любых фиксированных n и m схема (IV) служит оператором, который мы уже обозначили через S^n_m. При фиксированном n (и еще при фиксированном q, если $n=1$) схема (V) образует оператор R^1_q или R^n. Остальные три схемы (I) — (III) определяют индивидуальные арифметические функции S, C^n_q, U^n_i (или служат операторами, у которых $l=0$).

Мы теперь будем говорить, что оператор (или схема) $\varphi = \mathsf{F}(\Psi)$ *примитивно-рекурсивен*, или, что φ *равномерно примитивно-рекурсивна относи-*

---

[1]) Сделаем некоторые пояснения к понятию равномерности, ограничиваясь случаем, когда набор Ψ состоит из одной функции ψ. Если φ и ψ — конкретные функции, то смысл фразы «φ примитивно-рекурсивна относительно ψ» заключается согласно § 45 в том, что существует примитивно-рекурсивное построение φ из ψ. Если φ и ψ — переменные функции, т. е. буква φ означает произвольную функцию из некоторого класса A, а буква ψ — произвольную функцию из некоторого класса B и если каждой функции $\psi^* \in B$ поставлена каким-либо способом в соответствие функция $\varphi^* \in A$, то смысл фразы «φ примитивно-рекурсивна относительно ψ» заключается в том, что для каждого выбора $\psi^* \in B$ соответствующая функция φ^* примитивно-рекурсивна относительно ψ^*. При тех же условиях фраза «φ равномерно примитивно-рекурсивна относительно ψ» означает, что для каждого выбора $\psi^* \in B$ соответствующая функция φ^* примитивно-рекурсивна относительно ψ^*, причем анализ примитивно-рекурсивного построения φ^* из ψ^* — один и тот же для всех выборов $\psi^* \in B$ (отсюда уже вытекает, что все функции класса B зависят от одного и того же числа аргументов; то же справедливо и для класса A). Если класс B состоит всего лишь из одной функции, то примитивная рекурсивность совпадает с равномерной примитивной рекурсивностью, так что для конкретных функций φ и ψ фраза «φ равномерно примитивно-рекурсивна относительно ψ» не дает ничего нового по сравнению с фразой «φ примитивно-рекурсивна относительно ψ». (Читатель легко усмотрит аналогию между понятиями примитивной рекурсивности и равномерной примитивной рекурсивности, с одной стороны, и понятиями непрерывности и равномерной непрерывности, с другой.) Аналогичные замечания справедливы и для общего случая, когда Ψ содержит более одной функции. — *Прим. ред.*

тельно Ψ, если F явно определим через функционалы S^n_m, R^1_q, R^n и константы S, C^n_q, U^n_i.

Пример 1. В примере 1 § 44 φ равномерно примитивно-рекурсивна относительно ζ, η, θ. Для первой формы определения равномерности мы усматриваем это из того, что анализ примитивно-рекурсивной схемы построения ζ, η, θ, U^3_1, θ, U^3_3, ψ, C^3_2, φ (состоящий из пояснений, указанных справа от 1—9) является фиксированным. Для второй формы мы усматриваем это из того, что (b) выражает $\varphi = \mathsf{F}(\zeta, \eta, \theta)$ явно через S^3_3, S^3_2, S^3_1 и U^3_1, U^3_3, C^3_2.

Иногда способ определения функции φ через функции Ψ указан только при некотором ограничении на функции Ψ. Для установления равномерной примитивной рекурсивности мы тогда показываем, что имеется фиксированная последовательность применений схем (I)—(V), которая приводит от Ψ к той же самой функции φ, что и данный способ, для любых Ψ, к которым применим (или должен быть применим) данный способ. В действительности последовательность применений схем (I)—(V) приводит тогда к некоторой функции φ для любых Ψ, потому что каждая из схем (I)—(V) обладает этим свойством. Итак, данный способ образует оператор $\varphi = \mathsf{F}(\Psi)$, определенный только для ограниченной области изменения Ψ. Последовательность применений схем (I)—(V) образует вполне определенный[1]) оператор $\varphi = \mathsf{F}_1(\Psi)$, являющийся примитивно-рекурсивным и такой, что $\mathsf{F}_1(\Psi) = \mathsf{F}(\Psi)$ на области определения F.

Пример 2. Пусть функция φ определяется так:

$$\text{(a)} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & \text{если } \psi_1(x) = 0, \\ \varphi_2(x), & \text{если } \psi_2(x) = 0, \\ \varphi_3(x) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2 — данные функции такие, что для каждого x значения $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ равны 0 или 1, но не оба 0. Тогда можно написать

$$\text{(b)} \qquad \varphi(x) = \overline{\mathrm{sg}}(\psi_1(x)) \cdot \varphi_1(x) + \overline{\mathrm{sg}}(\psi_2(x)) \cdot \varphi_2(x) + \psi_1(x) \cdot \psi_2(x) \cdot \varphi_3(x)$$

и заключить, что φ — равномерно примитивно-рекурсивна относительно φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2 (ср. первое доказательство #F § 45). В (a) φ было определено только для ψ_1, ψ_2, удовлетворяющих установленному для них ограничению; но (b) без какого-либо ограничения определяет φ, которое совпадает с прежним φ, если ограничение выполнено.

Для операторов, содержащих предикаты, мы говорим, что функция φ или предикат P *равномерно примитивно-рекурсивны относительно* предикатов и функций Ψ, если имеет место соответствующее утверждение с заменой предикатов, содержащихся среди P, Ψ, на их представляющие функции. Только что описанная интерпретация применима, если функции, введенные как представляющие для предикатов из Ψ, рассматривать затем в применениях схем (I)—(V) как функциональные переменные без ограничений.

Пользуясь описанной интерпретацией, мы можем говорить, что функция φ (или предикат P) равномерно примитивно-рекурсивна относительно Ψ, даже если некоторые из Ψ — являются конкретными функциями (или предикатами). Тогда, если все эти конкретные функции или предикаты из Ψ примитивно-рекурсивны, то φ (или P) равномерно примитивно-рекурсивна относительно остальных функций и предикатов из Ψ.

[1]) Т. е. определенный для любых Ψ. — *Прим. перев.*

Если φ равномерно примитивно-рекурсивна относительно θ, Ψ как переменных функций и в качестве θ выбрана θ^*, то получающаяся функция φ^* равномерно примитивно-рекурсивна относительно θ^*, Ψ (и значит, если θ^* примитивно-рекурсивна, относительно Ψ). Этот принцип действует, когда θ^* — некоторая конкретная функция или функциональная переменная, а также, если она зависит как от параметров от дополнительных числовых переменных $c_1, \ldots, c_p$. Он аккуратно сформулирован в лемме I. Чтобы указать ясно, сколькими и какими независимыми переменными обладает каждая функция, мы будем писать $\theta = \lambda s_1 \ldots s_q\ \theta(s_1, \ldots, s_q)$ (функция от q переменных), $\theta^* = \lambda s_1 \ldots s_q c_1 \ldots c_p\ \theta^*(s_1, \ldots, s_q, c_1, \ldots, c_p)$ (функция от $q+p$ переменных) и $\lambda s_1 \ldots s_q\ \theta^*(s_1, \ldots, s_q, c_1, \ldots, c_p)$ для функции от q переменных $s_1, \ldots, s_q$, которая получается из θ^*, когда $c_1, \ldots, c_p$ — фиксированные числа.

Лемма I. *Пусть оператор* $\varphi = \mathsf{F}(\theta, \Psi)$ *задан в виде*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{F}(\lambda s_1 \ldots s_q\ \theta(s_1, \ldots, s_q),\ \Psi;\ x_1, \ldots, x_n).$$

Определим оператор $\varphi^* = \mathsf{G}(\theta^*, \Psi)$ *посредством соотношений*

$$\begin{aligned}\varphi^*(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_p) &= \\ = \mathsf{G}(\lambda s_1 \ldots s_q c_1 \ldots c_p\ \theta^*(s_1, \ldots s_q, c_1, \ldots, c_p),\ \Psi;\ x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_p) &= \\ = \mathsf{F}(\lambda s_1 \ldots s_q\ \theta^*(s_1, \ldots, s_q, c_1, \ldots, c_p),\ \Psi;\ x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Если F *примитивно-рекурсивен, то* G *также примитивно-рекурсивен.*

Доказательство. Суть доказательства состоит в том, что явные определения и примитивные рекурсии остаются таковыми и после введения параметров.

Для более подробного доказательства мы воспользуемся возвратной индукцией по длине k примитивно-рекурсивной схемы построения $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ для φ из θ, Ψ. Возможны семь случаев, в зависимости от того, совпадает ли $\varphi (= \varphi_k)$ с θ или с одной из Ψ (например, ψ_i), или является первоначальной функцией по схеме (I), (II) или (III), или непосредственно зависит от предыдущих функций по схеме (IV) или (V).

Случай 6: $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$, где $\psi, \chi_1, \ldots, \chi_m$ предшествует $\varphi (= \varphi_k)$ в $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.
Тогда

$$\begin{aligned}\varphi^*(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_p) &= \\ = \psi^*(\chi_1^*(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_p), \ldots, \chi_m^*(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_p), c_1, \ldots, c_p).\end{aligned}$$

По индуктивному предположению, $\psi^*, \chi_1^*, \ldots, \chi_m^*$ равномерно примитивно-рекурсивны относительно θ^*, Ψ. Согласно # A, φ^* равномерно примитивно-рекурсивна относительно $\psi^*, \chi_1^*, \ldots, \chi_m^*$, а потому и относительно θ^*, Ψ.

Пример 3. Не каждая арифметическая функция примитивно-рекурсивна (Почему? Ср. §§ 1, 2: Каждое ли действительное число является алгебраическим?) Пусть $\xi(c)$ — конкретная не примитивно-рекурсивная функция. Пусть φ определена через произвольную функцию θ так:

$$\varphi(x) = \xi(\theta(0)).$$

Тогда для каждой данной функции θ получающаяся функция φ является функцией-константой, и потому она примитивно-рекурсивна, в силу применения схемы (II) с $n = 1$, $q = \xi(\theta(0))$. И подавно, для каждой функции θ функция φ примитивно-рекурсивна относительно θ, причем C_q^1, где $q = \xi(\theta(0))$ является примитивно-рекурсивным построением φ из θ. Но ввиду того, что анализ этого построения зависит от θ, нельзя утверждать, что φ равномерно примитивно-рекурсивна относительно θ. Действительно, если бы это было так, то, по лемме I, выбирая в качестве $\theta^*(s, c)$ примитивно-рекурсивную функцию $U_2^2(s, c)$, мы должны были бы получить примитивно-рекурсивную функцию $\varphi^*(x, c)$, а потому и $\varphi^*(0, c)$ была бы примитивно-рекурсивной. Но $\varphi^*(0, c) = \xi(U_2^2(0, c)) = \xi(c)$. Мы видим также, что лемма I теряет силу, если условие примитивной рекурсивности F, т. е. условие, что φ равномерно примитивно-рекурсивна относительно θ, Ψ, ослабить до следующего условия: φ примитивно-рекурсивна относительно θ, Ψ для каждых θ, Ψ.

В нашем примере, конечно, φ равномерно примитивно-рекурсивна относительно ξ, θ.

Принимая во внимание, что прежние доказательства фактически дают также равномерность, получаем

$\#\#$A — G (вторые формы). *В первоначальных формах этих утверждений можно заменить «примитивную рекурсивность» на «равномерную примитивную рекурсивность».*

Возвратная рекурсия встречается обычно в следующей форме: Общее значение $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n)$ задается в терминах $y, x_2, \ldots, x_n$, других функций и предикатов Ψ и $\varphi(s, x_2, \ldots, x_n)$ как функции от s при данных $x_2, \ldots, x_n$. Выражение, посредством которого оно задается, является результатом подстановки $\varphi(s, x_2, \ldots, x_n)$ вместо функциональной переменной $\theta(s)$ некоторого примитивно-рекурсивного оператора. Этот оператор обладает тем свойством, что его значение не меняется, если значения $\theta(s)$ изменить только для $s \geqslant y$. Другими словами, имеется примитивно-рекурсивный оператор $\mathsf{F}(\lambda s\, \theta(s),\ \Psi;\ y, x_2, \ldots, x_n)$ такой, что

$$\varphi(y, x_2, \ldots, x_n) = \mathsf{F}(\lambda s\, \varphi(s, x_2, \ldots, x_n),\ \Psi;\ y, x_2, \ldots, x_n), \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\mathsf{F}(\lambda s\, \theta_1(s),\ \Psi;\ y, x_2, \ldots, x_n) = \mathsf{F}(\lambda s\, \theta_2(s),\ \Psi;\ y, x_2, \ldots, x_n),\\ \text{коль скоро } \theta_1(s) = \theta_2(s) \text{ для всех } s < y.\end{gathered} \tag{7}$$

При этих обстоятельствах мы говорим, что $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n)$ *равномерно примитивно-рекурсивна относительно* $\varphi(s, x_2, \ldots, x_n)$ *при* $s < y$ *и* Ψ.

Аналогичная терминология используется для предикатов (следует писать «P», «H», «$\equiv$» вместо «φ», «θ», «$=$»).

В случае, если определение φ через Ψ рассматривается только для ограниченной области изменения Ψ, соблюдение (7) так же, как и (6), требуется только для этой области.

Пример 4. Пусть $\varphi(y, x)$ определена посредством

$$\varphi(y, x) = y \cdot \rho(\varphi(\sigma(y), x)) + \mu z_{z<y}[\varphi(z, x) \mid y], \tag{a}$$

где ρ, σ — данные функции такие, что $\sigma(y) < y$ при $y > 0$. Чтобы убедиться в том, что $\varphi(y, x)$ равномерно примитивно-рекурсивна относительно $\varphi(s, x)$ при $s < y$ и ρ, σ, вставим в правую часть (a) произвольную функцию $\lambda s\, \theta(s)$ вместо $\lambda s\, \varphi(s, x)$ и полученную функцию обозначим для удобства через $\chi_1(y, x)$:

$$\chi_1(y, x) = y \cdot \rho(\theta(\sigma(y))) + \mu z_{z<y}[\theta(z) \mid y]. \tag{b}$$

В силу $\#\#$ A, C, E, 16 (мы пользуемся вторыми формами A, C и E), $\chi_1(y, x)$ равномерно примитивно-рекурсивна относительно θ, ρ, σ, и при наложенном на σ ограничении изменение значений $\theta(s)$ только для $s \geqslant y$ не влияет на значение $\chi_1(y, x)$.

Пример 5. Из равенств (a) примера 1 § 46 [равенств (b) примера 2 § 46] видно непосредственно, что $\varphi(y)$ равномерно примитивно-рекурсивна относительно $\varphi(s)$ при $s < y$ [относительно $\varphi(s)$ при $s < y$ и χ]. Чтобы не писать «θ» вместо «φ», мы должны просто рассмотреть, каким образом в правую часть входит $\varphi(s)$, рассматриваемая для этой цели как произвольная функция. Аналогично из эквивалентности (a) примера 3 § 46 видно, что $T(y)$ равномерно примитивно-рекурсивен относительно V и $T(s)$ при $s < y$.

#G (третья форма). *Если $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n)$ равномерно примитивно-рекурсивна относительно Ψ и $\varphi(s, x_2, \ldots, x_n)$ при $s < y$, то φ равномерно примитивно-рекурсивна относительно Ψ. Аналогичное утверждение справедливо для предиката (если читать «P» вместо «φ»).*

Доказательство для функции φ. В силу (6), (7) и (2),

$$\text{(8)} \qquad \varphi(y, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{F}(\lambda s\, (\tilde{\varphi}(y; x_2, \ldots, x_n))_s,\ \Psi;\ y,\ x_2, \ldots, x_n) = \\ = \chi(y, \tilde{\varphi}(y; x_2, \ldots, x_n),\ x_2, \ldots x_n),$$

где

$$\text{(9)} \qquad \chi(y, c, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{F}(\lambda s\, (c)_s,\ \Psi;\ y, x_2, \ldots, x_n).$$

По лемме I, χ равномерно примитивно-рекурсивна относительно $\lambda sc\,(c)_s$, Ψ, а значит, в силу #19, относительно Ψ. Теперь применяем вторую форму #G.

Тот же результат для предиката P получается теперь путем перехода от P к его представляющей функции.

Замечание 1. См. замечание 1 в конце § 44. *Если φ, Ψ — функции от $n, m_1, \ldots, m_l > 0$ переменных, то φ равномерно примитивно-рекурсивна относительно Ψ при базисе* B *тогда и только тогда, когда это имеет место при базисе* A. Действительно, любая примитивно-рекурсивная схема построения φ из Ψ при базисе A может быть преобразована в такую же схему при базисе B, если добавить для каждого применения схемы (II) (или схемы (Va)) описание функции C_q^n (функции C_q^0) при базисе B. Обратно, если дана примитивно-рекурсивная схема построения $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ функции φ из Ψ при базисе B, то схему при базисе A можно получить следующим образом: пусть, например, $n = l = m_1 = 1$, т. е. дано построение $\varphi(x)$ из $\psi(y)$. Введем новый параметр c в каждую из функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Так же, как и при доказательстве леммы 1, мы теперь можем получить примитивно-рекурсивную схему построения $\varphi(x, c)$ из $\psi(y, c)$ при базисе A. К ней мы добавляем $\psi(y, c) = \psi(U_1^2(y, c))$ в начале и $\varphi(x) = \varphi(U_1^1(x), C_0^1(x))$ в конце. Например, если $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi(y') = \chi(y, \varphi(y))$, то φ равномерно примитивно-рекурсивна относительно ψ, χ при базисе B (используется последовательно (IIв), (IV) с $n = 0$, (Vb) с $n = 1$). Следовательно, то же самое верно и при базисе A.

§ 48. β-ФУНКЦИЯ ГЁДЕЛЯ

Вторая задача этой главы—показать, что каждый примитивно-рекурсивный предикат нумерически выразим в формальной системе гл. IV, несмотря на то, что эта система содержит функциональные символы только для трех функций, $'$, $+$, $\cdot$. Это мы докажем в следующем параграфе, следуя методу Гёделя [1931, 1934].

Это доказательство несущественно для нашей программы формализации арифметики. Если бы оно не удалось, мы могли бы принять в качестве аксиом нашей системы рекурсивные уравнения для других функций, помимо $+$ и $\cdot$. В самом деле, такие уравнения для всех примитивно-рекурсивных функций можно было бы включить в счетно-бесконечную систему индивидуальных аксиом. Но представляет известный интерес то, что достаточно конечной системы, и тем более—что можно обойтись только двумя основными функциями $+$ и $\cdot$ традиционной арифметики, если брать их вместе с логическими константами и предикатом $=$.

Гёдель предложил называть предикат „арифметическим", если он может быть явно выражен в терминах постоянных и переменных натуральных чисел, функций $+$ и $\cdot$, равенства $=$, операций $\rightarrow$, $\&$, $\vee$, $\neg$ исчисления высказываний и кванторов (x) и (Ex), комбинируемых согласно обычным синтаксическим правилам. (Прилагательное „арифметический" используется здесь в узком смысле § 9.) В дальнейшем предикаты такого рода мы будем называть *арифметическими по Гёделю*[1]).

Читатель легко может сделать это определение более полным, придав ему вид индуктивного определения, построенного параллельно определению формулы формальной системы гл. IV. Предикаты, арифметические по Гёделю, это в точности те предикаты, которые могут быть выражены в этой системе, при обычной интерпретации символов, посредством называющих форм. (Сопоставляя это с формальным изложением в §§ 39 и 41, убеждаемся в том, что $a < b$ и $\text{rm}(c, d) = w$—предикаты, арифметические по Гёделю.)

Но, пользуясь содержательным символизмом, мы будем здесь придерживаться неформального изложения. Для применений к примитивно-рекурсивным предикатам мы будем требовать только конструктивного[2]) употребления кванторов.

В следующем параграфе нам понадобится метод арифметического рассмотрения конечных последовательностей $a_0, \ldots, a_n$ натуральных чисел; мы не сможем при этом пользоваться функциями a^b, p_i и $(a)_i$ из §§ 44, 45, с помощью которых мы в §§ 46, 47 рассматривали конечные последовательности примитивно-рекурсивно.

Мы знаем, что предикат $\text{rm}(c, d) = w$, где $\text{rm}(c, d)$ — остаток при делении c на d, является арифметическим по Гёделю.

Целые положительные числа $d_0, \ldots, d_n$ называются *попарно простыми*, если никакие два из них не имеют общего целого положительного делителя, кроме 1. Например, 3, 4, 5 — попарно просты.

Рассмотрим наборы из $n+1$ значений функции $\text{rm}(c, d)$ для фиксированных $n+1$ попарно простых чисел $d_0, \ldots, d_n$, когда c возрастает. Например (при $n=1$), если $d_0 = 3$, $d_1 = 4$, получим следующие наборы:

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 ...
$\text{rm}(c, 3)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1 ...
$\text{rm}(c, 4)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1 ...

Мы видим, что когда c изменяется от 0 до 11, пара остатков $\text{rm}(c, 3)$, $\text{rm}(c, 4)$ пробегает все возможные 12 упорядоченных пар чисел a_0, a_1 при $a_0 < 3$, $a_1 < 4$.

Чтобы установить это в общем виде, допустим, что $\text{rm}(c, d_0)$, $\text{rm}(c, d_1), \ldots, \text{rm}(c, d_n)$ принимают соответственно значения $a_0, a_1, \ldots, a_n$ при $c = j$ и еще при $c = j + k$ $(k > 0)$. Так как j и $j + k$ дают один и тот же остаток a_i при делении на d_i $(i = 0, \ldots, n)$, их разность k должна делиться

---

[1]) Эта фраза добавлена при переводе. Указанное в ней изменение авторской терминологии вызвано необходимостью отличать только что введенное понятие предиката, арифметического по Гёделю (arithmetical), от ранее определенного (в § 45) понятия просто-арифметического (number-theoretical) предиката.—*Прим. перев.*

[2]) Здесь термин «конструктивный» имеет тот же смысл, что и «интуиционистский».—*Прим. перев.*

на d_i; пусть $k = b_i d_i$. Итак,

$$k = b_0 d_0 = b_1 d_1 = \ldots = b_n d_n.$$

Здесь k содержит в качестве множителя каждое из $d_0, d_1, \ldots, d_n$. Так как, по условию, $d_0, \ldots, d_n$ попарно просты, то, по основной теореме арифметики (§ 45), k должно делиться на их произведение $d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$.

Поэтому упорядоченный набор чисел $\mathrm{rm}(c, d_0), \mathrm{rm}(c, d_1), \ldots, \mathrm{rm}(c, d_n)$ может снова совпасть с любой данной последовательностью чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, не раньше, чем c возрастет на $d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$. Но всего имеется как раз $d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$ различных последовательностей чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ таких, что $a_0 < d_0, a_1 < d_1, \ldots, a_n < d_n$. Поэтому каждая такая последовательность должна встретиться однажды для любых $d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$ последовательных значений c.

Следуя Гёделю [1934], мы воспользуемся полученным результатом для построения функции $\beta(c, d, i)$ со следующими двумя свойствами:

(1) *предикат* $\beta(c, d, i) = w$ *является арифметическим по Гёделю и*

(2) *для любой конечной последовательности натуральных чисел* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *можно найти пару натуральных чисел* c, d *таких, что* $\beta(c, d, i) = a_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Нам уже известно, что можно выбрать число c $(c < d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_n)$ так, что $\mathrm{rm}(c, d_i) = a_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n$, коль скоро (a) $d_0, d_1, \ldots, d_n$ попарно просты, и (b) $a_0 < d_0, a_1 < d_1, \ldots, a_n < d_n$.

Наша проблема будет решена, если мы сумеем получить числа $d_0, d_1, \ldots, d_n$ в качестве значений некоторой функции $\delta(d, i)$ при $i = 0, 1, \ldots, n$ и надлежащем d такие, что

(i) $$\beta(c, d, i) = \mathrm{rm}(c, \delta(d, i))$$

удовлетворяет также условию (1).

Но (1) будет удовлетворено, если мы положим

(ii) $$\delta(d, i) = 1 + (i + 1)\, d.$$

Действительно, $\mathrm{rm}(c, d) = w$ — арифметический по Гёделю предикат, а функция $\delta(d, i)$, которую мы подставляем вместо d для получения $\beta(c, d, i) = w$, определена явно через 1, + и $\cdot$.

Для данной последовательности чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, пусть s будет наибольшим числом из $n, a_0, a_1, \ldots, a_n$; положим $d = s!$.

Тогда (a) числа $d_i = \delta(d, i)$ при $i = 0, 1, \ldots, n$ попарно просты. Действительно, если два из них, $1 + (j + 1)\, s!$ и $1 + (j + k + 1)\, s!$, имели бы общий делитель, отличный от 1, то они имели бы простой общий делитель p и этот делитель p делил бы их разность, т. е. $k \cdot s!$. Но p не может делить $s!$, потому что тогда он делил бы $(j + 1)\, s!$, что невозможно, так как он делит $1 + (j + 1)\, s!$. Далее, p не может делить также k, потому что $k \leqslant n \leqslant s$, а каждое число, не превосходящее s, делит $s!$. Следовательно, p не может делить $k \cdot s!$; таким образом, (a) доказано от противного.

Сверх того, (b) для каждого i $(i = 0, 1, \ldots, n)$,

$$a_i \leqslant s \leqslant s! < 1 + (i + 1)\, s! = \delta(d, i) = d_i.$$

Дж. Робинсон [1949*] показала, что при определении предикатов, арифметических по Гёделю, вместо двух функций + и $\cdot$ можно пользоваться предикатом $\mid$ (#16) и функцией $'$; а Чёрч и Куайн [1952] показали, что вместо этого можно пользоваться надлежаще выбранным симметричным двуместным предикатом.

§ 49. ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ И АРИФМЕТИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

Теорема I. *Если* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — *примитивно-рекурсивная функция, то предикат* $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w$ *является арифметическим по Гёделю* (Гёдель [1931]).

Доказательство — возвратной индукцией по длине k данного примитивно-рекурсивного описания $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ функции φ (см. § 43). Случаи (I) — (V) соответствуют тому, по какой из схем (I) — (V) φ_k, т. е. φ, входит в это описание. (Доказательство, имеющее аналогичную структуру рассмотрения отдельных случаев, мы имели для теоремы 1 § 21.)

Случай (I): $\varphi(x) = x'$. Тогда $\varphi(x) = w \equiv w = x + 1$, а $w = x + 1$ есть арифметический по Гёделю предикат.

Случай (II): $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = q$. Тогда $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w \equiv w = q$.

Случай (IV): $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$, где, по индуктивному предположению, $\psi(y_1, \ldots, y_m) = w$, $\chi_1(x_1, \ldots, x_n) = y_1, \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n) = y_m$ — предикаты, арифметические по Гёделю. Тогда $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w \equiv (Ey_1) \ldots (Ey_m) [\chi_1(x_1, \ldots, x_n) = y_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \chi_m(x_1, \ldots, x_n) = y_m \,\&\, \psi(y_1, \ldots, y_m) = w]$.

Случай (Vb): $\varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi(y', x_2, \ldots, x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$, где $\psi(x_2, \ldots, x_n) = w$ и $\chi(y, z, x_2, \ldots, x_n) = w$ — арифметические по Гёделю предикаты. Пусть числа $y, x_2, \ldots, x_n, w$ таковы, что $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n) = w$ истинно. Тогда имеется конечная последовательность чисел

$$a_0, a_1, \ldots, a_y$$

(значений $\varphi(i, x_2, \ldots, x_n)$ для $i = 0, 1, \ldots, y$) таких, что

$$\text{(A)} \quad \begin{aligned} &a_0 = \psi(x_2, \ldots, x_n), \\ &a_1 = \chi(0, a_0, x_2, \ldots, x_n), \\ &a_2 = \chi(1, a_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_y = \chi(y-1, a_{y-1}, x_2, \ldots, x_n), \\ &w = a_y. \end{aligned}$$

Согласно § 48, имеются числа c, d такие, что $\beta(c, d, i) = a_i$ $(i = 0, 1, \ldots, y)$, и утверждения (A) могут быть выражены, если употреблять $\beta(c, d, i)$ вместо a_i, в виде

$$\text{(B)} \quad \begin{aligned} &(Ec)(Ed)\{\beta(c, d, 0) = \psi(x_2, \ldots, x_n) \,\&\, \\ &\& (i)[i < y \to \beta(c, d, i+1) = \chi(i, \beta(c, d, i), x_2, \ldots, x_n)] \,\&\, w = \\ &= \beta(c, d, y)\}. \end{aligned}$$

Обратно, если (B) истинно, то для любых c и d таких, что истинно утверждение в фигурных скобках в (B), числа $\beta(c, d, i)$ при $i = 0, 1, \ldots, y$ образуют последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_y$, удовлетворяющую (A), а из (A) следует, что $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n) = w$. Итак, $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n) = w$ эквивалентно (B). Но (B) является арифметическим по Гёделю предикатом от $y, x_2, \ldots, x_n, w$, что становится ясно, если переписать (B) в виде

$$\text{(C)} \quad \begin{aligned} &(Ec)(Ed)\{(Eu)[\beta(c, d, 0) = u \,\&\, \psi(x_2, \ldots, x_n) = u] \,\&\, (i)[i < y \to \\ &\to (Eu)(Ev)[\beta(c, d, i+1) = u \,\&\, \beta(c, d, i) = v \,\&\, \chi(i, v, x_2, \ldots, x_n) = \\ &= u]] \,\&\, \beta(c, d, y) = w\} \end{aligned}$$

и принять во внимание индуктивное предположение и арифметический по Гёделю характер $\beta(c, d, i) = w$ и $i < y$.

Использованный нами анализ примитивной рекурсии в терминах конечных последовательностей натуральных чисел является применением к арифметике дедекиндовского анализа примитивной рекурсии [1888].

Следствие. *Каждый примитивно-рекурсивный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ является арифметическим по Гёделю.*

В самом деле, $P(x_1, \ldots, x_n) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где φ — представляющая функция P (§ 45). Обратно, теорема вытекает из ее следствия в силу ## 14, C. Но для доказательства путем индукции по длине описания $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ удобную форму имеет именно теорема, а не ее следствие.

Путем перевода из содержательного арифметического символизма в формальный мы получим формулу $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$, которая при интерпретации формальной системы выражает $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w$. Пользуясь этим, мы сейчас докажем следующую теорему.

Теорема 27. *Каждая примитивно-рекурсивная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ нумерически представима* (§ 41) *в формальной системе гл.* IV; *иначе говоря имеется формула* $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$, *не содержащая свободных переменных, кроме отличных друг от друга* $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}$, *и такая, что для каждой n-ки натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$*

(v) *из $\varphi(x_1, \ldots x_n) = w$ следует* $\vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{w})$ *и*

(vi) $\vdash \exists! \mathrm{w}\, \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \mathrm{w})$.

Доказательство. Построение $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ и доказательство теоремы проводятся посредством возвратной индукции по k, связанной с рассмотрением тех же случаев (I) — (V), что и в доказательстве теоремы I.

Случай (Vb). По индуктивному предположению, имеются формулы $\mathrm{Q}(\mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ и $\mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$, которые нумерически представляют функции $\psi(x_2, \ldots, x_n)$ и $\chi(y, z, x_2, \ldots, x_n)$, т. е. обладают для этих функций свойствами, аналогичными (v) и (vi) для $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Согласно *(180) § 41, гёделевская β-функция $\beta(c, d, i)$ $[= \mathrm{rm}(c, 1 + (i+1)d = \mathrm{rm}(c, (i' \cdot d)')]$ нумерически представляется некоторой формулой $\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{w})$ со свойством *180a.

Формула

$$\exists \mathrm{c} \exists \mathrm{d} \{\exists \mathrm{u} [\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, 0, \mathrm{u}) \& \mathrm{Q}(\mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{u})] \& \forall \mathrm{i} [\mathrm{i} < \mathrm{y} \supset \exists \mathrm{u} \exists \mathrm{v} [\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}', \mathrm{u}) \\ \& \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{v}) \& \mathrm{R}(\mathrm{i}, \mathrm{v}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{u})]] \& \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{y}, \mathrm{w})\}$$

и будет формулой $\mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$, которая представляет $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n)$. Нам надо показать, что она обладает свойствами (v) и (vi).

Чтобы установить (v), возьмем такие числа $y, x_2, \ldots, x_n, w$, что $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n) = w$. Тогда имеются числа $a_0, a_1, \ldots, a_y$ такие, как в доказательстве теоремы I, а также числа c и d для этих $a_0, a_1, \ldots, a_y$ такие, что $\beta(c, d, i) = a_i$ $(i = 0, 1, \ldots, y)$. В силу свойства (v) для B, Q и R, справедливы следующие утверждения:

$$\begin{array}{ll} \vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, 0, \boldsymbol{a}_0), & \vdash \mathrm{Q}(\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}_0), \\ \vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, 1, \boldsymbol{a}_1), & \vdash \mathrm{R}(0, \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}_1), \\ & \ldots \\ \vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_y), & \vdash \mathrm{R}(\boldsymbol{y} - 1, \boldsymbol{a}_{y-1}, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{a}_y). \\ \vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}). & \end{array}$$

Теперь легко показать, что $\vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{w})$, пользуясь &-введ., $\exists$-введ. и *166 § 41.

Чтобы установить (vi), воспользуемся содержательной индукцией по y. Инд. шаг. Пусть $w = \varphi(y, x_2, \ldots, x_n)$ и $u = \varphi(y', x_2, \ldots, x_n) = \chi(y, w, x_2, \ldots, x_n)$. В силу (v) и (vi) для R (и пользуясь для краткости содержательным изложением, см. § 38), получаем: (a) $\mathrm{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{u})$ и (b) $\exists!\mathrm{uR}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \mathrm{u})$. В силу (v) (уже доказанного для P): (c) $\mathrm{P}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{w})$ и (d) $\mathrm{P}(\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{u})$. В силу индуктивного предположения для y: (e) $\exists!\mathrm{wP}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \mathrm{w})$. Нам надо доказать $\exists!\mathrm{wP}(\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \mathrm{w})$. Допустим: (f) $\mathrm{P}(\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \mathrm{w})$. В силу *170 и (d), достаточно вывести $\boldsymbol{u} = \mathrm{w}$ с фиксированным w. Для &- и $\exists$-удал. из (f) допустим (g) $\exists \mathrm{u}[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, 0, \mathrm{u}) \& \mathrm{Q}(\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \mathrm{u})]$, (h) $\forall \mathrm{i}[\mathrm{i} < \boldsymbol{y}' \supset \exists \mathrm{u} \exists \mathrm{v}[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}', \mathrm{u}) \& \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{v}) \& \mathrm{R}(\mathrm{i}, \mathrm{v}, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \mathrm{u})]]$ и (i) $\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \boldsymbol{y}', \mathrm{w})$. Из (h) с помощью *138a § 39 (или *167 и *166):
(j) $\forall \mathrm{i}[\mathrm{i} < \boldsymbol{y} \supset \exists \mathrm{u} \exists \mathrm{v}[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}', \mathrm{u}) \& \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{v}) \& \mathrm{R}(\mathrm{i}, \mathrm{v}, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \mathrm{u})]]$ и (k) $\exists \mathrm{u} \exists \mathrm{v}[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \boldsymbol{y}', \mathrm{u}) \& \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \boldsymbol{y}, \mathrm{v}) \& \mathrm{R}(\boldsymbol{y}, \mathrm{v}, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \mathrm{u})]$. Для &- и $\exists$-удал. из формулы (k) допустим: (l) $\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \boldsymbol{y}', \mathrm{u})$, (m) $\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \boldsymbol{y}, \mathrm{v})$ и (n) $\mathrm{R}(\boldsymbol{y}, \mathrm{v}, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \mathrm{u})$. Из формул (g), (j) и (m) с помощью &- и $\exists$-введ. получаем: (o) $\mathrm{P}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \mathrm{v})$. Из (o), (c) и (e), в силу *172, $\mathrm{v} = \boldsymbol{w}$, что вместе с (n) дает: (p) $\mathrm{R}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \mathrm{u})$. Из (p), (a) и (b), в силу *172, $\mathrm{u} = \boldsymbol{u}$, что вместе с (l) дает: (q) $\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \boldsymbol{y}', \boldsymbol{u})$. Из (q), (i), *180a и *172 $\boldsymbol{u} = \mathrm{w}$, что и требовалось вывести.

Следствие. *Каждый примитивно-рекурсивный предикат* $P(x_1, \ldots, x_n)$ *нумерически выразим в формальной системе гл.* IV.

В самом деле, если $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ нумерически выражает представляющую функцию φ предиката P, то ввиду (vii) § 41 (полученного там посредством *173, *(164)), формула $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, 0)$ нумерически выражает P.

Лемма 18b. *Теорема 27 и ее следствие справедливы для формальной системы P. Робинсона* (§§ 41, 76), *состоящей из исчисления предикатов, к которому присоединяются следующие тринадцать арифметических аксиом: аксиомы* 14—21 *и формулы из утверждений* *104—*107 *и* *137 (*или* *136).

Доказательство — с помощью леммы 18a § 41.

Замечание 1. Для полной системы (а не для робинсоновской) более заманчиво было бы убедиться в доказуемости формул, выражающих рекурсивные уравнения; например, для случая (Vb), установить:

(1) $\vdash \mathrm{P}(0, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}) \sim \mathrm{Q}(\mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$.

(2) $\vdash \mathrm{P}(\mathrm{y}', \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}) \sim \exists \mathrm{z}[\mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, z) \& \mathrm{R}(\mathrm{y}, z, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})]$.

Из (1) и (2) путем формальной индукции по у (используя предположение содержательной индукции по k, заключающееся в том, что $\vdash \exists!\mathrm{wQ}(\mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ и $\vdash \exists!\mathrm{wR}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$), получаем

(3) $\vdash \exists!\mathrm{wP}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$.

Чтобы установить (1) и (2), нам пришлось бы начать с формализации теории β-функции, которую мы рассмотрели содержательно в § 48. Достаточно было бы установить, что

(α) $\vdash \exists c \exists d B(c, d, 0, w)$,

(β) $\vdash \exists c_2 \exists d_2 \{\forall i [i \leqslant y \supset \exists u [B(c_1, d_1, i, u) \& B(c_2, d_2, i, u)]] \& \& B(c_2, d_2, y', w)\}$.

Действительно, тогда четыре импликации в (1) и (2) можно было бы доказать, пользуясь *180c, (α) (для второй) и β (для четвертой). Мы не будем занимать место проведением формализации, необходимой, чтобы установить (α) и (β)[1]. Гильберт и Бернайс [1934, стр. 401—419] практически проделали это для другой формальной системы, откуда (способом, указанным в § 74 перед примером 9) можно заключить, что утверждения (α) и (β) справедливы и для нашей системы (как классической, так и интуиционистской).

[1]) См. добавление II. — *Прим. перев.*

Глава X

АРИФМЕТИЗАЦИЯ МЕТАМАТЕМАТИКИ

§ 50. МЕТАМАТЕМАТИКА КАК ОБОБЩЕННАЯ АРИФМЕТИКА

Мы уже отмечали в § 42 (следуя Гёделю [1931]), что метаматематика становится частью арифметики натуральных чисел, если выбрать какую-нибудь нумерацию формальных объектов, т. е. сопоставить различные натуральные числа различным формальным объектам (используя не обязательно все числа), а затем вместо формальных объектов говорить о соотнесенных им числах. В этой главе мы рассмотрим одну такую арифметизацию метаматематики, использующую гёделевскую нумерацию, сходную с гёделевской нумерацией Гильберта и Бернайса [1939].

Однако вместо непосредственного проведения арифметизации мы сначала представим нашу формальную систему промежуточным образом в виде обобщенной арифметики, а затем отобразим эту обобщенную арифметику в обычную. Это приведет к некоторым эвристически полезным аналогиям; кроме того, представление системы в виде обобщенной арифметики имеет и самостоятельный интерес.

Арифметика натуральных чисел имеет дело с областью объектов, которые порождаются с помощью одной основной операции $'$ или $+1$ (§ 6), если отправляться от одного основного объекта 0.

Обобщенная арифметика, которую мы будем здесь рассматривать, получится, если мы положим в основу один или несколько нулей и одну или несколько операций „следования за". Условимся считать (это не единственное целесообразное соглашение), что объекты, различными способами порожденные из основных, обязательно различны. Имеется несколько способов представления формальной системы в виде обобщенной арифметики. Гермес [1938] рассматривает арифметику с пустым выражением в качестве нуля и с операциями приставления справа одного из формальных символов в качестве операций следования[1]).

Та обобщенная арифметика, которую мы выберем, имеет более сложную арифметическую структуру, но зато она предназначена для непосредственного представления грамматической и логической структуры формальных объектов. В ней имеется $r+1$ нулей $0_0, 0_1, \ldots, 0_r$, где r — натуральное число, которое будет указано ниже, а также по одной операции следования, применимой к системе $s+1$ аргументов для каждого из указанных ниже значений s. Результат применения операции следования к аргументам $\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_s$ мы будем записывать в виде «$(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_s)$», а иногда в виде «$\mathrm{x}_0(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_s)$». Объекты, принадлежащие этой обобщенной арифметике, мы будем называть *вещами*.

---

[1]) Здесь и часто в дальнейшем употребляется выражение *операция следования* вместо *операция следования за*. — *Прим. перев.*

Мы можем выразить сказанное посредством индуктивного определения (аналогичного определению для „натурального числа“ в § 6). 1. $0_0, 0_1, \ldots, 0_r$ — *вещи*. 2. Для любого допустимого s из того, что $x_0, x_1, \ldots, x_s$ — *вещи*, следует, что и $(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ — *вещь*. 3. Никаких других *вещей*, кроме определенных посредством 1 и 2, нет.

Как уже указано, две вещи равны тогда и только тогда, когда они одинаковым образом порождены из нулей посредством операций следования. Для обозначения равенста вещей x и y мы будем писать «$x \asymp y$» (для неравенства — «$x \not\asymp y$»). Мы употребляем «$\asymp$», а не «$=$», только для того, чтобы избежать смешения со знаком $=$ нашей формальной системы.

Можно установить аксиомы, характеризующие область вещей, аналогичные аксиомам Пеано для натуральных чисел (§§ 6, 7). В частности, эти аксиомы должны содержать принцип доказательства посредством математической индукции в форме, соответствующей способу порождения в области вещей (или только что данному индуктивному определению): пусть каждая из вещей $0_0, 0_1, \ldots, 0_r$ обладает некоторым свойством и пусть для каждого допустимого s всякий раз, когда вещи $x_0, x_1, \ldots, x_s$ обладают этим свойством, вещь $(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ также им обладает. Тогда все вещи обладают этим свойством. Формулировка остальных аксиом Пеано для обобщенной арифметики предоставляется читателю[1]).

Процесс порождения вещей частично упорядочивает их (конец § 8); мы будем писать «$x \prec y$» для обозначения того, что x порождается раньше y в процессе порождения y. Индуктивное определение: 1. Для каждого допустимого s и каждого $i \leqslant s$ имеет место $x_i \prec (x_0, x_1, \ldots, x_s)$. 2. Для каждого допустимого s и каждого $i \leqslant s$ из $x \prec x_i$ следует $x \prec (x_0, x_1, \ldots, x_s)$. 3. $x \prec y$ только в том случае, если это вытекает из 1 и 2.

Следующее определение дает функцию от вещи x и натурального числа i, которая для вещи, являющейся значением функции следования, дает предшественника этой вещи:

$$\{x\}_i \asymp \begin{cases} x_i, & \text{если } x \asymp (x_0, x_1, \ldots, x_s) \text{ и } i \leqslant s, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь условимся до конца этой главы, что число $r+1$ нулей $0_0, 0_1, \ldots, 0_r$ равно тринадцати, и обозначим их следующим образом:

$$\supset,\ \&,\ \vee,\ \neg,\ \forall,\ \exists,\ =,\ +,\ \cdot,\ ',\ 0,\ a,\ |.$$

Далее условимся, что для s допустимы значения 0, 1 и 2. Этим заканчивается определение нашей обобщенной арифметики как области абстрактных объектов, которые узнаются и различаются друг от друга по способу их порождения.

Теперь мы должны фиксировать представление формальной системы гл. IV в обобщенной арифметике. Для этого надо сопоставить вещи объектам этой формальной системы. Как говорилось в § 16, эти формальные объекты являются формальными символами, конечными последовательностями формальных символов (так называемыми „формальными выражениями“) и конечными последовательностями формальных выражений. Не обязательно, чтобы каждому формальному объекту была сопоставлена какая-нибудь вещь, достаточно сделать это только для тех формальных объектов, которые существенны для метаматематики. Например, такому несинтаксическому выражению, как $)(0\forall 00=$, мы не сопоставим никакой вещи. Кроме того, будут иметься вещи, не сопоставленные никакому формальному объекту.

Первым одиннадцати формальным символам, перечисленным в § 16, мы сопоставим вещи $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, $=$, $+$, $\cdot$, $'$, 0, которые мы здесь

---

[1]) См. добавление I, стр. 464. — *Прим. перев.*

обозначаем теми же самыми символами, т. е. сопоставим им соответственно первые одиннадцать нулей обобщенной арифметики.

Переменным a, b, c, d, ... формальной системы мы соответственно сопоставим вещи

$$a, \quad (|, a), \quad (|, (|, a)), \quad (|, (|, (|, a))), \ldots$$

(которые иногда будем записывать как a, $a_|$, $a_{||}$, $a_{|||}$, ...), т. е. двенадцатый нуль и дальнейшие вещи, получаемые из него повторным применением операции следования обобщенной арифметики с $s=1$ и тринадцатым нулем в качестве первого предшественника.

Термам и формулам вида $r+s$, r', $r=s$, $A\&B$, $\neg A$, $\forall x A(x)$ и т. д. мы соответственно сопоставим вещи $(+, r, s)$, $(', r)$, $(=, r, s)$, $(\&, A, B)$, $(\neg, A)$, $(\forall, x, A(x))$ и т. д., где r, s, A, B, x, $A(x)$ — вещи, сопоставленные данным r, s, A, B, x, $A(x)$, т. е. процедура сопоставления для данных r, s, A, B, x, $A(x)$ при этом повторяется.

Пример 1. Формуле $\exists b(\neg b=0)$ сопоставляется вещь

$$(\exists, (|, a), (\neg, (=, (|, a), 0))).$$

Однако далее при обозначении этих вещей мы будем пользоваться прежними выражениями, кроме тех случаев, когда нам желательно будет особо отметить их структуру как вещей (т. е. способ их порождения). Например, если $\forall$, x, $A(x)$ — вещи, мы будем записывать следующую за ними вещь $(\forall, x, A(x))$ в виде «$\forall x A(x)$», и если $+$, r, s — вещи, то мы будем писать «$r+s$» вместо $(+, r, s)$. Благодаря этому способу обозначения вещей, сопоставленных объектам формальной системы, наши утверждения о вещах будут читаться как наши прежние утверждения об объектах формальной системы.

Далее, при рассмотрении обобщенной арифметики будет удобно называть вещь $\forall x A(x)$, сопоставленную некоторой формуле (т. е. вещь $(\forall, x, A(x))$), просто «формулой», вещь $r+s$ — «термом» и т. д., а систему этих вещей — «формальной системой, рассматриваемой как обобщенная арифметика» — в противоположность нашей формальной системе в ее первоначальном виде, которую мы будем при необходимости отличия называть «формальной лингвистической системой».

Доказательства и выводы мы будем представлять вещами, соответствующими этим доказательствам и выводам в виде дерева (конец § 24), а не в виде конечной последовательности формул. Таким образом, чтобы получить вещь, соответствующую выводу в виде последовательности с данным анализом, мы сперва преобразуем наш вывод к виду дерева. После этого он примет один из следующих трех видов:

$$D, \quad \frac{P}{D}, \quad \frac{P \quad Q}{D},$$

где D — формула, а P и Q — выводы в виде дерева. В обобщенной арифметике мы строим эти выводы, как вещи (D), (D, P), (D, P, Q) соответственно, причем ранее построенные вещи D, P, Q, разумеется, уже сопоставлены лингвистическим объектам D, P, Q. (При этом формулу D следует отличать как вещь от вывода, состоящего из одной только формулы D; последняя вещь получается из первой, как следующая при $s=0$.)

Пример 2. Вывод (6) из § 21, переписанный в виде дерева в примере 1 § 24, становится вещью, которую можно записать как (8, (7, (1), (6)), (5, (3, (1), (2)), (4))), где числа 1—8 служат сокращениями для формул из (6) § 21, рассматриваемых теперь как вещи.

Этим заканчивается сопоставление вещей осмысленным формальным лингвистическим объектам. Различным таким объектам сопоставляются различные вещи (за исключением случая двух несущественно различающихся доказательств или выводов в виде последовательности, которые совпадают после приведения их к виду дерева). Доказательство этого утверждения для случая термов и формул опирается на единственность областей действия операторов, применяемых к термам и формулам как формальным лингвистическим выражениям (§ 17).

При этом переходе от формальной лингвистической системы к обобщенной арифметике мы произвели две перемены, каждую из которых можно было бы произвести в отдельности. Первая из них относится к структуре, которая приписывается формальным объектам. В лингвистическом представлении термы и формулы были конечными последовательностями формальных символов, в которых существенные части распознавались как подпоследовательности, тогда как в обобщенной арифметике они строятся непосредственно из таких существенных частей при помощи обобщенной операции следования. В обобщенной арифметике разложение выражений на их существенные части (включая употребление скобок) переносится из формальной области в область изложения метаматематики, где мы перестаем заботиться об этой проблеме.

Например, рассмотрим (A) $\supset$ (B) как формулу лингвистической системы, где A и B — формулы (т. е. «A» и «B» — метаматематические буквы, означающие формулы). При этом мы явным образом говорим о конечных последовательностях символов, четыре указанные скобки являются символами этой последовательности, и последовательности, обозначенные через «A» и «B», входят в указанном положении в данную последовательность (§ 16).

С другой стороны, рассмотрим (A) $\supset$ (B) как формулу в системе вещей, где A и B — формулы этой же системы. Тогда «(A) $\supset$ (B)» означает ($\supset$, A, B) и следует за тройкой вещей $\supset$, A, B. Скобки в «(A) $\supset$ (B)», а также скобки и запятые в «($\supset$, A, B)» не являются формальными объектами, а только составляют часть наших наглядных обозначений для рассматриваемых вещей.

Вторая перемена относится к точке зрения на роль символизма при представлении формальной системы. В главе IV некоторые объекты формальной системы рассматривались как лингвистические символы или знаки, из которых строились остальные лингвистические объекты. При изучении лингвистических объектов мы должны были в принципе соблюдать различие между *объектом* и *именем* или *обозначением* для этого объекта, а также между *упоминанием* некоторого выражения (в качестве предмета рассмотрения) и *употреблением* этого выражения (для обозначения другого объекта или с целью выразить некоторое предложение). Это подчеркивалось Фреге [1893, стр. 4], Карнапом [1934, стр. 153—160] и Куайном [1940, стр. 23—37]. Чтобы высказать суждение о некотором предмете, обычно пользуются именем (т. е. названием) этого предмета. (Другой способ, который иногда применяется, состоит в указании этого предмета или в употреблении лингвистической конструкции, которая дает такое указание, т. е. привлекает внимание к предмету вместо того, чтобы называть его по имени.) Мы не произносим нашего друга, а мы произносим имя нашего друга. Невероятно, чтобы мы перепутали нашего друга по имени Джон с последовательностью из четырех букв, но, излагая в предыдущих главах метаматематику, мы должны были соблюдать осторожность, потому что рассматриваемые объекты сами были лингвистическими.

Один метод образования имен для лингвистических объектов состоит в том, что последние заключаются в кавычки. Имя Джона есть «Джон» а имя имени Джона есть ««Джон»». Имя имени Джона состоит из четырех букв, заключенных в одни кавычки; вторые кавычки использованы выше для того, чтобы назвать это имя[1]).

Второй метод состоит в употреблении отдельных метаматематических букв и выражений в качестве имен лингвистических объектов.

Нет надобности в строгом запрещении употребления образца лингвистического объекта в качестве имени этого объекта; при этом объект используется двояко—и как объект изучения, и как свое собственное имя. В последнем употреблении объект называется *автонимным*.

Метод, которым мы пользовались в предыдущих главах, был комбинацией второго и третьего из этих методов.

Проблема обозначений, которая трудна для явного изложения, является чуждой для метаматематики, если последнюю рассматривать как часть математики. Ее можно избежать, если употреблять только имена формальных объектов и не претендовать на указание самих этих объектов. Для удобства именно так мы и будем поступать в обобщенной арифметике, рассматривая впредь «$\supset$», «$\forall$», «$\forall x A(x)$» как имена известных объектов (этими именами являются выражения, стоящие внутри кавычек), а не как сами эти объекты. Мы воздержимся от указания того, каковы наши объекты, помимо того, что они принадлежат некоторой области абстрактных объектов, которые поставлены в некоторые отношения друг к другу и которые мы называем вещами (ср. § 8). Объекты, к которым относятся имена, могут быть (в смысле гл. IV) формальными символами, формальными выражениями и т. д., но мы теперь оставляем этот вопрос открытым, как не относящийся к метаматематике. (Итак, в метаматематике мы не сталкиваемся с проблемой обозначений, но она возникает при рассмотрении приложений метаматематики к конкретным лингвистическим системам.)

При переходе от рассмотрения формальной системы, опирающегося на формальные символы, которые рассматриваются как знаки на бумаге, к абстрактной системе объектов, наша метаматематика (т. е. изучение формальной системы) становится отраслью чистой арифметики, по своим понятиям стоящей полностью наравне с арифметикой натуральных чисел и аналогичными математическими дисциплинами.

Замечание 1. Обычно в содержательной математике все символы пишутся без кавычек, так что когда символ упоминается, а не используется, он является автонимным. В этой книге мы в метаматематических рассуждениях систематически употребляем кавычки, чтобы различать упоминания метаматематических выражений от употреблений последних в обозначениях формальных лингвистических выражений, а иногда просто для бóльшей выразительности.

§ 51. РЕКУРСИВНЫЕ МЕТАМАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Арифметизация метаматематики будет закончена в § 52 путем отображения обобщенной арифметики в обычную арифметику натуральных чисел. Наша главная цель—закончить доказательство леммы для теоремы Гёделя и доказать теорему 31. Оба результата будут вытекать из того, что некоторые арифметические предикаты, получающиеся путем отображения из метаматематических предикатов, являются примитивно-рекурсивными.

Почему эти результаты имеют место и должны сохранять силу для любой формальной системы аналогичной структуры,—это становится интуитивно ясным из рассмотрения природы определений упомянутых метаматематических предикатов в обобщенной арифметике.

[1]) Объекты следует отличать от обозначающих их имен во избежание парадоксов такого вида: Константинополь и Стамбул—одно и то же; слово «Константинополь» начинается с буквы «К», значит слово «Стамбул» начинается с буквы «К».—*Прим. перев.*

Ввиду того что вещи порождаются из нулей посредством операций „следования за“, предикаты и функции над вещами можно определять по рекурсии. Мы теперь воспользуемся этой идеей, не останавливаясь на точном определении „примитивной рекурсивности“ для обобщенной арифметики.

Ниже следует ряд из тринадцати определений метаматематических предикатов. Каждое определение задается перечислением случаев, в которых определяемый предикат должен быть истинным. (Некоторые пункты помечены звездочками для ссылок на них в § 52.)

Каждое определение или является явным (когда определяемый предикат не встречается ни в одной из определяющих частей), или образует примитивную рекурсию (когда значение определяемого предиката для какой-либо данной вещи зависит от значений этого предиката для непосредственно предшествующих вещей — или то же самое с параметрами), за исключением того, что в Dn 5 и Dn 11 имеет место рекурсия по двум переменным одновременно (в Dn 11 одна из этих переменных — числовая). О метаматематическом определении другой природы см. § 53.

Пусть читатель проверит, что эти определения действительно определяют обозначенные в них предикаты в том же смысле, в каком эти предикаты известны нам из предыдущих параграфов этой книги (гл. IV и §§ 41, 50).

Определения метаматематических предикатов для формальной арифметической системы гл. IV, рассматриваемой как обобщенная арифметика

Dn 1. y — *цифра*. (Сокращение: $\mathfrak{N}$(y).)

1. $y \asymp 0$.
2. $y \asymp n'$ (т. е. $y \asymp (', n)$), см. § 50), где n — *цифра*.

Dn 2. y — *переменная*. (Сокращение: $\mathfrak{V}$(y).)

1. $y \asymp a$.
2. $y \asymp x_|$ (т. е. $y \asymp (|, x)$), где x — *переменная*.

Dn 3. y — *терм*. (Сокращение: $\mathfrak{T}$(y).)

1. $y \asymp 0$.
2. y — переменная.

3—5. $y \asymp r+s$ или $r \cdot s$, где r и s — *термы*;
$y \asymp r'$, где r — *терм*.

Dn 4. D — *формула*. (Сокращение: $\mathfrak{F}$(D).)

1. $D \asymp r = s$, где r и s — термы.

2—5. $D \asymp A \supset B$, $A \& B$ или $A \vee B$, где A и B — *формулы*,
$D \asymp \neg A$, где A — *формула*.

6—7. $D \asymp \forall x A(x)$ или $\exists x A(x)$, где x — переменная, а A(x) — *формула*.

Dn 5. (t — терм, x — переменная, E — терм или формула и) D получается из E путем *подстановки* t вместо (свободных вхождений) x. (Сокращение: $\mathfrak{S}$(D, E, t, x).)

1. t — терм, x — переменная, $E \asymp x$ и $D \asymp t$.

2—3. t — терм, x — переменная, E есть 0 или переменная $\not\asymp x$ и $D \asymp E$.

4—5. E — терм или формула, и E есть (e_0, e_1), а D есть (e_0, d_1), где $e_0 \not\asymp |$ и $\mathfrak{S}(d_1, e_1, t, x)$ (так что t — терм, а x — переменная).
E — терм или формула, и E есть (e_0, e_1, e_2), а D есть (e_0, d_1, d_2), где $e_0 \not\asymp \forall$ или $\exists$, $\mathfrak{S}(d_1, e_1, t, x)$ и $\mathfrak{S}(d_2, e_2, t, x)$.

6—7. t — терм, E есть $(\forall, y, e_2)$ и D есть $(\forall, y, d_2)$, где y — переменная, e_2 — формула и либо $y \not\asymp x$ и $\mathfrak{S}(d_2, e_2, t, x)$, либо $y \asymp x$ и $D \asymp E$. Аналогично для $\exists$.

Dn 6. (E — терм или формула, x — переменная и) E *содержит* x *свободно*. (Сокращение: $\mathfrak{CF}(E, x)$.)

1. E — терм или формула, x — переменная и $\overline{\mathfrak{S}}(E, E, 0, x)$.

Dn 7. (t — терм, x — переменная, E — формула и) t *свободен* для x в E. (Сокращение: $\mathfrak{F}(t, x, E)$.) Рекурсией по E, рассматривая семь частей, соответствующих 1 — 7 Dn 4. Например:

6. t — терм, x — переменная и $E \asymp \forall y A(y)$,
где y — переменная, A(y) — формула и E не содержит x свободно, или t *свободен* для x в A(y) и t не содержит y свободно.

Dn 8. D — *аксиома*. (Сокращение: $\mathfrak{A}(D)$.)

1—10. $D \asymp A \supset (B \supset A)$,
где A и B — формулы (схема аксиом 1a). Аналогично для схем аксиом 1b, 3, 4a, 4b, 5a, 5b, 6, 7, 8.

(Примечание. Мы разбиваем схему аксиом 10 на два случая (пункты 11 и 13), соответствующие тому, содержит ли A(x) x свободно или нет. Аналогично для схемы аксиом 11.)

*11—12. Существует t такой, что $D \asymp \forall x A(x) \supset A(t)$,
где A(x) содержит x свободно, t свободно для x в A(x) и $\mathfrak{S}(A(t), A(x), t, x)$.

(Примечание. То, что x — переменная, A(x) — формула, а t — терм, содержится здесь в условии «t свободен для x в A(x)». Вместо того чтобы подразумевать соглашения § 18, по которому A(t) означает результат подстановки t вместо x в A(x), мы пользуемся им здесь явно в виде «$\mathfrak{S}(A(t), A(x), t, x)$».) Аналогично для схемы аксиом 11.

13—14. $D \asymp \forall x A \supset A$, где x — переменная, A — формула и A не содержит x свободно. Аналогично для схемы аксиом 11.

15. $D \asymp A(0) \& \forall x (A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$, где A(x) — формула, $\mathfrak{S}(A(0), A(x), 0, x)$ и $\mathfrak{S}(A(x'), A(x), x', x)$.

16—23. $D \asymp a' = b' \supset a = b$ (аксиома 14). Аналогично для аксиом 15 — 21.

Dn 9. D — *непосредственное следствие* из E. (Сокращение: $\mathfrak{C}(D, E)$.

1—2. $E \asymp C \supset A(x)$, а $D \asymp C \supset \forall x A(x)$, где x — переменная, A(x) и C — формулы и C не содержит x свободно (правило 9). Аналогично для правила 12.

Dn10. D — *непосредственное следствие* из E и F. (Сокращение: $\mathfrak{C}$(D, E, F).)

1. D и E — формулы и F $\asymp$ E $\supset$ D (правило 2).

Dn11. $\boldsymbol{x}$ — *цифра* для натурального числа x. (Сокращение: $\mathfrak{Nu}$ ($\boldsymbol{x}$, x).)

1. $\boldsymbol{x} \asymp 0$ и $x = 0$.
2. $\boldsymbol{x} \asymp \boldsymbol{n}'$ и $x = n'$, где $\mathfrak{Nu}(\boldsymbol{n}, n)$.

Dn12. Y — *доказательство*. (Сокращение: $\mathfrak{Pf}$(Y).)

1. Y $\asymp$ (D), где D — аксиома.
2. Y $\asymp$ (D, P), где P — *доказательство*, а D — непосредственное следствие из $\{P\}_0$.
3. Y $\asymp$ (D, P, Q), где P и Q — *доказательства*, а D — непосредственное следствие из $\{P\}_0$ и $\{Q\}_0$.

Dn13. A(a) — формула, x — натуральное число и Y — *доказательство* формулы A($\boldsymbol{x}$) (как предикат от A(a), x, Y). (Сокращение: $\mathfrak{Pf}$(A(a), x, Y).)

*1. A(a) содержит a свободно, $\mathfrak{Pf}$(Y) и имеется $\boldsymbol{x}$ такое, что $\mathfrak{Nu}(\boldsymbol{x}, x)$ и $\mathfrak{S}(\{Y\}_0$, A(a), $\boldsymbol{x}$, a).

2. A(a) не содержит a свободно, $\mathfrak{Pf}$(Y) и $\{Y\}_0 \asymp$ A(a).

Dn13a. Для любых n различных переменных $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$ и формулы A($\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$): вещь Y есть *доказательство* формулы A($\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$). (Сокращение: $\mathfrak{Pf}_{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)}(x_1, \ldots, x_n$, Y) или $\mathfrak{Pf}_{\mathrm{A}}(x_1, \ldots, x_n$, Y).) Аналогично.

§ 52. ГЁДЕЛЕВСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Мы теперь закончим арифметизацию метаматематики путем отображения обобщенной арифметики в арифметику натуральных чисел. Сначала следующим образом сопоставим различные нечетные числа нулям обобщенной арифметики:

$\supset$	&	$\vee$	$\neg$	$\forall$	$\exists$	$=$	$+$	$\cdot$	$'$	0	a	$\mid$
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

Затем, если вещам $\mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_s$ уже сопоставлены числа $x_0, \ldots, x_s$ соответственно, то следующей вещи $(\mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_s)$ мы сопоставим число $p_0^{x_0} \cdot \ldots \cdot p_s^{x_s}$ (см. # 18 § 45).

В силу математической индукции, соответствующей определению вещи, каждой вещи таким образом сопоставляется некоторое целое положительное число. Это число называется *гёделевским номером* данной вещи; мы будем говорить также, что оно *представляет* эту вещь (или формальный лингвистический объект, которому, в свою очередь, сопоставлена эта вещь). Ввиду того, что только четные числа сопоставлены вещам, следующим за другими вещами (потому что $p_0 = 2$ и $x_0 \neq 0$), и того, что любое целое положительное число имеет вид $p_0^{x_0} \cdot \ldots \cdot p_s^{x_s}$ $(x_0, \ldots, x_s > 0)$ не более чем для одной системы значений для s и $x_0, \ldots, x_s$, различным вещам сопоставляются различные числа.

Пример 1. Гёделевским номером формулы $\exists b(\neg b = 0)$, которая представляется вещью $(\exists, (\mid, a), (\neg, (=, (\mid, a), 0)))$, является число

$$2^{13} \cdot 3^{2^{27} \cdot 3^{25}} \cdot 5^{2^{9} \cdot 3^{2^{15} \cdot 3^{2^{27} \cdot 3^{25}} \cdot 5^{23}}}.$$

Ввиду того, что $x_i < p_0^{x_0} \cdot \ldots \cdot p_s^{x_s}$ при $0 \leqslant i \leqslant s$, вещи x и y, находящиеся в отношении x $\prec$ y, всегда представляются натуральными числами x

и y такими, что $x < y$. (Но $x < y$ может оказаться и для пары чисел x и y, сопоставленных вещам x и y, для которых $\mathrm{x} \prec \mathrm{y}$ не имеет места; например, $3 < 5$, но неверно, что $\supset \prec \&$.)

Если x — вещь вида $(\mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_s)$, $s \geqslant i$ и x — гёделевский номер x, то гёделевским номером предшественника $\{\mathrm{x}\}_i$ является $(x)_i$ (см. # 19 § 45).

Если мы перейдем от вещей к их гёделевским номерам, то предикат или функция вещей становится предикатом или функцией гёделевских номеров. Мы говорим, что арифметический предикат или функция, полученные путем расширения определения этого предиката на все натуральные числа, *соответствует* первоначальному предикату или функции. В частности, в случае предиката $\mathfrak{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ под *вполне* соответствующим арифметическим предикатом $P(x_1, \ldots, x_n)$ мы будем понимать предикат, который соответствует $P(x_1, \ldots, x_n)$ и принимает значение $\mathfrak{f}$, если не все $x_1, \ldots, x_n$ являются гёделевскими номерами, т. е. $P(x_1, \ldots, x_n) \equiv \{x_1, \ldots, x_n$ — гёделевские номера вещей $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ и $\mathfrak{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)\}$. Аналогично, если некоторые из переменных первоначального предиката уже пробегают по натуральным числам (например Dn 11 § 51).

Лемма 19. *Для каждого из предикатов, определенных посредством* Dn1 — Dn13, Dn13a, *вполне соответствующий арифметический предикат примитивно-рекурсивен.*

Доказательство. Для иллюстрации метода рассмотрим Dn3, считая, что Dn2 уже рассмотрено.

Dn3 можно записать символически в следующем виде:

$$\begin{aligned}(1)\qquad \mathfrak{T}(\mathrm{y}) \equiv\ & \mathrm{y} \asymp 0 \\ & \vee\ \mathfrak{V}(\mathrm{y}) \\ & \vee\ [\mathrm{y} \asymp (+, \{\mathrm{y}\}_1, \{\mathrm{y}\}_2) \,\&\, \mathfrak{T}(\{\mathrm{y}\}_1) \,\&\, \mathfrak{T}(\{\mathrm{y}\}_2)] \\ & \vee\ [\mathrm{y} \asymp (\cdot, \{\mathrm{y}\}_1, \{\mathrm{y}\}_2) \,\&\, \mathfrak{T}(\{\mathrm{y}\}_1) \,\&\, \mathfrak{T}(\{\mathrm{y}\}_2)] \\ & \vee\ [\mathrm{y} \asymp (', \{\mathrm{y}\}_1) \,\&\, \mathfrak{T}(\{\mathrm{y}\}_1)].\end{aligned}$$

Эти пять дизъюнктивных членов соответствуют пяти пунктам Dn3, приведенным в § 51. Заметим для третьего пункта, что если $\mathrm{y} \asymp \mathrm{r} + \mathrm{s}$, т. е. $\mathrm{y} \asymp (+, \mathrm{s})$ для каких-нибудь вещей r и s, то $\mathrm{r} \asymp \{\mathrm{y}\}_1$, $\mathrm{s} \asymp \{\mathrm{y}\}_2$. Поэтому утверждение, что $\mathrm{y} \asymp (+, \mathrm{r}, \mathrm{s})$ для каких-нибудь вещей r и s, выражается посредством $\mathrm{y} \asymp (+, \{\mathrm{y}\}_1, \{\mathrm{y}\}_2)$.

Заменим в (1) нули $+$, $\cdot$, $'$, 0 на их гёделевские номера 17, 19, 21, 23, исходный предикат $\mathfrak{V}(\mathrm{y})$ на вполне соответствующий арифметический предикат $V(y)$, знак $\asymp$ на $=$, вещи вида $(\mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_s)$ на $p_0^{x_0} \cdot \ldots \cdot p_s^{x_s}$, предшественников $\{\mathrm{y}\}_i$ на $(y)_i$ и будем писать для определяемого предиката $T(y)$ вместо $\mathfrak{T}(\mathrm{y})$. Это приводит формально к следующей арифметической эквивалентности:

$$\begin{aligned}(2)\qquad T(y) \equiv\ & y = 23 \\ & \vee\ V(y) \\ & \vee\ [y = 2^{17} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \,\&\, T((y)_1) \,\&\, T((y)_2)] \\ & \vee\ [y = 2^{19} \cdot 3^{(y)_1} \cdot 5^{(y)_2} \,\&\, T((y)_1) \,\&\, T((y)_2)] \\ & \vee\ [y = 2^{21} \cdot 3^{(y)_1} \,\&\, T((y)_1)].\end{aligned}$$

Так как $(y)_i < y$ при $y \neq 0$, то в арифметике натуральных чисел (2) определяет предикат $T(y)$ посредством возвратной рекурсии; в силу # G и ## 2, 3, 14, 19, A, C, D и нашей гипотезы о примитивной рекурсивности V, предикат $T(y)$ примитивно-рекурсивен (см. пример 3 § 46).

Остается доказать, что предикат $T(y)$, определенный посредством (2), есть арифметический предикат, вполне соответствующий $\mathfrak{T}$(y). Для этой цели докажем возвратной индукцией по y следующие два предложения:

(a) *Если* $T(y)$ (согласно (2)), *то* y *является гёделевским номером некоторой вещи* y *такой, что* $\mathfrak{T}$(y) (согласно (1)).

(b) *Если* $\mathfrak{T}$(y) (согласно (1)) *и* y *— гёделевский номер* y, *то* $T(y)$ (согласно (2)).

Доказательства. (а) Согласно (2), если $T(y)$ истинно, то истинен один из дизъюнктивных членов (или «пунктов») справа в (2), так что мы должны рассмотреть пять случаев. Случай 2: $V(y)$. Тогда ввиду того, что V — предикат, вполне соответствующий $\mathfrak{B}$, y является гёделевским номером некоторой переменной y, т. е. $\mathfrak{B}$(y); и в силу соответствующего пункта (1), $\mathfrak{T}$(y). Случай 3: $y=2^{17}\cdot 3^{(y)_1}\cdot 5^{(y)_2}\,\&\,T((y)_1)\,\&\,T((y)_2)$. Тогда $(y)_1$, $(y)_2<y$; следовательно, в силу гипотезы индукциии по y, $(y)_1$ и $(y)_2$ являются гёделевскими номерами вещей r и s таких, что $\mathfrak{T}$(r) и $\mathfrak{T}$(s). Поэтому $y\,(=2^{17}\cdot 3^{(y)_1}\cdot 5^{(y)_2})$ является гёделевским номером (+, r, s). Обозначая эту вещь через y, получаем r $\asymp$ {y}$_1$, s $\asymp$ {y}$_2$, откуда y $\asymp$ (+, {y}$_1$, {y}$_2$) & $\mathfrak{T}$({y}$_1$) & $\mathfrak{T}$({y}$_2$) — и, в силу соответствующего пункта (1), $\mathfrak{T}$(y). (b) доказывается аналогично, путем рассмотрения дизъюнктивных членов (или «пунктов») из правой части (1).

Таким же образом рассматриваются определения остальных предикатов из списка Dп1 — Dп13, Dп13а, за исключением отмеченных выше случаев рекурсии по двум переменным и пунктов, помеченных звездочками. Определяемый арифметический предикат, получающийся в результате перевода (подобного переходу от (1) к (2)), истинен только для гёделевских номеров в качестве аргументов, потому что в каждом пункте первоначального определения каждая переменная вещь должна удовлетворять ранее рассмотренному предикату или следовать за вещами, которые фиксированы или удовлетворяют ранее рассмотренным или определяемому предикатам. Например, пункт 1Dп9 переводится как

$$e=2^3\cdot 3^{(e)_1}\cdot 5^{(e)_2}\,\&\,d=2^3\cdot 3^{(e)_1}\cdot 5^{2^{11}\cdot 3^{(d)_{2,1}}\cdot 5^{(e)_2}}\,\&\,V((d)_{2,1})\,\&$$
$$\&\,F((e)_2)\,\&\,F((e)_1)\,\&\,\overline{CF}((e)_1,\ (d)_{2,1}),$$

где «$(d)_{2,1}$» — сокращение для «$((d)_2)_1$». Заметим, что $\overline{CF}(e, x)$ не совпадает с вполне соответствующим арифметическим предикатом для $\mathfrak{CF}$(E, x), потому что он истинен, когда e или x не является гёделевским номером. Но это не играет роли, потому что $(e)_1$ входит также в $F((e)_1)$, а $(d)_{2,1}$ — в $V((d)_{2,1})$, которые соответствуют условиям из 1Dп9, что C — формула, а x — переменная.

Dп5 и Dп11 являются рекурсиями (простейшего вида) по двум переменным. Для Dп5, например, положим $T(z, t, x)\equiv\{z=2^d\cdot 3^e$, где $S(d, e, t, x)\}$. Тогда T удовлетворяет возвратной рекурсии по одной переменной z, и $S(d, e, t, x)\equiv T(2^d\cdot 3^e, t, x)$.

Остается рассмотреть помеченные звездочкой пункты 11 и 12Dп8 и 1Dп13 и 1Dп13а. Пункт 11Dп8 переводится как

$$(Et)_{t<d}\,[d=2^3\cdot 3^{2^{11}\cdot 3^{(d)_{1,1}}\cdot 5^{(d)_{1,2}}}\cdot 5^{(d)_2}\,\&\,CF((d)_{1,2}\,(d)_{1,1})\,\&$$
$$\&\,F(t,(d)_{1,1},(d)_{1,2})\,\&\,S((d)_2,(d)_{1,2},t,(d)_{1,1})],$$

а затем применяется $\#$E. Ограничение $t<d$ оправдано, потому что если A(x) содержит x свободно, то t $\prec$ A(t) $\prec$ $\forall$xA(x) $\supset_{\mathfrak{s}}$ A(t) $\asymp$ D. 1Dп13 переводится как

$$CF(a,25)\,\&\,Pf(y)\,\&\,(En)_{n<y}\,[Nu(n,x)\,\&\,S((y)_0,a,n,25)].$$

Этим завершается доказательство леммы 19. Суть этого доказательства состоит в том, что примитивные рекурсии обобщенной арифметики переходят в возвратные рекурсии обыкновенной арифметики, ибо гёделевская нумерация сохраняет отношение порядка, хотя и нарушает отношение непосредственного следования. Необходимо проверить, что ограничена область изменения каждой переменной, которую мы вводим с квантором, а не как функцию от независимых переменных определяемого предиката (например, t в 11Dn8 и $\boldsymbol{x}$ в 1Dn13).

Лемма 20. *При гёделевской нумерации настоящего параграфа предикаты $A(a, b)$ и $B(a, c)$ леммы* 21 § 42 *примитивно-рекурсивны.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 19, потому что $A(a, b)$ и $B(a, c)$ можно следующим образом выразить через арифметический предикат $Pf(a, x, y)$, вполне соответствующий предикату $\mathfrak{Pf}(\mathrm{A}(a), x, \mathrm{Y})$ из Dn13:

$$A(a, b) \equiv Pf(a, a, b), \qquad B(a, c) \equiv Pf(2^9 \cdot 3^a, a, c).$$

Лемма 21 из § 42 вытекает теперь из следствия теоремы 27 § 49.

Теорема 31. *Для любой данной формулы* $\mathrm{A}(a)$ (*ср.* Dn13) *предикат* «$\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ *доказуема*» (*рассматриваемый как предикат от* x, *где* $\boldsymbol{x}$ — *цифра для* x) *выразим в виде* $(Ey) R(x, y)$, *где* R — *примитивно-рекурсивный предикат, иными словами для любой данной формулы* $\mathrm{A}(a)$ *можно найти примитивно-рекурсивный предикат* $R(x, y)$, *такой, что*

$$(Ey) R(x, y) \equiv \vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{x}).$$

(*Аналогично для* $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$; *ср.* Dn13a).

Доказательство. Формула доказуема тогда и только тогда, когда существует ее доказательство. Пусть a — гёделевский номер формулы $\mathrm{A}(a)$, фигурирующей в условии теоремы; положим

$$R(x, y) \equiv Pf(a, x, y).$$

(Для $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ положим $R(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv Pf_{\mathrm{A}}(x_1, \ldots, x_n, y)$.)

Пример 2. Пусть $\mathfrak{S}(\mathrm{E}, \mathrm{t}, \mathrm{x}) \asymp$ {результат подстановки t вместо x в E, если t — терм, x — переменная, а E — терм или формула; в противном случае E}, и пусть $\mathfrak{Nu}(x) \asymp$ {цифра $\boldsymbol{x}$ для натурального числа x}. Эти метаматематические функции $\mathfrak{S}(\mathrm{E}, \mathrm{t}, \mathrm{x})$ и $\mathfrak{Nu}(x)$ можно определить по рекурсии, аналогично предикатам $\mathfrak{S}(\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{t}, \mathrm{x})$ (см. Dn5) и $\mathfrak{Nu}(\boldsymbol{x}, x)$ (см. Dn11); соответствующие арифметические функции $S(e, t, x)$ ($= e$, если не все e, t, x являются гёделевскими номерами) и $Nu(x)$ — примитивно-рекурсивны.

*§ 53. ИНДУКТИВНЫЕ И РЕКУРСИВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Первоначальные определения „терма" и „формулы" в § 17 были индуктивными. Другими примерами индуктивных определений были определение „натурального числа" (§ 6), первая форма определения „доказуемой формулы" (§ 19), аналогичным образом сформулированное определение „примитивно-рекурсивной функции" (§ 43) и определение „вещи" (§ 50). Можно рассмотреть результаты этой главы в свете отношения между индуктивными и рекурсивными определениями. Начнем с нескольких замечаний об индуктивных определениях вообще.

Индуктивные определения могут встречаться в двух различных ролях, и мы будем называть их в соответствии с этим *фундаментальными* и *нефундаментальными*. К какой категории относится данное индуктивное определение— это зависит от контекста или от теории, в которой оно употребляется.

Для обобщенной арифметики определение „вещи“ является фундаментальным индуктивным определением. Им устанавливается область объектов для этой арифметики. Благодаря этому вещь считается данной тогда и только тогда, когда дан способ ее порождения согласно индуктивному определению „вещи“.

Затем нефундаментальные индуктивные определения, например, „терма“, „формулы“ и „доказуемой формулы“, применяются к объектам, уже известным в качестве вещей. Каждое из этих определений описывает некоторый класс вещей, т. е. подкласс класса всех вещей. Можно спросить в обобщенной арифметике, принадлежит ли данная вещь этому подклассу, и можно сопоставить с этим подклассом предикат, принимающий значение $\mathfrak{t}$ для вещей, принадлежащих этому подклассу, и значение $\mathfrak{f}$ для вещей, ему непринадлежащих. Нефундаментальные индуктивные определения можно рассматривать как определения этих предикатов.

Таким образом, фундаментальное индуктивное определение устанавливает область изменения некоторой переменной, над которой затем можно определять предикаты посредством нефундаментальных индуктивных определений (включая как частный случай постоянный предикат $\mathfrak{t}$).

Каждое нефундаментальное индуктивное определение предиката употребляется следующим образом: *Прямые пункты* указывают определенного рода объекты, для которых предикат принимает значение $\mathfrak{t}$. *Косвенный пункт* утверждает, что это—единственные объекты, для которых предикат принимает значение $\mathfrak{t}$, так что мы можем приписать ему значение $\mathfrak{f}$, если мы в состоянии усмотреть, что из прямых пунктов не вытекает, что это значение должно быть $\mathfrak{t}$.

Среди прямых пунктов в общем случае имеются *базисные пункты*, каждый из которых прямо (или при условиях, содержащих только ранее определенные предикаты) утверждает, что значение для некоторого объекта есть $\mathfrak{t}$, и *индуктивные пункты*, каждый из которых утверждает, что если значение определяемого предиката есть $\mathfrak{t}$ для некоторого известного рода объектов (возможно, при условиях, содержащих ранее определенные предикаты), то значение предиката есть $\mathfrak{t}$ и для объекта, связанного определенным образом с этими объектами. (Если базисные пункты отсутствуют, то предикат принимает значение $\mathfrak{f}$ для всех аргументов. Если индуктивные пункты отсутствуют, определение оказывается просто явным определением посредством разбора случаев.)[1])

Нефундаментальными индуктивными определениями можно пользоваться также, чтобы определять предикаты более чем с одной переменной. Такие определения имеют иногда вид индуктивного определения некоторого класса, зависящего от параметра (например, определение для „$<$“ в § 6), и в общем случае их можно рассматривать как индуктивные определения класса упорядоченных n-ок.

Индуктивные определения, фундаментальные и нефундаментальные, оправдывают соответствующие виды „доказательств посредством математической индукции“. Те виды таких доказательств, которые соответствуют определениям „натурального числа“ и „вещи“, уже рассматривались (§§ 7, 50). Другим примером является следующий принцип индукции, соответствующий индуктивному определению „доказуемой формулы“: пусть каждая аксиома обладает некоторым свойством и пусть, коль скоро посылки применения какого-либо правила формального вывода обладают этим свойством, то и заключение обладает этим свойством, тогда рассматриваемым свойством обладает каждая доказуемая формула. (Этим принципом индукции можно было бы воспользоваться для доказательства теоремы 9 в § 28 вместо возвратной индук-

[1]) Н. А. Шанин [1955] подробно рассмотрел нефундаментальные индуктивные определения различных типов слов в каком-либо алфавите.—*Прим. ред.*

ции по длине доказательства. Тогда леммы 12a и 12b стали бы базисом и индукционным шагом доказательства.)

Таким же образом фундаментальные индуктивные определения (при условии, что различным образом порожденные объекты различны) оправдывают „определения по индукции" или „рекурсивные определения" функции над областью, установленной индуктивным определением. (Но рекурсивная процедура, соответствующая нефундаментальному индуктивному определению некоторого класса, согласно которому принадлежность какого-либо объекта этому классу может быть установлена путем различных последовательностей применений прямых пунктов, может дать и более одного значения функции для такого рода объекта, например «$\varphi(A)=0$, если A—аксиома, $\varphi(A)=\varphi(B)+1$, если A—непосредственное следствие из B и $\varphi(A)=\varphi(B)+\varphi(C)+1$, если A—непосредственное следствие из B и C» не определяет однозначной функции φ, определенной на классе доказуемых формул и принимающей натуральные значения.)

Предикаты могут вводиться при помощи рекурсивно определяемых функций, служащих для них представляющими функциями, или непосредственно путем рекурсивных процедур, как было показано в § 51.

В рекурсиях (типа тех, которые мы рассматривали в гл. IX для простой арифметики) значение функции или предиката, например, от одной переменной для любого отличного от нуля аргумента, определяется значениями этой функции или предиката для тех значений аргумента, которые предшествуют данному в смысле порядка порождения области согласно фундаментальному индуктивному определению. Благодаря этому, пользуясь соответствующей индукцией, можно доказать, что рекурсивно определенный предикат для каждого значения аргумента принимает значение $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$. Таким образом, применимость закона исключенного третьего к каждому предложению, являющемуся значением рекурсивно определенного предиката, доказывается интуиционистски.

Это, вообще говоря, не так для индуктивно определенного предиката, ибо, употребляя косвенный пункт определения для того, чтобы приписать предикату значение $\mathfrak{f}$, если прямые части не дают возможности приписать значения $\mathfrak{t}$, мы не имеем эффективных средств, чтобы определить, каково значение предиката для любого данного значения его аргументов.

Имеется специальный случай, когда применимость закона исключенного третьего все же может быть доказана интуиционистски, а именно (в случае индуктивного определения класса), когда порядок, в котором согласно индуктивным пунктам появляются элементы этого класса, совпадает с тем порядком, в котором эти элементы порождаются согласно фундаментальному индуктивному определению. Именно такого рода индуктивные определения можно представить в виде рекурсивных определений, как мы это проделали в § 51 для определений „терма" и „формулы". Индуктивным определением другого рода было определение „доказуемой формулы" в его первой форме (§ 19). Во второй форме это определение не встречается среди метаматематических определений § 51, ввиду того, что в нем используется квантор существования «существует доказательство Y», для переменной Y которого неизвестно верхней границы (в отличие от 11 — 12 Dn 8 и 1Dn 13). (Ср. § 30.) Из этой второй формы мы получаем вполне соответствующий арифметический предикат $(Ey)[Pf(y) \& (y)_0=d]$ (см. Dn 12), который имеет вид $(Ey)R(d,y)$, где предикат R примитивно-рекурсивен.

Если естественным образом уточнить форму индуктивного определения (с элементарными прямыми пунктами), то предикаты $P(x_1, \ldots, x_n)$, определимые посредством индуктивных определений в арифметике натуральных чисел, — это в точности те предикаты, которые выразимы в виде $(Ey)R(x_1,\ldots,x_n,y)$ с примитивно-рекурсивным R. Доказательство можно провести обобщением предыдущего метода, как намечено Клини [1943, стр. 66 – 67], или другим методом, указанным у Клини [1944*, стр. 48].

Глава XI

ОБЩЕ-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 54. ФОРМАЛЬНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИМИТИВНО-РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Каждая из схем (I) — (V) § 43 с содержательной точки зрения является операцией, которая определяет некоторую функцию φ через нуль или большее число данных функций. Эти схемы были определены при помощи равенств.

Рассмотрим снова, каким образом эти равенства определяют функцию φ, чтобы увидеть, нельзя ли наше употребление равенств при определении конкретных значений φ разложить на формальные операции.

Пример 1. Пусть χ — данная функция, принимающая, в частности, следующие два значения:

1. $\chi(0,4)=7$. 2. $\chi(1,7)=7$.

Пусть φ вводится посредством схемы (Va) при $q=4$, а именно:

3. $\varphi(0)=4$. 4. $\varphi(y')=\chi(y, \varphi(y))$.

В § 43 мы убедились в том, что для любого числа y рекурсивные равенства для φ определяют соответствующее значение $\varphi(y)$ функции φ, если уже определены значения χ. В частности, при только что указанных двух значениях χ рассуждения § 43 дают $\varphi(2)=7$. Мы спрашиваем теперь, какого рода формальные выводы позволяют нам вывести равенство «$\varphi(2)=7$» из равенств 1 — 4?

Подставим «0» вместо «y» в равенство 4:

5. $\varphi(1)=\chi(0, \varphi(0))$.

Заменим «$\varphi(0)$» в правой части равенства 5 на «4», пользуясь равенством 3:

6. $\varphi(1)=\chi(0, 4)$.

Вывод заканчивается посредством следующих четырех шагов этих двух родов:

7. $\varphi(1)=7$ — замена, 6, 1.
8. $\varphi(2)=\chi(1, \varphi(1))$ — подстановка, 4.
9. $\varphi(2)=\chi(1, 7)$ — замена, 8, 7.
10. $\varphi(2)=7$ — замена, 9, 2.

Таким образом, операции подстановки и замены оказываются достаточными для вывода равенства «$\varphi(2)=7$» из равенств 1 — 4, в силу чего значение функции φ для аргумента 2 есть 7. Кроме того, совершенно очевидно, что никакая последовательность выводов этих двух родов не может привести от равенств 1 — 4 к какому-либо другому равенству, левая часть которого есть «$\varphi(2)$», а правая часть — цифра.

Пример 2. Пусть теперь, более конкретно, χ есть функция-константа (C_7^2), определенная равенством:

$-2. \qquad \chi(y, z) = 7,$

причем φ определяется через χ, как в примере 1. (Тогда функция φ — примитивно-рекурсивна, а χ, φ — ее примитивно-рекурсивное описание.) Теперь равенства 1 и 2 можно вывести из равенства -2 путем подстановки, а именно:

$-1.\ \chi(0, z) = 7$ — подст., -2. $\qquad$ 0. $\chi(1, z) = 7$ — подст., -2.
1. $\chi(0, 4) = 7$ — подст., -1. $\qquad$ 2. $\chi(1, 7) = 7$ — подст., 0.

Объединяя эти два вывода с выводом примера 1, мы получаем вывод для «$\varphi(2) = 7$» из трех равенств -2, 3, 4, определяющий φ ab initio[1]).

В этих примерах мы занимались вопросами формального рода, не устанавливая заранее в явном виде никакой формальной системы. Теперь мы установим надлежащую формальную систему и проведем наше рассуждение в виде точного метаматематического рассуждения, относящегося к этой системе.

Новую формальную систему мы будем называть *формализмом* (или *формальной системой*) *рекурсивных функций*. Сейчас мы ее опишем лингвистическим образом, а позже (в § 56) — в виде обобщенной арифметики.

Формальными символами системы являются: = (равняется), ′ (следующий за), 0 (нуль), $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots$ (переменные для натуральных чисел), $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots$ (функциональные буквы, т. е. символы для произвольных арифметических функций), (,) (левая и правая скобки) и , (запятая). Предполагается данным (потенциально) бесконечный перечень переменных и функциональных букв.

Мы называем здесь $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots$ «функциональными буквами», а не «функциональными символами», чтобы отличать их от ′. Кроме того, это их название оказывается подходящим потому, что они должны играть роль, аналогичную той, которую играют предикатные буквы в чистом исчислении предикатов, т. е. они рассматриваются в различных случаях как различные функции, но для них не имеется постулированного правила подстановки. В тех рассуждениях, где f, g, h и т. д. выражают фиксированные функции и не рассматриваются как отличные, например, от ′, +, ·, мы можем называть их «функциональными символами».

Формальные выражения 0, 0′, 0″, ... мы называем *цифрами*. Как и прежде (§ 41), мы обозначаем их сокращенно посредством «0», «1», «2», ... соответственно; мы попрежнему придерживаемся соглашения, что «**x**», «**y**» и т. д. обозначают цифры для натуральных чисел, обозначенных соответственно через «x», «y» и т. д.

Термами являются 0, переменные и выражения вида r', где r — *терм*, или $\mathrm{f}(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$, где f – функциональная буква, а $\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n$ — *термы* ($n \geqslant 0$; при $n = 0$ скобки опускаются).

Формальное выражение $\mathrm{r} = \mathrm{s}$, где r и s — термы, называется *равенством*. Равенства служат единственными «формулами» рассматриваемой системы. Под *системой равенств* мы понимаем конечную последовательность $\mathrm{e}_0, \ldots, \mathrm{e}_s$ равенств (непустую, если не оговорено противное).

Не вводится никаких аксиом; и мы определяем только „выводимость", но не „доказуемость".

[1]) Изначально (лат.). Здесь — «при отсутствии исходных функций». — *Прим. перев.*

Правила вывода следующие: правило подстановки R1 с одной посылкой и правило замены R2 с двумя посылками.

R1: перейти от равенства d, содержащего переменную y, к равенству, которое получается из d путем подстановки цифры $\boldsymbol{y}$ вместо y.

R2: перейти от равенства r = s, не содержащего переменных (*большая посылка*), и равенства $\mathrm{h}(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p) = \boldsymbol{z}$, где h — функциональная буква, а $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p$, $\boldsymbol{z}$ — цифры (*малая посылка*), к равенству, которое получается из r = s, путем замены некоторого вхождения $\mathrm{h}(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p)$ в s (или нескольких таких вхождений одновременно) на $\boldsymbol{z}$.

Вывод равенства e (*конечного равенства* этого вывода) *из* некоторой системы (или множества, может быть, бесконечного) E равенств должен иметь вид дерева (конец § 24); иначе говоря, он должен иметь один из трех видов:

c, где c есть одно из равенств E;

$\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{c}}$, где W — вывод из E, а c — непосредственное следствие по правилу R1 из конечного равенства W, или

$\dfrac{\mathrm{WX}}{\mathrm{c}}$, где W и X — выводы из E, а c — непосредственное следствие по правилу R2 конечных равенств W и X.

Если имеется вывод e из E, то e *выводимо из* E (обозначение: E ⊢ e).

Пример 2 (продолжение). Осуществляя перевод в новый формализм равенств от —2 до 10 (пользуясь формальными функциональными буквами f, h вместо содержательных функциональных букв «φ», «χ» и b, c вместо содержательных числовых переменных «y», «z») и переходя от вида последовательности к виду дерева, мы получаем следующую фигуру:

(a)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{4_1.\ f(b') = h(b, f(b))}{8.\ f(2) = h(1, f(1))} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{4_2.\ f(b') = h(b, f(b))}{5.\ f(1) = h(0, f(0))} \quad 3.\ f(0) = 4}{6.\ f(1) = h(0, 4)} \qquad \dfrac{\dfrac{-2_1.\ h(b, c) = 7}{-1.\ h(0, c) = 7}}{1.\ h(0, 4) = 7}}{7.\ f(1) = 7}}{9.\ f(2) = h(1, 7)} \qquad \dfrac{\dfrac{-2_2.\ h(b, c) = 7}{0.\ h(1, c) = 7}}{2.\ h(1, 7) = 7}}{10.\ f(2) = 7}$$

Это — вывод равенства $f(2) = 7$ из системы равенств

$$(\mathrm{b}) \left\{ \begin{array}{ll} h(b, c) = 7 & \} \quad (\mathrm{b}_1) \\ f(0) = 4 & \multirow{2}{*}{\}} \quad (\mathrm{b}_2) \\ f(b') = h(b, f(b)). & \end{array} \right.$$

Пример 1 (продолжение). Рассмотрим часть дерева (a) без (вхождений) равенств -2_1, -1, -2_2, 0 и назовем ее (a_2). Это — вывод для $f(2) = 7$ из $h(0, 4) = 7$, $h(1, 7) = 7$ и (b_2).

Замечание 1. Можно спросить: зачем возиться с переводом? Основания к этому, конечно, такие же, какими было вызвано употребление специального символизма в арифметической формальной системе гл. IV, отличного от символизма содержательной арифметики. А именно: переход от «φ», «χ», «y», «z» к f, h, b, c потребовался сейчас согласно лингвистической концепции формализма потому, что формальные символы должны выбираться из заранее фиксированного перечня символов, рассматриваемых в метаматематике как простые знаки. Чтобы пользоваться ими автонимно (§§ 50, 16), не опасаясь путаницы, бо́льшую часть их надо брать из специального алфавита. Согласно концепции формализма как обобщенной арифметики, можно при желании считать, что f есть (т. е. «f» является именем для) «φ» (но тогда оно есть имя только для «φ», а не иногда для «ψ» и т. д.). С другой стороны, «f», использованная, например, в определении „терма", служит именем для произвольной из f, g, h и т. д. (а если мы рассматриваем «f» как имя для «φ», «g» — для «ψ», «h» для «χ» и т. д., то «f» есть имя для произвольной из «φ», «ψ», «χ» и т. д.). Окончательно: перевод дает возможность отчетливо говорить о символах, как о чем-то отличном от функций, чисел и т. д., избавляя нас от постоянного употребления кавычек и связанных с ними деталей (таких, как «уголки» Куайна [1940]).

Допустим, что функция φ от n переменных определяется содержательно через $l\,(\geqslant 0)$ функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$ от $m_1, \ldots, m_l$ переменных соответственно. Прежде чем мы сможем рассуждать о том, «определяет» ли в рассматриваемом формализме данная система E равенств функцию φ через $\psi_1, \ldots, \psi_l$, мы должны условиться, какие функциональные буквы f, $\mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_l$ выражают φ, $\psi_1, \ldots, \psi_l$ соответственно.

Удобно пользоваться соглашениями, которые дают возможность определить эти буквы по самой системе E. Достаточно рассматривать системы E, в которых первый (слева) символ последнего равенства есть некоторая функциональная буква f; мы будем называть ее *главной функциональной буквой* E и употреблять ее для выражения φ. Различные функциональные буквы, которые входят в правые части равенств E, но не входят в левые, мы будем называть *данными функциональными буквами* E. Достаточно рассматривать системы E, в которых имеется l таких букв; мы будем употреблять в качестве таковых $\mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_l$ (в порядке их появления в первоначальном фиксированном перечне функциональных букв) для выражения соответственно $\psi_1, \ldots, \psi_l$. Достаточно пользоваться системами E, в которых f, $\mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_l$ входят только в термы, имеющие n, $m_1, \ldots, m_l$ аргументов соответственно (или, мы могли бы в наших теперешних целях любые две функциональные буквы, совпадающие по написанию, но с различными числами аргументов, считать различными функциональными буквами, как это мы делали с предикатными буквами в § 31). Остальные функциональные буквы (если таковые имеются), встречающиеся в равенствах E, мы будем называть *всмомогательными функциональными буквами* E.

При $l > 0$ нам потребуется иметь в качестве «исходных» не только равенства системы E, которые связаны со схемой, определяющей φ через $\psi_1, \ldots, \psi_l$, но также и равенства, которые дают значения функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$. Пусть «$\mathrm{E}_{\mathrm{g}_1 \ldots \mathrm{g}_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l}$» означает множество равенств $\mathrm{g}_j(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{m_j}) = \mathbf{y}$, где $\psi_j(y_1, \ldots, y_{m_j}) = y$ для $j = 1, \ldots, l$ и всех наборов $y_1, \ldots, y_{m_j}$ натуральных чисел ($\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{m_j}$), $\mathbf{y}$ означают цифры, соответствующие числам $y_1, \ldots, y_{m_j}$, y). Это множество равенств бесконечно[1]), если $l > 0$ (за исключением случая $m_1 + \ldots + m_l = 0$), и пусто при $l = 0$.

Все это мы выразим в следующем метаматематическом определении: система E равенств *рекурсивно определяет* φ *относительно* (или *через*) $\psi_1, \ldots, \psi_l$, если, для каждого набора $x_1, \ldots, x_n$ натуральных чисел,

---

[1]) Редактору осталось непонятным, как подобные рассмотрения согласуются с финитными установками автора. — *Прим. ред.*

$E^{\psi_1 \dots \psi_l}_{g_1 \dots g_l}$, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ (где f — главная функциональная буква E, $g_1, \dots, g_l$ — данные функциональные буквы E в порядке их появления в первоначальном перечне функциональных букв и $\boldsymbol{x}$ — цифра), тогда и только тогда, когда $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x$.

Другими словами, E рекурсивно определяет φ через $\psi_1, \dots, \psi_l$, если (для указанного рода f, $g_1, \dots, g_l$) $E^{\psi_1 \dots \psi_l}_{g_1 \dots g_l}$, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$, $\boldsymbol{x}$ — цифры, тогда (*свойство полноты*) и только тогда (*свойство непротиворечивости*), когда $f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \doteq \boldsymbol{x} \in E^{\varphi}_{f}$.

Примеры 1 и 2 (продолжение). Главная функциональная буква системы (b) есть f; h — вспомогательная функциональная буква; совершенно очевидно, что (b) рекурсивно определяет функцию φ (такую, что $\varphi(y) = 4$ при $y = 0$ и $\varphi(y) = 7$ при $y > 0$). Система (b_1) рекурсивно определяет $\chi(= C^2_7)$, а (b_2) рекурсивно определяет φ через χ, причем h — данная функциональная буква.

Теорема II. *Если φ примитивно-рекурсивна относительно $\psi_1, \dots, \psi_l$, то существует система* E *равенств, которая рекурсивно определяет φ через $\psi_1, \dots, \psi_l$.*

Совершенно очевидно, что такая система E может быть получена путем перевода в наш формализм применений схем каждого примитивно-рекурсивного построения $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ функции φ из $\psi_1, \dots, \psi_l$, если выбрать надлежащим образом функциональные буквы и (в случае надобности) добиться того, чтобы каждая ψ_j использовалась в применении некоторой схемы (так как наши соглашения требуют, чтобы $\psi_1, \dots, \psi_l$ выражались соответственно функциональными буквами $g_1, \dots, g_l$, каждая из которых встречается в E). Однако мы проведем подробный метаматематический анализ с пятью леммами, чтобы в дальнейшем иметь основу для краткого изложения подобных вещей.

Под *главной ветвью* вывода мы будем понимать ветвь, которая, будучи прослежена вверх от конечного равенства, содержит бóльшую посылку при каждом применении R2. Равенство, стоящее в вершине главной ветви, мы будем называть *главным равенством*. Выводы малых посылок применений R2 вдоль главной ветви (входящие в данный вывод как части) мы будем называть *вносящими выводами*.

Пример 2 (продолжение). Главные ветви вывода (a), если их читать сверху вниз, состоят из равенств под номерами 4_1, 8, 9, 10. Главным равенством служит $f(b') = h(b, f(b))$. Два вносящих вывода — это деревья, оканчивающиеся на 7 и на 2.

Главная ветвь вывода равенства вида $f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, где f — функциональная буква, а $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$, $\boldsymbol{x}$ — цифры, если ее читать сверху вниз, состоит из нуля или более применений R1, за которыми следуют нуль или более применений R2. Путем применений R1 вместо переменных главного равенства подставляются соответствующие цифры, пока левая часть не превратится в $f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$. Путем применений R2 части $h(\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_p)$ правой части заменяются на соответствующие цифры $\boldsymbol{z}$ (это относится как к первоначально имевшимся частям, так и к частям, в свою очередь появившимся в результате таких замен), пока правая часть не превратится в $\boldsymbol{x}$.

Под *тождественной схемой* мы понимаем схему:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_n).$$

Лемма. IIa. *Если* φ *непосредственно зависит от* $\psi_1, \ldots, \psi_l$ *по одной из схем* (I) — (V) *или по тождественной схеме, то система* E *равенств, которая получается путем перевода в наш формализм содержательных равенств этого применения схемы (при любом законном выборе функциональных букв), рекурсивно определяет* φ *через* $\psi_1, \ldots, \psi_l$.

Доказательство леммы IIa. Доказательства копируют содержательное рассуждение, посредством которого мы установили, что применения схемы определяют функции.

Схема (Vb). E имеет вид $\mathrm{f}(0, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n) = \mathrm{g}(\mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$, $\mathrm{f}(\mathrm{y}', \mathrm{x}_2, \ldots \ldots, \mathrm{x}_n) = \mathrm{h}(\mathrm{y}, \mathrm{f}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n), \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$. Возьмем $n-1$ любых чисел $x_2, \ldots, x_n$. Воспользуемся индукцией по x_1. Базис: $x_1 = 0$. Тогда $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots \ldots, x_n)$. Теперь получаем $\mathrm{E}_{\mathrm{gh}}^{\psi\chi}$, $\mathrm{E} \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ для $x = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — с помощью первого равенства E как главного равенства и равенства $\mathrm{g}(\boldsymbol{x}_2, \ldots \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ из $\mathrm{E}_{\mathrm{gh}}^{\psi\chi}$ как малой посылки для R2. Кроме того, чтобы вывести $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ для любой цифры $\boldsymbol{x}$, мы должны воспользоваться (с точностью до их порядка) тем же самым главным равенством и теми же подстановками цифр согласно R1, потому что ни из какого другого уравнения $\mathrm{E}_{\mathrm{gh}}^{\psi\chi}$, E при любых других подстановках мы бы не получили равенства с левой частью $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ (при $x_1 = 0$). Тогда замена согласно R2 также определяется однозначно. Итак, $\mathrm{E}_{\mathrm{gh}}^{\psi\chi}$, $\mathrm{E} \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}$ — цифра, только при $x = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Инд шаг: $x_1 = y'$. Аналогично.

Лемма IIb. *Пусть* D — *множество равенств (конечное или бесконечное),* F — *система равенств, левые части которых не содержат функциональных букв, входящих в равенства из* D, *а* g — *функциональная буква, входящая в* D. *Тогда* D, $\mathrm{F} \vdash \mathrm{g}(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m) = \boldsymbol{y}$, *где* $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{y}$ — *некоторые цифры, только в том случае, если* $\mathrm{D} \vdash \mathrm{g}(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m) = \boldsymbol{y}$.

Доказательство леммы IIb. Рассмотрим любой вывод равенства указанного вида $\mathrm{g}(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m) = \boldsymbol{y}$ из D, F. Возвратной индукцией по высоте t этого вывода мы докажем, что только равенства из D используются в нем в качестве исходных равенств (т. е. входящих в этот вывод на вершинах ветвей). Главное равенство принадлежит D, потому что его первый символ g входит в D и, следовательно, не входит в левую часть никакого равенства из F. Каждый вносящий вывод имеет высоту, меньшую чем t, и оканчивается равенством $\mathrm{h}(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p) = \boldsymbol{z}$, где h — функциональная буква, входящая в правую часть главного равенства и, следовательно, в D. Значит, по индуктивному предположению, вносящие выводы используют только исходные равенства из D.

Лемма IIc. *Пусть* D *и* F *такие же, как в лемме* IIb. *Пусть* G — *множество выводимых из* D *равенств вида* $\mathrm{g}(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m) = \boldsymbol{y}$, *где* g — *функциональная буква, входящая одновременно в* D *и* F, *а* $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{y}$ — *цифры. Пусть* f — *функциональная буква, не входящая в* D. *Тогда* D, $\mathrm{F} \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, *где* $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, $\boldsymbol{x}$ — *цифры, только в том случае, если* G, $\mathrm{F} \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$.

Доказательство леммы IIc. Возвратной индукцией по высоте t данного вывода равенства $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ из D, F. Главное равенство принадлежит F, потому что его первый символ f не входит ни в какое равенство из D. Каждая малая посылка на главной ветви имеет вид $\mathrm{h}(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p) = \boldsymbol{z}$, где h входит в правую часть главного равенства, а потому в F. Если h входит в D, то, в силу леммы IIq ,ц $(z_1, \ldots, z_p)=z$ является выводимым из D равенством вида $g(y_1, \ldots, y_m)=y$, т. е. $h(z_1, \ldots, z_p)=z$ ∋ G Если h не входит в D, то, согласно гипотезе мндукпии по t, $h(z_1, \ldots, z_p)=z$ выводимо из G, F.

Лемма IId. (1) *Пусть* $f_1, \ldots, f_k$ — *различные функциональные буквы, выписанные в порядке их первого появления в данном перечне функциональных букв.* (2) *Пусть* $\varphi_1=\psi_1, \ldots, \varphi_l=\psi_l$. (3) *Для* $i=l+1, \ldots, k$ $(k \geqslant l)$ *пусть* E_i *рекурсивно определяет* φ_i *через* $\varphi_{j_{i1}}, \ldots, \varphi_{j_{iq_i}}$ $(q_i \geqslant 0;\ j_{i1}, \ldots, j_{iq_i} < i)$ *с* f_i *в качестве главной функциональной буквы и* $f_{j_{i1}}, \ldots, f_{j_{iq_i}}$ *в качестве данных функциональных букв.* (4) *Пусть вспомогательные функциональные буквы в* E_i (*если таковые имеются*) *отличны от функциональных букв в каждом* E_j *при* $j \neq i$ *и от* $f_1, \ldots, f_k$. *Тогда для* $i=1, \ldots, k$: $E^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{f_1 \ldots f_l}, E_{l+1}, \ldots, E_k \vdash f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})=x$, *где* $x_1, \ldots, x_{n_i}$, x — *цифры, тогда и только тогда, когда* $f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})=x \in E^{\varphi_i}_{f_i}$.

Пример 2 (окончание). Пусть $k=2$; $l=0$; φ_1, φ_2 — примитивно-рекурсивные описания χ, φ; а E_1, E_2 суть (b_1), (b_2) с перестановкой f и h.

Пример 3. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ (с $k=9$, $l=3$) — примитивно-рекурсивные построения ζ, η, θ, U^3_1, θ_1, U^3_3, ψ, C^3_2, φ примеров 1 §§ 44 и 45, а E_i $(i=4, \ldots, 9)$ является равенством (c_i):

$$(c)\quad \begin{cases} f_4(a,\ c,\ b)=a, & (c_4)\\ f_5(a,\ c,\ b)=f_3(f_4(a,\ c,\ b)), & (c_5)\\ f_6(a,\ c,\ b)=b, & (c_6)\\ f_7(a,\ c,\ b)=f_2(f_6(a,\ c,\ b),\ f_5(a,\ c,\ b)) & (c_7)\\ f_8(a,\ c,\ b)=2, & (c_8)\\ f_9(a,\ c,\ b)=f_1(f_4(a,\ c,\ b),\ f_7(a,\ c,\ b),\ f_8(a,\ c,\ b)). & (c_9)\end{cases}$$

Доказательство леммы IId. Легко видеть, в силу общих свойств символа $\vdash$, что $E^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{f_1 \ldots f_l}, E_{l+1}, \ldots, E_k \vdash f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})=x$, если $f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})=x \in E^{\varphi_i}_{f_i}$. Обратное мы докажем индукцией по k. Базис: $k=l$. Тогда $E_{l+1}, \ldots, E_k$ пусто. Заключение вытекает тогда из рассмотрения множества равенств $E^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{f_1 \ldots f_l}$ (ввиду того, что это множество не содержит ни одной посылки для R1 и ни одной большой посылки для R2). Индукционный шаг: $k>l$. По индуктивному предположению, только те равенства вида $f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})=x$ с $i<k$, которые принадлежат $E^{\varphi_i}_{f_i}$, выводимы из $E^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{f_1 \ldots f_l}$, $E_{l+1}, \ldots, E_{k-1}$. В силу гипотезы (3) для $i=k$ (мы записываем «φ» вместо «φ_k», «φ_{j_s}» вместо «$\varphi_{j_{ks}}$», «f» вместо «f_k» и т. д.), только те из равенств вида $f(x_1, \ldots, x_n)=x$, которые принадлежат E^{φ}_{f}, выводимы из $E^{\varphi_{j_1} \ldots \varphi_{j_q}}_{f_{j_1} \ldots f_{j_q}}$, E_k; по лемме IIc, никакие другие не становятся выводимыми при замене $E^{\varphi_{j_1} \ldots \varphi_{j_q}}_{f_{j_1} \ldots f_{j_q}}$ в перечне исходных равенств на

$$E^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{f_1 \ldots f_l}, E_{l+1}, \ldots, E_{k-1}.$$

Лемма IIe. *Пусть* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — *конечная последовательность функций, такая, что* φ_k *есть* φ *и для каждого* i $(i=1, \ldots, k)$ *либо* (A) φ_i *есть одна* *из функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$, либо* (B) *некоторая система* E_i *равенств рекурсивно определяет* φ_i *через* $\varphi_{j_{i1}}, \ldots, \varphi_{j_{iq_i}}$ $(q_i \geqslant 0;\ j_{i1}, \ldots, j_{iq_i} < i)$. *Тогда имеется система* E *равенств, которая рекурсивно определяет* φ *через* $\psi_1, \ldots, \psi_l$.

Доказательство леммы IIe. Можно добиться того, что каждое ψ вводится, согласно (A), как одно из φ и затем используется, согласно (B), как одно из $\varphi_{j_{i1}}, \ldots, \varphi_{j_{iq_i}}$ для некоторого φ_i, вводя некоторые применения тождественной схемы и увеличивая k (если только это не имело места с самого начала) (см. лемму IIa). Затем, переставляя и перенумеровывая различные φ и E_i н меняя (в случае необходимости) функциональные буквы в этих системах, мы можем свести ситуацию к той, которая описана в лемме IId, если в этой последней считать $k > l$, $\varphi_k = \varphi$ и в качестве данных функциональных букв в $E_{l+1}, \ldots, E_k$ взять $f_1, \ldots, f_l$. Возьмем тогда $E_{l+1}, \ldots, E_k$ в качестве E.

Доказательство теоремы II. Условия леммы IIe выполнены, в силу леммы IIa и условия теоремы.

§ 55. ОБЩЕ-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Схемы (I), — (V) не являются единственными схемами определения арифметических функций, — ab initio[1]) или через другие арифметические функции, - которые могут быть выражены при помощи систем равенств, содержащих только функциональные буквы, ′, числовые переменные и цифры.

Рассмотрим другие примеры; все эти примеры мы будем называть «рекурсиями». Мы будем сейчас рассматривать равенства на содержательном языке; чтобы сохранить их вид, который мы сейчас описали, мы устраним некоторые другие способы выражения, которыми пользовались в гл. IX, например, $\prod_{y<z}$ (#B), $\mu y_{y<z}$(#E), определение разбором случаев (#F).

Так, равенство (a) примера 1 § 46 мы можем сейчас переписать в виде

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \pi(0,\ y) = 1, \\ \pi(z',\ y) = (y + \varphi(z)) \cdot \pi(z,\ y), \\ \varphi(y) = \pi(y,\ y) \end{cases}$$

(определяя вспомогательную функцию π наравне с φ), в то время как равенство (a) примера 2 § 46 уже имеет рассматриваемый вид. В § 46 мы показали, что возвратные рекурсии сводимы к примитивным, т. е. та же функция может быть определена при помощи последовательных применений схем (I) – (V).

В качестве другого очень простого примера рассмотрим рекурсию

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \varphi(0,\ z) = z, \\ \varphi(y',\ z) = \varphi(y,\ \sigma(y,\ z)). \end{cases}$$

Она не является примитивной, потому что z не фиксируется в качестве параметра и вместо z на индукционном шаге определения подставляется $\sigma(y,\ z)$. Эта рекурсия тоже может быть сведена к примитивной рекурсии. Расписывая подробно (b) для $y = 0, 1, 2, \ldots$ (как мы расписывали (1) в § 43), находим, что значение $\varphi(y,\ z)$ есть

$$\sigma(0,\ \sigma(1,\ \sigma(2,\ \ldots, \sigma(y-3,\ \sigma(y-2,\ \sigma(y-1,\ z)))\ \ldots))).$$

[1]) Изначально (лат.); здесь — «при отсутствии исходных функций». — *Прим. перев.*

Рассмотрим последовательность чисел z, $\sigma(y-1, z)$, $\sigma(y-2, \sigma(y-1, z))$, ..., $\sigma(0, \sigma(1, \sigma(2, \ldots, \sigma(y-3, \sigma(y-2, \sigma(y-1, z)))\ldots)))$, которая возникает при построении этого значения изнутри вместо того способа, который дает нам (b). Эти числа являются значениями функции $\mu(u, y, z)$, определенной посредством примитивной рекурсии

$$(\mathrm{b}_1) \qquad \begin{cases} \mu(0, y, z) = z, \\ \mu(u', y, z) = \sigma(y \dot{-} u', \mu(u, y, z)) \end{cases}$$

для $u = 0, 1, 2, \ldots, y$. Так как значение этой функции для $u = y$ совпадает со значением $\varphi(y, z)$, то

$$(\mathrm{b}_2) \qquad \varphi(y, z) = \mu(y, y, z);$$

можно также показать индукцией по u, что

$$(\mathrm{c}) \qquad \mu(u', y', z) = \mu(u, y, \sigma(y, z)),$$

и затем, что φ, определенная посредством (b_1) и (b_2), удовлетворяет (b).

Аналогичным образом Петер [1934, 1935a][1]) показала, что каждая рекурсия (именуемая „гнездиой"), в которой $\varphi(0, z)$ есть заданная функция от z, а $\varphi(y', z)$ явно выражается через y, z, заданные функции (и константы) и $\varphi(y, t)$ как функцию от t, сводима к примитивной рекурсии.

Имеются ли рекурсии, которые не сводимы к примитивной рекурсии, в частности, может ли рекурсия быть использована для определения функции, не являющейся примитивно-рекурсивной?

Эта проблема была поставлена Гильбертом [1926] в связи с одним предположением, касающимся континуум-проблемы, и решена Аккерманом [1928]. Пусть $\xi_0(b, a) = a + b$, $\xi_1(b, a) = a \cdot b$, $\xi_2(b, a) = a^b$, и пусть эта последовательность функций будет продолжена при помощи последовательных примитивных рекурсий вида $\xi_{n'}(0, a) = a$, $\xi_{n'}(b', a) = \xi_n(\xi_{n'}(b, a), a)$ $(n \geqslant 2)$, так что, например, $\xi_3(b, a) = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ с b показателями. Будем теперь рассматривать $\xi_n(b, a)$ как функцию $\xi(n, b, a)$ от всех трех переменных. Пусть α — примитивно-рекурсивная функция, определенная следующим образом:

$$(\mathrm{d}) \qquad \alpha(n, a) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ 1, & \text{если } n = 1, \\ a & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда следующая рекурсия определяет $\xi(n, b, a)$:

$$(\mathrm{e}) \qquad \begin{cases} \xi(0, b, a) = a + b, \\ \xi(n', 0, a) = \alpha(n, a), \\ \xi(n', b', a) = \xi(n, \xi(n', b, a), a). \end{cases}$$

Это — пример «двойной рекурсии», т. е. рекурсии по двум переменным одновременно. Если бы функция $\xi(n, b, a)$, определенная посредством (e), была примитивно-рекурсивна, то функция $\xi(a)$ от одной переменной, явно определенная через нее равенством

$$(\mathrm{f}) \qquad \xi(a) = \xi(a, a, a),$$

также была бы примитивно-рекурсивной. Исследование Аккермана показывает, что $\xi(a)$ возрастает с увеличением a быстрее любой примитивно-рекурсивной функции от a (так же, как 2^a возрастает быстрее любого полинома от a), т. е. для любой данной примитивно-рекурсивной функции

---

[1]) Ср. также Петер [1951, § 5]. — *Прим. перев.*

$\varphi(a)$ можно найти натуральное число c, такое, что $\xi(a) > \varphi(a)$ для всех $a \geqslant c$. Таким образом, $\xi(a)$, а значит, и $\xi(n, b, a)$ (ибо $\xi(a)$ получается из нее посредством явного определения (f)) не являются примитивно-рекурсивными функциями. Этот пример был упрощен Петер [1935] (см. также Гильберт и Бернайс [1934, стр. 330 и след.]) и Р. Робинсоном [1948].

Отличный от этого метод был применен Петер [1935] для построения другого примера. Класс первоначальных функций, определимых посредством схем (I) — (III), счетен. Следовательно, класс примитивно-рекурсивных функций, определимых с помощью точно одного применения схемы (IV) или (V), счетен, потому что множество наборов из $m+1$ функции $\psi, \chi_1, \ldots, \chi_m$ для (IV) или пар ψ, χ (или q, χ) для (V), образованных из элементов счетного класса, счетно (§ 1). Далее, счетно множество примитивно-рекурсивных функций, определимых с помощью двух применений схем (IV) или (V), и т. д. Таким образом, класс всех примитивно-рекурсивных функций счетен, что можно было бы обнаружить также, нумеруя системы E теоремы II § 54. В частности, счетное множество образуют примитивно-рекурсивные функции от одной переменной. Следовательно, как показывает диагональный метод Кантора (§ 2), ими не могут исчерпываться все арифметические функции от одной переменной; и если

$$\varphi_0(a), \quad \varphi_1(a), \quad \varphi_2(a), \ldots$$

некоторая их нумерация, допускающая повторения (т. е. какой-либо бесконечный перечень этих функций, в котором каждая встречается хотя бы однажды), то $\varphi_a(a)+1$ есть арифметическая функция от одной переменной, не входящая в нумерацию и, следовательно, не примитивно-рекурсивная. Перечисляющая функция $\varphi(n, a)$, такая, что $\varphi(n, a) = \varphi_n(a)$, есть функция от двух переменных, не являющаяся примитивно-рекурсивной, так как $\varphi_a(a)+1 = \varphi(a, a)+1$. Конечно, этим показано только, что можно найти арифметические функции $\varphi_a(a)+1$ и $\varphi(n, a)$, не являющиеся примитивно-рекурсивными. Петер же показала, что для надлежащей нумерации (с повторениями) примитивно-рекурсивных функций от одной переменной перечисляющая функция может быть определена посредством двойной рекурсии (помимо применений схем (I) — (V)).

Пример 1. Можно ли с помощью двойных рекурсий получить предикат, который не был бы примитивно-рекурсивным? Да, потому что функция $1 \dot{-} \varphi(a, a)$ принимает только значения 0 и 1 и не может встретиться в рассмотренной выше нумерации, следовательно, она служит представляющей функцией для предиката, который не является примитивно-рекурсивным (Сколем [1944]).

Петер [1936] изучает k-кратные рекурсии для любого целого положительного числа k. Среди них содержатся примитивные рекурсии для $k=1$, двойные рекурсии для $k=2$ [1]) и т. д. Она показывает, что для каждого из последовательных значений k получаются новые функции. Функции, которые можно определить с помощью рекурсий порядков до k (и явных определений), она называет «k-рекурсивными» [1]). Она показывает, что каждая 2-рекурсивная функция определима посредством единственной двойной рекурсии вида

$$\text{(g)} \qquad \begin{cases} \varphi(0, b) = \varphi(n, 0) = 1, \\ \varphi(n', b') = \alpha(n, b, \varphi(n, \beta(n, b, \varphi(n', b))), \varphi(n', b)), \end{cases}$$

[1]) Так что двойные рекурсии можно называть также двукратными. — *Прим. ред.*

помимо применений схем (I) — (V); и аналогично (со схемой, принимающей вид (g) при $k=2$) для каждого $k \geqslant 2$.

Пример 2. Чтобы покончить с вопросом, возникшим в § 45, допустим, что φ 3-рекурсивна, но не 2-рекурсивна, а ψ 2-рекурсивна, но не 1-рекурсивна, т. е. не примитивно-рекурсивна. Тогда предложение «если ψ примитивно-рекурсивна, то φ примитивно-рекурсивна» истинно тривиальным образом, но предложение «φ примитивно-рекурсивна относительно ψ» ложно, так как иначе φ была бы 2-рекурсивной.

Эти вопросы рассматриваются в монографии Петер [1951] (которая еще не была доступна автору при написании этой книги).

Не следует ожидать, что k-кратные рекурсии с конечными k исчерпывают возможности для определения новых функций по рекурсии. Петер [1950] использует «трансфинитные рекурсии» (впервые употребленные Аккерманом [1940]) для определения новых функций.

Это ставит нас перед проблемой—можем ли мы охарактеризовать каким-либо точным образом понятие произвольной «рекурсии» или класс всех «рекурсивных функций».

Схемы (I) —(V), (a), (b), (e) и другие, указанные выше примеры схем для определения функций, которые мы до сих пор соглашались называть «рекурсиями», наделены двумя чертами: (i) они выражаются посредством равенств способом, который был проанализирован формально в § 54 (в частности, для (I)—(V)); (ii) они являются, в той или иной форме, определениями с помощью математической индукции, за исключением тривиальных случаев, когда они являются явными определениями.

Характеристика всех «рекурсивных функций» была получена путем определения „обще-рекурсивной функции“ Гёделем [1934], который основывался на одной идее Эрбрана. Это определение получается путем смелого обобщения, которое состоит в том, что черта (i) сама принимается за определение.

Итак, мы говорим, что функция φ *обще-рекурсивна*, если имеется система E уравнений, которая определяет ее рекурсивно (§ 54, при $l=0$).

Этот выбор определения может показаться неожиданным, потому что слово «рекурсивно» имеет общий корень с глаголом «recur» («возвращаться», «повторяться»[1]), а математическая индукция является нашим методом рассмотрения повторяющихся процессов. Смысл этого выбора—не в том, что черта (ii) может отсутствовать при какой-либо конкретной рекурсии, а в том, что она переносится из самого определения на применения этого определения. Чтобы показать финитными средствами, что данная схема наделена чертой (i), за исключением тривиальных случаев, приходится так или иначе пользоваться математической индукцией. Но определение совокупности обще-рекурсивных функций предшествует попытке охарактеризовать заранее, в какой форме проявится содержательный принцип индукции. (Из теоремы Гёделя, § 42, мы знаем, что попытка дать такую характеристику посредством формальной арифметической системы оказывается неполной.)

При установлении точной формулировки эрбран-гёделевского определения обще-рекурсивной функции имеется некоторая свобода выбора деталей, так что можно привести формы определения, эквивалентные гёделевской, но несколько более простые (ср. Клини [1936] и [1943, § 8]). Настоящая формулировка совпадает с формулировкой Клини [1943], если не считать нескольких изменений в R1 и R2, которые несколько упрощают § 56, и включения в рассмотрение функций от нуля переменных. (Чтобы связать настоящее изложение

---

[1]) По латыни recurso—бегу назад, возвращаюсь и recurro—спешу назад, быстро возвращаюсь.—*Прим. ред.*

с изложением Клини [1943], заметим: (1) включение функций от 0 переменных не меняет понятия общей рекурсивности для функций от $n>0$ переменных. Действительно, можно показать, что если вспомогательная буква h входит в качестве терма с 0 аргументами в исходные равенства, то вхождения этого терма можно заменить на k(c), где k—новая функциональная буква, а c—новая переменная, не меняя класса выводимых равенств, содержащих только главную функциональную букву. После этого: (2) можно показать в нескольких строчках, что в точности одни и те же равенства вида $f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, где f — функциональная буква, а $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}$ — цифры, выводимые из данных исходных равенств при помощи R1 и R2, рассматриваемых в настоящем изложении, и при помощи R1 и R2 из [1943]; или же — с незначительным усложнением — можно провести рассмотрения §§ 54 и 56 при помощи R1 и R2 из [1943].)

Функция φ *обще-рекурсивна относительно* функций или *над* функциями $\psi_1, \ldots, \psi_l$, если имеется система E равенств, которая рекурсивно определяет φ через $\psi_1, \ldots, \psi_l$ (§ 54)[1]. В этом определении в качестве случая $l=0$ содержится определение обще-рекурсивной функции. При $l>0$ (Клини [1943]) мы обычно рассматриваем схему или оператор $\varphi = F(\psi_1, \ldots, \psi_l)$ (§ 47), который определяет арифметическую функцию φ от n переменных через $\psi_1, \ldots, \psi_l$ для любых l арифметических функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$ от $m_1, \ldots, m_l$ переменных соответственно или для любых таких функций, подчиненных некоторым ограничениям. Тогда, если E можно задать независимо от $\psi_1, \ldots, \psi_l$ (при фиксированных $n, l, m_1, \ldots, m_l$), мы говорим, что схема или оператор F является обще-рекурсивной (обще-рекурсивным) или что φ *равномерно обще-рекурсивна относительно* $\psi_1, \ldots, \psi_l$[2]. Так как в нашем изложении всегда будет иметь место равномерность относительно функций ψ (подчиненных тем или иным высказанным ограничениям), мы обычно будем опускать слово «равномерно», кроме тех случаев, когда оно сохраняется для большей выразительности. (В отличие от случая примитивно-рекурсивных функций § 47, если первоначальная схема применима при некотором ограничении на $\psi_1, \ldots, \psi_l$, то здесь мы не приходим к заключению, что эта схема может быть продолжена до некоторой обще-рекурсивной схемы, определяющей φ без ограничений на $\psi_1, \ldots, \psi_l$.)

Перефразируя результаты лемм IIa и IIe с помощью этой терминологии, мы теперь получаем:

Теорема II (вторая форма). *Если φ определена через $\psi_1, \ldots, \psi_l$ путем ряда применений обще-рекурсивных схем, то φ обще-рекурсивна относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$.*

В частности, схемы (I) — (V) *обще-рекурсивны.* Поэтому, *если φ примитивно-рекурсивна относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$, она обще-рекурсивна относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$. Любая примитивно-рекурсивная схема обще-рекурсивна. Если φ примитивно-рекурсивна, то она обще-рекурсивна.*

Для случая, когда функция φ уже известна, определение ее общей рекурсивности дается при помощи содержательного использования тех самых равенств, которые формализуются как E, или какими-нибудь другими средствами. Этим предусматривается наше намерение доказать, что различные функции и схемы, известные нам независимо от формализма рекурсивных

[1] Заметим, что если, согласно объявленной автором финитной точке зрения, понятие „арифметическая функция" отождествляется с понятием „обще-рекурсивная функция" (см. подстрочное примечание на стр. 203), то окажется истинным утверждение: «каковы бы ни были арифметические функции $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_l$, функция φ обще-рекурсивна относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$», с которым вряд ли согласился бы автор. — *Прим. ред.*

[2] См. подстрочное примечание на стр. 210. — *Прим. ред.*

функций, являются обще-рекурсивными (что мы уже проделали для примитивно-рекурсивных функций и схем). Для случая, когда φ заранее не известна, мы имеем: система E равенств рекурсивно определяет функцию от n переменных через $\psi_1, \ldots, \psi_l$, если для каждого набора $x_1, \ldots, x_n$ натуральных чисел имеется в точности одна цифра $\boldsymbol{x}$ такая, что $E_{g_1 \ldots g_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l}$, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, где f — главная функциональная буква E, а $g_1, \ldots, g_l$ — данные функциональные буквы в порядке их появления в данном перечне функциональных букв. В этом случае функция φ, рекурсивно определенная посредством E, есть функция, значение $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ которой для натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$ в качестве аргументов есть натуральное число x, для которого это $\boldsymbol{x}$ является цифрой.

Как и в случае примитивной рекурсивности (§§ 45, 47), понятие общей рекурсивности для функций обобщается на предикаты и на смешанные случаи с помощью представляющих функций для предикатов.

§ 56. АРИФМЕТИЗАЦИЯ ФОРМАЛИЗМА РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теперь мы рассмотрим формализм рекурсивных функций в виде обобщенной арифметики описанного в § 50 рода. Ниже мы, как в § 51, выпишем рекурсивные определения для этой обобщенной арифметики. Одновременно мы укажем, как при помощи гёделевской нумерации перейти к простой арифметике, аналогично тому, как в § 52.

В этой обобщенной арифметике будет иметься шесть нулей, которым мы сопоставим следующие гёделевские иомера:

Нули:	=	′	0	a	$_{\mathsf{I}}$	f
Сопоставленные гёделевские номера:	15	21	23	25	27	29

Операцию „следования за“ мы считаем применимой к любому положительному числу вещей, т. е. все натуральные числа допускаются теперь в качестве значений s.

Перечнем $f, g, h, \ldots$ функциональных букв нам будут служить вещи $f, (_{\mathsf{I}}, f), (_{\mathsf{I}}, (_{\mathsf{I}}, f)), \ldots$ (иногда мы их будем записывать в виде $f, f_{\mathsf{I}}, f_{\mathsf{II}}, \ldots$), которые строятся из нулевой вещи f таким же образом, как (числовые) переменные из нулевой вещи a.

Терм вида $f(r_1, \ldots, r_n)$, где f — функциональная буква, а $r_1, \ldots, r_n$ — термы ($n \geqslant 0$), мы будем представлять в виде вещи $(f, r_1, \ldots, r_n)$. Это означает, в частности, что функциональная буква f и терм $f(r_1, \ldots, r_n)$ при $n = 0$, хотя они обычно и записываются лингвистически одинаково, не рассматриваются как одна и та же вещь; в обобщенной арифметике первая из них есть f, а вторая — (f). (Но все еще каждому значимому лингвистическому объекту сопоставляется единственная вещь, если мы рассматриваем лингвистическую запись $f(r_1, \ldots, r_n)$ при $n = 0$ без скобок в виде «f» просто как сокращение.) Например, равенство $f = 0$ есть вещь $(=, (f), 0)$.

Система равенств $e_0, \ldots, e_s$ представляется в виде вещи $(e_0, \ldots, e_s)$.

При переходе с помощью гёделевской нумерации от обобщенной арифметики к арифметике натуральных чисел пункты, использующие переменное число $s+1$ предшественников, рассматриваются с помощью #$\#$E и 20 (§ 45). Для этих пунктов (и нескольких других определений) мы добавляем соответствующий арифметический пункт (или определение).

Определения метаматематических предикатов и функций для формализма рекурсивных функций, имеющего вид обобщенной арифметики

Df1. y — *цифра*. (Сокращение: $\mathfrak{N}(y)$.) Так же, как Dn1 в § 51.

Df2. y — *переменная*. (Сокращение: $\mathfrak{V}(y)$.) Так же, как в Dn2.

Df3. y — *функциональная буква*. (Сокращение: $\mathfrak{FL}$(y).) Аналогично Df2.

Df4. y — *терм*. (Сокращение: $\mathfrak{Tm}$(y).)

1. y $\asymp$ 0.
2. y — переменная.
3. y $\asymp$ r′ (т. е. y $\asymp$ (′, r)), где r — *терм*.
4. y $\asymp$ f(r$_1$, ..., r$_n$) (т. е. y $\asymp$ (f, r$_1$, ..., r$_n$), см. § 50), где f — функциональная буква, а r$_1$, ..., r$_n$ — *термы* ($n \geqslant 0$).

$FL((y)_0)\ \&\ (i)_{0<i<\mathrm{lh}(y)} Tm((y)_i)$.

Df5. z — *равенство*. (Сокращение: $\mathfrak{Eq}$(z).)

1. z $\asymp$ r = s, где r и s — термы.

Df6. Z — *система равенств*. (Сокращение: $\mathfrak{SE}$(Z).)

1. Z $\asymp$ (z$_0$, ..., z$_s$), где z$_0$, ..., z$_s$ — равенства.

$\mathrm{lh}(z) > 0\ \&\ (i)_{i<\mathrm{lh}(z)} Eq((z)_i)$.

Df7. (t — терм, x — переменная, e — терм или равенство, и) d получается из e путем *подстановки* t вместо x. (Сокращение: $\mathfrak{Sb}$(d, e, t, x).)

1. t — терм, x — переменная, e $\asymp$ x и d $\asymp$ t.

2—3. t — терм, x — переменная, e есть 0 или переменная $\not\asymp$ x и d $\asymp$ e.

4. t — терм, x — переменная, e — терм или равенство вида (e$_0$, e$_1$, ..., e$_n$), a d есть (d$_0$, d$_1$, ..., d$_m$), где $m = n$, e$_0$ $\not\asymp$ |, d$_0$ $\asymp$ e$_0$, $\mathfrak{Sb}$(d$_1$, e$_1$, t, x), ..., $\mathfrak{Sb}$(d$_n$, e$_n$, t, x).

$Tm(t)\ \&\ V(x)\ \&\ (Tm(e) \vee Eq(e))\ \&\ \mathrm{lh}(e) > 0\ \&\ \mathrm{lh}(d) = \mathrm{lh}(e)\ \&$
$(e)_0 \neq 27\ \&\ (d)_0 = (e)_0\ \&\ (i)_{0<i<\mathrm{lh}(e)} Sb((d)_i,\ (e)_i,\ t,\ x)$.

Df8. (e — терм или равенство, x — переменная и) e *содержит* x. (Сокращение: $\mathfrak{Ct}$(e, x).) Аналогично Dп6.

Df9. c — *непосредственное следствие* из d (по правилу R1). (Сокращение: $\mathfrak{Cn}$(c, d).)

*1. d — равенство и существуют такие (переменная) y и цифра n, что d содержит y и $\mathfrak{Sb}$(c, d, n, y).

$Eq(d)\ \&\ (Ey)_{y<d} (En)_{n<c} [N(n)\ \&\ Ct(d, y)\ \&\ Sb(c, d, n, y)]$.

Если d — равенство и $\mathfrak{Ct}$(d, y), то y — переменная $\prec$ d; а если еще $\mathfrak{Sb}$(c, d, n, y), то n $\prec$ c.

Df10. c — *непосредственное следствие* из d и e (по правилу R2). (Сокращение: $\mathfrak{Cn}$(c, d, e).)

*1. e $\asymp$ h($\boldsymbol{z}_1$, ..., $\boldsymbol{z}_p$) = $\boldsymbol{z}$, где h — функциональная буква, а $\boldsymbol{z}_1$, ..., $\boldsymbol{z}_p$, $\boldsymbol{z}$ — цифры ($p \geqslant 0$); d — равенство, не содержащее переменных, обозначим его d$_1$ = d$_2$; c имеет вид d$_1$ = c$_2$, где, для некоторого терма u, содержащего *a*, $\mathfrak{Sb}$(d$_2$, u, h($\boldsymbol{z}_1$, ..., $\boldsymbol{z}_p$), *a*) и $\mathfrak{Sb}$(c$_2$, u, $\boldsymbol{z}$, *a*).

$$Eq(e)\ \&\ FL((e)_{1,0})\ \&\ (i)_{0<i<\mathrm{lh}((e)_1)} N((e)_{1,i})\ \&\ N((e)_2)\ \&\ Eq(d)\ \&$$
$$(y)_{y<d} \overline{Ct}(d, y)\ \&\ c = 2^{15} \cdot 3^{(d)_1} \cdot 5^{(c)_2}\ \&\ (Eu)_{u<d} [Tm(u)\ \&\ Ct(u, 25)\ \&$$
$$\&\ Sb((d)_2, u, (e)_1, 25)\ \&\ Sb((c)_2, u, (e)_2, 25)].$$

Так как гёделевский номер переменной *a* меньше гёделевского номера любой функциональной буквы, то гёделевский номер переменной *a* меньше, чем гёделевский номер терма h($\boldsymbol{z}_1$, ..., $\boldsymbol{z}_p$); поэтому u имеет меньший гёделевский номер, чем d.

Df11. $\boldsymbol{x}$ — *цифра* для натурального числа x. (Сокращение: $\mathfrak{Nu}(\boldsymbol{x}, x)$.)
Так же, как в Dn11.

Df12. (Z — система равенств, а) Y — *вывод* из Z (по правилам R1 и R2). (Сокращение: $\mathfrak{D}$(Z, Y).)
1. Z — система равенств ($z_0, \ldots, z_s$), а Y $\asymp$ (z_i) ($i \leqslant s$).
$SE(z)\ \&\ (Ei)_{i<\mathrm{lh}(z)}[y = 2^{(z)_i}]$.
2. Y $\asymp$ (c, Y_1), где Y_1 — *вывод* из Z, а c — непосредственное следствие из $\{Y_1\}_0$.
3. Y $\asymp$ (c, Y_1, Y_2), где Y_1 Y_2 — *выводы* из Z, а c — непосредственное следствие из $\{Y_1\}_0$ и $\{Y_2\}_0$.

Df13. Y — вывод из Z равенства вида $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, где f — главная функциональная буква Z, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ — цифры для натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$ соответственно, а $\boldsymbol{x}$ — цифра (это для каждого фиксированного $n \geqslant 0$ рассматривается как предикат от Z, $x_1, \ldots, x_n$, Y). (Сокращение: $\mathfrak{S}_n(\mathrm{Z}, x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Y})$.)
1. Y — вывод из Z, $\{Y\}_0 \asymp \mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, где f — функциональная буква, $\mathrm{f} \asymp \{z_s\}_{1,0}$, если Z $\asymp$ ($z_0, \ldots, z_s$), и т. д.
$D(z, y)\ \&\ \mathrm{lh}(((y)_{0,1}) = n'\ \&\ FL(((y)_{0,1,0})\ \&\ (y)_{0,1,0} = (z)_{\mathrm{lh}(z)\dot{-}1,1,0}\ \&$
$\&\ Nu(((y)_{0,1,1}, x_1)\ \&\ \ldots\ \&\ Nu(((y)_{0,1,n}, x_n)\ \&\ N(((y)_{0,2})$.

Df14 $\mathfrak{Nu}^{-1}(\mathrm{y}) = \begin{cases} x, & \text{если y — цифра } \boldsymbol{x} \text{ (т. е. если } \mathfrak{Nu}(\mathrm{y}, x)), \\ \text{гёделевскому номеру y в противном случае.} \end{cases}$

$Nu^{-1}(y) = \mu x_{x<y}\, Nu(y, x)$.

Df15. $\mathfrak{U}(\mathrm{Y}) = \mathfrak{Nu}^{-1}(\{\mathrm{Y}\}_{0,2})$.

Имеет место $\mathfrak{U}(\mathrm{Y}) = x$, коль скоро Y есть вывод равенства вида $\mathrm{r} = \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}$ — цифра.
$U(y) = Nu^{-1}((y)_{0,2})$.

С помощью методов, рассмотренных в § 52, и указаний, сопровождающих эти определения, устанавливается

Лемма III. *Для каждого из предикатов и функций, определенных посредством* Df1 — Df15, *вполне соответствующий арифметический предикат или соответствующая арифметическая функция примитивно-рекурсивны.*

§ 57. μ-ОПЕРАТОР, НУМЕРАЦИЯ, ДИАГОНАЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА

Введем теперь в употребление оператор наименьшего числа μy (§ 45) с неограниченным y. Итак, для арифметического предиката $R(y)$, такого, что $(Ey)R(y)$, $\mu y R(y)$ = {наименьшему (натуральному числу) y такому, что $R(y)$}. Пока что мы пользуемся $\mu y R(y)$ только в тех случаях, когда выполнено условие $(Ey)R(y)$.

Таким образом, мы имеем новую схему

(VIa) $\qquad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[\chi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$

для определения функции φ от n переменных ($n \geqslant 0$) через любую функцию χ от $n+1$ переменных такую, что

(1a) $\qquad (x_1) \ldots (x_n)(Ey)[\chi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$.

Полагая $R(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv \chi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$, если нам уже дана χ, или, если нам сначала дан предикат R, выбирая в качестве χ его представляющую функцию, мы можем записать эту схему также в виде

(VIb) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$,

т. е. в виде определения функции φ через предикат R, такой, что

(Ib) $(x_1) \ldots (x_n)(Ey) R(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Теорема III. *При условии* (Ia) *схема* (VIa) *обще-рекурсивна. Это же верно для схемы* (VIb) *при условии* (Ib). Отсюда по теореме II следует: *Функция* φ, *определенная через функции и предикаты* Ψ *посредством схем* (I)—(VI), *причем для применений схемы* (VI) *выполнено условие* (I), *обще-рекурсивна относительно* Ψ. (Чёрч [1936], Клини [1936].)

Доказательство. Представим (VI) в виде схемы (VI′), удобной для перевода в формализм рекурсивных функций, а именно:

$$(\mathrm{VI}')\begin{cases}\pi(x_1, \ldots, x_n, y) = \prod\limits_{s<y} \chi(x_1, \ldots, x_n, s) & (\mathrm{VI}'_1)\\ \tau(z', 0, y) = y, & \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \tau(\pi(x_1, \ldots, x_n, y), \pi(x_1, \ldots, x_n, y'), y), & (\mathrm{VI}'_2)\end{cases}$$

где $\tau(u, v, y)$ — вспомогательная функция, которая остается не определенной при $u = 0$ или $v > 0$. (Другой простой метод см. у Клини [1943].)

Сначала содержательным образом убедимся в том, что (VI′) эквивалентна (VI). Рассмотрим любые фиксированные значения $x_1, \ldots, x_n$ и будем писать просто «$\chi(y)$» вместо «$\chi(x_1, \ldots, x_n, y)$» и т. д. Например, пусть при $y = 0, 1, 2 \ldots$ (см. первую строку ниже) $\chi(y)$ принимает значения, указанные во второй строке:

y	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\chi(y)$	3	1	2	0	9	0	1	5	...
$\pi(y) = \prod_{s<y} \chi(s)$	1	3	3	6	0	0	0	0	...

Согласно (VI), $\varphi = \mu y R(y) = \mu y[\chi(y) = 0]$, т. е. φ есть наименьшее значение y (первая строка), для которого во второй строке появляется 0, а именно φ есть 3 в нашем примере. Это число 3 можно также определить как единственное y, для которого в третьей строке некоторое число, отличное от 0 (в данном случае 6), непосредственно предшествует 0. Теперь мы следующим образом убеждаемся в том, что (VI'_2) в качестве значения φ дает это число — и никакого другого. Подставляя 3 вместо y в последнее равенство и вычисляя, получаем

$$\varphi = \tau(\pi(3), \pi(4), 3) = \tau(6, 0, 3) = 3.$$

Если бы мы подставили в последнее равенство вместо y число, отличное от 3, мы не сумели бы вычислить τ. (Если изменить пример таким образом, что окажется $\overline{(Ey)} R(y)$, то мы не сумеем получить никакого значения для φ.)

Пусть теперь E_2 — система равенств, которая получается, если осуществить перевод (VI'_2) с помощью, например, букв $p, t, f, a_1, \ldots, a_n, b$ для «π», «τ», «φ», «x_1», ..., «x_n», «y» соответственно.

В следующих предложениях (i) — (iv) рассматривается, как обстоит дело для любого фиксированного набора $x_1, \ldots, x_n$, причем (1) не используется. Для (i) и (ii) π должна быть функцией, определенной через χ или R посредством (VI'_1).

(i) *Если* $(Ey)R(x_1, \ldots, x_n, y)$, *то* $\mathrm{E}^{\pi}_{p}, \mathrm{E}_2 \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, *где* $x = \mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$. (ii) *Если* $\mathrm{E}^{\pi}_{p}, \mathrm{E}_2 \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, *где* $\boldsymbol{x}$ — *цифра, то* $(Ey)R(x_1, \ldots, x_n, y)$ *и* $x = \mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Доказательства повторяют наши содержательные рассуждения.

Но π примитивно-рекурсивна относительно χ (#B, § 45), поэтому имеется система E_1 равенств, которая рекурсивно определяет π через χ (теорема II § 54). Можно выбрать E_1 так, что p будет главной функциональной буквой, h — данной функциональной буквой и вспомогательные функциональные буквы не будут входить в E_2. Пусть E будет $E_1 E_2$. Тогда, очевидно, E_h^{χ}, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, если E_p^{π}, $E_2 \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$; обратное следует из леммы IIc § 54 так же как при доказательстве леммы IId. Используя это в (i) и (ii) и объединяя полученные результаты в одном утверждении, получаем

(iii) E_h^{χ}, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ *для некоторой цифры* $\boldsymbol{x}$ *тогда и только тогда, когда* $(Ey)R(x_1, \ldots, x_n, y)$, *причем* $x = \mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Теперь, используя (1) и (iii), для каждой n-ки $x_1, \ldots, x_n$ получаем, что E_h^{χ}, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}$ — цифра, тогда и только тогда, когда $x = \mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$; иначе говоря, E рекурсивно определяет функцию $\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$ через R.

Доказательство теоремы IV[1]). Допустим теперь, что предикат $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ обще-рекурсивен. Пусть D — система равенств, которая рекурсивно определяет представляющую функцию χ предиката R с главной функциональной буквой h и вспомогательные функциональные буквы которой не встречаются в E. Пусть F означает DE. Тогда

(iv) $F \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ *для некоторой цифры* $\boldsymbol{x}$ *тогда и только тогда, когда* $(Ey)R(x_1, \ldots, x_n, y)$, *и в этом случае* $x = \mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$

С помощью Df13 § 56 мы запишем этот результат (опуская последнее замечание) в следующей символической форме:

$$(2) \qquad (Ey)R(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv (EY)\mathfrak{S}_n(F, x_1, \ldots, x_n, Y).$$

Пусть теперь f — гёделевский номер F. По определению „вполне соответствующего арифметического предиката" из § 52, $S_n(f, x_1, \ldots, x_n, y) \equiv \{y$ есть гёделевский номер такой вещи Y, что $\mathfrak{S}_n(F, x_1, \ldots, x_n, Y)\}$. Следовательно, $(EY)\mathfrak{S}_n(F, x_1, \ldots, x_n, Y) \equiv (Ey) S_n(f, x_1, \ldots, x_n, y)$. Поэтому (2) дает

$$(3) \qquad (Ey)R(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv (Ey)S_n(f, x_1, \ldots, x_n, y).$$

По лемме III, предикат S_n примитивно-рекурсивен.

Для окончательной формулировки результата теоремы мы заменим S_n предикатом T_n, определенным следующим образом:

$$T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y) \equiv S_n(z, x_1, \ldots, x_n, y) \mathbin{\&} (t)_{t<y} \overline{S}_n(z, x_1, \ldots, x_n, t).$$

Для данных $z, x_1, \ldots, x_n$ предикат $T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ истинен не более чем для одного y (см. *174 § 41). Преимущества, получающиеся при использовании в качестве основного предиката теории T_n вместо S_n, обнаружатся в § 58. В силу ##D и E, предикат T_n также примитивно-рекурсивен. В силу содержательного аналога &-удал., *70 § 32 и *149a § 40 (принимая во внимание, что, в силу рекурсивности S_n,

$$S_n(z, x_1, \ldots, x_n, y) \vee \overline{S}_n(z, x_1, \ldots, x_n, y)$$

[1]) Формулировку теоремы IV см. ниже. — *Прим. ред.*

интуиционистски, в чем мы убедимся в §§ 60 и 62),

(4) $$T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y) \to S_n(z, x_1, \ldots, x_n, y),$$

(5) $$(Ey)\,T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y) \equiv (Ey)\,S_n(z, x_1, \ldots, x_n, y).$$

Теорема IV. *При каждом $n \geqslant 0$, каков бы ни был обще-рекурсивный предикат $R(x_1, \ldots, x_n, y)$, можно найти такие числа f и g, что*

(6) $$(Ey)R(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv (Ey)\,T_n(f, x_1, \ldots, x_n, y),$$

(7) $$(y)R(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv (y)\overline{T}_n(g, x_1, \ldots, x_n, y),$$

где $T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ — определенный выше примитивно-рекурсивный предикат. Аналогично при бо́льшем числе кванторов; например, если дан обще-рекурсивный предикат $R(a_1, \ldots, a_n, x, y)$, то существует число g, такое, что

(8) $$(Ex)(y)R(a_1, \ldots, a_n, x, y) \equiv (Ex)(y)\overline{T}_{n+1}(g, a_1, \ldots, a_n, x, y).$$

(Теорема о нумерации, Клини [1943].)

Доказательство (окончание). Формула (6) следует из (3), в силу (5). Чтобы получить (7), применим (6) к предикату $\overline{R}(x_1, \ldots, x_n, y)$, обозначая f для этого предиката через «g» и преобразуя результат с помощью содержательных аналогов *30 § 26 и *86 § 35 к виду

$$(y)\,\overline{\overline{R}}(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv (y)\,\overline{T}_n(g, x_1, \ldots, x_n, y).$$

Так как R обще-рекурсивен, имеем $R \vee \overline{R}$, а поэтому (см. *49c § 27) $\overline{\overline{R}} \equiv R$. Для (8) мы применим (7) с $n+1$ в качестве n формулы (7) и $a_1, \ldots, a_n, x$ в качестве $x_1, \ldots, x_n$ и y в качестве y и воспользуемся содержательным аналогом *72 § 33.

Комментарий. В силу этой теоремы, мы получаем нумерацию (с повторениями) предикатов формы $(Ey)\,R(x_1, \ldots, x_n, y)$ от n переменных, где R — обще-рекурсивный предикат, полагая $z = 0, 1, 2, \ldots$ в фиксированном предикате той же формы $(Ey)\,T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ от $n+1$ переменной. Короче говоря, $(Ey)\,T_n(z, x_1, \ldots, x_n y)$ „нумерует" предикаты формы $(Ey)\,R(x_1, \ldots, x_n, y)$ с обще-рекурсивным R. Аналогично $(y)\overline{T}_n(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ нумерует предикаты формы $(y)\,R(x_1, \ldots, x_n, y)$ с обще-рекурсивным R и т. д. Так как T_n, $\overline{T}_n$, $\overline{T}_{n+1}$ и т. д. примитивно-рекурсивны, то имеет место

Следствие. *Класс предикатов, выразимых в данной форме, представляющей собой фиксированную последовательность из одного или нескольких кванторов, предшествующих какому-нибудь предикату R, является одним и тем же, независимо от того, допускаются ли в качестве R обще-рекурсивные или примитивно-рекурсивные предикаты.* (Клини [1943]; это — обобщение одной леммы Россера [1936, стр. 87].)

Теперь мы на основе предыдущих перечислений канторовским диагональным методом докажем следующую теорему. Для любого данного обще-рекурсивного предиката $R(x, y)$, в силу (6) при $n = 1$, имеется число f такое, что

(9) $$(Ey)\,R(x, y) \equiv (Ey)\,T_1(f, x, y).$$

Подставляя в эту эквивалентность f вместо x, получаем

(10) $$(Ey)\, R(f, y) \equiv (Ey)\, T_1(f, f, y).$$

Отсюда с помощью содержательного аналога *50а § 27 следует, что

(11) $$(Ey)\, R(f, y) \not\equiv \overline{(Ey)}\, T_1(f, f, y).$$

Формула (12) теоремы получается с помощью содержательного аналога *86 § 35. Чтобы доказать (13), получаем с помощью (7)

$$(y)\, R(g, y) \equiv (y)\, \overline{T_1}(g, g, y) \equiv \overline{(Ey)}\, T_1(g, g, y) \not\equiv (Ey)\, T_1(g, g, y).$$

Чтобы получить (14) и (15) для произвольного данного обще-рекурсивного предиката $R(x)$, положим $R(x, y) \equiv R(x) \,\&\, y = y$ или $R(x, y) \equiv R(U_1^2(x, y))$ (§ 44), так что $R(x, y)$ обще-рекурсивен и $R(x) \equiv (Ey)\, R(x, y) \equiv (y)\, R(x, y)$.

Теорема V. (Часть I). *Для любого данного обще-рекурсивного предиката $R(x, y)$ можно найти числа f и g такие, что*

(12) $$(Ey)\, R(f, y) \not\equiv (y)\ \overline{T_1}(f, f, y),$$

(13) $$(y)\, R(g, y) \not\equiv (Ey)\, T_1(g, g, y).$$

И подавно для любого данного обще-рекурсивного предиката $R(x)$ можно найти числа f и g такие, что

(14) $$R(f) \not\equiv (y)\ \overline{T_1}(f, f, y),$$

(15) $$R(g) \not\equiv (Ey)\, T_1(g, g, y).$$

Комментарий. В силу этой теоремы, $(y)\, \overline{T_1}(x, x, y)$ является примером предиката формы $(y)\ R(x, y)$ с рекурсивным R, не выразимого в двойственной форме $(Ey)\, R(x, y)$ с рекурсивным R. Иными словами,

$$(x)\, [(y)\overline{T_1}(x, x, y) \equiv (Ey) R(x, y)]$$

не может иметь места ни для какого обще-рекурсивного предиката $R(x, y)$, причем для данного $R(x, y)$ число f из (12) является значением x, опровергающим эту формулу. И подавно, $(y)\overline{T_1}(x, x, y)$ не является обще-рекурсивным (см. (14)).

Предыдущее доказательство сводится просто к следующему: $(Ey)\, T_1(z, x, y)$ при $z = 0, 1, 2, \ldots$ является пересчетом (с повторениями) всех предикатов формы $(Ey)R(x, y)$ с рекурсивным R. В силу канторовского диагонального метода, $\overline{(Ey)}T_1(x, x, y)$ является предикатом, не входящим в этот пересчет. Этот предикат эквивалентен $(y)\, \overline{T}_1(x, x, y)$.

Из счетности множества всех систем E равенств мы можем и без помощи рассматриваемой теории заключить, что обще-рекурсивные предикаты образуют счетное множество, а потому счетно и множество всех предикатов формы $(Ey)\, R(x, y)$ с рекурсивным R. Следовательно, согласно результатам Кантора (§ 2), ими не могут исчерпываться все арифметические предикаты. Дополнительное содержание рассматриваемой теоремы состоит в том, что дается пример такого не обще-рекурсивного и не представимого в форме $(Ey)R(x, y)$ с рекурсивным R предиката, который имеет двойственную форму $(y)R(x, y)$ с рекурсивным R (и обратно).

Для краткости мы запишем следующую часть теоремы для предикатов от одной переменной a; но эта теорема таким же образом верна для предикатов от n переменных $a_1, \ldots, a_n$ при каждом $n \geqslant 1$. В доказательстве (b) мы используем классическую эквивалентность, которой интуиционистски мы не имеем. В соответствии с этим мы помечаем (b) знаком «C» (см. § 37). Все результаты, отмеченные таким образом в этой главе, относятся к арифметическому уровню.

Теорема V. (Часть II.) *Рассмотрим следующие формы предикатов*:

$$R(a)\quad \begin{matrix} (Ex)\,R(a,\,x) & (x)\,(Ey)\,R(a,\,x,\,y) & (Ex)\,(y)\,(Ez)\,R(a,\,x,\,y,\,z)\,\ldots \\ (x)\,R(a,\,x) & (Ex)\,(y)\,R(a,\,x,\,y) & (x)\,(Ey)\,(z)\,R(a,\,x,\,y,\,z)\,\ldots, \end{matrix}$$

для каждой из которых R *обще-рекурсивен. Для каждой из этих форм с* $k+1$ *квантором* ($k\geqslant 0$) *имеется предикат, представимый* (a) *в виде отрицания предиката данной формы* ((b)^{C} *в другой форме с* $k+1$ *квантором*), *но не представимый в данной форме и ни в какой форме с меньшим числом кванторов.* В силу части I, при $k=0$ «C» не обязательно. (Клини (1943); Мостовский [1947].)

Доказательство. Например, возьмем $k=1$. Из (8) (для $n=1$) мы получаем

$$(16)\qquad (Ex)(y)R(g,\,x,\,y)\not\equiv\overline{(Ex)}\,(y)\,\overline{T}_2\,(g,\,g,\,x,\,y)$$

совершенно так же, как из (6) была получена формула (11). Итак, $\overline{(Ex)}\,(y)\,\overline{T}_2\,(a,\,a,\,x,\,y)$ (классически эквивалентный $(x)(Ey)\,T_2(a,\,a,\,x,\,y)$, см. теорему 18 § 35) не выразим в форме $(Ex)\,(y)\,R\,(a,\,x,\,y)$. Аналогично, $\overline{(x)}\,(Ey)\,T_2\,(a,\,a,\,x,\,y)$ (классически эквивилентный $(Ex)\,(y)\,\overline{T}_2\,(a,\,a,\,x,\,y)$) не выразим в форме $(x)\,(Ey)\,R\,(a,\,x,\,y)$. И подавно, эти предикаты не выразимы ни в какой из трех форм с одним квантором или вовсе без кванторов.

Теорема VI. *При каждом* $n\geqslant 0$: (a) *Каждый обще-рекурсивный предикат* $P(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ *выразим в каждой из форм* $(Ey)R(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,y)$ *и* $(y)\,S(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,y)$, *где* R *и* S — *примитивно-рекурсивны.* (b)^{C} *Обратно, каждый предикат, выразимый в каждой из этих двух форм, где* R *и* S — *обще-рекурсивны, является обще-рекурсивным* [1]. (c) *Предикат* $P(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ *является обще-рекурсивным тогда и только тогда, когда* $P(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ *и* $\overline{P}(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ *выразимы каждый в форме* $(Ey)\,R\,(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,y)$ *с обще-рекурсивным* R *и* $(x_1)\,\ldots\,(x_n)\,[P(x_1,\,\ldots,\,x_n)\vee\overline{P}\,(x_1,\,\ldots,\,x_n)]$. (Клини [1943], Пост [1944], Мостовский [1947].)

Доказательства. (a) Возьмем $P(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,y)\equiv P(x_1,\,\ldots,\,x_n)\,\&\,y=y$, так что $P(x_1,\,\ldots,\,x_n)\equiv(Ey)\,P(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,y)\equiv(y)\,P(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,y)$, и применим следствие из теоремы IV. (b) Допустим, что $P(x_1,\,\ldots,\,x_n)\equiv$ $\equiv(Ey)\,R\,(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,y)\equiv(y)\,S\,(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,y)$. Тогда, согласно классической логике (см. *85 § 35), $\overline{P}\,(x_1,\,\ldots,\,x_n)\equiv(Ey)\,\overline{S}\,(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,y)$. В силу классического закона исключенного третьего, $P(x_1,\,\ldots,\,x_n)\vee\overline{P}\,(x_1,\,\ldots,\,x_n)$. Поэтому

$$P(x_1,\,\ldots,\,x_n)\equiv R\,(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,\mu y\,[R\,(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,y)\vee\overline{S}\,(x_1,\,\ldots,\,x_n,\,y)]),$$

где предикат, стоящий в правой части, обще-рекурсивен в силу теоремы III. (c) Ввиду последнего условия, утверждение имеет место и интуиционистски [2].

---

[1] См. добавление VII. — *Прим. перев.*

[2] Эта фраза касается достаточиости формулироваииого в пункте (c) условия обще-рекурсивиости предиката $P(x_1,\,\ldots,\,x_n)$. Необходимость указаиного условия вытекает из пуикта (a) и того факта, что всякий обще-рекурсивный предикат $P(x_1,\,\ldots,\,x_n)$ эффективно

У Клини [1943], [1944] предика называется «элементарным», если он может быть явно выражен по обычным синтаксическим правилам при помощи постоянных и переменных натуральных чисел, обще-рекурсивных предикатов, операторов $\rightarrow$, &, $\vee$, $^{-}$ исчисления высказываний и кванторов.

Теорема VII. (a) *Каждый арифметический по Гёделю предикат* (§ 48) *является «элементарным» и* (b) *обратно.* (c) *Каждый предикат, выразимый посредством кванторов и следующего за ними обще-рекурсивного предиката, выразим в одной из форм теоремы* V *с обще-рекурсивным* R. (d)^{C} *Каждый арифметический по Гёделю предикат выразим в одной из форм теоремы* V *с обще-рекурсивным* R.

Доказательства. (a) В силу ##1, 2, 14, C (§§ 44, 45), каждый предикат, представленный явно через $+$, $\cdot$, $=$, является примитивно-рекурсивным, а потому обще-рекурсивным. (b) Справедливо, в силу теоремы VI (a) и следствия из теоремы I § 49. (c) В то время как x пробегает по всем натуральным числам, набор значений примитивно-рекурсивных функций $(x)_0, \ldots, (x)_m$ пробегает (с повторениями) по всем наборам, составленным из $m+1$ натуральных чисел. Следовательно,

$$(17)\qquad (Ex_0) \ldots (Ex_m) A(x_0, \ldots, x_m) \equiv (Ex) A((x)_0, \ldots, (x)_m),$$

$$(18)\qquad (x_0) \ldots (x_m) A(x_0, \ldots, x_m) \equiv (x) A((x)_0, \ldots, (x)_m).$$

При помощи этих эквивалентностей последовательные кванторы одного и того же рода можно сжать в один. (d) В силу (a), содержательного аналога теоремы 19 § 35 и (c).

Замечание 1. Для любого предиката $A(i, x)$

$$(19)\qquad (i)_{i<a}(Ex) A(i, x) \equiv (Ex)(i)_{i<a} A(i, (x)_i).$$

Подставляя $\overline{A}(i, x)$ вместо $A(i, x)$ и пользуясь содержательными аналогами формул из *30, *85, *86, *58 и *49 (ср. доказательство следствий из теорем 8 и 18), мы заключаем классически, что имеет место двойственная эквивалентность

$$(20)^{C}\qquad (Ei)_{i<a}(x) A(i, x) \equiv (x)(Ei)_{i<a} A(i, (x)_i).$$

(Но интуиционистски (20), вообще говоря, не имеет места, в силу примера 4 § 82.) В силу *95 и *77, легко видеть, что $(i)_{i<a}(x) A(i, x) \equiv (x)(i)_{i<a} A(i, x)$; аналогично для $(Ei)_{i<a}(Ex)$, $(i)_{i<a}(x)_{x<b}$ и $(Ei)_{i<a}(Ex)_{x<b}$.

Хотя имеется существенная разница между понятиями „арифметический по Гёделю" и „элементарный", так что для перехода от одного к другому требуются две основные теоремы (теоремы I и IV), в дальнейшем мы для единообразия терминологии будем обычно говорить «арифметический по Гёделю» (хотя бы первоначально имелось в виду другое из этих понятий).

Пример 1. Кальмар [1943*] употребляет термин «элементарный» в другом смысле, эквивалентном следующему. Функция «элементарна», если она может быть явно выражена при помощи переменных натуральных чисел,

---

разрешим (см. ниже, § 60), т. е. дизъюнкция

$$P(x_1, \ldots, x_n) \vee \overline{P}(x_1, \ldots, x_n)$$

справедлива интуиционистски, так же как и равносильное (в силу интерпретации всеобщности) этой дизъюнкции утверждение

$$(x_1) \ldots (x_n) [P(x_1, \ldots, x_n) \vee \overline{P}(x_1, \ldots, x_n)].$$

— *Прим. ред.*

константы 1, функций $+$, $\cdot$ и $[a/b]$ и операций $\sum\limits_{y<z}$ и $\prod\limits_{y<z}$. Распространяя обычным образом это понятие на предикаты и на случай, когда имеются исходные функции и предикаты, мы последовательно обнаруживаем, что следующие примитивно-рекурсивные функции и предикаты из нашего списка ##1—21 (§§ 44, 45) являются элементарными и следующие из наших результатов ##A—G, в которых вместо «примитивно-рекурсивный» надлежит читать «элементарный», имеют место: #1, #2, #13, ##A—C, #3, #4, #9 ($\overline{\mathrm{sg}}(a)=[1/(a+1)]$), #10, #D, #E ($\prod\limits_{s\leqslant t}$ есть $\prod\limits_{s<t+1}$), #15 (представляющая функция есть $\mathrm{sg}\,[(a+1)/(b+1)]$), #6 ($a \dot{-} b = \mu c_{c\leqslant a}\,[\overline{b+c<a \vee a<b}]$), #5, #7, #8, #11, #12 ($\mathrm{rm}\,(a, b)=a\dot{-}b\,[a/b]$), #14, #F, #16, #17, #19 как функция от a при каждом фиксированном i; а также гёделевская β-функция (§ 48). Покажем теперь, что (A) *если* φ *получается из* ψ, χ (*из* χ) *посредством примитивной рекурсии* (*схемы* (V)) *и* $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n)\leqslant\eta(y, x_2, \ldots, x_n)$, *то* φ *элементарна относительно* ψ, χ, η (*относительно* χ, η). В доказательстве теоремы I § 49, (B) (см. случай (Vb)) имеет вид

$$(Ec)(Ed)R\,(y, x_2, \ldots, x_n, w, c, d),$$

где R элементарен относительно ψ и χ и

$$(c)(d)[R\,(y, x_2, \ldots, x_n, w, c, d)\rightarrow\varphi\ (y, x_2, \ldots, x_n)=w].$$

Поэтому $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n)=(\mu t\,R\,(y, x_2, \ldots, x_n, (t)_0, (t)_1, (t)_2))_0$. Таким образом, в силу #E, достаточно найти элементарную относительно η границу для t. Но, в силу § 48, мы можем выбрать $d=(\max(y, a_0, \ldots, a_y))!$, где $a_i=\varphi(i, x_2, \ldots, x_n)$, так что $d\leqslant D$, где $D=(y+\sum\limits_{i\leqslant y}\eta(i, x_2, \ldots, x_n))!$, и $c<\prod\limits_{i\leqslant y}\delta(d, i)=\prod\limits_{i\leqslant y}(1+(i+1)d)\leqslant C$, где $C=\prod\limits_{i\leqslant y}(1+(i+1)D)$. Таким образом, можно положить $t<2^E\cdot 3^C\cdot 5^D$, где $E=\eta(y, x_2, \ldots, x_n)$. Теперь p_i (#18) элементарна, потому что можно найти элементарную границу, например $p_i\leqslant 2^{2^i}$ (равенство имеет место только при $i=0$), как можно доказать возвратной индукцией по i, а именно следующим образом. Утверждение истинно при $i=0, 1$. При $i\geqslant 2$, $p_i\leqslant p_0\cdot p_1\cdot\ \ldots\ \cdot p_{i-1}-1$ (доказывается рассуждением, аналогичным тому, которое встречается в теореме Эвклида, § 40) $<2^{2^0}\cdot 2^{2^1}\cdot\ \ldots\ \cdot 2^{2^{i-1}}$ (с помощью индуктивного предположения) $=2^{2^0+2^1+\ldots+2^{i-1}}=2^{2^i-1}<2^{2^i}$. Функции #19, #20 ($\mathrm{lh}\,(i, a)\leqslant a$) #21 элементарны. Кроме того (ср. #G), (B) *если* φ *получается из* χ *посредством возвратной рекурсии* (3) § 46 *и* $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n)\leqslant\eta(y, x_2, \ldots, x_n)$, *то* φ *элементарна относительно* χ, η. Действительно, тогда $\prod\limits_{i<y}p_i^{\eta(i, x_2, \ldots, x_n)}$ является элементарной относительно η границей для $\tilde{\varphi}(y, x_2, \ldots, x_n)$ в примитивной рекурсии (4) § 46. Отсюда следует, что арифметические предикаты и функции, (вполне) соответствующие метаматематическим, определенным посредством Dn 1 — Dn 13a § 51 (см. лемму 19 § 52) и Df 1 — Df 15 § 56 (см. лемму III), являются элементарными. Действительно, в этих метаматематических определениях обобщенной арифметики рекурсии служат только для введения представляющих функций предикатов, так что в обычной арифметике к каждой из соответствующих рекурсий приложимо (B) с $\eta=1$. В частности, S_n (Df 13) и, следовательно, (C) T_n (*предшествует формулировке теоремы* IV) *и* U (Df 15) *элементарны*. Это соответствует результату Илоны Берецки ([1949*], не опубликовано) о том, что все предикаты и функции, примитивная рекурсивность которых показана у Клини [1936], являются элементарными или могут быть заменены на элементарные с сохранением хода рассуждений этой статьи (доказывается методом Кальмара [1943]). Итак, (D) *в следствии из теоремы* IV *можно добавить перед словом «предикаты» слова «или элементарные* (*в смысле*

Кальмара)». Кальмар [1943], [1948], [1950], [1950a] пользуется своими элементарными предикатами при изложении теоремы Гёделя и других результатов, которые в этой книге изложены с помощью примитивно-рекурсивных функций. Берецки [1951] показала, что примитивно-рекурсивная функция ${}^{b}a$, определенная посредством равенств ${}^{0}a=1$, ${}^{b'}a=a^{({}^{b}a)}$ (так что ${}^{b+1}a=\xi_3(b, a)$ в смысле § 55) не элементарна из-за того, что ${}^{a}a$ возрастает слишком быстро при возрастании a. Она получила и другой пример неэлементарной примитивно-рекурсивной функции путем построения примитивно-рекурсивной функции $\varphi(n, a)$, нумерующей элементарные функции от одной переменной (ср. § 55). Отсюда следует, что имеются неэлементарные примитивно-рекурсивные предикаты (аналогично примеру 1 § 55).

Теорема VIII^{C}. *Для примитивно-рекурсивных V и υ, определенных ниже, предикат $M(a, k)$, определенный следующей индукцией по k:*

$$\begin{cases} M(a, 0) \equiv V(a), \\ M(a, 2k+1) \equiv (Ex)\, M(\upsilon(a, x), 2k), \\ M(a, 2k+2) \equiv (x)\, M(\upsilon(a, x), 2k+1), \end{cases}$$

не является арифметическим по Гёделю (Клини [1943]).

Кальмар первый получил результат такого рода, который встречается у Сколема [1936—37, стр. 86 и след.]. Ср. также Ван [1953], Мостовский [1951].

Доказательство (может быть опущено). Заменим в выражении для $S_n(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ (Df13 § 56) «n'» на «$(x)_0'$», а «$Nu((y)_{0,1,1}, x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, Nu((y)_{0,1,n}, x_n)$» на «$(i)_{1\leqslant i\leqslant (x)_0} Nu((y)_{0,1,i}, (x)_i \dot{-} 1)$». В результате получим примитивно-рекурсивный предикат $S(z, x, y)$, такой, что

$$(21)\qquad S(z, 2^n \cdot p_1^{x_1'} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n'} \cdot p_{n'}^{u}, y) \equiv S_n(z, x_1, \ldots, x_n, y).$$

Положим $T(z, x, y) \equiv S(z, x, y) \,\&\, (t)_{t<y} \overline{S}(z, x, t)$. Тогда

$$(22)\qquad T(z, 2^n \cdot p_1^{x_1'} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n'} \cdot p_{n'}^{u}, y) \equiv T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y).$$

Положим теперь $V(a) \equiv T((a)_1 \dot{-} 1, a, (a)_{(a)_0'} \dot{-} 1)$. Тогда при $n \geqslant 1$

$$(23)\qquad V(2^n \cdot p_1^{x_1'} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n'} \cdot p_{n'}^{y'}) \equiv T_n(x_1, x_1, \ldots, x_n, y).$$

Положим $\upsilon(a, x) = a * 2^{x'}$ (см. #21 § 45). В таком случае $M(a, k)$ принимает при $k = 0, 1, 2, \ldots$ значения $V(a)$, $(Ex)V(a*2^{x'})$, $(x)(Ey)V((a*2^{x'})*2^{y'})$, ... Допустим, что предикат $M(a, k)$ — арифметический. Тогда, в силу теоремы VII (d), он выразим в одной из форм теоремы V. Например, допустим, что $M(a, k) \equiv (Ex)R(a, k, x)$ с рекурсивным R. Тогда $(Ex)R(2^2 \cdot 3^{a'}, 2, x) \equiv M(2^2 \cdot 3^{a'}, 2) \equiv (x)(Ey)V(((2^2 \cdot 3^{a'})*2^{x'})*2^{y'}) \equiv (x)(Ey)V(2^2 \cdot 3^{a'} \cdot 5^{x'} \cdot 7^{y'}) \equiv (x)(Ey)T_2(a, a, x, y)$. Но $(Ex)R(2^2 \cdot 3^{a'}, 2, x)$ имеет форму $(Ex)R(a, x)$ с рекурсивным R, а в доказательстве части II теоремы V мы видели, что $(x)(Ey)T_2(a, a, x, y)$ не выразим в этой форме.

При желании читатель может теперь перейти к §§ 60—62, которые только второстепенным образом зависят от §§ 58 и 59. Но в § 58 содержится результат, который является основным для §§ 63—66 и дальнейших параграфов.

§ 58. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА, ТЕОРЕМА ПОСТА

С помощью Df13 и Df15 (§ 56) можно следующим образом перефразировать определение „обще-рекурсивной функции“ (§§ 55, 54). Функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ является обще-рекурсивной тогда и только тогда, когда имеется система E уравнений (без данных функциональных букв), такая, что

(24) $$(x_1) \ldots (x_n)(EY)\mathfrak{S}_n(\mathrm{E}, x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Y}),$$

(25) $$(x_1) \ldots (x_n)(\mathrm{Y})[\mathfrak{S}_n(\mathrm{E}, x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Y}) \to \mathfrak{U}(\mathrm{Y}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)].$$

При переходе с помощью гёделевской нумерации от обобщенной арифметики к обычной предикат $\mathfrak{S}_n$ перейдет в S_n, предикат $\mathfrak{U}$ перейдет в U, система E перейдет в свой гёделевский номер e и (24) и (25) дадут

(26) $$(x_1) \ldots (x_n)(Ey)S_n(e, x_1, \ldots, x_n, y),$$

(27) $$(x_1) \ldots (x_n)(y)[S_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \to U(y) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)].$$

По лемме III, предикаты U и S_n примитивно-рекурсивны.

Из (26) и (27) следует, что функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ может быть выражена при помощи числа e таким образом:

(28) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = U(\mu y S_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)).$$

В силу (5) и (4) § 57, соотношения (26) и (27), а следовательно, и (28) остаются в силе при замене S_n на T_n.

Теорема IX. *При каждом $n \geqslant 0$ для любой данной обще-рекурсивной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ можно найти такое число e, что*

(29) $$(x_1) \ldots (x_n)(Ey)T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y),$$

(30) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = U(\mu y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)),$$

(31) $$(x_1) \ldots (x_n)(y)[T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \to U(y) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)],$$

где $T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ и $U(y)$ — определенные выше примитивно-рекурсивные предикат и функция. (Теорема о нормальной форме, Клини [1936, 1943].)

Преимущество употребления T_n вместо S_n состоит в том, что (31) имеет место для любого числа e, такого, что выполняются (29) и (30) (в то время как (26) и (28) могут выполняться, а (27) быть ложным, если e является гёделевским номером системы E равенств, не обладающей свойством непротиворечивости для рекурсивного определения φ).

В дальнейшем для любой обще-рекурсивной функции φ мы будем говорить, что всякое число e (независимо от того, является ли оно гёделевским номером системы E равенств, рекурсивно определяющей φ), такое, что имеют место (29) и (30) (а следовательно, и (31)), *рекурсивно определяет* φ или является *гёделевским номером* (*для*) φ.

Число e *рекурсивно определяет* обще-рекурсивный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ (или является его *гёделевским номером*), если оно рекурсивно определяет представляющую функцию предиката P. В этом случае

(32) $$\begin{aligned} P(x_1, \ldots, x_n) &\equiv (Ey)[T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \,\&\, U(y) = 0] \equiv \\ &\equiv (y)[T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \to U(y) = 0]. \end{aligned}$$

Чтобы конструктивно доказать обще-рекурсивность функции φ, надо построить систему равенств E, рекурсивно определяющих φ (или указать метод получения такой системы). Таким образом, эффективно задать обще-рекурсивную функцию означает задать E или гёделевский номер e.

Теория гёделевских номеров рекурсивных функций будет рассмотрена в следующей главе, § 65.

Пример 1. Каждая ли обще-рекурсивная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ выразима в виде $\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$, где R примитивно-рекурсивна (и имеет место (1b))? Указание: воспользоваться примером I § 55 и #E § 45. (Пост [1946a] пользуется другим методом.) Будем называть функцию $\theta(y)$ «универсальной», если для каждой обще-рекурсивной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ существует примитивно-рекурсивный предикат $R(x_1, \ldots, x_n, y)$, удовлетворяющий (1b) и такой, что $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \theta(\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y))$; будем, далее, называть $\theta(y)$ «функцией большого размаха», если $(x)(z)(Ey)_{y>z}\theta(y) = x$. Марков [1947c, 1949] показал, что достаточное и — классически — необходимое условие универсальности примитивно-рекурсивной функции θ состоит в том, чтобы она была функцией большого размаха. Кузнецов [1950] анонсирует дальнейшие результаты о таких функциях θ.

Следствие. *Каждая обще-рекурсивная функция φ определима посредством схем* (I) — (VI), *причем условие* (1) *выполняется для всех применений схемы* (VI). (Обращение теоремы III для пустого множества Ψ.)

Для простоты мы, начиная с теоремы IV, ограничивали наше рассмотрение функциями и предикатами, являющимися обще-рекурсивными в абсолютном смысле, т. е. рекурсивными относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$ при $l = 0$. Займемся теперь обобщением этой теории на относительную общую рекурсивность, т. е. на случай $l > 0$.

Мы увидим, что теорема IX и предшествующие ей в этом изложении результаты сохраняют силу, если вместо примитивно-рекурсивного предиката T_n взять предикат, примитивно-рекурсивный относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$. Рассмотрим сперва случай, когда $l = 1$ и $\psi (= \psi_1)$ является функцией от одной переменной ($m_1 = 1$).

Согласно определению (§ 55), φ обще-рекурсивна относительно ψ, если имеется система E равенств, которая рекурсивно определяет φ через ψ (§ 54). Если имеется хотя бы одна такая система E, то можно найти и такую систему, в которой данная функциональная буква g (имеющая гёделевский номер g) является первой в фиксированном перечислении функциональных букв.

Проведем теперь соответствующие изменения в Df12 и Df13 § 56.

Df12* (для $l = m_1 = 1$). (Z — система равенств, a) Y — *вывод* из E_g^ψ, Z (по R1 и R2). (Сокращение: $\mathfrak{D}^\psi(Z, Y)$.)

0*. Z — система уравнений и для некоторого натурального числа u_1 вещь Y есть $(g(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u})$, где $u = \psi(u_1)$.
$SE(z) \& y = 2 \exp 2^{15} \cdot (3 \exp 2^g \cdot 3^{(y)_{0,1,1}}) \cdot 5^{(y)_{0,2}} \&$
$\& (Eu_1)_{u_1<y} [Nu((y)_{0,1,1}, u_1) \& Nu((y)_{0,2}, \psi(u_1))]$.

1—3. Так же, как 1—3Df12, с заменой слов «из Z» на «из E_g^ψ, Z».

Df13* (для $l = m_1 = 1$). Так же, как Df13, с заменой слов «из Z» на «из E_g^ψ, Z» и «$D(z, y)$» на «$D^\psi(z, y)$». (Сокращение: $\mathfrak{S}_n^\psi(Z, x_1, \ldots, x_n, Y)$.)

То рассуждение, которым мы прежде воспользовались для доказательства того, что $D(z, y)$ и $S_n(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ примитивно-рекурсивны (лемма III § 56), показывает теперь, что $D^\psi(z, y)$ и $S_n^\psi(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ примитивно-рекурсивны относительно ψ; а вместо (26) и (27) для обще-рекурсивной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ мы имеем теперь для функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, обще-рекурсивной относительно ψ,

(33) $$(x_1) \ldots (x_n)(Ey) S_n^\psi(e, x_1, \ldots, x_n, y),$$

(34) $$(x_1) \ldots (x_n)(y)[S_n^\psi(e, x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow U(y) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)].$$

Можно было бы продолжать попрежнему; мы, однако, желаем показать, что зависимости от ϕ может быть придана некоторая специальная форма.

Производящая функция $\tilde{\phi}(y)$ $\left(=\prod_{i<y} p_i^{\phi(i)},\ \S\ 46\ (1)\right)$ для ϕ примитивно-рекурсивна относительно ϕ (#### A, B, 3, 18, §§ 44, 45).

С помощью § 46 (2), $\phi(u_1)$ в 0Df12* можно написать в виде $(\tilde{\phi}(y))_{u_1}$, так как $u_1 < y$, или даже в виде $(\tilde{\phi}(v))_{u_1}$ для любого $v \geqslant y$. Пусть $D^1(w, z, y)$ — предикат, который получится вместо $D^\phi(z, y)$, если в 0Df12* заменить $\phi(u_1)$ на $(w)_{u_1}$. Тогда D^1 примитивно-рекурсивен; в силу возвратной индукции по y (с рассмотрением случаев, соответствующих четырем пунктам в рекурсивных определениях D^1 и D^ϕ, ср. § 52),

$$(35)\qquad (v)_{v\geqslant y}[D^1(\tilde{\phi}(v), z, y) \equiv D^\phi(z, y)].$$

Используя $D^1(w, z, y)$ вместо $D^\phi(z, y)$ в Df13*, мы получаем примитивно-рекурсивный предикат $S_n^1(w, z, x_1, \ldots, x_n, y)$, такой, что

$$(36)\qquad (v)_{v\geqslant y}[S_n^1(\tilde{\phi}(v), z, x_1, \ldots, x_n, y) \equiv S_n^\phi(z, x_1, \ldots, x_n, y)].$$

Определим T_n^1 и T_n^ϕ следующим образом:

$$T_n^1(w, z, x_1, \ldots, x_n, y) \equiv S_n^1(w, z, x_1, \ldots, x_n, y) \,\&\, (t)_{t<y}\overline{S_n^1}(w, z, x_1, \ldots, x_n, t),$$

$$T_n^\phi(z, x_1, \ldots, x_n, y) \equiv T_n^1(\tilde{\phi}(y), z, x_1, \ldots, x_n, y).$$

Тогда T_n^1 примитивно-рекурсивен, а T_n^ϕ примитивно-рекурсивен относительно ϕ. При помощи (36) сначала с y, y, а затем с y, t в качестве v, y получаем

$$(37)\qquad T_n^\phi(z, x_1, \ldots, x_n, y) \equiv S_n^\phi(z, x_1, \ldots, x_n, y) \,\&\, (t)_{t<y}\overline{S_n^\phi}(z, x_1, \ldots, x_n, t).$$

Далее, с соотношениями (33), (34) и (37) можно обращаться так же, как прежде с (26), (27) и определением T_n (которое предшествует (4) в § 57).

Интуиционистски наши высказывания надо понимать как следствие той гипотезы, что индивидуальные значения для ϕ могут быть получены по мере надобности. Этой гипотезой обосновывается, например, выразимость данного значения $\phi(u_1)$ в виде $(\tilde{\phi}(v))_{u_1}$ при данном $v > u_1$, для чего требуются и остальные значения среди $\phi(0), \ldots, \phi(v-1)$; в силу этой гипотезы,

$$(t)_{t<y}[S_n^\phi(z, x_1, \ldots, x_n, t) \vee \overline{S_n^\phi}(z, x_1, \ldots, x_n, t)]$$

при данном y, для чего требуются значения $\phi(0), \ldots, \phi(y-1)$ (см. доказательство (5)).

Аналогично обобщаются результаты § 57, начиная с теоремы IV.

Случай любых l функций от $m_1, \ldots, m_l$ переменных соответственно можно свести к случаю $l = m_1 = 1$ (выбирая $\psi_i^*(x) = \psi_i((x)_1, \ldots, (x)_{m_i})$, $\phi = p_1^{\psi_1^*} \cdot \ldots \cdot p_l^{\psi_l^*}$), но его легко также рассмотреть непосредственно. Например, при $l = m_1 = 2$, $m_2 = 0$ мы определяем производящую функцию $\tilde{\psi}_1$ для ψ_1 (по обеим переменным) таким образом: $\tilde{\psi}_1(y, z) = \prod_{i<y} p_i \exp\left(\prod_{j<z} p_j \exp \psi_1(i, j)\right)$, тогда $\psi_1(s, t) = (\tilde{\psi}_1(y, z))_{s,t}$ при $s < y \,\&\, t < z$. Полагаем $\tilde{\psi}_2 = \psi_2$. Формулируем Df12* и Df13* для $l = m_1 = 2$, $m_2 = 0$. Затем вводим последовательно предикаты D^{ψ_1, ψ_2}, $S_n^{\psi_1, \psi_2}$, $D^{2,0}$, $S_n^{2,0}$, $T_n^{2,0}$ и полагаем

$$T_n^{\psi_1, \psi_2}(z, x_1, \ldots, x_n, y) \equiv T_n^{2,0}(\tilde{\psi}_1(y, y), \tilde{\psi}_2, z, x_1, \ldots, x_n, y).$$

В общем случае мы исходим из примитивно-рекурсивного предиката $T_n^{m_1, \ldots, m_l}$ от $n+l+2$ переменных и предиката $T_n^{\psi_1, \ldots, \psi_l}$ от $n+2$ переменных, примитивно-рекурсивного относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$.

Пусть Ψ — список из l функций и предикатов. Предыдущие рассуждения применимы, если взять в качестве $\psi_1, \ldots, \psi_l$ список, который получится из Ψ путем замены входящих в него предикатов (если таковые имеются) на их представляющие функции (см. конец § 55). Мы будем поэтому записывать $T_n^{\psi_1, \ldots, \psi_l}$ также в виде T_n^{Ψ}.

Определение „арифметического по Гёделю предиката“ (§ 48) переносится на случай $l > 0$ путем добавления функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$ к первоначальным функциям $+$ и $\cdot$; определение „элементарного предиката“ (§ 57 перед теоремой VII) — путем замены слов «обще-рекурсивный» на «обще-рекурсивный относительно Ψ». („Равномерность“ можно определить обычным образом, и соотношения, имеющие место в заключениях наших теорем, оказываются равномерными в случае равномерности соотношений, входящих в условия этих теорем.)

Теорема X. *Пусть $l, m_1, \ldots, m_l$ — фиксированные натуральные числа, а Ψ — список из l функций и предикатов от $m_1, \ldots, m_l$ переменных соответственно. Тогда теоремы* I, IV — IX *и их следствия сохраняют силу, если в них заменить слова «обще-рекурсивный», «примитивно-рекурсивный», «арифметический по Гёделю», «элементарный», «T_n», «V», «M» на «обще-рекурсивный относительно Ψ», «примитивно-рекурсивный относительно Ψ», «арифметический по Гёделю относительно Ψ», «элементарный относительно Ψ», «T_n^{Ψ}», «V^{Ψ}», «M^{Ψ}» соответственно (не меняя U и v).*

При ссылках на обобщенные таким образом теоремы I, IV — IX мы будем пользоваться звездочками. Например: Теорема IX*. *При каждом $n \geqslant 0$ для любой данной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, обще-рекурсивной относительно Ψ, можно найти такое число e, что*

(38) $(x_1) \ldots (x_n)(Ey)T_n^{\Psi}(e, x_1, \ldots, x_n, y)$,

(39) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = U(\mu y T_n^{\Psi}(e, x_1, \ldots, x_n, y))$,

(40) $(x_1) \ldots (x_n)(y)[T_n^{\Psi}(e, x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow U(y) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)]$,

где $U(y)$ — примитивно-рекурсивная функция, а $T_n^{\Psi}(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ — предикат, примитивно-рекурсивный относительно Ψ, определенные выше; например, при $l = m_1 = 1$, $T_n^{\Psi}(z, x_1, \ldots, x_n, y) \equiv T_n^1(\tilde{\psi}(y), z, x_1, \ldots, x_n, y)$, где $T_n^1(w, z, x_1, \ldots, x_n, y)$ — конкретный примитивно-рекурсивный предикат, определенный выше.

Если для числа e имеют место соотношения (38) и (39) (а следовательно, и (40)), мы будем говорить, что *e рекурсивно определяет φ относительно* (или *через*) Ψ или является *гёделевским номером φ по Ψ*, или является *гёделевским номером оператора* $\varphi = \mathsf{F}(\Psi)$. Подобно предыдущему, это понятие обобщается на случай предиката P с представляющей функцией φ.

Следствие. (a) *Каждый предикат P, обще-рекурсивный относительно арифметических по Гёделю предикатов Ψ, является арифметическим по Гёделю.* (*Аналогично, если P обще-рекурсивен относительно Ψ, Θ и предикаты из Ψ — арифметические по Гёделю, то P является арифметическим по Гёделю относительно Θ.*) (b)^C. *Предикат $M(a, k)$ теоремы* VIII *не является обще-рекурсивным относительно каких бы то ни было арифметических по Гёделю предикатов.*

Доказательство (a). По теореме VI* (a), предикат P выразим при помощи квантора и следующего за ним предиката R, примитивно-рекурсивного относительно Ψ. Но согласно следствию из теоремы I*, R оказывается арифметическим по Гёделю относительно Ψ; ввиду того, что предикаты из Ψ — арифметические по Гёделю, R, а следовательно, и P являются арифметическими по Гёделю.

В определении «элементарного предиката» (перед теоремой VII § 57) общие рекурсии разрешалось употреблять только прежде логических операций. Смысл следствия (a) состоит в том, что допущение обще-рекурсивных операций на всех стадиях (т. е. употребление их в любом порядке наряду с логическими операциями) не расширяет класса предикатов.

Естественно спросить, что происходит с предикатами, занимающими определенное место в шкале части II теоремы V (см. теорему VII (d)), если к ним применять обще-рекурсивные схемы.

Различие (для $k > 0$) между обеими k-кванторными формами отпадает, если начать применять примитивно-рекурсивные операции. Например, хотя $(Ex)T_1(a, a, x)$ не выразим в другой одно-кванторной форме $(x)R(a, x)$, его отрицание $\overline{(Ex)}T_1(a, a, x)$ является примитивно-рекурсивным относительно $(Ex)T_1(a, a, x)$ ($\#$D § 45) и допускает представление в форме $(x)R(a, x)$ (см. *86 § 35). Для любого предиката $P(a)$ представляющий предикат $P(a, w)$ (§ 41) представляющей функции (§ 45) предиката $P(a)$ может быть выражен в виде

$$(41) \qquad P(a, w) \equiv \{P(a) \,\&\, w = 0\} \vee \{\overline{P}(a) \,\&\, w = 1\}.$$

Этот предикат примитивно-рекурсивен относительно $P(a)$. Если $P(a) \equiv \equiv (Ex)T_1(a, a, x)$, то $P(a, w)$ не выразим ни в какой однокванторной форме: например, если $P(a, w) \equiv (x)R(a, w, x)$, то $(x)R(a, 0, x) \equiv P(a, 0) \equiv P(a) \equiv \equiv (Ex)T_1(a, a, x)$, что противоречит теореме V, если R рекурсивен.

Мостовский [1948a] строит (классически) пример предиката, который, (в силу (b) следующей теоремы) является обще-рекурсивным относительно предикатов 1-кванторных форм, но не может быть выражен через предикаты 1-кванторных форм посредством операций исчисления высказываний.

Следующая теорема и следствие из нее должны быть приписаны Посту на основании его резюме [1948], с которым автор познакомился уже после того, как настоящее изложение было готово (в 1949 г.).

Теорема XI^C. (a) *Если предикат P обще-рекурсивен относительно предикатов $Q_1, \ldots, Q_l$, имеющих каждый одну из k-кванторных форм теоремы* V, *то P выразим в обеих $(k+1)$-кванторных формах и* (b) *обратно.*

Доказательство теоремы VI (b) устанавливает утверждение (b) рассматриваемой теоремы, если на этот раз подразумевать под R и S надлежащие предикаты k-кванторных форм. Доказательство (a) будет проведено с помощью следующих лемм.

Лемма IV^C. *Представляющий предикат представляющей функции предиката любой из k-кванторных форм выразим в $(k+1)$-кванторной форме, начинающейся с квантора существования.*

Доказательство леммы IV. Например, допустим, что $P(a) \equiv (x)(Ey)R(a, x, y)$ с рекурсивным R. Тогда

$$P(a, w) \equiv \{(x)(Ey)R(a, x, y) \,\&\, w = 0\} \vee \{\overline{(x)}(Ey)R(a, x, y) \,\&\, w = 1\} \qquad \text{(согласно (41))}$$

$$\equiv \{(x_1)(Ey_1)R(a, x_1, y_1) \,\&\, w = 0\} \vee \{(Ex_2)(y_2)\overline{R}(a, x_2, y_2) \,\&\, w = 1\} \qquad \text{(см. *85, *86)}$$

$$\equiv (Ex_2)(x_1)(y_2)(Ey_1)[\{R(a, x_1, y_1) \,\&\, w = 0\} \vee \{\overline{R}(a, x_2, y_2) \,\&\, w = 1\}] \qquad \text{(см. *89—*92)}$$

$$\equiv (Ex)(y)(Ez)[\{R(a, (y)_0, z) \,\&\, w = 0\} \vee \{\overline{R}(a, x, (y)_1) \,\&\, w = 1\}] \qquad \text{(согласно (18))}.$$

Последнее выражение имеет вид $(Ex)(y)(Ez)R(a,w,x,y,z)$ с рекурсивным R. (Эта и следующая леммы могут быть также доказаны для форм, начинающихся с квантора общности.)

Лемма V. *Пусть* $\tilde{\phi}(a_1, \ldots, a_m)$ — *производящая функция для* $\phi(a_1, \ldots, a_m)$. *Если представляющий предикат функции* $\phi(a_1, \ldots, a_m)$ *выразим в* $(k+1)$-*кванторной форме, начинающейся с квантора существования, то это же верно для представляющего предиката функции* $\tilde{\phi}(a, \ldots, a)$.

Доказательство леммы V. Например, возьмем $m=k=1$. По условию, $\phi(a)=w \equiv (Ex)(y)Q(a, w, x, y)$ с рекурсивным Q. Далее,

$$\tilde{\phi}(a)=w \equiv w=\prod_{i<a} p_i^{(w)_i} \,\&\, (i)_{i<a}\, \phi(i)=(w)_i \equiv$$

$$\equiv w=\prod_{i<a} p_i^{(w)_i} \,\&\, (i)_{i<a} (Ex)(y)Q(i, (w)_i, x, y)$$

$$\equiv w=\prod_{i<a} p_i^{(w)_i} \,\&\, (Ex)(y)(i)_{i<a} Q(i, (w)_i, (x)_i, y) \qquad \text{(см. замечание 1 § 57)}$$

$$\equiv (Ex)(y)\{w=\prod_{i<a} p_i^{(w)_i} \,\&\, (i)_{i<a} Q(i, (w)_i, (x)_i, y)\} \text{ (см. *91, *89).}$$

Последнее выражение имеет вид $(Ex)(y)R(a, w, x, y)$ с рекурсивным R.

Доказательство теоремы XI (a). Например, возьмем $l=m=k=1$. Условие, состоящее в том, что P обще-рекурсивен относительно Q, означает (§ 55), что P обще-рекурсивен относительно представляющей функции ϕ предиката Q. В силу лемм IV и V, $\tilde{\phi}(a)=w \equiv (Ex)(y)R(a, w, x, y)$ с рекурсивным R. Покажем сначала, что $P(a)$ выразим в 2-кванторной форме, начинающейся с квантора общности. Пользуясь теоремой VI* (a) и ее доказательством, основанным на теореме IV* (7), получаем

$$P(a) \equiv (t)\overline{T}_1^1(\tilde{\phi}(t), g, a, t) \equiv (t)(s)[\tilde{\phi}(t)=s \rightarrow \overline{T}_1^1(s, g, a, t)]$$

$$\equiv (t)(s)[(Ex)(y)R(t, s, x, y) \rightarrow \overline{T}_1^1(s, g, a, t)]$$

$$\equiv (t)(s)(x)(Ey)[R(t, s, x, y) \rightarrow \overline{T}_1^1(s, g, a, t)] \text{ (см. *96, *98)}$$

$$\equiv (x)(Ey)[R((x)_0, (x)_1, (x)_2, y) \rightarrow \overline{T}_1^1((x)_1, g, a(x)_0)] \text{ (по (18))},$$

что имеет требуемую форму. Чтобы выразить $P(a)$ в другой 2-кванторной форме, получаем, аналогично, с помощью теоремы IV* (6)

$$P(a) \equiv (Et)T_1^1(\tilde{\phi}(t), f, a, t) \equiv (Et)(Es)[\tilde{\phi}(t)=s \,\&\, T_1^1(s, f, a, t)] \text{ и т. д.}$$

Следствие[C]. *Для каждой из* $(k+1)$-*кванторных форм предикат теоремы* V (b), *который не выразим в этой форме, но выразим в другой* $(k+1)$-*кванторной форме, не является рекурсивным относительно предикатов, выразимых в формах с* k (*или меньше*) *кванторами.*

Мы получим теорему XI* (и следствие), если заменим в определении форм теоремы V (b) слова «обще-рекурсивный» на «обще-рекурсивный относительно Ψ».

* § 59. ОБЩЕ-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ И АРИФМЕТИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

В этом параграфе ссылки на «(i)» — «(vii)» относятся к § 41.

Мы будем говорить, что арифметический предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ *отобразим* в формальной системе (или *разрешим внутри* нее), если имеется нумерически разрешимая формула $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ (см. (iv)), в которой, кроме различных переменных $x_1, \ldots, x_n$, нет других свободных переменных, такая, что для каждого набора $x_1, \ldots, x_n$ натуральных чисел

(viii) $$P(x_1, \ldots, x_n) \equiv \vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n).$$

В этом случае $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n)$ *отображает* $P(x_1, \ldots, x_n)$ (при очевидном соответствии между формальными и содержательными переменными).

Арифметическая функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *изобразима* в формальной системе (или *вычислима внутри* нее), если имеется формула $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n, w)$, в которой, кроме различных переменных $x_1, \ldots, x_n, w$, нет других свободных переменных, такая, что для каждых $x_1, x_2, \ldots, x_n, w$

(ix) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w \equiv \vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{w}).$$

В этом случае $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n, w)$ *изображает* (reckons) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 32. *Пусть S — арифметическая формальная система гл.* IV *(или система Робинсона, описанная в лемме* 18b § 49). *Если S просто непротиворечива, то:* $\{\varphi$ — *обще-рекурсивна*$\} \equiv \{\varphi$ — *нумерически представима в* $S\} \equiv \{\varphi$ *изобразима в* $S\}$.

Доказательство. Мы установим три импликации:

(a) *Если φ обще-рекурсивна, то φ нумерически представима в S.*

По теореме IX § 58, имеется число e, такое, что справедливы соотношения (29) и (30).

Ввиду (29) и определения T_n перед теоремой IV § 57,

(42) $$\begin{aligned} &\mu y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) = w \equiv \\ &\equiv S_n(e, x_1, \ldots, x_n, w) \,\&\, (z)_{z<w} \overline{S}_n(e, x_1, \ldots, x_n, z). \end{aligned}$$

Так как предикат $S_n(z, x_1, \ldots, x_n, w)$ примитивно-рекурсивен, в силу следствия из теоремы 27 § 49, то он нумерически выразим посредством некоторой формулы $\mathrm{S}(z, x_1, \ldots, x_n, w)$. Мы докажем, что формула

$$\mathrm{S}(\boldsymbol{e}, x_1, \ldots, x_n, w) \,\&\, \forall z (z < w \supset \neg \mathrm{S}(\boldsymbol{e}, x_1, \ldots, x_n, z)),$$

которую мы назовем «$\mathrm{M}(x_1, \ldots, x_n, w)$», нумерически представляет функцию $\mu y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$. Фиксируем $x_1, \ldots, x_n$. Чтобы установить (v) для M, допустим, что $\mu y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) = w$. Тогда с помощью (42), а также (E) и (C) § 41 и (i) и (ii) для S, получаем $\vdash \mathrm{M}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{w})$. Таким образом, мы имеем (v) для M. Но тогда мы имеем также (vi), в силу *174a (с $\boldsymbol{w}$ в качестве t). Итак, $\mu y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$ нумерически представима.

По теореме 27, функция $U(y)$ нумерически представима, так как она примитивно-рекурсивна.

Поэтому; в силу рассуждения, использованного в связи со случаем (IV) при доказательстве теоремы 27, нумерически представима и сложная функция $U(\mu y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y))$, т. е. (в силу (30)) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

В этом доказательстве, помимо исчисления предикатов, аксиом 14—21, свойства замены для равенства и результатов, примененных уже при доказательстве теоремы 27, мы использовали только (E) и *174a (с цифрой $\boldsymbol{w}$ в качестве t). Поэтому, согласно леммам 18a § 41 и 18b § 49, импликация (a) имеет место и для формальной системы Робинсона.

(b) *Если S просто непротиворечива, а φ нумерически представима в S, то φ изобразима в S, причем всякая формула* P, *которая нумерически представляет φ, изображает φ (и является,* согласно § 41, *нумерически разрешимой*).

Рассмотрим любые фиксированные $x_1, \ldots, x_n$. По допущению, мы имеем (v). Чтобы установить обратное, допустим, что $\vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{w})$. Имеет место $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w \vee \varphi(x_1, \ldots, x_n) \neq w$ (ср. *158 § 40). Но если $\varphi(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) \neq w$, то, в силу (vii), получается противоречие с простой непротиворечивостью.

(c) *Если φ изобразима в S, то φ обще-рекурсивна.*

Допустим, что формула $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ изображает $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Если S — полная арифметическая система, то пусть Pf_{P} — примитивно-рекурсивный предикат, вполне соответствующий, в силу гёделевской нумерации, $\mathfrak{P}f_{\mathrm{P}}$ (см. Dn 13a § 51 и лемму 19 § 52 или теорему 31 § 52). Если S — система Робинсона (лемма 18b), надо сперва произвести соответствующие изменения в Dn 8. Тогда

$$(x_1) \ldots (x_n)(Ey)\, Pf_{\mathrm{P}}(x_1, \ldots, x_n, (y)_0, (y)_1)$$

и

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (\mu y Pf_{\mathrm{P}}(x_1, \ldots, x_n, (y)_0, (y)_1))_0.$$

Следовательно, в силу теоремы III § 57, φ обще-рекурсивна.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы и если* $(x_1) \ldots (x_n)[P(x_1, \ldots, x_n) \vee \overline{P}(x_1, \ldots, x_n)]$, *то* $\{P$ *— обще-рекурсивен*$\} \equiv \{P$ *нумерически выразим в* $S\} \equiv \{P$ *отобразим в* $S\}$.

Доказательство. Пусть φ — представляющая функция предиката P. Мы установим четыре импликации:

$\{P$ *— обще-рекурсивен*$\} \xrightarrow[\text{(d)}]{} \{\varphi$ *нумерически представима в* $S\}$

$\xrightarrow[\text{(e)}]{} \{P$ *нумерически выразим в* $S\}$

$\xrightarrow[\text{(f)}]{} \{P$ *отобразим в* S (*причем всякая формула* P, *которая нумерически выражает* P, *отображает* P)$\}$

$\xrightarrow[\text{(g)}]{} \{P$ *обще-рекурсивен*$\}$,

где простая непротиворечивость S *является дополнительным условием для* (f) *и* (g), *а для* (f) *нужно также* $(x_1) \ldots (x_n)[P(x_1, \ldots, x_n) \vee \overline{P}(x_1 \ldots, x_n)]$ (чтобы доказательство (f) проходило интуиционистски).

(d) Из (a) по определению обще-рекурсивного предиката.

(e) Как в доказательстве следствия из теоремы 27 § 49.

(f) Как в § 41, получаем (iv). Соотношение (i) имеет место по условию. Чтобы установить обратное, допустим, что $\vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$. Имеет место $P(x_1, \ldots, x_n) \vee \overline{P}(x_1, \ldots, x_n)$. Предположение, что $\overline{P}(x_1, \ldots, x_n)$, несовместимо, в силу (ii), с простой непротиворечивостью.

(g) Допустим, что формула $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ отображает $P(x_1, \ldots, x_n)$. Аналогично (c),

$$(x_1) \ldots (x_n)(Ey)[Pf_{\mathrm{P}}(x_1, \ldots, x_n, y) \vee Pf_{\neg \mathrm{P}}(x_1, \ldots, x_n, y)]$$

(так как формула P нумерически разрешима), и

$P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Pf_{\mathrm{P}}(x_1, \ldots, x_n, \mu y [Pf_{\mathrm{P}}(x_1, \ldots, x_n, y) \vee Pf_{\neg \mathrm{P}}(x_1, \ldots, x_n, y)])$

(в силу (viii) и простой непротиворечивости S). (Простая непротиворечивость S вытекает из (viii), если $(Ex_1) \ldots (Ex_n)\overline{P}(x_1, \ldots, x_n)$.)

Эквивалентность изобразимости (отобразимости) и общей рекурсивности была доказана Мостовским [1947] для любой просто непротиворечивой системы S, содержащей обычную арифметику и такой, что (R_1) примитивно-рекурсивные предикаты отобразимы в S (ср. следствие из теоремы 27) и (R_2) предикаты Pf_{A} примитивно-рекурсивны (см. Dn 13a и лемму 19). Другие источники будут указаны в § 62. Ср. Р. М. Робинсон [1950, резюме], Пусть Ψ — список функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$ от $m_1, \ldots, m_l$ переменных соответственно. Выберем различные предикатные буквы $Q_1, \ldots, Q_l$ и присоединим их к совокупности формальных символов S. Расширим определение формулы системы S так, чтобы $Q_j(t_1, \ldots, t_{m_j}, t)$ была формулой для любых j $(j=1, \ldots, l)$ и термов $t_1, \ldots, t_{m_j}, t$. Пусть $F^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{Q_1 \ldots Q_l}$ — множество формул $Q_j(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{m_j}, \boldsymbol{y}) \,\&\, \forall z(Q_j(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{m_j}, z) \supset \boldsymbol{y}=z)$, где $\psi_j(y_1, \ldots, y_{m_j})=y$ для $j=1, \ldots, l$ и всех наборов $y_1, \ldots, y_{m_j}$ натуральных чисел. Пусть понятия *просто непротиворечива* (*нумерически разрешим, нумерически выразим, нумерически представим, отобразим, изобразима*) *относительно* Ψ (или *через* Ψ) получаются путем замены в прежних определениях «$\vdash$» на «$F^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{Q_1 \ldots Q_l} \vdash$» (или, словами, «доказуема» на «выводима из $F^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{Q_1 \ldots Q_l}$»). Теоремы 27, 31, 32 и их следствия (включая (a)—(g)) сохраняют силу, если эти понятия и «$F^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{Q_1 \ldots Q_l} \vdash$», «примитивно-рекурсивен(вна) относительно Ψ» и «обще-рекурсивен(вна) относительно Ψ» подставить вместо соответствующих прежних понятий. (Далее, P *нумерически выразим равномерно относительно* Ψ (или *через* Ψ), если независимо от Ψ можно задать формулу P, которая нумерически выражает P через Ψ при любом подлежащем рассмотрению выборе Ψ; аналогично для нумерической представимости, отобразимости и изобразимости. Указанные теоремы остаются в силе, если в них всюду понятия для P или φ относительно Ψ понимать как равномерные.)

Равным образом мы могли бы вместо этого выбрать различные функциональные буквы $g_1, \ldots, g_l$, расширить определение терма так, чтобы $g_j(t_1, \ldots, t_{m_j})$ было термом, коль скоро $t_1, \ldots, t_{m_j}$ — термы, и подставить в прежние определения «$E^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{g_1 \ldots g_l} \vdash$» (§ 54) вместо «$\vdash$».

В случае, когда среди Ψ содержатся предикаты, можно поступать любым из этих способов, выбирая в качестве ψ_j представляющую функцию предиката Q_j, если j-й из этих Ψ есть предикат Q_j; или же, вместо этого для каждого такого j можно ввести предикатную букву Q_j, которой надлежит пользоваться с m_j аргументами, и для этого j и любого данного набора $y_1, \ldots, y_{m_j}$ выбрать в качестве исходной формулы $Q_j(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{m_j})$ или $\neg Q_j(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{m_j})$, смотря по тому, что имеет место: $Q_j(y_1, \ldots, y_{m_j})$ или $\overline{Q}_j(y_1, \ldots, y_{m_j})$.

§ 60. ТЕОРЕМА ЧЁРЧА, ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ

Теперь мы постараемся окончательно ответить на вопрос, можно ли полностью формализовать содержательную математику (§ 15). Мы знаем по теореме Гёделя (§ 42), что конкретная формальная система гл. IV не полностью формализует содержательную арифметику.

В содержательной арифметике мы рассматриваем предложения, зависящие от параметров. В соответствии с выбором натуральных чисел в качестве значений этих параметров возникает бесконечно много различных предложений. Именно это мы имеем в виду, когда говорим, что предложения являются значениями предикатов. Вообще говоря, мы сталкиваемся с одновременным рассмотрением многих предикатов. Однако здесь мы рассмотрим формализацию в связи с одним из них, например предикатом $P(x)$ от одной переменной x.

Формальная арифметическая система предыдущих глав дает нам пример того, как может быть проведена формализация. Оставим в стороне тонкости и рассмотрим только голый скелет того, что должно содержаться в формальной системе, если она пригодна для тех целей, в которых вводится.

Формальная система должна обладать некоторой областью „формальных объектов". Среди них, если система служит формализацией теории предиката $P(x)$, должны иметься различные формальные объекты, которые мы рассматриваем как выражающие предложения $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ..., т. е. $P(x)$ для $x = 0, 1, 2, \ldots$. Для удобства мы будем обозначать эти формальные объекты через «A(0)», «A(1)», «A(2)», ... соответственно, т. е. через «A($\boldsymbol{x}$)» для $x = 0, 1, 2, \ldots$, и называть A($\boldsymbol{x}$) „формулой, выражающей $P(x)$". При этом мы не делаем никаких предположений относительно того, имеется ли нечто вроде цифр $\boldsymbol{x}$, переменной x и формулы A(x), из которой A($\boldsymbol{x}$) получается путем подстановки $\boldsymbol{x}$ вместо x.

Далее, должна иметься категория формальных объектов, именуемых „доказательствами". Каждое доказательство должно являться доказательством некоторого индивидуального формального объекта, который может — но не должен — быть объектом A($\boldsymbol{x}$) для какого-либо данного натурального числа x. Пусть «$\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$» означает метаматематическое предложение, состоящее в том, что Y является доказательством A($\boldsymbol{x}$). Объект A($\boldsymbol{x}$) называется „доказуемым", если для него имеется доказательство. Пусть «$\vdash$ A($\boldsymbol{x}$)» означает предложение, гласящее, что A($\boldsymbol{x}$) доказуемо, т. е.

$$(43) \qquad (E\mathrm{Y})\,\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y}) \equiv \vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{x}).$$

Какова природа предиката $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$? Наша цель при формализации теории — выявить условия, которые определяют, какие предложения имеют место в смысле доказуемости в этой теории (§ 15), или, короче, — дать явное определение понятия доказательства. Для теории предиката $P(x)$, в которой этот предикат считается выраженным посредством формулы A($\boldsymbol{x}$), эта цель будет достигнута только в том случае, если будет иметься заранее описанный прием, не требующий от нас в процессе его применения никакой математической изобретательности, посредством которого для любых данных натурального числа x и формального объекта Y мы можем узнать, является ли Y доказательством A($\boldsymbol{x}$) для этого x. Иными словами, должна иметься разрешающая процедура, или алгоритм, для вопроса, имеет ли место $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$ (§ 30). Мы можем выразить это требование также словами, сказав, что $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$ должен быть „эффективно разрешимым" метаматематическим предикатом.

Мы не устанавливаем, какого рода структуру должна иметь область формальных объектов. Однако каждый формальный объект Y должен допускать задание в виде конечного объекта, потому что иначе не имело бы смысла говорить о разрешающей процедуре для $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$. Это можно понимать в том смысле, что каждый Y может быть порожден из конечного числа начальных объектов посредством конечного числа применений установленных операций, как при нашем понимании обобщенной арифметики (§ 50), или в том смысле, что каждый Y может быть задан в виде фигуры, составленной из конечного числа вхождений символов из некоторого предварительно данного перечня символов. Обычными методами (§§ 1, 50, 52) мы можем тогда получить эффективный пересчет формальных объектов, или, что, может быть, удобнее, эффективную гёделевскую нумерацию, т. е. 1 — 1-соответствие между множеством формальных объектов и некоторым подмножеством натурального ряда. Эффективность означает, что для любого данного формального объекта Y мы всегда можем найти соответствующее число y и, обратно, по данному натуральному числу y мы всегда можем узнать, соответствует ли оно какому-нибудь формальному объекту, и если да, то найти этот объект Y. Таким образом, мы сопоставляем каждому эффективно разрешимому метаматематическому предикату $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$ эффективно разрешимый арифметический предикат $R(x, y)$, где $R(x, y) \equiv \{y$ есть натуральное число, соответствующее такому формальному объекту Y, что $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})\}$.

Поэтому $(EY)\mathfrak{R}(x, Y) \equiv (Ey) R(x, y)$ и, согласно (43), имеет место

$$(Ey) R(x, y) \equiv \vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{x}). \tag{44}$$

Какого рода арифметический предикат может удовлетворять условию, что $R(x, y)$ эффективно разрешим? Для формальной системы гл. IV и любой формулы $\mathrm{A}(a)$ этой системы предикат $R(x, y)$ (соответствующий, в силу гёделевской нумерации, предложению „Y является доказательством для $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$“) является примитивно-рекурсивным, как мы видели при доказательстве теоремы 31 § 52.

Каждый обще-рекурсивный предикат эффективно разрешим. Действительно, всякая обще-рекурсивная функция φ эффективно вычислима: если дана система E равенств, рекурсивно определяющая φ, эффективный процесс нахождения значения φ для данных значений аргументов $x_1, \ldots, x_n$ заключается в выводе из E равенств до тех пор, пока не встретится равенство $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, выражающее тот факт, что это значение есть $\boldsymbol{x}$. То, что всегда существует такая система равенств E и что из нее можно вывести равенство указанного вида, вытекает из определений понятий „обще-рекурсивная функция“ (§ 55) и „E рекурсивно определяет φ“ (§ 54). (Мы можем также убедиться в эффективной разрешимости φ рассмотрением (29) и (30) теоремы IX § 58 или следствия из теоремы IX.) Следовательно, если R — обще-рекурсивный предикат, то мы можем решить, истинен он или ложен для данных аргументов $x_1, \ldots, x_n$, вычислив для этих аргументов значение представляющей функции и посмотрев, равно это значение 0 или 1.

Обратное утверждение тоже представляется истинным. Каждая функция, известная как эффективно вычислимая, для которой этот вопрос исследовался, оказывалась обще-рекурсивной (аналогично для эффективно разрешимых предикатов). Эти эвристические и некоторые другие соображения побудили Чёрча [1936] предложить следующий тезис.

Тезис I. *Каждая эффективно вычислимая функция (эффективно разрешимый предикат) является обще-рекурсивной.*

Этот тезис входит в неявном виде и в концепцию вычислительной машины, сформулированную Тьюрингом [1936—37] и Постом [1936]. Мы займемся обсуждением очевидности этого тезиса в следующих двух главах, а сейчас приступим к рассмотрению его следствий.

Этот тезис и его обращение приводят к точному определению понятия вычисляющей (разрешающей) процедуры, или алгоритма, для случая функции (предиката) от натуральных чисел, которое мы еще не могли привести в § 30. Найти разрешающую процедуру для предиката $P(x)$ означает найти обще-рекурсивный предикат $R(x)$, такой, что $P(x) \equiv R(x)$. В силу (14) и (15) теоремы V § 57, мы получаем следующую теорему, первоначально установленную Чёрчем [1936] в связи с другим примером «неразрешимой» проблемы разрешимости.

Теорема XII. *Не существует никакой разрешающей процедуры (или алгоритма) для любого из предикатов* $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$ *и* $(Ey)T_1(x, x, y)$.

Пользуясь рассуждениями первой части этого параграфа и применяя тезис I к R в (44), мы получаем второй тезис.

Тезис II. *Для данной формальной системы S, в которой значения предиката* $P(x)$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$ *выражены различными формулами, обозначаемыми через* $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$, *предикат „*$\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ *доказуема в S“ выразим в виде*

$(Ey) R(x, y)$, где R обще-рекурсивен, т. е. существует обще-рекурсивный предикат R, такой, что (44) имеет место. (Аналогичное утверждение справедливо для предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных.)

Замечание 1. Мы здесь рассматривали только формулы $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$, которые представляли для нас интерес. Если принять во внимание и другие формулы и если система удовлетворяет нашим обычным представлениям, связанным с системами, мы можем наш анализ продолжить. Пусть «$\mathfrak{P}(\mathrm{A}, \mathrm{Y})$» означает „Y есть доказательство A" как предикат от любых двух формальных объектов A, Y. Этот предикат $\mathfrak{P}(\mathrm{A}, \mathrm{Y})$ должен быть эффективно разрешимым, формула $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ должна быть эффективно вычислимой функцией от x и эффективная разрешимость $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y})$ вытекает отсюда, если положить $\mathfrak{R}(x, \mathrm{Y}) \equiv \mathfrak{P}(\mathrm{A}(\boldsymbol{x}), \mathrm{Y})$. При эффективной гёделевской нумерации формальных объектов пусть «A_a» означает объект с номером a (если такой существует), а «$\vdash \mathrm{A}_a$» выражает, что этот объект является доказуемой формулой (если a не является гёделевским номером, то «$\vdash \mathrm{A}_a$» ложно). Сопоставим $\mathfrak{P}(\mathrm{A}, \mathrm{Y})$ арифметический предикат $P(a, y)$. В силу тезиса I, справедливы следующие утверждения: (a) *Имеется обще-рекурсивный предикат P, такой, что $(Ey) P(a, y) \equiv \vdash \mathrm{A}_a$.* (b) *Гёделевский номер $\alpha(x)$ формулы $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ является обще-рекурсивной функцией от x.* Тезис II вытекает отсюда, если положить $R(x, y) \equiv P(\alpha(x), y)$.

В тезисе II сформулированы (минимальные) структурные требования которые нужно наложить на формальную систему S для того, чтобы она могла служить формализацией для теории предиката P, при которой предложения $P(x)$ для $x = 0, 1, 2, \ldots$ выражаются формулами $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ соответственно. Как и в случае тезиса I, имеет место обращение (что будет установлено ниже).

Остается наложить на S условия, связывающие доказуемость формул $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ с предложениями $P(x)$, которые должны выражать эти формулы. Чтобы формализация была *корректной* (или *непротиворечивой*) для $P(x)$, требуется, чтобы

(45) $$\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{x}) \rightarrow P(x),$$

т. е. чтобы $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ могла быть доказуема только в том случае, если $P(x)$ истинно. Если мы хотим, чтобы система S давала также *полную* формализацию для теории этого предиката надо, чтобы имело место и обратное $P(x) \rightarrow \vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{x})$, т. е. необходимо, чтобы $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ была доказуема, если $P(x)$ истинно. В сочетании с (45) это дает

(46) $$\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{x}) \equiv P(x)$$

в случае, если S — полная и непротиворечивая формализация для теории предиката $P(x)$.

Сопоставим это со структурным требованием тезиса II. Чтобы построить корректную формальную систему для предиката $P(x)$, надо найти обще-рекурсивный предикат R, такой, что

(47) $$(Ey) R(x, y) \rightarrow P(x);$$

чтобы эта система была также полной, надо, чтобы

(48) $$(Ey) R(x, y) \equiv P(x).$$

Допустим теперь, что $P(x)$ есть предикат $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$. Тогда не существует обще-рекурсивного предиката R, такого, что (48) имеет место для всех x; действительно, по теореме V (12), для любого обще-рекурсивного предиката R найдется число f, такое, что (48) нарушается при $x = f$. Итак:

Теорема XIII. (Часть I.) *Для предиката $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$ не существует корректной и полной формальной системы.* (Обобщенная форма теоремы Гёделя, Клини [1943].)

Для более подробного исследования рассмотрим любую формальную систему S и выбор формул $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$, выражающих в S предложения $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$ при $x=0, 1, 2, \ldots$. Пусть R — обще-рекурсивный предикат, такой, что имеет место (44) (такой предикат имеется, согласно тезису II); рассмотрим для этого R число f из (9). Предположим, что S корректна для $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$; тогда, согласно (45),

$$\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{x}) \rightarrow (y)\overline{T}_1(x, x, y). \tag{49}$$

В силу содержательного аналога *86 § 35, (9) и (44),

$$(y)\overline{T}_1(f, f, y) \equiv \overline{(Ey)}T_1(f, f, y) \equiv (\overline{Ey})R(f, y) \equiv \overline{\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{f})}. \tag{50}$$

Допустим, что $\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{f})$. Тогда, в силу (49), $(y)\overline{T}_1(f, f, y)$; и по (50), $\overline{\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{f})}$. Поэтому от противного получаем $\overline{\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{f})}$ и, согласно (50), $(y)\overline{T}_1(f, f, y)$. Итак:

Теорема XIII. (Часть II.) *Пусть S — формальная система, в которой предложения $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$ выражены различными формулами, которые мы обозначим через $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$, $x=0, 1, 2, \ldots$. Тогда можно найти такое число f, что если S корректна для $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$, то $(y)\overline{T}_1(f, f, y) \,\&\, \overline{\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{f})}$, т. е. предложение $(y)\overline{T}_1(f, f, y)$ истинно, но формула $\mathrm{A}(\boldsymbol{f})$, выражающая это предложение, не доказуема.*

Итак, никакая формальная система не является полной по отношению к доказуемости истинных (и только истинных) предложений, являющихся значениями некоторого заранее фиксированного содержательного предиката $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$. Относительно формальной системы при этом предполагается только, что она удовлетворяет структурному требованию тезиса II и что ее доказуемые формулы истинны для той интерпретации, при которой формулы $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ выражают значения предиката $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$.

Эти предположения образуют очень широкую абстракцию от тех конкретных формальных систем, которыми мы занимались. В тех системах доказательства состояли из приложений заранее перечисленных постулатов. У нас были основания верить правильности каждого из этих постулатов в отдельности, а потому и системы в целом. Мы видим теперь, что гёделевская неполнота не связана с природой этих содержательных доводов.

Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, представим себе всезнающего арифметика. Следовало бы ожидать, что его способность усматривать сразу бесконечно много фактов дала бы ему возможность убедиться в справедливости некоторых правил вывода, которые мы не могли бы обнаружить. Но все-таки любая корректная формальная система для $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$, которую он пожелал бы сообщить нам, объяснив, как она работает (и не объяснив, почему она работает именно так), было бы неполной.

Чтобы понять смысл предложений $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$, требуются только понятие одного индивидуального эффективно вычислимого (на самом деле даже примитивно-рекурсивного) предиката и понятие конструктивно[1]) применяемого квантора общности. Трудно себе представить более слабые предложения о наличном объеме понятий, коль скоро допускается какая бы то ни было математическая бесконечность.

[1]) См. подстрочное примечание [2]) на стр. 215. — *Прим. перев.*

Пользуясь в метатеории этим предикатом $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$ как осмысленным, мы не предполагаем, что каждое его значение истинно или ложно. Тезиса II и тех фактов, которые можно установить при помощи только финитного рассмотрения этого предиката, достаточно для того, чтобы убедиться в невозможности корректной и полной формальной системы для последнего.

Мы установили неполноту любой корректной формальной системы, рассматриваемой в качестве формализации существующей содержательной теории предиката $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$. Так как эта интерпретация рассматривалась финитным образом, эту теорему можно считать метаматематической в широком смысле этого слова.

Для формальных систем, обладающих некоторыми обычными свойствами образования и выводимости, эту теорему можно формулировать и в узком смысле слова метаматематически, заменяя ссылки на интерпретацию формул $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ как выражающих значения предиката $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$ непротиворечивостью и полнотой, определенными как внутренние свойства системы, например, следующим (кратким) способом.

Теорема XIII. (Часть III.) *Пусть S — формальная система, содержащая различные формулы* $\mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\neg\mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\forall \mathrm{y} \neg \mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \mathrm{y})$ (*записываемую также в виде* «$\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$») *и* $\neg\forall \mathrm{y}\neg\mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \mathrm{y})$ (*записываемую также в виде* «$\neg\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$»). *Допустим, что* (A) $T_1(x, x, y) \rightarrow\ \vdash \mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *и* $\overline{T}_1(x, x, y) \rightarrow\ \vdash \neg\mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, (B) $\vdash \forall\mathrm{y}\neg\mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \mathrm{y}) \rightarrow (y)\{\vdash \neg\mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$ *и* (C) *для некоторого обще-рекурсивного предиката R имеет место* (44) (*при этом* «$\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$» *имеет только что указанный смысл*). *Тогда можно найти число f, обладающее следующим свойством: если S просто непротиворечива в том смысле, что ни для каких x, y не имеют место одновременно утверждения* $\vdash \mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *и* $\vdash \neg\mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, *то* $\overline{\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{f})}$. *Если S к тому же ω-непротиворечива в том смысле, что ни при каком x не имеют место одновременно утверждения* $(y)\{\vdash \neg\mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$ *и* $\vdash \neg\forall\mathrm{y}\neg\mathrm{T}(\boldsymbol{x}, \mathrm{y})$, *то* $\overline{\vdash \neg\mathrm{A}(\boldsymbol{f})}$. *Итак, если S просто и ω-непротиворечива, то она просто неполна в том смысле, что при некотором x не имеет места ни* $\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{x})$, *ни* $\vdash \neg\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$.

Доказательство. Допустим, что S — просто непротиворечива и (для приведения к противоречию) что $\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{f})$. Тогда, согласно (44), имеет место $(Ey)R(f, y)$; в силу (9), справедливо $(Ey)T_1(f, f, y)$; в силу (A), отсюда вытекает, что $\vdash \mathrm{T}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{y})$ при некотором y. Кроме того, из $\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{f})$, в силу (B), вытекает, что $\vdash \neg\mathrm{T}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{y})$ для этого y, что невозможно из-за простой непротиворечивости. Таким образом, от противного доказано $\overline{\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{f})}$. Допустим теперь, что S также ω-непротиворечива. Из $\overline{\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{f})}$, в силу (50), получаем $(y)\overline{T}_1(f, f, y)$; в силу (A), имеет место $(y)\{\vdash \neg\mathrm{T}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{y})\}$; в силу ω-непротиворечивости, $\overline{\vdash \neg\forall\mathrm{y}\neg\mathrm{T}(\boldsymbol{f}, \mathrm{y})}$, т. е. $\overline{\vdash \neg\mathrm{A}(\boldsymbol{f})}$.

Различные доказательства теоремы Гёделя сравниваются в монографии Мостовского [1952], которая была недоступна автору при написании настоящей книги.

Теоремы неполноты XII и XIII в нашем изложении получены путем применения случаев теоремы V для предикатных форм $R(x)$ и $(Ey)R(x, y)$ соответственно. Эта тема была подробно рассмотрена Клини [1943*]. В заключение этого параграфа приведем некоторые дальнейшие замечания о предикатной форме $(Ey)R(x, y)$.

Обращение тезиса II. (Часть I.) *Имеется корректная и полная формальная система для любого предиката вида $(Ey)R(x, y)$ с обще-рекурсивным R. (Аналогично для $(Ey_1)\ldots(Ey_m)R(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ с обще-рекурсивным R $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$.)*

Точнее (при $n = m = 1$): *для любого данного обще-рекурсивного предиката* $R(x, y)$ *можно найти формальную систему* S, *содержащую различные формулы* $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ $(x = 0, 1, 2 \ldots)$, *такую, что имеет место соотношение* (44).

В примере 1 корректность системы так и остается гипотезой. Но пример 3 дает быстрое и безупречное доказательство[1]). (При этом (44) есть (viii) из § 59, но, вообще говоря, для отобразимости недостает (iv).)

Пример 1. Согласно следствию из теоремы IV § 57, можно, не теряя общности, считать R примитивно-рекурсивным. Пусть S — арифметическая формальная система гл. IV, $\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ — формула, которая нумерически выражает $R(x, y)$ (следствие из теоремы 27 § 49), а $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ — формула $\exists \mathrm{y} \mathrm{R}(\boldsymbol{x}, \mathrm{y})$. Тогда очевидно, что $(Ey) R(x, y) \rightarrow \vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{x})$. Поэтому (44) имеет место, если для этой системы $\vdash \exists \mathrm{y} \mathrm{R}(\boldsymbol{x}, \mathrm{y})$ возможно только при $(Ey) R(x, y)$. Это некоторое свойство непротиворечивости, которое, если $(Ex)\overline{(Ey)} R(x, y)$, влечет простую непротиворечивость; поэтому, в силу второй теоремы Гёделя (теорема 30 § 42), мы не можем надеяться найти для него элементарное доказательство; и действительно, для классической формальной системы неясно, каким образом можно было бы провести такое доказательство, не пользуясь классической логикой в метаязыке.

Пример 2. Аналогично, если в качестве S взять систему Робинсона (лемма 18b § 49), содержащую только тринадцать арифметических аксиом. Длинное, но элементарное доказательство требуемого свойства непротиворечивости (для формулы $\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, построенной как при доказательстве следствия из теоремы 27) будет дано в §§ 77—79 (см. теорему 53 (b) § 79). И подавно, система Робинсона просто непротиворечива, что можно доказать непосредственно (см. теорему 53 (a)).

Пример 3. Пусть E — система равенств в формализме рекурсивных функций, которая рекурсивно определяет представляющую функцию предиката R. Пусть f — главная функциональная буква этой системы. Добавим к совокупности формальных символов предикатную букву $\mathcal{A}$. Пусть S — система, аксиомами которой являются уравнения E, а правилами вывода — правила R1, R2 и следующее правило, в котором $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — цифры:

$$\frac{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0}{\mathcal{A}(\boldsymbol{x})}.$$

Рассматриваемое свойство непротиворечивости (с $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ в качестве $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$) получается непосредственно.

Пример 4. Пусть формальные символы S состоят только из $0, '$ и двух предикатных букв $\mathcal{R}$ и $\mathcal{A}$ (со скобками и запятой). Формулами S пусть будут выражения $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ для $x, y = 0, 1, 2, \ldots$. Постулатами S пусть будут выписанные ниже схема аксиом 1 и правило вывода 2. $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ для схемы аксиом 1 предполагаются такими цифрами, что $R(x, y)$.

$$1.\ \mathcal{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \qquad 2.\ \frac{\mathcal{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\mathcal{A}(\boldsymbol{x})}.$$

Эта формальная система может показаться необычной. Однако (ввиду общей рекурсивности R) условие, наложенное на $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ в схеме аксиом 1,

---

[1]) В подлиннике—demonstration.—*Прим. перев.*

столь же эффективно, как, например, условие, наложенное на t в схемах аксиом 10 и 11 § 19.

Пятым примером будет приведенный в конце § 73 пример 2.

Обращение тезиса II. (Часть II.) *Имеется такая, формальная система S, что для любого данного обще-рекурсивного предиката $R(x, y)$ можно найти различные формулы* $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$, $x=0, 1, 2, \ldots,$ *такие, что имеет место* (44). (*Аналогичное утверждение для любых n, m и даже для всех n, m одновременно.*)

Доказательство. Пусть $\mathrm{A}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})$ $(z, x=0, 1, 2, \ldots)$ — формулы, полученные путем применения части I (для $n=2$, $m=1$) к $T_1(z, x, y)$, и пусть $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ $(x=0, 1, 2, \ldots)$ будет $\mathrm{A}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x})$ для f из (9) § 57.

Замечание 2. Добавляя к S (в части I или II) новые постулаты, мы получим систему S', такую, что $(Ey)R(x, y) \rightarrow\ \vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{x})$, но не обязательно $\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{x}) \rightarrow (Ey)R(x, y)$.

Согласно тезису II и его обращению, в виде $(Ey)R(x, y)$ с обще-рекурсивным R выразимы те же самые предикаты, которые выразимы посредством $\vdash \mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ для некоторой формальной системы S и эффективного обозначения формул $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$, $x=0, 1, 2, \ldots$. Короче говоря, предикатная форма $(Ey)R(x, y)$ совпадает с понятием доказуемости в некоторой формальной системе.

Согласно результату, упомянутому в конце § 53 (и следствию из теоремы IV), индуктивные определения (с конструктивными прямыми пунктами) приводят в точности к тому же самому классу предикатов. Ввиду той роли, которая часто отводится индуктивным определениям при определении формальных систем, это обстоятельство тесно связано с предыдущим.

Рекурсивная перечислимость. Множество, или класс, C натуральных чисел называется *рекурсивно-перечислимым*, если существует пересчитывающая его (быть может с повторениями) обще-рекурсивная функция φ, т. е. такая обще-рекурсивная функция φ, что $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2), \ldots$ есть пересчет (может быть с повторениями) элементов C[1]. (Пост [1944] относит также и пустое множество к рекурсивно-перечислимым множествам.)

Теорема XIV. *Класс C, имеющий хотя бы один элемент, рекурсивно-перечислим тогда и только тогда, когда предикат $x \in C$ выразим в форме $(Ey)R(x, y)$ с обще-рекурсивным R.*

Точнее: (a) *Если φ перечисляет C, то $x \in C \equiv (Ey)R(x, y)$, где R примитивно-рекурсивен относительно φ.* (b) *Если $x \in C \equiv (Ey)R(x, y)$ и C содержит элемент m, то C перечисляется некоторой функцией θ, примитивно-рекурсивной относительно R* (Клини [1936]).

Доказательства. (a) $x \in C \equiv (Ey)[\varphi(y)=x]$ (см. #14 § 45). (b) Пусть

$$\theta(y) = \begin{cases} (y)_0, & \text{если } R((y)_0, (y)_1), \\ m, & \text{если } \overline{R}((y)_0, (y)_1) \end{cases}$$

(см. ##D, F, 19).

Итак, тезис II эквивалентен утверждению, что класс C чисел x, для которых $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ доказуема, рекурсивно-перечислим (если он имеет хотя бы один элемент). Множество, или класс, C мы будем называть *обще-рекурсив-*

[1]) Другими словами, C есть множество значений функции φ. Всякий гёделевский номер всякой частично-рекурсивной функции (см. ниже), множество значений которой есть C, называется *гёделевским номером* множества C.— *Прим. ред.*

ным, если предикат $x \in C$ обще-рекурсивен. Перефразируя результаты § 57, получаем: обще-рекурсивное множество C и подавно рекурсивно-перечислимо, если оно имеет хотя бы один элемент (теорема VI (a)); то же верно и для его дополнения $\overline{C}$ (#D § 45). Классически, множество C обще-рекурсивно, если как C, так и $\overline{C}$ рекурсивно-перечислимы (теорема VI (b) или (c)). Множество чисел x, таких, что $(Ey)T_1(x,x,y)$ (его обозначение: $\hat{x}(Ey)T_1(x,x,y)$) рекурсивно-перечислимо (в силу (29) § 58, $(Ey)T_1(e, e, y)$, так что e входит в это множество), но не обще-рекурсивно (теорема V (15)); его дополнение $\hat{x}(y)\overline{T}_1(x, x, y)$ не является ни рекурсивно-перечислимым, ни обще-рекурсивным (теорема V (12) и (14)).

Следствие. *Если множество может быть пересчитано (быть может, с повторениями) обще-рекурсивной функцией, то оно может быть пересчитано (быть может, с повторениями) и примитивно-рекурсивной функцией.* (Россер [1936].)

Для доказательства нужно воспользоваться (a), затем следствием из теоремы IV и затем (b).

Пример 5. Бесконечное множество C обще-рекурсивно тогда и только тогда, когда оно может быть пересчитано обще-рекурсивной функцией без повторений и в порядке возрастания его элементов (Клини [1936]). (Указание: воспользоваться теоремой III.) Каждое бесконечное рекурсивно-перечислимое множество содержит бесконечное обще-рекурсивное подмножество (Пост [1944]). Если бесконечное множество может быть пересчитано обще-рекурсивной функцией с повторениями, то оно может быть пересчитано обще-рекурсивной функцией и без повторений (Клини [1936]).

Пример 6. Задача: Определить конструктивно (т. е. интуиционистски) „обще-рекурсивную функцию" через „рекурсивно-перечислимое множество". Мы должны избегать применения закона исключенного третьего, который участвует в утверждении, что всякое множество пусто или имеет хотя бы один элемент, и неинтуиционистских шагов в доказательстве теоремы VI (b). Решение получается с помощью первого из следующих двух предложений, теоремы VI (c) и второго из этих же следующих предложений (или теоремы XIV): Функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ обще-рекурсивна тогда и только тогда, когда множество чисел $2^{\varphi(x_1, \ldots, x_n)} \cdot p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}$ обще-рекурсивно. Предикат $x \in C$ выразим в форме $(Ey)R(x, y)$ с обще-рекурсивным R тогда и только тогда, когда рекурсивно-перечислимо множество, состоящее из 0 и чисел, следующих за элементами C (назовем это множество $\{0\}+C'$).

Мы получим понятие „рекурсивной перечислимости относительно Ψ", если в определении рекурсивной перечислимости заменим слова «обще-рекурсивная функция φ» на слова «функция φ, обще-рекурсивная относительно Ψ». Результаты переносятся и на этот случай.

§ 61. СИММЕТРИЧНАЯ ФОРМА ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ

Теорема XIII § 60 является обобщением теоремы 28 § 42 (теоремы Гёделя в ее первоначальной форме), причем $\mathrm{A}(\boldsymbol{f})$ соответствует формуле $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$. Часть III теоремы XIII была сформулирована метаматематически (в узком смысле слова). Мы займемся теперь обобщением теоремы 29 (теоремы Гёделя в форме Россера).

Вместо $(y)\overline{T}_1(x,x,y)$ мы рассмотрим теперь несколько более сложный предикат $(y)[\overline{T}_1((x)_1,x,y) \vee (Ez)_{z\leq y} T_1((x)_0,x,z)]$, или эквивалентный ему $\overline{(Ey)}[T_1((x)_1,x,y) \,\&\, (z)_{z\leq y}\overline{T}_1((x)_0,x,z)]$.

Пусть «$W_0(x, y)$» служит сокращением для предикатного выражения $T_1((x)_1,x,y) \,\&\, (z)_{z\leq y}\overline{T}_1((x)_0,x,z)$, а «$W_1(x,y)$» — для $T_1((x)_0,x,y) \,\&\, (z)_{z\leq y}\overline{T}_1((x)_1,x,z)$.

Фиксируем x. Допустим, что имеется такое число y_1, что (i) $T_1((x)_0, x, y_1)$ и (ii) $(z)_{z\leq y_1}\overline{T}_1((x)_1,x,z)$. Тогда не существует такого числа y_0, что (iii) $T_1((x)_1,x,y_0)$ и (iv) $(z)_{z\leq y_0}\overline{T}_1((x)_0,x,z)$. Действительно, (i) и (iv) влекут $y_1 > y_0$, а (ii) и (iii) влекут $y_0 > y_1$. Таким образом:

(51) $$(Ey)W_1(x,y) \rightarrow \overline{(Ey)}W_0(x,y).$$

Ввиду того что предикаты $W_0(x,y)$ и $W_1(x,y)$ примитивно-рекурсивны (в силу ## A, C, D, E, 19 § 45), теория предиката $(Ey)W_0(x,y)$ может быть полностью формализована, и то же самое справедливо, по крайней мере для той части теории предиката $\overline{(Ey)}W_0(x,y)$, которая задается достаточным согласно (51) условием $(Ey)W_1(x,y)$ (в силу обращения тезиса II и замечания 2 § 60). Мы покажем теперь, что формальная теория S, которая формализует по меньшей мере эту часть, должна быть неполной, если она непротиворечива.

Пусть, в соответствии с этим, S — любая формальная система, в которой имеются формулы $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ и $\neg\,\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ для $x = 0, 1, 2, \ldots$, причем все эти формулы различны. Мы не накладываем никаких ограничительных условий на вид символизма S; в частности, мы не предполагаем, что $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ получается из формулы $\mathrm{B}(\mathrm{x})$ путем подстановки цифры $\boldsymbol{x}$ вместо переменной x или что $\neg\,\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ получается из $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ путем приставления спереди некоторого символа $\neg$. Дедуктивные правила S должны быть таковы, что

(52) $(Ey)W_0(x, y) \rightarrow\, \vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$, (53) $(Ey)W_1(x, y) \rightarrow\, \vdash \neg\,\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$.

Система S должна давать явный критерий того, является ли данный объект доказательством формулы $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ или $\neg\,\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$, а потому (хотя мы и не предполагаем теперь, что $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ и $\neg\,\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ выражают некоторые предикаты[1]), в силу тезиса II, как и прежде, существуют обще-рекурсивные предикаты $R_0(x, y)$ и $R_1(x, y)$, такие, что

(54) $(Ey)R_0(x, y) \equiv\, \vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$, (55) $(Ey)R_1(x, y) \equiv\, \vdash \neg\,\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$.

Под (*простой*) *непротиворечивостью* S мы подразумеваем, что ни для какого натурального числа x не имеют место одновременно $\vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ и $\vdash \neg\,\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$, а под (*простой*) *полнотой* — что для каждого x имеет место $\vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ или $\vdash \neg\,\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$.

Теорема XV. *Не существует непротиворечивой и полной формальной системы, удовлетворяющей соотношениям* (52) — (55).

Точнее: *Пусть даны произвольная формальная система S с различными формулами* $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ *и* $\neg\,\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$ *и обще-рекурсивные предикаты* $R_0(x, y)$ *и* $R_1(x, y)$, *такие, что имеют место* (52) — (55). *Тогда можно найти число f, такое, что ни* $\vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{f})$, *ни* $\vdash \neg\,\mathrm{B}(\boldsymbol{f})$ *не имеет места, если S просто непротиворечива.* (Теорема Гёделя в обобщенной форме Россера.)[2])

[1]) Точнее — значения этих предикатов для x. — *Прим. перев.*

[2]) Эта теорема устанавливает не только полноту системы S, но и ее непополнимость, поскольку всякое непротиворечивое усиление системы S само удовлетворяет условиям теоремы. (Так как формула, неразрешимая в усилении, строится эффективно, то S даже эффективно-непополнима.) Ср. подстрочное примечание на стр. 188. — *Прим. ред.*

Доказательство. Предположим, что S — просто непротиворечива, т. е.

(56) $$\overline{\vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{x}) \,\&\vdash \neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x})}.$$

В силу теоремы IV (6) § 57, имеются такие числа f_0 и f_1, что

(57) $$(Ey)\,R_0(x, y) \equiv (Ey)\,T_1(f_0, x, y) \equiv (Ey)\,T_1((f)_0, x, y),$$

(58) $$(Ey)\,R_1(x, y) \equiv (Ey)\,T_1(f_1, x, y) \equiv (Ey)\,T_1((f)_1, x, y),$$

где $f = 2^{f_0}\cdot 3^{f_1}$. В оставшейся части доказательства при каждом применении (52) — (58) мы будем подставлять число f вместо переменной x. Чтобы от противного доказать $\overline{\vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{f})}$, допустим, что

(a) $$\vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{f}).$$

Тогда, по (54), $(Ey)\,R_0(f,y)$ и, по (57),

(b) $$(Ey)\,T_1((f)_0, f, y).$$

Кроме того, в силу (a) и простой непротиворечивости ((56)), справедливо утверждение

(c) $$\overline{\vdash \neg \mathrm{B}(\boldsymbol{f})}.$$

Отсюда, по (55), $\overline{(Ey)}\,R_1(f, y)$. Далее, по (58), $\overline{(Ey)}\,T_1((f)_1, f, y)$, откуда

(d) $$(y)\,\overline{T}_1((f)_1, f, y).$$

В силу (b) и (d), имеет место $(Ey)\,[T_1((f)_0, f, y)\,\&\,(z)_{z\leqslant y}\overline{T}_1((f)_1, f, z)]$, т. е. $(Ey)\,W_1(f, y)$; и в силу (53), $\vdash \neg \mathrm{B}(\boldsymbol{f})$, что противоречит утверждению (c). Поэтому, отбрасывая предложение (a) как приводящее к противоречию, получаем $\overline{\vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{f})}$.

Аналогичным рассуждением, или просто замечая симметрию между соотношениями (52), (54), (56), (57), с одной стороны, и (53), (55), (56), (58) — с другой, получаем $\overline{\vdash \neg \mathrm{B}(\boldsymbol{f})}$.

Комментарий. Условия, наложенные нами на S, связаны с предположением, что $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ выражает $(Ey)\,W_0(x, y)$, а $\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ — отрицание этого предложения. Будем для удобства называть это соглашение *предпочтённой интерпретацией*. Согласно предпочтённой интерпретации, $\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{f})$ соответствует формуле $\mathrm{A}_q(\boldsymbol{q})$ § 42 и выражает истинное предложение. Однако в формулировке теоремы предпочтённая интерпретация не участвует. Условия, наложенные на S, вполне симметричны. С равным успехом мы можем интерпретировать $\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ как выражение для $(Ey)\,W_1(x, y)$, а $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ — как выражение для отрицания этого предложения. В этом случае $\mathrm{B}(\boldsymbol{f})$ соответствует $\mathrm{A}_q(\boldsymbol{q})$ и выражает истинное предложение, тогда как $\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{f})$ ложно. Между этими двумя крайними имеется много промежуточных возможных интерпретаций. Мы встретимся с ними в связи с последующими примерами систем S для теоремы XV.

Пример 1. Так как в арифметическом формализме гл. IV предикаты $T_1((a)_1, a, b)$ и $T_1((a)_0, a, c)$ примитивно-рекурсивны, то, в силу следствия из теоремы 27 § 49, они нумерически выражаются формулами, которые мы обозначим через $\mathrm{A}(a, b)$ и $\mathrm{B}(a, c)$ соответственно[1]). Пусть $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ будет $\exists b\,[\mathrm{A}(\boldsymbol{x}, b)\,\&\,\forall c\,(c \leqslant b \supset \neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x}, c))]$, а $\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ будет $\neg \exists b\,[\mathrm{A}(\boldsymbol{x}, b)\,\&\,\forall c\,(c \leqslant b \supset \neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x}, c))]$. Тогда справедливость (52) может быть доказана метода-

[1]) См. подстрочное примечание к стр. 186. — *Прим. ред.*

ми, использованными в первой части доказательства теоремы 29 § 42. Далее, с помощью указанных там переходов и $\supset$-введ. получаем $\vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{x}) \supset \neg \neg \forall b[\neg \mathrm{A}(\boldsymbol{x}, b) \vee \exists c(c \leqslant b \,\&\, \mathrm{B}(\boldsymbol{x}, c))]$. С помощью контрапозиции (*13) получаем $\vdash \forall b[\neg \mathrm{A}(\boldsymbol{x}, b) \vee \exists c(c \leqslant b \,\&\, \mathrm{B}(\boldsymbol{x}, c))] \supset \neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$. Вместе с методом, примененным во второй части доказательства теоремы 29, это дает (53). Заметим, что для этого доказательства, помимо исчисления предикатов с равенством, аксиом 14 — 21 и следствия из теоремы 27, требуются только *166a, *168, *166 и *169 (где t — цифра). Следовательно, ввиду лемм 18a (конец § 41) и 18b (конец § 49) оно сохраняет силу и для системы Робинсона. Для арифметической системы главы IV мы получаем (54) и (55) при надлежащих рекурсивных R_0 и R_1, пользуясь теоремой 31 § 52 (а для системы Робинсона — пользуясь методом доказательства теоремы 31). В этом примере символ $\neg$, встречающийся в записи $\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ теоремы XV, является на самом деле знаком $\neg$ арифметического формализма, а при обычной интерпретации арифметического символизма $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ и $\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ получают предпочтённую интерпретацию. Пусть S — арифметическая система гл. IV (или система Робинсона), а $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ и $\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ выбраны указанным образом. Согласно теореме, система S просто неполна (если она просто непротиворечива), и то же верно для каждого просто непротиворечивого расширения S, полученного путем добавления дальнейших постулатов (но так, что (54) и (55) продолжают иметь место для некоторых рекурсивных R_0 и R_1). Это расширение S не обязано даже соответствовать предпочтённой интерпретации $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ и $\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ в S — лишь бы новые постулаты не вызывали в такой интерпретации грубых расхождений, приводящих к простой противоречивости.

Пример 2. Пусть символизм формальной системы S содержит цифры и четыре предикатных символа $\mathscr{W}_0$, $\mathscr{W}_1$, $\mathscr{B}$ и $\neg\mathscr{B}$ (или, вместо последнего, оператор $\neg$). Постулатами S пусть служат выписанные ниже две схемы аксиом (1 и 2) и два правила вывода (3 и 4). Цифры $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в схеме аксиом 1 таковы, что $W_0(x, y)$, а в схеме аксиом 2 — таковы, что $W_1(x, y)$.

1. $\mathscr{W}_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.   2. $\mathscr{W}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

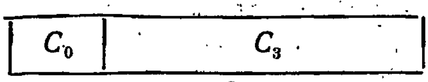
3. $\dfrac{\mathscr{W}_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\mathscr{B}(\boldsymbol{x})}$.   4. $\dfrac{\mathscr{W}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\neg\mathscr{B}(\boldsymbol{x})}$.

Простая непротиворечивость этой системы вытекает непосредственно из (51). Эта система S просто неполна, как и любое ее просто непротиворечивое расширение, полученное путем добавления новых постулатов (но так, что (54) и (55) остаются в силе для некоторых рекурсивных R_0 и R_1). В этой системе S формулы $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ и $\neg \mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ доказуемы только в том случае, если это должно быть согласно (52) и (53). При расширении S интерпретация нас не ограничивает.

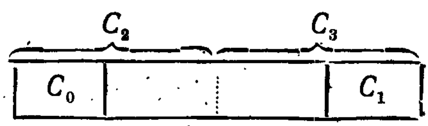
Теорема XIII § 60 является метаматематическим приложением случая теоремы V § 57, соответствующего предикатной форме $(Ey)R(x, y)$. Также и теорема XV допускает формулировку в терминах предикатных форм. Сопоставим теоремы XIII и XV, пользуясь языком рекурсивно-перечислимых множеств (см. теорему XIV § 60).

Замечание 1. В силу теорем XIII и XV невозможно, чтобы какое-нибудь из трех множеств $\hat{x}(Ey)T_1(x,x,y)$, $\hat{x}(Ey)W_0(x, y)$ и $\hat{x}(Ey)W_1(x, y)$ было пусто. Элементы в этих множествах могут быть найдены следующим образом. Из соотношения (29) теоремы IV § 58 получаем, что $(Ey)T_1(e, e, y)$. Возьмем любой рекурсивный предикат R, такой, что $(x)(Ey)R(x, y)$, и выберем f для этого R согласно соотношению (6) теоремы IV § 57. Далее, возьмем любой рекурсивный предикат R, такой, что $(x)(y)\overline{R}(x, y)$, и выберем g для этого R согласно соотношению (7). Положим $e_0 = 2^g \cdot 3^f$ и $e_1 = 2^f \cdot 3^g$. Тогда $(Ey)W_0(e_0, y)$ и $(Ey)W_1(e_1, y)$.

В теореме XIII мы имели фиксированное рекурсивно-перечислимое множество C_0 натуральных чисел (а именно, $\hat{x}(Ey)T_1(x, x, y)$), дополнение C_3 которого $(= \hat{x}(y)\overline{T}_1(x, x, y))$ не является рекурсивно-перечислимым (фиг. 1). В теореме XV мы имеем два фиксированных рекурсивно-перечислимых множества C_0 и C_1 (а именно, $\hat{x}(Ey)W_0(x, y)$ и $\hat{x}(Ey)W_1(x, y)$ соответственно), которые не пересекаются (в силу (51)) и обладают тем свойством[1]), что каково бы ни было разбиение множества всех натуральных чисел на два не пересекающихся множества C_2 и C_3, таких, что $C_0 \subseteq C_2$ и $C_1 \subseteq C_3$, множества C_2 и C_3 не могут быть оба рекурсивно-перечислимыми (фиг. 2). (Вместо $(x)(x \in C_2 \vee x \in C_3)$ достаточно считать $(x)\overline{\overline{(x \in C_2 \vee x \in C_3)}}$, что интуиционистски слабее.) C_3 является дополнением C_0 только для предпочтённой интерпретации[2]). При доказательстве теоремы XIII (часть II), мы исходили из произвольного рекурсивно-перечислимого множества D_3, содержащегося в C_3 (а именно, $\hat{x}(Ey)R(x, y)$), и нашли число f, не содержащееся ни в C_0, ни в D_3 (фиг. 1а).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

При доказательстве теоремы XV мы исходили из двух данных непересекающихся рекурсивно-перечислимых множеств D_2 и D_3, содержащих C_0 и C_1

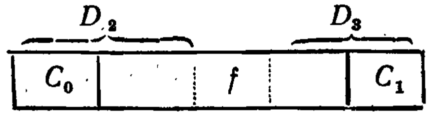
---

[1]) Всякая пара C_0, C_1 множеств натуральных чисел, обладающая этим свойством, называется *рекурсивно-неотделимой* или просто *неотделимой* (часто употребляют менее точную терминологию, называя сами множества C_0, C_1 неотделимыми). Впервые неотделимую пару непересекающихся рекурсивно-перечислимых множеств построил П. С. Новиков (пример строится аналогично принадлежащему ему же примеру B-неотделимых CA-множеств; см., например, В. Я. Арсенин и А. А. Ляпунов [1950]). Первая публикация подобного примера принадлежит Клини [1950]. Дальнейшие примеры рассматривались Б. А. Трахтенбротом [1952]. Из неотделимости множеств $\hat{x}(Ey)W_0(x, y)$ и $\hat{x}(Ey)W_1(x, y)$ вытекает неотделимость множества доказуемых и множества опровержимых формул для всякой формальной системы, удовлетворяющей соотношениям (52) и (53). Пара множеств C_0 и C_1 называется *эффективно-неотделимой* (В. А. Успенский [1953]), если существует частично-рекурсивная (см. гл. XII) функция ν от двух аргументов, обладающая следующим свойством: всякий раз, как n_0 и n_1 суть гёделевские номера таких рекурсивно-перечислимых множеств H_0 и H_1, что $H_0 \supseteq C_0$ и $H_1 \supseteq C_1$, то значение $\nu(n_0, n_1)$ определено, но не принадлежит $H_0 + H_1$. Все известные в литературе неотделимые пары являются на самом деле эффективно-неотделимыми (пример неотделимой пары, не являющейся эффективно-неотделимой, построен в последнее время А. А. Мучником [1956а]). Можно показать, что множества $\hat{x}(Ey)W_0(x, y)$ и $\hat{x}(Ey)W_1(x, y)$ [а в силу соотношений (52) и (53) также и множества доказуемых и опровержимых формул формальной системы S из теоремы XV] образуют эффективно-неотделимую пару.—*Прим. ред.*

[2]) Эта фраза становится понятной, если считать, что C_2 и C_3 состоят из тех чисел x, для которых истинны (при некоторой интерпретации) формулы $B(x)$ и $\neg B(x)$ соответственно. В таком случае при предпочтённой интерпретации C_3 совпадает с C_0 и, следовательно, C_3 действительно является дополнением к C_0.—*Прим. ред.*

соответственно (а именно, $\hat{x}(Ey)R_0(x, y)$ и $\hat{x}(Ey)R_1(x, y)$), и нашли число f, не содержащееся ни в D_2 ни в D_3 (фиг. 2а).

Фиг. 1а.



Фиг. 2а.

Конечно, в изложенных доказательствах можно обойтись без метаматематической фразеологии, применяя для этого соотношения (54) и (55) к условиям (52), (53) и (56), так что эти условия примут вид

(52а) $(Ey)W_0(x, y) \to (Ey)R_0(x, y)$, (53а) $(Ey)W_1(x, y) \to (Ey)R_1(x, y)$,

(56а) $\overline{(Ey)R_0(x, y)\,\&\,(Ey)R_1(x, y)}$

(Клини [1950])[1]. Эти результаты обобщаются на множества, рекурсивно-перечислимые относительно Ψ; см. конец § 60 и теорему X § 58.

Числа x, для которых $B(x)$ доказуема, образуют рекурсивно-перечислимое множество ((54), теорема XIV; из соотношения (52) и замечания 1 получаем, что $\vdash B(e_0)$[2]).

Теорема XVI. *Если S удовлетворяет условиям теоремы* XV (*за исключением, быть может, условия* (55)) *и просто непротиворечива, то множество чисел x, для которых $B(x)$ недоказуема в S, не рекурсивно-перечислимо; другими словами, не существует обще-рекурсивного предиката $Q(x, y)$, такого, что* $(Ey)Q(x, y) \equiv \overline{\vdash B(x)}$. (По Россеру [1936].)

Доказательство. Действительно, если бы $\hat{x}[\overline{\vdash B(x)}]$ было рекурсивно-перечислимо, то, выбирая $C_2 = \hat{x}[\vdash B(x)]$ и $C_3 = \hat{x}[\overline{\vdash B(x)}]$, мы имели бы ситуацию, показанную на фиг. 2 с рекурсивно-перечислимыми C_2 и C_3. (Интуиционистски было бы $(x)\overline{(x \in C_2 \vee x \in C_3)}$; см. *51а § 27.) Можно также провести доказательство при помощи замечания, что соотношения (52) — (56) сохраняют силу после замены «R_1» на «Q» и «$\vdash \neg B(x)$» на «$\overline{\vdash B(x)}$», после чего прежнее доказательство для $\vdash B(f)\,\&\,\vdash \neg B(f)$ превращается в вывод логического противоречия $\vdash B(f)\,\&\,\overline{\vdash B(f)}$. (Условиями, касающимися $\neg B(x)$ и простой непротиворечивости, мы пользуемся только для установления того, что $(Ey)W_1(x, y) \to \overline{\vdash B(x)}$.)

Проблема разрешимости для формальной системы. (Ср. § 30.) Согласно тезису I § 60, в случае арифметического предиката (функции) „эффективная разрешимость (вычислимость)“ означает „общую рекурсивность“. Постараемся придать точный смысл понятию „эффективной разрешимости (вычислимости)“

[1]) В изложенном доказательстве неотделимость некоторых множеств используется для доказательства неполноты формальной системы (и даже ее непополнимости—см. подстрочное примечание на стр. 274); если воспользоваться эффективной неотделимостью этих множеств, то можно получить и эффективную непополнимость). Появляющаяся здесь связь между неотделимостью и непополнимостью (и между эффективной неотделимостью и эффективной непополнимостью) не случайна. А. Н. Колмогоров обнаружил, что неотделимость множества доказуемых и множества опровержимых формул формальной системы достаточна для непополнимости этой системы. Для широкого класса формальных систем неотделимость множества доказуемых и множества опровержимых формул является и необходимым условием непополнимости; для этого же класса эффективная неотделимость указанных множеств является необходимым и достаточным условием эффективной непополнимости (В. А. Успенский [1953]).—*Прим. ред.*

[2]) Так что множество чисел x, для которых $B(x)$ доказуема, имеет хотя бы один элемент; поэтому можно применить теорему XIV.—*Прим. ред.*

для метаматематических предикатов (функций). В случае произвольной формальной системы S, объекты которой допускают эффективную гёделевскую нумерацию (что должно иметь место, если S достигает цели, которая ставится перед всякой формализацией; см. начало § 60), мы можем принять, что метаматематический предикат (функция) „эффективно разрешим“ („эффективно вычислима“), если вполне соответствующий арифметический предикат (соответствующая арифметическая функция) обще-рекурсивен (обще-рекурсивна). Например, дать „разрешающую процедуру“ для доказуемости в S, т. е. для предиката $\vdash \mathrm{A}$ (где A — метаматематическая переменная, пробегающая по всем формулам или по всем формальным объектам системы S), означает найти такой обще-рекурсивный предикат $R(a)$, что $R(a) \equiv \vdash \mathrm{A}_a$ (в обозначениях замечания 1 § 60). (Другой метод уточнения понятия „эффективной разрешимости (вычислимости)“ для метаматематического предиката (функции) указан в конце § 70.) Дальнейшее можно понимать или в содержательном смысле разрешающей процедуры, применяемой к формулам S, или в смысле этого точного математического определения. Условие, что $\mathrm{B}(x)$ является эффективной метаматематической функцией от x (или что ее гёделевский номер $\beta(x)$ является обще-рекурсивной арифметической функцией от x), должно выполняться, если только S достигает цели формализации по отношению к формулам $\mathrm{B}(x)$.

Следствие. *Пусть система S удовлетворяет условиям теоремы* XV (*кроме, быть может*, (54) *и* (55)) *и такова, что* $\mathrm{B}(x)$ *может быть эффективно найдена по x (т. е. в некоторой определенной эффективной гёделевской нумерации ее номер $\beta(x)$ является обще-рекурсивной функцией от x). Если S просто непротиворечива, то ее проблема разрешимости неразрешима, т. е. не существует разрешающей процедуры для распознавания того, доказуема ли в S данная формула.*

Доказательство. Действительно, если бы имелся метод для эффективного определения, доказуема ли произвольная данная формула этой системы, то можно было бы для любого данного числа x найти соответствующую формулу $\mathrm{B}(x)$ и затем применить этот метод к найденной формуле. В силу тезиса I § 60, это влекло бы общую рекурсивность множества $\hat{x}[\vdash \mathrm{B}(x)]$. Тогда и подавно оба множества $\hat{x}[\vdash \mathrm{B}(x)]$ и $\hat{x}\overline{[\vdash \mathrm{B}(x)]}$ были бы рекурсивно-перечислимы, а потому нашлись бы обще-рекурсивные предикаты R_0 и Q, такие, что $(Ey)R_0(x, y) \equiv \vdash \mathrm{B}(x)$ (для (54)) и $(Ey)Q(x, y) \equiv \overline{\vdash \mathrm{B}(x)}$ (ср. конец § 60 и замечание 1), что противоречит теореме. Иначе говоря, если бы имелся обще-рекурсивный предикат R, такой, что $R(a) \equiv \vdash \mathrm{A}_a$, то, полагая $R_0(x, y) \equiv R(\beta(x))$ и $Q(x, y) \equiv \overline{R}(\beta(x))$, мы, как и выше, пришли бы к противоречию с теоремой.

Теорема 33. *Пусть арифметическая формальная система гл.* IV (*или система Робинсона, описанная в лемме* 18b § 49) *просто непротиворечива. Тогда ее проблема разрешимости неразрешима и остается неразрешимой при любом расширении системы путем добавления постулатов, если только при этом расширении сохраняется простая непротиворечивость системы.*

Доказательство опирается на только что полученное следствие и пример 1. Так как в примере 1 символ $\neg$ формулы $\neg \mathrm{B}(x)$ есть знак $\neg$ арифметической системы, то „простая непротиворечивость“, подразумеваемая в теореме XV, совпадает с „простой непротиворечивостью“, определенной в § 28 для арифметической системы. (Для определения понятия „разрешимости“ при помощи гёделевской нумерации можно пользоваться нумерацией §§ 50, 52. Тогда, в силу примера 2 § 52, функция $\beta(x)$ примитивно-рекурсивна.)

Сводимость, степени неразрешимости. Значительная часть работ по проблемам разрешимости посвящена не отысканию решений этих проблем, а сведению одной проблемы разрешимости к другой.

„Свести“ проблему разрешимости для предиката P (или проблему вычислимости для функции φ) от n переменных к соответствующим проблемам для l функций и предикатов $\psi_1, \ldots, \psi_{l_1}, Q_1, \ldots, Q_{l_2}$ (сокращенно Ψ) — это, при интуитивном понимании, означает следующее: найти регулярную процедуру, при помощи которой для любой данной n-ки аргументов $x_1, \ldots, x_n$ можно решить, истинно или нет $P(x_1, \ldots, x_n)$ (вычислить значение $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$), если только на каждой стадии этой процедуры значения функций $\psi_1, \ldots, \psi_{l_1}$ и значения истинности предикатов $Q_1, \ldots, Q_{l_2}$ для тех значений аргументов, для которых они могут потребоваться, являются доступными; короче говоря, установить, что P эффективно разрешим (φ эффективно вычислима) относительно Ψ.

Чтобы получить точное математическое понятие, соответствующее этому интуитивному понятию, мы, расширим естественным образом тезис Чёрча (тезис I § 60) так, чтобы он включал случай $l > 0$ исходных функций и предикатов Ψ (этот расширенный тезис мы будем называть тезисом I*). Доводы в пользу тезиса I будут применимы и к тезису I*. Имеет место обращение тезиса I*.

Например, *свести* проблему разрешимости для предиката $P(a)$ к проблеме разрешимости для другого предиката $Q(a)$ означает найти предикат $R(a)$, обще-рекурсивный относительно $Q(a)$ и такой, что $P(a) \equiv R(a)$, или, короче, установить, что $P(a)$ обще-рекурсивен относительно $Q(a)$. Мы заключаем это, исходя из нашего интуитивного понятия сведения и пользуясь тезисом I*. Можно также выбрать эту формулировку в качестве определения и затем прибегнуть к тезису I* для установления того, что так определенное понятие согласуется с нашим содержательным понятием сведения[1]).

Пост [1944] сформулировал несколько математических понятий сводимости. Самое общее из них, которое Пост заимствует у Тьюринга [1939], эквивалентно тому, которое мы получаем по тезису I*. Если проблема разрешимости для $P(a)$ сводима к проблеме разрешимости для $Q(a)$ и неразрешима, то Пост говорит, что *степень неразрешимости* для $P(a)$ *равна* или *ниже степени неразрешимости* для $Q(a)$ в соответствии с тем, сводима

---

[1]) Заметим, что сводимость по разрешимости (т. е. сводимость проблем разрешимости друг к другу) определяется здесь—при помощи представляющих функций—через сводимость по вычислимости (т. е. сводимость друг к другу проблем вычислимости). В. А. Успенский [1955] ввел понятие *сводимости по перечислимости*, в терминах которого оказалось возможным сформулировать определения двух других видов сводимости (по разрешимости и по вычислимости).

Проблемы вычислимости и разрешимости можно рассматривать как частные случаи проблем, рассмотренных Ю. Т. Медведевым (см. подстрочное примечание на стр. 51) и названных им *массовыми проблемами*. Им было введено также понятие сводимости таких проблем, причем проблема сводимости одной массовой проблемы в смысле Ю. Т. Медведева к другой сама оказалась массовой проблемой в смысле Ю. Т. Медведева. Каждой массовой проблеме в смысле Ю. Т. Медведева соответствует некоторая *степень трудности*. Степени трудности естественным образом частично упорядочиваются (степень трудности проблемы A меньше или равна степени трудности проблемы B, если A сводится к B) и образуют, как выяснил Ю. Т. Медведев, структуру и даже брауэрову логику (по поводу терминологии см. Биркгоф [1948]).

О различных понятиях сводимости см. Успенский [1956, резюме].—*Прим. ред.*

или нет проблема разрешимости для $Q(a)$ к проблеме разрешимости для $P(a)$ (ср. § 3)[1]). Степени неразрешимости частично упорядочены (см. § 8)[2]). Каждый из предикатов $(Ex)T_1(a,a,x)$, $(x)(Ey)T_2(a,a,x,y)$, $(Ex)(y)(Ez)T_3(a,a,x,y,z)$, ... (см. теорему V, часть II (b) § 57) имеет проблему разрешимости наивысшей степени неразрешимости по сравнению с предикатами соответствующей формы из перечня $(Ex)R(a,x)$, $(x)(Ey)R(a,x,y)$, $(Ex)(y)(Ez)R(a,x,y,z)$, ... с рекурсивным R, что будет доказано ниже (пример 2 § 65; интуиционистски это предложение имеет место, если считать, что оно означает просто, что каждый предикат соответствующей формы с рекурсивным R рекурсивен относительно этого нерекурсивного предиката, а это как раз то, что будет доказано). Далее, классически каждый из этих предикатов, начиная со второго, имеет проблему разрешимости более высокой степени неразрешимости, чем предыдущий (для доказательства надо воспользоваться также следствием из теоремы XI § 58), а предикат $M(a, k)$ теоремы VIII § 57 имеет еще более высокую степень неразрешимости (в силу следствия (b) из теоремы X § 58 и доказательства теоремы VIII). Пользуясь T_n^M вместо T_n, мы получим степени неразрешимости, восходящие от этой последней (в силу теоремы XI* в конце § 58 и примера 2 § 65 для $l > 0$). Дейвис [1950, резюме] исследует эти степени неразрешимости. Пост [1944] ставит, не решая, такую проблему: существует ли более низкая степень неразрешимости, чем у проблемы разрешимости для $(Ex)T_1(a, a, x)$[3]).

Пример 3. Пусть теорема 33 сформулирована с помощью более сильного свойства непротиворечивости примера 1 (или 2) § 60 вместо простой непротиворечивости. В этой более слабой форме теорема 33 может быть доказана с помощью примера 1 (или 2) § 60, если в этом примере положить $R(x, y) \equiv T_1(x, x, y)$ и применить теорему XII § 60. Из этого доказательства следует, в силу только что цитированных результатов примера 2 § 65, что при этом более сильном условии непротиворечивости проблема разрешимости для формальной системы гл. IV (или системы Робинсона, лемма 18b) или для любого ее расширения, обладающего этим свойством непротиворечивости для той же или какой-нибудь другой формулы R (x, y), нумерически выражающей $R(x, y)$ ($\equiv T_1(x, x, y)$), имеет самую высокую степень неразрешимости среди проблем разрешимости для 1-кванторных предикатов. Для системы гл. IV (или системы Робинсона) мы можем также показать это (при другом выборе R (x, y) и $R(x, y)$ в сильном условии непротиворечивости), пользуясь данным доказательством теоремы 33, а именно, следующим образом. Пусть f выбрано по (6) с $T_1((x)_2, (x)_2, y)$ в качестве R, а g выбрано по (7) для какого-нибудь рекурсивного R, такого, что $(x)(y)R(x, y)$. Тогда

[1]) Впоследствии Клини и Пост [1954] распространили это определение и на тот случай, когда проблема разрешимости для $P(a)$ разрешима, т. е. $P(a)$ обще-рекурсивный предикат. Очевидно, что степень неразрешимости, соответствующая обще-рекурсивному предикату, является наименьшей среди всех степеней неразрешимости; она обозначается 0. — *Прим. ред.*

[2]) Как показали Клини и Пост [1954], степени неразрешимости образуют верхнюю полуструктуру, но не структуру (см. Биркгоф [1948]). Верхней полуструктурой называется частично-упорядоченное множество, любые два элемента которого имеют наименьшую верхнюю грань. — *Прим. ред.*

[3]) Ответ на этот вопрос дается в упоминавшейся уже статье Клини и Поста [1954], где устанавливается, что существует даже бесконечное множество степеней неразрешимости, меньших, чем степень неразрешимости предиката $(Ex)T_1(a, a, x)$. Остается, однако, вопрос, существует ли степень неразрешимости (разумеется, большая чем 0), меньшая степени неразрешимости предиката $(Ex)T_1(a, a, x)$ и принадлежащая предикату вида $(Ex)R(a, x)$, где $R(a, x)$ — обще-рекурсивный предикат. В этом состоит так называемая *проблема сводимости*, которую решил недавно А. А. Мучник [1956*], показавший, что степень неразрешимости, удовлетворяющая приведенным выше условиям, действительно существует. — *Прим. ред.*

$(Ey)T_1(x, x, y) \equiv (Ey)W_0(2^g \cdot 3^f \cdot 5^x, y)$. Тем самым проблема разрешимости для $(Ey)T_1(x, x, y)$ сводится к проблеме разрешимости для $(Ey)W_0(x, y)$. Итак, проблема разрешимости для рассматриваемой системы имеет высшую степень неразрешимости среди проблем для 1-кванторных предикатов, если система обладает тем свойством, что обращение (52) имеет место для $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ примера 1 (для системы Робинсона это так в силу теоремы 53 (с) § 79). (Эта $\mathrm{B}(\boldsymbol{x})$ имеет вид $\exists y\mathrm{R}(\boldsymbol{x}, y)$, где $\mathrm{R}(x, y)$ нумерически выражает $W_0(x, y)$, в силу § 41 (С) и (Е).)

В случае если Ψ — неопределенные функции и предикаты, можно рассматривать сведéние проблемы разрешимости для P (проблемы вычислимости для φ) к соответствующим проблемам для Ψ в смысле нахождения процедуры, равномерной относительно Ψ, так же как и относительно $x_1, \ldots, x_n$, или, короче, в смысле установления того, что P эффективно разрешим (φ эффективно вычислима) равномерно относительно Ψ. Для этого надо условие и заключение тезиса I* и его обращения понимать в «равномерном» смысле.

Глава XII

ЧАСТИЧНО-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 62. ТЕЗИС ЧЁРЧА

Одна из основных задач этой и следующей глав — изложить доводы в пользу тезиса Чёрча (тезис I § 60).

Этот тезис не может быть доказан, так как в нем используется довольно расплывчатое интуитивное понятие эффективной вычислимости функции (или эффективной разрешимости предиката).

Однако это интуитивное понятие оказывается реальным, так как оно обеспечивает эффективную вычислимость многих конкретных функций (§ 30), а с другой стороны позволяет нам убедиться в том, что наши сведения относительно многих других функций недостаточны, чтобы отнести их к категории эффективно вычислимых функций.

В качестве примера функций последнего рода рассмотрим функцию $\varepsilon y R(x, y)$, где $R(x, y)$ — эффективно разрешимый предикат (Гёдель [1931]), определенную классически таким образом:

$$\varepsilon y R(x, y) = \begin{cases} \text{наименьшему } y \text{ такому, что } R(x, y), \text{ если } (Ey) R(x, y), \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Это определение (само по себе) не дает вычисляющей процедуры. При данном x мы можем последовательно рассматривать предложения $R(x, 0)$, $R(x, 1)$, $R(x, 2), \ldots$, разыскивая среди них истинное, пока нам не надоест; другими словами, для любого конечного n мы в принципе можем полностью исследовать первые n из этих предложений. Если данное x таково, что $(Ey) R(x, y)$, то при достаточном упорстве мы найдем, наконец, первое y, для которого $R(x, y)$ истинно, и это y будет значением функции $\varepsilon y R(x, y)$. Но если x таково, что $\overline{(Ey)} R(x, y)$, мы никогда этого не узнаем, сколько бы ни упорствовали в наших поисках, которые никогда не окончатся. Окончить исследование всех $\aleph_0$ предложений, как это предлагает наше классическое определение, невозможно для человека.

При некоторых выборах $R(x, y)$ функция $\varepsilon y R(x, y)$, тем не менее, может оказаться эффективно вычислимой, но только не «непосредственно» на основании ее определения, а по причине существования некоторой другой процедуры для определения ее значения, которая, в отличие от процедуры, подсказанной определением, является эффективной. Например, если

$$R(x, y) \equiv (x)_0 (y)_0 + (x)_1 (y)_1 = (x)_2,$$

то известно, что такая процедура имеется (ср. пример 2 § 30).

Функция $\varepsilon y R(x, y)$ является эффективно вычислимой тогда и только тогда, когда предикат $(Ey) R(x, y)$ эффективно разрешим. Действительно, если $(Ey) R(x, y)$ эффективно разрешим, то для того, чтобы при данном x вычислить $\varepsilon y R(x, y)$, мы можем выяснить сначала, истинно или нет

$(Ey)\,R(x, y)$ и в зависимости от полученного ответа или искать наименьшее такое y, что $R(x, y)$, или взять 0 в качестве искомого значения. Обратно, если $\varepsilon y R(x, y)$ эффективно вычислима, то при данном x мы можем решить, истинно или нет $(Ey)\,R(x, y)$, а именно, надо вычислить сначала $\varepsilon y R(x, y)$, а затем посмотреть, истинно или нет $R(x, \varepsilon y\, R(x, y))$.

Интуиционисты не находят оправдания для веры в то, что для любого данного предиката $P(y)$ мы можем узнать, истинно или нет $(Ey)\,P(y)$. На этом основании они не принимают закон исключенного третьего *А или не А* с их пониманием «или» (§ 13). Ввиду их рассуждения, примененного к $R(x, y)$ в качестве $P(y)$, мы не имеем оснований считать, что для произвольного R предикат $(Ey)\,R(x, y)$ эффективно разрешим.

Тезис Чёрча, точно ограничивающий класс „всех эффективно вычислимых функций“, дает возможность доказать для некоторых предикатов $R(x, y)$, например для $T_1(x, x, y)$ (теорема XII § 60), что не существует регулярного метода решения проблемы, истинно или нет $(Ey)\,R(x, y)$. Поэтому возражение Брауэра, что вера Гильберта в разрешимость каждой математической проблемы не обоснована, можно теперь заменить настоящим опровержением этой веры, если разрешимость понимать в смысле регулярной разрешимости[1]) и принять тезис Чёрча. Связь между тезисом Чёрча и интуиционизмом будет рассмотрена ниже (§ 82).

Интуиционисты не считают, что приведенное выше определение для $\varepsilon y R(x, y)$, в котором отсутствует доказательство эффективной вычислимости, действительно служит определением функции. Можно, однако, перенести интуиционистски наше рассмотрение $\varepsilon y R(x, y)$ на предикат

$$\{R(x, w) \,\&\, (z)_{z<w} \overline{R}(x, z)\} \vee \{\overline{(Ey)}\,R(x, y) \,\&\, w = 0\}.$$

Этот предикат, который мы обозначим через «$P(x, w)$», классически служит представляющим предикатом для $\varepsilon y R(x, y)$. Но интуиционистски мы не в состоянии доказать, что $(x)(E!w)\,P(x, w)$, т. е. что $P(x, w)$ является представляющим предикатом некоторой функции (см. § 41; $(x)\,[(Ew)\,P(x, w) \equiv (E!w)\,P(x, w)]$ согласно *174b, *171).

Хотя мы и не можем доказывать тезис Чёрча, так как его сущность состоит в точном описании некоторой совокупности, понимавшейся прежде расплывчато, нам нужно убедиться, что он не может привести к конфликту с тем содержательным понятием, на полное отображение которого он претендует. Другими словами, нам нужны доводы в пользу того, что каждая функция, в эффективной вычислимости которой убеждает нас интуиция, является обще-рекурсивной. Тезис Чёрча можно рассматривать как гипотезу о содержательном понятии эффективной вычислимости или как математическое определение эффективной вычислимости; в последнем случае нужны доводы, чтобы признать за теорией, основанной на этом определении, значение, на которое она претендует.

Обращение тезиса Чёрча, т. е. утверждение, что каждая обще-рекурсивная функция φ эффективно вычислима, мы считаем уже обоснованным при помощи содержательного понятия (см. § 60). При этом мы пользуемся определением для отношения „E рекурсивно определяет φ“, которое утверждает, что для данных $x_1, \ldots, x_n$ всегда существует вывод из E некоторого равенства $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, выражающего, что значение $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть x (или, если мы основываем процедуру вычисления на теореме IX (30), то используем (29), а если основываем эту процедуру на следствии из теоремы IX, то используем (1)). В заключении, что мы имеем эффективную процедуру вычисления квантор существования, который встречается в определении отношения „E рекурсивно определяет φ“ (или в (29), или

[1]) Т. е. в смысле разрешающей процедуры.—*Прим. ред.*

в (1)), следует понимать конструктивно (§ 13); аналогично обстоит дело с квантором существования в определении для понятия „φ обще-рекурсивна“, который указывает, что существует E, рекурсивно определяющее φ (или, в теореме IX, что может быть найден гёделевский номер e; это же относится и к следствию из теоремы IX, утверждающему, что может быть найдена конечная последовательность применений схем (I) — (VI)).

Другими словами, мы воздержимся от утверждения, что функция эффективно вычислима на основании того, что доказана ее общая рекурсивность, если это доказательство ее общей рекурсивности не проведено эффективно. (Ср. Чёрч [1936], сноска 10.)

Теперь мы перечислим доводы в пользу тезиса Чёрча (и тезиса I*, конец § 61) под тремя главными рубриками (A)—(C) и еще одной рубрикой (D), которую можно было бы включить в (A). Некоторые из этих доводов будут изложены подробнее в следующих параграфах.

(A) Эвристические доводы.

(A1) До сих пор во всех случаях, когда этот вопрос исследовался, удавалось доказать общую рекурсивность каждой эффективно вычислимой функции и каждой операции эффективного определения функции через другие функции. Исследованию подвергалось большое число разнообразных эффективно вычислимых функций, классов таких функций и операций, служащих для эффективного определения одних функций через другие, причем эти операции выбирались с намерением исчерпать все известные типы.

(A2) Методы доказательства общей рекурсивности эффективно вычислимых функций достигли такой степени развития, на которой фактически не остается сомнения в том, что каждое описание эффективного процесса определения значений функции может быть посредством этих методов преобразованно в обще-рекурсивное определение этой функции.

(A3) Изучение различных методов, посредством которых можно было рассчитывать получить функцию, не входящую в класс обще-рекурсивных функций, до сих пор в каждом случае показывало или то, что данный метод не выводит за пределы класса обще-рекурсивных функций, или то, что вновь полученную функцию нельзя считать эффективно определенной, т. е. ее определение не предусматривает никакого эффективного процесса вычисления. В частности, последнее имеет место для канторовского диагонального метода. (Случай первого рода будет рассмотрен в примере 1 § 65.)

(B) Эквивалентность различных формулировок.

(B1). Существует несколько других способов охарактеризовать класс эффективно вычислимых функций, к которым применимы те же эвристические доводы (A). Они оказались эквивалентными с общей рекурсивностью, т. е. классы функций, которые они описывают, совпадают с классом обще-рекурсивных функций.

Фактически три понятия возникли независимо и почти одновременно, а именно, ***общая рекурсивность***, ***λ-определимость*** (шаги в направлении которой были предприняты последовательно Чёрчем [1933] и Клини [1935]; см. Чёрч [1941]) и ***вычислимость*** по Тьюрингу (Computability) (Тьюринг [1936—37], Пост [1936]). Эквивалентность понятий (т. е. совпадение соответствующих классов) λ-определимых и обще-рекурсивных функций была доказана Чёрчем [1936] и Клини [1936а] (см. также ссылку на работу Россера у Чёрча [1936, сноска 16]). Эквивалентность понятий вычислимой по Тьюрингу и λ-определимой (и тем самым обще-рекурсивной) функции была доказана Тьюрингом [1937].

Понятие функции, ***изобразимой*** (§ 59) в некоторой формальной системе S_1, описанное (очень кратко) Гёделем [1936], является четвертым эквивалентом общей рекурсивности при условии, что S_1 просто непротиворечива (как указал Россер в реферате [1936a]).

Еще один подход предложен Постом [1943, 1946] в терминах того, что он называет ***каноническими*** и ***нормальными системами***. Непосредственно из его изложения получается эквивалент рекурсивной перечислимости, но затем, как в примере 6 § 60, мы получаем эквивалент общей рекурсивности[1]).

То обстоятельство, что несколько резко различных между собой понятий приводят к одному и тому же классу функций, является важным указанием на то, что этот класс играет основную роль.

(B2) Менее серьезно, но все же заслуживает внимания то обстоятельство, что эти главные понятия также допускают различные формулировки, и эти формулировки эквивалентны; другими словами, эти понятия обладают своего рода «устойчивостью».

Так, формализм для определения общей рекурсивности можно выбирать различными способами (§ 55). Возможна также формулировка (***μ-рекурсивность***), основанная не на каком-либо формализме, а на схемах (I)—(VI) (теорема III § 57 и следствие теоремы IX § 58), или формулировка, использующая схемы (III), (IV) и (VI) с функциями $x+y$, $x \cdot y$ и δ^x_y ($\delta^x_y=1$, если $x=y$, $\delta^x_y=0$, если $x \neq y$) в качестве первоначальных функций (Клини [1936b], см. также Дж. Робинсон [1950]).

Для понятия λ-определимости имеются варианты: ***λ-K-определимость*** (рассматривавшаяся Россером, см. Клини [1936a, сноска 12]) и ***λ-δ-определимость*** (Чёрч [1935]). Имеется также параллельное развитие, начатое Шейнфинкелем [1924] и Карри ([1929, 1930, 1932]) и продолженное Россером ([1935, 1942*]) (см. также Карри [1948—49]), приводящее к понятию, которое можно назвать ***комбинаторной определимостью***; эквивалентность этого понятия с λ-определимостью была доказана Россером.

Подробности определения вычислимости также могут меняться, как мы увидим ниже (глава XIII).

Система S_1 Гёделя [1936] — это первая система в иерархии систем S_i ($i=1, 2, 3, \ldots$), пользующихся последовательно все более высокими типами переменных (см. § 12). Гёдель замечает[2]): «Кроме того можно доказать, что функция, изобразимая в одной из систем S_i или даже в системе трансфинитного порядка, изобразима уже в S_1, так что понятие „изобразимости" является в известном смысле „абсолютным", тогда как почти все известные до сих пор метаматематические понятия (например, доказуемость, определимость и т. д.) очень существенно зависят от системы, которая положена в основу». В точности те же самые функции оказываются изобразимыми в нашей арифметической системе гл. IV или в системе Робинсона, описанной в лемме 18b § 49 (в силу теоремы 32 § 59 и эквивалентности изобразимости в гёделевской системе S_1 с общей рекурсивностью). Эквивалентность изобразимости в этих системах имеет место при условии простой непротиворечивости систем Гёделя и нашей системы гл. IV. (Простая непротиворечивость системы Робинсона будет доказана как теорема 53 (a) § 79). Две другие системы (Z^0) и (Z_{00}), имеющие тот же класс изобразимых формул, приведены у Гильберта — Бернайса [1939, дополнение II]; это — формализации μ-рекурсивности (в (Z_{00}) используется также нормальная форма). (Мостовский [1947] основывает свой вариант теоремы V § 57 на понятии отобразимости предиката P в системе S (§ 59), причем S должна

---

[1]) Предложенное А. А. Марковым [1950, 1951, 1954] в качестве уточнения понятия алгоритма определение *нормального алгорифма* приводит в свою очередь к уточнению понятия эффективно вычислимой функции. Это уточнение, как показал В. К. Детловс [1953], также оказывается эквивалентным понятию обще-рекурсивной функции. — *Прим. ред.*

[2]) Это и есть замечание, о котором говорится в библиографии. — *Прим. перев.*

подчиняться только некоторым совсем общим условиям. Как мы увидим ниже в связи с (D1) и тезисом II, только общерекурсивная функция может быть изобразима в формальной системе S с эффективными правилами; но Мостовский рассматривает также неконструктивные обобщения формальных систем в нашем смысле.)

(C) Концепция вычислительной машины, принадлежащая Тьюрингу.

Вычислимые функции Тьюринга [1936—37] — это функции, которые могут быть вычислены посредством машины, запроектированной согласно его анализу так, что она может воспроизвести все виды вычислительных операций, доступных человеку, и работает следуя предписанным ей инструкциям. Тьюринговское понятие является результатом прямой попытки математически сформулировать понятие эффективной вычислимости, тогда как остальные понятия возникли иным образом и были впоследствии отождествлены с эффективной вычислимостью. Поэтому определение Тьюринга представляет независимую формулировку тезиса Чёрча (в эквивалентных терминах). Пост [1936] дал сходное определение[1]).

Работа, на которую мы ссылались под рубрикой (A) (и в особенности (A1)), первоначально не вся была проделана для общей рекурсивности или специальных понятий рекурсивности, подпадающих под общую рекурсивность (§ 55); значительная часть этой работы была проделана для λ-определимости (у Клини [1935]) или вычислимости (у Тьюринга [1936—37]). Но, в силу (B), все эвристические и другие доводы, собранные при изучении различных понятий эффективной вычислимости, приложимы к любому из них. Накопление методов доказательства общей рекурсивности, происшедшее в связи с (A1), обогащает (A2).

Случай, относящийся к (A2), будет изложен в этой главе в связи с теорией частично-рекурсивных функций (см. § 66). Вычислимостью по Тьюрингу мы займемся в следующей главе, где мы докажем в §§ 68, 69 эквивалентность этой вычислимости и общей рекурсивности (см. (B1)) и заодно эквивалентность некоторых различных формулировок вычислимости (см. (B2)) и приведем в § 70 доводы, относящиеся к (C).

(D) Символические логики и символические алгоритмы.

Чёрч [1936] привел (по существу) следующие аргументы, показывающие, что «невозможно получить более общее определение эффективной вычислимости, чем предложенное выше, пользуясь любым из двух напрашивающихся методов» (стр. 358).

(D1) Пусть имеется функция $\varphi(x)$ и формальная система, такая, что справедливы следующие утверждения: множество аксиом конечно или (если оно бесконечно) эффективно перечислимо, и аналогично для множества правил вывода; каждое правило вывода является эффективно осуществимой операцией; кроме того, мы можем эффективно отыскать формулу $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$, которая приписывает число w в качестве значения функции φ для данного аргумента x, и эффективно прочитать по ней это число; наконец, в системе доказуемы такие и только такие формулы $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$, которые приписывают φ правильные значения, т. е. φ „изобразима" в смысле § 59 (только теперь мы не требуем, чтобы $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ получалась из некоторой $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{w})$ путем подстановки $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{w}$ вместо x, w). Если допустима интерпретация,

[1]) А. Н. Колмогоров [1953, резюме] предложил уточнение понятия алгоритма, непосредственно отображающее наши наглядные представления об алгоритмах. Класс функций, вычислимых при помощи *алгоритмов Колмогорова*, совпадает с классом обще-рекурсивных функций, что дает еще один вариант тезиса Чёрча.—*Прим. ред.*

согласно которой только что упомянутая эффективность метаматематических функций и предиката влечет общую рекурсивность соответствующих им при надлежащей гёделевской нумерации арифметических функций и предиката, то φ обще-рекурсивна. Действительно, рассуждая, как в доказательстве теоремы IX § 58 или (с) § 59, мы находим, что для некоторых обще-рекурсивных ψ и R справедливы утверждения $(x)(Ey)R(x, y)$ и $\varphi(x)=\psi(\mu y R(x, y))$, после чего применяем теорему III из § 57.

(D2) Рассмотрим символический алгоритм для вычисления значений функции $\varphi(x)$, состоящий в методе, который позволяет для любого данного x получить конечную последовательность $E_{x0}, E_{x1}, \ldots, E_{xr_x}$ выражений (в некоторой системе обозначений) следующего рода. При данном x может быть эффективно найдено первое выражение E_{x0}. Если даны x и выражения E_{xi} для $i \leqslant j$, то можно эффективным образом установить, окончился ли алгоритм (т. е. имеет ли место $j=r_x$) и если да, то значение $\varphi(x)$ может быть эффективно найдено, а в противном случае может быть эффективно найдено следующее выражение $E_{x\,j+1}$. Опять-таки, если описанные эффективные функции и предикат оказываются обще-рекурсивными при некоторой гёделевской нумерации, то φ обще-рекурсивна. Действительно, мы можем рассуждать, как в (D1), рассматривая теперь (x, E_{x0}) как аналог аксиомы, а операцию перехода от $(x, E_{x0}, \ldots, E_{xj})$ к $(x, E_{x0}, \ldots, E_{xj}, E_{x\,j+1})$ — как аналог правила вывода.

Короче говоря, (D1) и (D2) показывают, что если индивидуальные операции или правила формальной системы или символического алгоритма, используемые для определения функции, обще-рекурсивны, то и сама эта функция обще-рекурсивна. Таким образом, мы можем отнести (D1) и (D2) в качестве частных примеров операций или методов определения под рубрику (A1).

Заметим, что (D1) и (D2) относятся к формальным системам и символическим алгоритмам, имеющим структуру специального рода, примерами которых являются известные нам формальные системы и алгоритмы. Выше мы кое-где (§§ 30, 60, 61) пользовались термином «алгоритм» в более широком смысле для обозначения любой вычисляющей (или разрешающей) процедуры; аналогично мы обобщили понятие формальной системы в связи с тезисом II и теоремой XIII (§ 60). Разумеется, нет никакого порочного круга в том, чтобы добавить доводы в пользу тезиса Чёрча, доставляемые алгоритмами и формальными системами специального вида, а потом применять этот тезис (как в §§ 60, 61) при рассмотрении алгоритмов и формальных систем в более широком смысле.

Если мы будем рассматривать только системы, удовлетворяющие тезису II (для $n+1$ переменных), то функции (от n переменных), изобразимые в различных формальных системах (т. е. каждая функция — в своей системе), все будут обще-рекурсивными, а потому изобразимыми в одной и той же системе (например, в любой из систем, упомянутых в (B2)).

§ 63. ЧАСТИЧНО-РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть, как и в начале § 62, $R(x, y)$ — эффективно разрешимый предикат. Рассмотрим процедуру, состоящую для данного x в последовательном распознавании истинности или ложности каждого из выражений $R(x, 0)$, $R(x, 1)$, $R(x, 2)$, ..., пока не будет найдено истинное, и взятии второго аргумента y этого $R(x, y)$. Эта процедура приводит в конечное число шагов к некоторому натуральному числу y, если $(Ey)R(x, y)$, и только при этом условии. Поэтому ее можно рассматривать как алгоритм для вычисления математической функции от x, определенной на подмножестве

$\hat{x}(Ey)\,R(x, y)$ натурального ряда. Вычисляемая функция есть „наименьшее y, такое, что $R(x, y)$" (обозначается „$\mu y R(x, y)$").

Может оказаться невозможным расширить определение этой функции $\mu y R(x, y)$ на весь натуральный ряд таким образом, чтобы существовал алгоритм для полученной всюду определенной арифметической функции. В § 62 мы видели, что конкретное продолжение $\varepsilon y R(x, y)$ эффективно вычислимо тогда и только тогда, когда предикат $(Ey)\,R(x, y)$ эффективно разрешим; тот же метод показывает, что никакое продолжение функции $\mu y R(x, y)$ на весь натуральный ряд не является эффективно вычислимым. если только предикат $(Ey)\,R(x, y)$ не эффективно разрешим.

Это можно установить при помощи теории обще-рекурсивных функций. Чёрч [1936] называет функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, определенную на некотором множестве n-ок натуральных чисел, *потенциально рекурсивной*, если существует обще-рекурсивная функция $\varphi'(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $\varphi'(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для каждой n-ки $x_1, \ldots, x_n$, для которой значение $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определено. Если теперь предикат $R(x, y)$ обще-рекурсивен, то функция $\mu y R(x, y)$ потенциально рекурсивна тогда и только тогда, когда предикат $(Ey)\,R(x, y)$ обще-рекурсивен. Действительно,

$$(59)\qquad \varepsilon y R(x, y) = \mu w\,[R(x, w) \vee \{\overline{(Ey)}\,R(x, y)\,\&\,w = 0\}];$$

следовательно, в силу #D § 45 и теоремы III § 57, если $(Ey)\,R(x, y)$ обще-рекурсивен, то $\varepsilon y R(x, y)$ является обще-рекурсивным продолжением $\varphi'(x)$ функции $\mu y R(x, y)$. Обратно, если $\mu y R(x, y)$ потенциально рекурсивна с обще-рекурсивным продолжением $\varphi'(x)$, то $(Ey)\,R(x, y) \equiv R(x, \varphi'(x))$ и поэтому $(Ey)\,R(x, y)$ обще-рекурсивен.

Пример 1. Следовательно, по теореме V (15) § 57, функция $\mu y T_1(x, x, y)$ не потенциально рекурсивна (Клини [1938, 1943*]), а $\varepsilon y T_1(x, x, y)$ не обще-рекурсивна (Клини [1936]).

При данном x алгоритм для вычисления функции φ может не привести ни к какому числу в качестве значения $\varphi(x)$ или потому, что он не обрывается (так что, сколько бы шагов ни было сделано, правила алгоритма требуют, чтобы был сделан следующий шаг), или потому, что он обрывается, но не дает в качестве значения никакого числа[1]). Можно так изменить любой данный алгоритм, что коль скоро он при данном x обрывается и не дает в качестве значения никакого числа, новый алгоритм дает значение 0. Новый алгоритм вычисляет продолжение φ' функции φ, определенное в точности тогда, когда первоначальный (и новый) алгоритм обрывается.

Пример 1 (продолжение). Поэтому никакой алгоритм, приводящий к числу $\mu y T_1(x, x, y)$ для каждого x такого, что $(Ey)\,T_1(x, x, y)$, не может обрываться для каждого x (воспользоваться тезисом I § 60).

Если имеется алгоритм для решения, по заданному x, определена или нет функция $\varphi(x)$, вычисляемая данным алгоритмом, то можно построить новый алгоритм, который вычисляет продолжение $\varphi'(x)$ функции $\varphi(x)$ на весь натуральный ряд (см. также пример 5 § 64).

Пример 1 (продолжение). Поэтому не существует алгоритма для распознавания того, определена или нет функция $\mu y T_1(x, x, y)$ при данном x, что видно непосредственно из условия ее определения, $(Ey)\,T_1(x, x, y)$ (см. теорему XII § 60).

---

[1]) Это утверждение интуиционистски не обосновано.—*Прим. перев.*

Можно и таким образом изменить данный алгоритм, не продолжая функции $\varphi(x)$, что при любом данном x новый алгоритм никогда не оборвется, если значение $\varphi(x)$ не определено (как это сразу имело место для описанного выше алгоритма для $\mu y R(x, y)$). Для этого мы условимся, что если данный алгоритм обрывается, не приводя ни к какому числу в качестве значения $\varphi(x)$, то новый алгоритм потребует выполнения дополнительных шагов, которое будет продолжаться до бесконечности. В оставшейся части этой главы мы, рассматривая алгоритмы, часто будем молчаливо предполагать, что имеем дело с алгоритмами такого рода.

Предположим, что функция $\chi(x)$ определена на всем натуральном ряде, а функция $\psi(x)$ — на некотором его истинном подмножестве, содержащем все числа, являющиеся значениями $\chi(x)$, и что обе функции эффективно вычислимы. Тогда $\psi(\chi(x))$ определена всюду и эффективно вычислима. В качестве функции $\psi(x)$ можно взять $\mu y T_1(x, x, y)$. Таким образом, эффективно вычислимая функция, ограниченная истинным подмножеством натурального ряда, может быть полезна при построении другой эффективно вычислимой функции, определенной на всем натуральном ряде.

Для некоторых проблем из области оснований математики также требуется эффективная вычислимость функции, определение которой нужно иметь только на собственной части натурального ряда. Это встречается в теории конструктивных порядковых чисел. (Чёрч — Клини [1936], Клини [1938], Чёрч [1938]) и при изучении интуиционистской логики (см. § 82).

Эти соображения показывают, что желательно включить частично определенные функции в наше рассмотрение эффективной вычислимости. В соответствии с этим мы добавим к классу обще-рекурсивных функций некоторые не всюду определенные функции и функции этого расширенного класса будем называть „частично-рекурсивными функциями". Технические преимущества от такого расширения класса обще-рекурсивных функций, даже если наша цель состоит только в подтверждении тезиса Чёрча для случая всюду определенных функций (тезисы I и I*), полностью обнаружатся в §§ 65 и 66. В конце настоящего параграфа мы с помощью частично-рекурсивных функций сформулируем тезис Чёрча для случая частично определенных функций (тезисы I† и I*†).

Условимся называть функцию, определенную на любом (истинном или неистинном) подмножестве n-ок натуральных чисел и принимающую только натуральные значения, *частичной функцией*. Другими словами, частичная функция φ — это функция, которая для каждой n-ки натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$, взятых в качестве аргументов, принимает в качестве значений самое большее одно натуральное число $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Если для n-ки $x_1, \ldots, x_n$ частичная функция φ принимает в качестве значения некоторое натуральное число, мы будем говорить, что φ (или $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$) *определена*; если для n-ки $x_1, \ldots, x_n$ частичная функция φ не принимает в качестве значения никакого натурального числа, мы будем говорить, что φ (или $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$) *не определена* (в этом случае будем иногда говорить, что φ принимает значение «u»). *Область определения* частичной функции — это множество тех n-ок $x_1, \ldots, x_n$, для которых $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определена. Если она состоит из всех n-ок, мы имеем обычную (*всюду определенную*) арифметическую функцию; в противном случае — *не всюду определенную* функцию. Если она пуста, мы имеем *нигде не определенную* функцию.

Чтобы получить определение „частично-рекурсивной функции" (Клини [1938]), мы следующим образом приспособим эрбран-гёделевское определение „обще-рекурсивной функции" к частичным функциям.

В случае, если $\psi_1, \ldots, \psi_l$ — частичные функции (от $m_1, \ldots, m_l$ переменных соответственно), мы, как и следовало ожидать, под $\mathrm{E}^{\psi_1 \ldots \psi_l}_{g_1 \ldots g_l}$

(см. § 54) будем понимать теперь множество[1]) равенств $g_j(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{m_j}) = \boldsymbol{y}$, где $\psi_j(y_1, \ldots, y_{m_j}) = y$, для всех $j = 1, \ldots, l$ и при каждом j для тех наборов $y_1, \ldots, y_{m_j}$, для которых ψ_j определена. Затем для частичной функции φ в определении того, что „E *рекурсивно определяет* φ *относительно* (или *через*) $\psi_1, \ldots, \psi_l$", данном в § 54, надо (для четкости) заменить слова «тогда и только тогда, когда $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x$» на слова «тогда и только тогда, когда $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определена и $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x$». Можно применить и вторую форму приведенного там определения (со свойствами непротиворечивости и полноты), если понимать теперь E_f^{φ} для частичной функции φ в таком же смысле, как только что было объяснено для $E_{g_1 \ldots g_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l}$. Наконец, мы будем говорить (в соответствии с определением из § 55), что частичная функция φ *частично-рекурсивна относительно* $\psi_1, \ldots, \psi_l$, если имеется система E равенств, которая рекурсивно определяет φ через $\psi_1, \ldots, \psi_l$.

В случае схемы (или оператора) $\varphi = \mathsf{F}(\psi_1, \ldots, \psi_l)$, где $\psi_1, \ldots, \psi_l$ пробегают частичные функции (подчиненные некоторым сформулированным условиям), мы будем говорить, что схема F *частично-рекурсивна*, или что φ *частично-рекурсивна равномерно относительно* $\psi_1, \ldots, \psi_l$, если (для фиксированных $n, l, m_1, \ldots, m_l$) имеется такая система E, не зависящая от $\psi_1, \ldots, \psi_l$. Попрежнему слово «равномерно» мы будем опускать, только в отдельных случаях употребляя его для большей ясности.

Для случая, когда φ заранее не известна, мы теперь имеем (как в конце § 55): Система E равенств рекурсивно определяет частичную функцию от n переменных через частичные функции $\psi_1, \ldots, \psi_l$, если для каждой n-ки $x_1, \ldots, x_n$ натуральных чисел имеется самое большее одна цифра $\boldsymbol{x}$, такая, что $E_{g_1 \ldots g_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l}$, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ (где f, $g_1, \ldots, g_l$ — такие же, как прежде). При этом не требуется никакого свойства полноты. Функция, которую E рекурсивно определяет, — это такая функция φ, что $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определена для данной n-ки $x_1, \ldots, x_n$ тогда и только тогда, когда для этих $x_1, \ldots, x_n$ имеется некоторая цифра $\boldsymbol{x}$, — и в этом случае $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x$, где x — то число, для которого эта $\boldsymbol{x}$ является цифрой.

Обще-рекурсивные функции — это такие частично-рекурсивные функции, область определения которых состоит из всех n-ок $x_1, \ldots, x_n$ натуральных чисел.

Если $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ — обще-рекурсивный предикат, то частичная функция $\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$ (определенная тогда и только тогда, когда $(Ey) R(x_1, \ldots, x_n, y)$, и в этом случае принимающая в качестве значения наименьшее y, такое, что $R(x_1, \ldots, x_n, y)$) частично-рекурсивна. Мы уже показали это (не пользуясь только что введенной терминологией) в качестве утверждения (iv) в первой части доказательства теоремы IV § 57. (В этом случае $\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$ обще-рекурсивна в точности при условии, что имеет место (Ib) § 57.)

Пример 1 (окончание). Функция $\mu y T_1(x, x, y)$ частично-рекурсивна.

Для частичных функций $\chi_1, \ldots, \chi_m, \psi$ мы будем, если не оговорено противное, считать $\psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$ определенной тогда и только тогда, когда все $\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n)$ определены и образуют m-ку, для которой ψ определена. Мы будем называть это *слабым смыслом* выражения $\psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$. Такое же соглашение мы будем применять к определениям посредством

[1]) Ср. подстрочное примечание на стр. 237. — *Прим. ред.*

подстановки, не имеющим этой стандартной формы (ср. § 44). Этим соглашением устраняется двусмысленность, которая возникает, если ψ — функция-константа, или становится таковой относительно одной переменной при некоторой подстановке вместо других переменных. Например, должна ли функция $0\cdot\chi(x)$ принимать значение 0 или быть неопределенной, если x принимает значение, при котором $\chi(x)$ не определена? По нашему соглашению, функция $0\cdot\chi(x)$ в этом случае не определена.

Это же соглашение мы будем применять к *частичным предикатам*. Например, подставляя частичные функции $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ во всюду определенный предикат $y_1 = y_2$, мы получим частичный предикат $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \chi(x_1, \ldots, x_n)$. Этот предикат при данных $x_1, \ldots, x_n$ определен в том и только в том случае, когда определены обе функции ψ и χ, и в этом случае его значением является истинное предложение, если ψ и χ принимают одно и то же значение, и ложное предложение, если ψ и χ принимают различные значения.

Аналогично, подставляя частичные предикаты $Q(x_1, \ldots, x_n)$ и $R(x_1, \ldots, x_n)$ в функцию истинности $Y_1 \equiv Y_2$ („эквивалентность", § 45), мы получаем частичный преднкат $Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv R(x_1, \ldots, x_n)$, определенный тогда и только тогда, когда определены оба предложения $Q(x_1, \ldots, x_n)$ и $R(x_1, \ldots, x_n)$; в этом случае он утверждает эквивалентность этих двух предложений и является истинным или ложным, смотря по тому, эквивалентны они или нет.

Введем теперь запись «$\psi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \chi(x_1, \ldots, x_n)$» для обозначения того, что если при каких-либо $x_1, \ldots, x_n$ одна из частичных функций $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ определена, то и другая определена и их значения совпадают (а потому, если одна из $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ не определена, то и другая также). Различие в значении (i) «$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \chi(x_1, \ldots, x_n)$» и (ii) «$\psi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \chi(x_1, \ldots, x_n)$» появляется, если одна из частичных функций $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ не определена. Тогда частичный предикат (i) не определен, тогда как предикат (ii) ложен. или истинен в соответствии с тем, определена или не определена другая частичная функция. Мы будем различать $=$ и $\simeq$ как *слабое* и *полное равенство* соответственно. Употребление $\simeq$ является нсключением из принятого выше соглашения.

Аналогично «$Q(x_1, \ldots, x_n) \cong R(x_1, \ldots, x_n)$» будет обозначать при любых $x_1, \ldots, x_n$, что еслн один из частичных предикатов $Q(x_1, \ldots, x_n)$ и $R(x_1, \ldots, x_n)$ определен, то и другой определен и их значения являются эквивалентными предложениями (а потому, если один из них не определен, то и другой тоже). Мы будем различать $\equiv$ и $\cong$ как *слабую* и *полную эквивалентности*.

Итак, запись $(x_1) \ldots (x_n)[\psi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \chi(x_1, \ldots, x_n)]$ или запись $\psi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \chi(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ имеют интерпретацию всеобщности, выражает, что ψ и χ равны друг другу как функции, т. е. имеют одну и ту же область определения и на этой общей области определения их значения согласованы. Аналогично записи $(x_1) \ldots (x_n)[Q(x_1, \ldots, x_n) \cong R(x_1, \ldots, x_n)]$ или $Q(x_1, \ldots, x_n) \cong R(x_1, \ldots, x_n)$ при интерпретации всеобщности для $x_1, \ldots, x_n$ выражают, что Q и R равны друг другу как предикаты.

Мы будем говорить, что частичная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ является *представляющей функцией* частичного предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$, если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ принимает в качестве значений только 0 и 1 и

$$P(x_1, \ldots, x_n) \cong \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

или, другими словами, если значение $P(x_1, \ldots, x_n)$ есть $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$ или $\mathfrak{u}$, в соответствии с тем, является ли значением $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ 0, 1 или $\mathfrak{u}$.

Мы будем говорить, что частичная функция φ или частичный предикат P *частично-рекурсивны относительно* частичных предикатов и функций Ψ, если имеет место соответствующее утверждение, получающееся заменой содержащихся среди P, Ψ предикатов на их представляющие функции.

Роль обоих предикатов равенства $=$ и $\simeq$ будет различна. Слабое равенство $=$ будет служить операцией при построении частично-рекурсивных предикатов; мы вскоре увидим (теорема XVII, ##14, C†), что частичный предикат $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \chi(x_1, \ldots, x_n)$ частично-рекурсивен относительно ψ и χ. Полным равенством $\simeq$ мы будем пользоваться в наших теоретических рассуждениях о частично-рекурсивных функциях. Предикат $\psi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \simeq \chi(x_1, \ldots, x_n)$ может и не быть частично-рекурсивным, даже если ψ и χ частично-рекурсивны (см. пример 7 § 64).

Аналогичные замечания приложимы к обеим эквивалентностям $\equiv$ и $\cong$ (см. теорему XVII #D† и пример 8 § 64).

Будучи примитивно-рекурсивными, конкретные функции и предикаты из ##1—21 (§§ 44, 45) обще-рекурсивны (теорема II § 55) и, следовательно, частично-рекурсивны. Если переписать схемы (IV) и (V) (§ 43) с «$\simeq$» вместо «$=$» и пользоваться нашим соглашением, что выражения справа надо понимать в слабом смысле, то понятие „φ примитивно-рекурсивна относительно Ψ“ приобретает смысл и для случая, когда исходные функции и предикаты определены частично. Например, в примитивной рекурсии (Va), при данном y, значение $\varphi(y')$ определено тогда и только тогда, когда $\varphi(y)$ определено и $\chi(y, z)$ определено для $\varphi(y)$ в качестве значения z (отсюда по индукции: только тогда, когда все $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(y)$ определены). С помощью представляющих функций это понятие распространяется с функций на предикаты. Теперь оказываются применимыми прежние доказательства для ##A—G (§§ 44—47) при условии, что соответствующие функции и предикаты мы понимаем каждый раз в надлежащем слабом смысле; например, функция $\sum_{y<z} \psi(y)$ определена тогда и только тогда, когда определены все $\psi(0), \ldots, \psi(z-1)$, предикат $Q \vee R$ — тогда и только тогда, когда определены оба предиката Q и R, предикат $(Ey)_{y<z} R(y)$ — тогда и только тогда, когда определены все $R(0), \ldots, R(z-1)$, и т. д. В каждом случае соответствующий слабый смысл легко усматривается из доказательства. И, кроме того, при этих смыслах для (IV) и (V) проходит доказательство теоремы II (§§ 54, 55). Отсюда следует:

Теорема XVII. (a) *Любая функция φ, определимая через частичные функции Ψ последовательностью применений частично-рекурсивных схем, частично-рекурсивна относительно Ψ. Схемы* (I) — (V) *частично-рекурсивны.* (b) *Функции и предикаты из* ##1—21 *частично-рекурсивны; утверждения* ##A—G *сохраняют силу, если читать в них «частично-рекурсивно» вместо «примитивно-рекурсивно» и пользоваться слабыми смыслами получающихся функций и предикатов* (будем обозначать эти утверждения ##A†—G†).

Выше мы пользовались μ-оператором для образования частичной функции $\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$ из всюду определенного предиката $R(x_1, \ldots, x_n, y)$. Если теперь $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ — любой частичный предикат, мы условимся считать, что $\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$ определена тогда и только тогда, когда имеется такое число y, что $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ истинно и все предикаты $R(x_1, \ldots, x_n, 0), \ldots, R(x_1, \ldots, x_n, y-1)$ определены; в этом случае значением $\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$ является наименьшее такое y. Например, если $R(0) \cong R(1) \cong \mathfrak{f}$, $R(2) \cong \mathfrak{t}$, то $\mu y R(y) \simeq 2$, а если $R(0) \cong \mathfrak{f}$, $R(1) \cong \mathfrak{u}$, $R(2) \cong \mathfrak{t}$, то $\mu y R(y) \simeq \mathfrak{u}$.

Теперь мы можем рассматривать схему (VI) § 57 с заменой «$=\mu y$» на «$\simeq \mu y$» как схему для любой данной частичной функции $\chi(x_1, \ldots, x_n, y)$ или частичного предиката $R(x_1, \ldots, x_n, y)$. Пусть равенства E составлены так же, как при доказательстве теоремы III. Совершенно так же, как прежде ((iii) § 57), если $\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$ определена, то E^{χ}_{h}, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ для $x = \mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$ и ни для какой другой цифры $\boldsymbol{x}$. Обратно, если E^{χ}_{h}, $E \vdash f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}$ — цифра, то выполнены только что введенные условия определенности $\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$ (заметим, что в #B† $\prod_{s<y} \chi(x_1, \ldots, x_n, s)$ определена только в том случае, если определены все $\chi(x_1, \ldots, x_n, s)$ при $s = 0, 1, \ldots, y-1$). Итак:

Теорема XVIII (= теорема III†). *Схема* (VI) *частично-рекурсивна.* Отсюда, по теореме XVII, следует, что *каждая функция* φ, *определимая при помощи* (I) – (VI) *через частичные функции и предикаты* Ψ, *частично-рекурсивна относительно* Ψ.

Рассмотрим теперь, что произойдет с доказательством теоремы о нормальной форме (теорема IX § 58), если в качестве $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ взять частично-рекурсивную функцию. Пусть E рекурсивно определяет φ. Теперь соотношения (24) и (26) могут и не выполняться, но вместо этого, откидывая кванторы общности, мы получаем (из (26)) предложение $(Ey) S_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$ в качестве условия на $x_1, \ldots, x_n$ для того, чтобы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ была определена. Также (25), а следовательно, и (27) сохраняют силу после замены «$=$» на «$\simeq$». И (28) имеет место, только не при интерпретации всеобщности, а для каждой n-ки $x_1, \ldots, x_n$, для которой определена $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Но, согласно нашему пониманию μ-оператора в применении к всюду определенному предикату, $U(\mu y S_n(e, x_1, \ldots, x_n, y))$ определено в точности при $(Ey) S_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$. Следовательно, обе части (28) имеют одну и ту же область определения, так что (28) с заменой «$=$» на «$\simeq$» имеет место для любых $x_1, \ldots, x_n$. Приведенное выше (в теореме X) доказательство теоремы IX* проходит с теми же изменениями при условии, что исходные функции $\psi_1, \ldots, \psi_l$ всюду определены (иначе; например, $(Eu_1)_{u_1<y}[Nu((y)_{0,1,1}u_1) \,\&\, Nu((y)_{0,2}, \psi(u_1))]$ в 0Df 12*, а также $\tilde{\psi}(y)$ могут оказаться не определенными при таких значениях аргументов, при которых для доказательства они должны быть определены). Таким образом, справедлива

Теорема XIX. (a) (= теорема IX†). *Для любой данной частично-рекурсивной функции* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *можно найти такое число* e, *что*

(60) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq U(\mu y T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)),$$

(*так что* $(Ey) T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$ *является условием определенности функции* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$) *и*

(61a) $$(x_1) \ldots (x_n)(y)[T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow U(y) \simeq \varphi(x_1, \ldots, x_n)].$$

(b) (= теорема IX*†). *Справедливо аналогичное утверждение с заменой слов «частично-рекурсивная» и символа «T_n» на слова «частично-рекурсивная относительно Ψ» и на символ «T_n^{Ψ}» соответственно, где «Ψ» означает любой набор из l ($l \geqslant 0$) всюду определенных функций и предикатов от $m_1, \ldots, m_l$ переменных соответственно.*

Распространяя определения, данные в § 58, мы будем говорить, что всякое число e, для которого имеет место (60) (а следовательно, и (61a)), *рекурсивно определяет* φ или является *гёделевским номером* (*функции*) φ; аналогично для случая, когда функция φ частично-рекурсивна относительно всюду определенных функций Ψ. Эти понятия распространяются на предикат P с представляющей функцией φ, как прежде.

Согласно доказательству теоремы XIX, если E — система равенств, рекурсивно определяющая φ (или определяющая φ рекурсивно через всюду определенные Ψ с надлежащими данными функциональными буквами), а e — гёделевский номер E, то e рекурсивно определяет φ (определяет φ рекурсивно через Ψ).

Пример 2. Пусть f и g — гёделевские номера частично-рекурсивных функций ψ и χ соответственно. Тогда предикат $\psi(x) \simeq \chi(x)$ выражается посредством

$$(y)[\{T_1(f, x, y) \rightarrow (Ez)(T_1(g, x, z) \& U(y) = U(z))\} \& \\ \& \{T_1(g, x, y) \rightarrow (Ez)(T_1(f, x, z) \& U(y) = U(z))\}].$$

Следствие. *Каждая частично-рекурсивная функция* φ (*функция* φ, *частично-рекурсивная относительно всюду определенных функций и предикатов* Ψ) *определима* (*определима через* Ψ) *посредством схем* (I) — (VI).

Алгоритм, который формула (60) дает для вычисления частично-рекурсивной функции φ, не обрывается, если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ не определена.

Согласно теореме XIX, область определения частично-рекурсивной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид $\hat{x}(Ey)R(x_1, \ldots, x_n, y)$, где R — примитивно-рекурсивный предикат; другими словами, для $n = 1$ эта область определения (если она содержит хотя бы один элемент) рекурсивно-перечислима (теорема XIV § 60).

Пример 3. Поэтому, в силу (12) теоремы V § 57, никакая частичная функция с областью определения $\hat{x}(y)\overline{T}_1(x, x, y)$ не является частично-рекурсивной. Невозможно построить алгоритм, который приводил бы к некоторому натуральному числу в точности для тех x, для которых $(y)\overline{T}_1(x, x, y)$, и ни для каких других (в силу тезиса I† (a) ниже). В частности, функция φ, определенная следующим образом:

$$\varphi(x) \simeq \begin{cases} 0, & \text{если } (y)\overline{T}_1(x, x, y), \\ \text{u} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

не является частично-рекурсивной. Эта функция эффективно вычислима для x из ее области определения и потенциально рекурсивна.

Теперь мы формулируем тезис Чёрча для случая частичных функций, имея в виду примеры 1 и 3. Мы будем называть частичную функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *потенциально частично-рекурсивной*, если имеется частично-рекурсивная функция $\varphi'(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $\varphi'(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ на области определения φ. Мы формулируем этот тезис в виде двух частей, одна из которых соответствует случаю, когда мы требуем, чтобы процедура эффективного вычисления не приводила ни к какому числовому значению вне области определения рассматриваемой функции, а другая — случаю, когда мы просто не интересуемся тем, что происходит вне этой области определения.

Пример 4. Показать, что если $\varphi(x)$ потенциально частично-рекурсивна и ее область определения имеет вид $\hat{x}(Ey)R(x, y)$, где R — общерекурсивный предикат, то $\varphi(x)$ частично-рекурсивна.

Тезис I† (a). *Функция, которую вычисляет некоторый алгоритм (не определенная для каждой n-ки аргументов, для которой этот алгоритм не дает никакого числового значения), частично-рекурсивна.* (b) *Каждая частичная функция, являющаяся эффективно вычислимой (в том смысле, что имеется алгоритм, с помощью которого ее значение может быть вычислено для каждой n-ки из ее области определения) потенциально частично-рекурсивна.*

Можно также сформулировать этот тезис в применении к предикатам. Для l ($l > 0$) исходных функций и предикатов Ψ мы имеем соответствующий тезис I*†, включая случай равномерности.

Значительная часть нашего рассмотрения функций, частично-рекурсивных относительно l исходных функций и предикатов Ψ, будет (при $l > 0$) ограничена случаем, когда каждая функция и каждый предикат из Ψ определены всюду или же определены не всюду, но частично-рекурсивны или, наконец, частично-рекурсивны относительно всюду определенных функций. Подобного рода не всюду определенные функции введены в связи с потребностями теории алгоритмов (включая сведения проблем разрешимости), потому что может не существовать такого продолжения подобной функции до всюду определенной, что алгоритм существует и для этого продолжения. За пределами теории алгоритмов пока не видно оснований для того, чтобы воздерживаться от продолжения не всюду определенных функций (ср. пример 4 § 64).

Пример 5. Если $\phi(x)$ — частично-рекурсивная функция с областью определения $\hat{x}(Ey)\,R(x, y)$ (или $\hat{x}\,R(x)$), где R — всюду определенный предикат, то имеется всюду определенная функция $\phi^c(x)$, примитивно-рекурсивная относительно ϕ, R и такая, что ψ частично-рекурсивна относительно ψ^c. Действительно, пусть $C = \hat{x}(Ey)\,R(x, y)$; пусть, далее, θ рекурсивно перечисляет $\{0\} + C'$ (см. пример 6 § 60); пусть, наконец, $\psi^c(y) = 2^{\theta(y)} \cdot 3^{\eta(\theta(y))}$, где $\eta(0) = 0$, $\eta(x') \simeq \psi(x)$. Тогда $\psi(x) \simeq (\psi^c(\mu y[(\phi^c(y))_0 = x']))_1$.

Пример 6. $W_0(x, \mu y[\dot{W}_0(x, y) \vee W_1(x, y)])$ — частично-, но не потенциально-рекурсивный предикат (см. § 61).

§ 64. 3-ЗНАЧНАЯ ЛОГИКА

В этом параграфе мы будем рассматривать пропозициональные связки в новом смысле, при котором, например, $Q(x) \vee R(x)$ будет определено в некоторых случаях, когда $Q(x)$ или $R(x)$ не определено.

При описании смысла, который приобретают теперь эти связки, удобно будет пользоваться таблицами истинности с тремя «значениями истинности»: $\mathfrak{t}$ („истина"), $\mathfrak{f}$ („ложь") и $\mathfrak{u}$ („не определено").

Приведем некоторые замечания с целью обосновать с финитной точки зрения наше употребление таблиц истинности и объяснить, почему были выбраны именно те таблицы, которые будут приведены ниже.

У нас были интуиционистские основания пользоваться классической 2-значной логикой, когда мы употребляли пропозициональные связки по отношению к примитивно- и обще-рекурсивным предикатам, потому что для каждого обще-рекурсивного предиката имеется разрешающая процедура, т. е. закон исключенного третьего доказан интуиционистски в применении к обще-рекурсивным предикатам.

Если теперь $Q(x)$ — частично-рекурсивный предикат, то имеется разрешающая процедура для $Q(x)$ на его области определения, так что на этой области интуиционистски применим закон исключенного среднего или исключенного «третьего» (утверждающий, что для каждого x значение $Q(x)$ есть $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$). Но может не существовать алгоритм для решения, определено или нет $Q(x)$ при данном x (например, такого алгоритма не существует, если $Q(x)$ есть $\mu y T_1(x, x, y) = 0$). Поэтому только классически, но не интуиционистски можно утверждать закон исключенного четвертого (утверждающий, что для каждого x значение $Q(x)$ есть $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$ или $\mathfrak{u}$).

Таким образом, третье «значение истинности» $\mathfrak{u}$ в нашей теории выступает не наравне с двумя другими $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$. Рассматривая положение $\mathfrak{u}$ мы увидим, что следует ограничиться таблицами истинности специального вида.

Утверждая, например, что предикат $Q(x) \vee R(x)$ примитивно- или частично-рекурсивен (равномерно) относительно Q и R, мы утверждаем существование алгоритма для получения значения истинности для $Q(x) \vee R(x)$ из значений истинности для $Q(x)$ и $R(x)$. И в этом частном случае $\mathfrak{u}$ находится не в равном положении с $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$.

Предположим, что нам надо выбрать таблицу истинности для $Q \vee R$ так, чтобы $Q(x) \vee R(x)$ был частично-рекурсивен (равномерно) относительно Q и R. Будем рассуждать эвристически, отождествляя частичную рекурсивность с эффективной разрешимостью. Мы желаем иметь алгоритм, чтобы решать при данном x, принимает ли $Q(x) \vee R(x)$ значение $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$ (если этот предикат определен), исходя из информации, заключающейся в том, что $Q(x)$ есть $\mathfrak{t}$ или $Q(x)$ есть $\mathfrak{f}$ (если $Q(x)$ определен), и из аналогичной информации о $R(x)$. Информация, состоящая в том, что $Q(x)$ есть $\mathfrak{u}$, не может быть использована алгоритмом; $\mathfrak{u}$ означает только отсутствие информации, заключающейся в том, что $Q(x)$ есть $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$. Если в случае, когда $Q(x)$ есть $\mathfrak{u}$, алгоритм дает, например, $\mathfrak{t}$ в качестве значения для $Q(x) \vee R(x)$, то это обстоятельство (при данных x и $R(x)$) не связано с информацией о $Q(x)$ (потому что такой информации не имеется). В частности, если, не меняя значения $R(x)$, мы заменим значение $Q(x)$ на $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$, должен получиться тот же результат.

К тому же заключению мы придем, если потребуем только, чтобы предикат $Q(x) \vee R(x)$ был частично-рекурсивен, если Q и R частично-рекурсивны. Вообще говоря, алгоритм для нахождения значения $Q(x) \vee R(x)$ (не опирающийся ни на какие дополнительные сведения) может дать доступ к информации о $Q(x)$ и $R(x)$ только в результате использования содержащихся в нем алгоритмов для $Q(x)$ и $R(x)$. Решение, полученное по ходу алгоритма для $Q(x) \vee R(x)$ — например, состоящее в том, что значением является $\mathfrak{t}$ — должно основываться на информации о $Q(x)$ и о $R(x)$, полученной на некоторой конечной стадии алгоритмов для $Q(x)$ и $R(x)$. На каждой стадии алгоритма для $Q(x)$ или установлено, что $Q(x)$ есть $\mathfrak{t}$, или установлено, что $Q(x)$ есть $\mathfrak{f}$, или значение истинности для $Q(x)$ еще не получено. Если на самом деле $Q(x)$ есть $\mathfrak{u}$, то мы не можем узнать этого, следуя алгоритму. Если вообще это обстоятельство может быть обнаружено, то лишь другим путем, например при помощи какого-нибудь метатеоретического рассуждения о нашем алгоритме. Для некоторых Q мы, возможно, сумеем воспользоваться другим алгоритмом, который даст нам информацию и в том случае, если Q есть $\mathfrak{u}$, но, вообще говоря, этого сделать невозможно.

Итак, если $Q(x) \vee R(x)$ получает значение $\mathfrak{t}$ при условии, что $Q(x)$ есть $\mathfrak{u}$, то к этому результату мы (в общем случае) должны прийти, ничего не зная относительно $Q(x)$ и считаясь с возможностью того, что на некоторой стадии алгоритма для $Q(x)$, более поздней, чем та, на которой мы прекратили исследование, значением $Q(x)$ окажется $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$.

Доказательства в терминах теории частично-рекурсивных функций, которые подтверждают эти эвристические соображения (и распространяют их на операторы, отличные от пропозициональных связок), будут проведены в конце этого параграфа (теорема XXI и примеры 6 – 8).

Мы приходим к выводу, что для того, чтобы пропозициональные связки были частично-рекурсивными операторами (или хотя бы производили частично-рекурсивные предикаты, будучи применены к частично-рекурсивным предикатам), таблицы для них нужно выбрать *регулярными* в следующем смысле: данный столбец (строка) содержит t в строке (столбце) для u только при условии, что этот столбец (эта строка) состоит целиком из t; аналогично для f.

Когда мы обобщили $\#D$ с примитивной на частичную рекурсивность, пользуясь, по существу, прежними доказательствами ($\#D^\dagger$ из теоремы XVII § 63), мы применяли пропозициональные связки в *слабом смысле*, которые описываются 3-значными таблицами (*слабыми таблицами*), получающимися из классических 2-значных таблиц путем заполнения символами u строки и столбца, озаглавленных символом u. Эти таблицы регулярны (тривиальным образом).

Введем теперь *сильный смысл* пропозициональных связок, который описывается следующими *сильными таблицами*:

$\bar{Q}$

Q	
t	f
f	t
u	u

$Q \vee R$

$Q \backslash R$	t	f	u
t	t	t	t
f	t	f	u
u	t	u	u

$Q \& R$

$Q \backslash R$	t	f	u
t	t	f	u
f	f	f	f
u	u	f	u

$Q \to R$

$Q \backslash R$	t	f	u
t	t	f	u
f	t	t	t
u	t	u	u

$Q \equiv R$

$Q \backslash R$	t	f	u
t	t	f	u
f	f	t	u
u	u	u	u

Среди этих таблиц только таблицы для $\vee$, $\&$ и $\to$ отличаются от соответствующих слабых таблиц. Начиная отсюда, если не оговорено противное, $\bar{\ }$, $\vee$, $\&$, $\to$ и $\equiv$ в применении к частичным предикатам будут пониматься в этом сильном смысле.

Пример 1. Теперь (61a) можно переформулировать в виде

(61b) $$(x_1) \ldots (x_n)(y)\,[T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \to U(y) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)].$$

Предложения вида «если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определено, то ...», где заключение бессмысленно, если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ не определено, можно тогда рассматривать как применения сильной связки $\to$. (Такие предложения уже встречались в § 63).

Эти сильные таблицы однозначно определяются как самые сильные из возможных регулярных расширений классических 2-значных таблиц, т. е. они регулярны и имеют t или f в каждом месте, где какое-либо регулярное расширение 2-значных таблиц может содержать t или f (что именно: t или f, — это определено однозначно).

В качестве примеров нерегулярных таблиц мы приведем три следующие таблицы [1]). Рассматриваемая сильная 3-значная логика (Клини [1938]) не совпадает с первоначальной 3-значной логикой Лукасевича ([1920]; см. Льюис и Лангфорд [1932, стр. 213 и след.]), которая отличается от нее тем, что в соответствующих таблицах для $\to$ и $\equiv$ (эти связки мы

---

[1]) Другие примеры нерегулярных таблиц см. в работах Д. А. Бочвара [1938, 1943] Третьим «значением истинности» у Д. А. Бочвара служит не «неопределенность», а «бессмыслица».—*Прим. ред.*

обозначаем здесь посредством $\rightarrow_Ł$ и $\equiv_Ł$) стоит $\mathfrak{t}$ вместо $\mathfrak{u}$ на пересечении строки 3 и столбца 3.

$Q \rightarrow_Ł R$

R		$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$
Q	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$
	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{t}$

$Q \equiv_Ł R$

R		$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$
Q	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$
	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{u}$
	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{t}$

$Q \cong R$

R		$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{u}$
Q	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$

Из предварительных рассуждений мы заключаем также, что для определений частично-рекурсивных операций символы $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{u}$ должны допускать и другое толкование, помимо (i) „истинно“, „ложно“, „не определено“, а именно (ii) „истинно“, „ложно“, „неизвестно“ (или „значение несущественно“). При этом к категории „неизвестных“ мы относим все предложения, значений которых мы либо не знаем, либо не желаем в данный момент принимать во внимание, и тогда это не исключает двух других возможностей „истинно“ и „ложно“.

Пример 2. Пусть для данного x нам известно, что $Q(x)$ не определено, а $R(x)$ ложно. Тогда, употребляя $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{u}$ как „истинно“, „ложно“, „не определено“ (согласно (i)), мы можем заключить из значения, стоящего в пересечении строки 3 и столбца 2 таблицы для $\vee$, что $Q(x) \vee R(x)$ не определено.

Пример 3. Пусть для данного x мы знаем, что $Q(x)$ истинно. Тогда, употребляя $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{u}$ как „истинно“, „ложно“, „неизвестно“ согласно (ii), мы можем заключить из значения, стоящего в пересечении строки 1 и столбца 3, что $Q(x) \vee R(x)$ истинно. Чтобы прийти к этому заключению, исходя из толкования (i), нам пришлось бы воспользоваться классическим законом исключенного четвертого, а именно: $R(x)$ есть $\mathfrak{t}$, или $\mathfrak{f}$, или $\mathfrak{u}$; далее, в каждом из трех пересечений: строки 1 и столбца 1, строки 1 и столбца 2, строки 1 и столбца 3, встречается $\mathfrak{t}$.

С этой точки зрения толкование $Q \vee R$ может быть разъяснено следующими словами: $Q \vee R$ истинно, если Q истинно (и здесь ничего не надо говорить об R) или если R истинно (и здесь ничего не надо говорить о Q), ложно, если Q и R оба ложны; определено только в этих случаях (а потому не определено в остальных).

Сильная 3-значная логика может применяться к всюду определенным предикатам $Q(x)$ и $R(x)$, из которых с помощью $\overline{}$, $\vee$, &, $\rightarrow$, $\equiv$ в их обычных 2-значных толкованиях следующим образом образуются сложные предикаты. (iii) Предположим, что имеются фиксированные алгоритмы, которые позволяют распознавать истинность или ложность $Q(x)$ и $R(x)$, каждый на подмножестве натурального ряда (как это получается, например, после классического доопределения любых двух частично-рекурсивных предикатов). Пусть $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{u}$ означают „алгоритмически (т. е. только с помощью такой информации о $Q(x)$ и $R(x)$, которую можно получить посредством этих алгоритмов) установима истинность“, „алгоритмически установима ложность“, „ни истинность ни ложность не установимы алгоритмически“. (iv) Будем исходить из фиксированного состояния знаний о $Q(x)$ и $R(x)$ (которое получится, например, если проследить за алгоритмами для каждого из этих предикатов до некоторой данной стадии). Пусть $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{u}$ означают: „известна истинность“, „известна ложность“, „неизвестно, истинно или ложно“.

Имеют место следующие три классические эквивалентности:

(62) $Q \& R \cong \overline{\overline{Q} \vee \overline{R}}$, (63) $Q \to R \cong \overline{Q} \vee R$,

(64) $$Q \equiv R \cong (Q \to R) \& (R \to Q).$$

В этом читатель может убедиться, составляя таблицы для правых частей и сравнивая их с данными таблицами для левых. Но, например, $Q \& (R \vee \overline{R}) \cong Q$ (ср. *52 § 27) не имеет места (если Q есть t, а R есть u, то левая часть есть u, а правая t).

Чтобы получить доказательства для (62) – (64) с помощью 3-значных таблиц, достаточно показать, что если один из членов определен, то определен и другой и имеет то же значение (как утверждает $\cong$), при этом используется закон исключенного третьего в областях определения. Этот закон имеет место, если Q и R частично-рекурсивны, а в общем случае эти эквивалентности интуиционистски зависят от него как от гипотезы. Аналогичные замечания применимы к (65).

Ограниченным кванторам сильный смысл приписывается следующим образом. Для каждого $z > 0$, по определению, $(Ey)_{y<z} R(y) \cong R(0) \vee \ldots \vee R(z-1)$ и $(Ey)_{y<0} R(y) \cong \mathfrak{f}$. В словесной формулировке, $(Ey)_{y<z} R(y)$ истинно, если для некоторого $y < z$ истинно $R(y)$; ложно, если для всех $y < z$ ложно $R(y)$; определено только в этих случаях.

Аналогично для каждого $z > 0$, по определению, $(y)_{y<z} R(y) \cong R(0) \& \ldots \& R(z-1)$ и $(y)_{y<0} R(y) \cong \mathfrak{t}$.

Отсюда имеем

(65) $$(y)_{y<z} R(y) \cong \overline{(Ey)_{y<z} \overline{R}(y)}.$$

Аналогично мы придаем сильный смысл неограниченным кванторам, для чего $(Ey) R(y)$ понимаем как сильную дизъюнкцию из $R(y)$ для $y = 0, 1, 2, \ldots$, а $(y) R(y)$ как сильную конъюнкцию.

Словами: $(Ey) R(y)$ истинно, если $R(y)$ истинно для некоторого натурального числа y; ложно, если $R(y)$ ложно для каждого y; определено только в этих случаях. (Отсюда $(y) R(y) \cong \overline{(Ey) \overline{R(y)}}$.) В отличие от ограниченных кванторов (теорема XX (b)) неограниченные кванторы, конечно, не являются частично-рекурсивными операциями (теорема V § 57).

Пример 4. Рассмотрим класс предикатов, выразимых в виде $(Ey)R(x, y)$ с частично-рекурсивным R. Определения всех не всюду определенных предикатов этого класса могут быть дополнены без выхода за пределы этого класса (и даже так, что получится примитивно-рекурсивный R). Действительно, если r — гёделевский номер предиката $R(x, y)$, то предикат $(Ey)[T_2(r, x, (y)_0, (y)_1) \& U((y)_1) = 0]$ всюду определен и совпадает с предикатом $(Ey)R(x, y)$ на области определения последнего. Аналогично для формы $(y)R(x, y)$. (См. Клини [1943, стр. 57, теорема VI].)

Теорема XX. (a) *Предикат* $\overline{Q}(x_1, \ldots, x_n)$, (*понимаемый в сильном смысле*) *частично-рекурсивен относительно предиката* Q. *Предикаты*

$$Q(x_1, \ldots, x_n) \vee R(x_1, \ldots, x_n),\ Q(x_1, \ldots, x_n) \& R(x_1, \ldots, x_n),$$
$$Q(x_1, \ldots, x_n) \to R(x_1, \ldots, x_n) \text{ и } Q(x_1, \ldots, x_n) \equiv R(x_1, \ldots, x_n)$$

(*понимаемые в сильном смысле*) *частично-рекурсивны относительно предикатов* Q *и* R.

(b) *Предикаты* $(Ey)_{y<z}R(x_1, \ldots, x_n, y)$ *и* $(y)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ (*понимаемые в сильном смысле*) *частично-рекурсивны относительно предиката* R.

(c) (Сильное) определение разбором случаев. *Функция*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если} \quad Q_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots & \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n), & \text{если} \quad Q_m(x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

где $Q_1, \ldots, Q_m$ *исключают друг друга (при интерпретации, согласно которой должно быть* $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, *если* $Q_i(x_1, \ldots, x_n)$ *истинно, независимо от поведения* $\varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $Q_j(x_1, \ldots, x_n)$ *для всех* $j \neq i$), *частично-рекурсивна относительно* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, Q_1, \ldots, Q_m$.

Доказательства. (a) Рассматривая, например, $Q \vee R$, обозначим через $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ представляющие функции предикатов $Q(x_1, \ldots, x_n)$, $R(x_1, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, \ldots, x_n) \vee R(x_1, \ldots, x_n)$ соответственно. Рассмотрим равенства

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \sigma(0) = 0 \qquad \tau(1, 1) = 1, \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sigma(\psi(x_1, \ldots, x_n)), \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sigma(\chi(x_1, \ldots, x_n)), \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \tau(\psi(x_1, \ldots, x_n), \chi(x_1, \ldots, x_n)), \end{cases}$$

где σ и τ — частично определенные вспомогательные функции. Переводя эти уравнения (A) в формальный символизм рекурсивных функций (§ 54), мы получим систему E, рекурсивно определяющую φ через ψ, χ. Использованный метод приложим к любой регулярной таблице. (При рассмотрении остальных связок можно поступить иначе, замечая, что $\overline{Q}$ уже рассмотрено в случае D† теоремы XVII, так как сильная таблица для $\overline{Q}$ совпадает со слабой, и применяя (62) — (64).)

(b) В силу (65), достаточно рассмотреть $(Ey)_{y<z}$. Пусть $\chi(x_1, \ldots, x_n, y)$ и $\varphi(x_1, \ldots, x_n, z)$ — представляющие функции предикатов $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ и $(Ey)_{y<z} R(x_1, \ldots, x_n, y)$ соответственно. Тогда равенства

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \sigma(0) = 0, \qquad \tau(1) = 1, \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n, z') = \sigma\ (\chi(x_1, \ldots, x_n, z \dot{-} y)), \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n, z) = \tau(\prod_{y<z} \chi(x_1, \ldots, x_n, y)). \end{cases}$$

дают (с помощью #6, B†) рекурсивное определение φ через χ, которое может быть переведено в некоторую систему E.

(c) Первый метод. Доказательство проводится так же, как в (a); например, для $m = 2$ и $n = 1$,

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \sigma_1(0, x) = \varphi_1(x), & \sigma_2(0, x) = \varphi_2(x), \\ \varphi(x) = \sigma_1(\psi_1(x), x), & \varphi(x) = \sigma_2(\psi_2(x), x). \end{cases}$$

Второй метод.

$$\varphi \simeq \mu y[(Q_1 \& y = \varphi_1) \vee \ldots \vee (Q_m \& y = \varphi_m)].$$

Замечание 1. Для согласованности с нашим употреблением в (VI′) § 57 и в начале § 54, где мы сначала, т. е. до перевода, пользовались знаком

«$=$» квази-формально[1]), мы пишем здесь (A) — (C) со знаком «$=$». Но если (VI′) и (A) — (C) рассматривать содержательно, т. е. как законы, которым должны подчиняться встречающиеся в них частичные функции, то надо в них писать знак «$\simeq$».

Пример 5. Если функция $\varphi(x)$ частично-рекурсивна, а предикат „$\varphi(x)$ определена" обще-рекурсивен, то $\varphi(x)$ потенциально рекурсивна. Действительно, можно положить

$$\varphi'(x) \simeq \mu y\,[y = \varphi(x) \vee (\overline{\varphi(x) \text{ определена}} \,\&\, y = 0)].$$

Пусть Ψ—дополнительный набор частичных функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$. Под *расширением* Ψ' набора Ψ мы будем понимать всякий упорядоченный набор $\psi'_1, \ldots, \psi'_l$ частичных функций, которые служат продолжениями функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$ соответственно, т. е. таковы, что для $i = 1, \ldots, l$ справедливы равенства $\psi'_i(y_1, \ldots, y_{m_i}) = \psi_i(y_1, \ldots, y_{m_i})$ на области определения ψ_i. Аналогичное определение дается в случае, если среди Ψ содержатся предикаты.

Читатель, желающий скорее приступить к основным результатам этой главы (§ 66), может опустить часть (b) следующей теоремы.

Теорема XXI. (a) *Если $\varphi \simeq \mathrm{F}(\Psi)$ или $\varphi(x) \simeq \mathrm{F}(\Psi; x)$ — частично-рекурсивный оператор и $\mathrm{F}(\Psi_1; x_1) \simeq k$, где Ψ_1 — конкретные функции, а x_1, k — конкретные натуральные числа, то для каждого расширения Ψ'_1 набора Ψ_1*

$$\mathrm{F}(\Psi'_1;\ x_1) \simeq k.$$

(b) *Пусть функция φ определена через функцию ψ посредством операции вида $\varphi(x) \simeq \mathrm{F}(\psi(x))$, где $\mathrm{F}(\alpha)$ — функция, определенная на $\{\mathfrak{u}, 0, 1, 2, \ldots\}$ со значениями в $\{\mathfrak{u}, 0, 1, 2, \ldots\}$. Если $\mathrm{F}(\mathfrak{u}) \simeq k$, где k — натуральное число, но для некоторого натурального числа m не имеет места $\mathrm{F}(m) \simeq k$, то имеется частично-рекурсивная функция ψ (принимающая только m в качестве значений), для которой получающаяся функция φ не является частично-рекурсивной.*

Можно читать «$x_1, \ldots, x_n$», «$x_{11}, \ldots, x_{1n}$» вместо «x», «x_1» соответственно (где $n \geqslant 0$ для (a) и $n \geqslant 1$ для (b)); теорема верна и для предикатов, если в качестве определенных значений вместо $0, 1, 2, \ldots$ взять $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$.

Доказательства. (a) По условию, имеется система E равенств с данными функциональными буквами G и главной функциональной буквой f, такая, что для любого натурального числа x и частичных функций Ψ справедливо утверждение E^{Ψ}_{G}, $E \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{y}$ — цифра, тогда и только тогда, когда $\mathrm{F}(\Psi; x) = y$. Но $\mathrm{F}(\Psi_1; x_1) = k$, где k — натуральное число; следовательно, $E^{\Psi_1}_{G}$, $E \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{k}$. Если теперь Ψ'_1 — любое расширение Ψ_1, то $E^{\Psi_1}_{G} \subseteq E^{\Psi'_1}_{G}$; поэтому также $E^{\Psi'_1}_{G}$, $E \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{k}$; следовательно, $\mathrm{F}(\Psi'_1; x_1) = k$. (Если оператор $\mathrm{F}(\Psi)$ определен только при некотором ограничении на область изменения Ψ, то теорема применима только к расширениям Ψ'_1, удовлетворяющим этому ограничению.)

(b) Пусть $\psi(x) \simeq m + 0 \cdot \mu y\, T_1(x, x, y)$ и $\rho(x) \simeq \mu y\,[\varphi(x) = k \,\&\, y = 0]$.

Функция $\psi(x)$ частично-рекурсивна по теореме XVIII, а $\rho(x)$ частично-рекурсивна, если такова $\varphi(x)$. Мы покажем теперь, что $\rho(x)$ не частично-рекурсивна. Если $\overline{(Ey)}\, T_1(x, x, y)$, то $\mu y\, T_1(x, x, y)$ не определено, следовательно

[1]) Т. е. содержательно, но параллельно формальным правилам. — *Прим. перев.*

$\phi(x)$ не определено, а значит, по условию, $\varphi(x)=k$, следовательно, $\rho(x)$ определено. Итак, $(\overline{Ey})T_1(x,x,y) \rightarrow \{\rho(x)$ определено$\}$. Аналогично $(Ey)T_1(x, x, y) \rightarrow \{\rho(x)$ не определено$\}$; или, по контрапозиции (см. *13 § 26), $\{\rho(x)$ определено$\} \rightarrow (\overline{Ey})T_1(x, x, y)$. Итак, $\{\rho(x)$ определено$\} \equiv (\overline{Ey})T_1(x,x,y) \equiv (y)\overline{T}_1(x, x, y)$. Следовательно, в силу примера 3 § 63, $\rho(x)$ не частично-рекурсивна.

В примерах 6—8 мы рассматриваем части (a) и (b) раздельно, чтобы проиллюстрировать обе части теоремы, хотя заключение части (b) влечет заключение части (a).

Пример 6. Можно ли усилить теорему XVIII, считая, что $\mu y R(x, y)$ есть наименьшее y, такое, что $R(x, y)$ истинно, независимо от того, определены ли все $R(x, 0), \ldots, R(x, y-1)$ (будем тогда писать $\mu' y R(x, y)$)? (a) Нет, потому что, если $R(x, 1)$ есть $\mathfrak{t}$, то $\mu' y R(x, y)$ меняется с 1 на 0, если $R(x, 0)$ меняется с $\mathfrak{u}$ на $\mathfrak{t}$. Проведем рассуждение подробней. Пусть $\chi(x, y)$ — представляющая функция предиката $R(x, y)$ и пусть $\varphi(x) \simeq \mu' y R(x, y) \simeq \mathrm{F}(\chi; x)$. Пусть в качестве χ, x выбраны такие χ_1, x_1, что $\chi_1(x_1, 0) \simeq \mathfrak{u}$, $\chi_1(x_1, 1) \simeq 0$. Тогда $\mathrm{F}(\chi_1; x_1) \simeq 1$. Теперь, в силу части (a) доказанной теоремы, если φ частично-рекурсивна относительно χ[1]), то $\mathrm{F}(\chi_1'; x_1) \simeq 1$ для каждого расширения χ_1' функции χ_1. Но $\mathrm{F}(\chi_1'; x_1) \simeq 0$ для всякого такого расширения χ_1', что $\chi_1'(x_1, 0) \simeq 0$. Следовательно, φ не частично-рекурсивна относительно χ. (b) Можно даже указать конкретный частично-рекурсивный предикат R, для которого $\mu' y R(x, y)$ не частично-рекурсивна. Чтобы убедиться в этом, возьмем $R(x, y)$ вида $y=\phi(x) \vee y=1$. Тогда $\mu' y R(x, y)$ меняется с 1 на 0, если $\phi(x)$ меняется с $\mathfrak{u}$ на 0. Проведем рассуждение подробней: Пусть $\varphi(x) \simeq \simeq \mu' y R(x, y) \simeq \mathrm{F}(\phi(x))$. Тогда $\mathrm{F}(\mathfrak{u}) \simeq 1$, но $\mathrm{F}(0) \simeq 0$. Поэтому, в силу части (b) доказанной теоремы, можно найти такую частично-рекурсивную функцию ϕ, что φ не будет частично-рекурсивной.

Пример 7. Если $\chi(x) \simeq 0$, то $\phi(x) \simeq \chi(x)$ меняется с $\mathfrak{f}$ на $\mathfrak{t}$, если $\phi(x)$ меняется с $\mathfrak{u}$ на 0. Следовательно, (a) предикат $\phi(x) \simeq \chi(x)$ не является частично-рекурсивным относительно ϕ, χ. Кроме того, (b) для некоторых частично-рекурсивных ϕ и χ предикат $\phi(x) \simeq \chi(x)$ не частично-рекурсивен. (Сначала надо взять в качестве χ функцию C_0^1 из § 44, а затем выбрать ϕ для этого χ согласно части (b) доказанной теоремы.)

Пример 8. Таблица для $Q \cong R$ нерегулярна; например, если $R \cong \mathfrak{t}$, то $Q \cong R$ меняется с $\mathfrak{f}$ на $\mathfrak{t}$, когда Q меняется с $\mathfrak{u}$ на $\mathfrak{t}$. Следовательно, (a) предикат $Q(x) \cong R(x)$ не частично-рекурсивен относительно Q и R, и (b) для некоторых частично-рекурсивных Q и R предикат $Q(x) \cong R(x)$ не частично-рекурсивен. Аналогично можно поступить с любой нерегулярной таблицей.

§ 65. ГЁДЕЛЕВСКИЕ НОМЕРА

Функцию $U(\mu y T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y))$ мы будем теперь записывать сокращенно в виде «$\Phi_n(z, x_1, \ldots, x_n)$» или даже в виде «$\{z\}(x_1, \ldots, x_n)$» или «$z(x_1, \ldots x_n)$». В силу теоремы XVIII, Φ_n является частично-рекурсивной функцией от $n+1$ переменных (и, следовательно, для каждого фиксированного z $\Phi_n(z, x_1, \ldots, x_n)$ является частично-рекурсивной функцией от n переменных $x_1, \ldots, x_n$). Согласно теореме XIX (60), любая частично-рекурсивная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных может быть получена

[1]) Точнее, если оператор F частично-рекурсивен.—*Прим. ред.*

из Φ_n следующим образом:

(66) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \Phi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq e(x_1, \ldots, x_n),$$

где e—любой гёделевский номер функции φ. Аналогично для всюду определенных функций Ψ мы будем записывать $U(\mu y\, T_n^{\Psi}(z, x_1, \ldots, x_n, y))$ в виде «$\Phi_n^{\Psi}(z, x_1, \ldots, x_n)$», «$\{z\}^{\Psi}(x_1, \ldots, x_n)$» или «$z^{\Psi}(x_1, \ldots, x_n)$»; и для этого случая справедливы соответствующие замечания. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема XXII (= теоремам XVIII + XIX). *Функция $\Phi_n(z, x_1, \ldots, x_n)$ частично-рекурсивна и $\Phi_n(z, x_1, \ldots, x_n)$ при $z = 0, 1, 2, \ldots$ дает пересчет (с повторениями) всех частично-рекурсивных функций от n переменных. Аналогично, для всюду определенных функций Ψ функция Φ_n^{Ψ} частично-рекурсивна относительно Ψ и дает пересчет (с повторениями) всех функций от n переменных, частично-рекурсивных относительно Ψ.* (Теорема о нумерации для частично-рекурсивных функций.)

Эта теорема возможна только благодаря тому, что частично-рекурсивная функция может быть неопределенной для некоторых систем значений аргументов.

Применим обычный канторовский диагональный метод ко всюду определенным функциям. Пусть C — какой-либо класс таких функций, не обязательно от одного и того же числа аргументов, и пусть $\Phi(z, x_1, \ldots, x_n)$ пересчитывает (с повторениями) все функции от n переменных, входящие в C (для некоторого фиксированного $n \geqslant 1$). Тогда $\Phi(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) + 1$ не может принадлежать C, так как в противном случае было бы

$$\Phi(q, q, x_2, \ldots, x_n) + 1 = \Phi(q, q, x_2, \ldots, x_n)$$

для некоторого числа q, что невозможно. Если C замкнут относительно операции перехода от функции $\varphi(z, x_1, \ldots, x_n)$ к $\varphi(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) + 1$, то $\Phi(z, x_1, \ldots, x_n)$ не может принадлежать C. В частности, это показывает, что не существует аналогичной теоремы пересчета для обще-рекурсивных функций.

Но для частично-рекурсивных функций мы получили бы вместо этого

$$\Phi(q, q, x_2, \ldots, x_n) + 1 \simeq \Phi(q, q, x_2, \ldots, x_n),$$

что не является невозможным и означает просто, что $\Phi(q, q, x_2, \ldots, x_n)$ должно быть не определено. В частности, мы таким образом доказали, что частично-рекурсивная функция $\Phi_n(z, x_1, \ldots, x_n)$ не определена, когда $z = x_1 = q$, где q — любой гёделевский номер функции $\Phi_n(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) + 1$.

При попытке утверждать одновременно, что $\Phi(z, x_1, \ldots, x_n)$ входит в класс C и всюду определена, возникает парадокс Ришара (§ 11). (В § 11 мы имели $n = 1$.)

Диагональный процесс, примененный к частичным функциям, будет использован далее при установлении теоремы XXVII § 66.

Пример 1. Пусть $\eta(z_1, \ldots, z_r)$ — данная частично-рекурсивная функция. Для любых $z_1, \ldots, z_r$ пусть $\varphi_{z_1, \ldots, z_r}(x_1, \ldots, x_n)$ будет частично-рекурсивной функцией, которая определена для n-ки $x_1, \ldots, x_n$ только в том случае, если $\eta(z_1, \ldots, z_r)$ определена, и для которой в этом случае $\eta(z_1, \ldots, z_r)$ служит гёделевским номером. Тогда $\varphi_{z_1, \ldots, z_r}(x_1, \ldots, x_n)$, рассматриваемая как функция $\varphi(z_1, \ldots, z_r, x_1, \ldots, x_n)$ от всех $r+n$ переменных, частично-рекурсивна. Действительно,

(67) $$\varphi(z_1, \ldots, z_r, x_1, \ldots, x_n) \simeq \Phi_n(\eta(z_1, \ldots, z_r), x_1, \ldots x_n).$$

(Это служит примером «случая первого рода» для (A3) § 62.)

Теорема XXIII. *Для любых неотрицательных m, n имеется такая примитивно-рекурсивная (определенная ниже) функция $S_n^m(z, y_1, \ldots, y_m)$, что если число e рекурсивно определяет $\varphi(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$ как функцию от $m+n$ переменных $y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n$, то для любой фиксированной m-ки $y_1, \ldots, y_m$ натуральных чисел число $S_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)$ рекурсивно определяет $\varphi(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$ как функцию от остальных n переменных $x_1, \ldots, x_n$. В терминах λ-обозначений (§ 10): Если e рекурсивно определяет $\lambda y_1 \ldots y_m x_1 \ldots x_n \varphi(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$, то $S_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)$ рекурсивно определяет $\lambda x_1 \ldots x_n \varphi(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$.*

Справедливо аналогичное утверждение с заменой слов «примитивно-рекурсивная функция $S_n^m(z, y_1, \ldots, y_m)$» и «рекурсивно определяет» на слова «примитивно-рекурсивная функция $S_n^{m, m_1, \ldots, m_l}(z, y_1, \ldots, y_m)$» и «рекурсивно определяет через Ψ» соответственно, где Ψ — набор l всюду определенных функций и предикатов от $m_1, \ldots, m_l$ переменных соответственно.

Доказательство (для $l=0$). Положим $S_n^0(z)=z$. Для $m>0$ выберем числа $y_1, \ldots, y_m$. Фиксируя их, будем писать «$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$» вместо $\varphi(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$. Тогда

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \Phi_{m+n}(e, y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n). \tag{68}$$

Пусть D — система равенств, рекурсивно определяющая Φ_{m+n} с главной функциональной буквой g, не содержащая f. Пусть C состоит из равенств D, за которыми следует равенство

$$f(a_1, \ldots, a_n) = g(\mathbf{e}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m, a_1, \ldots, a_n),$$

получаемое переводом соотношения (68). Эта система C рекурсивно определяет $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть числа $d, f, g, a_1, \ldots, a_n$ суть гёделевские номера D, $f, g, a_1, \ldots, a_n$ соответственно. Положим

$$S_n^m(z, y_1, \ldots, y_m) =$$
$$= d * [2 \exp 2^{15} 3^{2^f \cdot p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_*^{a_n}} \cdot 5^{2^g \cdot 3^{Nu(z)} \cdot p_2^{Nu(y_1)} \cdot \ldots \cdot p_{m+1}^{Nu(y_m)} \cdot p_{m+2}^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_{m+n+1}^{a_n}}]$$

(см. § 56, #21 § 45, пример 2 § 52). Тогда $S_n^m(z, y_1, \ldots, y_m)$ как функция от $z, y_1, \ldots, y_m$ примитивно-рекурсивна; далее, при фиксированных $y_1, \ldots, y_m$ число $S_n^m(e, y_1, \ldots, y_m)$ является гёделевским номером C и, следовательно, рекурсивно определяет $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 1 (окончание). Отправляясь от частично-рекурсивной функции η (как выше), мы получили бы не более широкий класс функций $\varphi(z_1, \ldots, z_r, x_1, \ldots, x_n)$, чем тот, который получаем, отправляясь от примитивно-рекурсивной η. Действительно, пусть e — гёделевский номер функции $\varphi(z_1, \ldots, z_r, x, \ldots, x_n)$ из соотношения (67). Тогда $S_n^r(e, z_1, \ldots, z_r)$ — гёделевский номер $\varphi_{z_1, \ldots, z_r}(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. $S_n^r(e, z_1, \ldots, z_r)$ служит примитивно-рекурсивной функцией «$\eta(z_1, \ldots, z_r)$» для той же самой функции $\varphi_{z_1, \ldots, z_r}(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 2. Пусть $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ — произвольный обще-рекурсивный предикат ($n \geqslant 1$), а e — гёделевский номер частично-рекурсивной функции $\lambda x_1 z x_2 \ldots x_n \mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$. Тогда для любого фиксированного x_1 число $S_n^1(e, x_1)$ служит гёделевским номером функции $\lambda z x_2 \ldots x_n \mu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$. Эта функция тогда и только тогда определена для данной n-ки $z, x_2, \ldots, x_n$, когда $(Ey) R(x_1, \ldots, x_n, y)$. Отсюда, по теореме XIX,

$$(Ey) R(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv (Ey) T_n(S_n^1(e, x_1), z, x_2, \ldots, x_n, y). \tag{69}$$

Подставляя $S^1_n(e, x_1)$ вместо z, получаем

(70) $(Ey) R(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv (Ey) T_n(S^1_n(e, x_1), S^1_n(e, x_1), x_2, \ldots, x_n, y)$.

Если положить $n=1$ и писать «a» вместо «x_1» и «x» вместо «y», то это показывает, что предикат $(Ex) R(a, x)$ примитивно-рекурсивен относительно $(Ex) T_1(a, a, x)$. Таким образом, проблема разрешимости для $(Ex) T_1(a, a, x)$ имеет наивысшую степень неразрешимости среди проблем разрешимости для предикатов формы $(Ex) R(a, x)$ с обще-рекурсивным R (см. конец § 61). Далее, по определению S^1_1 имеем: $a_1 \neq a_2 \rightarrow S^1_1(e, a_1) \neq S^1_1(e, a_2)$. Таким образом, существует обще-рекурсивная функция $\psi(a)$, такая, что

$$\{a_1 \neq a_2 \rightarrow \psi(a_1) \neq \psi(a_2)\} \& \{(Ex) R(a, x) \equiv (Ex) T_1(\psi(a), \psi(a), x)\}.$$

По терминологии Поста [1944], проблема разрешимости для множества $\hat{a}(Ex) R(a, x)$ *взаимно однозначно сводима* к проблеме разрешимости для $\hat{a}(Ex) T_1(a, a, x)$. То, что такая сводимость имеет место для каждого $\hat{a}(Ex) R(a, x)$ с обще-рекурсивным R, есть некоторое свойство рассматриваемого множества $\hat{a}(Ex) T_1(a, a, x)$. Пост показал, что этим свойством обладает и другое рекурсивно-перечислимое множество «K», названное им «полным множеством» ([1944, стр. 295 и теорема на стр. 297]). Аналогичные результаты можно получить для предикатных форм с бо́льшим числом кванторов и для $l > 0$. Например, из (70) при $n=3$ $(l=0)$ заключаем, что

$$(Ex)(y)(Ez) R(a, x, y, z) \equiv (Ex)(y)(Ez) T_3(S^1_3(e, a), S^1_3(e, a), x, y, z)$$

(ср. *71, *72 § 33). Итак, $(Ex)(y)(Ez) T_3(a, a, x, y, z)$ имеет проблему разрешимости наивысшей степени неразрешимости среди проблем разрешимости для предикатов формы $(Ex)(y)(Ez) R(a, x, y, z)$ с рекурсивным R, и к его проблеме разрешимости взаимно однозначно сводима проблема разрешимости для любого предиката, имеющего эту форму.

Пример 3. Опуская z в примере 2, мы получаем, что проблема разрешимости для $\hat{a}(Ex) R(a, x)$ взаимно однозначно сводима к проблеме разрешимости для $\hat{a}(Ex) T_0(a, x)$ (а потому, в силу примера 2, предикаты $(Ex) T_1(a, a, x)$ и $(Ex) T_0(a, x)$ имеют проблемы разрешимости одной и той же степени неразрешимости); аналогично для большего числа кванторов, например

$$(Ex)(y)(Ez) R(a, x, y, z) \equiv (Ex)(y)(Ez) T_2(S^1_3(e, a), x, y, z),$$

где e — гёделевский номер $\mu z R(a, x, y, z)$.

Бо́льшую часть § 66 можно понять без оставшейся части настоящего параграфа.

Λ-обозначения (будут использованы в § 82). Если функция

$$\lambda y_1 \ldots y_m x_1 \ldots x_n \; \varphi(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$$

частично-рекурсивна и e — ее гёделевский номер, мы будем употреблять обозначение

$$«\Lambda_{(e)} x_1 \ldots x_n \; \varphi(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)»$$

в качестве сокращения для $S^m_n(e, y_1, \ldots, y_m)$. Обычно мы будем опускать индекс «$_{(e)}$». Таким образом (при $m=0$), «$\Lambda x_1 \ldots x_n \; \varphi(x_1, \ldots, x_n)$» обозначает некоторый гёделевский номер функции $\lambda x_1 \ldots x_n \; \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, а «$\Lambda x_1 \ldots x_n \; \varphi(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$» (при $m > 0$) обозначает некоторую примитивно-рекурсивную функцию, значение которой для каждой m-ки натуральных аргументов $y_1, \ldots, y_m$ есть некоторый гёделевский номер функции

$$\lambda x_1 \ldots x_n \varphi(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n).$$

Пользуясь, кроме того, сокращением

$$\text{«}\{z\}\ (x_1, \ldots, x_n)\text{» вместо } \Phi_n(z, x_1, \ldots, x_n),$$

мы получаем для любой n-ки $t_1, \ldots, t_n$ натуральных чисел

$$(71)\qquad \{\Lambda x_1 \ldots x_n \varphi(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)\}(t_1, \ldots, t_n) \simeq \simeq \varphi(y_1, \ldots, y_m, t_1, \ldots, t_n).$$

Аналогично можно пользоваться сокращением с «$\Lambda^{m_1, \ldots, m_l}$», где Ψ есть набор из l всюду определенных функций и предикатов от $m_1, \ldots, m_l$ переменных соответственно.

Лемма VI. *Лемма I § 47 сохраняет силу после замены слов «примитивно-рекурсивна» на «частично-рекурсивна».* Таким образом (для $p=1$), *если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ частично-рекурсивна равномерно относительно функций θ, Ψ, а $\varphi^*(x_1, \ldots, x_n, c)$ — функция, которая получится, если в определении φ в качестве θ взять функцию θ^*, зависящую от параметра c, то φ^* частично-рекурсивна равномерно относительно θ^*, Ψ.*

Доказательство. По условию, имеется система E равенств, такая, что при любом выборе θ, Ψ система E рекурсивно определяет полученную функцию φ через θ, Ψ. В качестве Ψ возьмем набор $\psi_1, \ldots, \psi_l$, и пусть данные функциональные буквы из E (выражающие θ, Ψ соответственно) будут $\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_l$, а главная функциональная буква пусть будет $\mathfrak{f}$. Пусть c — переменная, не входящая в E. Пусть E_2^* получается из E путем одновременной замены каждой части $\mathfrak{h}(\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_s)$, где $\mathfrak{h}$ — функциональная буква, а $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_s$ — термы, на $\mathfrak{h}(\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_s, c)$. Пусть E_1^* — система равенств

$$\mathfrak{g}_1(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{m_1}, c) = \bar{\mathfrak{g}}_1(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{m_1}), \ldots, \mathfrak{g}_l(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{m_l}, c) = \bar{\mathfrak{g}}_l(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{m_l}),$$

где $\bar{\mathfrak{g}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{g}}_l$ — различные функциональные буквы, не входящие в E. Пусть E^* будет $E_1^* E_2^*$. Покажем, что при любом выборе θ^*, Ψ система E^* рекурсивно определяет φ^* через θ^*, Ψ.

Фиксируем произвольным образом θ^*, Ψ и c. Пусть $(E_{\mathfrak{t}}^{\theta^*})_c$ — множество равенств $\mathfrak{t}_1(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_q, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{u}$, которые принадлежат $E_{\mathfrak{t}}^{\theta^*}$. Пусть $(E_{\mathfrak{t}}^{\theta})_c$ — множество соответствующих равенств $\mathfrak{t}(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_q) = \boldsymbol{u}$, т. е. множество равенств, выражающих значения функции θ, если положить $\theta(s_1, \ldots, s_q) = \theta^*(s_1, \ldots, s_q, c)$ для фиксированного c.

Легко видеть, что если $(E_{\mathfrak{t}}^{\theta})_c$, $E_{\mathfrak{g}_1 \ldots \mathfrak{g}_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l}$, $E \vdash \mathfrak{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$, то $(E_{\mathfrak{t}}^{\theta^*})_c$, $E_{\bar{\mathfrak{g}}_1 \ldots \bar{\mathfrak{g}}_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l}$, $E^* \vdash \mathfrak{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{x}$, а тогда и подавно

$$E_{\mathfrak{t}\ \bar{\mathfrak{g}}_1 \ldots \bar{\mathfrak{g}}_l}^{\theta^* \psi_1 \ldots \psi_l},\ E^* \vdash \mathfrak{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{x}.$$

Покажем теперь обратное. Пусть $(E_{\mathfrak{g}_1 \ldots \mathfrak{g}_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l})_c$ — множество равенств $\mathfrak{g}_i(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{m_i}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{y}$, где $\mathfrak{g}_i(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{m_i}) = \boldsymbol{y} \in E_{\mathfrak{g}_1 \ldots \mathfrak{g}_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l}$. Пусть $(E^*)_c$ — система равенств, которая получается в результате подстановки $\boldsymbol{c}$ вместо c всюду в E_2^*. Будем говорить, что равенство e является *c-равенством*, если имеется вывод e из $E_{\mathfrak{t}\ \bar{\mathfrak{g}}_1 \ldots \bar{\mathfrak{g}}_l}^{\theta^* \psi_1 \ldots \psi_l}$, E^* и либо $e \in (E_{\mathfrak{t}}^{\theta^*})_c$, либо $e \in (E_{\mathfrak{g}_1 \ldots \mathfrak{g}_l}^{\psi_1 \ldots \psi_l})_c$, либо главное равенство (§ 54) этого вывода равенства e принадлежит E_2^* и на главной ветви встречается применение правила R1, состоящее в подстановке $\boldsymbol{c}$ вместо c.

Можно доказать (индукцией по высоте данного такого вывода равенства e), что еслн e является c-равенством, то $(\mathrm{E}_{\mathrm{t}}^{\theta^*})_c$, $(\mathrm{E}_{\mathrm{g}_1 \dots \mathrm{g}_l}^{\psi_1 \dots \psi_l})_c$, $(\mathrm{E}^*)_c \vdash \mathrm{e}$. В этом выводе каждое вхожденне функцнонального символа h встречается в частн внда $\mathrm{h}(\mathrm{r}_1, \dots, \mathrm{r}_s, c)$. Любое равенство вида $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n, c) = \boldsymbol{x}$, выводимое из $\mathrm{E}_{\mathrm{t}\ \mathrm{g}_1 \dots \mathrm{g}_l}^{\theta^* \psi_1 \dots \psi_l}$, E^*, является c-равенством. Еслн в только что опнсанном выводе мы одновременно заменим все части $\mathrm{h}(\mathrm{r}_1, \dots, \mathrm{r}_s, c)$ на $\mathrm{h}(\mathrm{r}_1, \dots, \mathrm{r}_s)$, то получим вывод равенства $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}$ из $(\mathrm{E}_{\mathrm{t}}^{\theta})_c$, $\mathrm{E}_{\mathrm{g}_1 \dots \mathrm{g}_l}^{\psi_1 \dots \psi_l}$, E.

Теорема XXIV. (a) *Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ частично-рекурсивна равномерно относительно частично-рекурсивных функций $\theta_1, \dots, \theta_r$. Тогда имеется частично-рекурсивная функция $\varphi(z_1, \dots, z_r, x_1, \dots, x_n)$, такая, что если $t_1, \dots, t_r$ — какие-нибудь гёделевские номера функций $\theta_1, \dots, \theta_r$ соответственно, то $\varphi(x_1, \dots, x_n) \simeq \varphi(t_1, \dots, t_r, x_1, \dots, x_n)$.*

(b) *Пусть φ частично-рекурсивна равномерно относительно частично-рекурсивных функций $\theta_1, \dots, \theta_r$. Тогда имеется примитивно-рекурсивная функция $\eta(z_1, \dots, z_r)$, такая, что если $t_1, \dots, t_r$ — любые гёделевские номера функций $\theta_1, \dots, \theta_r$ соответственно, то $\eta(t_1, \dots, t_r)$ есть гёделевский номер функции φ* [1]*.*

Обе части сохраняют силу при замене слов «частично-рекурсивна относительно $\theta_1, \dots, \theta_r$», «частично-рекурсивна», «гёделевский номер» на слова «частично-рекурсивна относительно $\theta_1, \dots, \theta_r$, Ψ», «частично-рекурсивна относительно Ψ», «гёделевский номер по Ψ» соответственно, где Ψ — набор l всюду определенных функций.

Доказательства (для $l = 0$). (a) В силу леммы VI, результат замены $\theta_i(s_1, \dots, s_{q_i})$ на $\Phi_{q_i}(z_i, s_1, \dots, s_{q_i})$ $(i = 1, \dots, r)$ в определении $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ через $\theta_1, \dots, \theta_r$ есть функцня $\varphi(z_1, \dots, z_r, x_1, \dots, x_n)$, частично-рекурсивная относнтельно $\Phi_{q_1}, \dots, \Phi_{q_r}$. Но так как $\Phi_{q_1}, \dots, \Phi_{q_r}$ частично-рекурсивны, то н $\varphi(z_1, \dots, z_r, x_1, \dots, x_n)$ частично-рекурсивна. Кроме того, $\theta_i(s_1, \dots, s_{q_i}) \simeq \Phi_{q_i}(t_i, s_1, \dots, s_{q_i})$, поэтому

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \simeq \varphi(t_1, \dots, t_r, x_1, \dots, x_n).$$

(b) Пусть e — гёделевский номер функцни $\varphi(z_1, \dots, z_r, x_1, \dots, x_n)$; положим

$$\eta(z_1, \dots, z_r) = S_n^r(e, z_1, \dots, z_r).$$

Пример 4. Согласно нашему доказательству теоремы XIII § 60 (опнрающемуся на доказательство теоремы IV § 57), в качестве f на фнг. 1a

---

[1]) В силу результатов В. А. Успенского ([1955a], теорема 10*; [1955], теорема 7), нмеет место такое обращеине утверждеиия (b): *Пусть оператор $\varphi = \mathbf{F}(\theta_1, \dots, \theta_r)$ обладает следующим свойством: существует такая примитивно-рекурсивная функция* $\eta(z_1, \dots, z_r)$ (достаточно даже требовать, чтобы η была частично-рекурсивиой), *что если $t_1, \dots, t_r$ суть какие-либо гёделевские номера частично-рекурсивных функций $\theta_1, \dots, \theta_r$, то $\eta(t_1, \dots, t_r)$ является гёделевским номером функции φ. Тогда оператор $\mathbf{F}$ частично-рекурсивен (т. е φ частично-рекурсивна равномерно относительно $\theta_1, \dots, \theta_r$).* Отсюда вытекает, что справедливо и обращение утверждении (a): *Пусть оператор $\varphi = \mathbf{F}(\theta_1, \dots, \theta_r)$ обладает следующим свойством: существует такая частично-рекурсивная функция $\varphi(z_1, \dots, z_r, x_1, \dots, x_n)$, что если $t_1, \dots, t_r$ суть какие-либо гёделевские номера частично-рекурсивных функций $\theta_1, \dots, \theta_r$, то $\varphi(x_1, \dots, x_n) \simeq \varphi(t_1, \dots, t_r, x_1, \dots, x_n)$. Тогда оператор $\mathbf{F}$ частично-рекурсивен.* Действительно, если оператор $\mathbf{F}$ удовлетворяет условию только что сформулированного утверждении и e — гёделевский номер функции $\lambda z_1 \dots z_r x_1 \dots x_n \varphi(z_1, \dots, z_r, x_1, \dots, x_n)$, то функции $\eta(z_1, \dots, z_r) = S_n^r(e, z_1, \dots, z_r)$ обладает свойством, указанным в утверждеиии (b), а потому, и силу обращения утверждении (b), оператор $\mathbf{F}$ частичио-рекурсивен. — *Прим. ред.*

§ 61 может служить любой гёделевский номер частично-рекурсивной функции $\mu y R(x, y)$. Так как $\mu y R(x, y)$ частично-рекурсивна равномерно относительно R, по теореме XXIV (b) (примененной к представляющей функции R) имеется такая обще-рекурсивная (фактически даже примитивно-рекурсивная) функция $\eta(z)$, что для любого гёделевского номера r предиката $R(x, y)$, число $\eta(r)$ служит f фиг. 1a. Это показывает, что рекурсивно-перечислимое множество C_0 (т. е. $\hat{x}(Ey)T_1(x, x, y)$) представляет собой то, что Пост [1944] называет *креативным*[1]) множеством. (Здесь гёделевский номер r предиката $R(x, y)$ играет роль постовского «базиса B» для рекурсивно-перечислимого множества $\hat{x}(Ey)R(x, y)$.)

Пример 5. Не обще-рекурсивные предикаты, построенные в теореме V § 57, имели $n \geqslant 1$ переменных. Предикат $(Ex)R(x)$ от 0 переменных не является обще-рекурсивным равномерно относительно предиката R. Действительно, допустим противное. Тогда, по теореме XXIV (a) для $n=0$ (примененной к представляющим функциям), имелся бы частично-рекурсивный предикат $Q(z)$, такой, что $(Ex)R(x) \equiv Q(t)$ для любого гёделевского номера t предиката $R(x)$. Пусть теперь e — гёделевский номер предиката $T_1(a, a, x)$. Тогда предикат $Q(S_1^1(e, a))$ должен быть обще-рекурсивным предикатом от a, и $(Ex)T_1(a, a, x) \equiv Q(S_1^1(e, a))$. Но $(Ex)T_1(a, a, x)$ не обще-рекурсивен (теорема V (15)).

Неопределенное описание. Теорема XXV. *Для каждого $n \geqslant 0$ имеется частично-рекурсивная функция $\nu_n(z, x_1, \ldots, x_n)$ со следующим свойством: Пусть r — гёделевский номер частично-рекурсивного предиката $R(x_1, \ldots, x_n, y)$. Тогда $\nu_n(r, x_1, \ldots, x_n)$ определена в том и только в том случае, если $(Ey)R(x_1, \ldots, x_n, y)$, и в этом случае ее значение есть некоторое число y, такое, что $R(x_1, \ldots, x_n, y)$.* Обычно мы будем сокращенно записывать $\nu_n(r, x_1, \ldots, x_n)$ в виде «$\nu y_{(r)} R(x_1, \ldots, x_n y)$» или даже «$\nu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$» и читать как «такое y (зависящее от r), что $R(x_1, \ldots, x_n, y)$».

Аналогично для l всюду определенных функций и предикатов Ψ с заменой слов и символов «частично-рекурсивный», «гёделевский номер», «ν_n», «$\nu y_{(r)}$» на «частично-рекурсивный относительно Ψ», «гёделевский номер по Ψ», «ν_n^{Ψ}», «νy_r^{Ψ}» соответственно.

Доказательство (для $l=0$). Определяем

$$\nu_n(z, x_1, \ldots, x_n) \simeq (\mu y[T_{n+1}(z, x_1, \ldots, x_n, (y)_0, (y)_1) \& U((y)_1) = 0])_0.$$

Комментарий. Оператор наименьшего числа μy и неопределенное описание νy соответствуют двум различным эффективным процедурам для вычисления y такого, что $R(x_1, \ldots, x_n, y)$, причем каждая из этих процедур по-своему ограничена в своей применимости.

Пусть предикат R эффективно разрешим. Чтобы вычислить

$$\mu y R(x_1, \ldots, x_n, y),$$

мы пробуем сперва решить посредством алгоритма для R, истинно или ложно $R(x_1, \ldots, x_n, 0)$. Если оно истинно, берем 0 в качестве искомого числа; если же оно ложно, то пробуем решить, истинно или ложно

$$R(x_1, \ldots, x_n, 1),$$

и т. д. Если, прежде чем найти y, для которого $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ истинно, мы натолкнулись на такое, для которого $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ не определено, то мы не можем перескочить через это y, а должны (повинуясь правилам

---

[1]) Т. е. «творческим».—*Прим. перев.*

нашей вычислительной процедуры) продолжать до бесконечности бесплодные попытки решить, истинно или ложно $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ для этого y. Для некоторых R нам, может быть, удастся найти другую процедуру, с помощью которой мы обойдем это препятствие, но в общем случае это невозможно (см. пример 6 § 64).

Чтобы вычислить $\nu y R(x_1, \ldots, x_n, y)$, мы распределяем по различным y наши попытки решить, истинно или ложно $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ так, что, если попытки выяснить истинность или ложность $R(x_1, \ldots, x_n, 0)$ еще не привели к успеху после некоторого определенного числа шагов, мы принимаемся за рассмотрение $R(x_1, \ldots, x_n, 1)$ и т. д.; если эти поиски не оборвутся, то для каждого y алгоритмический процесс для распознаиия истинности или ложности $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ при этом y будет продолжаться неопределенно долго. Как только будет установлено, что $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ истинно при некотором y, мы примем в качестве искомого числа это y, не пытаясь решить, является ли оно наименьшим. Число y, полученное при помощи этой процедуры, может меняться в зависимости от того, какой алгоритм для R (или гёделевский номер r) был использован. Следующий пример (излагаемый для $n=0$) показывает, что это в общем случае неизбежно.

Пример 6. Пусть $\nu'(z)$ — частичная функция, обладающая следующими двумя свойствами: (a) Если r — гёделевский номер частично-рекурсивного предиката $R(y)$, то $(Ey)R(y) \to R(\nu'(r))$. (b) Если r и s — гёделевские номера одного и того же предиката, то $\nu'(r) \simeq \nu'(s)$. Мы покажем, что при этих условиях ν' не является частично-рекурсивной. Для каждого k определим следующим образом частично-рекурсивные предикаты R_k и S_k:

$$R_k(y) \simeq y=0 \vee y=1+0\cdot\mu z T_1(k, k, z), \quad S_k(y) \simeq y=0\cdot\mu z T_1(k, k, z) \vee y=1.$$

Пусть r_k и s_k — гёделевские номера R_k и S_k соответственно. При данном k предикаты $R_k(0)$ и $S_k(1)$ истинны; поэтому, в силу (a), обе функции $\nu'(r_k)$ и $\nu'(s_k)$ определеиы. Если $(Ez)T_1(k, k, z)$, то $(y)[R_k(y) \simeq S_k(y)]$, т. е. R_k и S_k — один и тот же предикат, а потому, в силу (b), $\nu'(r_k)=\nu'(s_k)$. Итак, $(Ez)T_1(k, k, z) \to \nu'(r_k) = \nu'(s_k)$ или, по контрапозиции (см. *12 § 26), $\nu'(r_k) \neq \nu'(s_k) \to \overline{(Ez)}T_1(k, k, z)$. Обратно, если $\overline{(Ez)}T_1(k, k, z)$, то $R_k(y)$ истинно только при $y=0$, а $S_k(y)$ только при $y=1$, так что, в силу (a), $\nu'(r_k) \neq \nu'(s_k)$. Итак, $\nu'(r_k) \neq \nu'(s_k) \equiv \overline{(Ez)}T_1(k, k, z) \equiv (z)\overline{T}_1(k, k, z)$. Выражения, определяющие $R_k(y)$ и $S_k(y)$, являются частично-рекурсивными предикатами от двух переменных k, y; обозначим через r и s гёделевские номера этих предикатов соответственно. Тогда в предыдущем рассуждении можно положить $r_k = S_1^1(r, k)$ и $s_k = S_1^1(s, k)$ и получить эквивалентность $\nu'(S_1^1(r, k)) \not\simeq \nu'(S_1^1(s, k)) \equiv (z)\overline{T}_1(k, k, z)$. Если бы функция ν' была частично-рекурсивна, то левая часть была бы обще-рекурсивиым предикатом от k; но правая часть не обще-рекурсивна (теорема V (14)).

§ 66. ТЕОРЕМА О РЕКУРСИИ

Теорема XXVI. *При каждом $n \geqslant 0$ справедливо следующее утверждение. Пусть $\mathrm{F}(\zeta; x_1, \ldots, x_n)$ — частично-рекурсивный оператор, в котором функциональная переменная ζ пробегает частичные функции от n переменных. Тогда функциональное уравнение*

$$\zeta(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{F}(\zeta; x_1, \ldots, x_n)$$

имеет для ζ такое решение φ, что всякое решение φ' для ζ служит продолжением функции φ, и это решение φ — частично-рекурсивно.

Аналогично, если Ψ состоит из l частичных функций и предикатов, то

$$\zeta(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{F}(\zeta, \Psi; x_1, \ldots, x_n)$$

имеет для ζ такое решение φ, что всякое решение φ' для ζ служит продолжением функции φ, и это решение φ частично-рекурсивно относительно Ψ. (Первая теорема о рекурсии.)

Доказательство (для $l = 0$, $n = 1$). Пусть φ_0 — нигде не определенная функция. Введем тогда последовательно $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, полагая

$$\varphi_1(x) \simeq \mathrm{F}(\varphi_0; x), \quad \varphi_2(x) \simeq \mathrm{F}(\varphi_1; x), \quad \varphi_3(x) \simeq \mathrm{F}(\varphi_2; x), \ldots .$$

Так как φ_0 нигде не определена, то функция φ_1 является продолжением φ_0; тогда, по теореме XXI (а), функция φ_2 служит продолжением для φ_1, функция φ_3 — для φ_2 и т. д. Пусть φ — «предельная функция» для $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, т. е. для каждого x функция $\varphi(x)$ определена тогда и только тогда, когда при некотором s определена функция $\varphi_s(x)$, и в этом случае ее значением является общее значение всех функций $\varphi_s(x)$, где индекс s не меньше наименьшего такого s. Тогда:

(i) *Для каждого x справедливо $\varphi(x) \simeq \mathrm{F}(\varphi; x)$.* Действительно, рассмотрим любое число x. Предположим, что функция $\varphi(x)$ определена. Тогда для некоторого s имеем $\varphi(x) \simeq \varphi_{s+1}(x)$ [по определению φ] $\simeq \mathrm{F}(\varphi_s; x)$ [по определению φ_{s+1}] $\simeq \mathrm{F}(\varphi; x)$ [по теореме XXI (а), так как φ — продолжение φ_s]. Обратно, предположим, что функция $\mathrm{F}(\varphi; x)$ определена; обозначим ее значение через k. Так как оператор F частично-рекурсивен, имеется система F равенств, рекурсивно определяющая $\mathrm{F}(\zeta; x)$ через ζ, пусть f — главный, a g — данный функциональные символы этой системы; тогда имеется вывод для $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$ из E_{g}^{φ}, F. Пусть $\mathrm{g}(\boldsymbol{y}_1) = \boldsymbol{z}_1, \ldots, \mathrm{g}(\boldsymbol{y}_p) = \boldsymbol{z}_p$ (где $z_i = \varphi(y_i)$)—равенства из E_{g}^{φ}, входящие в этот вывод. Но $\varphi(y_1) = \varphi_{s_1}(y_1), \ldots, \varphi(y_p) = \varphi_{s_p}(y_p)$ для некоторых $s_1, \ldots, s_p$. Пусть $s = \max(s_1, \ldots, s_p)$. Тогда $\varphi(y_1) = \varphi_s(y_1), \ldots, \varphi(y_p) = \varphi_s(y_p)$. Значит, $\mathrm{g}(\boldsymbol{y}_1) = \boldsymbol{z}_1, \ldots, \mathrm{g}(\boldsymbol{y}_p) = \boldsymbol{z}_p \in E_{\mathrm{g}}^{\varphi_s}$. Итак, $E_{\mathrm{g}}^{\varphi_s}$, $\mathrm{F} \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$. Следовательно, $k \simeq \mathrm{F}(\varphi_s; x) \simeq \varphi_{s+1}(x) \simeq \varphi(x)$.

(ii) *Если для каждого x справедливо $\varphi'(x) \simeq \mathrm{F}(\varphi'; x)$, то φ' служит продолжением функции φ.* Достаточно показать индукцией по s, что для каждого x, если $\varphi_s(x)$ определено, то $\varphi'(x) \simeq \varphi_s(x)$. Базис: $s = 0$. Индукционное предложение выполняется тривиальным образом. Инд. шаг. Допустим для данного x, что $\varphi_{s+1}(x)$ определено. Тогда $\varphi_{s+1}(x) \simeq \mathrm{F}(\varphi_s; x) \simeq \mathrm{F}(\varphi'; x)$ [по теореме XXI (а), так как, по индуктивному предположению, φ' — продолжение для φ_s] $\simeq \varphi'(x)$.

(iii) *Если система равенств F рекурсивно определяет $\mathrm{F}(\zeta; x)$ через ζ, а E получается из F путем подстановки главного функционального символа f вместо данного функционального символа g, то E рекурсивно определяет φ.* Достаточно показать, что $\mathrm{E} \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_s(x) \simeq k$ для некоторого s. Легко видеть, что если $\varphi_s(x) = k$, то $\mathrm{E} \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$. Чтобы убедиться в обратном, мы покажем индукцией по h, что если имеется вывод $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{k}$ из E высоты h, то $\varphi_s(x) = k$ для некоторого s. Данный вывод можно в случае необходимости изменить так, чтобы в полученном выводе при каждом заключении по правилу R2 с малой посылкой вида $\mathrm{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}$ только одно вхождение $\mathrm{f}(\boldsymbol{y})$ в большую посылку заменялось на $\boldsymbol{z}$ (1-я операция). Вхождения f в равенства нашего вывода можно очевидным образом разделить на такие, которые получаются из какого-нибудь вхождения f в F, и такие, которые получаются в результате подстановки f вместо g из какого-нибудь вхождения g в F. Рассмотрим теперь заключения по правилу R2 с малой посылкой вида $\mathrm{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}$, в которых f заменяемой части $f(\boldsymbol{y})$ большой посылки получается из какого-нибудь g в F. Пусть имеются p заключений такого рода, малые посылки $f(\boldsymbol{y}_1)=\boldsymbol{z}_1, \ldots, f(\boldsymbol{y}_p)=\boldsymbol{z}_p$ которых не стоят выше других таких же посылок. Каждая из этих p посылок входила до 1-й операции в данный вывод выше конечного уравнения; с помощью индуктивного предположения заключаем, что $z_1 \simeq \varphi_{s_1}(y_1) \simeq \varphi_s(y_1), \ldots, z_p \simeq \varphi_{s_p}(y_p) \simeq \varphi_s(y_p)$, где $s=\max(s_1, \ldots, s_p)$. Рассмотрим теперь дерево, которое останется от вывода, полученного после 1-операции, если удалить все равенства выше $f(\boldsymbol{y}_1)=\boldsymbol{z}_1, \ldots, f(\boldsymbol{y}_p)=\boldsymbol{z}_p$ (2-я операция). В этом дереве заменим каждое вхождение f, которое (до 2-й операции) получалось из вхождения g в F, снова на g (3-я операция). Символы f, о которых идет речь, входили все в правые части равенств, потому что g, будучи данным функциональным символом F, входит в F только справа; поэтому никакой символ f, входивший до 3-й операции в малую посылку для R2 или в конечное равенство $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{k}$, не заменяется на g в силу 3-й операции. Наконец, заменим на g символы f из равенств $f(\boldsymbol{y}_1)=\boldsymbol{z}_1, \ldots, f(\boldsymbol{y}_p)=\boldsymbol{z}_p$ (4-я операция), чем будут восстановлены заключения по R2, нарушенные операцией 3. Полученное дерево будет выводом для $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{k}$ из $E_g^{\varphi_s}$, F. Следовательно,

$$k \simeq F(\varphi_s; x) \simeq \varphi_{s+1}(x).$$

Пример 1. Рассмотрим задачу: найти частично-рекурсивную функцию φ, такую, что

(a) $$\varphi(x) \simeq \varphi(x),$$

т. е. решить уравнение $\zeta(x) \simeq \zeta(x)$ относительно ζ. Очевидно, что всякая частичная функция удовлетворяет этому уравнению. Частичная функция с наименьшей областью определения, которая ему удовлетворяет, это нигде не определенная функция. Таково то решение φ, которое дает теорема (при $F(\zeta; x) \simeq \zeta(x)$).

Пример 2. Найти частично-рекурсивную функцию φ, такую, что

(a) $$\varphi(x) \simeq \varphi(x)+1,$$

т. е. решить $\zeta(x) \simeq \zeta(x)+1$ относительно ζ. Только нигде не определенная частичная функция удовлетворяет этому уравнению. Конечно, это и есть то решение φ, которое дает теорема (при $F(\zeta; x) \simeq \zeta(x)+1$).

Пример 3. Найти такую функцию φ, частично-рекурсивную относительно χ, что

(a) $$\begin{cases} \varphi(0) \simeq q, \\ \varphi(y') \simeq \chi(y, \varphi(y)) \end{cases}$$

(схема (Va) § 43). Только одна функция φ удовлетворяет этой схеме при данной χ, и мы уже знаем из теоремы XVII (a), что эта функция частично-рекурсивна относительно χ. Но чтобы посмотреть, как применяется наша теорема, перепишем (a) в виде

(b) $$\varphi(x) \simeq F(\varphi, \chi; x), \text{ где } F(\zeta, \chi; x) \simeq \begin{cases} q, & \text{если } x=0, \\ \chi(x \dot{-} 1, \zeta(x \dot{-} 1)), & \text{если } x>0 \end{cases}$$

(эквивалентным образом,

$$F(\zeta, \chi; x) \simeq \mu w[\{x=0 \,\&\, w=q\} \vee \{x>0 \,\&\, w=\chi(x \dot{-} 1, \zeta(x \dot{-} 1))\}]).$$

Так как оператор $F(\zeta, \chi; x)$ — частично-рекурсивен (в силу теорем XVII, XX (c) или XVII, XVIII, XX (a)), то, по доказанной теореме, φ частично-рекурсивна относительно χ.

Пример 4. Дадим новое доказательство теоремы XVIII (это доказательство в различных видах появлялось у Клини [1935, 1936, 1943]). Пусть $\varphi(x) \simeq \mu y[\chi(x, y)=0]$. Тогда $\varphi(x) \simeq \varphi(x, 0)$, где

(a) $$\varphi(x, y) \simeq \mu t_{t \geqslant y}[\chi(x, t)=0].$$

Но $\varphi(x, y)$ — частичная функция φ с наименьшей областью определения, обладающая тем свойством, что

(b) $$\varphi(x, y) \simeq \begin{cases} y, & \text{если } \chi(x, y)=0, \\ \varphi(x, y'), & \text{если } \chi(x, y) \neq 0. \end{cases}$$

В силу теоремы XX (c) (с первым доказательством), правая часть (b) имеет вид $F(\varphi, \chi; x, y)$, где оператор $F(\zeta, \chi; x, y)$ частично-рекурсивен. Поэтому, в силу рассматриваемой теоремы, $\varphi(x, y)$, а следовательно, и $\varphi(x)$, частично-рекурсивна относительно χ.

Комментарий. Доказанная теорема при $l=0$ утверждает, что мы можем установить каждое соотношение вида

(72) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq F(\varphi; x_1, \ldots, x_n),$$

выражающее общее значение $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ функции φ через саму φ и $x_1, \ldots, x_n$, методами, уже рассмотренными в теории частично-рекурсивных функций, и заключить, что частичная функция с наименьшей областью определения, которая удовлетворяет этому соотношению, частично-рекурсивна.

Далее, случай $l>0$ этой теоремы, в котором устанавливаемым соотношением является

(73) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq F(\varphi, \Psi; x_1, \ldots, x_n),$$

можно использовать для распространения существа имеющихся у нас методов в целях дальнейших применений.

В наших примерах «рекурсий» специальных видов (§§ 43, 46 и начало § 55) общее значение функции $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ выражалось через значения этой же функции для систем значений аргументов, предшествующих данной n-ке $x_1,\ldots,x_n$ в смысле некоторого специального упорядочения n-ок. Теперь перед нами общий вид «рекурсии», в которой значение $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ может выражаться через другие значения той же функции, от которых оно зависит совершенно произвольным образом, лишь бы только законы этой зависимости можно было описать ранее изложенными эффективными методами.

Данная «рекурсия» может теперь оказаться, если ее рассматривать как определение обычной (т. е. всюду определенной) арифметической функции φ, неопределенной — в том смысле, что она может удовлетворяться более чем одной такой функцией (пример 1 или случай (b) примера 4, если $\chi(x,y)$ не обращается в нуль для бесконечно многих значений y). Но в качестве интересующего нас решения мы теперь выбираем такую частичную функцию, которая определена лишь при условии, что этого требует рекурсия. Данная «рекурсия» может оказаться несовместной, если рассматривать ее как определение обычной функции (пример 2); но и эта трудность устраняется теперь тем обстоятельством, что мы довольствуемся частичной функцией в качестве искомого решения. Оба эти обстоятельства могут встретиться и при обще-рекурсивном операторе F (примеры 1 и 2). Если оператор F не всюду определен, то рекурсия также может непосредственно требовать, в соответствии с нашим обычным соглашением (§ 63), что φ не определена для некоторых аргументов (например, если χ в примере 3 задана как нигде не определенная функция). Это же требование может быть выражено косвенно, посредством несовместности (не обязательно столь очевидной, как в примере 2).

Для данного соотношения вида (72) или (73) задача выяснения того, для каких аргументов $x_1,\ldots,x_n$ должно быть определено значение функции

$\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, может оказаться трудной. Эта задача отлична от той, которую решает первая теорема о рекурсии, т. е. задачи установления частичной рекурсивности решения φ, имеющего наименьшую область определения.

В качестве применения доказанной теоремы рассмотрим случай, относящийся к (A2) § 62. Наши методы доказательства того, что данная эффективно вычислимая функция является частично-рекурсивной (и, следовательно, если она всюду определена, то обще-рекурсивной), развиты нами теперь до такой степени, что кажутся пригодными для любого эффективного определения функции, которое может быть предложено. Чтобы описать на обычном языке процесс вычисления новой функции φ, мы должны разъяснить эффективно, каким образом любое значение функции $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ получается из уже вычисленных значений φ. Обычно мы в таком разъяснении обходимся уже изученными эффективно вычислимыми функциями, связками исчисления высказываний, а также ограниченными кванторами (неограниченные кванторы неэффективны) и описаниями вида „наименьшее число, такое, что". Эта лексика допускает перевод на язык уже рассмотренных в нашей теории операций (см. особенно теоремы XVIII и XX). Поэтому к разъяснению в целом мы можем применить первую теорему о рекурсии, а именно, мы можем выразить его в виде утверждения, что φ должно удовлетворять соотношению (72) для некоторого F и должно быть определено только тогда, когда это разъяснение приводит к некоторому значению, т. е. φ должна быть функцией с наименьшей областью определения, удовлетворяющей (72). Тогда, по теореме XXVI, мы можем заключить, что φ частично-рекурсивна.

Некоторые другие операции, помимо только что отмеченных, допускают подход при помощи уже рассмотренных методов,—например, одновременное определение нескольких функций (ср. пример 4 § 46). Мы надеемся, что и другие понятия, которыми мы могли бы пользоваться, можно предварительно разъяснить в терминах описанной выше лексики. Мы так формулируем наши результаты, что они дают не только методы для доказательства частичной (или общей) рекурсивности конкретных функций, но и средства для расширения по мере надобности нашего запаса таких методов.

Теорема XXVII. *При каждом $n > 0$ справедливо следующее утверждение: Для любой данной частично-рекурсивной функции $\psi(z, x_1, \ldots, x_n)$ можно найти число e, рекурсивно определяющее $\psi(e, x_1, \ldots, x_n)$, т. е. такое, что*

(74a) $$\{e\}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \psi(e, x_1, \ldots, x_n).$$

Для набора Ψ, состоящего из l всюду определенных функций и предикатов, справедливо аналогичное утверждение с заменой слов и символов «частично-рекурсивный», «рекурсивно определяет», «{ }» на «частично-рекурсивный относительно Ψ», «рекурсивно определяет через Ψ», «$\{\ \}^{\Psi}$» соответственно. (Теорема о рекурсии, Клини [1938].)

Доказательство (для $l = 0$). Функция $\psi(S^1_n(y, y), x_1, \ldots, x_n)$ частично-рекурсивна (см. теорему XXIII). Пусть f определяет ее рекурсивно; положим $e = S^1_n(f, f)$. Тогда e рекурсивно определяет функцию от n переменных, полученную путем подстановки числа f вместо переменной y в $\psi(S^1_n(y, y), x_1, \ldots, x_n)$; т. е. e рекурсивно определяет $\psi(S^1_n(f, f), x_1, \ldots, x_n)$, т. е. e рекурсивно определяет $\psi(e, x_1, \ldots, x_n)$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Эту теорему можно рассматривать как утверждение, что для любой частично-рекурсивной функции ψ уравнение

$$z(x_1, \ldots, x_n) \simeq \psi(z, x_1, \ldots, x_n)$$

может быть решено относительно z. По поводу обозначений см. § 65, особенно (66). Если обозначить через $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ функцию $e(x_1, \ldots, x_n)$, рекурсивно определяемую решением e этого уравнения, то (74а) можно переписать в виде

(74b) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \phi(e, x_1, \ldots, x_n).$$

Но $\phi(z, x_1, \ldots, x_n)$ может быть любой частично-рекурсивной функцией от $n+1$ переменных. Итак, теорема утверждает, что имеется частично-рекурсивная функция φ, общее значение $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ которой может быть найдено по некоторому ее гёделевскому номеру e и числам $x_1, \ldots, x_n$ посредством произвольной наперед заданной частично-рекурсивной функции ϕ. Тогда φ может оказаться использованной при построении ее собственного общего значения, потому что при образовании $\phi(e, x_1, \ldots, x_n)$ мы можем использовать e в частях вида $\Phi_n(e, u_1, \ldots, u_n)$ (короче, $e(u_1, \ldots, u_n)$), а $\Phi_n(e, u_1, \ldots, u_n)$ есть $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$. Это подчеркивается следующим следствием (вариант которого для $l > 0$ предоставляем рассмотреть читателю).

Следствие. *Для каждого частично-рекурсивного оператора $\mathrm{F}(\zeta; z, x_1, \ldots, x_n)$, где ζ пробегает частично-рекурсивные функции от n переменных, можно найти такую частично-рекурсивную функцию φ и такой ее гёделевский номер e, что*

(75) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{F}(\varphi; e, x_1, \ldots, x_n).$$

Для каждого частично-рекурсивного оператора $\mathrm{F}(\zeta, \theta_1, \ldots, \theta_r; z, w_1, \ldots, w_r, x_1, \ldots, x_n)$, где ζ пробегает частично-рекурсивные функции от n переменных, а $\theta_1, \ldots, \theta_r$ — частично-рекурсивные функции от некоторого определенного числа переменных каждая, можно найти такую частично-рекурсивную функцию $\varphi(w_1, \ldots, w_r, x_1, \ldots, x_n)$ и такой ее гёделевский номер e, что, если $t_1, \ldots, t_r$ — любые гёделевские номера функций $\theta_1, \ldots, \theta_r$ соответственно, то

(76) $$\varphi(t_1, \ldots, t_r, x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{F}(\varphi, \theta_1, \ldots, \theta_r; e, t_1, \ldots, t_r, x_1, \ldots, x_n).$$

Доказательство (для $r=0$). По теореме XXIV (а), можно найти частично-рекурсивную функцию ϕ от $n+2$ переменных, такую, что

$$\mathrm{F}(\zeta; z, x_1, \ldots, x_n) \simeq \phi(s, z, x_1, \ldots, x_n),$$

если s — любой гёделевский номер функции ζ. Положим теперь $\phi(z, x_1, \ldots, x_n) \simeq \psi(z, z, x_1, \ldots, x_n)$. Находим по теореме число e, удовлетворяющее соотношению (74). Пользуясь обозначением $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для функции с гёделевским номером e, получаем

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \phi(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \phi(e, e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathrm{F}(\varphi; e, x_1, \ldots, x_n).$$

Комментарий (окончание). Если φ частично-рекурсивна равномерно относительно ζ, то можно считать, что φ частично-рекурсивно зависит от ζ как от функции; если же $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — частично-рекурсивная функция от $x_1, \ldots, x_n$ и от гёделевского номера ζ, то можно считать, что φ частично-рекурсивно зависит от ζ как от объекта. Преимущество теоремы XXVII перед теоремой XXVI состоит в том, что теперь, устанавливая соотношение, выражающее общее значение $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ частично-рекурсивно через саму φ и $x_1, \ldots, x_n$, мы можем допускать, что φ входит не только как функция, но и как объект. Наше заключение состоит тогда в том, что некоторая частично-рекурсивная функция φ удовлетворяет соотношению, но, вообще говоря, получаются различные решения φ в зависимости от различных выборов гёделевского номера f функции $\phi(S_n^1(y, y), x_1, \ldots, x_n)$ при доказательстве теоремы XXVII.

Теорема XXVII не полностью содержит теорему XXVI как случай, когда φ входит в «рекурсию» только в виде функции (так что выражение

$\mathsf{F}(\zeta; z, x_1, \ldots, x_n)$ следствия сводится к $\mathsf{F}(\zeta; x_1, \ldots, x_n)$), потому что метод доказательства теоремы XXVII не показывает (по крайней мере, без каких-нибудь дальнейших рассуждений), что полученное частично-рекурсивное решение φ обязательно совпадает с тем, которое имеет наименьшую область определения. Поэтому теорема XXVII посредством своего следствия может заменить теорему XXVI в подтверждении тезисов I, I*, $\mathrm{I}^\dagger$(b) и $\mathrm{I}^{*\dagger}$(b), но не $\mathrm{I}^\dagger$(a) и $\mathrm{I}^{*\dagger}$(a).

Конечно, только при наличии тезиса Чёрча мы в состоянии рассматривать каждую эффективно вычислимую функцию как арифметический объект. То, что при этом может быть найдена эффективно вычислимая функция, удовлетворяющая произвольной «рекурсии», в которую она входит не только как функция, но и как объект, является следствием этого тезиса, полезным в дальнейшем развитии теории.

Пример 2 (окончание). Чтобы рассмотреть этот пример с помощью теоремы XXVII вместо XXVI, возьмем в качестве $\phi(z, x)$ из теоремы XXVII функцию $\simeq \Phi_1(z, x)+1$.

Пример 3 (окончание). Аналогично, полагая $\psi(x, z) \simeq \mathsf{F}(\lambda x\, \Phi_1(z, x), \chi; x) \simeq$ $\simeq \mu w[\{x=0\ \&\ w=q\} \vee \{x>0\ \&\ w=\chi(x \dot{-} 1, \Phi_1(z, x \dot{-} 1))\}]$.

Пример 5. Требуется для фиксированных частично-рекурсивных функций $\theta_1, \ldots, \theta_5$ найти частично-рекурсивную функцию φ со следующими свойствами. Если $\theta_1(x)=0$, то $\varphi(x)=1$. Если $\theta_1(x)=1$, то $\varphi(x) \simeq \theta_2(\varphi(\theta_3(x)))$. Если $\theta_1(x)=2$, то $\varphi(x) \simeq \theta_4(a_{\varphi, x})$, где $a_{\varphi, x}$ — некоторое число, рекурсивно определяющее $\lambda y\, \varphi(\theta_5(x, y))$. Заметим сначала, что если e — какой-нибудь гёделевский номер φ, то $\varphi(\theta_5(x, y)) \simeq \Phi_1(e_1, \theta_5(x, y))$. Далее, $\lambda zxy\, \Phi_1(z, \theta_5(x, y))$ — фиксированная частично-рекурсивная функция. Если g — какой-нибудь ее гёделевский номер, то $S_1^2(g, e, x)$ служит гёделевским номером для $\lambda y\, \Phi_1(e, \theta_5(x, y))$, т. е. для $\lambda y\, \varphi(\theta_5(x, y))$. Указанные три свойства φ устанавливаются теперь, исходя из соотношения

(a) $$\varphi(x) \simeq \mu w[\{\theta_1(x)=0\ \&\ w=1\} \vee \{\theta_1(x)=1\ \&\ w= = \theta_2(\varphi(\theta_3(x)))\} \vee \{\theta_1(x)=2\ \&\ w=\theta_4(S_1^2(g, e, x))\}].$$

Оно имеет вид соотношения (75) из следствия, потому что (в силу теорем XVII, XVIII, XX, XXIII) правая часть имеет вид $\mathsf{F}(\varphi; e, x)$, где $\mathsf{F}(\zeta; z, x)$ — фиксированный частично-рекурсивный оператор, а e может быть любым гёделевским номером φ. Можно воспользоваться и теоремой, полагая

$$\phi(z, x) \simeq \mu w[\{\theta_1(x)=0\ \&\ w=1\} \vee \{\theta_1(x)=1\ \&\ w=\theta_2(\Phi_1(z, \theta_3(x)))\} \vee \vee \{\theta_1(x)=2\ \&\ w=\theta_4(S_1^2(g, z, x))\}].$$

В таком виде, для фиксированных функций $\theta_1, \ldots, \theta_5$, эта проблема возникла у Клини [1938]. Можно ее обобщить, рассматривая $\theta_1, \ldots, \theta_5$ как переменные частично-рекурсивные функции. Пусть $t_1, \ldots, t_5$ — любые их гёделевские номера. Если h — гёделевский номер функции $\lambda zwxy\, \Phi_1(z, \Phi_2(w, x, y))$, то $S_1^3(h, e, t_5, x)$ является гёделевским номером функции $\lambda y\, \Phi_1(e, \Phi_2(t_5, x, y))$, т. е. $\lambda y\, \varphi(\theta_5(x, y))$. Теперь требуемые свойства φ обеспечиваются соотношением

(b) $$\varphi(x) \simeq \varphi(t_1, \ldots, t_5, x) \simeq \mu w[\{\theta_1(x)=0\ \&\ w=1\} \vee \vee \{\theta_1(x)=1\ \&\ w=\theta_2(\varphi(\theta_3(x)))\} \vee \{\theta_1(x)=2\ \&\ w=\theta_4(S_1^3(h, e, t_5, x))\}].$$

По второй части следствия, можно найти частично-рекурсивную функцию $\varphi(w_1, \ldots, w_5, x)$ и ее гёделевский номер e, удовлетворяющие соотношению (b).

Глава XIII

ФУНКЦИИ, ВЫЧИСЛИМЫЕ ПО ТЬЮРИНГУ

§ 67. МАШИНЫ ТЬЮРИНГА

Пусть надо вычислить значение некоторой функции для данного множества значений аргументов, следуя предписанным эффективным указаниям. В процессе работы вычислитель может воспользоваться некоторым конечным числом различных символов или знаков какой угодно природы. В каждый момент он может наблюдать только конечное число вхождений рассматриваемых символов. Он может также вспомнить другие, ранее рассмотренные символы, но опять только в конечном числе. Предписанные указания также должны быть конечными. Применяя эти указания к конечному числу рассмотренных и вызванных в памяти символов или знаков, вычислитель может произвести действие, которое изменяет ситуацию каким-либо конечным образом, например, он может добавлять или стирать некоторые вхождения символов, переключать свое внимание на другие символы, отмечать в своей памяти уже рассмотренные. Некоторая последовательность таких действий может привести его от символического выражения, представляющего аргументы, к другому символическому выражению, представляющему значения функции.

Исследуем теперь, нельзя ли разложить действия, которые может производить вычислитель, на некоторые «элементарные» действия — такие, что каждое производимое действие будет эквивалентно некоторой последовательности элементарных действий. Эти элементарные действия могли бы быть комбинациями следующих: распознавание единичного рассмотренного вхождения данного символа, стирание этого вхождения, выписывание единичного вхождения символа, перемещение точки наблюдения данного ряда символов в соседнюю точку и изменение имеющейся в памяти информации.

Такой анализ был предпринят Тьюрингом [1936—37, поступило для опубликования 28 мая 1936 г.] в форме определения некоторого рода вычислительной машины. Сходный анализ был вкратце изложен Постом [1936, поступило для опубликования 7 октября 1936 г.]

Доводы в пользу того, что этот анализ является полным, т. е. что для любой эффективно вычислимой функции может быть придумана машина Тьюринга, вычисляющая ее значение, будут рассмотрены после того, как мы освоимся с машинами Тьюринга (§ 70).

Приступаем к формулировке идеи машины Тьюринга.

Машина снабжена линейной *лентой*, (потенциально) бесконечной в обоих направлениях (например, *влево* и *вправо*). Лента разделена на *секции*, или *клетки*. Клетка может быть в одном из двух состояний: или она является *пустой*, или же на ней *напечатан* любой из конечного списка (фиксированного для каждой конкретной машины) $s_1, \ldots, s_j$ $(j \geqslant 1)$ *символов*. Если мы будем писать «s_0» вместо «пустой» клетки, то каждая данная клетка сможет удовлетворять любому из $j+1$ *условий* $s_0, \ldots, s_j$. Лента будет употребляться так, что в любой «ситуации» число непустых клеток будет конечным ($\geqslant 0$).

Лента будет проходить через машину так, что в данной «ситуации» машина *воспринимает* (scans) в точности одну клетку, *находящуюся, или установленную в «поле зрения»*. Символ на этой клетке, или s_0, если она пустая, мы будем называть *воспринимаемым символом* или также *символом, находящимся (установленным) в «поле зрения»* (хотя s_0, собственно, не является символом).

Машина способна находиться в любом из конечного перечня $q_0, \ldots, q_k$ ($k \geqslant 1$) *состояний* (*машины*) (названных Тьюрингом «конфигурациями машины» или «m-конфигурациями»). Назовем q_0 *пассивным* (или *заключительным*) *состоянием*, а $q_1, \ldots, q_k$ назовем *активными состояниями*. Перечень $q_0, \ldots, q_k$ фиксирован для каждой конкретной машины.

Ситуация (*ленты или машины*) (которую Тьюринг называет «полной конфигурацией») состоит из конкретного заполнения клеток печатными символами (т. е. указания того, на каких клетках напечатан символ, и притом какой именно из j символов на той или иной клетке), конкретного расположения ленты в машине (т. е. указания того, какая клетка находится в «поле зрения») и конкретного состояния (т. е. указания, в каком из $k+1$ состояний находится машина). Если это состояние активно, назовем ситуацию *активной*, в остальных случаях — *пассивной*.

В данной активной ситуации машина совершает (*элементарное*) *действие*. (Тьюринг называет его «шагом» («move»).) Совершаемое действие определяется воспринимаемым символом s_a и состоянием машины q_c в данной ситуации. Эту пару (s_a, q_c) назовем *конфигурацией*. (Она *активна* в случае, если состояние q_c активно, и *пассивна* в остальных случаях.) Действие следующим образом изменяет указанные три части ситуации, производя результирующую ситуацию. Во-первых, воспринимаемый символ s_a заменяется на s_b. (Допускается $a = b$, в этом случае «замена» тождественна.) Во-вторых, лента передвигается в машине (или машина передвигается по ленте) так, что воспринимаемая клетка в результирующей ситуации или оказывается на одну клетку левее, или совпадает, или оказывается на одну клетку правее воспринимаемой клетки в данной ситуации. В-третьих, состояние машины q_c заменяется на q_d. (Допускается $c = d$.)

Если данная ситуация пассивна, то никакого действия не производится.

Машина действует следующим образом. Выберем некоторую активную ситуацию, с которой машина должна начать свои действия. Назовем ее *начальной ситуацией*, или *входными данными*. Обозначения выберем так, чтобы состояние в этой ситуации (*начальное состояние*) было q_1. Затем машина совершает некоторое элементарное действие. Если ситуация, полученная в результате этого действия, активна, машина действует снова. Машина продолжает работать таким же образом, производя последовательные действия, пока получаются активные ситуации (и только до тех пор, пока это имеет место). Если когда-либо получится пассивная ситуация, машина получит тогда приказ *остановиться*. Ситуацию, в которой она остановилась, будем называть *заключительной ситуацией*, или *результатом*, или *выходными данными*. Замену начальной ситуации на заключительную (если таковая существует) мы и будем называть *операцией*, совершаемой машиной.

Для описания элементарного действия мы будем пользоваться выражениями одного из следующих трех видов:

$$s_bLq_d, \quad s_bCq_d, \quad s_bRq_d.$$

«L», «C» и «R» указывают на то, что полученная воспринимаемая клетка находится соответственно левее данной воспринимаемой клетки, совпадает с ней («центр» («center»)) или находится правее ее.

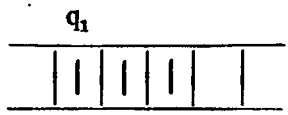
Для первой части действия (т. е. замены s_a на s_b) возможны четыре варианта: $a=0$ и $b>0$,—мы говорим, что «печатается s_b»; если $a>0$, а $b=0$, то «стирается s_a»; если a, $b>0$ и $a\neq b$, то «стирается s_a и печатается s_b» или «надпечатывается s_b»; если $a=b$, то «нет изменений». Мы часто будем описывать эту часть действия, говоря «печатается s_b», безотносительно к случаю.

Чтобы определить конкретную машину, мы должны выписать символы $s_1, \ldots, s_j$ и активные состояния $q_1, \ldots, q_k$ и для каждой активной конфигурации (s_a, q_c) указать, какое элементарное действие должно быть произведено. Это указание можно осуществить, располагая описания требуемых действий в виде *таблицы* (*машины*) с k строками для активных состояний и $j+1$ столбцами для условий клетки.

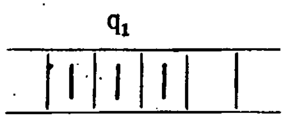
Пример 1. Следующая таблица определяет машину («машина $\mathfrak{A}$»), обладающую только одним символом s_1 и только одним активным состоянием q_1.

Название машины	Состояние машины	Воспринимаемый символ	
		s_0	s_1
$\mathfrak{A}$	q_1	s_1Cq_0	s_1Rq_1

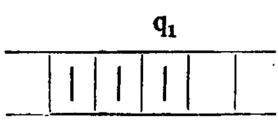
Допустим, что символ s_1 имеет вид «|». Посмотрим, как поступает машина, если в нее первоначально помещена лента такого вида, как указано ниже, так что в поле зрения находится клетка, над которой надписано состояние машины q_1. Условия на непоказанных клетках несущественны и не изменяются в продолжение всего процесса.

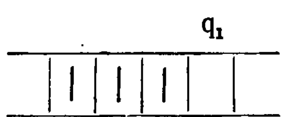


Машина находится в состоянии q_1, и на клетке, находящейся в поле зрения, напечатан символ s_1. В этой конфигурации элементарное действие, которое должно быть произведено согласно таблице, есть s_1Rq_1, т. е., не производя никакого изменения в условии воспринимаемой клетки, машина сдвигается вправо и снова принимает состояние q_1. Получается следующая ситуация:



Дальнейшие три действия приводят последовательно к следующим ситуациям, в последней из которых машина останавливается.





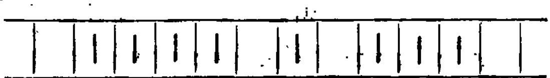
Машина $\mathfrak{A}$ выполняет следующую операцию: отыскивает первую пустую клетку справа от воспринимаемой или совпадающую с ней, печатает на ней | и останавливается, воспринимая эту клетку.

Теперь мы определим, как машина будет „вычислять" частичную арифметическую функцию φ, зависящую от n переменных (см. § 63). Определение для обыкновенной (т. е. всюду определенной) арифметической функции получится, если исключить из рассмотрения возможность того, что функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ может быть не определена.

Прежде всего, условимся представлять натуральные числа 0, 1, 2, ... конечными последовательностями знаков |, ||, |||, ... соответственно, где знак «|» фигурирует в качестве символа s_1. В представлении натурального числа y имеется $y+1$ знак.

Затем, для представления на ленте m-ки $y_1, \ldots, y_m$ $(m \geqslant 1)$ натуральных чисел, мы печатаем соответствующее число раз знак «|», оставляя в точности одну пустую клетку между каждыми двумя группами знаков |, а также перед первой группой и после последней.

Пример 2. Тройка 3, 0, 2 представляется так:

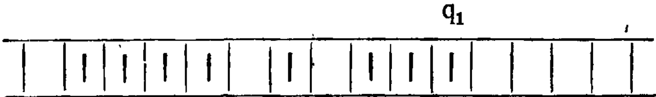


Мы будем говорить, что представление числа y (или m-ки $y_1, \ldots, y_m$) на ленте *воспринято в стандартном положении*, если в поле зрения находится та клетка, на которой помещен последний знак | представления y (или y_m). (Иногда мы будем при этом опускать слово «представление» и говорить просто о числе y или m-ке $y_1, \ldots, y_m$, *воспринимаемых в стандартном положении*.)

Наконец, условимся говорить, что данная машина $\mathfrak{M}$ *вычисляет* данную частичную функцию φ от n переменных $(n \geqslant 1)$, если для каждой n-ки $x_1, \ldots, x_n$ натуральных чисел имеет место следующее обстоятельство. (По поводу случая $n=0$ см. ниже замечание 1.) Пусть набор $x_1, \ldots, x_n$ представлен на ленте, причем все клетки, кроме тех $x_1 + \ldots + x_n + 2n + 1$ клеток, которые нужны для этого представления, пусты. Пусть $\mathfrak{M}$ начинает свои действия с того, что воспринимает представление $x_1, \ldots, x_n$ в стандартном положении. Тогда при условии, что $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определено и $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x$ — и только при этом условии — $\mathfrak{M}$ рано или поздно остановится, причем на ленте будет представлен и отмечен в стандартном положении набор $x_1, \ldots, x_n, x$. (Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ не определена, $\mathfrak{M}$ может не остановиться. Она может и остановиться, однако результат будет отличаться от любого набора $x_1, \ldots, x_n, x$, воспринятого в стандартном положении.)

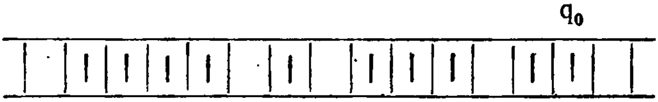
Пример 2 (окончание). Пусть $\varphi(3, 0, 2) = 1$ и $\mathfrak{M}$ вычисляет φ. Тогда, коль скоро $\mathfrak{M}$ начинает свои действия с ситуации

q_1



в которой все непоказанные клетки пусты, она должна, наконец, остановиться в ситуации

q_0



где условия на остальных клетках несущественны.

Хотя в представлении аргументов и значения функции использован только один символ s_1 или «|», в процессе вычисления могут встретиться и другие символы. При каждом $n \geqslant 1$ каждая машина (первый символ s_1 которой служит в качестве знака «|») вычисляет некоторую частичную функцию от n переменных.

Частичная функция φ называется *вычислимой по Тьюрингу*, если существует машина $\mathfrak{M}$, которая ее вычисляет.

Мы пытались изложить здесь не формулировки Тьюринга [1936—37] во всех деталях, а только его общую концепцию поведения машин. Хотя он отмечает разнообразные приложения этих машин, подробно он рассматривает только машины для вычисления двоичных разложений действительных чисел x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Последовательные цифры печатаются при этом до бесконечности на ленте, бесконечной только в одном направлении, через клетку, а промежуточные клетки оставляются для различного рода временных заметок по ходу вычисления[1]). После §§ 68 и 69 в качестве легкого упражнения можно будет показать, что такая машина существует тогда и только тогда, когда n-ая цифра двоичного разложения является вычислимой по Тьюрингу функцией от n. Желающим детально изучить статью Тьюринга может помочь критика, изложенная в приложении к статье Поста [1947]. Настоящее изложение в некоторых отношениях ближе к статье Поста [1936], где рассматриваются вычисления с лентой, бесконечной в обоих направлениях и только с одним символом.

Наша главная цель теперь — доказать эквивалентность вычислимости по Тьюрингу с частичной рекурсивностью, или, если рассматриваются только всюду определенные функции, с общей рекурсивностью (§§ 68, 69).

В то же время представляет некоторый интерес рассмотреть, не достаточно ли ленты, бесконечной только в одну сторону, и одного символа. Мы условимся говорить, что машина $\mathfrak{M}$ *1/1-вычисляет* φ, если она вычисляет φ, подчиняясь нижеследующим ограничениям, и мы условимся также говорить, что φ является *1/1-вычислимой*, если она 1/1-вычисляется некоторой машиной $\mathfrak{M}$. (i) Машина $\mathfrak{M}$ имеет только один символ s_1. Далее, если $\mathfrak{M}$ начала свои действия с какой-либо n-ки $x_1, \ldots, x_n$, ее дальнейшее поведение подчиняется следующим трем условиям. (ii) Никакая клетка, расположенная в начальной ситуации левее представления $x_1, \ldots, x_n$ (т. е. левее пустой клетки, предшествующей первому знаку представления x_1), ни в какой ситуации не находится в «поле зрения». Поэтому вычисление может равным образом производиться на ленте, бесконечной только в одну сторону (вправо). (iii) Если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определено, то в заключительной ситуации представление набора $x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ начинается с той же самой клетки, с какой начиналось представление $x_1, \ldots, x_n$ в начальной ситуации, и все клетки, расположенные правее представления $x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, пусты (в силу (ii), пусты также все клетки левее этого представления). (iv) Машина $\mathfrak{M}$ может остановиться только в том случае, если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определено.

Из результатов §§ 68 и 69 будет следовать, что 1/1-вычислимость эквивалентна вычислимости по Тьюрингу, а значит, эквивалентны все понятия w/s-вычислимости, где w равно 1 или 2 в соответствии с тем, накладываются или нет условия (ii)—(iv), а s — верхняя грань числа символов,

[1]) Описание машин Тьюринга, отличающееся от изложенного в настоящей книге и приближающееся к первоначальному тьюринговскому определению (но с лентой, бесконечной в обе стороны), имеется в монографии Петер [1951, § 20]. Рассматриваемые Петер машины пригодны, однако, лишь для вычисления всюду определенных функций. — *Прим. ред.*

которые могут иметь различные машины (∞, если такой конечной верхней грани не существует). (В этих терминах наше первоначальное понятие вычислимости есть $2/\infty$-вычислимость.)

Можно сформулировать и другие варианты „вычислимости". Например, мы могли бы опустить (iii) и (iv), сохраняя (ii), или вместо (ii) мы могли бы допустить, чтобы машина была снабжена лентой, бесконечной только в одну сторону и добавить требование, что она должна остановиться, если оказалась в такой ситуации, из которой таблица требует движения влево от самой левой клетки. Вместо представления чисел на ленте с помощью знаков «|» можно было бы воспользоваться двоичными или десятичными обозначениями. После §§ 68 и 69 будет нетрудно показать, что каждое из этих понятий вычислимости эквивалентно нашему (ср. § 70).

Распространим теперь наши понятия на случай вычислимости относительно l всюду определенных функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$ (короче, Ψ) от $m_1, \ldots, m_l$ переменных соответственно. Изменение прежней идеи будет состоять в допущении, что коль скоро по ходу вычисления требуется некоторое значение одной из функций Ψ, оно немедленно подается (ср. конец § 61).

Для этой цели машина может иметь среди своих активных состояний $q_1, \ldots, q_k$ такие, при которых совершается действие нового рода (не элементарное по своему характеру). Пусть q_c — одно из этих состояний. Если машина находится в состоянии q_c и некоторый набор $y_1, \ldots, y_{m_i}$ воспринят в стандартном положении (где i зависит от c), то машина должна будет совершить следующее действие: напечатать вплотную направо от этого набора $\psi_i(y_1, \ldots, y_{m_i})+1$ знаков «|» и пустую клетку, с передвижением в то же время на $\psi_i(y_1, \ldots, y_{m_i})+2$ клетки вправо всех тех символов, которые прежде были напечатаны правее воспринимаемой клетки, и затем принять состояние q_d (зависящее от c), в результате чего набор из m_i+1 чисел $y_1, \ldots, y_{m_i}, \psi_i(y_1, \ldots, y_{m_i})$ будет воспринят в стандартном положении. Если машина находится в состоянии q_c, но никакой набор из m_i чисел не воспринят в стандартном положении, мы будем считать, что машина совершает тождественное действие (т. е. такое, при котором ситуация не меняется). В таблице машины для каждого такого состояния q_c мы будем указывать только iq_d, так как в остальных отношениях действие в этой ситуации определяется изложенными определениями и функциями Ψ.

Модифицируя таким образом наше понятие машины, мы получаем три понятия: *машина относительно* Ψ, $\mathfrak{M}$ *вычисляет* φ *через* Ψ, φ *вычислима по Тьюрингу относительно* Ψ. Если (при фиксированных n, l, $m_1, \ldots, m_l$) функция φ вычислима по Тьюрингу относительно Ψ посредством некоторой машины $\mathfrak{M}$, таблица которой не зависит от Ψ, то мы будем говорить, что φ *вычислима по Тьюрингу равномерно относительно* Ψ или что оператор $\varphi \simeq \mathrm{F}(\Psi)$ *вычислим*. (Теоремы §§ 68 и 69 устанавливают равномерность, если предполагать, что равномерность содержится и в условиях.)

В определении «$\mathfrak{M}$ $1/1$-*вычисляет* φ *относительно* Ψ» и «φ является $1/1$-*вычислимой относительно* Ψ» мы добавим к нашим прежним условиям (i)—(iv) еще следующее: (v) Каждое состояние q_c, при котором таблица дает указание iq_d, может иметь место только в том случае, если некоторый набор $y_1, \ldots, y_{m_i}$ воспринимается в стандартном положении и все клетки правее воспринимаемого представления $y_1, \ldots, y_{m_i}$ пусты.

Легко сформулировать определение „вычислимости по Тьюрингу" относительно исходных функций, например, относительно ψ (при $l=m_1=1$), эквивалентное приведенному и такое, при котором машина совершает только действия, элементарные по характеру, но снабжена лентой, на которой напечатан (потенциально) бесконечный ряд символов, представляющий последовательность значений ϕ. Этот ряд может быть напечатан на другой ленте или на чередующихся через одну клетках той же ленты.

Замечание 1. В этой главе, кроме настоящего замечания и мест, содержащих ссылку на него, мы будем считать, что имеем дело с функциями от $n \geqslant 1$ переменных. Так как мы не вводили представления n-ок натуральных чисел на ленте для $n = 0$, то мы будем говорить, что машина *вычисляет* функцию φ от 0 переменных, если она вычисляет функцию $\varphi(x)$ от 1 переменной, такую, что $\varphi(x) \simeq \varphi$. Для исходной функции ψ_i от 0 переменных нетождественное действие в состоянии q_c с табличным указанием iq_d должно совершаться каждый раз, когда на ленте представляется любой набор, состоящий из одного числа. Из этих определений вытекает, что коль скоро теоремы XXVIII — XXX доказаны для функций с числом переменных > 0, то они верны и для функций от 0 переменных.

§ 68. ВЫЧИСЛИМОСТЬ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема XXVIII. *Каждая частично-рекурсивная функция φ является 1/1-вычислимой. Каждая функция φ, частично-рекурсивная относительно l всюду определенных функций Ψ, является 1/1-вычислимой относительно Ψ.*

Доказательство, данное в конце этого параграфа, будет основано на следствии из теоремы XIX § 63 (для $l = 0$ и обще-рекурсивной φ — на следствии из теоремы IX § 58). Неформальное вычисление по схемам (I) — (VI) выполняется путем повторного применения небольшого числа простых операций, таких, как переписывание числа, написанного ранее (на определенном предыдущем месте), прибавление или вычитание единицы, выяснение того, равно данное число 0 или нет. Мы сперва построим некоторые машины, выполняющие операции указанного вида.

Введем сначала некоторые удобные здесь обозначения, в частности, изменим обозначения § 67.

Каждая клетка ленты должна теперь удовлетворять одному из двух условий s_0 и s_1, т. е. быть пустой или содержать напечатанный знак «|», или в других выражениях быть белой или черной. В рассуждениях этого параграфа будет удобно обозначать эти два условия как «0» и «1» соответственно.

Для указания воспринимаемого символа мы будем теперь обычно ставить над ним черту «¯», вместо состояния машины, как в § 67. Иногда рядом с чертой будет стоять маленькая цифра «^{1}» или «^{2}» для указания некоторого состояния машины (одного и того же при всех случаях встречи этой цифры), на которое мы хотим обратить внимание, не указывая при этом, каким из $q_0, \ldots, q_k$ оно является.

При описании элементарного действия мы теперь будем писать «P» («prints» — «печатает») в случае замены 0 на 1 (т. е. s_0 на s_1), «E» («erases» — «стирает») в случае замены 1 на 0 (т. е. s_1 на s_0) и не будем писать ничего в случае замены s_a на s_b при $a = b$. Мы будем опускать «C», использованное в § 67 для указания того, что воспринимаемая клетка остается прежней. Мы будем писать просто «0», «1», ..., «k» вместо состояний машины $q_0, \ldots, q_k$. Например, действие, которое записывалось как «s_1Cq_0» в § 67, теперь записывается как «$P0$», если первоначально символом, находящимся в «поле зрения», был s_0, и как «0», если первоначально таким символом был s_1.

В качестве дальнейшего примера мы снова рассмотрим таблицу для машины $\mathfrak{A}$ (пример 1 § 67) и операцию, которую она производит (указывая теперь только начальное и конечное положения).

Название машины	Состояние машины	Символ, находящийся в «поле зрения» 0	1
$\mathfrak{A}$	1	$P0$	$R1$

Отправляясь от начальной ситуации

$$\bar{1}\ 1\ 1\ 0,$$

машина $\mathfrak{A}$ приходит к заключительной ситуации

$$1\ 1\ 1\ \bar{1}.$$

Машина $\mathfrak{A}$ печатает на первой пустой клетке направо от находящейся в «поле зрения» или совпадающей с ней и останавливается на этой клетке.

В дальнейших примерах, предшествующих «доказательству теоремы XXVIII», никакая из клеток, лежащих левее или правее указанных, не находится в «поле зрения» ни при какой промежуточной ситуации за все время действия машины. Поэтому их условия не существенны.

Для каждой машины, построенной прежде «доказательства теоремы XXVIII», мы будем указывать самую левую клетку из воспринимаемых в какой-либо промежуточной ситуации в каждом случае, когда она окажется вне промежутка, образованного начальной и конечной воспринимаемыми клетками (относя эти клетки тоже к промежутку). Эти указания будут использованы для заключения, что машины, которые мы построим в доказательстве теоремы, удовлетворяют условию (ii) § 67.

В этом параграфе мы, как правило, рассматриваем ряд $y+1$ последовательных заполненных клеток, до и после которого имеется пустая клетка, как представляющий натуральное число y. Одна и та же пустая клетка может рассматриваться одновременно как последняя клетка в представлении одного числа и как первая в представлении другого. Это позволяет нам рассматривать любую совокупность знаков, напечатанных на ленте (бесконечной в обе стороны), как состоящую из конечной последовательности представлений натуральных чисел. Отрезок ленты, состоящий более чем из одной пустой клетки (например, $z+1$ клетки) и заключенный между двумя группами последовательно заполненных клеток, мы будем называть *промежутком* (из z клеток) между представленными числами. Пустую часть ленты до первой и после последней заполненной клетки мы тоже будем называть *промежутком* (из ∞ клеток). Как в § 67, m последовательных представлений натуральных чисел на ленте мы будем рассматривать как представляющие m-ку только в том случае, если между ними нет промежутков.

Аналогичные замечания относятся к ленте, бесконечной в одном направлении, при условии, что первая (самая левая) клетка пуста. Перед первым числом может быть, а может и не быть (конечного) промежутка.

Рассмотрим теперь проблему построения машины $\mathfrak{B}$, производящей следующую операцию. Если дано не самое левое число на ленте, машина передвигает его влево так, чтобы исчез промежуток между ним и предыдущим числом (если таковой имелся). Данное число должно быть воспринято в стандартном положении до и после операции. Самая левая клетка, воспринятая в какой-либо ситуации за все время действия машины, должна быть самой правой заполненной клеткой предыдущего числа.

Начнем с примера, на котором для некоторого плана механизации нашей операции мы покажем типичную начальную ситуацию (ситуация 1), некоторые, не обязательно последовательные, промежуточные ситуации (ситуации 2—16) и искомую заключительную ситуацию (ситуация 17). Объяснения и таблица машины, производящей нашу операцию согласно плану этой механизации, будут даны ниже. «$\mathfrak{B}_1$», «$\mathfrak{B}_2$», «$\mathfrak{B}_3$», «$\mathfrak{A}$» справа относятся к изложенному впоследствии анализу, представляющему эту машину в виде комбинации более простых машин.

1.	1	0	0	0	1	1	$\bar{1}$	0		
2.	1	0	0	0	1	$\bar{1}$	0	0		
3.	1	0	0	$\bar{0}$	1	1	0	0	$\mathfrak{B}_1$	
4.	1	0	$\bar{0}$	1	1	1	0	0		
5.	1	0	0	$\bar{1}^1$	1	1	0	0		$\mathfrak{B}_2$
6.	1	0	0	1	1	$\bar{1}$	0	0		
7.	1	0	0	1	$\bar{1}$	0	0	0		
8.	1	0	$\bar{0}$	1	1	0	0	0	$\mathfrak{B}_1$	
9.	1	$\bar{0}$	1	1	1	0	0	0		
10.	1	0	$\bar{1}^1$	1	1	0	0	0		$\mathfrak{B}_2$
11.	1	0	1	1	$\bar{1}$	0	0	0		
12.	1	0	1	$\bar{1}$	0	0	0	0		
13.	1	$\bar{0}$	1	1	0	0	0	0	$\mathfrak{B}_1$	
14.	$\bar{1}$	1	1	1	0	0	0	0		
15.	1	$\bar{1}^2$	1	1	0	0	0	0		$\mathfrak{B}_3$
16.	1	0	$\bar{1}$	1	0	0	0	0	$\mathfrak{A}$	
17.	1	0	1	1	$\bar{1}$	0	0	0		

Переход от ситуации 1 к ситуации 2 состоит в стирании находящегося в «поле зрения» символа 1 и сдвиге на один шаг влево. Затем (2—3) машина ищет первую пустую клетку влево от находящейся в «поле зрения» или совпадающую с ней. При переходе (3—4) она печатает на этой клетке и идет на одну клетку влево. При переходе (4—5) она обнаруживает (в этом примере), что находится на пустой клетке, и идет на один шаг вправо. При переходе (5—6) она идет к стандартному положению по числу, которое теперь находится в «поле зрения». В результате переход от ситуации 1 к ситуации 6 сдвигает число как целое на одну клетку влево. Затем (6—11) повторяется эта же операция. Такой же цикл шагов начинается снова (11—14), но оканчивается иначе (14—17) после того, как на самой левой из рассматриваемых клеток обнаруживается знак 1 вместо 0 (в ситуации 14).

Читатель может проверить, что машина, определенная следующей таблицей, будет выполнять операцию этого примера, проходя через ситуации 1—17 и другие промежуточные ситуации. Он может убедиться теперь (или после нижеследующего рассуждения) в том, что машина будет всегда выполнять описанную операцию, отправляясь от любой начальной ситуации описанного рода. Мы ставим тире «—» вместо указания элементарного действия на тех местах таблицы, где выбор требования того или иного действия является несущественным, по той причине, что рассматриваемая конфигурация не может встретиться при рассматриваемом употреблении машины, т. е. в случае, если машина отправляется от начальной ситуации описанного рода. Однако предполагается, что в определении машины эти места для полноты определения заполняются символом «0».

Название машины	Состояние машины	Воспринимаемый символ	
		0	1
$\mathfrak{B}$	1	—	$EL2$
	2	$PL3$	$L2$
	3	$R4$	$R5$
	4	$L1$	$R4$
	5	—	$ER6$
	6	$P0$	$R6$

При построении этой машины мы сначала разложили всю операцию, которую она должна совершать, на более простые (не обязательно элементарные) действия, а затем разложили эти последние на элементарные действия, которые должна совершать машина. Мы можем рассматривать нашу машину, как полученную путем соединения нескольких более простых машин, которые производят один или несколько последовательных шагов предварительного разложения. Введем теперь обозначения, которые будут полезны при описании машины как комбинации более простых машин.

Если две операции должны быть произведены последовательно и машина $\mathfrak{X}$ производит первую из них, а машина $\mathfrak{Y}$ — вторую, то составную операцию, которую должна производить машина, мы получим, отождествляя пассивное (или конечное) состояние $\mathfrak{X}$ с первым активным (или начальным) состоянием $\mathfrak{Y}$. Таким образом, результат $\mathfrak{X}$ становится входными данными для $\mathfrak{Y}$. Полученную машину мы обозначим через «$\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$». (При этом $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})\,\mathfrak{Z} = \mathfrak{X}\,(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})$.)

Мы употребляем «$\mathfrak{X}^n$» при $n > 0$ для обозначения $\mathfrak{X} \ldots \mathfrak{X}$ (n множителей), а «$\mathfrak{X}^0$» для обозначения машины, таблица которой содержит только предписания 0, так что $\mathfrak{X}^0\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y}\mathfrak{X}^0$ обе совершают ту же самую операцию, что и $\mathfrak{Y}$.

Нам понадобится также случай, когда заключительная ситуация машины $\mathfrak{X}$ становится начальной ситуацией машины $\mathfrak{Y}$ или машины $\mathfrak{Z}$, в зависимости от некоторого обстоятельства, относящегося к работе $\mathfrak{X}$. Мы можем добиться этого, обобщая наше понятие машины Тьюринга таким образом, чтобы допускались два заключительных состояния 0_1 и 0_2. Здесь такие *2-заключительные машины* будут употребляться только как компоненты в окончательном построении машин в смысле § 67 с одним заключительным состоянием. После отождествления состояния 0_1 машины $\mathfrak{X}$ с начальным состоянием $\mathfrak{Y}$ и состояния 0_2 машины $\mathfrak{X}$ с начальным состоянием $\mathfrak{Z}$ мы получим машину, которую будем обозначать через «$\mathfrak{X}\begin{Bmatrix}\mathfrak{Y}\\ \mathfrak{Z}\end{Bmatrix}$».

Выразим теперь машину $\mathfrak{B}$ в виде комбинации нескольких машин. Во-первых, мы определим машину $\mathfrak{B}_1$, которая производит операции, рассмотренные в 1 — 5, или в 6 — 10, или в 11 — 15, т. е. такую, что, отправляясь от некоторого числа, воспринятого в стандартном положении, она стирает на клетке, находящейся в «поле зрения», печатает на первой пустой клетке влево и воспринимает эту клетку, принимая состояние 0_1 или 0_2, смотря по тому, пуста или заполнена ближайшая клетка влево. Самая левая клетка, воспринятая на протяжении операции, есть клетка, ближайшая слева к находящейся в «поле зрения» в заключительной ситуации.

Эта машина имеет следующую таблицу (ср. строки 1—3 таблицы для машины $\mathfrak{B}$).

Название машины	Состояние машины	Воспринимаемый символ 0	1
$\mathfrak{B}_1$	1	—	$EL2$
	2	$PL3$	$L2$
	3	$R0_1$	$R0_2$

Операция, рассмотренная в 5—6 или в 10—11, выполняется машиной, имеющей таблицу (ср. строку 4 для машины $\mathfrak{B}$):

$\mathfrak{B}_2$	1	$L0$	$R1$

Для выполнения 15—16 аналогично имеем (ср. строку 5 для машины $\mathfrak{B}$):

$\mathfrak{B}_3$	1	—	$ER0$

Операция, имеющая место в 16—17, выполняется машиной $\mathfrak{A}$.

Работа машины $\mathfrak{B}$ может быть следующим образом описана в терминах $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$. Сначала используем $\mathfrak{B}_1$, затем в соответствии с тем, будет ли заключительное состояние 0_1 или 0_2, используем $\mathfrak{B}_2$ или $\mathfrak{B}_3$. В случае, если была использована $\mathfrak{B}_2$, ее результат подаем обратно в $\mathfrak{B}_1$. В случае, если была использована $\mathfrak{B}_3$, ее результат подаем в $\mathfrak{A}$. Мы выражаем это формулой

(a) $$\mathfrak{B} = \dot{\mathfrak{B}}_1 \begin{cases} \dot{\mathfrak{B}}_2 \\ \mathfrak{B}_3\mathfrak{A}, \end{cases}$$

где точки означают, что результат $\mathfrak{B}_2$ подается обратно в качестве входных данных для $\mathfrak{B}_1$. Это обозначение подсказано обозначениями для периодических десятичных дробей. Если операция, которую выполняет $\mathfrak{B}_1$, каждый раз дает результат с состоянием 0_1, то операция машины $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ будет повторяться до бесконечности. Это действительно случится, если машина $\mathfrak{B}$ отправится от самого левого числа на ленте, воспринятого в стандартном положении; она тогда будет все время передвигать это число влево, клетка за клеткой.

Формула (a) указывает, как построить таблицу для машины $\mathfrak{B}$ из таблиц для машин $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$. В таблице для $\mathfrak{B}_1$ мы заменяем заключительные состояния 0_1 и 0_2 начальными состояниями для $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$ соответственно, переименовывая их для этого в 4 и 5 и т. д. (ср. таблицу для $\mathfrak{B}$, приведенную выше).

Теперь мы построим машину $\mathfrak{J}_m$ (для каждого фиксированного $m \geqslant 1$), обладающую следующим свойством: если она отправляется от представления m-ки $y_1, \ldots, y_m$ чисел, воспринятой в стандартном положении, причем все клетки (или, по крайней мере, первые y_1+2 из них) вправо от этой m-ки пусты, то она повторяет y_1 вслед за этой m-кой без промежутка и останавливается, воспринимая это y_1 в стандартном положении. Самая левая клетка, воспринятая за время работы машины, есть первая (пустая) клетка данной m-ки.

Например, из показанной ниже начальной ситуации (ситуация 1) $\mathfrak{J}_4$ получит последнюю показанную ситуацию (ситуация 16). План действия указан промежуточными ситуациями.

1.	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	$\bar{1}$	0	0	0	0	0	$\mathfrak{C}$		
2.	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	$\bar{1}$	0	0	0			$\mathfrak{D}^4$
3.	0	1	1	$\bar{1}$	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	$\mathfrak{E}$		
4.	0	1	1	$\bar{1}^2$	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0		$\mathfrak{F}$	
5.	0	1	$\bar{1}$	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	$\mathfrak{G}^4$		
6.	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	$\bar{1}$	0	0	0		$\mathfrak{A}$	
7.	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	$\bar{1}$	0	0			$\mathfrak{D}^4$
8.	0	1	$\bar{1}$	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	$\mathfrak{E}$		
9.	0	1	$\bar{1}^2$	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0		$\mathfrak{F}$	
10.	0	$\bar{1}$	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	$\mathfrak{G}^4$		
11.	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	$\bar{1}$	0	0		$\mathfrak{A}$	
12.	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	$\bar{1}$	0			$\mathfrak{D}^4$
13.	0	$\bar{1}$	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	$\mathfrak{E}$		
14.	0	$\bar{1}^1$	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0		$\mathfrak{H}$	
15.	0	1	1	$\bar{1}$	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	$\mathfrak{G}^4$		
16.	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	$\bar{1}$	0			

Машина $\mathfrak{C}$, согласно этому плану, отправляясь от воспринятого в стандартном положении числа, за которым следует промежуток, идет на две клетки вправо, печатает и останавливается.

Машина $\mathfrak{D}$, отправляясь от воспринятого в стандартном положении числа, не самого левого на ленте, идет влево к стандартному положению ближайшего слева числа. Следовательно, $\mathfrak{D}^m$, отправляясь от воспринятого в стандартном положении числа, левее которого находится не менее чем m чисел, идет влево, проходя через $m-1$ промежуточное число к стандартному положению m-го числа слева.

Машина $\mathfrak{E}$, отправляясь от воспринятого в стандартном положении числа, узнает, равно это число 0 или больше 0, и принимает состояние 0_1 или 0_2 в зависимости от результата, оставляя это число все еще воспринятым в стандартном положении. Самая левая клетка, попадающая за время операции в «поле зрения», — это клетка, ближайшая слева от находящейся в «поле зрения». Машина $\mathfrak{F}$, отправляясь от находящейся в «поле зрения» заполненной клетки, стирает и идет на одну клетку влево.

Машина $\mathfrak{G}$ идет на одно число ($\mathfrak{G}^m$ на m чисел) вправо, так же как $\mathfrak{D}$ идет на одно число ($\mathfrak{D}^m$ на m чисел) влево.

Машина $\mathfrak{H}$, отправляясь от воспринятого в стандартном положении числа, не самого правого на ленте, заполняет промежуток (если таковой имеется) между этим числом и ближайшим справа, увеличивая первое число на число клеток, образующих промежуток, и останавливается, воспринимая в стандартном положении получающееся число.

Если мы сумеем построить описанные машины $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, то машина $\mathfrak{I}_m$ будет задаваться формулой

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{I}_m = \mathfrak{C}\dot{\mathfrak{D}}^m\mathfrak{E}\begin{cases}\mathfrak{H}\mathfrak{G}^m.\\ \mathfrak{F}\mathfrak{G}^m\dot{\mathfrak{A}}.\end{cases}$$

Операция, производимая машиной $\mathfrak{D}^m\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}^m\mathfrak{A}$, повторяется все время, пока применение операции $\mathfrak{E}$ дает состояние 0_2, но когда оно дает 0_1, работа заканчивается машиной $\mathfrak{H}\mathfrak{G}^m$. Мы приведем таблицы для $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$, предоставляя читателю построить таблицы для $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$.

Название машины	Состояние машины	Воспринимаемый символ 0	Воспринимаемый символ 1
$\mathfrak{D}$	1	$L2$	$L1$
	2	$L2$	0
$\mathfrak{E}$	1	—	$L2$
	2	$R0_1$	$R0_2$
$\mathfrak{H}$	1	—	$R2$
	2	$PR2$	$L3$
	3	—	$EL0$

Несколькими применениями $\mathfrak{J}_m$ с надлежащими значениями m мы можем воспроизвести без промежутков любую перестановку (может быть, с повторениями) чисел, представленных на ленте правее остальных, без промежутков между ними. Например, из начальной ситуации

$$0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$$

машина $\mathfrak{J}_4^4$ $(=(\mathfrak{J}_4)^4)$ получает заключительную ситуацию

$$0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0,$$

в которой копируется вся четверка, а $\mathfrak{J}_4\mathfrak{J}_2$ дает

$$0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ \bar{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0,$$

где копируются первое и четвертое числа.

Машина $\mathfrak{K}_m$, определенная следующим образом:

(c) $$\mathfrak{K}_m = \mathfrak{A}\mathfrak{J}_m^m\mathfrak{F}\mathfrak{D}^m\mathfrak{F}\mathfrak{G}^m,$$

отправляется от m-ки $y_1, \ldots, y_m$ в стандартном положении, причем все клетки (или, по крайней мере, первые $y_1 + \ldots + y_m + 2m + 1$ клеток), расположенные правее, пусты, копирует эту m-ку справа, оставляя промежуток в одну клетку, и останавливается, воспринимая полученную копию в стандартном положении. Самая левая клетка, воспринятая за время работы машины, есть первая (пустая) клетка данной m-ки. Например, из приведенной выше иачальной ситуации $\mathfrak{K}_4$ получает заключительную ситуацию

$$0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ \bar{1}\ 0.$$

Нам понадобится еще машина $\mathfrak{L}$, которая, отправляясь от числа, воспринятого в стандартном положении, стирает все числа (если таковые имеются) налево от данного до первого встреченного промежутка и возвращается к стандартному положению первоначально воспринятого числа. Самая левая клетка, воспринятая за время операции, — это предпоследняя справа в группе последовательных пустых клеток, образующих упомянутый промежуток. Например, из ситуации

$$0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ \bar{1}\ 0$$

машина $\mathfrak{L}$ получает заключительную ситуацию

$$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ \bar{1}\ 0.$$

Построение машины $\mathfrak{L}$ предоставляется читателю.

Доказательство теоремы XXVIII для $l=0$. Доказательство ведется по индукции, основанной на следствии из теоремы XIX § 63. Возможны шесть случаев, соответствующих тому, какая из схем (I)—(VI) применяется последней в данном определении φ по этим схемам. Для каждого случая мы должны показать, как построить машину $\mathfrak{M}_\varphi$, 1/1-вычисляющую φ.

Для описания начальной ситуации при вычислении $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для данной n-ки $x_1, \ldots, x_n$ мы теперь будем писать

1. $$, x_1, \ldots, \overline{x}_n, .$$

Здесь каждое «x_i» заменяет x_i+1 последовательных заполненных клеток, запятые стоят вместо пустых клеток, составляющих часть представления n-ки, а черта указывает, что представление x_n воспринято в стандартном положении. По определению 1/1-вычислимости (§ 67), все остальные клетки слева и справа также пусты. Заключительная ситуация, которой $\mathfrak{M}_\varphi$ должна достичь, если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определена, мы можем записать аналогично:

$$, x_1, \ldots, x_n, \overline{\varphi(x_1, \ldots, x_n)}, .$$

Первая запятая здесь и в сокращении для начальной ситуации (ситуация 1) относятся к одной и той же клетке на ленте,. и здесь опять все не указанные клетки пусты (в силу (iii) § 67). Отправляясь от ситуации 1, $\mathfrak{M}_\varphi$ остановится когда-либо только в том случае, если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определено (в силу (iv)). Из ситуации 1 машина $\mathfrak{M}_\varphi$ может итти произвольно далеко вправо, но клетка, находящаяся левее представленной здесь первой запятой, никогда не может оказаться в «поле зрения» (в силу (ii)).

Случай (I): (схема (I)): $\varphi(x)=x'$. Положим $\mathfrak{M}_\varphi=\mathfrak{J}_1\mathfrak{A}$.

Случай (II): $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=q$. Положим $\mathfrak{M}_\varphi=\mathfrak{C}\mathfrak{A}^q$.

Случай (III): $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=x_i$. Положим $\mathfrak{M}_\varphi=\mathfrak{J}_{n-i+1}$.

Случай (IV): $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=\psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$.

По индуктивному предположению, существуют машины $\mathfrak{M}_{\chi_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\chi_m}, \mathfrak{M}_\psi$, которые 1/1-вычисляют функции $\chi_1, \ldots, \chi_m, \psi$ соответственно. План вычисления $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ состоит в следующем. Отправляясь от ситуации 1, мы копируем n-ку $x_1, \ldots, x_n$ с одноклеточным промежутком (изображенным посредством двойной запятой):

2. $$, x_1, \ldots, x_n, , x_1, \ldots, \overline{x}_n, .$$

Промежутком отмечено начало временной записи, которая впоследствии будет стерта. Эту операцию копирования производит машина $\mathfrak{K}_n$. Машина $\mathfrak{M}_{\chi_1}$, отправляясь от ситуации $, x_1, \ldots, \overline{x}_n,$, придет к ситуации $, x_1, \ldots, x_n, \overline{\chi_1(x_1, \ldots, x_n)},$, коль скоро $\chi_1(x_1, \ldots, x_n)$ определено. Производя эту операцию, $\mathfrak{M}_{\chi_1}$ ни в какой промежуточной ситуации не будет воспринимать клетку, лежащую левее первой клетки в $, x_1, \ldots, \overline{x}_n,$. Поэтому, если $\mathfrak{M}_{\chi_1}$ отправляется от ситуации 2, то присутствие дополнительной записи $, x_1, \ldots, x_n,$ слева не повлияет на ее работу. Поэтому, в предположении, что $\chi_1(x_1, \ldots, x_n)$ определено, $\mathfrak{M}_{\chi_1}$ из ситуации 2 перейдет к следующей ситуации:

3. $$, x_1, \ldots, x_n, , x_1, \ldots, x_n, \overline{\chi_1(x_1, \ldots, x_n)}, .$$

Теперь, копируя без промежутка $x_1, \ldots, x_n$ при помощи машины $\mathfrak{J}^n_{n+1}$, получаем:

4. $$, x_1, \ldots, x_n, , x_1, \ldots, x_n, \chi_1(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, \overline{x}_n, .$$

Применяя $\mathfrak{M}_{\chi_2}$, если $\chi_2(x_1, \ldots, x_n)$ определено, мы получаем:

5. $$, x_1, \ldots, x_n, , x_1, \ldots, x_n, \chi_1(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n, \overline{\chi_2(x_1, \ldots, x_n)}, .$$

Продолжая таким же образом, мы в конце концов получим, в предположении, что все входящие значения функций определены, следующую ситуацию:

6. $\ ,x_1, \ldots, x_n, \ ,x_1, \ldots, x_n, \ \chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_1, \ldots, x_n, \ \chi_m(x_1, \ldots, x_n),$
$\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \ \chi_m(x_1, \ldots, x_n), \ \overline{\psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \ \chi_m(x_1, \ldots, x_n))}, \ .$

С помощью машины $\mathfrak{L}$ можно затем стереть любое число между воспринятым числом $\psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$ (не считая самого этого числа) и промежутком (представленным двойной запятой), после чего мы можем стянуть промежуток с помощью машины $\mathfrak{B}$ и получить

7. $\ ,x_1, \ldots, x_n, \ \overline{\psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \ \chi_m(x_1, \ldots, x_n))}, \ $, т. е.
$\ ,x_1, \ldots, x_n, \ \overline{\varphi(x_1, \ldots, x_n)}, \ .$

Вся операция, если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определено, производится машиной $\mathfrak{M}_\varphi$, определенной следующим образом:

$$\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{K}_n \mathfrak{M}_{\chi_1} \mathfrak{J}^n_{n+1} \mathfrak{M}_{\chi_2} \ldots \mathfrak{J}^n_{n+1} \mathfrak{M}_{\chi_m} \mathfrak{J}_{(m-1)(n+1)+1} \mathfrak{J}_{(m-2)(n+1)+2} \ldots$$
$$\ldots \mathfrak{J}_{1\cdot(n+1)+(m-1)} \mathfrak{J}_{0\cdot(n+1)+m} \mathfrak{M}_\psi \mathfrak{L} \mathfrak{B}.$$

Обратно, в виду свойства (iv) машин $\mathfrak{M}_{\chi_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\chi_m}$ и $\mathfrak{M}_\psi$, машина $\mathfrak{M}_\varphi$, примененная к ситуации 1, когда-либо остановится только в том случае, если все $\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n), \ \psi(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n))$ определены, т. е. если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определено.

Случай (V): При $n > 1$ (схема (V b)) $\varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi(y', x_2, \ldots, x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$. По индуктивному предположению, существуют машины $\mathfrak{M}_\psi$ и $\mathfrak{M}_\chi$, 1/1-вычисляющие функции ψ и χ соответственно. Мы произведем ряд операций, чтобы получить следующую ситуацию (соответствующую ситуации 6 для случая (IV)), в предположении, что все требуемые значения функций определены. В каждом месте, где указан выбор, верхний вариант применяется при указанном рядом условии, нижний — в остальных случаях, т. е. при данном y нижний вариант берется при первых y выборах, а верхний при $(y+1)$-м выборе.

$$,y, x_2, \ldots, x_n, \ ,y, x_2, \ldots, x_n, \ \psi(x_2, \ldots, x_n),$$

$$y, \begin{cases} \overline{\psi(x_2, \ldots, x_n)}, & \text{если } y = 0. \\ 0, \ \psi(x_2, \ldots, x_n), \ x_2, \ldots, x_n, \ \chi(0, \psi(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

$$y-1, \begin{cases} \overline{\chi(0, \psi(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)}, & \text{если } y-1=0. \\ 1, \ \chi(0, \ \psi(x_2, \ldots, x_n), \ x_2, \ldots, x_n), \ x_2, \ldots, x_n, \\ \chi(1, \chi(0, \psi(x_2, \ldots, x_n), \ x_2, \ldots, x_n), \ x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

$$y-2, \begin{cases} \overline{\chi(1, \chi(0, \psi(x_2, \ldots, x_n), \ x_2, \ldots, x_n), \ x_2, \ldots, x_n)}, & \text{если } y-2=0, \\ 2, \ldots . \end{cases}$$

Затем всё между последним числом и промежутком стирается, и промежуток стягивается. Вся операция выполняется машиной $\mathfrak{M}_\varphi$, определенной следующим образом:

$$\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{K}_n \mathfrak{M}_\psi \mathfrak{J}_{n+1} \mathfrak{E} \begin{cases} \mathfrak{J}_2 \mathfrak{L} \mathfrak{B}. \\ \mathfrak{C} \dot{\mathfrak{J}}_3 \mathfrak{J}^{n-1}_{n+3} \mathfrak{M}_\chi \mathfrak{J}_{n+3} \mathfrak{F} \mathfrak{E} \begin{cases} \mathfrak{J}_2 \mathfrak{L} \mathfrak{B}. \\ \mathfrak{J}_{n+3} \dot{\mathfrak{A}} \end{cases} \end{cases}$$

С незначительными изменениями изложенное распространяется и на случай $n = 1$ (схема (Va)).

Случай (VI): $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[\chi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$ (для $n \geqslant 1$; ср. замечание 1 в конце § 67). Рассматривается аналогично случаю (V) (но проще).

Доказательство теоремы XXVIII для $l > 0$. Мы имеем теперь дополнительный случай, заключающийся в том, что φ — одна из исходных функций Ψ, например ψ_i. В этом случае φ 1/1-вычисляется относительно Ψ машиной $\mathfrak{M}_\varphi$, имеющей единственное активное состояние q_1 с табличной записью iq_0.

§ 69. РЕКУРСИВНОСТЬ ВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы вернемся к обозначениям § 67.

Теорема XXIX. *Каждая вычислимая по Тьюрингу частичная функция φ частично-рекурсивна. Каждая частичная функция φ, вычислимая по Тьюрингу относительно l всюду определенных функций Ψ, частично-рекурсивна относительно Ψ.*

Доказательство для $l = 0$. Для данной машины $\mathfrak{M}$ можно формальными выражениями представить ситуации ленты и машины (и мы действительно проделаем это для другой цели в § 71, где выражения, о которых идет речь, будут называться «словами Поста»). После этого теорему можно рассматривать как применение метода D2 (§ 62), обобщенного на частичные функции; здесь $E_{x, j+1}$ зависит только от E_{xj}.

Если воспроизводить все детали, то более непосредственно приводит к цели следующее доказательство. Сопоставим гёделевские номера прямо ситуациям ленты и машины, а вместо гёделевских номеров выводов или доказательств (как в теореме IX § 58 и (D1) § 62) мы просто занумеруем последовательные ситуации, которые данная машина получает из данной ситуации, как 0-ю, 1-ю, ... z-ую, ... Тогда можно будет обойтись без гл. XII, если читать «функция» вместо «частичная функция» и «обще-рекурсивная» вместо «частично-рекурсивная». Доказательство можно слегка сократить с помощью теоремы XXVI § 66. Устанавливая гёделевскую нумерацию ситуаций, мы будем описывать условия ленты только относительно воспринимаемой клетки, а не относительно некоторой фиксированной клетки. Этого достаточно для рассматриваемой сейчас цели, потому что абсолютное положение на ленте не входит в определение вычислимости. (Для $1/s$-вычислимости абсолютное положение или, по крайней мере, положение относительно первой клетки представления $x_1, \ldots, x_n$ в начальной ситуации имеет значение, в силу (ii) и (iii).)

Мы сначала припишем гёделевский номер (условию) ленты левее любой конкретной клетки. Пусть условия последовательных клеток левее этой клетки будут $s_{u_0}, s_{u_1}, s_{u_2}, \ldots$. Так как только конечное число клеток заполнено, все индексы u_i, кроме конечного их числа, равны 0. Гёделевским номером u части ленты, расположенной левее нашей клетки, будет $\prod_i p_i^{u_i}$, т. е. $\prod_{i<t} p_i^{u_i}$, где t — произвольное число, превышающее любое i, для которого $u_i \neq 0$. Тогда само u является таким числом; так, $u = \prod_{i<u} p_i^{u_i} = \prod_{i<u} p_i^{(u)_i}$.

Аналогичным образом сопоставляется геделевское число условию той части ленты, которая лежит направо от данной клетки.

Если в данной ситуации гёделевский номер части ленты, лежащей налево от воспринимаемой клетки, есть u, воспринимаемый символ есть s_a, состояние машины есть q_c и гёделевский номер части ленты, лежащей направо от воспринимаемого символа, есть v, то в качестве гёделевского номера этой ситуации мы возьмем $2^u \cdot 3^a \cdot 5^c \cdot 7^v$.

Пример 1. Гёделевским номером ситуации

			q_4		
s_1	s_1	s_3	s_1	s_0	s_1

где все непоказанные клетки пусты, является $2^{5^1\cdot 3^1\cdot 2^3}\cdot 3^1\cdot 5^4\cdot 7^{2^0\cdot 3^1}$.

Если гёделевским номером ситуации является $2^u\cdot 3^a\cdot 5^c\cdot 7^v$, то конфигурацией служит (s_a, q_c). Если $c>0$ и действие, которое совершает машина в этой конфигурации, имеет вид $s_b Lq_d$, то гёделевский номер $\rho_{a,c}(u, v)$ получающейся ситуации есть

$$[2\exp\prod_{i<a} p_i^{(a)_{i'}}]\cdot 3^{(a)_0}\cdot 5^d\cdot [7\exp\{2^b\cdot\prod_{i<v} p_{i'}^{(v)_i}\}];$$

аналогично, если действие есть $s_b Rq_d$. Если действие есть $s_b Cq_d$, то $\rho_{a,c}(u, v)$ есть $2^u\cdot 3^b\cdot 5^d\cdot 7^v$. Каждая из этих функций $\rho_{a,c}$ примитивно-рекурсивна.

Теперь функция ρ, определенная следующим образом, примитивно-рекурсивна (#F § 45) и обладает тем свойством, что если w — гёделевский номер активной (пассивной) ситуации, то $\rho(w)$ — гёделевский номер следующей (той же самой) ситуации:

$$\rho(w)=\begin{cases}\rho_{a,c}((w)_0, (w)_3), & \text{если}\quad (w)_1=a\ \&\ (w)_2=c\\ & \qquad (a=0, \ldots, j;\ c=1, \ldots, k),\\ w \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Теперь мы определим примитивно-рекурсивную функцию θ таким образом:

$$\begin{cases}\theta(w, 0)=w,\\ \theta(w, z')=\rho(\theta(w, z)).\end{cases}$$

Если w — гёделевский номер любой ситуации, то $\theta(w, z)$ — гёделевский номер ситуации, которая получится после ближайших z шагов, если после данной ситуации машина совершит хотя бы z действий, и $\theta(w, z)$ — гёделевский номер заключительной ситуации, полученной из данной ситуации, если после данной ситуации машина совершит менее z действий.

Затем для каждого $n\geqslant 1$ (ср. замечание 1, конец § 67) мы определим примитивно-рекурсивную функцию τ_n со следующим свойством. Если n-ка $x_1, \ldots, x_n$ воспринята в стандартном положении, состояние есть q_c, гёделевский номер части ленты, расположенной левее представления $x_1, \ldots, x_n$, есть u и гёделевский номер части ленты, расположенной правее этого представления, есть v, то $\tau_n(x_1, \ldots, x_n, c, u, v)$ есть гёделевский номер ситуации. Сперва мы определим τ_1:

$$\tau_1(x_1, c, u, v)=[2\exp\{(\prod_{i<x_1} p_i^1\cdot p_{x_1}^0\cdot\prod_{i<u} p_{x_1'+i}^{(a)_i}\}]\cdot 3^1\cdot 5^c\cdot[7\exp\{2^0\cdot\prod_{i<v} p_{i'}^{(v)_i}\}].$$

Теперь для $n=1, 2, 3, \ldots$ положим

$$\tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, c, u, v)=\tau_1(x_{n+1}, c, (\tau_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n', c, u, v))_0, v).$$

Когда $x_1, \ldots, x_n$ воспринята в стандартном положении с состоянием q_1 и на остальных клетках лента пуста, то гёделевский номер ситуации есть $\tau_n(x_1, \ldots, x_n, 1, 1, 1)$. Когда $x_1, \ldots, x_n, x$ воспринята в стандартном положении с состоянием q_0, гёделевский номер ситуации есть $\tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x, 0, u, v)$ при некоторых u и v; и обратно.

Теперь, если φ — частичная функция от n переменных, вычислимая посредством данной машины $\mathfrak{M}$, а $x_1, \ldots, x_n$ — данная n-ка, то $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ определено тогда и только тогда, когда существует четверка (z, x, u, v) чисел, такая, что $\theta(\tau_n(x_1, \ldots, x_n, 1, 1, 1), z)=\tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x, 0, u, v)$, и в этом случае x есть значение $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq$$
$$\simeq (\mu t[\theta(\tau_n(x_1, \ldots, x_n, 1, 1, 1), (t)_0) = \tau_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, (t)_1, 0, (t)_2, (t)_3)])_1.$$

Следовательно, по теореме XVIII § 63, функция φ частично-рекурсивна (или — если φ всюду определена — по теореме III § 57, функция φ обще-рекурсивна).

Доказательство для $l > 0$. Пусть, например, имеется одна исходная функция ψ от одного переменного (т. е. $l = m_1 = 1$). Теперь для каждого c, для которого табличная запись, соответствующая q_c, имеет вид $1q_d$, мы заменим часть «$\rho_{a,c}((w)_0, (w)_3)$, если $(w)_1 = a \& (w)_2 = c$ $(a = 0, \ldots, j)$» в определении $\rho(w)$ на «$\rho_c(w)$, если $Q_c(w)$», где Q_c есть примитивно-рекурсивный предикат, а ρ_c — функция, примитивно-рекурсивная относительно ψ, определенные следующим образом:

$$Q_c(w) \equiv (Ey)_{y<w}(Eu)_{u<w}(Ev)_{v<w}[w = \tau_1(y, c, u, v)],$$
$$\rho_c(w) = \tau_2(Y, \psi(Y), d, U, V), \text{ где}$$
$$Y = \mu y_{y<w}(Eu)_{u<w}(Ev)_{v<w}[w = \tau_1(y, c, u, v)],$$
$$U = \mu u_{u<w}(Ey)_{y<w}(Ev)_{v<w}[w = \tau_1(y, c, u, v)] \text{ и т. д.}$$

Теорема XXX (= теоремы XXVIII + XXIX). *Следующие классы частичных функций равнообъемны, т. е. состоят из одних и тех же элементов:* (a) *частично-рекурсивные функции;* (b) *функции, вычислимые по Тьюрингу;* (c) 1/1-*вычислимые функции. Аналогично для набора Ψ, состоящего из l всюду определенных исходных функций.*

§ 70. ТЕЗИС ТЬЮРИНГА

Тезис Тьюринга, утверждающий, что каждая функция, вычислимая в естественном смысле, является вычислимой и согласно его определению, т. е. посредством некоторой его машины, по теореме XXX эквивалентен тезису Чёрча. Мы рассмотрим теперь те доводы в пользу этого тезиса, которые связаны с понятием машины, т. е. доводы, приведенные в § 62 в качестве (С). Мы должны теперь убедиться в том, что любые действия, которые может выполнить вычислитель-человек, могут быть разложены в последовательность элементарных действий некоторой машины Тьюринга.

«Поведение вычислителя в любой момент определяется символами, которые он наблюдает, и „состоянием его ума" в этот момент». Число символов, которые он может распознать, конечно. «Если бы мы допускали бесконечно много символов, то должны были бы существовать символы, отличающиеся сколь угодно мало друг от друга». (Тьюринг [1936—37, стр. 249—250].) Работа, приводящая от постановки проблемы к ответу, должна происходить в некотором «пространстве символов» (Пост [1936]), т. е. в некотором символическом расположении из ячеек или ящиков, в каждом из которых может иметься (вхождение) символа. Существует конечная граница для числа вхождений символов (или ящиков, в которые могут входить символы), которые вычислитель может рассмотреть за один раз. Он может также вспомнить ранее рассмотренные символы, изменяя состояние своего ума. Однако, «число состояний ума, которые должны быть приняты во внимание, конечно... Если бы мы допустили бесконечно много состояний ума, некоторые из них были бы „произвольно близки" и спутались бы». (Тьюринг [1936—37, стр. 250].) Но работа вычислителя должна приводить от некоторого вполне различимого (discrete) объекта, а именно, от ряда символов, представляющего некоторое натуральное число (или n-ку натуральных чисел) в качестве аргумента (аргументов), к другому объекту такого же рода—именно, ряду символов, представляющему соответствующее значение функции. Различные состояния ума фиксированы до появления конкретных рассуждений, поскольку мы рассматриваем вычисление согласно предписанному методу и не допускаем математического творчества по ходу вычислительной работы. Каждое производимое вычислителем действие должно заключаться в дискретном изменении конечной системы, состоящей из вхождений символов в пространство символов, распределения рассматриваемых клеток в этом пространстве и состояния его ума.

Эти ограничения в поведении вычислителя-человека при вычислении значения арифметической функции для данных аргументов, состоящие в следовании только предписанным правилам, сходны с ограничениями, входящими в конструкцию машины Тьюринга. Лента—это пространство символов для машины, а состояние машины соответствует состоянию ума вычислителя.

Вычислитель-человек менее ограничен в своих действиях чем машина, так как: (a) Он может рассматривать одновременно более чем одно вхождение символа. (b) Он может выполнить более сложное элементарное действие, чем машина. (c) Его пространство символов не обязательно должно быть одномерной лентой. (d) Он может выбрать символическое представление значений аргументов и функций, отличное от использованного в нашем определении вычислимости. Мы рассмотрим различные возможности типа (a)—(d) и покажем вкратце, как каждая из них может быть сведена к эквивалентной в терминах машин Тьюринга. Мы обычно будем говорить так, как будто надо свести только одну из них, но наши методы будут годиться и для последовательного сведéния любой их комбинации.

По поводу (a) заметим, что, например, 17, 21 и 100 могут быть рассмотрены в едином действии. Но длинный ряд символов может быть рассмотрен только в последовательности действий. Например, установить с одного взгляда, совпадают ли числа 157767733443477 и 157767733443477, мы не можем; «мы должны сравнивать оба числа цифра за цифрой, может быть, даже помечая цифры карандашом, чтобы наверное не засчитать ни одной из них за две». (Тьюринг [1936—37, стр. 251].)

Если 17, 21 и 100 не только рассматриваются как единицы, но и подвергаются такому же обращению, как если бы каждая из них занимала одну ячейку пространства символов, то достаточно переопределить символы так, что каждое из указанных чисел образует единый символ, чтобы свести составное рассмотрение к простому рассмотрению такого типа, как в машине Тьюринга.

В действительных вычислениях мы иногда пользуемся некоторыми пометками (ударение, пауза, подвижной физический указатель и т. д.), которые могут помещаться на данную клетку в дополнение к обыкновенному символу. Если имеется j обыкновенных символов и n таких специальных пометок, каждое подмножество которых может быть помещено на данную клетку, то надо просто увеличить число условий клетки с $j+1$ до $(j+1)\cdot 2^n$.

Рассмотрим другой пример поведения, включающего составное рассмотрение. Допустим, что напечатан следующий ряд символов:

...4401385789264...,

что в центре внимания наблюдателя находится цифра 7, близкая к середине, и что наблюдатель различает ясно не более пяти цифр, сгруппированных вокруг этой семерки; таким образом, ряд из пяти цифр 85789 вместе с состоянием ума вычислителя определяет следующее действие. Некоторые дальнейшие цифры могут быть смутно замечены, не влияя, однако, на действие. Действие пусть будет такого рода, что оно выполняется машиной Тьюринга, причем каждую клетку машины занимает вхождение некоторого отдельного символа (а не пятерки). Например, если следующее действие есть $0L\mathrm{q}_d$, запись принимает вид

...4401385089264...,

причем рассматривается 38508. Такое поведение можно свести к поведению машины Тьюринга следующим образом. Допустим, что символами служат десять арабских цифр. Описанное поведение можно рассматривать как поведение обобщенной машины Тьюринга, в которой конфигурация (определяющая действие) есть (e, f, a, g, h, q_c), где e, f, a, g, h—цифры, занимающие пять клеток, сгруппированных вокруг находящейся в «поле зрения». Для каждого состояния q_c этой обобщенной машины введем множество из 10^4 состояний q_{cefgh} $(e, f, g, h=0,\dots,9)$. Далее, мы изменим таблицу так, что коль скоро достигнуто состояние q_c, совершается ряд действий машины Тьюринга, состоящих в просмотре двух соседних клеток с каждой стороны, приводящий к состоянию q_{cefgh}, если четыре клетки, о которых идет речь, заняты соответственно цифрами e, f, g, h. Приходится добавлять не только состояния q_{cefgh}, но и некоторые другие, принимаемые в процессе перехода от q_c к q_{cefgh}. Детали предоставляем читателю. Теперь действие, которое обобщенная машина совершала в конфигурации (e, f, a, g, h, q_c), будет совершаться в конфигурации (a, q_{cefgh}). Это сведéние является иллюстрацией замечания, что можно вспомнить конечное число ранее рассмотренных символов, изменив состояние ума, в котором они рассматривались. Можно допустить, чтобы часть рассмотрения могла составлять запись на некоторых других клетках, например, запись на некоторых специально отмеченных клетках (в конечном числе). Если эти клетки расположены в пространстве символов так, что вычислитель может найти их и вернуться посредством действий, аналогичных производимым машинами Тьюринга (ср. рассуждение по поводу (c) ниже), этот вид составного рассмотрения таким же образом может быть сведен к предыдущему.

В случае (b) вычислитель может изменять другие клетки, помимо воспринимаемой. Новая воспринимаемая клетка не обязательно должна быть смежной с первоначальной. Однако имеется конечная граница сложности действия, если оно должно составлять единое действие вычислителя. Более сложные действия требуют повторного возбуждения посредством ссылок на рассмотренные данные и состояние ума в ситуациях, промежуточных между данной и получившейся. (В действительности можно показать, что действие машины Тьюринга уже составное и состоит психологически в напечатании и перемене состояния ума с последующим движением и новой переменой состояния ума. Таким образом, Пост [1947] разделяет действие Тьюринга на два; мы этого здесь не делали, прежде всего ради экономии места в записи таблиц машин.)

Все простые изменения ситуации, отличные по форме от принятых в машине Тьюринга, которые легко могут быть предложены, например, печатание после хода, а не до, легко выражаются в виде последовательности элементарных действий машины Тьюринга. (В § 68 мы уже рассматривали таким образом гораздо более сложные операции, которые едва ли можно рассматривать как единичные действия.)

Обратимся к пункту (c). Вычисления обычно производятся на двумерной бумаге, и двумерный характер бумаги иногда используется в элементарной арифметике. Теоретически мы должны также рассмотреть возможность и других видов пространства символов. Пространство символов должно обладать достаточно правильной структурой для того, чтобы вычислитель не заблудился в нем во время вычисления.

Должно иметься конечное число $m+1$ видов ходов («шагов») с данной клетки или ячейки пространства на ту же самую или соседнюю ячейку; эти ходы мы назовем $M_0, \dots, M_m$, где M_0—тождественный ход. Например, на плоскости, разделенной на квадратики, $m=4$ (неподвижно, влево, вверх, вправо, вниз) или, если допускаются также диагональные ходы, $m=8$. Вычислитель, действие которого в данной ситуации должно определяться тем, какая из конечного числа конфигураций налицо, не может произвести никакого другого хода. Без потери общности можно предположить, что имеется одно и то же число направлений хода из любой ячейки; в случае, если их для некоторых ячеек меньше, можно каждый оставшийся из возможных $m+1$ ходов считать в этом случае тождественным.

Число ячеек, которые в конечном счете могут быть достигнуты, оказывается поэтому счетным. Одна и та же ячейка может быть достигнута различными последовательностями ходов. Например, на плоскости ход вниз и затем ход вправо приводит к той же самой клетке, что и сначала ход вправо, а затем ход вниз. Мы допустим, что может быть дана нумерация без повторений для всех ячеек, так что имеет место следующее. Для каждого из видов ходов M_i $(i = 0, \ldots, m)$ имеется вычислимая функция μ_i такая, что если x есть номер данной ячейки в рассматриваемой нумерации, то номер ячейки, в которую приводит ход M_i, есть $\mu_i(x)$. Это допущение выполнено для любого из вводившихся до сих пор пространств символов.

Ячейке, имеющей номер x в этой нумерации $(x = 0, 1, 2, \ldots)$, поставим в соответствие x-ую клетку вправо от некоторой определенной клетки на линейной ленте (которую будем называть 0-й).

Пользуясь методами § 68, мы можем построить машину Тьюринга, которая будет находить $\mu_i(x)$-ую клетку, отправляясь от x-ой, если на 0-й (или -1-й) клетке постоянно имеется отличительная пометка. Вычисления, выполняемые для этой цели, могут производиться с помощью пометок, которые впоследствии будут стерты, причем за это время на них ничего не будет печататься. Это позволяет нам свести вычисление в данном пространстве символов к вычислению на линейной ленте машины Тьюринга. При этом сведении мы не предполагали, что из любой ячейки, соседней с данной, некоторый ход возвращает нас в данную клетку, т. е. что каждый ход в пространстве имеет обратный. Это имеет место в любом обычном пространстве символов. Исключение представляет вычислитель, принимающий время от времени сигналы на слух.

Пространство символов может состоять из нескольких разобщенных подпространств, в каждом из которых имеется своя воспринимаемая ячейка, как, например, в случае вычислителя, который одновременно глазами читает на бумаге символ, ощупью находит на ленте другой и получает на слух сигнал. Если имеется r таких подпространств, мы можем перестроить ячейки так, чтобы они были наборами из r ячеек, по одной в каждом из этих подпространств.

В отношении (d) можно показать, что натуральное число y дано в первоначальном смысле (§ 6) только в том случае, если дана некоторая конечная последовательность из $y+1$ объектов, например, $y+1$ знаков $|$. Поэтому процедура вычисления функции φ при данном значении аргумента (аргументов), когда оба выражены в других обозначениях, может решить проблему вычисления для φ только в том случае, если вычислитель может перейти от этих обозначений для числа y к последовательности $y+1$ знаков $|$ и наоборот. Заметим также, что, как правило, можно построить машину Тьюринга, которая по данному обозначению для y построит $y+1$ знаков $|$ и наоборот. Подробности могут быть рассмотрены, как в определении вычисления внутри одной системы обозначений. Так, для десятичной системы обозначений, первая машина, отправляясь от первой из следующих ситуаций, должна прийти ко второй:

		q_1															
	1	2															

																q_0	
	1	2		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Для обычных систем обозначений, например, для двоичной или десятичной, может быть доказано существование такой пары машин.

Мы защищали тезис Тьюринга для арифметических функций; но машина Тьюринга приложима столь же хорошо и к выражениям в любом языке [1]), имеющем конечный перечень символов. Используя их, как только что показано для случая преобразования одного обозначения натурального числа в другое, мы получаем непосредственный способ характеризации „эффективных“ операций над выражениями в таких языках, отличный от требования, чтобы соответствующая арифметическая функция в конкретной эффективной гёделевской нумерации была обще-рекурсивна или вычислима (§ 61). Этот метод распространяется и на языки, имеющие счетную совокупность символов, если только эти символы можно рассматривать эффективно как составляемые, в свою очередь, из символов некоторого конечного списка; таков, например, формальный арифметический символизм, в котором переменные $a, b, c, \ldots$ можно рассматривать как $a, a_|, a_{||}, \ldots$ (§§ 16, 50).

*§ 71. ПРОБЛЕМА ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ПОЛУГРУПП

Первоначальный пример Чёрча [1936] проблемы разрешимости, которая согласно его тезису оказывается неразрешимой, был построен в терминах λ-определимости. Соответствующий пример, приведенный выше (теорема XII § 60), построен в терминах общей рекурсивности (следуя Клини [1936, 1943]). Тьюринг [1936—37] построил примеры в терминах вычислительных машин. Это может быть сделано, например, следующим образом. Машина $\mathfrak{M}$ определяется своей таблицей, содержащей $(j+1)k$ данных. Мы можем построить гёделевскую нумерацию таблиц и, таким образом, машин. Тогда не вычислима функция ξ, определенная следующим образом: $\xi(x)=0$, если x есть гёделевский номер машины $\mathfrak{M}_x$, и частично-рекурсивная функция φ_x одного переменного, которую вычисляет $\mathfrak{M}_x$, принимает значение 1 для значения аргумента, равного x; $\xi(x)=1$ в противном случае. Таким образом, по тезису Тьюринга (или, в силу эквивалентности общей рекурсивности и вычислимости, по тезису Чёрча) не существует алгоритма для решения вопроса о том, является ли произвольно данное число x гёделевским номером машины, которая, отправляясь от x, воспринятого в стандартном положении на ленте, в остальном пустой, когда-либо остановится, воспринимая в стандартном положении $x, 1$. Другой пример: не существует алгоритма для решения вопроса о том, остановится ли когда-либо произвольно данная машина, пущенная от произвольно данной начальной ситуации. Действительно, если бы такой алгоритм был, то при любом данном числе x мы могли бы сперва решить, является ли x гёделевским номером машины $\mathfrak{M}_x$ и, если является, остановится ли $\mathfrak{M}_x$, будучи пущена от x, воспринятого в стандартном положении на ленте (в остальном пустой), и если да, то, наконец, воспринят ли в заключительной ситуации набор $x, 1$ в стандартном положении.

Эти первые примеры проблем разрешимости, неразрешимость которых была доказана, возникают в прямой связи с одним из математических поня-

[1]) Понимание термина «язык» здесь более широкое, нежели лингвистическое, и охватывает, в частности, различные формальные системы (см. § 15). Однако обычные языки — такие как русский, английский и т. д. — также включаются в это понимание; поэтому постольку, поскольку способы выражения мыслей на этих языках подчиняются четко сформулированным грамматическим правилам, машины Тьюринга могут быть использованы для перевода с одного языка на другой. Сходные принципы легли в основу осуществленных опытов по автоматическому переводу с одного языка на другой на реальных быстродействующих вычислительных машинах, многие существенные черты которых (машин) отражены в определении машины Тьюринга. — *Прим. ред.*

тий (λ-определимость, общая рекурсивность или вычислимость), первоначально отождествленных с эффективностью при помощи тезиса Чёрча—Тьюринга.

Другой класс примеров, стоящих несколько в стороне от предыдущих, образуют проблемы разрешимости для некоторых формальных систем (см., например, теорему 33 § 61, а также § 76, Чёрч [1936, стр. 363]).

Пост [1947] и Марков [1947] доказали неразрешимость проблемы разрешимости, представляющей интерес в качестве первого примера, в котором рассматривается проблема, возникшая не в области логики или оснований математики.

Проблему, неразрешимость которой доказана Постом и Марковым, поставил Туэ [1914]. Пусть дан конечный список $a_1, \ldots, a_m$ ($m \geqslant 1$) различных символов; будем называть их *буквами*, а список их — *алфавитом*. Конечные последовательности из нуля или более (вхождений) букв будем называть *словами* (в этом алфавите)[1]; на языке гл. IV (§ 16) слово есть просто формальное выражение, а $a_1, \ldots, a_m$—формальные символы, за исключением того, что пустое выражение мы теперь всегда включаем в рассмотрение. Слово C является *частью* другого слова D (или входит в слово D), если D имеет вид UCV, где U и V—слова (которые могут быть пусты).

Допустим, далее, что дан конечный список $(A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)$ ($n \geqslant 1$) пар слов; мы назовем этот список *словарем*. Мы будем говорить, что два слова R и S *непосредственно эквивалентны* (относительно данного словаря), если R и S имеют соответственно вид UA_iV и UB_iV или UB_iV и UA_iV для некоторых слов U и V и пары (A_i, B_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$; другими словами, если R преобразуемо в S заменой некоторой части A_i на соответствующее по словарю слово B_i, или наоборот. Мы будем называть два слова P и Q *эквивалентными* (относительно данного словаря), если имеется конечная последовательность слов $R_1, \ldots, R_l$ ($l \geqslant 1$), такая, что R_1 совпадает с P, R_l совпадает с Q, и R_{t-1} непосредственно эквивалентно R_t ($t = 2, \ldots, l$).

(Общая) проблема Туэ — найти алгоритм для решения, при произвольно данных алфавите и словаре, вопроса о том, являются ли два данных слова эквивалентными. Эта проблема известна также как *проблема эквивалентности слов*, или *проблема тождества для полугрупп*.

Теорема XXXI. *Проблема тождества для полугрупп неразрешима; более того, имеются такие конкретные алфавит и словарь, что не существует алгоритма для решения, эквивалентны ли (относительно этого словаря) два произвольных слова (в этом алфавите).* (Пост [1947], Марков [1947].)

Доказательство. Наш метод доказательства будет состоять в нахождении алфавита и словаря, таких, что если бы мы имели разрешающую процедуру для распознавания эквивалентности двух произвольных слов, то могли бы тогда получить разрешающую процедуру для распознавания истинности предиката $(Ey)T_1(x, x, y)$, в противоречие с теоремой XII § 60 (основанной на тезисе Чёрча). Неразрешимость проблемы Туэ для этого конкретного алфавита и словаря влечет, конечно, неразрешимость общей проблемы.

Теперь удобно рассматривать отношение эквивалентности между двумя словами как возможность формального вывода второго слова из первого посредством следующих $2n$ правил вывода ($i = 1, \ldots, n$):

$$\text{(a)}\ \frac{UA_iV}{UB_iV}, \qquad \text{(b)}\ \frac{UB_iV}{UA_iV},$$

где U и V — любые слова (возможно, пустые) в алфавите $a_1, \ldots, a_m$.

[1]) Слово, являющееся «последовательностью, составленной» из нуля букв, называется *пустым* и обозначается обычно Λ.—*Прим. ред.*

Мы изучим сначала *полусистемы Туэ*[1]), в которых допускаются только n правил вывода (a), но не их обращения (b).

Мы опишем метод, посредством которого для любой конкретной машины Тьюринга мы можем построить полусистему Туэ такую, что ситуации ленты, а также машины представляются словами этой полусистемы Туэ, а элементарные действия машины соответствуют применениям правил (a).

Алфавит этой полусистемы Туэ будет состоять из символов $s_0, \ldots, s_j$ (представляющих условия клетки для машины), $q_0, \ldots, q_k$ (представляющих состояния машины) и дополнительного символа h (всего $j+k+3$ буквы).

Допустим, что в данной ситуации ленты или машины наименьшая связная часть ленты, содержащая все заполненные клетки и клетку, находящуюся в «поле зрения», состоит из r клеток ($r \geqslant 1$). Пусть условия этих клеток слева направо будут $s_{g_1}, \ldots, s_{g_r}$. Пусть p-ая из этих клеток находится в «поле зрения» ($1 \leqslant p \leqslant r$). Пусть состояние машины есть q_c. Тогда данная ситуация будет представляться словом

$$hs_{g_1} \ldots s_{g_p} q_c s_{g_{p+1}} \ldots s_{g_r} h,$$

которое мы будем называть *словом Поста* для этой ситуации. (Какие слова являются словами Поста?)

Пример 1. Слово Поста для ситуации из примера 1 § 69 есть $hs_1s_1s_3s_1q_4s_0s_1h$.

n правил вывода (a) полусистемы Туэ будут содержать одно или более правил, соответствующих каждой из $(j+1)k$ активных конфигураций машины Тьюринга. Если табличное предписание для активной конфигурации (s_a, q_c) имеет вид s_bLq_d, где $b \neq 0$, то имеем $j+2$ соответствующих правил ($e=0, \ldots, j$):

$$\frac{Us_es_aq_cV}{Us_eq_ds_bV}, \qquad \frac{Uhs_aq_cV}{Uhs_0q_ds_bV};$$

если табличное предписание есть s_0Lq_d, то имеем $(j+2)^2$ следующих правил ($e, f=0, \ldots, j$):

$$\frac{Us_es_aq_cs_fV}{Us_eq_ds_0s_fV}, \quad \frac{Uhs_aq_cs_fV}{Uhs_0q_ds_0s_fV}, \quad \frac{Us_es_aq_chV}{Us_eq_dhV}, \quad \frac{Uhs_aq_chV}{Uhs_0q_dhV}.$$

Аналогично будем иметь $j+2$ правила, если табличное предписание имеет вид s_bRq_d, где $b \neq 0$, и $(j+2)^2$, если оно имеет вид s_0Rq_d. Если табличное предписание имеет вид s_bCq_d, то будет одно следующее правило:

$$\frac{Us_aq_cV}{Us_bq_dV}.$$

В этих n правилах все A_i различны. Если дано слово Поста для активной ситуации, то ровно одно из этих правил (a) приложимо к нему, взятому в качестве посылки, а именно, правило, соответствующее конфигурации (s_a, q_c) в этой ситуации, и только одним способом, т. е. только при одном выборе U и V. (Для правила, в котором первый символ A_i есть h, слово U всегда будет пустым.) Результатом применения правила является слово Поста для ситуации, получающейся после элементарного действия машины в данной ситуации. Если дано слово Поста для пассивной ситуации, то ни одно из этих n правил не применимо.

---

[1]) В подлиннике «semi-Thue systems», что следовало бы переводить «системы полу-Туэ». Во всяком случае мы не утверждаем, что эти полусистемы ввел в рассмотрение Туэ. — *Прим. перев.*

Следовательно, данное слово Q выводимо из данного слова Поста P в полусистеме Туэ тогда и только тогда, когда Q есть слово Поста для ситуации, которую машина Тьюринга рано или поздно получит из ситуации, представленной словом P[1]).

Частично-рекурсивная функция $0 \cdot \mu y T_1(x, x, y)$ определена и принимает значение 0 тогда и только тогда, когда $(Ey)T_1(x, x, y)$ (см. § 63). По теореме XXVIII, существует машина Тьюринга, которая 1/1-вычисляет $0 \cdot \mu y T_1(x, x, y)$. Построим полусистему Туэ, соответствующую этой машине. В этой полусистеме Туэ из слова Поста для ситуации, в которой число x восприннято в стандартном положении при состоянии q_1 и на остальных местах лента пуста (т. е. из слова Поста $hs_1 \ldots s_1 q_1 h$ с $x+1$ вхождением s_1), можно вывести слово Поста для ситуации, в которой пара x, 0 воспринята в стандартном положении при состоянии q_0 и лента на остальных местах пуста (т. е. слово Поста $hs_1 \ldots s_1 s_0 s_1 q_0 h$ с $x+1$ вхожденнем s_1 перед s_0), тогда и только тогда, когда $(Ey)T_1(x, x, y)$. Так как, по тезису Чёрча, не существует алгоритма для решения вопроса о том, имеет ли место $(Ey)T_1(x, x, y)$ (теорема XII), то не может существовать алгоритма для решения, для любых двух данных слов P и Q в построенной полусистеме Туэ, выводимо ли Q из P, т. е. следует ли Q из P по правилам (a).

Чтобы доказать теорему, остается распространить этот результат на полные системы Туэ, в которых допускаются обратные правила (b). Это достигается с помощью следующей леммы.

Лемма VII. *Для правил* (a), *соответствующих, как описано выше, данной машине Тьюринга, справедливо следующее утверждение: если* P *— слово Поста,* Q *выводимо из* P *посредством правил* (a) *и* (b) *и* Q *содержит* q_0, *то* Q *выводимо из* P *посредством одних только правил* (a).

Доказательство леммы VII — возвратной индукцией по длине l данного вывода Q из P посредством правил (a) и (b). Пусть этот вывод есть $R_1, \ldots, R_l$, где R_1 есть P и R_l есть Q. Случай $l=1$ тривиален, и мы допустим, что $l>1$. Так как P — слово Поста, а каждое из нравил (a) и (b) сохраняет это свойство, то каждое из $R_1, \ldots, R_l$ является словом Поста и, следовательно, содержнт ровно одно вхождение некоторого q, т. е. одного из $q_0, \ldots, q_k$. Далее, R_l, т. е. Q, содержит q_0; а так как правила (a), по определению, соответствуют активным конфигурациям машины Тьюринга, то каждое A_i содержит q_c для некоторого $c \neq 0$. Поэтому R_l должно получаться из R_{l-1} по одному из правил (a). Таким образом, если имеются применения правил (b) в данном выводе, то последнее применение произойдет при переходе от R_{t-1} к R_t для некоторого $t<l$.

[1]) Заметим, что из доказанного результата вытекает наличие нормального алгорифма для вычисления любой частично-рекурсивной функцни φ (см. Детловс [1953]). Действительно, образуем полусистему Туэ для машины Тьюринга, вычисляющей функцию φ и никогда не останавливающейся для тех значений аргументов, для которых φ не определена. При этом модифицируем определение машины Тьюринга, чтобы приспособить его к термннологин Детловса — а именно, будем считать, что система $x_1, \ldots, x_n$ представляется словом $D_{x_1} * D_{x_2} * \cdots * D_{x_n}$, где D_{x_i} состонт из x_i черточек «|» (в полуснстеме Туэ знакам «|» н «*» соответствуют s_1 н s_0) и что результат представлиется в виде $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, а не $x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (для этого заменяем данную машнну $\mathfrak{M}_\varphi$ на $\mathfrak{M}_\varphi \mathfrak{L}$, см. § 68, стр. 329 и 326). Переписываи (в любом поридке) правила (a) этой полусистемы в виде $A_i \to B_i$, получаем схему нормального алгорнфма $\mathfrak{A}_\varphi$. Остается снабднть эту схему предписаниями для перехода от представления системы $x_1, \ldots, x_n$ и $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ к соответствующим словам Поста и обратно — для чего достаточно, например, присоединить к $\mathfrak{A}_\varphi$ в конце следующие строчки в порядке их перечисления: $q_0 h \to t$, $s_1 t \to t s_1$, $s_0 t \to t s_0$, $ht \to \cdot$, $ks_1 \to s_1 k$, $ks_0 \to s_0 k$, $k \to q_1 h$, $\to hk$. Обратиое утверждение, т. е. частичнаи рекурсивность всякой «алгорифмической» функции, легко доказываетси методом арифметизации, как в § 69.—*Прим. перев.*

Тогда R_{i+1} получается из R_i с помощью одного из правил (a); но, кроме того, так как правила (b) обратны правилам (a), то R_{i-1} получается из R_i с помощью одного из правил (a). Однако R_i — слово Поста, а к любому такому слову приложимо не более чем одно из правил (a), притом не более чем одним способом. Поэтому R_{i-1} и R_{i+1} совпадают. Следовательно, мы можем укоротить данный вывод Q из P, опуская R_iR_{i+1}. Применяя индуктивное предположение к укороченному выводу Q из P с помощью правил (a) и (b), мы заключаем, что существует вывод Q из P с помощью одних только правил (a).

Легко видеть, что благодаря гёделевской нумерации проблема тождества для полугрупп эквивалентна некоторой проблеме о том, истинно ли $(Ey)R(x, y)$ для данного x, где R обще-рекурсивно. Так как наше доказательство теоремы XXXI состоит в сведении проблемы об истинности $(Ey)T_1(x, x, y)$ к проблеме тождества то проблема тождества для полугрупп имеет высшую степень неразрешимости среди проблем разрешимости для предикатов вида $(Ey)R(x, y)$ (ср. конец § 61 и пример 2 § 65)[1]).

Некоторые дальнейшие результаты в том же направлении, что и теорема XXXI, содержатся в статьях Маркова [1947, 1947a, 1947b, 1951, 1951a, 1951b]. Ср. также Холл [1949] и Бун [1951, резюме][2]).

Определение эквивалентности двух слов P и Q (обозначаемой $P \sim Q$), которым мы пользовались выше в проблеме тождества для полугрупп, может быть выражено индуктивно. Именно, (косвенный пункт) $P \sim Q$ только тогда, когда это вытекает из следующих прямых пунктов: 1. $A_i \sim B_i$ ($i = 1, \ldots, n$). 2. $U \sim U$. 3. Если $U \sim V$, то $V \sim U$. 4. Если $U \sim V$ и $V \sim W$, то $U \sim W$. 5—6. Если $U \sim V$, то $Ua_i \sim Va_i$ и $a_iU \sim a_iV$ ($i = 1, \ldots, m$). Тьюринг [1950*] показал, что неразрешима также *проблема тождества для полугрупп с зачеркиванием*, которую мы получим, добавляя следующие два прямых пункта 7—8: Если $Ua_i \sim Va_i$ или $a_iU \sim a_iV$, то $U \sim V$ ($i = 1, \ldots, m$)[3]).

---

[1]) Проблемы об отыскании тех или иных алгоритмов, встречающиеся в математике, обычно таковы, что с помощью гёделевской нумерации могут быть сформулированы как проблемы разрешимости предикатов вида $(Ey)R(x, y)$ с обще-рекурсивным R. Что же касается проблем разрешимости для предикатов указанного вида, то общий метод установления неразрешимости какой-либо конкретной проблемы такого рода состоит в сведении к этой проблеме заведомо неразрешимой проблемы разрешимости для предиката $(Ey)T_1(x, x, y)$. До результата А. А. Мучника [1956] не удавалось построить предикат вида $(Ey)R(x, y)$, где R — обще-рекурсивный предикат, проблема разрешимости которого была бы неразрешима и к которому не сводилась бы проблема разрешимости предиката $(Ey)T_1(x, x, y)$. Вопрос о существовании такого предиката составляет *проблему сводимости*, эквивалентная формулировка которой была дана в подстрочном примечании на стр. 281. Постом [1944] были построены специальные примеры предикатов вида $(Ey)R(x, y)$, неразрешимость проблем разрешимости которых устанавливается не сведением к ним проблем разрешимости предиката $(Ey)T_1(x, x, y)$, а искусственными методами. Однако для отдельных таких предикатов все же удалось доказать, что к их проблемам разрешимости сводится проблема разрешимости предиката $(Ey)T_1(x, x, y)$ (Пост [1944], Деккер [1954]). — *Прим. ред.*

[2]) См. также Марков [1952, 1954], Бун [1954—55], Цейтин [1956]. — *Прим. ред.*

[3]) Мы получим определение эквивалентности слов в *группе*, если заменим пункты 7—8 следующим условием: 7'. Для каждой буквы a_i существует в алфавите такая буква a_i^{-1}, что $a_ia_i^{-1} \sim a_i^{-1}a_i \sim \Lambda$. Проблема нахождения алгоритма, распознающего эквивалентность слов (иначе — проблема тождества) в теории групп считалась в течение последних десятилетий одной из важнейших алгебраических проблем. П. С. Новиков [1952, 1955] доказал неразрешимость этой проблемы, построив конкретную группу с неразрешимой проблемой тождества. Используя построенный П. С. Новиковым пример, С. И. Адян установил неразрешимость ряда проблем, связанных с группами [1955] и полугруппами [1955a]. Далее, используя лишь самый факт существования такого примера, Г. С. Цейтин [1956a] построил весьма простую полугруппу с неразрешимой проблемой тождества. — *Прим. ред.*

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

(дополнительные разделы)

Глава XIV

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ И СИСТЕМЫ АКСИОМ

§ 72. ГЁДЕЛЕВСКАЯ ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ

Возвращаемся к исчислению предикатов, изучение которого мы будем продолжать, отправляясь от результатов, полученных в § 37. Пусть F — предикатная формула, содержащая свободно только переменные $z_1, \ldots, z_q$ ($q \geqslant 0$), попарно различные, и содержащая только предикатные буквы $P_1, \ldots, P_s$ ($s \geqslant 1$), попарно различные. Мы будем говорить, что распределение объектов $z_1, \ldots, z_q$ из некоторой непустой области D в качестве значений $z_1, \ldots, z_q$ и логических функций $P_1, \ldots, P_s$ над D в качестве значений $P_1, \ldots, P_s$ *выполняет* формулу F (или является *выполняющим распределением* (*значений*) $z_1, \ldots, z_q, P_1, \ldots, P_s$ *для* F), если по правилам оценки, данным в §§ 28, 36 и 37, F при этих значениях $z_1, \ldots, z_q, P_1, \ldots, P_s$ принимает значение t. Как и в § 37, будем говорить, что F *выполнима* (*тождественна*) в некоторой непустой области D, если некоторое (каждое) распределение $z_1, \ldots, z_q$, $P_1, \ldots, P_s$ в D выполняет F. Что касается обозначений, то мы теперь будем записывать логические функции в виде «$P_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$», «$A(a, b)$» и т. д., а не в виде «$I_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$», «$I(a, b)$» и т. д., как мы делали в §§ 36, 37. В случае, когда областью служит натуральный ряд, логические функции — это просто арифметические предикаты, если мы не делаем различия между предложениями и значениями истинности t или f (ср. (b) § 45 и приведенные там замечания); поэтому мы будем иногда называть их предикатами.

Теорема 34[C]. *Если предикатная формула* F *неопровержима* (т. е. если $\neg$ F недоказуема, § 41) *в исчислении предикатов, то* F *выполнима в области натуральных чисел.* (Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов [1930].)

Видоизменения гёделевского доказательства имеются во втором издании книги Гильберта и Аккермана [1928] и у Гильберта и Бернайса [1939]. Хенкин [1949] дал доказательство, использующее минимальное количество сведений о дедуктивных свойствах исчисления предикатов[1]). Мы приводим доказательство, промежуточное в этом отношении между доказательствами Гильберта — Бернайса и Хенкина. Имеется также доказательство Расёвой и Сикорского [1950], использующее алгебру и топологию.

Доказательство теоремы 34 (предварительные замечания). По теореме 19 § 35, всякая предикатная формула F эквивалентна предваренной предикатной формуле, которая (как это видно из доказательства) имеет те же самые

---

[1]) Это доказательство впоследствии было упрощено Хенкином, а также Хазенъегером [1953]. — *Прим. перев.*

различные свободные переменные $z_1, \ldots, z_q$ и предикатные буквы $P_1, \ldots, P_s$, что и F. По теореме 21 § 37 и таблице оценок для $\sim$ из § 28 или в силу теоретико-множественного рассуждения, копирующего доказательство теоремы 19, произвольное распределение $z_1, \ldots, z_q$, $P_1, \ldots, P_s$ тогда и только тогда выполняет предваренную форму F, когда оно выполняет F.

В оставшейся части доказательства (включая леммы 22 и 23) мы будем считать, что F — предваренная формула. Например, предположим, что F есть $\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4$ B $(z_1, z_2, x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4)$, где B $(z_1, z_2, x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4)$ не содержит кванторов и содержит только указанные различные между собой переменные (так что $q=2$).

Вместо того чтобы говорить о значении, которое принимает предикатная формула A $(u_1, \ldots, u_p)$, когда ее свободные переменные и предикатные буквы $u_1, \ldots, u_p$, $P_1, \ldots, P_s$ принимают соответственно значения $u_1, \ldots, u_p$, $P_1, \ldots, P_s$, мы будем здесь для удобства исходить из такого символизма, в котором допускаются подстановки цифр вместо свободных переменных предикатных формул. Мы будем говорить при этом о значении, которое принимает A $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$ (где $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ — цифры для натуральных чисел $u_1, \ldots, u_p$), когда $P_1, \ldots, P_s$ принимают значения $P_1, \ldots, P_s$ (Здесь A $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$ — *предикатная формула с цифрами* в том смысле, который получается, если, расширяя понятие „предикатной k-формулы" из § 37, допускать в последнем в качестве термов все цифры, а не только $1, \ldots, k$ (и переменные). Предикатная формула с цифрами, не содержащая ни свободных, ни связанных переменных, называется *пропозициональной формулой с цифрами*.)

Мы можем тогда рассматривать проблему выбора логических функций $P_1, \ldots, P_s$ как проблему выбора значения (t или f) для каждой из формул $P_j(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n_j})$, где $j=1, \ldots, s$, а система $a_1, \ldots, a_{n_j}$ пробегает по всем наборам из n_j натуральных чисел. Занумеруем эти формулы каким-либо образом без повторений: $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$.

По правилам оценки для $\forall$ и $\exists$, распределение $z_1, z_2, P_1, \ldots, P_s$ выполняет F, если для каждого натурального числа x_1 найдется некоторое натуральное число y_1, зависящее от x_1 (обозначим его «$y_1(x_1)$»), такое, что для любых x_2 и x_3 найдется некоторое y_2, зависящее от x_1, x_2, x_3 (обозначим его «$y_2(x_1, x_2, x_3)$») и такое, что для каждого x_4

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{B}(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1(x_1), \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_2(x_1, x_2, x_3), \boldsymbol{x}_4)$$

(где $\boldsymbol{y}_1(x_1)$ — цифра для натурального числа $y_1(x_1)$ и т. д.) принимает значение t. В качестве $z_1, z_2, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2, x_3)$ выберем $2^0 \cdot 3^1, 2^0 \cdot 3^2, 2^1 \cdot 3^{x_1}, 2^2 \cdot 3^{x_1} \cdot 5^{x_2} \cdot 7^{x_3}$ соответственно. Таким образом, мы определяем бесконечный класс F_0 пропозициональных формул с цифрами (а именно, класс формул (I), когда x_1, x_2, x_3, x_4 пробегают все четверки натуральных чисел, а $z_1, z_2, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2, x_3)$ таковы, как только что определено), такой, что если $P_1, \ldots, P_s$ *совместно выполняют* эти формулы, т. е. дают им всем значение t, то $z_1, z_2, P_1, \ldots, P_s$ выполняют F.

Мы будем говорить, что класс формул *непротиворечив в* формальной системе S, если формальная система, полученная путем присоединения формул этого класса к постулатам S в качестве аксиом, просто непротиворечива (§ 28), т. е. если ни для какой формулы A обе формулы A и $\neg$A не оказываются выводимыми в S из формул этого класса.

Доказательство теоремы 34 сводится к доказательству лемм 22 и 23, которые относятся к любой предваренной предикатной формуле F и полученному из нее рассмотренным выше образом классу F_0.

Лемма 22°C. *Если* F_0 *непротиворечив в исчислении высказываний, то* F *выполнима в области натуральных чисел.*

Доказательство. В силу сказанного в предварительных замечаниях, достаточно показать, что формулы F_0 могут быть совместно выполнены по правилам оценки исчисления высказываний при некотором распределении значений истинности (t или f) каждого из $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$. (Посредством нашего метода это будет доказано для всякого непротиворечивого в исчислении высказываний класса формул F_0 и перечня $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ различных формул, элементарных в этом исчислении, содержащего все элементарные в исчислении высказываний компоненты F_0, § 25).

Пусть R_0 будет Q_0 или $\neg Q_0$ в зависимости от того, верно или неверно утверждение $\mathsf{F}_0 \vdash Q_0$ в исчислении высказываний (где «$\mathsf{F}_0 \vdash$» означает: выводима из формул F_0). Присоединив R_0 к F_0, получим новый класс F_1. Тогда F_1 также непротиворечив в исчислении высказываний. Действительно, в первом случае (т. е. когда $\mathsf{F}_0 \vdash Q_0$ и R_0 есть Q_0) присоединение R_0 не увеличивает класса формул, которые могут быть выведены. Во втором случае (т. е. когда $\overline{\mathsf{F}_0 \vdash Q_0}$ и R_0 есть $\neg Q_0$), если $\mathsf{F}_1 \vdash A$ и $\mathsf{F}_1 \vdash \neg A$ для некоторой A, то $\mathsf{F}_0, \neg Q_0 \vdash A$ и $\mathsf{F}_0, \neg Q_0 \vdash \neg A$, откуда, по $\neg$-введ. и удал., $\mathsf{F}_0 \vdash \neg\neg Q_0 \vdash Q_0$, что противоречит определению рассматриваемого случая.

Аналогично для каждого натурального числа i, пусть R_i будет Q_i или $\neg Q_i$ в зависимости от того, что имеет место: $\mathsf{F}_i \vdash Q_i$ или $\overline{\mathsf{F}_i \vdash Q_i}$. Присоединяя R_i к F_i, получаем F_{i+1}; непротиворечивость F_{i+1} следует из непротиворечивости F_i.

Припишем теперь каждому Q_i значение t или f, в зависимости от того, совпадает ли R_i с Q_i или с $\neg Q_i$.

При этом распределении значений не только $R_0, R_1, R_2, \ldots$, но и все формулы из F_0 принимают значения t. Действительно, пусть H — формула из F_0. Различные элементарные в исчислении высказываний части формулы H принадлежат перечню $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$; пусть это будут $Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_l}$. Рассмотрим формулу $H \& R_{i_1} \& \ldots \& R_{i_l}$; назовем ее «A». Пусть $i = 1 + \max(i_1, \ldots, i_l)$; тогда $\mathsf{F}_i \vdash A$, так как $H, R_{i_1}, \ldots, R_{i_l}$ все принадлежат F_i. Приписанные значения являются единственными для $R_{i_1}, \ldots, R_{i_l}$, при которых все они принимают значения t. Поэтому, если бы H при этом распределении не получала значения t, то A была бы тождественно ложной, а $\neg A$ — тождественно истинной (§ 28), значит, по теореме 10 § 29, $\neg A$ была бы доказуемой в исчислении высказываний, и подавно было бы $\mathsf{F}_i \vdash \neg A$, что вместе с $\mathsf{F}_i \vdash A$ противоречило бы непротиворечивости F_i.

Лемма 23. *Если* F *неопровержима в исчислении предикатов, то* F_0 *непротиворечив в исчислении высказываний.*

Доказательство. Заметим, что, в силу нашего выбора чисел z_1, z_2 и функций $y_1(x_1)$ и $y_2(x_1, x_2, x_3)$, справедливо следующее: (A) Числа z_1 и z_2, $y_1(x_1)$ для $x_1 = 0, 1, 2, \ldots$ и числа $y_2(x_1, x_2, x_3)$ для $x_1, x_2, x_3 = 0, 1, 2\ldots$ все различны. (B) Неравенства $x_1 < y_1(x_1)$ и $x_1, y_1(x_1), x_2, x_3 < y_2(x_1, x_2, x_3)$.

Чтобы показать от противного, что класс F_0 непротиворечив, допустим, что для некоторой A обе формулы A и $\neg A$ выводимы в исчислении высказываний (при употреблении предикатных формул с цифрами) из формул F_0. Тогда, в силу слабого $\neg$-удал., имеется вывод формулы $\mathcal{A} \& \neg\mathcal{A}$ из этих же формул, т. е. из конечного множества формул вида (I).

Пусть «$\overline{0}$», «$\overline{1}$», «$\overline{2}$», ... означают переменные, отличные друг от друга и от x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4, причем $\overline{z}_1$ есть z_1, а $\overline{z}_2$ есть z_2. Заменяя каждую цифру u всюду, где она входит в этот вывод не как часть другой цифры, на соответствующую переменную $\overline{u}$, мы получим вывод $\mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}$ из конечного множества формул вида $B(z_1, z_2, \overline{x}_1, \overline{y}_1(x_1), \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{y}_2(x_1, x_2, x_3), \overline{x}_4)$ в исчислении высказываний с предикатными буквами, и подавно — в чистом исчислении предикатов, причем все переменные остаются фиксированными. Далее, пользуясь $\forall$-удал. (и принимая во внимание, что x_4 отлична от остальных указанных переменных), получаем вывод $\mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}$ из формул вида

$$\forall x_4 B(z_1, z_2, \overline{x}_1, \overline{y}_1(x_1), \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{y}_2(x_1, x_2, x_3), x_4).$$

Итак, выписывая различные исходные формулы (пусть их имеется l), получаем

$$\begin{array}{ll} & \forall x_4 B(z_1, z_2, \overline{x_1^1}, \overline{y}_1(x_1^1), \overline{x_2^1}, \overline{x_3^1}, \overline{y}_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1), x_4), \\ (1) & \forall x_4 B(z_1, z_2, \overline{x_1^2}, \overline{y}_1(x_1^2), \overline{x_2^2}, \overline{x_3^2}, \overline{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2), x_4), \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \forall x_4 B(z_1, z_2, \overline{x_1^l}, \overline{y}_1(x_1^l), \overline{x_2^l}, \overline{x_3^l}, \overline{y}_2(x_1^l, x_2^l, x_3^l), x_4) \vdash \mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}. \end{array}$$

Формула $\mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}$ не содержит переменных. Переменные, которые входят свободно правее остальных в каждую из исходных формул в (1), это $\overline{y}_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1), \ldots, \overline{y}_2(x_1^l, x_2^l, x_3^l)$. Так как эти l исходных формул различны, т. е. x_1^j, x_2^j, x_3^j для $j = 1, \ldots, l$ — различные тройки натуральных чисел, то, в силу (A), эти l переменных отличны друг от друга, так же как и от z_1, z_2. В силу (B), можно выбрать одну из них, пусть это будет $\overline{y}_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, имеющую больший индекс (т. е. входящую в перечень $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots$ позже), чем любая из переменных, входящая свободно в (1) где-нибудь еще (т. е. не правее остальных), за исключением, может быть, z_1 или z_2, а потому также и отличную от этих переменных. В силу $\exists$-удал., за которым следует замена связанных переменных (* 74 § 33, следует принять во внимание, что y_2 отлична от остальных указанных переменных) и двух $\forall$-удалений (следует принять во внимание, что x_2, x_3 отличны друг от друга и от остальных указанных переменных),

$$\begin{array}{ll} & \forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4 B(z_1, z_2, \overline{x_1^1}, \overline{y}_1(x_1^1), x_2, x_3, y_2, x_4), \\ (2) & \forall x_4 B(z_1, z_2, \overline{x_1^2}, \overline{y}_1(x_1^2), \overline{x_2^2}, \overline{x_3^2}, \overline{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2), x_4), \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \forall x_4 B(z_1, z_2, \overline{x_1^l}, \overline{y}_1(x_1^l), \overline{x_2^l}, \overline{x_3^l}, \overline{y}_2(x_1^l, x_2^l, x_3^l), x_4) \vdash \mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}. \end{array}$$

Ни одна переменная не варьируется, потому что переменная $\overline{y}_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, $\exists$-удал. которой происходит, не входит ни в какую из остальных исходных формул (см. лемму 7b § 24).

Снова применяя (A), получаем, что переменные $\overline{y}_1(x_1^1)$, $\overline{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2), \ldots$, $\overline{y}_2(x_1^l, x_2^l, x_3^l)$, которые встречаются свободно правее остальных, отличны друг от друга, а также от z_1 и z_2. В силу (B), можно выбрать одну из них, которая имеет больший индекс, чем любая из переменных, встречающихся в (2) где-нибудь еще, за исключением z_1 и z_2, а потому должна отличаться от этих переменных. Такой переменной может явиться $\overline{y}_1(x_1^1)$ или, например, $\overline{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$. Если это есть $\overline{y}_1(x_1^1)$, то, по $\exists$-удал., *74 и $\forall$-удал., мы заменяем первую исходную формулу на $\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4 B(z_1, z_2, x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4)$, т. е. на F. Если же мы имеем дело с $\overline{y}_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, мы вместо этого заменяем вторую исходную формулу на $\forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 \forall x_4 B$ (z_1, z_2, $\overline{x_1^2}$, $\overline{y_1}(x_1^2)$, x_2, x_3, y_2, x_4), и если она дублирует первую (т. е. если $x_1^1 = x_1^2$), мы ее опускаем.

Далее продолжаем таким же образом. После каждого $\exists$-удал. (примененного к некоторому $\overline{y}$, встречающемуся в одной из исходных формул правее остальных переменных и отличному от всех остальных переменных, указанных в какой-либо из исходных формул) и *74 применяем $\forall$-удаление к тем $\overline{x}$, которые «не покрыты» этим $\exists$-удалением, и затем опускаем полученную исходную формулу, если она дублирует какую-нибудь другую, так что те $\overline{y}$, которые будут стоять правее остальных на следующей стадии, опять будут отличаться друг от друга. В конце концов мы получим просто

(3) $$F \vdash \mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}.$$

Из (3) посредством &-удал. и $\neg$-введ. получаем

(4) $$\vdash \neg F,$$

что противоречит условию леммы о неопровержимости F.

Следствие 1$^{\circ C}$. *Каждая предикатная формула* G, *тождественная в области натуральных чисел, доказуема в исчислении предикатов* (*и, следовательно*, в силу теоремы 21 § 37, *является тождественной во всякой непустой области*). (Другая форма теоремы Гёделя о полноте [1930].)

Доказательство. {G тождественна в области натуральных чисел}$\to$ {$\neg$ G не выполнима в этой области}$\to${$\neg$ G опровержима, т. е. $\neg\neg$ G доказуема в исчислении предикатов} [в силу теоремы 34, примененной к $\neg$ G в качестве F, и контрапозиции (см. *14 § 26)]$\to${G доказуема в нем же} [по $\neg$-удал.].

Следствие 2$^{\circ C}$. *Если предикатная формула* F *выполнима в некоторой (непустой) области, то* F *выполнима в области натуральных чисел.* (Теорема Лёвенгейма [1915], называемая также теоремой Лёвенгейма — Сколема.)

Доказательство. Применяем контрапозицию к следствию 1; или рассуждаем следующим образом: {F выполнима в некоторой области}$\to${$\neg$ F не тождественна в этой области}$\to${$\neg$ F недоказуема, т. е. F неопровержима, в исчислении предикатов} [в силу контрапозиции теоремы 21]$\to$ {F выполнима в области натуральных чисел} [по теореме 34].

Доказательство, которое дал для своей теоремы Лёвенгейм, а также более простое доказательство, данное Сколемом [1920], опирается на теоретико-множественную аксиому выбора (Цермело [1904, см. § 13]). Доказательство при помощи теоремы Гёделя в меньшей степени неконструктивно. Неинтуиционистский шаг (в нашем изложении) встречается в доказательстве леммы 22, когда мы допускаем, что $F_i \vdash Q_i$ или $\overline{F_i \vdash Q_i}$. Гильберт и Бернайс при помощи формализации той части их доказательства гёделевской теоремы полноты, которая содержит неконструктивный шаг, получают метаматематическую теорему полноты для исчисления предикатов ([1939, стр. 252—253]), которую мы формулируем ниже в виде теоремы 36.

Теорема 35$^{\circ C}$. *Выполняющие предикаты* $P_1, \ldots, P_s$ *для* F *в теореме* 34 *можно выбрать так, что* $P_j(a_1, \ldots, a_{n_j}) \equiv (Ex)(y) R_j(a_1, \ldots, a_{n_j}, x, y) \equiv (x)(Ey) S_j(a_1, \ldots, a_{n_j}, x, y)$, *где* R_j *и* S_j *примитивно-рекурсивны* ($j = 1, \ldots, s$).

Доказательство. В дальнейшем термин «рекурсивность» будет означать общую рекурсивность (хотя в действительности утверждения имеют силу и в смысле примитивной рекурсивности); при этом условии, в силу следствия из теоремы IV § 57, в заключении можно выбрать R_j и S_j примитивно-рекурсивными.

Предположим, что методами §§ 52 и 56 построена гёделевская нумерация для пропозиционоальных формул с цифрами. Тогда, если a и b — гёделевские номера формул A и B соответственно, то номер $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$ есть $\mu(a, b)$ и номер $\neg \mathrm{A}$ есть $\nu(a)$ для некоторых рекурсивных функций μ и ν. Пусть $H(a) \equiv \{a$ — гёделевский номер формулы, принадлежащей $\mathsf{F}_0\}$; тогда предикат H рекурсивен. Если надлежащим образом выбрать нумерацию Q_0, Q_1, $\mathrm{Q}_2, \ldots$, то рекурсивны и следующие две функции: $\varkappa(i) = \{$гёделевскому номеру $\mathrm{Q}_i\}$, $\alpha_j(a_1, \ldots, a_{n_j}) = \{$тому i, для которого $\mathrm{P}_j(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n_j})$ есть $\mathrm{Q}_i\}$.

По определению выполняющих предикатов P_j, данному в доказательстве леммы 22, если $\mathrm{P}_j(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n_j})$ есть Q_i, то $P_j(a_1, \ldots, a_{n_j}) \equiv \{\mathrm{R}_i$ есть $\mathrm{Q}_i\} \equiv \{\mathsf{F}_i \vdash \mathrm{Q}_i\}$. Пусть $F(i, a) \equiv \{a$ — гёделевский номер такой формулы A, что $\mathsf{F}_i \vdash \mathrm{A}\}$. Тогда

(a) $$P_j(a_1, \ldots, a_{n_j}) \equiv F(\alpha_j(a_1, \ldots, a_{n_j}),\ \varkappa(\alpha_j(a_1, \ldots, a_{n_j}))).$$

Исследуем теперь предикат $F(i, a)$.

Утверждение, что $\mathsf{F}_0 \vdash \mathrm{A}$ в исчислении высказываний означает, что A доказуема в формальной системе, которая получается путем присоединения формул F_0 в качестве аксиом к исчислению высказываний. Пусть $F_0(a) \equiv$ $\equiv \{a$ — гёделевский номер доказуемой формулы этой системы$\}$. Так как предикат H рекурсивен, то методами §§ 51, 52 (см. Dп 12) получаем: $F_0(a) \equiv (Ey) R(a, y)$ с (примитивно-) рекурсивным R. Иначе говоря, $F_0(a)$ выразим в экзистенциальной однокванторной форме части II теоремы V § 57.

Согласно определению F_{i+1} через F_i и в силу $\supset$-правил, $\{\mathsf{F}_{i+1} \vdash \mathrm{A}\} \equiv$ $\equiv \{\mathsf{F}_i, \mathrm{R}_i \vdash \mathrm{A}\} \equiv \{\mathsf{F}_i \vdash \mathrm{R}_i \supset \mathrm{A}\}$. Принимая во внимание определение разбором случаев для R_i, мы получаем отсюда

$$\begin{cases} F(0, a) \equiv F_0(a), \\ F(i', a) \equiv [F(i, \varkappa(i)) \,\&\, F(i, \mu(\varkappa(i), a))] \vee [\overline{F}(i, \varkappa(i)) \,\&\, F(i, \mu(\nu(\varkappa(i)), a))]. \end{cases}$$

Это показывает, что F рекурсивен относительно F_0; действительно, применяя #D § 45 и переходя от предикатов F и F_0 к их представляющим функциям φ и φ_0, мы получаем «гнездную рекурсию» (§ 55)

$$\begin{cases} \varphi(0, a) = \varphi_0(a), \\ \varphi(i', a) = \chi(\varphi(i, \varkappa(i)),\ \varphi(i, \mu(\varkappa(i), a)),\ \varphi(i, \mu(\nu(\varkappa(i)), a))), \end{cases}$$

где функции χ, $\varkappa$, μ и ν (примитивно-) рекурсивны. (В действительности, в силу результата Петер [1934], упомянутого в § 55, предикат F примитивно-рекурсивен относительно предиката F_0.)

В силу (a), предикат P_j рекурсивен относительно F, α_j, $\varkappa$, следовательно, ввиду рекурсивности α_j и $\varkappa$, относительно F и, наконец, относительно F_0, который выразим в экзистенциальной однокванторной форме. Поэтому, в силу одной теоремы Поста (теорема XI § 58), P_j выразим в обеих двукванторных формах теоремы V, что и требовалось доказать.

Теорема 36°. *Добавление к исчислению предикатов в качестве схемы аксиом недоказуемой предикатной формулы* G *вызывает* ω*-противоречивость* (§ 42) *арифметической системы, основанной на исчислении предикатов и постулатах группы* B (§ 19). (*А именно, при этом становится опроверг-*

жимой некоторая формула, выражающая истинное предложение вида $(y)D(y)$, где $D(y)$ — эффективно разрешимый предикат. (Теорема о полноте Гильберта — Бернайса [1939].)

Отметим частичную аналогию со следствием 2 теоремы 10 § 29 для исчисления высказываний.

Метод доказательства. Без потери общности можно считать G замкнутой, так что $q=0$ (см. конец § 32). Пусть F — предваренная форма формулы $\neg$G, так что, по теореме 19 и в силу *30 и *49,

(i) $\vdash \mathrm{G} \sim \neg \mathrm{F}$ в исчислении предикатов.

Так как G недоказуема, то, в силу (i), и $\neg$F недоказуема, т. е. F неопровержима.

Отсюда, по лемме 23 (доказательство которой было финитным),

(ii) F_0 непротиворечив в исчислении высказываний.

Непротиворечивость F_0 эквивалентна предложению о том, что $\overline{\mathrm{F}_0 \vdash \mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{A}}$. Если r — гёделевский номер $\mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{A}$, то $\overline{\mathrm{F}_0 \vdash \mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{A}} \equiv \overline{(Ey)} R(r, y) \equiv \equiv (y)\overline{R}(r, y)$ для примитивно-рекурсивного $R(a, y)$, использованного в доказательстве теоремы 35. Пусть $D(y) \equiv \overline{R}(r, y)$. Тогда $D(y)$ примитивно-рекурсивен и (ii) эквивалентно

(ii$_a$) $(y)D(y)$.

В силу следствия из теоремы 27 § 49, $D(y)$ нумерически выражается в арифметическом формализме некоторой формулой $\mathrm{D}(\mathrm{y})$. Поэтому, в силу (ii$_a$),

(iii) $(y)[\vdash \mathrm{D}(\mathbf{y})]$

в арифметическом формализме.

Согласно лемме 22, классически

(iv) $\{\mathrm{F}_0$ непротиворечив в исчислении высказываний$\} \rightarrow$
$\{\mathrm{F}$ выполняется некоторыми предикатами $P_1, \ldots, P_s\}$.

Посылка импликации (iv) может быть выражена в символизме арифметической системы посредством формулы $\forall \mathrm{y}\, \mathrm{D}(\mathrm{y})$. Заключение также может быть выражено в арифметическом символизме, если воспользоваться выражениями для $P_1, \ldots, P_s$, данными в теореме 35. Пусть $\mathrm{R}_j(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{n_j}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ нумерически выражает $R_j(a_1, \ldots, a_{n_j}, x, y)$. Тогда $\exists \mathrm{x} \forall \mathrm{y} \mathrm{R}_j(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{n_j}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ выражает $P_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$ в этом символизме. Предложение, что $P_1, \ldots, P_s$ выполняют F, выражается тогда формулой F*, которую мы получим из F, если подставим в нее формулы $\exists \mathrm{x} \forall \mathrm{y}\, \mathrm{R}_j(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{n_j}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ $(j=1, \ldots, s)$ вместо соответствующих предикатных букв $\mathrm{P}_j(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{n_j})$ (считая при этом, что связанные переменные выбраны надлежащим образом). А импликация (iv) выражается тогда формулой

$$\forall \mathrm{y} \mathrm{D}(\mathrm{y}) \supset \mathrm{F}^*.$$

Предположим теперь, что это содержательное классическое доказательство (iv) формализовано в классической арифметической системе в виде доказательства этой формулы. Тогда мы должны иметь

(v) $\vdash \forall \mathrm{y} \mathrm{D}(\mathrm{y}) \supset \mathrm{F}^*$

в этой системе. По контрапозиции (*12 § 26),

(vi) $\vdash \neg \mathrm{F}^* \supset \neg \forall \mathrm{y}\, \mathrm{D}(\mathrm{y})$.

Из (i) получаем путем подстановки (теорема 15 § 34)

(vii) $\vdash G^* \sim \neg F^*$.

С помощью (vii) и (vi) получаем

(viii) $\vdash G^* \supset \neg \forall y D(y)$.

В утверждениях (iii) и (viii) знак «$\vdash$» относится к нерасширенному арифметическому формализму. Если теперь к этой системе добавить G в качестве схемы аксиом, то G^* становится аксиомой (по этой новой схеме) и (так как (iii) и (viii) сохраняют силу) $D(y)$ для $y=0, 1, 2, \ldots$ и $\neg \forall y D(y)$ оказываются одновременно доказуемыми, т. е. расширенная система ω-противоречива. (При этом $\forall y D(y)$ оказывается опровержимой, хотя и выражает истинное предложение $(y) D(y)$.)

Мы не станем здесь тратить место на проведение формализации того содержательного доказательства, которым мы воспользовались при переходе от (iv) к (v), так же как мы не делали этого при переходе от (I) к (II) в доказательстве теоремы 30 § 42[1]).

Гильберт и Бернайс [1939, стр. 205 и след., особенно стр. 243—252] проводят формализацию соответствующей части их доказательства теоремы Гёделя о полноте в другой формальной системе (см. замечания об этой системе перед примером 9 § 74), откуда можно заключить, что теорема 36 сохраняет силу для нашей системы.

Теорема 37$^{\circ C}$. *Если счетный (бесконечный или конечный) класс предикатных формул $F_0, F_1, F_2, \ldots$ таков, что каждая конъюнкция конечного множества его формул неопровержима в исчислении предикатов, то все формулы этого класса совместно выполнимы в области натуральных чисел*, т. е. имеется выполняющее распределение натуральных чисел $z_0, z_1, z_2, \ldots$ в качестве значений различных переменных $z_0, z_1, z_2, \ldots$, которые входят свободно в формулы этого класса, и предикатов $P_0, P_1, P_2, \ldots$ в качестве значений различных предикатных букв $P_0, P_1, P_2, \ldots$, которые входят в эти формулы. Перечни $z_0, z_1, z_2, \ldots$ и $P_0, P_1, P_2, \ldots$ могут быть конечными или бесконечными. (Теорема Гёделя о полноте для бесконечного множества формул [1930].)

Доказательство. Пусть, например, для некоторого k формула F_k есть $\forall x_{k1} \exists y_{k1} \forall x_{k2} \forall x_{k3} \exists y_{k2} \forall x_{k4} B(z_{e_{k1}}, z_{e_{k2}}, x_{k1}, y_{k1}, x_{k2}, x_{k3}, y_{k2}, x_{k4})$. Тогда в качестве $z_{e_{k1}}, z_{e_{k2}}, y_{k1}(x_{k1}), y_{k2}(x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$ мы выберем $2^0 \cdot 3^{e_{k1}}$, $2^0 \cdot 3^{e_{k2}}$, $2^1 \cdot 3^k \cdot 5^{x_{k1}}$, $2^2 \cdot 3^k \cdot 5^{x_{k1}} \cdot 7^{x_{k2}} \cdot 11^{x_{k3}}$. Множеством F_0 будет сумма мвожеств $F_{00}, F_{10}, F_{20}, \ldots$, построенных как было указано.

Следствие 1$^{\circ C}$. *Если при каждом распределении значений в области натуральных чисел для свободных переменных и предикатных букв, входящих в формулы $G_0, G_1, G_2, \ldots$, хотя бы одна из этих формул принимает значение* t, *то некоторая дизъюнкция конечного числа этих формул доказуема в исчислении предикатов.*

Следствие 2$^{\circ C}$[2]). *Если $F_0, F_1, F_2, \ldots$ совместно выполнимы в некоторой непустой области (и даже если каждая конъюнкция конечного числа этих формул выполнима в зависящей от нее непустой области* (Гёдель [1930]), *то $F_0, F_1, F_2, \ldots$ совместно выполнимы в области натуральных чисел.* (Обобщение теоремы Лёвенгейма, Сколем [1920].)

[1]) См. добавление III. —*Прим. перев.*

[2]) В оригинале 2^C. —*Прим. перев.*

Доказательство следствия 2. {Каждая конъюнкция конечного числа $F_0, F_1, F_2, \ldots$ выполнима в зависящей от нее непустой области} $\rightarrow$ {отрицание каждой такой конъюнкции не является формулой, тождественной в каждой области} $\rightarrow$ {каждая такая конъюнкция неопровержима} (по теореме 21 § 37) $\rightarrow$ {$F_0, F_1, F_2, \ldots$ совместно выполнимы в области натуральных чисел} (по теореме).

Теорема 38$^{\circ C}$. *Пусть пересчет формул* $F_0, F_1, F_2, \ldots$ *теоремы* 37, *коль скоро он бесконечен, является эффективным. Тогда совместно выполняющие предикаты* $P_0, P_1, P_2, \ldots$ *могут быть выбраны так, что* $P_j(a_1, \ldots, a_{n_j}) \equiv (Ex)(y)R_j(a_1, \ldots, a_{n_j}, x, y) \equiv (x)(Ey)S_j(a_1, \ldots, a_{n_j}, x, y)$, *где* R_j *и* S_j *примитивно-рекурсивны* ($j = 0, 1, 2, \ldots$). Условие, что пересчет $F_0, F_1, F_2, \ldots$ является эффективным, можно сформулировать точно, требуя для надлежащей гёделевской нумерации, чтобы гёделевский номер формулы F_k был обще-рекурсивной функцией от k (см. § 61), или с помощью машин Тьюринга способом, упомянутым в конце § 70.

Доказательство. Теперь класс $\hat{a}H(a)$ (см. доказательство теоремы 35) рекурсивно-перечислим (но не обязательно рекурсивен). Однако, полагая $F_0(a) \equiv (En)F_0(a, n)$, где $F_0(a, n) \equiv \{a$ — гёделевский номер формулы, доказуемой в системе, полученной путем присоединения к исчислению высказываний первых n формул F_0 в качестве аксиом$\}$ и применяя (17) § 57 (или конец § 53), мы попрежнему получаем $F_0(a) \equiv (Ey)R(a, y)$ с рекурсивным R.

Значение теоремы Гёделя о полноте и теоремы Лёвенгейма (включая варианты, изложенные в § 73) явится предметом обсуждения в § 75, который можно прочесть и не читая отмеченного звездочкой § 74, при условии, что читатель примет на веру некоторые правдоподобные утверждения, основанные на § 74. В § 76 будет несколько более существенным образом использован § 74.

Если F выводима из G в исчислении предикатов с постулированным правилом подстановки (конец § 37), то F тождественна в каждой области, в которой тождественна G, а поэтому дедуктивно равные формулы тождественны в одних и тех же областях. Обратное верно для формул, в которые входят только нольместные и одноместные предикатные переменные, — и это доказывается при помощи теории, на которую мы сошлемся в § 76; но не в общем случае — см. Хазенъегер [1950].

§ 73. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ С РАВЕНСТВОМ

Рассмотрение равенства можно сочетать с исчислением предикатов, добавляя к постулатам следующую аксиому и схему аксиом, где x — переменная, A(x) — формула, а a и b — различные переменные, свободные для x в A(x):

22. $a = a$. 23. $a = b \supset (A(a) \supset A(b))$.

Для *чистого исчисления предикатов с равенством* слово „терм" будет означать переменную, а слово „формула" будет иметь смысл *предикатной формулы с равенством*[1]), который получается, если к определению „предикатной формулы" (§ 31) добавить прямой пункт, который утверждает, что

[1]) В подлиннике equality and predicate letter formula. Наш перевод не совсем удачен, потому что предикатная формула с равенством может и не содержать знака равенства, что следует иметь в виду в дальнейшем. — *Прим. перев.*

если $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{t}$ — термы, то $\mathfrak{s}=\mathfrak{t}$ — формула. Предикатную формулу с равенством, не содержащую никаких предикатных букв, кроме различных букв $P_1, \ldots, P_s$, мы будем называть *предикатной формулой*[1]), составленной из $=, P_1, \ldots, P_s$.

(А) Аксиому 22 (которая совпадает с формулой *100 § 38) и $a=b \supset (a=c \supset b=c)$ (аксиому 16 § 19, являющуюся теперь аксиомой по схеме 23) мы будем называть *открытыми аксиомами равенства для* $=$. Следующие n аксиом по схеме 23:

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b} \supset (P(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n) \supset P(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n))$$
$$(i=1, \ldots, n),$$

где P есть n-местная предикатная буква, а $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — $n+1$ различных переменных, мы будем называть *открытыми аксиомами равенства для* P. *Замкнутые аксиомы равенства* — это замыкания соответствующих открытых аксиом равенства (которым они дедуктивно равны, см. конец § 32). «Eq$(=, P_1, \ldots, P_s)$» означает конъюнкцию замкнутых аксиом равенства для $=, P_1, \ldots, P_s$.

Пример 1. Если $\mathcal{A}$ имеет два аргумента, то Eq$(=, \mathcal{A})$ есть формула

$$\forall a[a=a] \,\&\, \forall a \forall b \forall c[a=b \supset (a=c \supset b=c)] \,\&$$
$$\forall a \forall b \forall c[a=b \supset (\mathcal{A}(a, c) \supset \mathcal{A}(b, c))] \,\&\, \forall a \forall b \forall c\, [a=b \supset (\mathcal{A}(c, a) \supset \mathcal{A}(c, b))].$$

(B). Из аксиом равенства для $=$ (аксиомы 22 и 16) мы можем, как в § 38, вывести в исчислении предикатов рефлексивное (*100), симметричное (*101) и транзитивное (*102) свойства равенства и оба специальных свойства замены (*108, *109). Из любой аксиомы $\mathfrak{a}=\mathfrak{b} \supset (A(\mathfrak{a}) \supset A(\mathfrak{b}))$ по схеме 23, где $A(x)$ не содержит свободно ни $\mathfrak{a}$, ни $\mathfrak{b}$ (в частности, из формул *108, *109 или аксиомы равенства для предикатной буквы P) и *101 можно вывести $\mathfrak{a}=\mathfrak{b} \supset (A(\mathfrak{a}) \sim A(\mathfrak{b}))$ (как мы это делали в несколько иной форме при выводе *115 и *116 из *108, *109 и *101).

Здесь и в § 75, при рассмотрении класса предикатных формул с равенствами, содержащих предикатные буквы только из данного перечня, мы будем употреблять «Q» для обозначения некоторой индивидуальной двухместной предикатной буквы, не входящей в этот перечень. Для любой данной формулы «E» или «E$(=)$» из этого класса посредством «E^Q» или «E(Q)» мы будем обозначать предикатную формулу, полученную из данной путем одновременной замены каждой части вида $\mathfrak{s}=\mathfrak{t}$, где $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{t}$ — термы, на $Q(\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$.

Понятия k-тождественности и k-равенства (§ 36), а также выполнимости и тождественности в данной непустой области, распространяются на предикатные формулы с равенством путем соглашения, состоящего в том, что $a=b$ принимает в качестве значения $\mathfrak{t}$ ($\mathfrak{f}$), когда a и b принимают одинаковые (различные) значения из соответствующей области. Или, если мы сперва подставили цифры, то соглашение должно состоять в том, что $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ принимает значение $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$ в зависимости от того, справедливо $a=b$ или $a \neq b$. Таким образом, $z_1, \ldots, z_q, P_1, \ldots, P_s$ выполняют формулу F, составленную из букв $=, P_1, \ldots, P_s$, тогда и только тогда, когда $z_1, \ldots, z_q, Q, P_1, \ldots, P_s$ с. $Q(a, b) \equiv a=b$ выполняют F^Q.

В гёделевском обобщении его теоремы полноты на исчисление предикатов с равенством [1930] необходимо допустить возможность того, что

[1]) В подлиннике letter formular. — *Прим. перев.*

область конечна, потому что, например, $a \neq b \& \forall c (c = a \vee c = b)$ выполнима в области из двух, и только из двух предметов.

Теорема 39[°C]. *Теоремы* 20 (§ 36), 21^C (§ 37), $34^{\circ C}$ *и* $37^{\circ C}$ (§ 72) *и их следствия остаются в силе после замены слов «предикатная формула», «исчисление предикатов», «выполнима (тождественна, каждое распределение) в области натуральных чисел» на слова «предикатная формула с равенством», «исчисление предикатов с равенством», «выполнима (тождественна, каждое распределение) в области натуральных чисел или некоторой (и каждой, или) непустой конечной области» соответственно*[1]). (Перечисленные теоремы, обобщенные указанным образом, мы будем обозначать при помощи звездочки «*». Значки «°» и «C» должны применяться к теоремам со звездочками в тех же случаях, что и к соответствующим теоремам без звездочки.)

Доказательство. Теорема 34*. Пусть F — формула, составленная из $=, P_1, \ldots, P_s$, неопровержимая в исчислении предикатов с равенством. В силу (A), формула $\mathrm{Eq}(=, P_1, \ldots, P_s)$ доказуема в исчислении предикатов с равенством. Поэтому, в силу *45 § 27, формула $F \& \mathrm{Eq}(=, P_1, \ldots, P_s)$ неопровержима в исчислении предикатов с равенством, и подавно в исчислении предикатов (при употреблении предикатных формул равенством). Поэтому, в силу теоремы 15 § 34, формула $F^Q \& \mathrm{Eq}(Q, P_1, \ldots, P_s)$ неопровержима в чистом исчислении предикатов. Следовательно, по теореме 34, формула $F^Q \& \mathrm{Eq}(Q, P_1, \ldots, P_s)$ выполнима в области натуральных чисел. Доказательство завершается частью (а) следующей леммы.

Лемма 24^C. (а) *Если формула* $F^Q \& \mathrm{Eq}(Q, P_1, \ldots, P_s)$ *выполнима в данной непустой области* D, *то* F *выполнима в непустой области* D^* *той же или меньшей мощности.*

(b) *Если формула* $F_k^Q \& \mathrm{Eq}(Q, P_{k1}, \ldots, P_{ks_k})$, *где* $P_{k1}, \ldots, P_{ks_k}$ — *предикатные букеы формулы* F_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, *совместно выполнимы в непустой области* D, *то* $F_0, F_1, F_2, \ldots$ *совместно выполнимы в некоторой области* D^*, *такой, что* $0 < \overline{\overline{D^*}} \leqslant \overline{\overline{D}}$.

Доказательства. (а) Допустим, что имеется выполняющее распределение $z_1, \ldots, z_q, Q, P_1, \ldots, P_s$ для $F^Q \& \mathrm{Eq}(Q, P_1, \ldots, P_s)$. Тогда $Q, P_1, \ldots, P_s$ должны выполнять следующие формулы: (i) $\forall a Q(a, a)$, (ii) $\forall a \forall b [Q(a, b) \supset Q(b, a)]$, (iii) $\forall a \forall b \forall c [Q(a, b) \& Q(b, c) \supset Q(a, c)]$, (iv) $\forall [Q(a, b) \supset (P_j(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{n_j}) \sim P_j(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{n_j}))]$ $(j = 1, \ldots, s;\ i = 1, \ldots, n_j)$. В этом можно убедиться, переводя на язык теории множеств рассуждение, проведенное в (B) методами теории доказательств или замечая, что конъюнкция этих формул выводима в чистом исчислении предикатов из формулы $\mathrm{Eq}(Q, P_1, \ldots, P_s)$ (на самом деле она даже эквивалентна этой формуле) и применяя теорему 21 § 37 и таблицы оценок для $\&$ и $\supset$ (или $\sim$). (При доказательстве теоремы 34* этого шага можно избежать, пользуясь этой конъюнкцией вместо $\mathrm{Eq}(Q, P_1, \ldots, P_s)$.)

По виду (i) — (iii) и правилам оценки для $\forall$, $\supset$ и $\&$ мы убеждаемся в том, что удовлетворяющая им логическая функция $Q(a, b)$ должна быть рефлексивной, симметричной и транзитивной. (Отношение $Q(a, b)$ с этими

[1]) Например, для следствия 1 из теоремы 37 надо считать, что в условии речь идет о каждом распределении в области натуральных чисел и любой непустой конечной области. Описанная в теореме замена слов не распространяется на «k-тождественность» (в подлиннике k-identical, не сходное с valid). — *Прим. перев.*

тремя свойствами будем называть *отношением эквивалентности*.) Поэтому область D распадается на *классы эквивалентности* по отношению к Q, т. е. на попарно не пересекающиеся непустые классы такие, что любые два элемента a и b области D принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда $Q(a, b)$. Так как формулы (iv) выполнены, то значение $P_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$ при любом j ($j = 1, \ldots, s$) не меняется при замене любого из его аргументов на какой-нибудь другой из того же класса эквивалентности.

Возьмем теперь область классов эквивалентности в качестве новой области D^* (тогда $0 < \overline{\overline{D}}^* \leqslant \overline{\overline{D}}$); объекты $z_1^*, \ldots, z_q^*$ из D^* и логические функции $Q^*, P_1^*, \ldots, P_s^*$ над D^* определим следующим образом: z_j^* — это класс эквивалентности, которому принадлежит z_j, т. е. $z_j^* = \hat{b}Q(z_j, b)$, а $Q^*(a^*, b^*)$ ($P_j^*(a_1^*, \ldots, a^*_{n_j})$) принимает значение, которое принимает $Q(a, b)$ ($P_j(a_1, \ldots$ $\ldots, a_{n_j})$) при любых a и b, таких, что $a \in a^*$ и $b \in b^*$ (при любых $a_1 \in a_1^*, \ldots$ $\ldots, a_{n_j} \in a_{n_j}^*$). Тогда $z_1^*, \ldots, z_q^*, Q^*, P_1^*, \ldots, P_s^*$ выполняют в D^* любую формулу, которую $z_1, \ldots, z_q, Q, P_1, \ldots, P_s$ выполняют в D; в частности, они выполняют F^Q в D^*. Но $Q^*(a^*, b^*) \equiv a^* = b^*$. Следовательно, $z_1^*, \ldots, z_q^*$, $P_1^*, \ldots, P_s^*$ выполняют F в D^*.

Теорема 40$^{\circ C}$ (= теорема 38*). *Пусть одна из предикатных букв* $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots$, *входящих в* $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots$, *например* P_0, *двуместна. Если пересчет* $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots$, *коль скоро он бесконечен, является эффективным, то имеется область* D^* *и совместно выполняющие предикаты* $P_0^*, P_1^*, P_2^*, \ldots$ *для теоремы* 37*, *такие, что имеет место следующее предложение: Если* D^* *бесконечна и для надлежащего ее пересчета* $s_0, s_1, s_2, \ldots$ *справедлива эквивалентность* $P_0^*(s_a, s_b) \equiv a' = b$, *то*

$$P_j^*(s_{a_1}, \ldots, s_{a_{n_j}}) \equiv (Ex)(y)\, R_j^*(a_1, \ldots, a_{n_j}, x, y) \equiv (x)(Ey)\, S_j^*(a_1, \ldots, a_{n_j}, x, y),$$

где R_j^* *и* S_j^* *примитивно-рекурсивны* ($j = 1, 2, 3, \ldots$).

Доказательство. По теореме 38, для формул $\mathrm{F}_k^Q \,\&\, \mathrm{Eq}(\mathrm{Q}, \mathrm{P}_{k_1}, \ldots, \mathrm{P}_{ks_k})$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) можно выбрать совместно выполняющие предикаты Q, P_0, P_j, выразимые в обеих двукванторных формах теоремы V § 57, а следовательно, по теореме XI § 58, обще-рекурсивные относительно однокванторных предикатов.

По определению предикатов P_j^* в доказательстве леммы 24,

$$\begin{aligned}(1)\qquad P_j^*(s_{a_1}, \ldots, s_{a_{n_j}}) &\equiv (Ec_1) \ldots (Ec_{n_j})\,[c_1 \in s_{a_1} \,\&\, \ldots \,\&\, c_{n_j} \in s_{a_{n_j}} \,\&\\ &\& \,P_j(c_1, \ldots, c_{n_j})] \equiv (c_1) \ldots (c_{n_j})\,[c_1 \in s_{a_1} \,\&\, \ldots \,\&\, c_{n_j} \in s_{a_{n_j}} \rightarrow P_j(c_1, \ldots, c_{n_j})].\end{aligned}$$

Пусть z — некоторый элемент s_0 (которое непусто); тогда $s_0 = \hat{c}Q(z, c)$. По определению предиката P_0^*, утверждение $P_0(d, c)$ имеет место тогда и только тогда, когда $P_0^*(d^*, c^*)$, где d^* и c^* — классы эквивалентности, которым принадлежат d и c соответственно. Но по условию $P_0^*(s_a, s_b) \equiv$ $\equiv a' = b$. Поэтому, если $d \in s_a$, то $c \in s_{a'}$ тогда и только тогда, когда $P_0(d, c)$. Так как никакое s_a не пусто, то $(a)(Ed)[d \in s_a]$. Таким образом,

$$(2)\qquad \begin{cases} c \in s_0 \equiv Q(z, c), \\ c \in s_{a'} \equiv (Ed)\,[d \in s_a \,\&\, P_0(d, c)] \equiv (d)\,[d \in s_a \rightarrow P_0(d, c)]. \end{cases}$$

Применяя ко второй строке теорему VI* § 57 или XI* § 58, мы убеждаемся в том, что предикат $c \in s_a$ обще-рекурсивен относительно Q, P_0.

Более подробно: рассмотрим вторую строку из (2) в виде

$$H(c) \equiv (Ed)[K(d) \& P_0(d, c)] \equiv (d)[K(d) \to P_0(d, c)].$$

Пусть q, k, p, h, f — функциональные буквы, выражающие представляющие функции предикатов Q, K, P_0, H, $c \in s_a$ соответственно. По теореме VI* или XI*, $H(c)$ обще-рекурсивен (равномерно) относительно $K(d)$, $P_0(d, c)$, т. е. имеется (содержащая k, p, h) система равенств, рекурсивно определяющая (представляющую функцию предиката) $H(c)$ через (таковые для) $K(d)$, $P_0(d, c)$. По лемме VI § 65, можно ввести параметр и получить равенства E, рекурсивно определяющие $H(c, a)$ через $K(d, a)$, $P_0(d, c)$. Тогда E с тремя равенствами f(c, 0) = q (z, c), k (d, a) = f (d, a), f (c, a′) = = h (c, a) рекурсивно определяет $c \in s_a$ через Q, P_0, как это можно усмотреть с помощью индукции по a.

Так как Q, P_0, в свою очередь, обще-рекурсивны относительно 1-кванторных предикатов, то таково же $c \in s_a$; следовательно, по теореме XI, $c \in s_a$ выразим в обеих 2-кванторных формах.

Пользуясь $(Ex)(y)$-выражениями для $c \in s_a$ и $P_j(c_1, \ldots, c_{n_j})$ в среднем выражении (1), выносят кванторы вперед (с помощью содержательных аналогов *91 и *87 § 35) и сжимая их (по (17) § 57), мы получим для $P_j^*(s_{a_1}, \ldots, s_{a_{n_j}})$ некоторое $(Ex)(y)$-выражение. Аналогично можно получить $(x)(Ey)$-выражение, пользуясь вместо изложенного $(x)(Ey)$-выражением для $P_j(c_1, \ldots, c_{n_j})$ и правой частью (1) (и применяя *91, *96, *95, *87, *98, *97, (17), (18)).

Рассмотрим теперь *прикладные*[1]) *исчисления предикатов с равенством*, в которых термы и формулы построены с помощью логического символизма исчисления предикатов и тех или иных индивидуальных символов $e_1, \ldots, e_q$, функциональных символов $f_1, \ldots, f_r$ и предикатных символов =, $P_1, \ldots, P_s$ (но без помощи предикатных букв). Примером такого рода служат арифметические определения «терма» и «формулы» (§ 17) (где $q = 1$, $r = 3$, $s = 0$). Хотя обычно каждый функциональный или предикатный символ имеет $n \geqslant 1$ аргументов, мы теперь допускаем $n \geqslant 0$, так что индивидуальные символы можно рассматривать как функциональные, а пропозициональные — как предикатные. Мы будем обозначать, например, через «f (s, t)» терм, построенный путем помещения термов s и t на соответствующие аргументные места некоторого 2-местного функционального символа f, хотя в данной системе может быть принят и какой-нибудь другой способ комбинации символов, например, «f» может означать +, а «f (s, t)» может означать s + t.

Исчисление предикатов с равенством рассматривается подробно у Гильберта — Бернайса [1934, стр. 164 и след.].

Мы увидим (теорема 41 (b)), что в прикладном исчислении предикатов с равенством схему аксиом 23 можно заменить конечным числом отдельных аксиом, не изменяя этим понятий доказуемости и выводимости. Этой идеей мы уже воспользовались при составлении арифметической системы без схемы аксиом 23; в этом случае отдельные аксиомы, заменяющие схему 23, не появились среди постулатов, за исключением аксиом 16 и 17 — потому что остальные оказались выводимыми из других арифметических аксиом.

(C) Для прикладного исчисления в (A) следует читать «предикатный символ P, отличный от =» вместо «предикатная буква». *Открытыми аксио-*

---

[1]) В подлиннике applied. — *Прим. перев.*

мами равенства для n-местного функционального символа f служат n формул

$$a=b \supset f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$
$$(i=1, \ldots, n).$$

Они выводимы в исчислении предикатов из аксиомы 22 и аксиом, получающихся по схеме 23; например (при $n=2$), $a=b \supset f(a, c)=f(b, c)$ выводимо посредством *3 и $\supset$-удал. из формул $a=b \supset (f(a, c)= =f(a, c) \supset f(a, c)=f(b, c))$, которая является аксиомой по схеме 23, и $f(a, c)=f(a, c)$, которая выводима из аксиомы 22 путем подстановки. За исключением случая $=$, открытые аксиомы равенства для некоторого символа — это то, что прежде мы называли специальными свойствами замены (ср. теорему 23 § 38). Через «$\mathrm{Eq}(=, P_1, \ldots, P_s, f_1, \ldots, f_r)$» мы будем обозначать конъюнкцию замкнутых аксиом равенства для $=$, $P_1, \ldots, P_s, f_1, \ldots, f_r$.

(D) Если даны аксиомы равенства для $=$, $P_1, \ldots, P_s, f_1, \ldots, f_r$, то с помощью (B) и прежних методов доказательства можно получить теорему 24 и ее следствия для случая, когда заменяемая часть r не находится в области действия какой-нибудь предикатной буквы[1]) или предикатного или функционального символа, отличного от $=$, $P_1, \ldots, P_s, f_1, \ldots, f_r$.

(E). В любой системе, в которой при только что высказанном ограничении имеет место теорема 24, каждая аксиома, получающаяся по схеме 23 и содержащая только предикатные символы или буквы $=$, $P_1, \ldots, P_s$ и функциональные символы $f_1, \ldots, f_r$, доказуема. Действительно, применяя теорему 24 в условиях схемы 23, мы можем каждое вхождение a в A(a), которое получается путем подстановки вместо x в A(x), заменить на b и получить $a=b \vdash A(a) \sim A(b)$, причем ни одна переменная не варьируется. Стсюда, по *17a и $\supset$-введ., $\vdash a=b \supset (A(a) \supset A(b))$.

Теорема 41. (a) *В исчислении предикатов с равенством имеют место следующие свойства равенства: рефлексивность* (*100), *симметричность* (*101), *транзитивность* (*102) *и свойство замены* (*теорема* 24 *и ее следствия*).

(b) *В прикладном исчислении предикатов с равенством, предикатными и функциональными символами которого служат* $=$, $P_1, \ldots, P_s, f_1, \ldots, f_r$, $\Gamma \vdash E$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\Gamma, \mathrm{Eq}(=, P_1, \ldots, P_s, f_1, \ldots, f_r) \vdash E$ *в исчислении предикатов.*

(c) *В чистом исчислении предикатов с равенством, где* Γ, E — *формулы из* $=$, $P_1, \ldots, P_s$, $\Gamma \vdash E$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\Gamma, \mathrm{Eq}(=, P_1, \ldots, P_s) \vdash E$ *в исчислении предикатов.*

Доказательства. (a) В силу (A) — (D).

(b) В силу (A) — (E).

(c) Аналогично, если мы только предварительно исключим возможность того, что вывод $\Gamma \vdash E$ требует аксиом по схеме 23, содержащих предикатные буквы $P_{s+1}, \ldots, P_{s+t}$, отличные от $P_1, \ldots, P_s$. Данный вывод $\Gamma \vdash E$ — это вывод в исчислении предикатов формулы E из Γ, $a=a$ и аксиом по схеме 23. Методом замечания 1 § 34 из него можно получить вывод формулы E из Γ, $a=a$ и аксиом по схеме 23, содержащих только предикатные буквы $P_1, \ldots, P_s$.

Пример 2. Рассмотрим пятый пример обращения тезиса II § *60 для примитивно-рекурсивного предиката $R(x, y)$ (см. пример 1 § 60). Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ —

[1]) Упоминание о предикатных буквах в связи с прикладным исчислением предикатов с равенством кажется нам недосмотром.—*Прим. перев.*

примитивно-рекурсивное описание представляющей функции $\varphi\,(=\varphi_k)$ предиката R и пусть $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_k$ — различные функциональные символы (выражающие $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ соответственно). Пусть термы и формулы системы S построены с помощью логического символизма исчисления предикатов с индивидуальным символом 0, функциональными символами $'$, $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_k$ и предикатным символом $=$. Пусть S имеет постулаты исчисления предикатов, а в качестве отдельных аксиом — равенства, полученные путем перевода применений схем в описании $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ (как пример 1 § 44 дал после перевода пример 3 § 54, но с $l=0$), и открытые аксиомы равенства для $=$, $'$, $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_k$. Пусть $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ — формула $\exists \mathrm{y} \mathrm{f}_k(\boldsymbol{x}, \mathrm{y})=0$. Правило подстановки R1 из § 54 имеет место в S как выводимое правило (по § 23), и аналогично правило замены R2 (по теореме 41 (a) и (b)). Следовательно, если для некоторого y $R(x, y)$ истинно, т. е. $\varphi_k(x, y)=0$, то в S доказуема $\mathrm{f}_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$ и, по $\exists$-введ., $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$. Обратно, $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ доказуема в S только в том случае, если $(Ey)R(x, y)$, как будет показано в теореме 52 § 79.

*§ 74. ЭЛИМИНИРУЕМОСТЬ (УСТРАНИМОСТЬ) ОПИСАТЕЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

При содержательном построении математических теорий обычно на различных стадиях происходит расширение понятий и обозначений. При формализации такого построения на соответствующих стадиях приходится к имеющейся формальной системе S_1 добавлять новые правила образования и постулаты, в результате чего получается другая формальная система S_2. Таким образом, класс формул (доказуемых формул) из S_1 уже, чем класс формул (доказуемых формул) из S_2. Новые правила образования вводят новые формальные символы или обозначения, а новые постулаты предусматривают их дедуктивное употребление. Мы будем писать «$\vdash_1$» («$\vdash_2$») для обозначения отношения выводимости в S_1 (в S_2).

В таких случаях мы будем говорить, что новые обозначения или символы (с их постулатами) *элиминируемы* или *устранимы* (*из* S_2 *в* S_1), если имеется эффективный процесс, при помощи которого для любой данной формулы E из S_2 можно найти такую формулу E' из S_1, что:

(I) *Если* E — *формула из* S_1, *то* E' *есть* E.

(II) $\vdash_2 \mathrm{E} \sim \mathrm{E}'$.

(III) *Если* $\Gamma \vdash_2 \mathrm{E}$, *то* $\Gamma' \vdash_1 \mathrm{E}'$.

Здесь Γ' означает $\mathrm{D}_1', \ldots, \mathrm{D}_l'$, если Γ есть $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_l$. Условия (I) — (III) мы будем называть *отношениями устранимости*. (В примере 13 понадобятся небольшие изменения в этом определении «устранимости».)

Если имеют место отношения устранимости, то, далее,

(IV) $\Gamma \vdash_2 \mathrm{E}$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma' \vdash_1 \mathrm{E}'$.

(V) *Если* Γ, E — *формулы из* S_1, *то* $\Gamma \vdash_2 \mathrm{E}$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \vdash_1 \mathrm{E}$.

Доказательства. (IV) Действительно, обратно к (III): если $\Gamma' \vdash_1 \mathrm{E}'$, то и подавно $\Gamma' \vdash_2 \mathrm{E}'$; следовательно, в силу (II), $\Gamma \vdash_2 \mathrm{E}$.

(V) В силу отношения (I) и отношений (III) или (IV).

Таким образом, устранимое расширение S_1, приводящее к S_2, оказывается несущественным, потому что, в силу (V), оно не дает никакого расширения класса первоначальных формул, являющихся доказуемыми, тогда как, в силу (II), каждая новая формула эквивалентна в расширенной системе одной из первоначальных формул.

Пример 1. Устранимость явных определений. Изучая нашу формальную систему, мы рассматривали выражения $\sim$, 1, $<$, $\exists!\mathrm{x}$, x^2 и т. д. просто как сокращения, полезные при изложении метаматематики (см. конец § 17). Но можно было бы вместо этого считать, что эти выражения последовательно добавляются к формальному символизму. В этом случае мы каждый раз должны были бы добавлять новое правило образования (если A и B — *формулы*, то и $A \sim B$ *формула*; 1 есть *терм*; если s и t — *термы*, то $s < t$ — *формула*; если x — переменная, а A(x) — *формула*, то $\exists! x A(x)$ — *формула*; если s — *терм*, то и s^2 — *терм*; соответственно для прочих выражений) и определяющую аксиому или схему аксиом

$$(\{(A \sim B) \supset (A \supset B) \& (B \supset A)\} \& \{(A \supset B) \& (B \supset A) \supset (A \sim B)\}, \quad 1 = 0',$$
$$a < b \sim \exists c (c' + a = b), \quad \exists! x A(x) \sim \exists x [A(x) \& \forall y (A(y) \supset x = y)], \quad a^2 = a \cdot a$$

соответственно с надлежащими условиями для A, B, x, A(x), y). Эти добавленные правила образования и аксиомы устранимы, причем в качестве ′ служит операция, которую мы прежде рассматривали как восстановление сокращения. В общем случае это имеет место при следующих условиях (которые мы формулируем кратко). Определяющая аксиома или схема является эквивалентностью (или равенством). Система S_1 — это исчисление предикатов (исчисление предикатов с равенством), к которому, возможно, добавлены еще некоторые аксиомы и схемы аксиом. При доказательстве (II) используется теорема 14 § 33 (теорема 24 (b) § 38). Приходится воспользоваться обоими соглашениями о «постоянных сокращениях», см. конец § 33; первым из них пользуемся при рассмотрении случая правил 9 и 12 в доказательстве (III), а вторым — для схем аксиом 10 и 11, и можно принять еще дополнительное соглашение для фиксирования тех связанных переменных, которые для каждого E используются в E′. Для каждой дополнительной схемы аксиом из того, что A — аксиома S_2, по этой схеме следует, что A′ должна быть доказуемой в S_1,

Пример 2. Пусть S_2 — наша система классического исчисления предикатов с добавлением схемы аксиом 9а из леммы 11 § 24, которая, по *95 § 35, является в S_2 зависимой. (Аксиома, или схема аксиом, или несколько аксиом, или несколько схем аксиом являются *зависимыми* в формальной системе S, если эта аксиома или все эти аксиомы доказуемы в системе, которая получается из S путем исключения этой аксиомы, схемы аксиом (или этих аксиом, или схем) из числа постулатов.) Пусть S_1 — система, которая останется от S_2 после исключения &, V, ∃ и относящихся к ним постулатов. Тогда имеют место отношения устранимости, в которых ′ — это замена &, V и ∃ на их эквиваленты, согласно *60 и *61 § 27 и *83 § 35. (Рассматривая случай схемы аксиом 6 в доказательстве (III), допустим $A \supset C$, $B \supset C$, $\neg A \supset B$ и $\neg C$ и выведем, с помощью *12, как B, так и $\neg B$. Затем воспользуемся $\neg$-введ. и удал. и $\supset$-введ.).

Пример 3. В нашей арифметической системе $\vdash \neg A \sim A \supset 1 = 0$. Это дает нам возможность устранить $\neg$, если предварительно добавить (зависимые) постулаты 8′ (или 8I′) и 15′, где 8′ — это $((A \supset 1 = 0) \supset 1 = 0) \supset A$ и т. д. (Но 7′ содержится в 1b.)

При изучении первоначальной системы S_1 теоремы об устранимости можно рассматривать как новый вид выводимых правил (§ 20). Если нам надо установить доказуемость в S_1 некоторой формулы E, такая теорема позволяет нам вместо этого доказать E в надлежащей системе S_2, технически более оснащенной, чем S_1. Кроме того, согласно теореме об устранимости, любую формулу E не из S_1, которую можно доказать в S_2, можно рассматривать как сокращение некоторой доказуемой формулы E′ из S_1.

Из теоремы об устранимости следует, что простая непротиворечивость S_1 влечет таковую для S_2 (в силу (V), см. § 28) и что проблема разрешимости для S_2 сводится к таковой для S_1 (в силу (IV), см. § 30, конец § 61).

Пример 4. Неустранимость рекурсивного определения $\cdot$. Функциональный символ $\cdot$ с его рекурсивными равенствами (аксиомы 20 и 21) не устраним из формализма гл. IV, который мы обозначим через S_2. Действительно, согласно результату Пресбургера (начало § 42), остающаяся система S_1 просто непротиворечива, а ее проблема разрешимости разрешима. Если бы символ $\cdot$ был устраним, то же самое имело бы место для S_2, что противоречит теореме 33 § 61.

Устранимость описательных определений. При описательном определении объект f определяется как то w, для которого $F(w)$ (в символах $\iota w F(w)$), где F — предикат, о котором известно, что существует единственное w, такое, что $F(w)$ (в символах $(E!w)F(w)$). Если w — единственная независимая переменная в F, то $\iota w F(w)$ будет некоторым индивидуумом f. Если F зависит от n других индивидуальных переменных, то обозначим F через «$F(x_1, \ldots, x_n, w)$»; в этом случае $\iota w F(x_1, \ldots, x_n, w)$ будет некоторой функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$. Мы сведем первый случай ко второму, для чего условимся рассматривать индивидуум как функцию от 0 переменных (в соответствии с чем в этом параграфе „индивидуальный символ" будет рассматриваться как частный случай „функционального символа").

Логика описательных определений была рассмотрена Уайтхедом и Расселом ([1910]; стр. 30—32, 66—71, 173—186 по 2-му изданию 1925 г.).

Устранимость их была доказана Гильбертом и Бернайсом [1934, стр. 422 - 457]. Другое доказательство было указано Россером [1939]. Эти доказательства устанавливают устранимость ιw как формального оператора, присоединение которого к данному формализму делает возможным введение сразу всех описательных определений. Но с точки зрения обозначений проще пользоваться функциональными символами. Математики обычно при построении какой-нибудь теории вводят новые функциональные символы последовательно, по мере возникновения надобности в них. Мы установим устранимость функциональных символов, введенных именно таким образом. Достаточно рассмотреть однократное введение нового функционального символа.

Теорема 42. *Пусть S_1 имеет правила образования прикладного исчисления предикатов с равенством* (§ 73), *и пусть постулатами S_1 являются постулаты исчисления предикатов и некоторые дополнительные аксиомы и схемы аксиом такие, что аксиомы равенства для функциональных и предикатных символов S_1 доказуемы (или, просто, пусть S_1 — прикладное исчисление предикатов с равенством и, возможно, некоторыми дополнительными аксиомами и схемами аксиом).*

Пусть $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, w $(n \geqslant 0)$ - *различные переменные, а* $\mathrm{F}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ — *формула, которая содержит в качестве свободных только переменные* $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, w *и в которой* $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ *свободны для* w. *Предположим, что формула*

(i) $$\exists! \mathrm{w} \mathrm{F}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$$

доказуема в S_1.

Пусть S_2 получается из S_1 путем присоединения нового n-местного функционального символа f *и новой аксиомы*

(ii) $$\mathrm{F}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)).$$

Тогда новый функциональный символ f *и связанная с ним аксиома могут быть устранены, т. е. для некоторого эффективного соответствия'* (которое будет определено в доказательстве) *имеют место отношения* (I)—(III) (а следовательно, и (IV) и (V)) *при условии, что каждая дополнительная схема аксиом обладает тем свойством, что если* E—*получающаяся по ней аксиома системы* S_2, *то* E' *доказуема в* S_1.

Доказательство содержится в леммах 25—31. В силу теоремы 41(b), несущественно, является ли рассматриваемая логика исчислением предикатов или исчислением предикатов с равенством, если известно, что доказуемы аксиомы равенства для функциональных и предикатиых символов. Следовательно, это с самого начала безразлично для S_1. Это безразлично и для S_2, так как вскоре будет доказано (в лемме 27), что аксиомы равенства для нового функционального символа f доказуемы в S_2.

Лемма 25. *В исчислении предикатов с равенством, если* u, v *и* x — *различные переменные,* F(v), C(v), C(u, v), A, B, A(v), B(v) *и* A(x, v) — *формулы,* u *свободно для* v *в* F(v) *и* C(u, v), *формулы* A, B *и* F(u) [1]) *не содержат свободно* v *и формула* F(v) *не содержит свободно ни* u *ни* x, *то*:

*181. $\exists! vF(v) \vdash \exists v[F(v) \& C(v)] \sim \forall v[F(v) \supset C(v)]$.

*182. $\exists! vF(v),\ C(v) \vdash^{v} \exists v[F(v) \& C(v)]$.

*183. $\exists! vF(v) \vdash \exists u[F(u) \& C(u, u)] \sim \exists u[F(u) \& \exists v[F(v) \& C(u,v)]]$.

*184. $\exists! vF(v) \vdash \exists v[F(v) \& (A \supset B(v))] \sim A \supset \exists v[F(v) \& B(v)]$.

*185. $\exists! vF(v) \vdash \exists v[F(v) \& (A(v) \supset B)] \sim \exists v[F(v) \& A(v)] \supset B$.

*186. $\vdash \exists v[F(v) \& A \& B(v)] \sim A \& \exists v[F(v) \& B(v)]$.

*187. $\exists! vF(v) \vdash \exists v[F(v) \& (A \vee B(v))] \sim A \vee \exists v[F(v) \& B(v)]$.

*188. $\exists! vF(v) \vdash \exists v[F(v) \& \neg A(v)] \sim \neg \exists v[F(v) \& A(v)]$.

*189. $\exists! vF(v) \vdash \exists v[F(v) \& \forall x A(x,v)] \sim \forall x \exists v[F(v) \& A(x,v)]$.

*190. $\vdash \exists v[F(v) \& \exists x A(x,v)] \sim \exists x \exists v[F(v) \& A(x,v)]$.

(См. Нельсон [1947], лемма 23, стр. 347—348.)

Доказательства. *181. Допустим $\exists! vF(v)$, $F(v) \& C(v)$ (для $\exists$-удал.) и F(t), где t—новая переменная (для $\supset$-введ.). Тогда, согласно *172 § 41, v = t; и отсюда с помощью замены получаем C(t). Посредством $\supset$- и $\forall$-введ. и переименования связанных переменных получаем $\forall v[F(v) \supset C(v)]$. Так как $\forall$-введ. имело место по переменной t, то никакая переменная при этом не варьируется. Посредством $\exists$-удал. и $\supset$-введ. получаем $\exists v[F(v) \& C(v)] \supset \supset \forall v[F(v) \supset C(v)]$. Обратно, допустим $\exists! vF(v)$ и $\forall v[F(v) \supset C(v)]$. Из $\exists! vF(v)$ мы получаем $\exists vF(v)$. Подготавливая $\exists$-удал., допустим F(v).

*183. $\exists u[F(u) \& C(u, u)] \vdash \exists u[F(u) \& F(u) \& C(u,u)]$ (*37 § 27) $\vdash \exists u \exists v[F(u) \& F(v) \& C(u, v)]$ (*80 § 35) $\vdash \exists u[F(u) \& \exists v[F(v) \& C(u, v)]]$ (*91); F(u) не содержит свободно v по условию [2]). Обратное доказывается аналогично на основе *79 и с помощью *181, *4 § 26 (и *69 § 32) и т. д.

*184. $\exists! vF(v) \vdash \exists v[F(v) \& (A \supset B(v))] \sim \forall v[F(v) \supset (A \supset B(v))]$ (*181) $\sim \forall v[A \supset (F(v) \supset B(v))]$ (так как, в силу *3, $\vdash B \supset (A \supset C) \sim A \supset (B \supset C)$) $\sim A \supset \forall v[F(v) \supset B(v)]$ (*95) $\sim A \supset \exists v(F(v) \& B(v))$ (*181).

[1]) В оригинале отсутствует требование, чтобы F(u) не содержало свободно v. Без этого, однако, не проходит *183.—*Прим. перев.*

[2]) Эта фраза добавлена при переводе.—*Прим. перев.*

*187. $\exists ! vF(v) \vdash \exists vF(v) \vdash \exists v[F(v) \& (A \vee B(v))] \sim \exists v[(F(v) \& A) \vee$ $\vee (F(v) \& B(v))]$ (*35) $\sim (A \& \exists vF(v)) \vee \exists v[F(v) \& B(v)]$ (*88, *91 и *33) $\sim$ $\sim A \vee \exists v[F(v) \& B(v)]$ (*45)[1]).

*188. Применяем последовательно *181, *58b, *86.

Лемма 26. *В исчислении предикатов с аксиомами равенства для функциональных и предикатных символов из* S_1, *но при условии, что* f *присоединен к символизму (и подавно в исчислении предикатов с равенством), конъюнкция формул* (i) *и* (ii) *дедуктивно равна формуле*

(iii) $$f(x_1, \ldots, x_n) = w \sim F(x_1, \ldots, x_n, w).$$

Следовательно, (iii) *доказуема в* S_2.

Доказательство. Из (ii) и $f(x_1, \ldots, x_n) = w$ можно вывести $F(x_1, \ldots, x_n, w)$, пользуясь свойством замены для равенства, которое, согласно (D) § 73, основывается только на исчислении предикатов и аксиомах равенства для = и функциональных и предикатных символов из $F(x_1, \ldots, x_n, w)$. Из (i), (ii) и $F(x_1, \ldots, x_n, w)$ посредством *172 можно вывести $f(x_1, \ldots, x_n) = w$. Из (iii) можно вывести (i) с помощью *171 и (ii) путем подстановки $f(x_1, \ldots, x_n)$ вместо w в (iii) и при помощи аксиомы 22 § 73.

В оставшейся части доказательства теоремы 42 мы будем в связи с обозначением «$F(x_1, \ldots, x_n, w)$» пользоваться соглашением для постоянных сокращений (см. конец § 33), заключающимся в том, что для любых термов $t_1, \ldots, t_n$, s выражение «$F(t_1, \ldots, t_n, s)$» означает результат подстановки $t_1, \ldots, t_n$, s вместо $x_1, \ldots, x_n$, w в $F(x_1, \ldots, x_n, w)$ после произвольного законного переименования связанных переменных в $F(x_1, \ldots, x_n, w)$, в результате которого эта подстановка становится свободной.

Лемма 27. *В системе, о которой говорится в лемме* 26, *аксиомы равенства для* f *выводимы из* (iii). *Следовательно, они доказуемы в* S_2.

Если бы это было не так, то присоединение одной только формулы (ii) к аксиомам S_1 не дало бы возможности употреблять f в S_2 с должным эффектом (ср. теорему 41 (a) и (b)).

Доказательство. Например, при $n = 2$ (если писать a, c вместо x_1, x_2) можно следующим образом доказать $a = b \supset f(a, c) = f(b, c)$. Допустим $a = b$. По свойству замены, $F(a, c, f(b, c)) \sim F(b, c, f(b, c))$. Следовательно, в силу (iii), $f(a, c) = f(b, c) \sim f(b, c) = f(b, c)$, откуда (аксиома 22 и *18b) $f(a, c) = f(b, c)$.

Лемма 28. *Пусть* $t_1, \ldots, t_n$ — *термы,* v — *переменная, не входящая в* $t_1, \ldots, t_n$ *и* C(v) — *формула, в которой* $f(t_1, \ldots, t_n)$ *свободен для* v. *Тогда* $C(f(t_1, \ldots, t_n)) \sim \exists v[F(t_1, \ldots, t_n, v) \& C(v)]$ *выводима из* (iii) *в исчислении предикатов с равенством, а следовательно, она доказуема в* S_2.

Доказательство. Допустим $C(f(t_1, \ldots, t_n))$. Подставляя в (ii) (лемма 26), получим $F(t_1, \ldots, t_n, f(t_1, \ldots, t_n))$. Теперь воспользуемся &-, $\exists$- и $\supset$-введ. Обратно, допустим (для $\exists$-удал.) $F(t_1, \ldots, t_n, v) \& C(v)$. Применяя (iii), получим $f(t_1, \ldots, t_n) = v$. Произведя замену в C(v), получаем $C(f(t_1, \ldots, t_n))$.

Элементарной называется формула, не содержащая ни одного логического символа, т. е. в данном случае это предикатный символ с термами

[1]) Желая избежать нагромождения прямых скобок, автор допускает непоследовательность: в предпоследнем абзаце § 26 было решено писать пояснительные замечания «(*35)» и т. п. в прямых скобках.—*Прим. перев.*

в качестве аргументов. Терм или формулу из S_1, т. е. терм или формулу, не содержащую f, мы будем называть f-*несодержащим*(*ей*). Терм вида $f(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n$ — любые термы, мы будем называть f-*термом*, а если $t_1, \ldots, t_n$ — f-*несодержащие* термы, то мы будем говорить, что это *простой* f-терм. Вхождение терма в формулу является *связанным* (*свободным*), если оно встречается (не встречается) внутри области действия некоторого (никакого) квантора $\forall y$ или $\exists y$, где y — переменная из этого терма.

Пример 5. Пусть P и Q — предикатные символы, g — функциональный символ, отличный от f, а x и y — различные переменные. В следующей формуле второе вхождение f-терма связано, а остальные шесть свободны.

1. $$\forall x \{P(f(y), f(g(x))) \& Q(x,x)\} \supset$$
$$\supset P(f(y), f(g(f(y)))) \& Q(f(y), f(y)).$$

f-термы $f(y)$ и $f(g(x))$ просты, но $f(g(f(y)))$ не прост, потому что в нем сидит f-терм $f(y)$.

Лемма 29. *Можно эффективно сопоставить каждой формуле* E *из* S_2 *некоторую формулу* E′ *из* S_1 (которую мы будем называть *главной* f-*несодержащей формой формулы* E) *таким образом, что имеют место* (I) *и* (II), *не вводится и не исчезает никакая свободная переменная и сохраняются операторы исчисления предикатов, т. е.* $(A \supset B)'$ *есть* $A' \supset B'$, $(A \& B)'$ *есть* $A' \& B'$, $(A \vee B)'$ *есть* $A' \vee B'$, $(\neg A)'$ *есть* $\neg A'$, $(\forall x A(x))'$ *есть* $\forall x A'(x)$ (*где* $A'(x)$ *есть* $(A(x))'$) *и* $(\exists x A(x))'$ *есть* $\exists x A'(x)$.

Доказательство. В силу условия, что операторы сохраняются, E′ определяется рекурсией по числу g вхождений логических символов в E, если только в качестве базиса имеется определеиие формулы E′ для случая, когда E — элементарная формула. А это определение мы получим, пользуясь индукцией по числу q вхождений f-термов в E, следующим образом.

Если $g = q = 0$, то E′ есть E.

Если $g = 0$, а $q > 0$, мы выберем первое вхождение простого f-терма в E; пусть это будет вхождение $f(t_1, \ldots, t_n)$. Пусть v — переменная, которая не входит в E. Пусть C(v) получается из E путем замены рассматриваемого вхождения $f(t_1, \ldots, t_n)$ на v. Тогда E′ будет $\exists v [F(t_1, \ldots, t_n, v) \& C'(v)]$. (В силу *181, с равным успехом мы могли бы взять $\forall v [F(t_1, \ldots, t_n, v) \supset C'(v)]$.) Здесь имеется произвол в выборе связанной переменной v и способа, при помощи которого в $F(x_1, \ldots, x_n, w)$ меняются, в случае надобности, связанные переменные, чтобы подстановка $t_1, \ldots, t_n$, v вместо $x_1, \ldots, x_n$, w была свободна. Но различные законные выборы приводят к конгруэнтным формулам (§ 33). Можно принять какое-нибудь соглашение для фиксации формулы E′. Но в наших рассуждениях достаточно будет рассматривать E′ с точностью до конгруэнтности. Заметим, что C(v) элементарна и содержит ровно $q-1$ вхождений f-термов.

Указанные в лемме свойства символа ′ доказываются соответствующей индукцией по g (с применением теоремы 14 § 33 для (II)), причем в базисе используется индукция по q (с применением леммы 28).

Достаточно подробным сокращением для $\exists v [F(t_1, \ldots, t_n, v) \& C(v)]$ будет «$F_v^{t_1, \ldots, t_n} C(v)$».

Пример 5 (продолжение). Формула 1 следующим образом приводится (с точностью до конгруэнтности) к своей главной f-несодержащей форме.

2. $$\forall x \{F^y_{v_2} P(v_2, f(g(x))) \& Q(x, x)\} \supset$$
$$\supset F^y_{v_2} P(v_2, f(g(f(y)))) \& F^y_{v_{12}} Q(v_{12}, f(y)).$$

$$3. \qquad \forall x\{F^y_{v_2}F^{g(x)}_{v_3}P(v_2, v_3) \& Q(x, x)\} \supset$$
$$\supset F^y_{v_2}F^y_{v_{11}}P(v_2, f(g(v_{11}))) \& F^y_{v_{12}}F^y_{v_{13}}Q(v_{12}, v_{13}).$$
$$4. \qquad \forall x\{F^y_{v_2}F^{g(x)}_{v_3}P(v_2, v_3) \& Q(x, x)\} \supset$$
$$\supset F^y_{v_2}F^y_{v_{11}}F^{g(v_{11})}_{v_3}P(v_2, v_3) \& F^y_{v_{12}}F^y_{v_{13}}Q(v_{12}, v_{13}).$$

Приставки $F^{t_1, \dots, t_n}_v$ будем называть «F-кванторами». Согласно *184 - *190 (так как (i) дает нам исходные формулы $\exists! vF(v)$), F-кванторы можно переставлять в S_1 с операторами исчисления предикатов и между собой (переименовывая в случае надобности связанные переменные) с тем ограничением, что $F^{t_1, \dots, t_n}_v$ нельзя вынести (влево) за обычный или F-квантор, который связывает хотя бы одну из переменных $t_1, \dots, t_n$ (потому, что в *189 и *190 F(v) должно не содержать x свободио[1])). Это ограничение для двух F-кванторов означает просто, что все время должен сохраняться взаимный порядок двух F-кванторов, которые появляются при устранении двух f-термов, из которых один сидит внутри другого (при этом порядке F-квантор, соответствующий внутреннему f-терму, расположен левее). Для F- и обыкновенного квантора это ограничение означает, что F-квантор, который появляется при устранении связанного вхождения f-терма, можно продвигать влево только до самого правого из обычных кванторов, которые связывают это вхождение.

Кроме того, в силу *183, соседние одинаковые F-кванторы $F^{t_1, \dots, t_n}_u$ и $F^{t_1, \dots, t_n}_v$ можно объединить.

*182 представляет собой правило введения для F-кванторов.

Пример 5 (окончание). Формула 1 является аксиомой $\forall xA(x) \supset A(t)$ системы S_2 по схеме аксиом 10 с f(y) в качестве t. При устранении соответствующих f-термов из A(x) и A(t) в приведении к формуле 4 мы выберем одинаковые связанные переменные. Теперь, в силу *190, *186 (и *33), *184 и *183 (с переименованием связанных переменных), можно продвинуть вперед три F-квантора $F^y_{v_{11}}$, $F^y_{v_{12}}$, $F^y_{v_{13}}$, получающиеся при устранении трех вхождеиий f(y) в качестве t применения схемы и объединить их затем в один F-квантор $F^y_{v_1}$. Это дает нам следующую формулу, эквивалентную в S_1 формуле 4, а потому и главной f-несодержащей форме формулы 1.

$$5. \qquad F^y_{v_1}[\forall x\{F^y_{v_2}F^{g(x)}_{v_3}P(v_2, v_3) \& Q(x, x)\} \supset$$
$$\supset F^y_{v_2}F^{g(v_1)}_{v_3}P(v_2, v_3) \& Q(v_1, v_1)].$$

Теперь область действия $F^y_{v_1}$ в 5 оказывается аксиомой системы S_1 по схеме аксиом 10, с v_1 в качестве t. Посредством F-введ. (*182) в S_1 доказуема формула 5, а следовательно и главная f-несодержащая форма формулы 1.

Лемма 30. *Если* E — *аксиома системы* S_2, *то* $\vdash_1 E'$.

Доказательство. Если E — аксиома S_2 по какой-нибудь схеме аксиом исчисления высказываний, то E' — аксиома S_1 по той же схеме, потому что ′ сохраняет операторы этого исчисления (лемма 29).

Схема аксиом 10: E есть $\forall xA(x) \supset A(t)$, где t свободен для x в A(x).

---

[1]) Слово «свободно» отсутствует в оригинале. — *Прим. перев.*

Случай 1: терм t является f-несодержащим. Тогда, выбирая одни и те же связанные переменные на соответствующих шагах приведения формул A(x) и A(t), мы получим формулу вида $\forall x B(x) \supset B(t)$, конгруэнтную E′, в которой t свободен для x в B(x). Это — аксиома системы S_1 по схеме 10 с тем же самым t. Следовательно, $\vdash_1 E'$.

Пример 6. Пусть E будет

$$\forall x \{P(f(y), f(g(x))) \& Q(x, x)\} \supset P(f(y), f(g(t))) \& Q(t, t),$$

где t есть f-несодержащий терм. Тогда

$$\forall x \{F^{y}_{v_1} F^{g(x)}_{v_2} P(v_1, v_2) \& Q(x, x)\} \supset F^{y}_{v_1} F^{g(t)}_{v_2} P(v_1, v_2) \& Q(t, t)$$

конгруэнтна формуле E′, и это есть аксиома S_1 по схеме 10.

Случай 2: общий случай. Пусть, например, A(x) содержит k вхождений f-термов и l свободных вхождений x, а t содержит m вхождений f-термов. (В примере 5 было $k=2$, $l=3$, $m=1$.) Тогда формула A(t) содержит k вхождений f-термов, которые происходят от вхождений в формулу A(x), т. е. соответствуют f-термам из A(x), и lm других вхождений f-термов, а именно m в каждом из l вхождений t, которые занимают места свободных вхождений x в A(x). В процессе приведения формулы E к формуле, конгруэнтной E′, мы можем применять F-кванторы с одинаковыми связанными переменными при устранении из A(x) и A(t) каждой из k пар соответствующих вхождений f-термов и F-кванторы с различными другими связанными переменными при устранении из A(t) упомянутых lm вхождений f-термов, встречающихся в указанных вхождениях t. Допустим, что при устранении эти l вхождений t превратятся во вхождения $t^*_1, \ldots, t^*_l$ (v_{11}, v_{12}, v_{13} в примере 5). Никакое из k вхождений f-термов в A(t), происходящих от вхождений в A(x), не может находиться внутри какого-либо из lm вхождений, появляющихся при подстановке t вместо x, причем подстановка свободна. Поэтому lm F-кванторов, использованных при устранении последних упомянутых вхождений, могут быть вынесены вперед и притом в таком порядке, что в каждой из групп по l из них, принадлежащих соответствующим вхождениям f-терма в l рассматриваемых вхождениях t, все F-кванторы окажутся соседними, после чего каждую группу можно сократить. Таким образом, мы получим эквивалентную E′ формулу из S_1 вида

$$\text{(A)} \qquad F^{s_{11}, \ldots, s_{1n}}_{v_1} \ldots F^{s_{m1}, \ldots, s_{mn}}_{v_m} [\forall x B(x) \supset B(t^*)],$$

где t^* получается из каждой из $t^*_1, \ldots, t^*_l$ в результате отождествления переменных при сокращении и свободен для x в B(x). Теперь формула $\forall x B(x) \supset B(t^*)$ является аксиомой системы S_1 по схеме аксиом 10 и, следовательно, (A) доказуема путем m-кратного применения F-введ. (*182).

Аксиома (ii): E есть формула $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$. Предположим, что w входит свободно l раз в $F(x_1, \ldots, x_n, w)$. Тогда E′ содержит l F-кванторов. Их можно вынести вперед и сократить, в результате чего получится $F^{x_1, \ldots, x_n}_{v} F(x_1, \ldots, x_n, v)$, т. е. формула $\exists v \{F(x_1, \ldots, x_n, v) \& F(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, v)\}$, которая выводима из (i), а потому доказуема.

Лемма 31. *Если* E — *непосредственное следствие из* F (*из* F *и* G) *в* S_2, *то* E′ — *непосредственное следствие из* F′ (*из* F′ *и* G′) *в* S_1.

Доказательство. Для каждого из правил 2, 9 и 12 это следует из того, что $'$ сохраняет операторы и не вводит свободных переменных (так что C правила 9 или 12 не может превратиться в формулу C', содержащую x свободно).

Замечание 1. Если f не есть 0 и не есть $'$, то для схемы индукции соблюдается сделанная в теореме оговорка о дополнительных схемах аксиом, что усматривается из рассуждения, использованного для схемы аксиом 10, случай 1.

Пример 7. Пусть S_1 — арифметическая система главы IV. Пусть S_2 получается из S_1 присоединением функциональиого символа rm (выражающего функцию остаток) с аксиомой

$$\exists q\,(a = bq + \mathrm{rm}(a, b) \,\&\, \mathrm{rm}(a, b) < b) \vee (b = 0 \,\&\, \mathrm{rm}(a, b) = a)$$

(см. *179b, с § 41). Тогда, по доказанной теореме (и замечанию 1), rm со своей аксиомой устранимы. Пусть еще присоединено обозначение $[a/b]$ для частного и аксиома $\exists r\,(a = b[a/b] + r \,\&\, r < b) \vee b = [a/b] = 0$ (см. *178 b, с). Последовательно применяя доказанную теорему, можно устранить rm и $[a/b]$.

Пример 8. Пусть S_1 — арифметическая формальная система, R (x, y) — формула, содержащая свободно только x и y, и $R(x, y)$ — предикат, который R (x, y) выражает при интерпретации. (a) Рассмотрим классическую систему S_1 и допустим, что для R справедливо утверждение (A): $\vdash_1 \exists y\mathrm{R}(x, y)$. Тогда, в силу *149 и *174b, может быть устранен функциональный символ f, введенный с аксиомой $\mathrm{R}(x, f(x)) \,\&\, \forall z\,(z < f(x) \supset \neg\, \mathrm{R}(x, z))$, который (по крайней мере) при (классической) интерпретации выражает функцию $\mu y R(x, y)$ (начало § 57, при допущении об S_1, что (A) влечет (1b) § 57 (с $n = 1$)), т. е. отношения устранимости имеют место для полученной таким образом системы S_2. Применяя *149a вместо *149, можно получить то же самое для интуиционистской системы S_1, если, кроме (A), имеет место также утверждение (α): $\vdash_1 \mathrm{R}(x, y) \vee \neg\, \mathrm{R}(x, y)$. (b) Рассмотрим теперь классическую систему S_1, не предполагая (A). Пусть $\mathrm{R}^\dagger(x, w)$ будет $\mathrm{R}(x, w) \vee \{\neg\, \exists y\mathrm{R}(x, y) \,\&\, w = 0\}$, а $\mathrm{R}^\ddagger(x, w)$ будет $\mathrm{R}^\dagger(x, w) \,\&\, \forall z\,(z < w \supset \supset \neg\, \mathrm{R}^\dagger(x, z))$. В силу *51, $\vdash_1 \exists y\mathrm{R}(x, y) \vee \neg\, \exists y\mathrm{R}(x, y)$. Разбором случаев ($\vee$-удал.) получаем $\vdash_1 \exists w\mathrm{R}^\dagger(x, w)$, и, в силу *149 и *174b, (1) $\vdash_1 \exists!\, w\mathrm{R}^\ddagger(x, w)$. Итак, функциональный символ f, введенный с аксиомой $\mathrm{R}^\ddagger(x, f(x))$, классически всегда устраним. При (классической) интерпретации f (x) выражает $\varepsilon y R(x, y)$ (начало § 62; см. (59) § 63). Устранимость имеет место и в интуиционистской системе S_1, если R таково, что справедливо (α) и, кроме того, (β) $\vdash_1 \exists y\mathrm{R}(x, y) \vee \neg\, \exists y\mathrm{R}(x, y)$. Действительно, ($\beta$) позволяет нам обойтись без помощи *51, а (α) и (β) вместе с *158 и замечанием 1 (b) § 29 дают $\vdash_1 \mathrm{R}^\dagger(x, w) \vee \neg\, \mathrm{R}^\dagger(x, w)$, что позволяет применить 149a вместо *149. (c) Пусть $\varphi(x)$ — любая функция, представляющий предикат $\varphi(x) = w$ которой является арифметическим по Гёделю (§ 48). Пусть R (x, w) — формула, выражающая $\varphi(x) = w$. Тогда f (x) из (b) выражает $\varepsilon w[\varphi(x) = w]$, т. е. $\varphi(x)$. Итак, *в системе классической арифметики для любой функции* $\varphi(x)$, *такой, что* $\varphi(x) = w$ — *предикат, арифметический по Гёделю, можно найти такую формулу* F (x, w), *содержащую свободно только* x *и* w, *что в интерпретации формула* $\mathrm{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ *истинна тогда и только тогда, когда* $w = \varphi(x)$, *и новый функциональный символ* f, *выражающий* φ, *с аксиомой* F (x, f (x)), *устраним*. В частности, *такую формулу* F (x, w) *можно найти для любой обще-рекурсивной функции* $\varphi(x)$ (в силу теоремы VII (b) § 57) *и* (*при классической интерпретации*) *для многих функций, не являющихся обще-рекурсивными*, например, для $\varepsilon y T_1(x, x, y)$ (см. (b) или начало § 62 и пример 1 § 63).

(d) Обратно, если аксиома вида F (x, f (x)) характеризует f (x) как выражение для функции $\varphi(x)$ (т. е. если для каждого x формула $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ истинна в интерпретации тогда и только тогда, когда $w = \varphi(x)$), то $\varphi(x) = w$ — предикат, арифметический по Гёделю. Ситуация для интуиционистской системы будет рассмотрена ниже в § 82 (примеры 1 и 2).

В следующих двух примерах мы будем считать, что (1) — (3) замечания 1 § 49 установлены — либо непосредственно путем формализации рассуждений § 48, либо путем заимствования из Гильберта — Бернайса [1934, стр. 401 — 419][1]). Рассуждения Гильберта — Бернайса происходят в формальной системе, которая (если отвлечься от явно несущественных отличий, включая то, что они употребляют предикатные переменные, см. конец § 37) получается из нашей системы классической арифметики путем добавления некоторого оператора (с надлежащими постулатами). Этот оператор, будучи применен к формуле R (x, y), дает терм, выражающий функцию $\varepsilon y R(x, y)$, где $R(x, y)$ — предикат, выражаемый формулой R (x, y). В силу примера 8 (b), всякое использование этого оператора может быть устранено. Применяя этот процесс к формулам, написанным одна в качестве пятой на стр. 416, а другая — в качестве седьмой на стр. 419, и выбирая в качестве $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}(n, \rho(m, n' \cdot l + 1))$ просто переменную w, мы приходим к (α) и (β) замечания 1 § 49. Это рассуждение применимо к интуиционистской системе. (Гильберт и Бернайс обозначают этот оператор через μ_x; их ε_x имеет другой смысл[2]) (см. [1939, стр. 9 и след.], Гильберт [1928].)

Пример 9. Устранимость дальнейших примитивно-рекурсивных определений при наличии таковых для + и · (ср. пример 4). Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — примитивно-рекурсивное описание некоторой функции $\varphi (= \varphi_k)$. Пусть S_1 — арифметическая система с дополнительными функциональными символами $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_{k-1}$ (выражающими $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ соответственно), а в качестве дополнительных аксиом пусть взяты равенства, полученные путем перевода применений схем для $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ (как в § 54). Пусть, например, φ получается из ψ, χ (где ψ, χ взяты из списка $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$) посредством схемы (Vb) § 43 с $n = 2$. С помощью замечания 1 § 49 получаем: (1) $\vdash_1$ P (0,x,w) $\sim$ Q (x,w), (2) $\vdash_1$ P (y', x, w) $\sim$ $\exists$z [P (y, x, z) & R (y, z, x, w)], (3) $\vdash_1$ $\exists$! wP (y, x, w). Допустим также (в качестве гипотезы индукции по k): (4) $\vdash_1$ g (x) = = w $\sim$ Q (x, w), (5) $\vdash_1$ h (y, z, x) = w $\sim$ R (y, z, x, w) (где g, h выражают ψ, χ соответственно). Согласно теореме 42 (вместе с (3)), присоединение к системе S_1 символа f с формулой P (y, x, f (y, x)) в качестве дополнительной аксиомы является устранимым. Но в S_1 с f, добавленным к символизму, формула P (y,x, f (y,x)) дедуктивно равна формуле f (0, x) = g (x) & f (y', x) = h (y, f (y, x), x), что легко видеть (с помощью (1) — (5) и, в одном направлении, с помощью индукции по y). Поэтому в качестве дополнительных аксиом можно пользоваться парой уравнений f (0, x) = g (x), f (y', x) = h (y, f (y, x), x) вместо формулы P (y, x, f (y, x)) с тем же результатом. (Эта пара равенств получена несколько иначе Гильбертом и Бернайсом [1934, стр. 421].)

Пример 10. Пусть S_1 — арифметический формализм. Согласно доказательству теоремы 32 (a) § 59, имеется формула P (z, x, w), такая, что если e — гёделевский номер обще-рекурсивной функции $\varphi(x)$, то P ($\boldsymbol{e}$, x, w) нумерически представляет $\varphi(x)$. Тогда $\exists$! wP ($\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{x}$, w) доказуема для каждого натурального числа x. Должна ли $\exists$! wP ($\boldsymbol{e}$, x, w) быть доказуемой? (Она заведомо доказуема при некоторых выборах φ и e, например, путем форма-

[1]) См. добавление II. — *Прим. перев.*
[2]) См. добавление V. — *Прим. перев.*

лизации посредством § 56 рассуждений из § 54.) По теореме 31 § 52, $\{\vdash_1 \exists! \mathrm{wP}(z, \mathrm{x}, \mathrm{w})\} \equiv (Ey) R(z, y)$ для некоторого примитивно-рекурсивного R. Пусть θ получается из этого R согласно теореме XIV (b) § 60. Тогда θ — примитивно-рекурсивная функция и $\theta(y)$ при $y=0, 1, 2, \ldots$ является пересчетом тех чисел z, для которых доказуема формула $\exists!\mathrm{wP}(z,\mathrm{x},\mathrm{w})$. Согласно интерпретации, $\exists!\mathrm{wP}(z,\mathrm{x},\mathrm{w})$ истинна только в том случае, если z — гёделевский номер некоторой обще-рекурсивной функции от одной переменной. Предположим, что система S_1 обладает свойством непротиворечивости, которое состоит в том, что $\exists!\mathrm{wP}(z, \mathrm{x}, \mathrm{w})$ доказуема только в этом случае. Тогда для каждого y значение $\theta(y)$ является гёделевским номером некоторой обще-рекурсивной функции, которую можно записать в виде $\Phi_1(\theta(y), x)$ (начало § 65); таким образом, $\Phi_1(\theta(x), x)+1$ оказывается обще-рекурсивной функцией $\varphi(x)$, для любого гёделевского номера e которой формула $\exists!\mathrm{wP}(e,\mathrm{x},\mathrm{w})$ недоказуема в S_1. Возьмем такое e, и пусть S_2 получается из S_1 присоединением нового функционального символа f с аксиомой $\mathrm{P}(e, \mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x}))$. Тогда f (и эта аксиома) неустранимы. Действительно, с помощью *174a и результата (3) замечания 1 § 49 для примитивно-рекурсивной функции U (см. доказательство теоремы 32), мы легко докажем, что $\mathrm{P}(e, \mathrm{x}, \mathrm{t}) \vdash_1 \exists! \mathrm{wP}(e, \mathrm{x}, \mathrm{w})$. Поэтому, с помощью новой аксиомы, $\vdash_2 \exists! \mathrm{wP}(e, \mathrm{x}, \mathrm{w})$. Если бы f был устраним, то $\exists!\mathrm{wP}(e, \mathrm{x}, \mathrm{w})$ была бы доказуема в S_1, что не имеет места. Итак, *в арифметической системе имеется формула* P(x, w), *содержащая свободно только* x *и* w, *такая, что при некотором предположении о непротиворечивости* P(x, w) *нумерически представляет некоторую обще-рекурсивную функцию* φ, *однако, новый функциональный символ* f (*выражающий* φ) *с аксиомой* P(x, f(x)) *не устраним.*

Для данных F, f и правил образования (здесь имеются в виду правила образования для S_2) мы будем называть *формой* формулы E всякую формулу D, такую, что $\mathrm{E} \sim \mathrm{D}$ выводима в исчислении предикатов с равенством из формулы (iii).

Замечание 2. (a) Среди всех форм формулы E содержатся ее главная f-несодержащая форма E′ (в силу леммы 28 и доказательства леммы 29) и все формулы, которые получаются из нее посредством операций с F-кванторами, основанных на лемме 25 (в силу леммы 26). (b) Любые две f-несодержащие формы E^1 и E^2 формулы E из S_2, будучи эквивалентными в S_2 (в силу лемм 26 и 27), эквивалентны и в S_1 (в силу (V)). Это справедливо для любой S_1 теоремы 42 с данными правилами образования (без оговорки о дополнительных схемах аксиом, коль скоро доказательство $\mathrm{E}^1 \sim \mathrm{E}^2$ в S_2 использует только такие аксиомы, получающиеся по этим схемам, которые принадлежат S_1) и, в частности, когда S_1 есть просто исчисление предикатов с равенством и аксиомой (i).

Заменимость неопределенных функций предикатами. Теорема 43. (a) *Пусть S_2 — прикладное исчисление предикатов с равенством, в котором имеется символ* f *для функции от n переменных* ($n \geqslant 0$), *и пусть система S_1 получается из S_2 исключением* f *и принятием вместо него символа* F *для предиката от $n+1$ переменных с аксиомой* $\exists!\mathrm{wF}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ (*или же постулатами системы S_2 являются постулаты исчисления предикатов с аксиомами равенства для функциональных и предикатных символов S_2, и тогда при построении S_1 мы, помимо уже сказанного, исключаем n аксиом равенства для* f *и принимаем взамен $n+1$ аксиому равенства для* F).

Для любой формулы E *из S_2, пусть* E′ — *произвольная* f-*несодержащая форма* E (*для рассматриваемых* f *и* F, *причем правила образования допускают в символизме обе эти формулы*). *Для любой формулы* E *из S_1, пусть*

E° — формула из S_2, которая получается из формулы E *в результате замены одновременно каждой части вида* $F(t_1, \ldots, t_n, s)$, *где* $t_1, \ldots, t_n$, s — *термы, на* $f(t_1, \ldots, t_n) = s$. *Тогда*:

(VIa) $\vdash_1 E \sim E^{\circ\prime}$. (VIb) $\vdash_2 E \sim E'^{\circ}$.

(VIIa) $\{\Gamma \vdash_2 E\} \to \{\Gamma' \vdash_1 E'\}$. (VIIb) $\{\Gamma \vdash_1 E\} \to \{\Gamma^\circ \vdash_2 E^\circ\}$.

(b) *Аналогично для случая, когда в* S_2 *имеются дополнительные аксиомы* $B_1, \ldots, B_k$ *и схемы аксиом* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$, *а в* S_1 — *дополнительные аксиомы* $B_1', \ldots, B_k'$ *и дополнительные схемы аксиом* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l$, *такие, что если* E — *аксиома* S_2 *по схеме* $\mathfrak{B}_i$ (*аксиома* S_1 *по схеме* $\mathfrak{A}_i$), *то* $\vdash_1 E'$ ($\vdash_2 E^\circ$). (См. Гильберт — Бернайс [1934, стр. 460 и след.].)

Из (VIa) — (VIIb) следует

(VIIIa) $\{\Gamma \vdash_2 E\} \equiv \{\Gamma' \vdash_1 E'\}$ (VIIIb) $\{\Gamma \vdash_1 E\} \equiv \{\Gamma^\circ \vdash_2 E^\circ\}$.

Доказательства. (VIIIa). Действительно, обратно к (VIIa): если $\Gamma' \vdash_1 E'$, то, в силу (VIIb), $\Gamma'^\circ \vdash_2 E'^\circ$; откуда, по (VIb), $\Gamma \vdash_2 E$.

Доказательство теоремы 43. (a) Начнем со случая, когда логикой является исчисление предикатов с равенством. Пусть S_{3a} получается из S_2 путем добавления к символизму формулы F и аксиомы $f(x_1, \ldots, x_n) = w \sim F(x_1, \ldots, x_n, w)$. Рассматривая эту аксиому как явное определение F, можно, по примеру 1, устранить это добавление, причем операцией сопоставления будет °. Но, по лемме 26, аксиому $f(x_1, \ldots, x_n) = w \sim F(x_1 \ldots, x_n, w)$ можно заменить в S_{3a} парой аксиом $\exists ! w F(x_1, \ldots, x_n, w)$ и $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$, не изменяя отношения выводимости. Значит, для полученной таким образом системы S_3 также имеют место отношения устранимости, т. е.

(Ib) Если E — формула из S_2, то E° есть E.

(IIb) $\vdash_3 E \sim E^\circ$. (IIIb) $\{\Gamma \vdash_3 E\} \to \{\Gamma^\circ \vdash_2 E^\circ\}$.

Но теорема 42 применима к системе S_3 (в качестве ее S_2), а результатом устранения f из S_3 служит S_1. Поэтому, если ′ означает f-несодержащую форму, отличную от главной, получаем[1]), пользуясь замечанием 2 (b):

(Ia) Если E — формула из S_1, то E' есть E.

(IIa) $\vdash_3 E \sim E'$. (IIIa) $\{\Gamma \vdash_3 E\} \to \{\Gamma' \vdash_1 E'\}$.

Отсюда следуют (VIa) — (VIIb), например:

(VIa) В силу (IIb) и (IIa), $\vdash_3 E \sim E^\circ \sim E^{\circ\prime}$. Но $E \sim E^{\circ\prime}$ является формулой системы S_1. Следовательно, в силу (Va), $\vdash_1 E \sim E^{\circ\prime}$.

(VIIa). $\{\Gamma \vdash_2 E\} \to \{\Gamma \vdash_3 E\}$ (и подавно) $\to \{\Gamma' \vdash_1 E'\}$ (по (IIIa)). Случай с аксиомами равенства получается с помощью теоремы 41(b) или непосредственно следующим образом. Аксиомы равенства для F доказуемы в S_{3a}. Для перехода к S_3 мы сначала добавляем их в качестве аксиом, затем заменяем (iii) на (i) и (ii) и, наконец, (пользуясь леммой 27) опускаем аксиомы равенства для f.

Замечание 3. Любые две f-несодержащие формы E^1 и E^2 формулы E эквивалентны в S_1, как видно из проведенного доказательства. Ввиду того,

[1]) Здесь автор допускает неточность: E′ может быть любой формулой из S_1, эквивалентной E в исчислении предикатов с равенством. Впрочем, это несущественно для дальнейшего. — *Прим. перев.*

что эта эквивалентиость доказана уже для системы S_1 части (а). рассматриваемой теоремы, условиям части (b) достаточно удовлетворить для какого-либо одного подходящего способа определения формы.

Замечание 4. В случае, когда в теореме 43 предполагается наличие аксиом равенства (F попрежнему означает предикатный символ): все рассуждения, начиная с теоремы 42 и включая определение „формы", сохраняют силу, если для некоторых значений i мы запретим образование термов $f(t_1, \ldots, t_n)$ и формул $F(t, \ldots, t_n, s)$, в которых для какого-лнбо из этих значений i терм t_i содержит f, и исключим аксиомы равенства для f и F при этих значениях i.

Замечание 5. Для случая теоремы 43(b) с аксиомами равенства, в силу дополнительных постулатов, некоторые из n аксиом равенства для f могут оказаться зависимыми в S_2. Будут ли зависимыми в S_1 соответствующие аксиомы равенства для F? Более конкретно, допустим, что для некоторых значений i имеются выводы i-тых аксиом равенства для f из остальных постулатов S_2, причем в эти выводы не входит ни один f-терм $f(t_1, \ldots, t_n)$, в котором t_i содержит f хотя бы при одном из этих значений i. Тогда аксиомы равенства для F при этих значениях i будут зависимыми в системе S_1, при условии, что (b) выполняется, если $'$ означает главную f-несодержащую форму или любую другую f-несодержащую форму в измененном смысле замечания 4. Действительно, по замечанию 4, в силу (VII), главные f-несодержащие формы рассматриваемых аксиом равенства для f доказуемы в измененной системе S_1, а потому и соответствующие аксиомы равенства для F доказуемы в S_1.

Пример 11. (а) Пусть S_2 — полная арифметическая система или система Робинсона (лемма 18b § 49). В силу (b) доказанной теоремы, функциональный символ $\cdot$ можно следующим образом заменить на предикатный символ. Пусть новым предикатным символом будет $\cdot$, записанный впереди трех его аргументов. В качестве новых аксиом добавим:

$$a = b \supset (\cdot(c, d, a) \supset \cdot(c, d, b)), \qquad \exists! c \cdot (a, b, c).$$

Пользуясь главной $\cdot$-несодержащей формой, мы заменим аксиомы 20 и 21 на

$$\exists b [\cdot (a, 0, b) \,\&\, b = 0], \qquad \exists c [\cdot (a, b', c) \,\&\, \exists d [\cdot (a, b, d) \,\&\, c = d + a]]$$

соответственно, а эти формулы можно упростить, и получится

$$\cdot (a, 0, 0), \qquad \exists d [\cdot (a, b', d + a) \,\&\, \cdot (a, b, d)].$$

Другие две аксиомы равенства

$$a = b \supset (\cdot (a, c, d) \supset \cdot (b, c, d)), \qquad a = b \supset (\cdot (c, a, d) \supset \cdot (c, b, d))$$

для $\cdot$ как предикатного символа можно не присоединять, если S_2 — полная арифметическая система, потому что они фактически доказуемы в описанной системе (в силу замечания 5 и доказательства аксиом равенства для $\cdot$ как для функционального символа в § 38); но если S_2 — система Робинсона, мы их присоединим в качестве аксиом вместо формул *106 и *107. Вторично применяя теорему, можно, далее, заменить $+$. При этом, если аксиома 18 заменяется на ее главную $+$-несодержащую форму или на $+(a, 0, a)$, то $a = a$ остается доказуемой формулой (и останется таковой, если аналогично заменить 0, см. (b) ниже). Применяя теорему в третий раз, мы можем затем заменить $'$. Проделывая это, мы заменяем, например, схему индукции на схему $A(0) \& \forall x(A(x) \supset \exists y['(x, y) \& A(y)]) \supset A(x)$. Таким образом, мы получим систему S_1 без функциональных символов в обычном смысле, т. е. при $n > 0$ связанную с S_2 посредством (VIa) — (VIIIb), где теперь $'$ и $^\circ$ означают последовательные устранения некоторых символов. (b) Если мы пожелаем, чтобы система не содержала также индивидуальных символов, можно еще заменить 0, применяя теорему с $n = 0$. Или же, можно устранить 0 прежде, чем мы заменили $'$ (см. следующий пример).

Пример 12. С помощью *137 и аксиомы 15 формула $0 = b \sim \forall a(a' \neq b)$ (имеющая вид (iii)) доказуема. Этим обстоятельством можно воспользоваться для того, чтобы после некоторых предварительных преобразований устранить 0 с помощью теоремы 42.

Пример 13. Устранимость переменных произвольного определенного рода. Пусть S_1 — исчисление предикатов (например, будем считать, что правила образования используют индивидуальные, функциональные и предикатные символы) с некоторыми дополнительными аксиомами и схемами аксиом. Предположим, что для некоторой формулы $M(w)$, содержащей свободно только w, формула $\exists w M(w)$ доказуема в S_1. Пусть система S_2 получается из S_1 присоединением нового рода переменных $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$, которые допускаются при построении термов и формул и в правилах 9 и 12, причем в схемах аксиом 10 и 11 x должна быть переменной первоначального рода, и добавлением следующих трех схем аксиом, где $\bar{x}$ — переменная нового рода, $A(\bar{x})$ — формула, а t — терм, свободный для $\bar{x}$ в $A(\bar{x})$ и для w в $M(w)$.

$$\overline{0}.\ M(\bar{x}). \qquad \overline{10}.\ M(t) \supset (\forall \bar{x} A(\bar{x}) \supset A(t)). \qquad \overline{11}.\ M(t) \supset (A(t) \supset \exists \bar{x} A(\bar{x})).$$

Для любой данной формулы E из S_2, пусть $E^\dagger$ получается из E путем замены каждой части вида $\forall \bar{x} A(\bar{x})$ на $\forall x[M(x) \supset A(x)]$ и каждой части вида $\exists \bar{x} A(\bar{x})$ на $\exists x[M(x) \& A(x)]$, где x — переменная первоначального рода, не входящая ни в $A(\bar{x})$, ни в $M(w)$. Пусть, далее, $E^\ddagger$ получается из $E^\dagger$ приписыванием спереди $M(\bar{y}_1) \& \ldots \& M(\bar{y}_m) \supset$, где $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m$ — все различные переменные нового рода, входящие свободно в E (а следовательно, и в $E^\dagger$). Пусть E' получается из $E^\ddagger$ путем подстановки вместо $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m$ различных переменных $y_1, \ldots, y_m$ первоначального рода, не входящих в $E^\ddagger$ (а следовательно, и в E). Тогда, при условии, что для каждой аксиомы A системы S_2, получающейся по любой дополнительной схеме аксиом системы S_1, формула A' доказуема в S_1, имеют место (I) — (III) со следующими изменениями. Для $m > 0$ (II) принимает вид $E^{y_1 \ldots y_m} {}_2\!\dashv \vdash_2 {}^{\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_m}E'$. В (III), если соответствующие переменные остаются фиксированными для соответствующих исходных формул, вместо каждой $\bar{y}$ подставляется одна и та же y в E и в каждую формулу из Γ, для которой $\bar{y}$ остается фиксированной (так что в этом случае операция $'$ определяется не через каждую формулу в отдельности). Прежде чем рассматривать (II), следует распространить надлежащим образом на систему S_2 теоремы 1, 2 и 14. С помощью леммы 8a § 24 можно свести (III) к частному случаю этого отношения, когда Γ пуста. Рассматривая этот случай, мы будем записывать $E^\dagger$ в виде «$E^\dagger(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$». По индукции можно доказать, что если $\vdash_2 E$, то имеет место $M(y_1), \ldots, M(y_m) \vdash_1 E^\dagger(y_1, \ldots, y_m)$ с фиксированными $y_1, \ldots, y_m$. (Для правила 2 пусть, например, $A^\dagger$ содержит только одну новую переменную $\bar{y}$, — будем обозначать эту формулу «$A^\dagger(\bar{y})$», а $B^\dagger$ вовсе не содержит новых переменных. По индуктивному предположению $M(y) \vdash_1 A^{\dagger}(y)$ и $M(y) \vdash_1 A^{\dagger}(y) \supset B^{\dagger}$. По правилу 2, $M(y) \vdash_1 B^{\dagger}$. По $\exists$-удал. и *74, $\exists w M(w) \vdash_1 B^{\dagger}$. Но $\vdash_1 \exists w M(w)$. Поэтому $\vdash_1 B^{\dagger}$.) Аналогично устраняется последовательное введение нескольких родов переменных.

§ 75. СИСТЕМЫ АКСИОМ, ПАРАДОКС СКОЛЕМА, НАТУРАЛЬНЫЙ РЯД ЧИСЕЛ

Предположим, что нам дана система аксиом (§ 8), первоначальными или неопределенными понятиями которой служат множество или область индивидуумов D, некоторые индивидуумы $z_1, \ldots, z_q$ из D и некоторые предикаты $P_1, \ldots, P_s$ над D. Мы будем называть *элементарной* всякую аксиому, которая может быть выражена посредством формулы в символизме исчисления предикатов (т. е. ограниченного исчисления предикатов или исчисления предикатов первой ступени, см. § 37) с индивидуальными символами $e_1, \ldots, e_q$, выражающими $z_1, \ldots, z_q$, и предикатными символами $Pr_1, \ldots, Pr_s$, выражающими $P_1, \ldots, P_s$ соответственно. Если каждая аксиома системы элементарна и число аксиом конечно, мы будем называть эту систему аксиом *элементарной*, или *системой первой ступени*.

Для выражения элементарных аксиом мы всегда можем выбирать замкнутые формулы, потому что при интерпретации всеобщиости любая формула является синонимом своего замыкания (см. конец § 32). Кроме того, так как число аксиом элементарной системы конечно, можно образовать конъюнкцию $F(e_1, \ldots, e_q, Pr_1, \ldots, Pr_s)$ замкнутых формул, выражающих аксиомы. Наконец, заменяя индивидуальные символы $e_1, \ldots, e_q$ соответствующими им различными переменными $z_1, \ldots, z_q$, не входящими в $F(e_1, \ldots, e_q, Pr_1, \ldots, Pr_s)$, а предикатные символы $Pr_1, \ldots, Pr_s$ — различными предикатными буквами $P_1, \ldots, P_s$, мы получим предикатную формулу $F(z_1, \ldots, z_q, P_1, \ldots, P_s)$ или, короче, просто F. Простой пример (с $q=0$, $s=1$) был уже рассмотрен в § 37.

Выражая, таким образом, систему аксиом посредством предикатной формулы F, мы подчеркиваем, что стоим на точке зрения формальной аксиоматики (§ 8). С этой точки зрения множество D, индивидуумы $z_1, \ldots, z_q$ и предикаты $P_1, \ldots, P_s$ аксиоматической теории определены лишь постольку, поскольку они охарактеризованы аксиомами. Каждую предикатную формулу можно рассматривать как систему аксиом и считать, что входящие в нее свободные переменные и предикатные буквы представляют неопределенные индивидуумы и предикаты.

Если мы интерпретируем логические символы классически и рассматриваем предикаты «экстенсивно»[1]) просто как логические функции, то к изучению аксиоматических систем становятся применимыми понятия теоретико-множественной логики предикатов (§ 37). Утверждение, что аксиомы выполняются (в содержательном смысле § 8) для некоторой непустой системы объектов (которое мы в § 8 выражали словами, что аксиомы „выполнимы") приобретает теперь точный смысл, заключающийся в том, что формула F выполнима (в теоретико-множественном смысле) в некоторой непустой области. Рассмотрение предикатной формулы в качестве системы аксиом представляет интерес только для выполнимых, но не тождественных предикатных формул. Тождественная предикатная формула не ограничивает и не описывает индивидуумы и предикаты, которые выражаются ее свободными переменными и предикатными буквами, а выражает закон логики, применимый ко всякому выбору этих индивидуумов и предикатов в любой непустой области.

[1]) Т. е. с точки зрения объема. — *Прим. перев.*

В неформальной аксиоматике, где не предпринимается дальнейших шагов по формализации процесса логического вывода, необходимых для получения формальной системы (§ 15), теоремы выводятся из аксиом на основе смысла логических символов. Утверждение, что некоторое предложение является теоремой, можно выразить в теоретико-множественной логике предикатов следующим образом. Рассмотрим любое предложение аксиоматической теории, выразимое посредством предикатной формулы, составленной из $P_1, \dots, P_s$. Всегда можно выбрать эту формулу так, чтобы она содержала в качестве свободных переменных только переменные $z_1, \dots, z_q$ (причем эти переменные действительно в ней содержались бы свободно). Всякая такая формула $B(z_1, \dots, z_q, P_1, \dots, P_s)$ или, короче, B, выражает истинное предложение или теорему аксиоматической теории в точности тогда, когда каждое распределение значений индивидуумов $z_1, \dots, z_q$ из некоторой непустой области D для $z_1, \dots, z_q$ и предикатов $P_1, \dots, P_s$ над D для $P_1, \dots, P_s$, которое выполняет F, выполняет также B. Согласно таблице оценок для $\supset$ (§ 28), это равносильно утверждению, что формула $F \supset B$ тождественна во всякой непустой области.

Предположим теперь, что аксиоматическая теория формализована (§ 15) путем принятия дедуктивных правил исчисления предикатов как средств вывода теорем, с оговоркой, что переменные $z_1, \dots, z_q$ должны оставаться фиксированными; т. е. теоретико-доказательственно мы будем теперь говорить, что B выражает теорему, если в исчислении предикатов $F \vdash B$ с фиксированными $z_1, \dots, z_q$. (В силу замечаний 1 и 2 (а) § 34, при этом всегда можно найти вывод B из F, в который не входит никакая предикатная буква, отличная от $P_1, \dots, P_s$, и $z_1, \dots, z_q$ входят только свободно.)

В силу $\supset$-правил, с замечанием, что раз F не содержит свободных переменных, отличных от $z_1, \dots, z_q$, то ни одна переменная в этом выводе не варьируется, это эквивалентно утверждению, что $\vdash F \supset B$ в исчислении предикатов.

Теперь мы в состоянии установить, что формализация вывода для элементарных аксиоматических теорий, которую дает исчисление предикатов, корректна (или совместима (непротиворечива)) и адэкватна (или полна), т. е. что исчисление предикатов позволяет вывести из F только те и все те формулы, которые выражают предложения, истинные для любой системы, выполняющей аксиомы. Действительно, $\{\vdash F \supset B\} \equiv \{F \supset B$ тождественна в каждой непустой области$\}$, в силу теоремы 21 § 37 и следствия 1 из теоремы 34 § 72.

Вопрос о том, совместимы ли теоремы с аксиомами (на который уже дан положительный ответ), разумеется, совершенно отличен от вопроса, совместимы ли (непротиворечивы)[1]) сами аксиомы. До гильбертовой теории доказательств, или метаматематики, доказательства совместимости (непротиворечивости) аксиоматических систем или теорий состояли в построении модели для этой теории (§ 14). Свойство непротиворечивости, которое при этом непосредственно доказывалось, состоит в выполнимости F в некоторой непустой области.

Мы провели в § 14 эвристическое рассуждение, которое показывает, что это свойство влечет непротиворечивость в смысле несуществования противоречия (т. е. пары теорем, из которых одна является отрицанием другой) в теории, которую можно вывести из аксиом. То, что и обратно, из каждой невыполнимой системы аксиом можно конечным числом логических шагов получить противоречие, никоим образом не было при этом очевидно.

Только в результате шагов по формализации дедукции, предпринятых

[1]) В подлиннике здесь термин «consistent», который мы передаем иногда словом «совместим», иногда—«непротиворечив». — *Прим. перев.*

современными формалистами, непротиворечивость в смысле невыводимости противоречия стала доступной точному рассмотрению. В качестве свойства непротиворечивости мы имеем теперь следующее: ни для какой формулы A не может быть как $F \vdash A$, так и $F \vdash \neg A$ — оба вывода с фиксированными $z_1, \dots, z_q$.

В силу $\neg$-правил § 23 (так как F содержит свободно только $z_1,\dots,z_q$), это свойство эквивалентно „не-$\vdash \neg F$", т. е. „F неопровержима". Таким образом (для случая элементарных систем аксиом), формалистское преобразование проблемы непротиворечивости можно описать как замену выполнимости на неопровержимость.

По теореме 21 (которая теперь играет роль рассуждения, проведенного в § 14) и гёделевской теореме о полноте (теорема 34), выполнимость и неопровержимость эквивалентны.

Задача формалистского преобразования понятий выводимости и непротиворечивости состоит в получении финитных понятий. Достигнуто сведение несчетного к счетно-бесконечному, потому что тождественность и выполнимость относятся к совокупности логических функций, которая несчетна, в то время как их теоретико-доказательственные эквиваленты—доказуемость и неопровержимость—относятся только к счетно-бесконечной совокупности формальных доказательств. В метаматематике рассуждения о понятиях также финитны. Хотя доказательство эквивалентности, которое дает гёделевская теорема о полноте, не может принадлежать метаматематике, для последней существенно, что теоретико-множественные понятия оказываются эквивалентными теоретико-доказательственным, коль скоро рассуждения ведутся в нефинитной плоскости, которой принадлежат теоретико-множественные понятия.

Теперь мы видим, что проблема разрешимости для доказуемости в чистом исчислении предикатов содержит в себе проблему разрешимости для доказуемости в любой аксиоматической теории с элементарной системой аксиом (потому что вопрос о доказуемости любой формулы такой теории сводится к вопросу о доказуемости некоторой предикатной формулы $F \supset B$), а также проблему разрешимости для вопроса о том, является ли произвольно данная элементарная система аксиом непротиворечивой (который сводится к вопросу о том, верно ли, что $\neg F$ недоказуема).

В системах аксиом, которыми пользуются в математике, часто употребляют $=$ в качестве обыкновенного или логического термина, который должен быть понятен с самого начала, а не как один из неопределенных предикатов, которые охарактеризованы аксиомами. Предыдущие замечания станут применимыми, если мы сначала добавим некоторые аксиомы для равенства, формализованные в виде $Eq(=, Pr_1,\dots,Pr_s)$ или $Eq(Q,P_1,\dots,P_s)$. Или же, можно вместо этого формализовать аксиомы в том виде, в каком они нам даны, посредством некоторой предикатной формулы с равенством, а выводы из аксиом—посредством исчисления предикатов с равенством, и затем воспользоваться обобщением гёделевской теории о полноте на случай этого исчисления. Оба метода приводят к результатам, которые эквивалентны в силу леммы 24 (a) и теоремы 41 (c) § 73. Однако теоретико-множественно первый из них не ограничивает интерпретации, которые выполняют аксиомы, теми интерпретациями, в которых Q есть равенство, но допускает в качестве Q также и отношения эквивалентности.

Пример 1. Система аксиом L1—L3 для линейного порядка (конец § 8) выражается посредством следующей предикатной формулы с равенством (которую обозначим через «$F(=, \mathcal{A})$»), где $\mathcal{A}$ выражает $<$:

$$\forall a \forall b \forall c [\mathcal{A}(a, b) \mathbin{\&} \mathcal{A}(b, c) \supset \mathcal{A}(a, c)] \mathbin{\&} \forall a \forall b [\neg (\mathcal{A}(a, b) \mathbin{\&} a = b) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \neg (\mathcal{A}(a, b) \mathbin{\&} \mathcal{A}(b, a)) \mathbin{\&} \neg (a = b \mathbin{\&} \mathcal{A}(b, a))] \mathbin{\&} \forall a \forall b [\mathcal{A}(a, b) \vee a = b \vee \mathcal{A}(b, a)].$$

Та же самая система аксиом выражается предикатной формулой $\mathrm{Eq}(\mathscr{P}, \mathscr{A}) \& \mathrm{F}(\mathscr{P}, \mathscr{A})$, где $\mathscr{P}$ выражает $=$ (см. пример 1 § 73).

Наши замечания применимы непосредственно также к системе аксиом, в которой среди первоначальных понятий имеются функции $f_1, \ldots, f_r$, потому что с помощью $=$ эти функции могут быть заменены их представляющими предикатами, как это было с теоретико-доказательственной точки зрения рассмотрено в теореме 43 § 74.

Элементарные системы аксиом встречаются в математике часто, если только условиться употреблять термин „элементарная" в более широком смысле, распространяя его также и на такие системы, которые хорошо известными способами могут быть преобразованы в элементарные в смысле начала этого параграфа. Например, системы аксиом теории групп или гильбертовская система аксиом для геометрии без аксиомы непрерывности являются элементарными в широком смысле. (В первой из них групповая операция с помощью $=$ может быть заменена представляющим ее предикатом и к обеим можно добавить аксиомы для $=$. Пример рассмотрен у Гильберта — Бернайса [1934, стр. 3—8 и 380—381].)

Предыдущее рассуждение для элементарной системы аксиом переносится и на случай бесконечной системы элементарных аксиом, а именно, следующим образом. Пусть $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \ldots$ — предикатные формулы, соответственно выражающие эти аксиомы и содержащие свободно только переменные $z_0, z_1, z_2, \ldots$, которые обозначают неопределенные индивидуумы аксиоматической теории. Тогда {B есть «теорема» в теоретико-множественном смысле} $\equiv$ {каждое распределение, выполняющее все $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots$, выполняет и B} $\equiv$ {для каждого распределения хотя бы одна из B, $\neg \mathrm{F}_0, \neg \mathrm{F}_1, \neg \mathrm{F}_2, \ldots$ принимает значение t} $\equiv$ {некоторая дизъюнкция конечного числа формул из B, $\neg \mathrm{F}_0, \neg \mathrm{F}_1, \neg \mathrm{F}_2, \ldots$ доказуема} (по теореме 21 и следствию 1 из теоремы 37) $\equiv$ {$\vdash \mathrm{F} \supset \mathrm{B}$ для некоторой конъюнкции F конечного числа формул из $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots$} (с помощью *62, *59) $\equiv$ {$\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots \vdash \mathrm{B}$ с фиксированными $z_0, z_1, z_2, \ldots$} $\equiv$ {B есть «теорема» в теоретико-доказательственном смысле}. Аналогично {аксиомы «совместимы» теоретико-множественно} $\equiv$ {$\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots$ совместно выполнимы} $\equiv$ {каждая конъюнкция F конечного числа формул из $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots$ неопровержима} (в силу теорем 21 и 37) $\equiv$ {для каждой формулы A не может быть одновременно $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots \vdash \mathrm{A}$ и $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots \vdash \neg \mathrm{A}$ — оба вывода с фиксированными $z_0, z_1, z_2, \ldots$} $\equiv$ {аксиомы «совместимы» теоретико-доказательственно}. Итак, попрежнему теоретико-множественные и теоретико-доказательственные понятия эквивалентны. Но прежний метод сведе́ния пробле́мы разрешимости для выводимости из аксиом и для совместимости аксиом к проблеме разрешимости для доказуемости в исчислении предикатов отпадает, потому что здесь появляются квантификации по отношению к конечным конъюнкциям F из $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots$ (см., однако, замечание 3 § 76).

Пользуясь теоремами 21* и 37* (см. теорему 39 § 73), эти результаты можно перенести на случай, когда $=$ употребляется как логическое понятие, а аксиомы выражаются посредством предикатных формул с равенством.

Аксиоматическая теория множеств. Системы аксиом для теории множеств[1]) Неймана [1925], Бернайса [1937 — 1954] и Гёделя [1940*] элементарны (в широком смысле).

---

[1]) Обзор различных аксиоматических систем теории множеств дается в книге Ван Хао и Мак-Нотона [1953]. На русском языке имеется подробный реферат А. Есенина-Вольпина [1954]. — *Прим. ред*

Согласно гёделевской формулировке системы аксиом, имеются три первоначальных понятия: $\mathfrak{Cls}$ (быть классом), $\mathfrak{M}$ (быть множеством) и $\in$ (принадлежать); кроме того, $=$ употребляется как логическое понятие. Все множества являются классами, и никакие другие предметы не рассматриваются; так что область образуют классы. Эта система аксиом может быть выражена предикатной формулой с равенством $F(=, \mathscr{A}, \mathscr{B})$, где $\mathscr{A}(a)$ и $\mathscr{B}(a, b)$ выражают $\mathfrak{M}(a)$ и $a \in b$ соответственно, или предикатной формулой $\mathrm{Eq}(\mathscr{C}, \mathscr{A}, \mathscr{B}) \& F(\mathscr{C}, \mathscr{A}, \mathscr{B})$, где $\mathscr{C}(a, b)$ выражает $a = b$.

Эта система аксиом является чрезвычайно сильной. Из нее при надлежаще выбранных определениях можно вывести обычный классический анализ и значительную часть общей теории множеств. В частности, постулируется существование бесконечного множества (аксиома бесконечности), а также существование для любого множества другого множества, которому принадлежат все подмножества первого множества; таким образом, посредством теоремы Кантора (теорема С § 5) можно вывести, что существует несчетно-бесконечное множество множеств.

Но по теореме Лёвенгейма (следствие 2 из теоремы 34*, см. теорему 39), если формула $F(=, \mathscr{A}, \mathscr{B})$, выражающая аксиомы, вообще выполнима,— а кажется, что это действительно так, потому что ее интерпретацией предполагается теория множеств,—то она выполнима и в некоторой конечной или счетно-бесконечной области. (Исследование аксиом исключает случай конечной области.) Следовательно, можно таким образом интерпретировать первоначальные понятия, что будет иметься только счетная совокупность множеств и все аксиомы будут истинными (т. е. существует счетная модель для аксиоматической теории множеств, в которой = имеет свой обычный смысл), несмотря на то, что одна из теорем этой теории утверждает, что имеется несчетная совокупность множеств. Это—«парадокс» Сколема [1922—23].

Благодаря сколемовскому обобщению теоремы Лёвенгейма на случай совместной выполнимости счетно-бесконечной совокупности формул F_0, F_1, F_2, ... (следствие 2 из теоремы 37*), этот «парадокс» равным образом применим к аксиоматизациям теории множеств, использующим бесконечно много аксиом, например, к аксиоматизации Френкеля [1922] и Сколема [1922—23].

На этот «парадокс» проливают свет следующие два замечания. В аксиоматической теории определимы только те конкретные подмножества данного множества, которые могут быть построены при помощи операций или выделены из этого множества при помощи свойств (т. е. предикатов), определимых в этой теории. Основные операции для построения множеств (или процессы для образования предикатов), которые даются аксиомами, образуют конечную или, самое большее, счетно-бесконечную совокупность. Поэтому их повторное применение дает возможность определить только счетную совокупность подмножеств данного множества. Этим объясняется возможность интерпретировать систему аксиом, т. е. выполнить формулы, выражающие аксиомы, в счетной области.

С другой стороны, пересчитать множество—это значит задать 1—1-соответствие между этим множеством и некоторым конкретным счетным множеством, например, множеством натуральных чисел (§ 1). Любое 1—1-соответствие можно рассматривать как множество соответствующих пар[1]).

Таким образом возможно, что множество подмножеств данного бесконечного множества, определимого в теории, счетно вне этой теории, но несчетно внутри нее по той причине, что среди множеств, определимых в этой теории, не имеется никакого пересчитывающего множества соответствующих пар. Построение пересчитывающего множества пар становится осуществимым,

[1]) Т. е. множество упорядоченных пар соответствующих друг другу элементов.— *Прим. перев.*

если принять в расчет структуру системы аксиом в целом, но это построение невозможно внутри теории, т. е. с помощью только тех операций, которые даются аксиомами.

Эта ситуация аналогична той, которая имеет место в гёделевской теореме о неполноте или о невыводимости (теорема 28 § 42), где, если мы предполагаем, что арифметическая формальная система непротиворечива, можно обнаружить истинность $A_p(p)$, принимая во внимание структуру этой системы в целом, хотя мы и не можем установить истинность $A_p(p)$ при помощи только тех принципов вывода, которые формализованы в этой системе, т. е. не $\vdash A_p(p)$.

Хотя это и служит «объяснением», рассмотренный «парадокс» все же ставит нас перед следующей альтернативой. Или мы должны признать, что понятия произвольного подмножества данного множества и несчетного множества являются априорными понятиями, которые ускользают от всякого описания посредством конечной или счетно-бесконечной системы элементарных аксиом. Или же (если мы придерживаемся понятий, которые можно описать посредством элементарных аксиом, что можно считать весьма желательным ввиду теоретико-множественных парадоксов § 11) мы можем принять теоретико-множественные понятия, в частности, понятие несчетности в качестве относительных, так что множество, счетное в данной аксиоматизации, может оказаться несчетным в другой, и не существует никакой абсолютной несчетности. Эта релятивизация теории множеств была предложена Сколемом [1922—23, 1929, 1930—31]. Так как теорема Лёвенгейма приводит к «парадоксу» Сколема, то ее можно рассматривать как первую из современных теорем о неполноте. Дальнейшие соображения см. у Сколема [1938].

Аксиоматическая арифметика. Группа B постулатов нашей формальной арифметической системы служит примером эффективно перечислимой бесконечной системы элементарных аксиом для теории натуральных чисел, т. е. совокупность формул, выражающих аксиомы, эффективно перечислима (см. теорему 38 § 72). Функции можно, конечно, заменить представляющими их предикатами. Рылль-Нардзевский [1952*] показал, что никакого конечного подмножества этих аксиом недостаточно для выводимости того же класса теорем.

Другой вопрос, полностью ли характеризуют эти аксиомы натуральный ряд чисел. Гёделевская теорема полноты для исчисления предикатов дает нам доказательство следующей теоремы, которая впервые была получена Сколемом [1933, 1934; ср. 1938] другим путем.

Рассмотрим аксиомы для натурального ряда чисел (множество этих последних обозначим через N), пользуясь в качестве первоначальных понятий индивидуумом 0 и предикатом $a' = b$, или, в λ-обозначениях (§ 10), $\lambda ab\, a' = b$, и, возможно, другими первоначальными понятиями. Аксиомы должны быть выразимы посредством предикатных формул с равенством, в которых z выражает 0, а $\mathrm{P}_0(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ выражает $a' = b$.

Рассматривая распределения значений для свободных переменных и предикатных букв любой такой формулы, мы будем через «D» обозначать область, через «z» — индивидуум, сопоставленный с z, и через «$P_0(a, b)$» — предикат, сопоставленный с $\mathrm{P}_0(\mathrm{a}, \mathrm{b})$. Тогда $(D, z, P_0(a, b))$ будет математической системой в смысле § 8, состоящей из множества (или области), элемента этого множества и двуместного предиката над этим множеством.

Теорема 44[C]. *Всякий конечный или эффективно перечислимый бесконечный класс предикатных формул с равенством, который совместно выполним таким образом, что $(D, z, P_0(a, b))$ есть $(N, 0, a' = b)$, является также совместно выполнимым с $0 < \overline{\overline{D}} \leqslant \aleph_0$ и притом так, что система $(D, z, P_0(a, b))$ не изоморфна системе $(N, 0, a' = b)$.*

Доказательство. По условию, имеется совместное выполняющее распределение для данных формул, при котором область D есть N, z принимает значение 0, а $P_0(a, b)$ имеет значение $a' = b$.

Пусть P_1, P_2 и P_3 — другие различные предикатные буквы, которые или не входят в данные формулы, или принимают при данном распределении значения $a+b=c$, $a \cdot b = c$ и $(x)(Ey)T_2(a, a, x, y)$ соответственно. Расширим данный класс формул, добавив (коль скоро они уже в нем не содержались) семь формул, которые выполняются, если данное распределение расширяется (в случае необходимости) путем приписывания буквам P_1, P_2 и P_3 только что указанных значений.

Добавим сначала четыре замкнутые формулы, а именно

$$(a) \quad \begin{array}{l} \forall a P_1(a, z, a),\ \forall a \forall b \exists c \exists d \exists e [P_0(b, c) \& P_1(a, c, d) \& P_1(a, b, e) \& P_0(e, d)], \\ \forall a P_2(a, z, z),\ \forall a \forall b \exists c \exists d \exists e [P_0(b, c) \& P_2(a, c, d) \& P_2(a, b, e) \& P_1(e, a, d)], \end{array}$$

(ср. пример 11 (a) § 74), которые при указанном распределении выражают рекурсивные равенства для $a+b$ и $a \cdot b$, выраженные в терминах представляющих предикатов $a+b=c$ и $a \cdot b = c$, а также две формулы

$$(b) \qquad \forall a \forall b \exists! c P_1(a, b, c), \qquad \forall a \forall b \exists! c P_2(a, b, c),$$

которые выражают, что $a+b=c$ и $a \cdot b = c$ являются представляющими предикатами. Так как предикат $T_2(a, b, x, y)$ примитивно-рекурсивен, то, по следствию из теоремы I § 49, он является арифметическим по Гёделю (§ 48), а значит можно (заменяя $'$, $+$ и $\cdot$ их представляющими предикатами) найти предикатную формулу $T_2(a, b, x, y)$ из $=$, P_0, P_1, P_2, которая выражает этот предикат при рассматриваемом распределении значений. Затем мы добавим формулу

$$(c) \qquad \forall a (P_3(a) \sim \forall x \exists y T_2(a, a, x, y)).$$

Пусть формулы полученного (расширенного) класса будут $F_0, F_1, F_2, \ldots$. Как и при доказательстве теоремы Лёвенгейма (следствие 2 из теоремы 37*), выполнены условия теоремы 37*, и с помощью теорем 37* и 40 мы получаем другое совместное выполнение для $F_0, F_1, F_2, \ldots$. Пусть D^*, z^*, P_0^*, P_1^*, P_2^*, P_3^* служат соответственно областью и значениями z, P_0, P_1, P_2, P_3 при этом выполнении.

Предположим (чтобы затем придти к противоречию), что система $\{D^*, z^*, P_0^*(a^*, b^*)\}$ изоморфна (§ 8) системе $\{N, 0, a' = b\}$, т. е. что D^* бесконечна и может быть пересчитана в виде $s_0, s_1, s_2, \ldots$, так что $z^* = s_0$ и $P_0^*(s_a, s_b) \equiv a' = b$.

Тогда, по теореме 40,

$$(i) \qquad P_3^*(s_a) \equiv (Ex)(y) R_3^*(a, x, y)$$

для некоторого примитивно-рекурсивного предиката R_3.

В § 43 было показано, что когда переменные пробегают натуральный ряд, а 0 и $'$ принимают их обычные значения, то рекурсивные уравнения[1]) для $+$ и $\cdot$ имеют обычные функции $+$ и $\cdot$ своими единственными решениями. Так как формулы (a) и (b) выполняются, то это рассуждение (с небольшими изменениями, чтобы приспособить его к представляющим предикатам вместо функций) показывает теперь, что $P_1^*(s_a, s_b, s_c) \equiv a+b=c$ и $P_2^*(s_a, s_b, s_c) \equiv a \cdot b = c$. Таким же образом наше доказательство теоремы I § 49 показывает теперь, что формула $T_2(a, b, x, y)$ выражает предикат

[1]) В § 43 они назывались равенствами.—*Прим. перев.*

$T_2^*(a^*, b^*, x^*, y^*)$, такой, что $T_2^*(s_a, s_b, s_x, s_y) \equiv T_2(a, b, x, y)$. Следовательно, $\forall x \exists y T_2(a, a, x, y)$ выражает предикат $T^*(a^*)$, такой, что

(ii) $$T^*(s_a) \equiv (x)(Ey) T_2(a, a, x, y).$$

Согласно правилам оценки для $\sim$ (пример 1 § 28) и $\forall$, так как (с) выполняется,

(iii) $$P_3^*(a^*) \equiv T^*(a^*).$$

Сопоставляя (i)—(iii), получаем $(Ex)(y) R_3^*(a, x, y) \equiv (x)(Ey) T_2(a, a, x, y)$. Но, по теореме V (16) § 57, предикат $(x)(Ey) T_2(a, a, x, y)$ не выразим в другой 2-кванторной форме, и для некоторого числа g

$$(Ex)(y) R_3^*(g, x, y) \not\equiv (x)(Ey) T_2(g, g, x, y).$$

Ввиду полученного противоречия мы заключаем, что система $(D^*, z^*, P_0^*(a^*, b^*))$ не изоморфна системе $(N, 0, a' = b)$.

Комментарий. В силу доказанной теоремы, никакое конечное или счетно-бесконечное множество элементарных аксиом не может полностью характеризовать натуральный ряд чисел 0, 1, 2, ..., a, a', ... Если все аксиомы такого множества истинны для натурального ряда, то они должны быть истинными и при некоторой другой интерпретации. Мы установили эту теорему для натурального ряда как системы вида $(N, 0, a' = b)$, но, в силу заменимости a' на $a' = b$, она применима и к натуральному ряду как к системе вида $(N, 0, ')$. В частности, аксиомы из группы постулатов В нашей формальной арифметической системы (§ 19) допускают интерпретацию, отличную от естественной (и в этой новой интерпретации логические символы и символ $=$ употребляются в их обычном смысле).

Эта неполнота группы постулатов В для характеристики натурального ряда становится понятной, если сравнить пятую аксиому Пеано (принцип математической индукции, § 7) со схемой аксиом 13. Пятая аксиома Пеано утверждает, что

(I) $$A(0) \& (x)(A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow (x) A(x)$$

имеет место для всех арифметических предикатов $A(x)$. Эти предикаты образуют несчетную совокупность. Но пучок аксиом, который дает схема 13, выражает только, что (I) имеет место для тех предикатов $A(x)$, которые выразимы посредством формул A(x) рассматриваемой системы, т. е. только для предикатов счетной совокупности. Пятая аксиома Пеано неэлементарна. Ее можно следующим образом выразить в символизме исчисления предикатов второй ступени (§ 37), пользуясь квантором общности по предикатной переменной $\mathscr{A}$:

$$\forall \mathscr{A} [\mathscr{A}(0) \& \forall x (\mathscr{A}(x) \supset \mathscr{A}(x')) \supset \forall x \mathscr{A}(x)].$$

Эти идеи имеют связь с теоремой Гёделя о формально неразрешимых предложениях (теорема 28 или 29 § 42).

Можно считать, что формула $A_p(p)$ или $A_q(q)$ (которая истинна, но недоказуема, если арифметическая система просто непротиворечива) выражает предложение, которое может быть «доказано», исходя из аксиом Пеано, но только при помощи индукции с некоторым индукционным предикатом $A(x)$, который невыразим в системе при естественной интерпретации. (Это предположение получит подтверждение в дальнейшем; см. конец § 79 и (II) § 42.)

Недоказуемость формулы $A_p(p)$ становится понятной также благодаря результату Сколема (теорема 44), потому что формула $A_p(p)$, хотя она и истинна для натурального ряда, является ложной при некоторой другой интерпретации, также удовлетворяющей аксиомам. При этом неразрешимость формулы $A_p(p)$ в арифметическом формализме оказывается явлением того же рода, что и невозможность вывести эвклидов постулат о параллелях или его отрицание, исходя из других аксиом геометрии (§ 8). Данная система аксиом оказывается не категорической.

Действительно, как отмечено выше (с помощью следствия 1 из теоремы 37*), имеет место обратное—формула доказуема, если она истинна при всех интерпретациях, при которых истинны все аксиомы. Значит, в силу известной недоказуемости формулы $A_p(p)$, невозможно, чтобы эта формула была истинной при всех интерпретациях, выполняющих аксиомы. Таким образом, теоремы Гёделя 28 и 37* приводят к другому доказательству теоремы 44 для случая, когда класс формул, о котором говорится в этой теореме, есть класс аксиом из группы постулатов B (выраженных в виде предикатных формул с равенством). Но (как замечено выше, с помощью теоремы 21*) если предикатные формулы с равенством, образующие счетный класс, совместно выполнимы, то формальная система, полученная путем присоединения их в виде аксиом к исчислению предикатов с равенством, (просто) непротиворечива. Таким образом, если дан любой класс формул, удовлетворяющий условиям теоремы 44, то, присоединяя постулаты группы B и воспроизводя в полученной системе доказательство теоремы 28 (или пользуясь частью III теоремы XIII § 60), мы получаем доказательство теоремы 44 в общем виде.

Мостовский [1949] дал интересный пример (подсказанный «парадоксом» Сколема) предложения аксиоматической теории множеств, неразрешимость которого доказывается установлением того, что оно истинно при одной интерпретации и ложно при другой. Крейсел [1950] рассматривает аналогичные проблемы.

Наше первое доказательство теоремы 44, а также второе, основанное на теореме 28 (или XIII), применимо для случая элементарной системы аксиом или эффективно перечислимой системы элементарных аксиом. В доказательстве Сколема не требовалось, чтобы перечисление аксиом было эффективным. Эта дополнительная общность несущественна, если мы, рассматривая теорему 44 как теорему о неполноте формальных аксиоматик, стоим на той точке зрения, что цель аксиоматизации—сделать явными исходные положения теории.

Замечание 1. Наше (первое) доказательство теоремы 44 можно изменить так, что будет обеспечена и дополнительная общность. Предположим, что класс формул в теореме 44 является только *арифметическим по Гёделю* в том смысле, что при некоторой гёделевской нумерации, полученной методами §§ 52 и 56, предикат „x есть гёделевский номер формулы этого класса“, который обозначим через «$C(x)$», является арифметическим по Гёделю. Тогда, по теореме VII (d) § 57, $C(x)$ выразим в одной из форм теоремы V, например, в некоторой q-кванторной форме. Пусть $B(x)$ аналогичным образом относится к классу формул, который получается из данного присоединением конечного перечня формул (подобно тому, как выше были добавлены семь формул, (a)—(с)). Тогда, каким бы образом ни был выбран этот конечный перечень, $B(x)$ выразим в той же самой q-кванторной форме. По теореме XIV (b) § 60 (выбираем $R(x, y) \equiv B(x)$), класс $\hat{x}B(x)$ перечислим посредством некоторой функции $\theta(k)$, рекурсивной относительно q-кванторных предикатов (для случая q-кванторной формы, начинающейся с квантора существования, даже относительно $(q-1)$-кванторных предикатов). Но доказательства теорем 38 и 40 остаются в силе, если отбросить условие, что перечисление $F_0, F_1, F_2, \ldots$ эффективно, а в заключении слова «примитивно-рекурсивны» заменить на «примитивно-рекурсивны относительно θ», где $\theta(k)$ — гёделевский номер формулы F_k. Следовательно (в силу теоремы XI § 58 и (17) и (18) § 57), эти доказательства проходят, если θ рекурсивно относительно q-кванторных предикатов, а в заключении вместо 2-кванторных рассматриваются $(q+2)$-кванторные формы. Теперь доказательство теоремы 44 проходит, если воспользоваться случаем теоремы V для $(q+2)$-, а не 2-кванторной формы. Можно еще, далее, обобщить теорему 44, считая предикат $C(x)$ арифметическим по Гёделю относительно предиката M теоремы VIII § 57, включая в перечень присоединяемых формул три формулы, служащие для выражения M и применяя теоремы I*, V*, VII*, XI* (с M в качестве Ψ) вместо I, V, VII, XI. (Второе доказательство теоремы 44 также можно провести при более общих условиях, если воспользоваться обобщениями теоремы 28 или XIII на «неконструктивные логики»[1]).)

Однако, теорема Гёделя о неразрешимости не ограничивается случаем, когда аксиомы элементарны (теорема XIII § 60). Но можно полностью охарактеризовать натуральный ряд чисел посредством аксиом Пеано, пятая из которых неэлементарна, если допускать понятие всех предикатов над областью. Допустим, что имеется непротиворечивая категорическая формальная система, содержащая эти аксиомы для натурального ряда. Согласно той концепции формальной системы, которой мы придерживаемся, формальная система может обладать только счетной совокупностью формальных объектов. Значит, вместо предикатной переменной $\mathcal{A}$ из пятой аксиомы Пеано в системе можно подставлять только формулы счетной совокупности. Таким образом, при дедуктивных построениях внутри системы, (I) может быть использована попрежнему только для счетной совокупности предикатов. Действительно, по теореме Гёделя (теорема XIII), имеется следствие из этих аксиом при данной интерпретации, которое не доказуемо, т. е. не выводимо из аксиом посредством логики, формализованной в этой системе. Таким образом, и при наличии неэлементарных аксиом не все те формулы должны быть доказуемы, которые истинны при всех интерпретациях, выполняющих аксиомы. (В нашем примере по существу имеется единственная такая интерпретация.) Неполнота, которая была обнаружена в системе элементарных аксиом, переносится на дедуктивный аппарат, если мы пытаемся устранить ее путем употребления неэлементарных аксиом.

Сколем [1934, стр. 160] разъясняет это так: «... [натуральный] ряд [чисел] полностью описывается, например, аксиомами Пеано, если рассматривать понятие „множество" или „пропозициональная функция" как нечто заранее данное, имеющее абсолютный смысл, не зависящий от принципов порождения или аксиом. Но если аксиоматизацию проводить последовательно, так что и рассуждения, которые ведутся с помощью множеств или пропозициональных функций, также аксиоматизированы, то, как мы видели, однозначное или полное описание натурального ряда оказывается невозможным».

Эта ситуация рассматривается Хенкином в работе [1950], на которую автор обратил внимание после того, как этот параграф был уже написан (первый черновик в 1947 г.). См. также, например, статьи Мостовского [1947a] (реферат Кемени [1948]) и Россера и Ван Хао [1950] (реферат Сколема [1951]).

§ 76. ПРОБЛЕМА РАЗРЕШИМОСТИ

Теорема 54. *Проблема разрешимости для чистого исчисления предикатов (для чистого исчисления предикатов с равенством) неразрешима, т. е. не суще-*

[1]) Россер [1937] перенес теоремы 28 и 30 на случай, когда к числу правил вывода присоединяется *правило Карнапа: Если* $(y) \vdash F(y)$, *то* $\vdash \forall y F(y)$, причем этому доказательству приписывается по индукции ранг, а именно — наименьшее порядковое число, превосходящее *ранги* доказательств формул $F(n)$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Россер рассматривал теорию типов и случай, когда все ранги $< \omega^2$. Этот результат был недавно обобщен Б. Я. Фалевичем на случай рангов, являющихся конструктивными трансфинитами. Для арифметики ср. Мостовский [1947*]. — *Прим. перев.*

ствует разрешающей процедуры для распознавания того, доказуема ли в этом исчислении произвольная предикатная формула (предикатная формула с равенством). (Чёрч [1936 а], Тьюринг [1936—37].

Доказательство для исчисления предикатов. Мы видели в § 75, что проблема разрешимости для доказуемости в произвольной аксиоматической теории с элементарной системой аксиом сводится к проблеме разрешимости для доказуемости в чистом исчислении предикатов. Таким образом, чтобы доказать эту теорему, достаточно найти элементарную аксиоматическую теорию, для которой, согласно тезису Чёрча (§ 60), не может существовать разрешающей процедуры.

В силу теоремы 33 § 61, примером такой аксиоматической теории служит формальная система Робинсона, описанная в лемме 18b § 49, если эта система просто непротиворечива. Доказательство этой простой непротиворечивости будет приведено в § 79 (теорема 53(a)). В соответствии с этим, мы здесь даем рассматриваемой теореме номер 54.

Рассмотрим подробно это рассуждение (уже намеченное в § 75). Пусть S_2 означает систему с тринадцатью отдельными аксиомами, рассмотренную в лемме 18b.

(A) Применяя теорему 43 (см. пример 11 (a) § 74), можно получить другую систему S_1, в которой функциональные символы $'$, $+$, $\cdot$ заменены соответствующими предикатами, а число аксиом увеличено до девятнадцати. В силу (VIIIa), формула E из S_2 доказуема в S_2 тогда и только тогда, когда формула E$'$ из S_1 доказуема в S_1.

(B) Затем можно заменить аксиомы их замыканиями, не изменяя понятия доказуемости (конец § 32).

(C) Затем, пользуясь &-правилами, так как число аксиом конечно, можно заменить их на их конъюнкцию, так что получится одна единственная аксиома.

(D) Далее можно, изменяя обозначения, употреблять переменную z, которая не входит в эту аксиому (аксиомы), вместо индивидуального символа 0, после чего под доказуемостью следует понимать выводимость в исчислении предикатов из полученной аксиомы (аксиом) с фиксированной z. Если C получается в результате этой замены из не содержащей z формулы D системы S_1, то, согласно замечанию 2 (b) § 34, C доказуема в новом смысле в том и только в том случае, если D была доказуема в прежнем смысле. (Можно избежать этого рассмотрения 0 отдельно от функциональных символов, если воспользоваться в (A) примером 11 (b) § 74.)

(E) Далее можно, изменяя обозначения, употреблять предикатные буквы вместо предикатных символов. Если B получается в результате этой перемены обозначений из некоторой формулы C, то, в силу тривиальных применений теорем 15 и 16 § 34, B доказуема в новом смысле в том и только в том случае, если C была доказуема в старом смысле. (В § 75 мы считали, что B не содержит, кроме z, ни одной свободной переменной, но это делалось там для надлежащего применения теоретико-множественных понятий и теперь несущественно.)

(F) Наконец, согласно $\supset$-правилам, B доказуема в только что описанном смысле, т. е. F $\vdash$ B с фиксированным z в исчислении предикатов, где F—формула (в которую свободно входит только z), выражающая теперь аксиомы,—в том и только в том случае, если F $\supset$ B доказуема в исчислении предикатов.

Весь этот процесс, посредством которого по данной формуле E из S_2 мы находим предикатную формулу F $\supset$ B, такую, что $\{\vdash$ E в $S_2\} \equiv \{\vdash$ F $\supset$ B в исчислении предикатов}, эффективен. (С помощью гёделевской нумерации он может быть представлен посредством некоторой обще-рекурсивной функции, как было рассмотрено в § 61, и он может быть осуществлен при помощи машины Тьюринга, как в конце § 70.) Следовательно, если бы имелась разрешающая процедура для доказуемости в чистом исчислении предикатов, то имелась бы такая процедура и для доказуемости в S_2, состоящая в нахождении предикатной формулы F ⊃ B, соответствующей данной формуле E из S_2, и в последующем применении разрешающей процедуры для исчисления предикатов к формуле F ⊃ B. Но по теореме 33, если S_2 просто непротиворечива, то разрешающей процедуры для доказуемости в S_2 не существует.

Это рассуждение применимо и к исчислению предикатов с равенством, так как, по теореме 41 (b), доказуемость в системе Робинсона равносильна доказуемости в системе, состоящей из исчисления предикатов с равенством и семью отдельными аксиомами.

Замечание 1. Порядок, в котором производятся редукционные шаги (A)—(F), не имеет значения, коль скоро (B) и (C) предшествуют (F), (A) предшествует (B), (C) и (E), и, если (D) предшествует (B), то по отношению к переменной z операция замыкания в (B) не производится. (Кроме того, можно опустить (C) и применять (F) отдельно к каждой аксиоме; см. *4 и *5 § 26.)

Замечание 2. Доказательство теоремы 54 можно следующим образом основывать на теореме XII § 60 вместо теоремы 33. С помощью предыдущих редукций (A)—(F) для системы Робинсона и примера 2 § 60 или посредством (метода) этих редукций для системы примера 2 § 73, с использованием свойства непротиворечивости, которое будет установлено в § 79 (теорема 53 (b) или теорема 52) получаем следующее предложение: *Для любого фиксированного примитивно- (или обще-) рекурсивного предиката $R(x, y)$ имеется эффективная процедура, позволяющая для произвольного данного числа x найти предикатную формулу K_x, такую, что*

(1) $$(Ey)\,R(x, y) \equiv \{\vdash K_x \text{ в исчислении предикатов}\}.$$

Теорема 54 вытекает теперь из теоремы XII, если взять $R(x, y) \equiv T_1(x, x, y)$. Это доказательство теоремы XII при помощи примера 2 § 73 по существу совпадает с первоначальным доказательством Чёрча, а доказательство с помощью теоремы 33—с доказательством Мостовского и Тарского [1949, резюме].

Замечание 3. Согласно нашей концепции формальной системы S, формулы из S должны составлять эффективно перечислимую совокупность, т. е. допускать такую гёделевскую нумерацию, что для произвольной данной формулы A можно эффективно найти ее номер x, и обратно, если дано произвольное число x, то можно эффективным образом решить, является ли оно гёделевским номером некоторой формулы, и если да, то найти эту формулу A_x. Итак (ср. замечание 1 (a) § 60), *имеется обще-рекурсивный предикат R, такой, что*

(2) $$\{\vdash A_x \text{ в } S\} \equiv (Ey)\,R(x, y).$$

Таким образом, проблема разрешимости для доказуемости в произвольной системе S эквивалентна проблеме разрешимости для некоторого предиката вида $(Ey)\,R(x, y)$. В силу замечания 2 или в силу (первого) доказательства теоремы 54 и последней части примера 3 § 61, проблема разрешимости для исчисления предикатов имеет наивысшую степень неразрешимости для предикатов этого вида (см. абзац перед примером 3 § 61). Итак (сопоставляем (1) и (2)), проблема разрешимости для доказуемости в произвольной формальной системе сводится к такой же проблеме для исчисления предикатов (классического или интуиционистского). Это—обобщение нашего замечания (§ 75), что проблема разрешимости для любой аксиоматической теории с элементарной системой аксиом сводится к проблеме разрешимости для исчисления предикатов; но, конечно, такое сведéние, основанное на переходе от системы к гёделевской нумерации при помощи (2) и далее к исчислению предикатов при помощи (1), является весьма окольным.

В силу §§ 37, 72, 73, 75, доказуемость в исчислении предикатов с равенством равносильна тождественности в каждой непустой области; следовательно, не существует разрешающей процедуры для распознавания тождественности предикатной формулы с равенством. Трахтенброт [1950] доказал аналогичную теорему для тождественности в каждой непустой конечной области.

Редукции и частные случаи. Ввиду того что очень многие конкретные вопросы (например, «великая теорема» Ферма, § 13) и проблемы разрешимости сводятся к проблеме разрешимости для исчисления предикатов, много работ было посвящено этой проблеме, в результате чего были получены положительные результаты двух родов: (α) редукции общей проблемы и (β) решения для частных случаев. Эти результаты часто излагаются в двойственной теоретико-множественной форме, в которой эта проблема относится к распознаванию не доказуемости, а выполнимости предикатной формулы в некоторой непустой области (§§ 72, 75).

Одним из самых первых примеров (α) служит сколемовская нормальная форма (Сколем [1920], Гильберт—Бернайс [1934, стр. 158 и след.]). Сколемовская теоретико-доказательственная (теоретико-выполнительная) нормальная форма—это предваренная формула (теорема 19 § 35), в которой все кванторы существования (общности) стоят вначале. Для любой данной предикатной формулы G можно эффективно указать предикатную формулу M (N) этого вида, такую, что M доказуема в исчислении предикатов (N выполнима в данной области) тогда и только тогда, когда это справедливо для G. Итак, в общем случае проблема разрешимости для доказуемости (выполнимости) для предикатных формул сводится к такой же проблеме для сколемовских нормальных форм (см. последнюю часть § 61). Эта нормальная форма M (N), вообще говоря, не эквивалентна G, но M ($\neg$ N) дедуктивно равна формуле G ($\neg$ G) в исчислении предикатов с постулированным правилом подстановки (§ 37). Сколем пользовался своей теоретико-выполнительной нормальной формой при упрощении доказательства и обобщении теоремы Лёвенгейма, а Гильберт и Бернайс [1939] пользуются ею при доказательстве гёделевской теоремы полноты, причем их способ доказательства[1]) значительно упрощает формализацию, на которую мы ссылались при доказательстве теоремы 36 § 72.

Примером (β) служит решение проблемы разрешимости, найденное Лёвенгеймом [1915] (упрощено Сколемом [1919]), а затем независимо Беманом [1922], для случая предикатных формул, содержащих только предикатные буквы с 0 или 1 аргументом. В силу замечания 1 § 34, это равносильно тому, что проблема разрешимости решена для 1-*местного исчисления предикатов*, т. е. для исчисления предикатов только с 0- и 1-местными предикатными буквами. (См. конец § 72; Гильберт—Бернайс [1934, стр. 179—209].)

Рассмотрение редукций и частных случаев проблемы разрешимости остается областью для дальнейших активных изысканий, с тех пор как Чёрч показал, что общего решения существовать не может (теорема 54). Литература по

---

[1]) Этот способ является по существу просто дуализацией доказательства, изложенного у Гильберта и Аккермана.—*Прим. перев.*

этому вопросу слишком обширна, и поэтому мы не будем здесь ее перечислять, отсылая читателя к библиографии Чёрча и рефератам в Journal of Symbolic Logic (см. предисловие к библиографии этой книги). Часть этих результатов описана у Гильберта—Бернайса [1934 и 1939]. Чёрч [1951] рассматривает специальные случаи[1]).

Аксиоматические теории. Пользуясь методом Тарского [1949, резюме], исследуем теперь проблемы разрешимости для аксиоматических теорий. Мы будем рассматривать теории, формализованные на основе исчисления предикатов или исчисления предикатов с равенством. (Тарский применяет последнее.) Для сохранения прежней терминологии мы будем обычно говорить «формальная система S», хотя Тарский вместо этого говорит «теория $\mathfrak{T}$», подчеркивая связь с математикой.

Логическими константами мы будем называть шесть логических символов $\supset, \&, \vee, \neg, \forall, \exists$, если логическим исчислением служит исчисление предикатов; эти же символы и $=$, если логическим исчислением служит исчисление предикатов с равенством. Термы и формулы системы строятся, помимо этих логических констант, при помощи конечного числа индивидуальных, функциональных и предикатных символов, называемых *нелогическими константами* (но без помощи предикатных букв). Постулатами, помимо постулатов логического исчисления, служит конечное или бесконечное множество *нелогических аксиом*.

Следуя Тарскому, мы будем называть такого рода систему *конечно аксиоматизуемой*, если число нелогических аксиом конечно или все они оказываются зависимыми от некоторого конечного их множества (пример 2 § 74). О таких системах мы будем говорить, что S_2 служит *расширением* S_1 (или S_1 является *подсистемой* системы S_2), если каждая формула, доказуемая в S_1, доказуема в S_2; тогда S_2 должна содержать все нелогические константы из S_1 и, кроме того, может быть, еще и другие. Расширение S_2 системы S_1 является *конечным расширением*, если все аксиомы S_2, за исключением конечного их числа, доказуемы в S_1. Мы будем коротко говорить, что система S_1 *неразрешима*, если проблема разрешимости для доказуемости в S_1 неразрешима.

Следуя Тарскому, мы будем говорить, что S *существенно неразрешима*, если S (просто) непротиворечива и каждое (просто) непротиворечивое расширение системы S неразрешимо.

Россер [1936] показал, что системы, аналогичные нашей арифметической системе гл. IV (если они непротиворечивы) обладают этим свойством (ср. теорему 33 § 61). Тогда формализованные системы аксиоматической теории множеств Неймана [1925], Бернайса [1937—54] и Гёделя [1940] служат (в случае непротиворечивости) примерами систем S, одновременно существенно неразрешимых (так как они содержат обычную арифметику) и конечно аксиоматизуемых. Мостовский и Тарский [1949, резюме] впервые отметили существование системы S, одновременно существенно неразрешимой и конечно аксиоматизуемой, и в то же время настолько простой, что ее легко можно интерпретировать в различных других теориях—в каком смысле, это будет вскоре определено. Это служит основой для применения метода Тарского, который мы изложим в теореме 45 (b) и (c). Еще более простым примером существенно неразрешимой и конечно аксиоматизуемой системы служит система Рафаэля Робинсона [1950, резюме], которая содержит тринадцать нелогических аксиом, описанных в лемме 18b § 49, если в основу кладется исчисление предикатов, или только семь (аксиомы 14, 15, 18—21 и формула из *137 или—эквивалентным образом—из *136), описанных Робинсоном, если в основу кладется исчисление предикатов с равенством. Робинсон установил, что ника-

---

[1]) Недавно вышла книга Аккермана [1954].—*Прим. перев.*

кая из этих семи аксиом не может быть опущена без нарушения существенной неразрешимости.

Тарский называет две системы, S_1 и S_2, *совместимыми*, если они имеют одни и те же нелогические константы и общее (просто) непротиворечивое расширение. Рассмотрим теперь две любые системы S_1 и S_2, имеющие, вообще говоря, не одни и те же нелогические константы. Рассмотрим сперва случай, когда логикой служит исчисление предикатов с равенством. Тогда система S_2 называется *непротиворечиво интерпретируемой* в S_1, если S_1 и S_2 имеют общее непротиворечивое расширение S_3, причем в S_3 для каждого n-местного предикатного символа P (функционального символа f) системы S_2, которого нет в S_1, доказуема формула, имеющая вид $P(x_1, \ldots, x_n) \sim F(x_1, \ldots, x_n)$ явного определения P (вид $f(x_1, \ldots, x_n) = w \sim F(x_1, \ldots, x_n, w)$, т. е. (iii) леммы 26 § 74), где все указанные переменные различны и $F(x_1, \ldots, x_n)$ ($F(x_1, \ldots, x_n, w)$) содержит свободно только эти переменные, и нелогические константы формулы $F(x_1, \ldots, x_n)$ ($F(x_1, \ldots, x_n, w)$) все содержатся в S_1, за исключением, может быть, дополнительных индивидуальных символов. Для случая, когда логическим исчислением служит исчисление предикатов и в S_2 имеются функциональные символы, которых нет в S_1, S_1 должна, кроме того, содержать $=$ в числе своих констант, и в S_3 должны быть доказуемы аксиомы равенства для предикатных и функциональных символов из S_1. Эта ситуация рассмотрена (довольно тривиальным образом) в доказательстве теоремы 43 § 74 (но при допущении непротиворечивости для (a) или для (b)).

Теорема 45. (a) *Если S неразрешима, то неразрешима каждая система S_1, в которую входят все константы из S, за исключением, может быть, некоторых индивидуальных символов, и для которой S служит конечным расширением.*

(b) *Если S существенно неразрешима и конечно аксиоматизуема, то каждая система S_1, в которую входят все константы из S, за исключением, может быть, некоторых индивидуальных символов, и которая имеет с S общее непротиворечивое расширение S_3 (в частности, каждая система S_1, совместимая с S), неразрешима.*

c) *Если S существенно неразрешима и конечно аксиоматизуема, то каждая система S_1, в которой S непротиворечиво интерпретируема, неразрешима.* (Тарский [1949, резюме].)

Доказательство. (a) Посредством редукций (B), (C), (D) в применении только к тем индивидуальным символам из S, которых нет в S_1, и (F). (Тарский выбирает аксиомы с самого начала замкнутыми и рассматривает только случай, когда S_1 и S имеют одни и те же константы; при этом (B) и (D) не требуются.)

(b) Пусть S_2 — система, аксиомами и константами которой служат аксиомы и константы обеих систем, S_1 и S. Тогда S_2 — подсистема S_3; и так как S_3 непротиворечива, то и S_2 непротиворечива. Кроме того, S_2 — расширение S, и так как S существенно неразрешима, а S_2 непротиворечива, то S_2 неразрешима. Но S_2 — конечное расширение S_1. Теперь применяем (a) с S_2 в качестве S.

(c) Рассмотрим подробно случай, когда S имеет функциональный символ f, являющийся единственной константой из S (за исключением, может быть, индивидуальных символов), которая не входит в S_1, и логикой служит исчисление предикатов. Если S имеет бо́льшее число таких функциональных символов, то мы просто применяем повторно теорему 42 с ее леммами; а если S имеет такие же предикатные символы, то мы аналогично применяем пример 1 § 74. Результаты сохраняются и для случая исчисления предикатов с равенством, так как (согласно теореме 41 (b)) расширение логики до этого исчисления равносильно принятию аксиом равенства для всех функциональных и предикатных символов, которые имеются в рассматриваемых системах (что только упрощает рассуждения).

Пусть S_3 — общее расширение S_1 и S, описанное в определении непротиворечивой интерпретируемости (с S в качестве S_2).

Пусть S_{4a} — подсистема S_3, константами которой служат константы из S_1, f и дополнительные индивидуальные символы (если таковые имеются), принадлежащие S или входящие в $F(x_1, \ldots, x_n, w)$, а нелогическими аксиомами — нелогические аксиомы систем S_1 и S, аксиомы равенства для предикатных и функциональных символов из S_1 и (iii).

Так как S_{4a} служит подсистемой S_3 и S_3 непротиворечива, то и S_{4a} непротиворечива. Следовательно, так как S_{4a} является расширением S, а S существенно неразрешима, S_{4a} неразрешима.

Пользуясь леммами 26 и 27 и замечанием 2(a) § 74, в перечне нелогических аксиом для S_{4a} можно, не меняя класса доказуемых формул, заменить каждую аксиому A из числа нелогических аксиом системы S на ее главную f-несодержащую форму A′, а (iii) на (i) и (ii); обозначим получающуюся при этом неразрешимую систему через S_4.

По теореме 42 § 74 функциональный символ f и его аксиома (ii) могут быть устранены из S_4, и получающаяся тогда система S_5 (в силу (IV) § 74) также неразрешима.

Но S_5 имеет только те константы, которые входят в S_1 и, возможно, индивидуальные символы; кроме того, S_5 является конечным расширением S_1. Итак, в силу (a) (с S_5 в качестве S), S_1 неразрешима.

Замечание 4. Что касается условия, наложенного на S_3 в определении непротиворечивой интерпретируемости, то можно требовать, чтобы вместо (iii) в S_3 была доказуема формула, имеющая вид $f(x_1, \ldots, x_n) = t(x_1, \ldots, x_n)$ явного определения f, где $t(x_1, \ldots, x_n)$ — терм, содержащий только указанные переменные и в качестве нелогических констант только функциональные символы из S_1 и, возможно, индивидуальные символы. Действительно, тогда в качестве $F(x_1, \ldots, x_n, w)$ можно взять $t(x_1, \ldots, x_n) = w$.

Пример 1. В силу (b), так как система Робинсона, которую мы обозначим через S, существенно неразрешима и конечно аксиоматизуема, то каждая формальная система S_1 с константами $=$, $'$, $+$, $\cdot$ (и, возможно, другими, например 0), доказуемые формулы которой выражают истинные предложения о натуральных числах, неразрешима, если мы считаем, что упомянутая сейчас истинность гарантирует простую непротиворечивость некоторого общего расширения S_3 (например того, аксиомы и константы которого — это аксиомы и константы обеих систем S_1 и S). Чтобы получить неразрешимость такой системы S_1 в качестве метаматематического результата, остается провести метаматематическое доказательство непротиворечивости для S_3. Это же имеет место и для таких же систем, содержащих (по крайней мере) константы $=$, $+$, $\cdot$, в силу (c) и замечания 4, так как $'$ явно определим через индивидуальный символ 1 и через $+$.

Начиная с примера конечно аксиоматизуемой и существенно неразрешимой системы, предложенного Мостовским и Тарским, Мостовский и Тарский [1949, резюме], Тарский [1949a, резюме, 1949b, резюме], Дж. Робинсон [1949, резюме, 1949] и Р. Робинсон [1949, резюме] установили одну за другой неразрешимость различных математических теорий — в теории чисел (целых и рациональных), в теориях колец, групп, полей, структур и в проективных геометриях.

Глава XV

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ; КЛАССИЧЕСКАЯ И ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ СИСТЕМЫ

§ 77. ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ГЕНЦЕНА

То, что мы получили в примере 2 § 73, можно описать как прямой путь вывода $A(x)$ из аксиом S в исчислении предикатов при условии, что $(Ey)R(x, y)$. Этот прямой путь может привести от аксиом к $A(x)$ только при условии, что $(Ey)R(x, y)$. Чтобы установить свойство непротиворечивости, т. е. что $A(x)$ выводима только при условии, что $(Ey)\,R\,(x, y)$, нам надо показать, что в исчислении предикатов окольным путем можно придти от аксиом к $A(x)$ только в том случае, когда это можно сделать прямым путем. В формализме рекурсивных функций соответствующая проблема непротиворечивости решалась тривиально (§ 54, пример 3 § 60) именно потому, что правила системы не допускали никакого пути от исходных формул, кроме прямого. Это наводит нас на мысль исследовать, не существует ли теоремы об исчислении предикатов, утверждающей, что если формула доказуема (или выводима из других формул), то она доказуема (или выводима) и некоторым прямым способом. Другими словами, не существует ли теоремы, дающей нормальную форму для доказательств и выводов, причем доказательства и выводы в нормальной форме являются в известном смысле прямыми.

Теорема такого рода была получена Генценом [1934—35*]. Мы изложим ее в § 78, а в § 79 с ее помощью получим результаты о непротиворечивости, упомянутые в примере 2 § 60 и примере 2 § 73 (и использованные в § 76), а также непротиворечивость арифметики с ограниченным правилом индукции (упомянутым в начале § 42). Эти доказательства непротиворечивости могут быть проведены другими методами, как у Аккермана [1924—25], Неймана [1927] и Эрбрана [1930, 1931—32]. Все они довольно длинны. Генценовское доказательство—одно из самых доступных, потому что доказательство его «основной теоремы» или теоремы о нормальной форме (из которого оно главным образом и состоит) распадается на ряд случаев, каждый из которых рассматривается весьма просто. Другое применение этой теоремы будет дано в § 80. За исключением отдельных пунктов, §§ 81 и 82 не зависят от §§ 77—80.

Генценовская нормальная форма для доказательств в исчислении предикатов требует классификации дедуктивных шагов, отличной от той, которая дается постулатами формальной системы исчисления предикатов из гл. IV (§ 19). Следует отделить символ импликации $\supset$ в его роли посредника при выводах от этого же символа в роли составного символа доказываемой формулы. В первой из указанных ролей этот символ будет заменен новым формальным символом $\rightarrow$ (читается: «дает» или «приводит к»), которому будут приписаны свойства, сходные со свойствами содержательного символа «$\vdash$» наших прежних выводимых правил.

В генценовской классификации дедуктивных операций ясность достигается благодаря введению новой формальной системы для исчисления предикатов. Формальную систему исчисления высказываний и предикатов, изученную ранее (гл. IV и след.), мы будем теперь называть *системой гильбертовского* *типа* и обозначать через H. Точнее, H означает ту или иную произвольную или конкретную из различных систем, в соответствии с тем, рассматриваем ли мы исчисление высказываний или исчисление предикатов, и притом—классическое или интуиционистское (§ 23), и в соответствии с тем смыслом, в котором употребляются слова „терм" и „формула" (§§ 17, 25, 31, 37, 72—76). Соответственно те же самые возможности будут иметь место для *системы генценовского типа* $G1$, которую мы сейчас введем, и для дальнейших систем $G2$, $G3$ и $G3a$.

Правила преобразования, или дедуктивные правила системы $G1$, будут применяться не к формулам системы H, а к объектам, которые будут получаться из формул посредством одного дополнительного правила образования, в связи с чем мы введем для этих объектов новый термин „секвенция". (Генцен употребляет «Sequenz», что переводится по-английски «sequent», так как английское слово «sequence» занято под обозначение произвольной последовательности предметов, чему по-немецки соответствует «Folge».) *Секвенция* — это формальное выражение вида $A_1, \ldots, A_l \rightarrow B_1, \ldots, B_m$, где $l, m \geqslant 0$ и $A_1, \ldots, A_l$, $B_1, \ldots, B_m$ — формулы. Часть $A_1, \ldots, A_l$ называется *антецедентом*, а часть $B_1, \ldots, B_m$ — *сукцедентом* секвенции $A_1, \ldots, A_l \rightarrow B_1, \ldots, B_m$.

При $l, m \geqslant 1$ секвенция $A_1, \ldots, A_l \rightarrow B_1, \ldots, B_m$ имеет ту же интерпретацию для $G1$, что и формула $A_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A_l \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$ для H. Эта интерпретация распространяется на случаи с $l = 0$ или $m = 0$ при помощи соглашения, что $A_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A_l$ при $l = 0$ («пустая конъюнкция») рассматривается как истина, а $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ при $m = 0$ («пустая дизъюнкция») — как ложь.

Формула *входит* в секвенцию $A_1, \ldots, A_l \rightarrow B_1, \ldots, B_m$ (или *принадлежит* этой секвенции), если она служит одним из $l+m$ вхождений формул $A_1, \ldots, A_l$, $B_1, \ldots, B_m$; аналогично для вхождения формулы в антецедент или сукцедент. Например, в секвенцию $\mathcal{A}, \mathcal{A} \mathbin{\&} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ входят формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \mathbin{\&} \mathcal{B}$, но не $\mathcal{B}$. Переменная (символ, квантор и т. д.) *входит* в секвенцию, если она (он) входит в некоторую формулу этой секвенции, и аналогично для вхождений в антецедент и сукцедент.

Как и в гл. V, мы пользуемся заглавными греческими буквами «Γ», «Δ», «Θ», «Λ» и т. д. для обозначения конечных (в том числе пустой) последовательностей формул. При этом теперь мы эти обозначения будем применять, в частности, для антецедента (сукцедента) или частей антецедента (сукцедента) и считать, что они содержат разделяющие формальные запятые.

Постулаты формальной системы $G1$

Соглашения: A, B, C, D — формулы; Γ, Δ, Θ, Λ — конечные (возможно, пустые) последовательности формул; x — переменная; A(x) — формула; t — терм, свободный для x в A(x), а b — переменная, свободная для x в A(x) и (если b отлична от x) не входящая свободно в A(x).

Ограничение на переменные (для двух постулатов, указанных ниже). Переменная b постулата не входит свободно в его заключение[1]). (Если A(x) не содержит x свободно, то A(b) есть A(x), какова бы ни была переменная b; в таких случаях мы условимся выбирать для анализа в качестве b переменную, не входящую свободно в заключение, так что ограничение будет соблюдаться.)

Различие между классической и интуиционистской системами $G1$ обеспечивается интуиционистским ограничением, указанным для двух постулатов.

---

[1]) Т. е. в нижнюю строчку каждого из перечисленных ниже логических и структурных правил. — *Прим. перев.*

Схема аксиом

$$C \to C.$$

Логические правила вывода для исчисления высказываний

Введение символа	в сукцедент	в антецедент
$\supset$	$\dfrac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \supset B.}$	$\dfrac{\Delta \to \Lambda, A \qquad B, \Gamma \to \Theta}{A \supset B, \Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta.}$
$\&$	$\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \qquad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \& B.}$	$\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{A \& B, \Gamma \to \Theta.}$ $\quad \dfrac{B, \Gamma \to \Theta}{A \& B, \Gamma \to \Theta.}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, A \vee B.}$ $\quad \dfrac{\Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \vee B.}$	$\dfrac{A, \Gamma \to \Theta \qquad B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta.}$
$\neg$	$\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg A,}$	$\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\neg A, \Gamma \to \Theta.}$

с пустой Θ для интуиционистской системы.

Дополнительные логические правила вывода для исчисления предикатов.

Введение символа	в сукцедент	в антецедент
	$\dfrac{\Gamma \to \Theta, A(b)}{\Gamma \to \Theta, \forall x A(x),}$ при выполнении ограиичения на переменные.	$\dfrac{A(t), \Gamma \to \Theta}{\forall x A(x), \Gamma \to \Theta.}$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma \to \Theta, A(t)}{\Gamma \to \Theta, \exists x A(x).}$	$\dfrac{A(b), \Gamma \to \Theta}{\exists x A(x), \Gamma \to \Theta,}$ при выполнении ограничения на переменные.

Структурные правила вывода

	в сукцеденте	в антецеденте
Утончение	$\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, C,}$ с пустой Θ для интуиционистской системы.	$\dfrac{\Gamma \to \Theta}{C, \Gamma \to \Theta.}$
Сокращение	$\dfrac{\Gamma \to \Theta, C, C}{\Gamma \to \Theta, C.}$	$\dfrac{C, C, \Gamma \to \Theta}{C, \Gamma \to \Theta.}$
Перестановка	$\dfrac{\Gamma \to \Lambda, C, D, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, D, C, \Theta.}$	$\dfrac{\Delta, D, C, \Gamma \to \Theta}{\Delta, C, D, \Gamma \to \Theta.}$

$$\text{Сечение} \quad \frac{\Delta \to \Lambda, C \qquad C, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta.}$$

Для классической системы $G1$ эти постулаты, кроме обоих $\supset$-правил, удовлетворяют следующей симметрии двойственности. Двойственность правил для $\&$ и $\vee$ состоит в том, что каждая из этих групп преобразуется в другую при взаимной замене $\&$ на $\vee$ и $\to$ на $\leftarrow$. Аналогичным образом ∀- и ∃-правила рассматриваются как двойственные. Схема аксиом, ¬-правила и структурные правила всех четырех родов само-двойственны.

Правила, стоящие в левом столбце, мы будем называть *сукцедентными правилами* и обозначать их коротко через «→ ⊃», «→ &», «→ V», «→ ¬», «→ ∀», «→ ∃», «→ *У*», «→ *С*», «→ *П*» соответственно. Правила, стоящие в правом столбце, мы будем называть *антецедентными правилами* и обозначать через «⊃ →», «& →» и т. д.

Логические правила представляют собой введение логического символа, в одних случаях — в сукцедент (левый столбец), а в других — в антецедент (правый столбец). Формула, в которой содержится введенный символ, называется *главной формулой*. Одна или две формулы, явно указанные в посылках[1]), называются *боковыми формулами*.

Пример 1. Самое верхнее правило в правом столбце — это «⊃-введение в антецедент», или «⊃-антецедентное правило», или, короче, «⊃ →». Главной формулой служит A ⊃ B, в первой посылке боковой формулой служит A, а во второй B.

Логические правила системы *G*1 по форме более или менее сходны с соответствующими выводимыми правилами теоремы 2 § 23, причем неопределяемый формальный символ → встречается теперь вместо определяемого метаматематического символа «⊢». Введению в сукцедент соответствует в теореме 2 введение, а введению в антецедент — удаление. Новая схема аксиом и структурные правила соответствуют общим свойствам прежнего символа ⊢, перечисленным в лемме 5 § 20.

Для построения доказательств в *G*1 применяется форма дерева (конец § 24). Запись «⊢ S», где S — секвенция, служит для выражения того, что секвенция S доказуема.

При записи доказательств (или их частей) громоздко было бы каждый раз указывать все применения структурных правил с одной посылкой. Мы примем, что двойная черта (снабженная или нет указанием другого правила) означает последовательное применение одного или нескольких утончений («*У*»), сокращений («*С*») и перестановок («*П*») (которое следует за применением другого правила, если на таковое указывается).

Пример 2. Каковы бы ни были формулы A, B и C, (a) и (b) служат в *G*1 интуиционистским доказательством, а (c) — только классическим.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A \qquad \dfrac{A \to A \qquad \dfrac{B\to B \quad C\to C}{B\supset C,\ B\to C}\,{\supset\to}}{\overline{B,\ A\supset(B\supset C),\ A\to C}}\,{\supset\to}}{\overline{A,\ A\supset(B\supset C),\ A\supset B\to C}}\,{\supset\to}}{A\supset(B\supset C),\ A\supset B\to A\supset C}\,{\to\supset}}{A\supset B\to(A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C)}\,{\to\supset}}{\to(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C)).}\,{\to\supset}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A}{\overline{A,\ \neg A\to B}}\,{\neg\to}}{\neg A\to A\supset B}\,{\to\supset}}{\to\neg A\supset(A\supset B).}\,{\to\supset}$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\to A}{\to A,\ \neg A}\,{\to\neg}}{\neg\neg A\to A}\,{\neg\to}}{\to\neg\neg A\supset A.}\,{\to\supset}$$

Отправляясь от перечня постулатов для *G*1, устанавливаем посредством индукции:

---

[1]) Т. е. в верхних строчках логических или структурных правил. — *Прим. перев.*

Лемма 32а. *Если* $\vdash \Gamma \to \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_m$ *в интуиционистской системе* $G1$, *то* $m=0$ *или* $m=1$.

Лемма 32b. *Если* $\vdash \Gamma \to \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_m$ *в интуиционистской системе* $G1$ *без помощи правила* $\neg \to$, *то* $m=1$ [1]).

Лемма 32а полностью выражает различие между интуиционистской и классической системами $G1$. Однако полезно заметить, что для обеспечения этого различия достаточно было ограничить только два постулата.

Наша ближайшая цель — показать (как это сделал Генцен), что система $G1$ эквивалентна нашей прежней системе H в том смысле, что какова бы ни была формула Е, $\vdash \to \mathrm{E}$ в $G1$ тогда и только тогда, когда $\vdash \mathrm{E}$ в H. Этот результат содержится в следующих двух теоремах для пустой Γ.

Теорема 46. *Если* $\Gamma \vdash \mathrm{E}$ *в* H *и все переменные остаются фиксированными, то* $\vdash \Gamma \to \mathrm{E}$ *в* $G1$. *Если при этом в данном выводе в* H *используются постулаты только для некоторых из символов* $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, *то в получающемся выводе в* $G1$ *используются логические правила только для* $\supset$ [2]) *и тех же символов.*

Доказательство проведем с помощью возвратной индукции по длине данного вывода в H формулы Е из Γ. В соответствии с анализом для Е в данном выводе возможны 16 случаев.

Случай 0: Е — одна из формул Γ. Тогда имеется следующее доказательство в $G1$ секвенции $\Gamma \to \mathrm{E}$

$$\frac{\mathrm{E} \to \mathrm{E}}{\overline{\Gamma \to \mathrm{E}.}}$$

Остальные случаи мы будем нумеровать как соответствующие постулаты 1a, 1b, 2, 3, 4a, 4b, 5a, 5b, 6, 7, 8 или 8^{I}, 9 — 12 системы H.

Случай 1b: Е — аксиома, получающаяся по схеме 1b, т. е. Е есть $(\mathrm{A} \supset \mathrm{B}) \supset ((\mathrm{A} \supset (\mathrm{B} \supset \mathrm{C})) \supset (\mathrm{A} \supset \mathrm{C}))$ для некоторых формул А, В и С. Приписывая Γ перед $\to$ в конечной секвенции примера 2 (а) и удваивая черту над этой секвенцией (чтобы обозначить утончения), получим дерево, служащее доказательством в $G1$ секвенции $\Gamma \to \mathrm{E}$.

Случай 2: Е — непосредственное следствие по правилу 2 из двух предыдущих формул, т. е. для некоторой пары формул А и В, Е есть В, а две предыдущие формулы суть А и $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$. По индуктивному предположению, в $G1$ имеются доказательства секвенций $\Gamma \to \mathrm{A}$ и $\Gamma \to \mathrm{A} \supset \mathrm{B}$. Пересаживая эти доказательства на следующее дерево, мы получим доказательство секвенции $\Gamma \to \mathrm{B}$:

$$\dfrac{\Gamma \to \mathrm{A} \qquad \dfrac{\Gamma \to \mathrm{A} \supset \mathrm{B} \qquad \dfrac{\mathrm{A} \to \mathrm{A} \quad \mathrm{B} \to \mathrm{B}}{\mathrm{A} \supset \mathrm{B}, \mathrm{A} \to \mathrm{B}} \supset \to}{\mathrm{A}, \Gamma \to \mathrm{B}} \text{ Сечение}}{\Gamma \to \mathrm{B}.} \text{ Сечение}$$

---

[1]) Из этих лемм следует, что если система—иитуициоиистская и $\neg \to$ ие применяется, то ие примеияется и $\to \neg$ (так что, еслн применяется $\to \neg$, то применяется и $\neg \to$).—*Прим. перев.*

[2]) Для классической системы H и выводов, содержащих $\&$ (или $\vee$) и $\neg$, но ие $\supset$, в $G1$ можио обойтнсь без применения $\to \supset$-правил; например (для $\&$), если выраанть $\supset$ через $\neg$ и $\&$ по *59, то правило $\to \supset$ заменяетси примеиением выводов: $\neg \to$, переходом от $\neg \mathrm{B}, \mathrm{A}, \Gamma \to \Theta$ к $\mathrm{A} \,\&\, \neg \mathrm{B}, \Gamma \to$ (это требует двух $\& \to$, $П \to$ и $С \to$) и $\to \neg$. Взамен правила $\supset \to$ потребуются, помимо перестаиовок, выводы $\to \neg$, $У \to$, $\to У$, $\to \&$, $\neg \to$. — *Прим. перев.*

Случай 8 или 8^1. См. пример 2 (c) или (b) соответственно.

Случай 9. E — непосредственное следствие из предыдущей формулы по правилу 9. Тогда E есть $C \supset \forall x A(x)$, а предыдущая формула есть $C \supset A(x)$, где C не содержит x свободно. Пусть Γ_1 — подпоследовательность Γ, состоящая из тех формул последовательности Γ, от которых эта предыдущая формула $C \supset A(x)$ зависит в данном выводе E из Γ. Опуская в данном выводе все формулы, стоящие ниже $C \supset A(x)$, и те формулы, стоящие выше нее, которые зависят от исходных формул, не входящих в Γ_1, мы получим вывод $C \supset A(x)$ из Γ_1. Применяя к этому выводу индуктивное предположение, заключаем, что в *G*1 имеется доказательство секвенции $\Gamma_1 \to C \supset A(x)$. Ввиду того, что в данном выводе $C \supset \forall x A(x)$ из Γ все переменные остаются фиксированными, ни одна из формул Γ_1 не содержит свободно переменную x, к которой применяется правило 9. Это обстоятельство вместе с тем, что C не содержит свободно x, используется при проверке выполнения ограничения на переменные для $\to \forall$ следующего дерева:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \to C \supset A(x) \qquad \cfrac{C \to C \qquad A(x) \to A(x)}{C \supset A(x),\ C \to A(x)}\ {\supset}{\to}}{C, \Gamma_1 \to A(x)}\ \text{Сечение}}{C, \Gamma_1 \to \forall x A(x)}\ {\to}\forall}{\Gamma \to C \supset \forall x A(x).}\ {\to}{\supset}$$

Случай 12. E — непосредственное следствие из предыдущей формулы по правилу 12. Двойственно случаю 9.

Введем обозначения, которыми воспользуемся в теореме 47. Пусть F — некоторая фиксированная замкнутая формула. Пусть Θ есть $B_1, \ldots, B_m$ $(m \geqslant 0)$. Условимся тогда, что Θ' есть $B_1, \ldots, B_{m-1}$ (Θ' пуста, если $m \leqslant 1$), Θ'' есть B_m, если $m \geqslant 1$, и $\neg(F \supset F)$, если $m = 0$, $\neg\Theta$ есть $\neg B_1, \ldots, \neg B_m$ и $\neg\Theta'$ есть $\neg B_1, \ldots, \neg B_{m-1}$ (пуста, если $m \leqslant 1$).

Следствие 1. *Если* $\Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$ в *H*, *причем все переменные являются фиксированными и в случае интуиционистской системы* $m \leqslant 1$, *то* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *в* *G*1.

Рассмотреть случаи, соответствующие $m = 1$, $m = 0$ или $m > 1$.

Следствие 2. *Для классической (интуиционистской) системы при* $l, m \geqslant 1$ ($l \geqslant 1$, $m = 1$) *из того, что в H* $\vdash A_1 \& \ldots \& A_l \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$ *следует, что в* *G*1 $\vdash A_1, \ldots, A_l \to B_1, \ldots, B_m$.

Теорема 47. *Если в* *G*1 $\vdash \Gamma \to \Theta$, *то в H* $\Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$ *и все переменные являются фиксированными.* (В частности, *если в* *G*1 $\vdash \Gamma \to E$, *то в H* $\Gamma \vdash E$ *и все переменные являются фиксированными.*)

*Более того, если в данном доказательстве интуиционистской (классической) системы G*1 *используются только некоторые из символов* $\supset, \&, \vee, \neg, \forall, \exists$, *то в получающемся выводе в H используются только* $\supset$*-постулаты*[1]) ($\supset$*- и* $\neg$*-постулаты*) *и постулаты для тех же самых символов, при условии, что в случае, если среди этих символов есть* $\forall$, *но нет* &, *к* $\forall$*-постулатам причисляется также схема аксиом* 9a *из леммы* 11 § 24.

Доказательство. Первую часть теоремы мы докажем возвратной индукцией по высоте (т. е. по числу уровней) данного доказательства в *G*1 сек-

[1]) Для классической системы *G*1 справедливо замечание, аналогичное приведенному в сноске [2]) стр. 393. —*Прим. перев.*

венции $\Gamma \to \Theta$. При этом мы рассмотрим различные случаи в соответствии с тем, какой постулат $G1$ применен в этом доказательстве последним.

Дополнительные подробности, указанные во второй части теоремы, будут проверены после того, как мы рассмотрим эти случаи. Всюду, кроме случаев, отмеченных одной или двумя звездочками, доказательство существования получающегося вывода получается почти немедленно применением общих свойств символа $\vdash$ и, в случае логического правила $G1$, соответствующего выводимого правила (не являющегося $\neg$-правилом) теоремы 2 § 23, или в случае $\to\forall$ и $\exists\to$ — соответствующего сильного правила леммы 10 § 24. В случаях, отмеченных одной звездочкой, мы пользуемся также интуиционистскими $\neg$-правилами ($\neg$-введ. и слабым $\neg$-удал. § 23) и иногда *1 § 26. В случаях, отмеченных двумя звездочками, мы пользуемся, кроме того, классическим (сильным) правилом $\neg$-удаления (теорема 2). Ни в одном из девяти случаев, которые не упомянуты ниже, не требуется ни подслучаев, ни звездочек.

Случай 1: схема аксиом. В силу общих свойств символа $\vdash$, в H имеет место $C \vdash C$.

Случай 2: $\to\supset$. По индуктивному предположению, в H имеет место $A, \Gamma, \neg\Theta \vdash B$, причем все переменные фиксированы, а нам надо получить $\Gamma, \neg\Theta \vdash A \supset B$ также с фиксированными переменными. Это можно сделать посредством $\supset$-введ.

Случай 3: $\supset\to$. Подслучай 1: Λ пуста или Θ непуста. Тогда $(\Lambda, \Theta)''$ есть Θ''. По индуктивному предположению, $\Delta, \neg\Lambda \vdash A$ и $B, \Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$. Отсюда, с помощью $\supset$-удал., получаем $A \supset B, \Delta, \Gamma, \neg\Lambda, \neg\Theta' \vdash \Theta''$. Подслучай 2**: Λ непуста, а Θ пуста. По индуктивному предположению, $\Delta, \neg\Lambda \vdash A$ и $B, \Gamma \vdash \neg(F \supset F)$. Посредством $\supset$-удал., $A \supset B, \Delta, \Gamma, \neg\Lambda \vdash \neg(F \supset F)$. С помощью *1 получаем, что $A \supset B, \Delta, \Gamma, \neg\Lambda \vdash F \supset F$. Отсюда, путем $\neg$-введ. и $\neg$-удал., $A \supset B, \Delta, \Gamma, \neg\Lambda' \vdash \neg\neg\Lambda'' \vdash \Lambda''$.

Случай 10*: $\to\neg$. Подслучай 1: Θ пуста. Из $A, \Gamma \vdash \neg(F \supset F)$ мы получаем $\Gamma \vdash \neg A$ посредством *1 и $\neg$-введ. Подслучай 2: Θ непуста. Из $A, \Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$ мы получаем $\Gamma, \neg\Theta', \neg\Theta'' \vdash \neg A$ путем $\neg$-введ.

Случай 11: $\neg\to$. Подслучай 1*: Θ пуста. Пользуемся слабым $\neg$-удал. Подслучай 2**: Θ непуста. Пользуемся $\neg$-введ. и $\neg$-удал.

Случай 12: $\to\forall$. По индуктивному предположению, $\Gamma, \neg\Theta \vdash A(b)$, причем все переменные остаются фиксированными. Посредством сильного $\forall$-введ. получаем $A(b) \vdash^{b} \forall x A(x)$. Отсюда $\Gamma, \neg\Theta \vdash \forall x A(x)$, причем все переменные остаются фиксированными, включая b, так как, в силу ограничения на переменные для $\to\forall$, Γ и Θ не содержат b свободно.

Случай 16: любое структурное правило с одной посылкой. Пусть посылка будет $\Gamma \to \Theta$, а заключение $\Gamma^{\dagger} \to \Theta^{\dagger}$. Тогда $\Gamma^{\dagger}$ ($\Theta^{\dagger}$) получается из Γ (Θ) путем перестановки формул, устранения повторений формул или введения новых формул. Подслучай 1: $\Theta^{\dagger}$ есть Θ. Из $\Gamma, \neg\Theta' \vdash \Theta''$, в силу общих свойств символа $\vdash$, мы заключаем, что $\Gamma^{\dagger}, \neg\Theta' \vdash \Theta''$. Подслучай 2*: $\Theta^{\dagger}$ отлична от Θ и Θ пуста. По индуктивному предположению, $\Gamma \vdash \neg(F \supset F)$. Отсюда, в силу общих свойств знака $\vdash$, получаем, что $\Gamma^{\dagger}, \neg\Theta^{\dagger\prime} \vdash \neg(F \supset F)$. Отсюда, в силу *1 и слабого $\neg$-удаления, имеем $\Gamma^{\dagger}, \neg\Theta^{\dagger\prime} \vdash \Theta^{\dagger\prime\prime}$.

Подслучай 3**: $\Theta^\dagger$ отлична от Θ и Θ непуста. Тогда $\Theta^\dagger$ непуста и по крайней мере одна из Θ и $\Theta^\dagger$ содержит более одной формулы[1]). По индуктивному предположению, $\Gamma,\ \neg\Theta' \vdash \Theta''$. В силу слабого $\neg$-удал., $\Gamma,\ \neg\Theta',\ \neg\Theta'' \vdash \neg(F \supset F)$, т. е. $\Gamma,\ \neg\Theta \vdash \neg(F \supset F)$. Отсюда, в силу общих свойств $\vdash$, $\Gamma^\dagger,\ \neg\Theta^\dagger \vdash \neg(F \supset F)$, т. е. $\Gamma^\dagger,\ \neg\Theta^{\dagger\prime},\ \neg\Theta^{\dagger\prime\prime} \vdash \neg(F \supset F)$. Отсюда, в силу *1, $\neg$-введ. и $\neg$-удал., $\Gamma^\dagger,\ \neg\Theta^{\dagger\prime} \vdash \Theta^{\dagger\prime\prime}$.

Случай 17: Сечение. Рассматривается как случай 3, но только без помощи $\supset$-удал. Подслучай 1: Λ пуста или Θ непуста. Подслучай 2**: Λ непуста, а Θ пуста.

Чтобы проверить второе утверждение теоремы, допустим сначала, что данное доказательство в $G1$ секвенции $\Gamma \to \Theta$, где Θ есть $B_1, \ldots, B_m$, является интуиционистским и не использует $\neg$-правил. Тогда, пользуясь леммой 32b, мы видим, что не может встретиться ни один из случаев или подслучаев, отмеченных одной или двумя звездочками. В силу леммы 11 § 24, утверждение вытекает из способа рассмотрения случаев, не отмеченных одной или двумя звездочками.

Если в доказательстве используются $\neg$-правила, но оно является интуиционистским, то рассматриваемое утверждение допускает употребление интуиционистских $\neg$-постулатов системы H в получающемся выводе, и нам остается только проверить, пользуясь леммой 32а, что не может встретиться ни один из случаев или подслучаев, отмеченных двумя звездочками.

Следствие. *Если l, $m \geqslant 1$ (и, следовательно, для интуиционистских систем $m = 1$), то: Если в $G1 \vdash A_1, \ldots, A_l \to B_1, \ldots, B_m$, то в $H \vdash A_1 \& \ldots \& A_l \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$.*

§ 78. ТЕОРЕМА ГЕНЦЕНА О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Пример 1. Доказательство (а) содержит сечение, тогда как (b) является доказательством той же самой секвенции и не содержит сечения.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{A}(b)\to\mathcal{A}(b)}{\mathcal{A}(b)\to\exists x\mathcal{A}(x)}\to\exists \qquad \dfrac{\exists x\mathcal{A}(x)\to\exists x\mathcal{A}(x)}{\exists x\mathcal{A}(x),\ \neg\exists x\mathcal{A}(x)\to}\neg\to}{\mathcal{A}(b),\ \neg\exists x\mathcal{A}(x)\to}\text{Сечение}}{\neg\exists x\mathcal{A}(x)\to\neg\mathcal{A}(b)}\to\neg}{\neg\exists x\mathcal{A}(x)\to\forall x\neg\mathcal{A}(x)}\to\forall}{\to\neg\exists x\mathcal{A}(x)\supset\forall x\neg\mathcal{A}(x).}\to\supset$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{A}(b)\to\mathcal{A}(b)}{\mathcal{A}(b)\to\exists x\mathcal{A}(x)}\to\exists}{\mathcal{A}(b),\ \neg\exists x\mathcal{A}(x)\to}\neg\to}{\neg\exists x\mathcal{A}(x)\to\neg\mathcal{A}(b)}\to\neg}{\neg\exists x\mathcal{A}(x)\to\forall x\neg\mathcal{A}(x)}\to\forall}{\to\neg\exists x\mathcal{A}(x)\supset\forall x\neg\mathcal{A}(x).}\to\supset$$

---

[1]) Так что, в силу леммы 32а, доказательство $\Gamma^\dagger \to \Theta^\dagger$ в $G1$ — классическое. — *Прим. перев.*

В первом доказательстве в антецедентах правой ветви без надобности стоит формула $\exists x\mathcal{A}(x)$. Сечение избавляет нас от этого усложнения. Второе доказательство происходит прямо, без усложнений, от которых затем надо избавляться.

Доказательства без сечения в некотором смысле играют роль доказательств в нормальной форме, что будет явствовать из свойства подформулы (лемма 33а ниже).

Понятие „подформулы" данной формулы определяется следующим образом.

1. Если A — формула, то A является *подформулой* формулы A. 2—4. Если A и B — формулы, то *подформулы* формул A и B являются *подформулами* формул $A \supset B$, $A \& B$ и $A \vee B$. 5. Если A — формула, то *подформулы* A являются *подформулами* формулы $\neg A$. 6—7. Если x — переменная, A(x) — формула и t — терм, свободный для x в A(x), то *подформулы* формулы A(t) являются *подформулами* формул $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$. 8. Всякая формула имеет только те *подформулы*, которые у нее должны быть в силу 1—7.

Пример 2. У формулы $\mathcal{A} \supset (\neg \mathcal{A} \supset \mathcal{B})$ имеется пять подформул — а именно, формулы $\mathcal{A} \supset (\neg \mathcal{A} \supset \mathcal{B})$, $\mathcal{A}$, $\neg \mathcal{A} \supset \mathcal{B}$, $\neg \mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

Пример 3. (a) Подформулами $\forall b \forall c (\mathcal{B}(c) \& \mathcal{A}(b))$ являются формулы $\forall b \forall c (\mathcal{B}(c) \& \mathcal{A}(b))$, $\forall c (\mathcal{B}(c) \& \mathcal{A}(t))$, $\mathcal{B}(u) \& \mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(u)$, $\mathcal{A}(t)$ для каждого терма t, не содержащего свободно c и каждого терма u. (b) Единственной подформулой $\mathcal{A}(c)$ служит $\mathcal{A}(c)$.

Отправляясь от перечня постулатов $G1$, мы докажем по индукции следующие леммы:

Лемма 33а. *Каждая формула, входящая в какую-либо секвенцию из доказательства в $G1$, не содержащего сечения, служит подформулой некоторой формулы, входящей в конечную секвенцию этого доказательства.* (Свойство подформулы.)

Лемма 33b. *Каждая формула, входящая в антецедент (сукцедент) какой-либо секвенции из доказательства в $G1$, не содержащего ни сечений, ни применений $\supset$- и $\neg$-правил, служит подформулой некоторой формулы, входящей в антецедент (сукцедент) конечной секвенции этого доказательства.*

«Основная теорема» Генцена, или теорема о нормальной форме (теорема 48 ниже), утверждает, что сечения всегда можно устранить из доказательства любой секвенции, в которой никакая переменная не встречается одновременно и в свободном и в связанном виде.

Ограничение, состоящее в том, что никакая переменная не входит одновременно и свободно, и связанно в конечную секвенцию, не умаляет значения этой теоремы. Действительно, если в данной секвенции имеются переменные, входящие как свободно, так и связанно, то, заменяя ее формулы на конгруэнтные, можно получить секвенцию, удовлетворяющую этому ограничению и доказуемую тогда и только тогда, когда доказуема данная секвенция (в силу теоремы 47, леммы 15b § 33, *18a и *18b § 26 и следствия 1 из теоремы 46). Это ограничение необходимо, как видно из следующего примера.

Пример 4. Рассмотрим доказательство

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{A}(b)\to\mathcal{A}(b)}{\mathcal{B}(c)\,\&\,\mathcal{A}(b)\to\mathcal{A}(b)}\,\&\to}{\forall c(\mathcal{B}(c)\,\&\,\mathcal{A}(b))\to\mathcal{A}(b)}\,\forall\to}{\forall b\forall c(\mathcal{B}(c)\,\&\,\mathcal{A}(b))\to\mathcal{A}(b)}\,\forall\to}{\forall b\forall c(\mathcal{B}(c)\,\&\,\mathcal{A}(b))\to\forall b\mathcal{A}(b)}\,\to\forall \qquad \dfrac{\mathcal{A}(c)\to\mathcal{A}(c)}{\forall b\mathcal{A}(b)\to\mathcal{A}(c)}\,\forall\to}{\forall b\forall c(\mathcal{B}(c)\,\&\,\mathcal{A}(b))\to\mathcal{A}(c).}\ \text{Сечение}$$

Сечение устранить нельзя. Действительно, по лемме 33a, в доказательстве без сечения секвенции $\forall b\forall c(\mathcal{B}(c)\,\&\,\mathcal{A}(b))\to\mathcal{A}(c)$ никакая секвенция не может содержать символов $\supset$ и $\neg$; значит, и $\supset$- и $\neg$-правила применяться не могут. Поэтому применима лемма 33b. Но два перечня подформул в примере 3 не содержат ни одной общей формулы, так что никакая аксиома не может удовлетворять требованиям леммы 33b. (Метод этого примера получит дальнейшее развитие в § 80.)

При доказательстве теоремы о нормальной форме мы воспользуемся формальной системой $G2$, полученной из $G1$ путем следующей замены двух постулатов.

Сечение заменяется следующим правилом, именуемым «смешение». Здесь M — формула (*формула смешения*); Π, Φ, Σ, Ω — последовательности из нуля или нескольких формул, такие, что как Φ, так и Σ обе содержат M; $\Phi_{\text{м}}$ и $\Sigma_{\text{м}}$ — результаты выбрасывания всех вхождений M в Φ и Σ соответственно.

$$\dfrac{\Pi\to\Phi \qquad \Sigma\to\Omega}{\Pi,\Sigma_{\text{м}}\to\Phi_{\text{м}},\Omega.}\ \text{Смешение}$$

Пример 5. Вот смешение:

$$\dfrac{\mathcal{A}\to\mathcal{B} \qquad \mathcal{B}\vee\mathcal{C},\mathcal{B},\mathcal{D},\mathcal{B}\to}{\mathcal{A},\mathcal{B}\vee\mathcal{C},\mathcal{D}\to.}\ \text{Смешение}$$

Правило $\supset\to$ системы $G1$ (для отличия мы будем обозначать его через $\supset\to_1$) заменяется теперь новым правилом $\supset\to_2$, которое для классической системы ввел Кетонен [1944]. Здесь A, B, Γ, Θ такие, как было описано выше, а Θ° есть Θ для классической системы и пустая последовательность для интуиционистской.

$$\dfrac{\Gamma\to\Theta^\circ,\ A \qquad B,\ \Gamma\to\Theta}{A\supset B,\ \Gamma\to\Theta.}\ \supset\to_2.$$

Каждое сечение можно выполнить посредством смешения (ниже слева) и обратно (справа), с помощью *УСП*-шагов.

$$\dfrac{\dfrac{\Delta\to\Lambda,C \qquad C,\Gamma\to\Theta}{\Delta,\Gamma_C\to\Lambda_C,\Theta}\ \text{Смешение}}{\Delta,\ \Gamma\to\Lambda,\ \Theta.} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\Pi\to\Phi}{\Pi\to\Phi_{\text{м}},\ M} \qquad \dfrac{\Sigma\to\Omega}{M,\ \Sigma_{\text{м}}\to\Omega}}{\Pi,\ \Sigma_{\text{м}}\to\Phi_{\text{м}},\ \Omega.}\ \text{Сечение}$$

Аналогично всякое $\supset\to_1$ можно выполнить посредством $\supset\to_2$ (ниже); для этого следует заметить, что в интуиционистском случае, по лемме 32a, Λ пуста; и наоборот (предоставляется читателю).

$$\dfrac{\dfrac{\Delta\to\Lambda,\ A}{\Delta,\Gamma\to\Lambda,\Theta^\circ,A} \qquad \dfrac{B,\Gamma\to\Theta}{B,\Delta,\Gamma\to\Lambda,\Theta}}{A\supset B\ \ \Delta,\Gamma\to\Lambda,\Theta.}\ \supset\to_2$$

Это показывает, что обе замены не меняют класса доказуемых секвенций; более подробно это будет выражено в лемме 34.

Мы будем говорить, что доказательство в $G1$ или в $G2$ обладает *свойством чистоты переменных* или является *доказательством с чистыми переменными*, если никакая переменная не входит в это доказательство одновременно и свободно, и связанно и для каждого применения $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$ переменная $\mathfrak{b}$ этого применения входит только в секвенции, стоящие выше его заключения (причем, если $A(x)$ не содержит x свободно, то для анализа мы выберем $\mathfrak{b}$, входящую только таким образом).

Лемма 34. *Если* $\vdash \Gamma \rightarrow \Theta$ *в* $G1$, *то* $\vdash \Gamma \rightarrow \Theta$ *в* $G2$; *и обратно. Доказательство в* $G2$ *содержит смешение только в том случае, если соответствующее доказательство в* $G1$ *содержит сечение; и обратно. Каждое доказательство содержит применения тех же самых (с точностью до замены* $\supset\rightarrow_1$ *на* $\supset\rightarrow_2$ *или обратно) логических правил, что и соответствующее ему доказательство другой системы. Если одно доказательство обладает свойством чистоты переменных, то и другое доказательство обладает этим свойством. Леммы* 32a — 33b (*сформулированные выше для* $G1$ *и сечения*) *имеют место также для* $G2$ *и смешения.*

Лемма 35. *Данное применение постулата системы* $G1$ *или* $G2$ *останется применением того же постулата, если во всех секвенциях этого применения (именно, в аксиоме в случае схемы аксиом и в посылках и заключении в случае правила вывода) заменить некоторую переменную в точности во всех ее свободных вхождениях (или в точности во всех ее связанных вхождениях) на другую переменную, не входящую ни свободно, ни связанно ни в одну из секвенций этого применения.*

Лемма 35, в случае применения $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$, связана с тем обстоятельством, что $\mathfrak{b}$ и x не обязательно должны совпадать (как это имеет место для соответствующих правил 9 и 12 системы H).

Лемма 36. *Данное применение постулата системы* $G1$ *или* $G2$ *останется применением того же постулата, если во всех секвенциях этого применения подставить данный терм вместо (всех свободных вхождений) данной переменной, при условии, что в случае* $\rightarrow\forall$ *или* $\exists\rightarrow$: (i) *подставляемый терм не содержит переменной* $\mathfrak{b}$ *рассматриваемого применения и* (ii) *переменная, вместо которой происходит подстановка, отлична от* $\mathfrak{b}$ *этого применения и, кроме того, в любом случае, при условии, что* (iii) *подставляемый терм свободен для этой переменной в каждой формуле всех секвенций рассматриваемого применения.*

Условие (i) обеспечивает сохранение ограничения для переменных в случае $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$.

Лемма 37. *Пусть в системе* $G1$ *или* $G2$ *дано доказательство секвенции, в которую никакая переменная не входит и свободно, и связанно. Тогда, заменяя в секвенциях этого доказательства свободные и связанные вхождения переменных (так, что каждое применение постулата остается применением того же постулата), можно получить такое доказательство той же секвенции, в которое никакая переменная не входит и свободно, и связанно.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — различные переменные, которые входят свободно в конечную секвенцию и где-либо входят в доказательство связанно, а $a_1, \ldots, a_p$ — все различные остальные переменные, которые входят в доказательство и свободно, и связанно. Пусть $y_1, \ldots, y_n, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_p$ — различные переменные, не входящие в доказательство. Заменим $x_1, \ldots, x_n$ только в их связанных вхождениях на $y_1, \ldots, y_n$ соответственно, а $a_1, \ldots, a_p$

только в их свободных вхождениях на $\mathfrak{b}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{b}_p$. По лемме 35, фигура останется доказательством; конечная секвенция не изменится в силу условия, что никакая переменная не входит в нее и свободно, и связанно.

Лемма 38. *Пусть в системе G1 или G2 дано доказательство, в которое никакая переменная не входит и свободно, и связанно. Тогда путем замены только в свободных вхождениях переменных в это доказательство (так, что каждое применение постулата остается применением того же постулата) можно получить доказательство той же секвенции, обладающее свойством чистоты переменных.*

Доказательство. Пусть в данном доказательстве в системе G1 или G2 имеется ровно q применений правил $\rightarrow\forall$ и $\exists\rightarrow$ с соответствующими (не обязательно различными) переменными $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_q$ в качестве переменных $\mathfrak{b}$ этих применений. Возьмем любые q различных переменных $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_q$, не входящие в данное доказательство. Выберем одно из этих применений, являющееся верхним (т. е. таким, над которым нет никакого другого); пусть его $\mathfrak{b}$ будет $\mathfrak{c}_1$. Подставим $\mathfrak{d}_1$ вместо $\mathfrak{c}_1$ всюду во всех секвенциях, стоящих выше заключения этого применения и нигде больше. В силу ограничения для переменных $\rightarrow\forall$ и $\exists\rightarrow$, $\mathfrak{c}_1$ не может входить свободно в заключение этого применения, так что, по лемме 35, все применения постулатов сохраняются. Будем повторять этот процесс каждый раз по отношению к одному из самых верхних применений $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$ среди еще не рассмотренных, пока переменные $\mathfrak{b}$ всех q применений не превратятся из $\mathfrak{c}$ в $\mathfrak{d}$. Ввиду того, что каждая подстановка изменяет только секвенции, стоящие над заключением применения $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$, конечная секвенция не изменится.

Теорема 48. *Пусть в G1 (в G2) дано доказательство секвенции, в которую никакая переменная не входит и свободно, и связанно. Тогда можно найти другое доказательство в G1 (в G2) той же самой секвенции, которое не содержит сечений (смешений). Это доказательство обладает свойством чистоты переменных. В нем используются только те логические правила, которые были использованы в данном доказательстве.* (Основная теорема Генцена, или теорема о нормальной форме, [1934—35].)

Доказательство. Теорема будет сведена к одной лемме. В силу лемм 34, 37 и 38, достаточно доказать теорему для G2 в предположении, что данное доказательство уже обладает свойством чистоты переменных. Мы воспользуемся индукцией по числу m смешений в этом „данном доказательстве". Если $m > 0$, в него должно входить смешение, выше которого нет смешений. Рассмотрим часть данного доказательства, оканчивающуюся заключением $\Pi, \Sigma_M \rightarrow \Phi_M, \Omega$ этого смешения; будем называть ее „данной частью". Допустим, что из этой данной части путем преобразования мы можем получить другое доказательство в системе G2 для секвенции $\Pi, \Sigma_M \rightarrow \Phi_M, \Omega$, в котором не будет смешений; будем называть его „получающимся доказательством". Тогда в результате замены в данном доказательстве данной части на получающуюся часть получится новое доказательство той же секвенции в системе G2, содержащее только $m-1$ смешений. Допустим, далее, что можно так построить получающуюся часть, что она будет обладать свойством чистоты переменных и не будет содержать свободно (связанно; в качестве $\mathfrak{b}$ применения $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$) ни одной переменной, которая таким же образом не входит в данную часть. Тогда и все новое доказательство будет обладать свойством чистоты переменных. Следовательно, можно будет воспользоваться индуктивным предположением и заключить, что имеется доказательство с чистыми переменными без смешений. Таким образом, для доказательства теоремы остается установить следующую лемму.

Пример 1 (продолжение). Данная часть доказательства (а) (после замены сечения на смешение) имеет следующий вид:

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{A}(b) \to \mathcal{A}(b)}{\mathcal{A}(b) \to \exists x \mathcal{A}(x)} \to \exists \qquad \dfrac{\exists x \mathcal{A}(x) \to \exists x \mathcal{A}(x)}{\neg \exists x \mathcal{A}(x), \exists x \mathcal{A}(x) \to} \neg \to}{\mathcal{A}(b), \neg \exists x \mathcal{A}(x) \to .} \text{ Смешение}$$

Лемма 39. *Пусть в G2 дано доказательство с чистыми переменными секвенции* $\Pi, \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega$, *последний шаг которого состоит в смешении и в котором помимо этого нет смешений. Тогда можно найти доказательство в G2 той же секвенции, вовсе не содержащее смешений, обладающее свойством чистоты переменных и такое, что в него не входит свободно (связанно; в качестве* b *применения* $\to \forall$ *или* $\exists \to$) *ни одна переменная, которая не входила бы таким же образом в данное доказательство. В получающемся доказательстве используются только те логические правила, которые используются в данном доказательстве.* (Основная лемма.)

Доказательство основной леммы. Мы определим *левый ранг a* смешения как наибольшее число секвенций, содержащих формулу смешения M в сукценденте и расположенных последовательно одна над другой в конце (т. е. нижней части) какой-либо ветви, которая оканчивается левой посылкой смешения. *Правый ранг b* определяется аналогично. *Ранг*—это число $r = a + b$. (Наименьший возможный ранг есть 2.) *Степень g* смешения — это число ($\geqslant 0$) вхождений логических символов ($\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$) в формулу смешения M.

Пример 1 (окончание). Левый ранг есть 1, правый ранг 2, ранг 3 и степень 1.

Лемма доказывается возвратной индукцией по степени g смешения. Как в базисе, так и в индукционном шаге этой индукции используется возвратная индукция по рангу r. Мы рассмотрим все возможные случаи; сопоставляя полученные результаты, можно будет провести базисы и индукционные шаги этих индукций.

Устраняемое смешение мы будем записывать в виде

$$\frac{\Pi \to \Phi \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi, \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega,} \quad \text{или, короче,} \quad \frac{S_1 \qquad S_2}{S_3;}$$

где $M \in \Phi$ и $M \in \Sigma$.

Буквы «A», «B», «C», «D», «Г», «Θ», «x», «A (x)», «t», «b» будут относиться к высказываниям и термам остальных применяемых постулатов.

A. Предварительные случаи.

Случай 1а: в антецеденте S_1 имеется M, т. е. $M \in \Pi$. Тогда заключение $\Pi, \Sigma_M \to \Phi_M, \Omega$ рассматриваемого смешения получается из его второй посылки $\Sigma \to \Omega$ посредством *УСП*, следовательно, доказуемо без смешения. Интуиционистское ограничение, налагаемое на применения $\to У$, выполняется, потому что шаги *УСП* приводят к прежней конечной секвенции, которая, по лемме 32а, в интуиционистском случае может иметь в сукцеденте не более одной формулы.

Случай 2a: левый ранг равен 1, и S_1 получается посредством структурного правила. Ввиду того, что $M \in \Phi$, но M не принадлежит сукцеденту посылки, из которой по этому правилу получается S_1, это правило в рассматриваемом применении может быть только $\to У$ с M в качестве C. Конец данного доказательства показан ниже слева, причем $M \bar{\in} \Theta$. Мы можем заменить его фигурой, приведенной справа, в результате чего получится доказательство первоначальной конечной секвенции, не содержащее смешений.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, M}\to У \qquad \Sigma \to \Omega}{\Gamma, \Sigma_M \to \Theta, \Omega.}\text{ Смешение} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma_M \to \Theta, \Omega.}$$

Случаи 1b, 2b: аналогично, с заменой «S_1», «антецедент», «П», «левый» на «S_2», «сукцедент», «Ω», «правый» соответственно. Рассматриваются симметрично случаям 1a, 2a.

B. Остальные случаи.

Для каждого из этих случаев к числу определяющих его условий причисляется также условие, что не имеет места ни один из четырех предварительных случаев.

B1: ранг равен 2. Так как случаи 1a, 1b исключены, то обе секвенции S_1 и S_2 должны быть заключениями в применениях правил вывода. Так как ранг равен 2 и случаи 2a и 2b исключены, то оба эти правила должны быть логическими. Кроме того, в силу того, что ранг равен только 2, M должна быть главной формулой в обоих применениях правил вывода. Следовательно, M содержит логический символ и степень смешения $\geqslant 1$. Таким образом, эти случаи могут представиться только для индукционного шага индукции по степени и при их рассмотрении можно пользоваться предположением индукции по степени. Что касается правил, использованных при получении S_1 и S_2, то они обязательно должны быть правилом введения самого внешнего логического символа формулы M в сукцедент и правилом введения этого же символа в антецедент. Итак, для B1 мы имеем только следующие шесть возможных случаев.

Случай 3: S_1 получена посредством $\to\supset$, а S_2 посредством $\supset\to$, и M есть главная формула $A \supset B$. Тогда конец данного доказательства имеет следующий вид, где $A \supset B \bar{\in} \Theta, \Gamma$, потому что ранг равен только 2:

$$\dfrac{\dfrac{A, \Pi \to \Theta, B}{\Pi \to \Theta,\ A \supset B}\to\supset \qquad \dfrac{\Gamma \to \Omega^{\circ}, A \qquad B, \Gamma \to \Omega}{A \supset B, \Gamma \to \Omega}\supset\to}{\Pi, \Gamma \to \Theta, \Omega.}\text{ Смешение}$$

Мы изменим его следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Omega^{\circ}, A \qquad A, \Pi \to \Theta, B}{\Gamma, \Pi_A \to \Omega^{\circ}_A, \Theta, B}\text{ Смешение} \qquad B, \Gamma \to \Omega}{\Gamma, \Pi_A, \Gamma_B \to \Omega^{\circ}_{AB}, \Theta_B, \Omega}\text{ Смешение}}{\Pi, \Gamma \to \Theta, \Omega.}$$

Верхнее смешение имеет меньшую степень, чем первоначальное, так что, в силу гипотезы индукции по степени, оно может быть устранено, т. е. для того же самого заключения можно найти доказательство без смешения. После этого над нижним смешением уже не будет больше стоять никакого смешения, и его можно будет устранить таким же образом. В итоге для первоначальной конечной секвенции $\Pi, \Gamma \to \Theta, \Omega$ мы получим доказательство без смешений.

Случай 4: S_1 получена посредством $\to \&$, а S_2 — посредством $\& \to$, и M есть главная формула $A \& B$.

Случай 5: S_1 получена посредством $\to \vee$, а S_2 — посредством $\vee \to$, и M есть главная формула $A \vee B$. Рассматривается двойственно случаю 4.

Случай 6: S_1 получена посредством $\to \neg$, а S_2 — посредством $\neg \to$, и M есть главная формула $\neg A$.

Случай 7: S_1 получена посредством $\to \forall$, а S_2 — посредством $\forall \to$, и M есть главная формула $\forall x A(x)$. Данная фигура имеет вид

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Theta, A(b)}{\Pi \to \Theta, \forall x A(x)} \to \forall \qquad \dfrac{A(t), \Gamma \to \Omega}{\forall x A(x), \Gamma \to \Omega} \forall \to}{\Pi, \Gamma \to \Theta, \Omega,} \text{ Смешение}$$

где $\forall x A(x) \overline{\in} \Theta, \Gamma$. Для построения измененной фигуры нам понадобится доказательство секвенции $\Pi \to \Theta, A(t)$. Если $A(x)$ не содержит свободно x, то формулы $A(b)$ и $A(t)$ совпадают, и мы уже имеем это доказательство. Допустим, что $A(x)$ содержит x свободно. Тогда $A(t)$ содержит t и, так как t свободен для x в $A(x)$, переменные терма t входят свободно в $A(t)$. Теперь из свойства чистоты переменных данного доказательства секвенции $\Pi, \Gamma \to \Theta, \Omega$ мы можем заключить, что (i) никакая переменная терма t не совпадает с b какого-либо применения $\to \forall$ или $\exists \to$ в доказательстве секвенции $\Pi \to \Theta, A(b)$ из левой части фигуры; (ii) наша b отлична от b каждого из применений $\to \forall$ или $\exists \to$ в упомянутом в (i) доказательстве; (iii) t свободен для b во всех формулах упомянутого в (i) доказательства (потому что, в силу свойства чистоты переменных, никакая переменная не может входить и свободно, и связанно). Кроме того, в силу ограничения на переменные, наложенного на указанное явно применение $\to \forall$, (iv) b не входит в Π, Θ. Следовательно, применяя лемму 36, можно всюду в доказательстве $\Pi \to \Theta, A(b)$ подставить t вместо b и получить доказательство $\Pi \to \Theta, A(t)$. Если в измененной фигуре воспользоваться этим доказательством, как указано ниже, то полученное новое доказательство секвенции $\Pi, \Gamma \to \Theta, \Omega$ будет обладать свойством чистоты переменных и не будет содержать свободно (связанно; в качестве b одного из применений $\to \forall$ или $\exists \to$) переменных, которые таким же образом не входили в данное доказательство.

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Theta, A(t) \qquad A(t), \Gamma \to \Omega}{\Pi, \Gamma_{A(t)} \to \Theta_{A(t)}, \Omega} \text{ Смешение}}{\Pi, \Gamma \to \Theta, \Omega.}$$

Случай 8: S_1 получена посредством $\to \exists$, а S_2 — посредством $\exists \to$, и M есть главная формула $\exists x A(x)$. Двойственно случаю 7.

B2: ранг > 2. Эти случаи могут встретиться только в индукционном шаге индукции по рангу (как в базисе, так и в индукционном шаге индукции по степени). Поэтому при их рассмотрении можно пользоваться предположением индукции по рангу.

B2.1: левый ранг $\geqslant 2$. Тогда M входит в сукцедент хотя бы одной из посылок применения правила вывода, дающего S_1.

Случай 9а: S_1 получена посредством сукцедентного структурного правила S, причем M отлична от C и от D, или S_1 получена посредством антецедентного структурного правила S. Пусть слева указана данная фигура. Мы заменим ее фигурой, указанной справа (объяснение следует).

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \to \Phi_1}{\Pi \to \Phi}\,S \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega}\ \text{Смешение} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \to \Phi_1 \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi_1,\ \Sigma_M \to \Phi_{1M},\ \Omega}\ \text{Смешение}}{\Pi_1,\ \Sigma_M \to \Omega,\ \Phi_{1M}}}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Omega,\ \Phi_M}\,S}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega.}$$

Поскольку $M \in \Phi_1$ (в силу B2.1), $\Pi_1 \to \Phi_1$ можно взять в качестве первой посылки нового смешения. Тогда с помощью определяющего этот случай условия и по виду структурных правил с одной посылкой мы можем убедиться в правильности нового S. Ранг смешения у измененной фигуры на единицу меньше, чем у первоначальной. Поэтому, пользуясь предположением индукции по рангу, можно найти доказательство его заключения, а значит, и первоначальной конечной секвенции, не содержащее смешений.

Случай 10а: S_1 получена посредством сукцедентного структурного правила S с M в качестве C или D. Пусть посылкой будет $\Pi \to \Phi_1$. По виду сукцедентных структурных правил мы заключаем, что Φ_{1M} и Φ_M тождественны.

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Phi_1}{\Pi \to \Phi}\,S \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega.}\ \text{Смешение} \qquad\qquad \dfrac{\Pi \to \Phi_1 \qquad \Sigma \to \Omega}{\Pi,\ \Sigma_M \to \Phi_M,\ \Omega.}\ \text{Смешение}$$

Случай 11а: S_1 получена посредством логического правила L с одной посылкой. Вывод по любому из этих правил, дающий S_1, имеет вид

$$\dfrac{\Lambda_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Lambda_2}{\Xi_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Xi_2,}\,L$$

где каждая Λ_1, Λ_2 пуста или служит боковой формулой, а из Ξ_1, Ξ_2 одна является главной формулой, а другая пуста.

Подслучай 1: Ξ_2 отлична от M. Тогда $M \in \Theta$, потому что $M \in \Theta, \Xi_2$. Мы выпишем данную фигуру таким образом:

$$\dfrac{\dfrac{\Lambda_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Lambda_2}{\Xi_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Xi_2}\,L \qquad \Sigma \to \Omega}{\Xi_1,\ \Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta_M,\ \Xi_2,\ \Omega.}\ \text{Смешение}$$

Мы ее заменим на следующую (объяснение следует):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Lambda_1,\ \Gamma \to \Theta,\ \Lambda_2 \qquad \Sigma \to \Omega}{\Lambda_1,\ \Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta_M,\ \Lambda_{2M},\ \Omega}\ \text{Смешение}}{\Lambda_1,\ \Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta_M,\ \Omega,\ \Lambda_2}}{\Xi_1,\ \Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta_M,\ \Omega,\ \Xi_2}\,L}{\Xi_1,\ \Gamma,\ \Sigma_M \to \Theta_M,\ \Xi_2,\ \Omega.}$$

В новом L Γ, Σ_M стоит вместо Γ, а Θ_M, Ω — вместо Θ. Заключением нового L служит первоначальная конечная секвенция с точностью до порядка формул в сукцеденте. Это позволяет нам заключить, что если L есть $\to\forall$ или $\exists\to$, то ограничение на переменные выполняется для нового применения L, так как, в силу свойства чистоты переменных данного доказательства, $\mathfrak{b}$ не может входить в первоначальную конечную секвенцию. Если данное доказательство является интуиционистским, то (в силу леммы 32a) Θ, Λ_2 состоит не более чем из одной формулы. Но $M \in \Theta$, следовательно, Λ_2 пуста. Поэтому *УСП*-шаги, которые предшествуют новому L, не требуют нарушений интуиционистского ограничения на $\to У$. (Возможность того, что L есть $\to\neg$ и при новом его применении нарушается интуиционистское ограничение, а priori исключается сравнением заключения нового применения L и конечной секвенции данного доказательства; но в действительности L не может быть $\to\neg$.) Ранг у нового смешения на единицу меньше, чем у первоначального.

Подслучай 2: Ξ_2 есть M. Тогда Ξ_1 пуста, и мы опустим её при записи данной фигуры:

$$\dfrac{\dfrac{\Lambda_1, \Gamma \to \Theta, \Lambda_2}{\Gamma \to \Theta, M}L \qquad \Sigma \to \Omega}{\Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Omega.}\text{Смешение}$$

Так как Ξ_2 есть M, то Λ_2 отлична от M (и значит, $M \in \Theta$, потому что $M \in \Theta, \Lambda_2$ согласно B2.1). Так как случай 1b исключен, то $M \bar{\in} \Omega$. Пользуясь этими обстоятельствами, мы следующим образом запишем измененную фигуру:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Lambda_1, \Gamma \to \Theta, \Lambda_2 \qquad \Sigma \to \Omega}{\Lambda_1, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Lambda_2, \Omega}\text{Смешение}}{\Lambda_1, \Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Omega, \Lambda_2}}{\Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Omega, M}L \qquad \Sigma \to \Omega}{\dfrac{\Gamma, \Sigma_M, \Sigma_M \to \Theta_M, \Omega, \Omega}{\Gamma, \Sigma_M \to \Theta_M, \Omega.}}\text{Смешение}$$

Если L есть $\to\forall$ или $\exists\to$, то ограничение на переменные выполняется, потому что $\Gamma, \Sigma_M, \Theta_M, \Omega, M$ все входят в данное доказательство с чистыми переменными не выше заключения первоначального L. (Однако L не может быть $\exists\to$.) Этот подслучай не может встретиться интуиционистски, потому что секвенция $\Gamma \to \Theta, M$, входящая в данное доказательство, имеет в сукцеденте более одного M. Далее, в измененной фигуре верхнее смешение имеет ранг на единицу ниже, чем первоначальное смешение; значит, согласно предположению индукции по рангу, его можно устранить. Тогда над нижним смешением уже не будет смешений. Так как $M \bar{\in} \Omega, \Lambda_2$, его левый ранг будет только 1, в то время как правый ранг будет тот же самый, что и в первоначальном смешении. Так как, по условию, левый ранг был первоначально $\geqslant 2$, то ранг у этого смешения меньше, чем у первоначального; значит, согласно предположению индукции по рангу, его также можно устранить.

Случай 12a: S_1 получена посредством логического правила L с двумя посылками, за исключением интуиционистского $\supset\to$. Вывод, дающий S_1, может быть записан в виде

$$\dfrac{\Lambda_{11}, \Gamma \to \Theta, \Lambda_{12} \qquad \Lambda_{21}, \Gamma \to \Theta, \Lambda_{22}}{\Xi_1, \Gamma \to \Theta, \Xi_2}L.$$

Рассматривается так же, как случай 11a. Обе посылки смешиваются с $\Sigma \to \Omega$ (следует заметить, что $M \in \Theta$), прежде чем в измененной фигуре применяется L.

Случай 13: S_1 получена посредством интуиционистского $\supset \to$. Так как $M \in \Theta$ и Θ содержит не более одной формулы, то Θ есть M. В измененной формуле только вторая посылка $B, \Gamma \to M$ смешивается с $\Sigma \to \Omega$ перед применением $\supset \to$.

B2.2. Случаи 9b — 12b формулируются и рассматриваются симметрично случаям 9a — 12a, за следующими исключениями. Выполнения интуиционистских ограничений для случая 11b (в случае интуиционистской системы) усматриваются непосредственно. (Подслучай 2 может встретиться и для интуиционистской системы.) Рассмотрение интуиционистского $\supset \to$ можно включить в случай 12b, благодаря тому, что в первой посылке пишется Θ°; проверка того, что в качестве Θ° нового применения $\supset \to$ встречается пустая последовательность, удается, если заметить, что интуиционистски Φ данного смешения есть просто M.

Для интуиционистской системы следующее применение теоремы 48 дал Карри [1939]:

Теорема 49. *Если формула* E *доказуема в интуиционистской* (*классической*) *системе* H, *то она доказуема с помощью одних только* $\supset$*-постулатов* ($\supset$*- и* $\neg$*-постулатов*) *и постулатов для логических символов, входящих в эту формулу, с оговоркой, что если в нее входит* $\forall$, *но не входит* &, *то к* $\forall$*-постулатам причисляется схема аксиом* 9a *из леммы* 11 § 24.

Доказательство. В силу леммы 33a, в доказательстве в $G1$ без сечений не могут применяться никакие логические правила, кроме тех, которые соответствуют логическим символам, входящим в конечную секвенцию. Теорема 49 следует из теорем 46 (используется только первая часть), 48 и 47 (обе части), если никакая переменная не входит в E и свободно, и связанно; в противном случае используется также замечание 1 (c) § 33.

В книге Карри [1950] (которая еще не была доступна автору, когда он писал §§ 77—80 настоящей книги) содержатся результаты, относящиеся к теории систем генценовского типа, и обильная библиография. Основную теорему Карри называет «элиминационной теоремой». Наш термин «теорема о нормальной форме» предназначается для раскрытия смысла этой теоремы, коль скоро указывается, что нормальная форма относится к доказательствам. Термин «элиминационная теорема» (т. е. «теорема об устранимости») мы оставляем для случаев, когда, как в § 74, устраняется символ или обозначение. (Зато термин «нормальная форма» имеет то неудобство, что оно обычно относится к формулам, как в §§ 29, 76.)

Следующие два параграфа, в которых излагаются два применения этой теоремы, могут быть прочитаны независимо один от другого.

*§ 79. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

Применение одного из структурных правил системы $G1$ или $G2$ мы будем называть *структурным выводом*; одного из логических правил исчисления высказываний—*пропозициональным выводом*; одного из дополнительных логических правил исчисления предикатов—*предикатным выводом*.

При некоторых специальных предположениях о форме конечной секвенции может быть получена дальнейшая нормализация доказательств, как в следующей «обобщенной основной теореме», которую Генцен [1934—35] дал для своей классической системы. (Она тесно связана с теоремой Эрбрана [1930].) Как заметил Генцен, доказательство этой теоремы иллюстрирует возможности перестановок выводов в его системах. Эти возможности рассматривались, далее, Карри [1952] для классической системы его лекций [1950] и Клини [1952] для описанной здесь классической и интуиционистской систем. Например:

Теорема 50. *Пусть дана секвенция, содержащая только предваренные формулы, причем никакая переменная не входит в эту секвенцию и свободно, и связанно, и дано доказательство этой секвенции в классической системе* G1 *(в интуиционистской системе* G1 *без* $\vee\rightarrow$*). Тогда в этой же системе можно найти другое доказательство той же самой секвенции, которое не содержит сечений и в которое входит некоторая секвенция* S *(именуемая средней секвенцией), не содержащая кванторов, причем часть нового доказательства, идущая от этого вхождения* S *до конечной секвенции, состоит только из предикатных и структурных выводов. Новое доказательство обладает свойством чистоты переменных. Аналогично с заменой «G1» и «сечение» на «G2» и «смешение» соответственно.*

Доказательство. Теорема будет сведена к одной лемме. Будем считать, что уже применена теорема 48, так что данное доказательство—это доказательство с чистыми переменными в G1 без сечений (или в G2 без смешений). В силу свойства подформулы, в секвенции этого доказательства могут входить только предваренные формулы.

Рассмотрим любую аксиому, входящую в данное доказательство и содержащую кванторы; пусть, например, первый квантор есть $\forall$. Эту аксиому (стоящую ниже слева) можно заменить следующей фигурой (стоящей справа):

$$\forall x A(x) \rightarrow \forall x A(x), \qquad \dfrac{\dfrac{A(b) \rightarrow A(b)}{\forall x A(x) \rightarrow A(b)}\ \forall\rightarrow}{\forall x A(x) \rightarrow \forall x A(x),}\ \rightarrow\forall$$

где b — переменная, ранее не входившая в доказательство. Формула A(b) новой аксиомы имеет одним квантором меньше, чем формула $\forall x A(x)$ первоначальной аксиомы. Аналогично, если первый квантор есть $\exists$. Таким образом, пользуясь индукцией по сумме чисел кванторов в формулах всех аксиом, можно полностью устранить из данного доказательства аксиомы, содержащие кванторы (причем указанные выше свойства доказательства сохраняются).

Допустим теперь (как это будет установлено в следующей лемме), что логические выводы нашего доказательства можно (сохраняя указанные выше его свойства) расположить таким образом, что каждый предикатный вывод будет следовать за всеми пропозициональными выводами. Тогда найдется такое вхождение некоторой секвенции S_1, ниже которого доказательство содержит только предикатные и структурные выводы (без разветвлений, потому что рассматриваемые правила имеют каждое только одну посылку), а выше которого — только пропозициональные и структурные выводы. В S_1 и в секвенции, стоящие выше, могут входить формулы, содержащие кванторы. Однако ни одна из них не входит в качестве боковой формулы пропозиционального вывода, потому что иначе главная формула этого вывода не была бы предваренной. Ни одна из них не входит в качестве главной формулы, потому что в этой части доказательства нет предикатных выводов. Ни одна из них не входит в качестве аксиомы. Это было достигнуто выше. Поэтому, если мы всюду в части доказательства, расположенной выше S_1 (включая S_1), удалим все вхождения формул, содержащих кванторы, ни одно из применений постулата в этой части доказательства не нарушится, если не считать того, что некоторые структурные выводы могут стать тождественными (с одинаковыми посылкой и заключением) и их можно будет опустить. При этом S_1 будет заменена некоторой секвенцией S, не содержащей кванторов, но от S можно будет перейти к S_1 посредством нуля или нескольких *У*- и *П*-шагов, а затем — посредством неизмененной части доказательства, с помощью одних только предикатных и структурных выводов—к прежней конечной секвенции. Таким образом, мы получим новое доказательство с описанными в теореме свойствами, средней секвенцией которого будет S.

Лемма 40. *Пусть для секвенции, содержащей только предваренные формулы, дано доказательство с чистыми переменными в классической системе G1 (в интуиционистской системе G1 без $\vee\to$) без сечений. Тогда для той же секвенции можно найти другое такое же доказательство, в котором каждый предикатный вывод следует за каждым пропозициональным выводом. В новое доказательство в качестве аксиом входят те же самые секвенции, что и в данное. Аналогично с заменой «G1» и «сечение» на «G2» и «смешение» соответственно.*

Доказательство леммы. Возьмем любой предикатный вывод в данном доказательстве и сосчитаем число пропозициональных выводов, встречающихся в ветви, ведущей от его заключения вниз к конечной секвенции всего доказательства. Сумму этих чисел, взятых для всех предикатных выводов доказательства, мы будем называть его *порядком*. Мы докажем лемму индукцией по порядку.

Если порядок отличен от 0, то имеется некоторый предикатный вывод, за которым без промежуточных логических выводов следует пропозициональный вывод.

Случай 1: Этот предикатный вывод служит применением $\to\forall$, а первый пропозициональный вывод, встречающийся ниже него, происходит по правилу *L* с одной посылкой. Как было отмечено выше, в силу свойства подформулы, $\forall x A(x)$ этого $\to\forall$ не может быть боковой формулой вывода *L*. Поэтому данная фигура имеет вид, указанный слева. Классически, ее можно заменить фигурой, указанной справа.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1\to\Theta_1,\ A(b)}{\Gamma_1\to\Theta_1,\ \forall x A(x)}\to\forall}{\overline{\overline{\Gamma_2\to\Phi,\ \forall x A(x),\ \Theta_2}}}}{\Gamma_3\to\Phi,\forall x A(x),\Theta_3.}\,L
\qquad\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1\to\Theta_1,\ A(b)}{\Gamma_1\to\Theta_1,\ A(b),\ \forall x A(x)}\to У}{\overline{\overline{\Gamma_2\to\Phi,\ A(b),\ \forall x A(x),\ \Theta_2}}}}{\overline{\overline{\Gamma_3\to\Phi,\ \forall x A(x),\ \Theta_3,\ A(b)}}}\,L}{\Gamma_3\to\Phi,\ \forall x A(x),\ \Theta_3.}\to\forall$$

$\to У$ введено, принимая во внимание возможность того, что среди *УСП*-шагов данной фигуры встречается применение $\to C$ с $\forall x A(x)$ в качестве C. Из свойства чистоты переменных данного доказательства вытекает, что ограничение на переменные выполняется для $\to\forall$ измененной фигуры. Интуиционистски Θ_1, Φ, Θ_2 и Θ_3 все пусты, и мы опускаем $\to У$ при построении измененной фигуры. Эта замена уменьшает порядок доказательства на единицу.

Случай 2: $\to\forall$, за которым следует пропозициональный вывод по правилу L с двумя посылками. Классически предыдущее рассуждение нужно изменить только за счет указания над L внешней посылки (левой или правой), соответствующей посылке измененной фигуры предшествует применение $\to У$ (за исключением случая, когда L есть $\supset\to_1$). Интуиционистски L может быть только $\supset\to$ с левой внешней посылкой.

Случаи 3—8. Классическое и интуиционистское рассмотрения случаев для $\forall\to$, за которым следует пропозициональный вывод с одной или двумя посылками, по существу симметричны классическому рассмотрению для $\to\forall$. Четыре случая для $\to\exists$ и $\exists\to$ рассматриваются двойственным образом.

Пример 1. Теорема 50 не верна для интуиционистской системы $G1$ с $\vee\to$. Действительно, рассмотрим следующее доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\mathscr{A}(a)\to\mathscr{A}(a)}{\mathscr{A}(a)\to\exists x\mathscr{A}(x)}\to\exists \qquad \dfrac{\mathscr{A}(b)\to\mathscr{A}(b)}{\mathscr{A}(b)\to\exists x\mathscr{A}(x)}\to\exists}{\mathscr{A}(a)\vee\mathscr{A}(b)\to\exists x\mathscr{A}(x)}\vee\to$$

Допустим, что имеется другое доказательство описанного в теореме вида. Тогда средняя секвенция S должна иметь вид $\Pi\to\Phi$, где Π состоит из нуля или нескольких вхождений формулы $\mathscr{A}(a)\vee\mathscr{A}(b)$, а Φ пуста или совпадает с $\mathscr{A}(\mathrm{t})$ для некоторого терма t, потому что, если читать вверх от конечной секвенции до S, то *УСП*-шаги (если таковые имеются) могут состоять только в удалении, удвоении или перестановке формул, но не могут вводить новых формул, а предикатные выводы (если таковые имеются) могут быть только применением $\to\exists$, которое (если читать снизу вверх) заменяет $\exists x\mathscr{A}(x)$ на $\mathscr{A}(\mathrm{t})$. Но если бы Π или Φ было пусто, то $\Pi\to\Phi$ не могло бы быть доказуемо в $G1$ без сечения, в силу лемм 33a и 33b, примененных, как в примере 4 § 78. Теперь рассмотрим, например, случай, когда $\Pi\to\Phi$ есть $\mathscr{A}(a)\vee\mathscr{A}(b)\to\mathscr{A}(\mathrm{t})$. Терм t может совпадать с a или с b или не совпадать ни с одной из этих переменных. Рассмотрим, например, случай, когда t есть a. Тогда, в силу следствия из теоремы 47, формула $\mathscr{A}(a)\vee\mathscr{A}(b)\supset\mathscr{A}(a)$ была бы доказуема в исчислении высказываний H и, по теореме 4 § 25, то же самое имело бы место для $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}\supset\mathscr{A}$, в противоречие с теоремой 9 § 28.

Теорема о непротиворечивости. Генцен продемонстрировал применение своей обобщенной основной теоремы, получив с ее помощью результаты о непротиворечивости, сходные с теми, которые раньше были получены Аккерманом, Нейманом и Эрбраном. Бернайс [1936] и Гильберт и Бернайс [1939] установили общую теорему о непротиворечивости для аксиоматических теорий, которую они обосновали методом Аккермана. Мы сейчас также установим такую теорему.

Эту теорему можно применять для метаматематического доказательства непротиворечивости аксиоматических теорий из арифметики, геометрии или алгебры, коль скоро конструктивно, т. е. в финитных выражениях, можно построить модель для соответствующей теории — точнее, для ее понятий и аксиом (§ 14).

Эта теория должна быть формализована как формальная система, термы и формулы которой построены с помощью логического символизма исчисления предикатов H с некоторыми индивидуальными символами $\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_q$, функциональными символами $\mathrm{f}_1,\ldots,\mathrm{f}_r$ и предикатными символами $\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_s$.

В дополнение к постулатам исчисления предикатов H, система может иметь конечное или бесконечное число аксиом.

Чтобы построить конструктивную модель, надо отправляться от некоторой конечной (и непустой) или счетно-бесконечной области D объектов. В качестве D в каждом случае можно взять натуральный ряд чисел N, выбирая, если область D отлична от N, некоторый фиксированный эффективный пересчет этой области (с повторениями, если она конечна) и рассматривая затем вместо первоначальных объектов их индексы в этом пересчете. Но на практике удобно бывает иметь дело непосредственно с другими областями. Случай конечной области допускает более простое рассмотрение с помощью теоремы 20 § 36, обобщенной таким образом, что в процедуру оценки включаются индивидуальные и функциональные символы.

Следующий шаг при построении модели состоит в интерпретации индивидуальных, функциональных и предикатных символов в области D, т. е. в выборе объектов $e_1, \ldots, e_q$ из D в качестве значений для $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_q$, функций $f_1, \ldots, f_r$ с независимыми переменными, изменяющимися по области D, принимающих значения в D в качестве значений для $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r$, и логических функций или предикатов $P_1, \ldots, P_s$ с независимыми переменными, изменяющимися по области D в качестве значений для $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s$. Для того чтобы модель была конструктивной, $f_1, \ldots, f_r$ должны быть эффективно вычислимыми функциями, а $P_1, \ldots, P_s$ — эффективно разрешимыми предикатами. В этом случае мы будем говорить, что набор $e_1, \ldots, e_q$, $f_1, \ldots, f_r$, $P_1, \ldots, P_s$ является *эффективной интерпретацией* (для) $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_q$, $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r$, $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s$ в D. (Если D есть N, то, по тезису Чёрча, §§ 60, 62, мы можем ожидать, что $f_1, \ldots, f_r$, $P_1, \ldots, P_s$ являются обще-рекурсивными, и в этом случае мы имеем *обще-рекурсивную интерпретацию*. Однако нет необходимости связывать теорию непротиворечивости с тезисом Чёрча, потому что нам надо только при каждом применении теоремы о непротиворечивости иметь уверенность в том, что те конкретные $f_1, \ldots, f_r$, $P_1, \ldots, P_s$, которыми мы пользуемся, являются эффективными.)

Для данной эффективной интерпретации, пользуясь 2-значными таблицами для $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$ (§ 28), мы получаем процедуру оценки, с помощью которой для произвольной формулы $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ без кванторов, содержащей только различные переменные $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, можно для каждой n-ки $x_1, \ldots, x_n$ объектов из D в качестве значений $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ эффективно определить значение $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, т. е. узнать, является оно $\mathfrak{t}$ (истина) или $\mathfrak{f}$ (ложь). (Если D есть N, то, в силу #### A, C, D § 45, предикат $A(x_1, \ldots, x_n)$, который, таким образом, выражает эта формула, является примитивно-рекурсивным относительно $f_1, \ldots, f_r$, $P_1, \ldots, P_s$.)

Если областью D служит N, то вместо значения, которое принимает $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, когда значениями $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ служат натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$, обычно бывает удобнее говорить о значении $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ (где $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ — цифры, соответствующие числам $x_1, \ldots, x_n$). При этом $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ является формулой символизма, в случае необходимости расширенного за счет присоединения 0 в качестве индивидуального и $'$ в качестве функционального символа с соответствующим расширением интерпретации за счет придания 0 и $'$ их обычных значений. О каждом из символов 0 и $'$ можно предположить, что он не содержится среди первоначальных или же принимает в первоначальной интерпретации свое обычное значение. Аналогичные соглашения можно принять, когда D отлична от N. В этом случае каждому объекту x из D должен соответствовать некоторый терм $\boldsymbol{x}$, не содержащий переменных (эти термы аналогичны цифрам), а символизм и интерпретация (в случае необходимости) расширяются путем присоединения этих термов (совместимого с первоначальной интерпретацией). В обоих случаях элемент x из D мы будем называть просто «числом», а выражающий его терм $\boldsymbol{x}$, не содержащий переменных,— «цифрой». В случае надобности, это расширение символизма участвует в описании процесса оценки, но, если не оговорено противное, не должно применяться к рассматриваемой формальной системе.

В модели, т. е. после выбора области и интерпретации нелогических констант, аксиомы должны быть истинными. Так как аксиомы (вообще говоря) содержат переменные, нам нужно более общее понятие „истинности“, чем то, которое дается процедурой оценки. Мы сформулируем его здесь только для предваренных формул (теорема 19 § 35). Рассмотрим сперва замкнутую предваренную формулу, например, $\exists y_1 \forall x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_3 \mathrm{A}(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3)$, где $\mathrm{A}(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3)$ не содержит кванторов и содержит только те (попарно различные) переменные, которые здесь указаны явно; обозначим эту формулу «G». При выбранной интерпретации $e_1, \ldots, e_q$, $f_1, \ldots, f_r$, $P_1, \ldots, P_s$ и обычном истолковании кванторов G истинна в том и только в том случае, если имеется число y_1, такое, что для каждого числа x_1 имеется число y_2, зависящее от x_1 (будем обозначать его «$y_2(x_1)$», такое, что для каждого числа x_2 имеется число y_3, зависящее от x_1 и x_2 (будем обозначать его «$y_3(x_1, x_2)$»), такое, что

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{A}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_2(x_1), \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_3(x_1, x_2))$$

(где $\boldsymbol{y}_2(x_1)$ — цифра, соответствующая числу $y_2(x_1)$, и т. д.) принимает значение t. В метаматематических целях нам нужно, кроме того, чтобы существование понималось конструктивно, т. е. означало возможность нахождения y_1, $y_2(x_1)$ (для любого данного x_1) и $y_3(x_1, x_2)$ (для любых данных x_1, x_2). В этом случае $y_2(x_1)$ и $y_3(x_1, x_2)$ должны быть эффективно вычислимыми функциями. Поэтому мы будем говорить, что формула G *эффективно истинна*, если имеются число y_1 и эффективно вычислимые функции $y_2(x_1)$ и $y_3(x_1, x_2)$, такие, что для любых x_1 и x_2 (I) принимает значение t. (Если D есть N, то, по тезису Чёрча, мы можем ожидать, что $y_2(x_1)$ и $y_3(x_1, x_2)$ обще-рекурсивны, в случае чего мы будем говорить, что G *обще-рекурсивно истинна*.) Открытую предваренную формулу мы будем называть *эффективно* (*обще-рекурсивно*) *истинной*, если таковой будет ее замыкание. *Верифицируемой* мы будем называть формулу без кванторов, если для каждой подстановки цифр вместо ее переменных получающаяся формула принимает значение t согласно процедуре оценки, т. е., по принятой здесь терминологии, — эффективно истинную формулу без кванторов.

На самом деле наше требование, чтобы $y_2(x_1)$ и $y_3(x_1, x_2)$ были эффективно вычислимыми, только подчеркивает условие, во всяком случае необходимое для того, чтобы употребление кванторов существования было конструктивным. Но и в остальных отношениях (не высказанных явно) условия теоремы должны выполняться конструктивным способом, для того чтобы о непротиворечивости можно было заключить метаматематически. Например, число y_1 и описание функций $y_2(x_1)$ и $y_3(x_1, x_2)$ должны быть заданы эффективно, и доказательство того, что (I) принимает значение t для любых x_1 и x_2, должно состоять в финитном рассуждении (ср. замечания об обращении тезиса Чёрча, § 62).

Предваренную формулу, в которой никакой $\forall$-квантор не следует ни за каким $\exists$-квантором, мы будем называть *$\forall\exists$-предваренной формулой*.

Теорема 51. *Пусть термы и формулы строятся средствами логического символизма исчисления предикатов H с нелогическими константами* $e_1, \ldots, e_q$, $f_1, \ldots, f_r$, $P_1, \ldots, P_s$. *Для любой данной области D и эффективной оценки этих констант в D:*

(a) *Если* Γ — *эффективно истинные замкнутые предваренные формулы,* E — *замкнутая* ∀∃-*предваренная формула и* Γ ⊢ E *в исчислении предикатов* H, *то* E *эффективно истинна.*

(b) *Какова бы ни была формальная система* S, *постулатами которой служат постулаты исчисления предикатов* H *и каждая из аксиом которой является эффективно истинной предваренной формулой (или эквивалентна в* H *такой формуле), из того, что* E *есть* ∀∃-*предваренная формула и* ⊢ E *в* S, *следует, что* E *эффективно истинна.* В частности, S *просто непротиворечива.*

Доказательство того, что (b) следует из (a). {⊢ E в S} → {Γ ⊢ E в H, где Γ — некоторый конечный список нелогических аксиом S} → {Γ_1 ⊢ E_1 в H, где Γ_1 — замыкания эффективно истинных предваренных эквивалентов Γ, которые также эффективно истинны, а E_1 — замыкание E} → {E_1 — эффективно истинна} (в силу (a) с Γ_1, E_1 в качестве Γ, E) → {E — эффективно истинна}. В частности, $1=0$ (в случае арифметического символизма с обычной интерпретацией) или A & ¬ A, где A не содержит кванторов, не является эффективно истинной и, следовательно, не выводима в S. Поэтому S просто непротиворечива, согласно второй форме определения из § 28.

Доказательство (a). Если Γ ⊢ E дано в интуиционистской системе H, то и подавно Γ ⊢ E в классической H, потому что интуиционистский постулат 8^I доказуем классически (§ 23).

Ввиду того, что Γ, E замкнуты, при выводе Γ ⊢ E все переменные остаются фиксированными и никакая переменная не входит и свободно, и связанно в секвенцию Γ → E. Поэтому, в силу теорем 46 и 50, в классическом исчислении предикатов $G1$ найдется доказательство секвенции Γ → E, обладающее свойствами, описанными в теореме 50. Пусть h — уровень, на котором встречается средняя секвенция.

Продолжая пользоваться прежним примером, допустим, что Γ состоит из единственной рассмотренной выше формулы G, а E есть $\forall v_1 \forall v_2 \exists w$ $B(v_1, v_2, w)$, где $B(v_1, v_2, w)$ не содержит кванторов и содержит только (попарно различные) переменные v_1, v_2, w.

Возьмем любую пару чисел v_1, v_2.

Теперь мы выполним ряд действий, по одному для каждого предикатного вывода из этого доказательства в $G1$, начиная с самого нижнего и идя снизу вверх. Каждое действие будет состоять в подстановке некоторой (определяемой ниже) цифры вместо всех вхождений в дерево каждой переменной, входящей свободно в посылку этого вывода. Если это действие производится над выводом по правилу →∀ или ∃→, то вывод, конечно, разрушается. Данное доказательство обладает свойством чистоты переменных, поэтому b какого-либо применения →∀ или ∃→ не входит в него ниже посылки этого применения. Следовательио, в силу леммы 36, на той стадии (назовем ее *стадией* g), когда наши действия выполнены для выводов, посылки которых находятся на уровне g или ниже ($g \leqslant h$), каждое из первоначальных применений постулатов, посылки которых расположены выше уровня g, преобразуется снова в применение того же постулата, но только в системе $G1$ с символизмом, расширенным (в случае необходимости) за счет присоединения цифр.

Определим теперь выбор цифр, которые нужно подставлять, доказывая в то же время путем индукции по g, что если $g \leqslant h$, то на g-й стадии все секвенции до уровня g включительно будут обладать следующим свойством (которое будем называть свойством P). Антецеденты (сукцеденты) содержат только формулы, имеющие вид, указанный в левом (правом) столбце:

$$
\begin{array}{lr}
\exists y_1 \forall x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_3\, A(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3) & \forall v_1 \forall v_2 \exists w\, B(v_1, v_2, w) \\
\quad \forall x_1 \exists y_2 \forall x_2 \exists y_3\, A(\mathbf{y}_1, x_1, y_2, x_2, y_3) & \forall v_2 \exists w\, B(\mathbf{v}_1, v_2, w) \\
\quad\quad \exists y_2 \forall x_2 \exists y_3\, A(\mathbf{y}_1, t_1, y_2, x_2, y_3) & \exists w\, B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, w) \\
\quad\quad\quad \forall x_2 \exists y_3\, A(\mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2(t_1)\, x_2, y_3) & B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, s), \\
\quad\quad\quad\quad \exists y_3\, A(\mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2(t_1), t_2, y_3) & \\
\quad\quad\quad\quad\quad A(\mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2(t_1), t_2, \mathbf{y}_3(t_1, t_2)) &
\end{array}
$$

где t_1, t_2 и s — не содержащие переменных термы, t_1 и t_2 — числа, выражаемые в данной эффективной интерпретации термами t_1 и t_2 соответственно, а $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2(t_1)$, $\mathbf{y}_3(t_1, t_2)$, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — цифры для чисел y_1, $y_2(t_1)$, $y_3(t_1, t_2)$, v_1 и v_2 соответственно, причем y_1, $y_2(x_1)$ и $y_3(x_1, x_2)$ — число и эффективно вычислимые функции, которые даны в силу условия, что G эффективно истинна.

Базис: $g = 1$. На уровне g или ниже находится только конечная секвенция, а она обладает свойством P.

Инд. шаг: $g > 1$. Для $g > h$ индукционное предложение имеет место тривиальным образом. Для $g \leqslant h$, по индуктивному предположению, в рассматриваемом сейчас дереве секвенции, расположенные ниже уровня g, обладают свойством P. Мы будем различать случаи, соответствующие родам выводов, дающих переход от уровня g на уровень $g - 1$.

Случай 1: $\to\forall$. В нашем примере главная формула должна иметь один из двух видов, например второй — $\forall v_2 \exists w\, B(\mathbf{v}_1, v_2, w)$. Тогда боковая формула есть $\exists w\, B(\mathbf{v}_1, b, w)$, где b есть b первоначального $\to\forall$. Мы подставляем $\mathbf{v}_2$ вместо b всюду, где она входит, т. е. только в боковую формулу посылки (расположенной на уровне g) и в секвенции, расположенные выше уровня g. В результате этого действия свойство P установлено для уровня g, так как боковая формула принимает вид $\exists w\, B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, w)$, т. е. является одной из дозволенных свойством P сукцедентных форм, а все остальные формулы этой секвенции совпадают с соответствующими формулами заключения, которые по индуктивному предположению уже имеют дозволенный вид.

Случай 2: $\forall\to$. В нашем примере главная формула должна иметь один из двух видов, например второй: $\forall x_2 \exists y_3\, A(\mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2(t_1), x_2, y_3)$; тогда боковая формула имеет вид $\exists y_3\, A(\mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2(t_1), t^*, y_3)$, где t^* — терм, возникающий в результате предыдущих подстановок из t первоначального вывода. По индуктивному предположению, никакая переменная не входит свободно в секвенции, лежащие ниже уровня g, так что только переменные из t^* входят в посылку свободно. Вместо каждой из них (если только таковые существуют) мы подставляем 0 всюду, где она входит (т. е. только в боковой формуле на уровне g и выше уровня g) — если область D есть N; в случае же, если D не есть N, мы подставляем (вместо 0) какую-нибудь определенную цифру. Боковая формула превращается в $\exists y_3\, A(\mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2(t_1), t_2, y_3)$, где t_2 — результат этой подстановки в t^*, а остальные формулы на уровне g не меняются и каждая из них уже имеет вид, допускаемый свойством P.

Случай 3: $\to\exists$. Аналогично случаю 2 (в нашем примере имеется только одна возможность для главной формулы).

Случай 4: $\exists\to$. В нашем примере главная формула должна иметь один из трех видов, например $\exists y_2 \forall x_2 \exists y_3\, A(\mathbf{y}_1, t_1, y_2, x_2, y_3)$; тогда боковая формула имеет вид $\forall x_2 \exists y_3\, A(\mathbf{y}_1, t_1, b, x_2\, y_3)$ с первоначальным b. Мы подставляем вместо b цифру $\mathbf{y}_2(t_1)$.

Случай 5: $У$, $С$ или $П$. Посылка уже обладает свойством P, потому что она не содержит ни одной формулы, не входящей в заключение, и в этом случае мы не производим никакого нового действия.

Этим закончено определение наших действий и доказательство того, что для каждой стадии $g\,(\leqslant h)$ секвенции, лежащие на уровне g и ниже, обладают свойством P. Таким образом, на стадии h, когда процесс изменения данного доказательства в классическом исчислении предикатов $G1$ полностью закончен, первоначальная средняя секвенция, которая не содержит кванторов, принимает вид

$$\mathrm{A}(\boldsymbol{y}_1, \mathrm{t}_{11}, \boldsymbol{y}_2(t_{11}), \mathrm{t}_{12}, \boldsymbol{y}_3(t_{11}, t_{12})), \ldots, \mathrm{A}(\boldsymbol{y}_1, \mathrm{t}_{l1}, \boldsymbol{y}_2(t_{l1}), \mathrm{t}_{l2}, \boldsymbol{y}_3(t_{l1}, t_{l2})) \to$$
$$\to \mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \mathrm{s}_1), \ldots, \mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \mathrm{s}_m).$$

Часть дерева, расположенная выше средней секвенции (включая ее саму), превращается в доказательство этой секвенции в исчислении высказываний $G1$ с добавленными к символизму цифрами. Поэтому, в силу следствия из теоремы 47, формула

$$\mathrm{A}(\boldsymbol{y}_1, \mathrm{t}_{11}, \boldsymbol{y}_2(t_{11}), \mathrm{t}_{12}, \boldsymbol{y}_3(t_{11}, t_{12})) \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{A}(\boldsymbol{y}_1, \mathrm{t}_{l1}, \boldsymbol{y}_2(t_{l1}), \mathrm{t}_{l2}, \boldsymbol{y}_3(t_{l1}, t_{l2})) \supset$$
$$\supset \mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \mathrm{s}_1) \vee \ldots \vee \mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \mathrm{s}_m)$$

доказуема в исчислении высказываний H и, следовательно, в силу теоремы 9 из § 28 (и теоремы 4 из § 25), будет тождественно истинной, если ее различные элементарные части рассматривать как различные пропозициональные буквы для процедуры оценки исчисления высказываний. В частности, она принимает значение t, если мы припишем каждой из различных элементарных частей (которые не содержат переменных) значение $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$, получаемое ею при данной эффективной интерпретации нелогических констант. По условию, (I) принимает значение $\mathfrak{t}$ для каждой пары чисел x_1, x_2. Поэтому, согласно таблицам оценки для символов $\&$, $\supset$ и $\vee$, одна из формул $\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \mathrm{s}_1), \ldots, \mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \mathrm{s}_m)$ должна принимать значение t. Пусть первой из них будет $\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \mathrm{s}_a)$. Тогда не содержащий переменных терм s_a выражает такое число s_a, что значение $\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{s}_a)$ есть t.

Весь процесс, посредством которого, выбрав числа v_1 и v_2, мы получили это число s_a, является эффективным; поэтому $s_a = w(v_1, v_2)$, где $w(v_1, v_2)$ — эффективно вычислимая функция. Таким образом, для любых v_1, v_2

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}(v_1\, v_2))$$

принимает значение t, т. е. E — эффективно истинна, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Описанная выше конструкция позволяет утверждать коечто относительно того, каким образом функция $w(v_1, v_2)$ связана с функциями и предикатами $f_1, \ldots, f_r$, $P_1, \ldots, P_s$, $y_2(x_1)$, $y_3(x_1, x_2)$, независимо от природы последних. Так, если D есть N, то, независимо от условий эффективности для доказанной теоремы, (а) функция w *примитивно-рекурсивна относительно* $f_1, \ldots, f_r$, $P_1, \ldots, P_s$, y_2, y_3. В самом деле, можно показать при помощи индукции по g, что если $g \leqslant h$, то на стадии g каждый терм t, свободно входящий в дерево и содержащий в точности p различных переменных, выражает, если рассматривать v_1, v_2 как переменные, некоторую функцию $t(v_1, v_2, u_1, \ldots, u_p)$, явную относительно $f_1, \ldots, f_r$, y_2, y_3 и констант. Поэтому (для $i = 1, \ldots, m$) s_i выражает некоторую функцию $s_i(v_1, v_2)$, явную относительно тех же самых функций и констант, и каждая элементарная часть $\mathrm{B}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \mathrm{s}_i)$ выражает предикат, явный относительно этих же функций и констант и $P_1, \ldots, P_s$, откуда, в силу ## A, C, D § 45, следует, что $B(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, s_i)$ выражает предикат $B_i(v_1, v_2)$, примитивно-рекурсивный относительно $f_1, \ldots, f_r, P_1 \ldots, P_s, y_2, y_3$. Отсюда (a) получается применением $\#$F с B_i в качестве Q_i и s_i в качестве φ_i (никакого φ_{m+1} не требуется). Точнее, (b) *функция w явно зависит от $f_1, \ldots, f_r, y_2, y_3, +, \cdot, \overline{\mathrm{sg}}$, представляющих функций для $P_1, \ldots, P_s$ и констант* ($\#\#$ 1, 2, 9).

Применения. Теорема 52. *Для примитивно-рекурсивного предиката $R(x, y)$, формальной системы S и формул $A(\boldsymbol{x})$ ($x = 0, 1, 2, \ldots$), описанных в примере 2 § 73: $A(\boldsymbol{x})$ может быть доказуемой в S только при условии $(Ey) R(x, y)$. (В действительности каждая доказуемая в S $\forall\exists$-предваренная формула эффективно истинна в естественной интерпретации.)*

Доказательство. Все аксиомы S верифицируемы (а следовательно, эффективно истинны), если за область взять натуральный ряд чисел и интерпретировать нелогические константы 0, $'$, $f_1, \ldots, f_k$, $=$ естественным образом, т. е. как 0, $'$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, $=$ соответственно (эта интерпретация эффективна). Поэтому применимо (b). Применяя (b) с $A(\boldsymbol{x})$, т. е. $\exists y f_k(\boldsymbol{x}, y) = 0$, в качестве E, получаем: Если $\vdash A(\boldsymbol{x})$ в S, то $A(\boldsymbol{x})$ эффективно истинна в этой интерпретации, т. е. имеется y, для которого $f_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ принимает значение t (т. е. для которого $\varphi_k(x, y) = 0$), т. е. $(Ey) R(x, y)$.

Теорема 53. (a) *Система Робинсона* (*лемма* 18 b § 49), *которую будем называть S, просто непротиворечива (и каждая доказуемая в S $\forall\exists$-предваренная формула эффективно истинна).* (b) *в S для любого данного примитивно-рекурсивного предиката $R(x, y)$ и нумерически выражающей его формулы* $R(x, y)$, *полученной методом доказательства следствия из теоремы* 27 § 49, *справедливо $\vdash \exists y R(\boldsymbol{x}, y)$ только в том случае, если $(Ey) R(x, y)$.* (c) *В S, если формулы $A(a, b)$ и $B(a, c)$ примера* 1 § 61 *получены методом доказательства следствия из теоремы* 27, *имеем* (*обратно к* (52))

$$\{\vdash B(\boldsymbol{x})\} \to (Ey)\, W_0(x, y).$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для классических систем, потому что, если формула $1 = 0$ или $\exists y R(\boldsymbol{x}, y)$ или $B(\boldsymbol{x})$ доказуема в интуиционистской системе, то она доказуема и в классической.

(a) Каждая из тринадцати аксиом, кроме *137 (или *136), верифицируема в обычной (эффективной) интерпретации. Применяя *90 из § 35, мы получаем $\exists b(a = 0 \vee a = b')$ в качестве $\forall\exists$-предваренного эквивалента для *137. Эта формула эффективно истинна, причем $b(a) = a \dot{-} 1$, так как для каждого натурального числа a формула $\boldsymbol{a} = 0 \vee \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}(a))'$ принимает значение t.

(b) Теорему о непротиворечивости сразу применить нельзя, потому что $\exists y R(\boldsymbol{x}, y)$ не является $\forall\exists$-предваренной формулой. Но мы покажем (после того, как будет доказана следующая лемма), что можно добавить к S новые предикатные символы и эффективно распространить на них интерпретацию таким образом, что каждая из новых аксиом будет эквивалентна в исчислении предикатов эффективно истинной предваренной формуле и $\vdash S(x, y) \sim R(x, y)$ в полученной таким путем системе S', где $S(x, y)$ не содержит кванторов и выражает в расширенной интерпретации $R(x, y)$. Тогда (b) получится следующим образом:

$$\{\vdash \exists y R(\boldsymbol{x}, y) \text{ в } S\} \to \{\vdash \exists y R(\boldsymbol{x}, y) \text{ в } S'\} \to \{\vdash \exists y S(\boldsymbol{x}, y) \text{ в } S'\} \to (Ey) R(x, y).$$

Лемма 41°. *Пусть $A(x, y)$ — формула, не содержащая кванторов и содержащая только указанные переменные x, y, которые отличны друг от* *друга; пусть дана эффективная интерпретация ее нелогических констант, и пусть $A(x, y)$ — предикат, который она выражает в этой интерпретации. Пусть* $\dot{\mathrm{A}}(\mathrm{x})$ — *новая предикатная буква.* (a) *Допустим, что*

$$(1)\qquad (Ey)A(x, y) \rightarrow (Ey)_{y \leqslant \upsilon(x)} A(x, y),$$

где $\upsilon(x)$ — *эффективно вычислимая функция. Пусть*

$$(2)\qquad \dot{A}(x) \equiv (Ey)A(x, y).$$

Пусть, далее, $\dot{\mathrm{A}}(\mathrm{x})$ *интерпретируется посредством* $\dot{A}(x)$ (*в силу* (1) *и* (2), *этот предикат эффективен*). *Тогда формула*

$$(\mathrm{i})\qquad \dot{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) \sim \exists \mathrm{y}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

эквивалентна в исчислении предикатов некоторой эффективно истинной предваренной формуле. Аналогично для «$\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m$» *вместо* «x, y». (b) *Аналогично для квантора общности вместо квантора существования* (*и* «$\leftarrow$» *вместо* «$\rightarrow$» *в* (1)).

Доказательство леммы 41. (a) Восстанавливая сокращение $\sim$ в (i) и применяя *96, *89, *97 и *91, мы получим в качестве $\forall\exists$-предваренного эквивалента

$$(\mathrm{ii})\qquad \forall \mathrm{y} \exists \mathrm{z} [\{\dot{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{z})\} \& \{\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \supset \dot{\mathrm{A}}(\mathrm{x})\}].$$

Эта формула эффективно истинна, причем $z(x, y) = \mu z_{z \leqslant \upsilon(x)} A(x, z)$.

(b) Аналогично, применяя *95, *89, *98 и *91, мы получим формулу

$$\forall \mathrm{y} \exists \mathrm{z} [\{\dot{\mathrm{A}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\} \& \{\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \supset \dot{\mathrm{A}}(\mathrm{x})\}],$$

которая эффективно истинна, причем $z(x, y) = \mu z_{z \leqslant \upsilon(x)} \overline{A}(x, z)$. •

Доказательство теоремы 53 (b) (окончание). Согласно тому, как в § 49 из теоремы 27 было получено ее следствие, нам теперь достаточно показать в обозначениях доказательства теоремы 27, что S можно так расширить, чтобы

$$\vdash \dot{\mathrm{P}}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}) \sim \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}),$$

где $\dot{\mathrm{P}}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$ интерпретируется как $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w$.

Случай (Vb). По индуктивному предположению, уже имеется расширение S, содержащее предикатный символ $\dot{\mathrm{Q}}(\mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$, интерпретируемый как $\psi(x_2, \ldots, x_n) = w$, для которого $\vdash \dot{\mathrm{Q}}(\mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}) \sim \mathrm{Q}(\mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$, и предикатный символ $\dot{\mathrm{R}}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$, интерпретируемый как

$$\chi(y, z, x_2, \ldots, x_n) = w,$$

для которого

$$\vdash \dot{\mathrm{R}}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}) \sim \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}).$$

Введем $a \dot{<} b$ (если оно уже не введено), интерпретируемое как $a < b$, с аксиомой $a \dot{<} b \sim a < b$, т. е. $a \dot{<} b \sim \exists c (c' + a = b)$, пользуясь $c \leqslant b$ в качестве ограничивающего условия $y \leqslant v(x_1, x_2)$ для леммы 41. Расширим, далее, S (если это уже не достигнуто) так, чтобы она содержала предикатный символ $\dot{\mathrm{B}}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{w})$, интерпретируемый как $\beta(c, d, i) = w$, для которого $\vdash \dot{\mathrm{B}}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{w}) \sim \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{w})$; обращаясь к определению $\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{w})$, сопровождающему *(180) в § 41, это можно сделать за несколько шагов, аналогичных только что проделанным (и которые предоставляется проделать читателю). Затем введем символ $\dot{\mathrm{D}}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$, интерпретируемый как

$$(Eu)(Ev)[\beta(c, d, i') = u \,\&\, \beta(c, d, i) = v \,\&\, \chi(i, v, x_2, \ldots, x_n) = u]$$

с аксиомой

$$\dot{\mathrm{D}}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n) \sim \exists \mathrm{u} \exists \mathrm{v} [\dot{\mathrm{B}}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}', \mathrm{u}) \,\&\, \dot{\mathrm{B}}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{v}) \,\&\, \dot{\mathrm{R}}(\mathrm{i}, \mathrm{v}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{u})],$$

пользуясь ограничивающими условиями

$$u \leqslant \beta(c, d, i'), \quad v \leqslant \beta(c, d, i).$$

Затем введем символ $\dot{\mathrm{E}}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{y}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$, интерпретируемый как

$$(i)[i < y \rightarrow (Eu)(Ev)[\beta(c, d, i') = u \,\&\, \beta(c, d, i) = v \,\&\, \chi(i, v, x_2, \ldots, x_n) = u]],$$

с аксиомой

$$\dot{\mathrm{E}}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{y}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n) \sim \forall \mathrm{i} [\mathrm{i} \mathrel{\dot{<}} \mathrm{y} \supset \dot{\mathrm{D}}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)],$$

пользуясь ограничивающим условием $i \leqslant y$. Затем введем $\dot{\mathrm{F}}$, чтобы устранить первое $\exists \mathrm{u}$ в $\mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$, пользуясь $u \leqslant \beta(c, d, 0)$; и, наконец, введем символ $\dot{\mathrm{P}}$, чтобы устранить $\exists \mathrm{c} \exists \mathrm{d}$, пользуясь в качестве ограничивающих условий $c \leqslant C$ и $d \leqslant D$, где C и D таковы, как было описано в примере 1 (A) § 57, при $\eta(y, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(y, x_2, \ldots, x_n)$. Согласно (C) из случая (Vb) теоремы I § 49, предикат $P(y, x_2, \ldots, x_n, w)$, который служит для интерпретации $\dot{\mathrm{P}}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, w)$, действительно есть $\varphi(y, x_2, \ldots, x_n) = w$; и в силу эквивалентностей, введенных в качестве аксиом или уже доказанных,

$$\vdash \dot{\mathrm{P}}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}) \sim \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}).$$

Доказательство теоремы 53 (c). Аналогично с устранением квантора $\forall c$ после устранений, выполненных, как только что было описано в обозначениях теоремы 27.

Теорема 53 (a) дает свойство непротиворечивости, которое требуется для первого доказательства теоремы 54 в § 76 (а теоремы 53 (b) и 52 дают свойство непротиворечивости, использованное в доказательствах замечания 2 § 76).

Теорема 55. *Формальная арифметическая система гл. IV с тем ограничением, наложенным на схему индукции, что в* A(x) *переменная* x *не входит свободно в область действия какого-нибудь квантора, просто непротиворечива.* (Аккерман [1924—25], Нейман [1927]; см. Гильберт и Бернайс [1939, стр. 121, 122 и 127].)

Более того, *каждая* $\forall\exists$*-предваренная формула, доказуемая в этой системе, эффективно истинна, и это утверждение сохраняет силу после присоединения к рассматриваемой системе аксиом Робинсона (лемма* 18b) *и аксиом, использованных при доказательстве частей* (b) *и* (c) *теоремы* 53; *эти части применимы и к рассматриваемой системе.*

Доказательство. Теорема будет сведена к одной лемме. Достаточно доказать эту теорему для классической системы. Мы рассмотрим сначала случай, когда A(x) вовсе не содержит кванторов. После этого доказательство будет закончено с помощью леммы 42.

Рассмотрим аксиому этой системы согласно постулату 13, и пусть A(x) этой аксиомы есть формула $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, содержащая только (попарно различные) переменные x, $x_1, \ldots, x_n$ и не содержащая кванторов. Пусть $A(x, x_1, \ldots, x_n)$ — (примитивно-рекурсивный) предикат, который в обычной интерпретации выражается формулой $\mathrm{A}(x, x_1, \ldots, x_n)$. Согласно *89 и *98, наша аксиома эквивалентна

$$\exists y\,[\mathrm{A}(0, x_1, \ldots, x_n) \,\&\, (\mathrm{A}(y, x_1, \ldots, x_n) \supset \mathrm{A}(y', x_1, \ldots, x_n)) \supset \mathrm{A}(x, x_1, \ldots, x_n)].$$

Эта формула эффективно истинна, причем

$$y(x, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, \text{ если } A(x, x_1, \ldots, x_n) \vee \overline{A}(0, x_1, \ldots, x_n), \\ \mu y_{y \leqslant x} A(y, x_1, \ldots, x_n) \,\&\, \overline{A}(y', x_1, \ldots, x_n) \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 42°. *В системе теоремы* 55 *класс доказуемых формул (или формул, выводимых из данных исходных формул) не уменьшится, если наложить на* A(x) *схемы индукции дальнейшее ограничение, состоящее в том, чтобы* A(x) *вовсе не содержала кванторов.*

Доказательство. Всякая формула A(x), не содержащая x свободно в области действия какого-нибудь квантора, должна быть составлена посредством операций исчисления высказываний из формул $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{m_1}$, каждая из которых не содержит кванторов, но может содержать x, и формул $\mathrm{A}_{m_1+1}, \ldots, \mathrm{A}_{m_1+m_2}$, каждая из которых содержит кванторы, но не содержит x свободно ($m_1, m_2 \geqslant 0$; $m = m_1 + m_2 \geqslant 1$). В силу теоремы 11 § 29 о главной дизъюнктивной нормальной форме (и теоремы 3 § 25), A(x) эквивалентна некоторой дизъюнкции формул $\mathrm{A}_{i1} \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{A}_{im}$ ($i = 1, \ldots, n$), где каждая A_{ij} есть A_j или $\neg \mathrm{A}_j$ в зависимости от i, если только применим первый случай нормальной формы. Допустим сначала, что $m_1, m_2 \geqslant 1$. Будем писать «$\mathrm{B}_i(x)$» вместо $\mathrm{A}_{i1} \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{A}_{im_1}$, «$\mathrm{C}_i$» вместо $\mathrm{A}_{im_1+1} \,\&\, \ldots \,\&\, \mathrm{A}_{im}$, и «B(x)» вместо некоторой опровержимой формулы без кванторов. Тогда, в силу *48 и *34 § 27, A(x) эквивалентна формуле

(a) $$\mathrm{B}(x) \vee (\mathrm{B}_1(x) \,\&\, \mathrm{C}_1) \vee \ldots \vee (\mathrm{B}_n(x) \,\&\, \mathrm{C}_n).$$

Рассмотрим теперь любую формулу вида (a), где $n \geqslant 0$ и (как выше) части B не содержат кванторов, а части C содержат кванторы, но не содержат свободно x; будем называть n ее *степенью*. Путем индукции по степени мы докажем, что каждая аксиома, полученная согласно постулату 13, в которой A(x) имеет эту форму, доказуема с помощью постулата 13, применяемого только для таких A(x), которые вовсе не содержат кванторов.

Инд. шаг: $n > 0$. Запишем (a) в виде

(b) $$\mathrm{D}(x) \vee (\mathrm{B}_n(x) \,\&\, \mathrm{C}_n).$$

Тогда рассматриваемой аксиомой будет

(c) $$[\mathrm{D}(0) \vee (\mathrm{B}_n(0) \,\&\, \mathrm{C}_n)] \,\&\, \forall x\,[\mathrm{D}(x) \vee (\mathrm{B}_n(x) \,\&\, \mathrm{C}_n) \supset \mathrm{D}(x') \vee (\mathrm{B}_n(x') \,\&\, \mathrm{C}_n)] \supset \\ \supset \mathrm{D}(x) \vee (\mathrm{B}_n(x) \,\&\, \mathrm{C}_n).$$

Мы покажем, что (c) выводима в исчислении предикатов из следующих двух аксиом:

(d) $$[\mathrm{B}_n(0) \vee \mathrm{D}(0)] \,\&\, \forall x\,[\mathrm{B}_n(x) \vee \mathrm{D}(x) \supset \mathrm{B}_n(x') \vee \mathrm{D}(x')] \supset \mathrm{B}_n(x) \vee \mathrm{D}(x),$$

(e) $$\mathrm{D}(0) \,\&\, \forall x\,[\mathrm{D}(x) \supset \mathrm{D}(x')] \supset \mathrm{D}(x);$$

иначе говоря, мы хотим показать, что (d), (e) $\vdash$ (c). В силу теоремы 14 § 33 и на основании *45 и *34 § 27: $C_n \vdash$ (c) $\sim$ (d); в силу *47 и *48: $\neg C_n \vdash$ $\vdash$ (c) $\sim$ (e). Ни одна переменная при этом не варьируется, потому что C_n не содержит свободно переменную x квантора $\forall$x, в области действия которого производятся замены. Поэтому, применяя $\vee$-удал., получаем, что (d), (e), $C_n \vee \neg C_n \vdash$ (c), а отсюда, с помощью *51, — что (d), (e) $\vdash$ (c).

Но в (e) A(x) имеет вид (a) степени $n-1$, и то же верно для (d), если в качестве нового B(x) взять $B_n(x) \vee B(x)$.

Если $m_1=0$, то этот метод применим, только в качестве «$B_i(x)$» и «$B_i(x)$ &» надо брать пустое выражение; изменения состоят в следующем. Рассмотрим

(f) $$C_n \,\&\, \forall x\, [C_n \supset C_n] \supset C_n.$$

Ввиду *46, $C_n \vdash$ (c) $\sim$ (f); ввиду *48, $\neg C_n \vdash$ (c) $\sim$ (e). Но, в силу *1 § 26, *75 § 35, *45 и снова *1, $\vdash$ (f).

Если $m_2=0$, в A(x) уже нет кванторов.

Если применим второй случай нормальной формы, то, в силу *53, *34 и *53, A(x) эквивалентна B(x) & $\neg$ B(x).

Замечание 2. В системах теорем 52, 53 и 55 каждая доказуемая $\forall\exists$-предваренная формула *примитивно-рекурсивно истинна*. Для $R(x, y)$ и R(x, y), выбранных как в теореме 53 (b), $\{\vdash \exists y R(x, y)\} \rightarrow$ {имеется примитивно-рекурсивная функция φ, такая, что $(x)\, R(x, \varphi(x))$}. Доказательства. Утверждение имеет место согласно замечанию 1, нашему способу построения функций и предикатов для эффективной интерпретации и употреблению эффективной истинности в теоремах 52, 53 и 55.

Пример 2. Пусть S — арифметическая формальная система, для которой операция $\cdot$ опущена. Упомянутое в начале § 42 переложение работы Пресбургера [1930] непосредственно содержит некоторое эффективное соответствие, сопоставляющее каждой замкнутой формуле A системы S другую такую же формулу B со следующими свойствами (1) — (4)[1] (если рассматриваем открытую формулу, то пусть A будет ее замыканием): (1) $\vdash$ A $\sim$ B в S. (2) B должна быть или истинной или ложной при некотором напрашивающемся обобщении процедуры оценки (рассмотренной перед теоремой 51). Мы будем теперь говорить, что A *истинна* (*ложна*), если B истинна (ложна). (Это специальное определение истинности для замкнутых формул из S, в силу (3), эквивалентно тому, которое появится в конце § 81 в связи с общим определением истинности.) (3) Истинность и ложность в этом смысле подчиняются 2-значным таблицам истинности; {$\exists$xA(x) истинна} $\equiv$ $\equiv (Ex)$ {A(x) истинна}, а {$\forall$xA(x) истинна} $\equiv (x)$ {A(x) истинна}. (4) В соответствии с тем, истинна B или ложна, B доказуема или опровержима в S. Отсюда: (5) S просто полна и полна по отношению к интерпретации (§§ 41, 29). (6) Имеется алгоритм для решения вопроса, истинна ли A. (7) Если S просто непротиворечива, то имеется разрешающая процедура для S, т. е. для вопроса, имеет ли место $\vdash$ A в S. Теперь мы покажем следующее. (8) Если $\vdash$ A в S, то A истинна; следовательно, S просто непротиворечива. Допустим, что в S имеет место $\vdash$ A. Тогда для некоторой конечной системы Г нелогических аксиом S в H имеет место Г $\vdash$ A. С помощью леммы 41 можно устранить кванторы из A и из индукционной формулы A(x) каждой аксиомы индукции из Г, если взять, например, для части $\exists$yA(x, y)

$$v(x) = \mu y\, [(\{\exists y A(x, y) \text{ ложна}\} \,\&\, y=0) \vee A(x, y)].$$

[1]) См. добавление IV. — *Прим. перев.*

Мы получим, таким образом, $\Gamma', \Theta \vdash A'$, где Θ — формулы (i) леммы 41 с $\exists$ или $\forall$ для предикатных символов, введенных в процессе устранения. Тогда A' (а следовательно, и A) истинна, в силу теоремы 55 (или первой части ее доказательства) для системы, получающейся в результате присоединения Θ в качестве аксиом.

Комментарий. В рассмотренных применениях теоремы о непротиворечивости областью D служит натуральный ряд чисел, цифры уже являются частью символизма, а эффективная интерпретация—естественная. Гильберт и Бернайс [1939, стр. 38—48] дают два применения их теоремы о непротиворечивости к геометрическим системам аксиом. При этом в качестве областей D берутся некоторые счетные системы комплексных чисел.

Все эти доказательства непротиворечивости зависят от наличия модели для аксиом, как и доказательства, полученные до появления гильбертовской теории доказательств (см. § 14). Но задание модели для аксиом в содержательных арифметических терминах не устраняет всех сомнений относительно того, что в рассматриваемой теории из аксиом можно вывести противоречие, пока не доказано также, что рассуждения этой теории можно перевести в содержательные арифметические рассуждения в терминах объектов, использованных при определении модели. Именно такое доказательство добавляет к прежним рассуждениям теорема о непротиворечивости (теорема 51). (См. Бернайс [1935, стр. 115, 116] и Гильберт и Бернайс [1939, стр. 48].)

Вывод теории из ее аксиом мы рассматривали в связи с вопросом о непротиворечивости в первой части § 75, но там мы пользовались нефинитными теоретико-множественными методами.

Теорема о непротиворечивости зависит (ввиду применения в ее доказательстве обобщенной основной теоремы (теорема 50)) от основной теоремы (теорема 48) и сведения H к $G1$ (теорема 46). В силу этих теорем, если в системе, основанной на исчислении предикатов с математическими аксиомами, дано доказательство формальной теоремы, то можно изменить эту систему и доказательство таким образом, что получится доказательство, не содержащее более сложных формул, чем аксиомы и данная теорема, т. е. содержащее только подформулы аксиом и теоремы. В таком случае нет надобности рассматривать «идеальные» утверждения при выводе «действительной теоремы» из «действительных» аксиом (§ 14).

Наша метаматематическая теорема 55 о непротиворечивости, доказанная для части арифметики, сохраняет, конечно, силу и после присоединения любых новых эффективно истинных предваренных аксиом. Например, можно добавлять новые символы для примитивно-рекурсивных функций с их рекурсивными равенствами. Они были устранимы в полной системе (пример 9 § 74), но, вероятно, не устранимы в общем случае в системе с ограниченной схемой индукции.

Можно рассматривать также новые постулаты индукции, которые в полной системе должны иметь место как выводимые правила, но, вероятно, не выводимы, если постулат 13 ограничить, как в теореме 55, и которые при соответствующих ограничениях допускают аналогичное рассмотрение. Примеры таких постулатов приведены у Гильберта и Бернайса [1939, стр. 343—346], но Сколем [1939] и Петер [1940] показали, что эти постулаты становятся выводимыми после присоединения надлежащих примитивно-рекурсивных функций с их рекурсивными равенствами.

Все такие доказательства непротиворечивости, полученные строго элементарными методами, должны остановиться перед непротиворечивостью арифметического формализма с неограниченной схемой индукции, как это вытекает из знаменитой второй теоремы Гёделя [1931, теорема 30 § 42], согласно которой непротиворечивость этой системы не может быть установлена методами, формализуемыми в ней самой.

Генценовское доказательство непротиворечивости арифметики. Расскажем теперь коротко о методе, которым воспользовался Генцен [1936, 1938а] для доказательства непротиворечивости классической элементарной арифметики с неограниченным постулатом индукции[1]).

В доказательстве основной теоремы Генцена [1934—35, теорема 48 § 78] мы воспользовались тройной индукцией, состоявшей из индукции по числу смешений, внутри индукционного шага которой мы воспользовались (при доказательстве основной леммы) индукцией по степени, внутри базиса, а также индукционного шага которой мы воспользовались индукцией по рангу. Эту тройную индукцию можно рассматривать как простую «трансфинитную индукцию», если нашу систему порядковых чисел, до сих пор состоявшую только из натуральных чисел, продолжить достаточно далеко в область трансфинитного.

Введем новое число, «первое трансфинитное порядковое число», которое будет следовать сразу за всеми натуральными или «конечными порядковыми» числами и которое мы будем называть ω. Затем с помощью операции «следующий за» получаются новые (трансфинитные порядковые) числа $\omega+1$, $\omega+2, \ldots$, за бесконечной последовательностью которых будет следовать новое число, именуемое 2ω. Повторяя этот процесс, после всех этих бесконечных последовательностей чисел, каждая из которых изоморфна натуральному ряду чисел и начинается соответственно с $0, \omega, 2\omega, \ldots$, появится новое число, именуемое ω^2, которое будет следовать за ними всеми, и т. д.:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots;\ 2\omega,\ 2\omega+1,\ 2\omega+2,\ \ldots;\ \ldots;;$$
$$\omega^2,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots;\ \omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega+1,\ \omega^2+\omega+2,\ \ldots;$$
$$\omega^2+2\omega,\ \omega^2+2\omega+1,\ \omega^2+2\omega+2,\ \ldots;\ \ldots;;$$
$$2\omega^2,\ 2\omega^2+1,\ 2\omega^2+2,\ \ldots;\ 2\omega^2+\omega,\ 2\omega^2+\omega+1,\ 2\omega^2+\omega+2,\ \ldots;$$
$$2\omega^2+2\omega,\ 2\omega^2+2\omega+1,\ 2\omega^2+2\omega+2,\ \ldots;\ \ldots;;\ \ldots;;;\ \omega^3,\ \ldots.$$

Эта фигура должна только указать на способ порождения и обозначений до некоторого известного момента. Общая теория трансфинитных порядковых чисел составляет часть абстрактной теории множеств Кантора [1897]. Множество, линейно упорядоченное (§ 8) таким образом, что каждое его непустое подмножество имеет первый элемент, называется *вполне упорядоченным*. Два упорядоченных множества M и N называются *подобными* ($M \simeq N$), если их можно привести в $1-1$-соответствие, сохраняющее порядок. Канторовская теория порядковых чисел (ординальных чисел) возникла путем абстрагирования от различия между подобными вполне упорядоченными множествами таким же образом, как его теория кардинальных чисел возникла путем абстрагирования от различия между эквивалентными множествами (§ 3). Но, в то время как для всей теории канторовских трансфинитных порядковых чисел требуется теоретико-множественный подход, теория начальных отрезков (по крайней мере, не слишком больших) допускает финитный подход.

Например, систему порядковых чисел, меньших ω^3, можно представить как систему троек натуральных чисел, упорядоченную следующим образом. Пусть $\mathfrak{a}=(a, b, c)=a\omega^2+b\omega+c$ — любая такая тройка; в теории порядковых чисел, меньших ω^3, принято последнее обозначение. Отношение порядка между двумя такими тройками (рассматриваемыми как ординальные числа, меньшие ω^3) определяется следующим образом:

$$\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 \equiv (a_1 < a_2) \vee (a_1 = a_2 \,\&\, b_1 < b_2) \vee (a_1 = a_2 \,\&\, b_1 = b_2 \,\&\, c_1 < c_2).$$

[1]) П. С. Новиков [1943] получил доказательство непротиворечивости арифметики посредством конструктивных методов, отличных от генценовских.—*Прим. ред.*

Другими словами, упорядочение троек (a, b, c) является алфавитным, с бесконечным алфавитом, состоящим из натуральных чисел.

Теперь тройную обыкновенную индукцию по числу смешений a, степени b и рангу c можно следующим образом рассматривать как простую трансфинитную индукцию с $(a, b, c) = a\omega^2 + b\omega + c$ в качестве индукционного числа. При трансфинитной индукции до ω^3, чтобы доказать, что все ординальные числа, меньшие ω^3, обладают некоторым свойством, показывают, что каково бы ни было порядковое число $\alpha < \omega^3$, если все порядковые числа $\beta < \alpha$ обладают этим свойством, то и α также им обладает. Мы пользуемся более компактной формулировкой, при которой смешиваются базис и индукционный шаг (см. *162b § 40 в связи с формулировкой этого вида для обыкновенной индукции).

При желании[1]) случай $\alpha = 0$, для которого множество чисел β пусто, можно было бы рассматривать отдельно в качестве базиса. Эта индукция имеет вид возвратной индукции, в которой при $\alpha \geqslant \omega$ имеется бесконечное множество предыдущих чисел β. Для основной теоремы Генцена рассуждение состоит в том, что если теорема верна для всех доказательств с индукционными числами $(a, b, c) = \beta < \alpha\ (< \omega^3)$, то она верна и для доказательств с $(a, b, c) = \alpha$. Индукционное число $\alpha = (a, b, c)$ вполне упорядочивает случаи теоремы в том порядке, в котором они доказываются, так же как и натуральное число, являющееся индукционным числом в обыкновенной индукции.

Обратно, если воспользоваться определением порядковых чисел $< \omega^3$, как троек (a, b, c), то каждая трансфинитная индукция $< \omega^3$ может быть выполнена посредством обыкновенных индукций.

Финитным образом можно определять и некоторые более высокие порядковые числа. Ясно, что можно дойти до ω^n для любого конечного n. В качестве порядкового числа, следующего сразу за всеми этими числами, мы берем ω^ω; затем ω^{ω^ω} и т. д.

Открытие Генцена состоит в том, что гёделевское препятствие для доказательства непротиворечивости арифметики можно преодолеть, если воспользоваться трансфинитной индукцией до достаточно большого порядкового числа. Он воспользовался трансфинитной индукцией до того порядкового числа, названного Кантором ε_0, которое является первым порядковым числом, превосходящим все порядковые числа бесконечной последовательности $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$. В теории Кантора это число фигурирует как наименьшее из решений уравнения $\omega^\xi = \xi$ для ξ (эти решения называются ε-числами).

Генцен пользуется системами своего типа с секвенциями, но эти системы эквивалентны системам гильбертовского типа. В том варианте его доказательства непротиворечивости, который изложен в [1938a], простая непротиворечивость системы отождествляется с недоказуемостью секвенции $\rightarrow$. В самом деле, из $\rightarrow$ любая секвенция может быть выведена путем утончений, и обратно, из $\rightarrow A \& \neg A$ и доказуемой секвенции $A \& \neg A \rightarrow$ посредством сечения можно вывести $\rightarrow$. Каждому доказательству в своей системе он ставит в соответствие некоторое порядковое число $< \varepsilon_0$. Пользуясь индукцией в виде бесконечного спуска (ср. *163 § 40), он показывает, что для любого данного доказательства секвенции $\rightarrow$ можно найти другое доказательство $\rightarrow$ с меньшим порядковым числом. Таким образом, его система (а следовательно, и наша) просто непротиворечива.

В другом варианте [1936*] Генцен рассматривал только секвенции, имеющие в точности одну сукцедентную формулу. Он показал посредством

[1]) Например, в минимальном исчислении (см. прим. перев. на стр. 94), где не проходит доказательство формулы $\forall x (x < 0 \supset A)$. — *Прим. перев.*

трансфинитной индукции по порядковому числу ($< \varepsilon_0$) доказательства, что над каждой доказуемой секвенцией можно проделать некоторую редукцию. Допущение, что эта редукция осуществима над $\rightarrow 1 = 0$, нелепо. Выполнимость этой редукции предлагается рассматривать как финитный смысл, который можно приписывать идеальным высказываниям классической арифметики (§ 14).

Аккерман [1940], пользуясь трансфинитной индукцией до ε_0, проводит доказательство непротиворечивости элементарной арифметики другим способом, с помощью гильбертовского ε-символа (такое доказательство было первоначально предложено Гильбертом и проведено Аккерманом [1924—25] для доказательства непротиворечивости с ограниченной схемой индукции).

Так же как трансфинитная индукция до ω^3, может быть сведена к обыкновенной индукции и индукция до ε_0[1]) — это было проделано формально Гильбертом и Бернайсом [1939, стр. 360 и след.][2]). Но при этом имеется то отличие, что для последнего сведе́ния в качестве индукционного предиката ($A(x)$ из (I) § 75 или $P(n)$ § 7) используется предикат, в который явно входит некоторый предикат Q, определяемый посредством индукции, сходной по своей природе с той, при помощи которой определялся предикат M в теореме VIII § 57, и потому, вероятно, не арифметический по Гёделю (§ 48) или, эквивалентным образом, не «элементарный» (теорема VII § 57). В действительности на основании второй теоремы Гёделя (теорема 30) можно предвидеть, что трансфинитная индукция до ε_0 не может быть сведена к обыкновенной индукции внутри системы, потому что, кроме этой трансфинитной индукции, остальные рассуждения, использованные в генценовском доказательстве непротиворечивости, формализуемы в этой системе (откуда, в частности, следует, что никакая формула системы не может удовлетворять эквивалентностям, определяющим Q). В последней своей статье [1943] Генцен доказывает несводимость индукции до ε_0 прямо, а не косвенно с помощью теоремы Гёделя и своего доказательства непротиворечивости.

В первоначальных предложениях формалистов — спасти классическую математику посредством доказательства непротиворечивости (§§ 14, 15) — не предусматривалось, что придется воспользоваться таким методом, как трансфинитная индукция до ε_0. В какой мере генценовское доказательство может быть воспринято как спасение классической арифметики в смысле этой постановки проблемы, это при современном положении вещей зависит от индивидуального мнения, а именно от готовности рассматривать индукцию до ε_0 как финитный метод. (См. конец § 81.)

Генцен в [1938] высказывает предположение, что с помощью трансфинитной индукции до некоторого порядкового числа, большего чем ε_0, можно доказать непротиворечивость анализа[3]). В силу одного результата Шютте [1951], таким образом можно получать более сильные формы индукции; действительно, каково бы ни было порядковое число α, индукция до наименьшего канторовского ε-числа, превосходящего α, не может быть сведена к индукции до α (но для индукции до любого промежуточного порядкового числа такое сведе́ние возможно).

---

[1]) Эту фразу следует понимать лишь в том смысле, что для каждого $\alpha < \varepsilon_0$ индукция до α может быть сведена к обыкновенной индукции. Формальное доказательство см. добавление VI. — *Прим. перев.*

[2]) См. добавление VI. — *Прим. перев.*

[3]) Это предположение осталось недоказанным и вызывает большие сомнения. Из работы П. С. Новикова [1951] можно усмотреть, что в анализе отобразима индукция до каждого счетного трансфинита. Поэтому, в силу теоремы 30, мало правдоподобно, чтобы предположение Генцена было верным для счетного порядкового числа. — *Прим. перев.*

§ 80. РАЗРЕШАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА, ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ НЕДОКАЗУЕМОСТЬ

Если дано заключение B вывода по правилу modus ponens (правило 2) формальной системы H, то мы еще не можем определить посылки A и $A \supset B$, потому что формула A неизвестна. Аналогично, если даны заключение $\Delta, \Gamma \rightarrow \Lambda, \Theta$ сечения в $G1$ и анализ заключения, указывающий, каким образом его антецедент распадается на Δ и Γ, а сукцедент — на Λ и Θ, то мы еще не можем определить посылки $\Delta \rightarrow \Lambda, C$ и $C, \Gamma \rightarrow \Theta$, потому что формула C неизвестна.

Но для каждого из правил исчисления высказываний $G1$, кроме сечения (или исчисления $G2$, кроме смешения), если даны заключение вывода по этому правилу и анализ этого заключения, можно восстановить посылки вывода. С помощью этого обстоятельства и генценовской теоремы о нормальной форме (теорема 48) мы получим разрешающую процедуру для доказуемости в исчислении высказываний, которая, в отличие от табличной процедуры (§§ 28 — 30, теорема 12), применима к интуиционистской системе так же, как и к классической.

Каждый шаг этой процедуры будет состоять в перечислении выборов посылок вывода данного заключения. При этом громоздко было бы отмечать все способы применения структурных правил *УСП*. Поэтому для изложения нашего варианта генценовской процедуры для доказуемости мы введем новую систему генценовского типа $G3$, в которой структурные изменения *УСП* не считаются самостоятельными правилами вывода. Разрешающую процедуру мы получим только для исчисления высказываний, но определение $G3$ мы дадим также и для исчисления предикатов.

Чтобы обойтись в $G3$ без правил *УСП*, постулаты $G3$ надо строить таким образом, чтобы они применялись независимо от порядка и числа повторений формул в антецедентах, а классически и в сукцедентах. Другими словами, для $G3$ всякое применение постулата должно остаться применением того же постулата, если любую секвенцию заменить на секвенцию, „сходную“ с ней в следующем смысле: две секвенции $\Gamma \rightarrow \Theta$ и $\Gamma' \rightarrow \Theta'$ называются *сходными*, если в точности те же самые формулы входят в Γ (в Θ), что и Γ' (в Θ'), при условии, что в интуиционистском случае Θ и Θ' не могут состоять более чем из одного вхождения формулы, и поэтому должны совпадать.

Пример 1. Секвенции $\mathscr{C}, \mathscr{A}, \mathscr{B} \,\&\, \mathscr{A}, \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ и $\mathscr{B} \,\&\, \mathscr{A}, \mathscr{A}, \mathscr{C} \rightarrow \mathscr{B}, \mathscr{B}$ классически сходны, но интуиционистски вторая из них не употребляется.

Для классической системы $G3$ система постулатов отличается от системы $G2$ следующим. Схема аксиом замеияется на

$$C, \Gamma \rightarrow \Theta, C.$$

Структурных правил вывода нет, а каждое логическое правило вывода изменяется путем сохранения главной формулы в посылках. Например, $\rightarrow \neg$, $\supset \rightarrow$, $\rightarrow \vee$ и $\neg \rightarrow$ превращаются в

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta, \neg A}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg A.} \qquad \frac{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta, A \quad \text{и} \quad B, A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta.}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B, A \ \text{или}\ \Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B.} \qquad \frac{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta.}$$

(Для $\supset \rightarrow$ подлежат использованию обе посылки; для $\rightarrow \vee$ мы здесь соединили два правила в одно утверждение — использованию подлежит та или иная из посылок.)

Интуиционистская система постулатов $G3$ такова:

Постулаты для интуиционистской формальной системы G3

Схема аксиом

$$C,\ \Gamma \to C.$$

Правила вывода для исчисления высказываний

$$\frac{A,\ \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B.} \qquad \frac{A \supset B,\ \Gamma \to A \text{ и } B,\ A \supset B,\ \Gamma \to \Theta}{A \supset B,\ \Gamma \to \Theta.}$$

$$\frac{\Gamma \to A \text{ и } \Gamma \to B}{\Gamma \to A \& B.} \qquad \frac{A,\ A \& B,\ \Gamma \to \Theta \text{ или } B,\ A \& B,\ \Gamma \to \Theta}{A \& B,\ \Gamma \to \Theta.}$$

$$\frac{\Gamma \to A \text{ или } \Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B.} \qquad \frac{A,\ A \vee B,\ \Gamma \to \Theta \text{ и } B,\ A \vee B,\ \Gamma \to \Theta}{A \vee B,\ \Gamma \to \Theta.}$$

$$\frac{A,\ \Gamma \to}{\Gamma \to \neg A.} \qquad \frac{\neg A,\ \Gamma \to A}{\neg A,\ \Gamma \to \Theta,}$$

где Θ пуста или состоит из одной формулы.

Дополнительные правила вывода для исчисления предикатов

$$\frac{\Gamma \to A(b)}{\Gamma \to \forall x A(x),} \qquad \frac{A(t),\ \forall x A(x),\ \Gamma \to \Theta}{\forall x A(x),\ \Gamma \to \Theta.}$$

с выполнением ограничения на переменные.

$$\frac{\Gamma \to A(t)}{\Gamma \to \exists x A(x).} \qquad \frac{A(b),\ \exists x A(x),\ \Gamma \to \Theta}{\exists x A(x),\ \Gamma \to \Theta,}$$

с выполнением ограничения на переменные.

Мы определяем также классическую и интуиционистскую системы *G*3a. Они отличаются от систем *G*3 тем, что в них разрешается произвольным образом опускать формулы в антецеденте и сукцеденте посылок вывода по любому из этих правил.

Система *G*3 предназначена для сокращения числа выборов посылок для данного заключения, когда мы пытаемся исчерпать возможность доказательства данной конечной секвенции, особенно когда мы пытаемся доказать недоказуемость данной конечной секвенции. Если же конечная секвенция доказуема, то применение системы *G*3a обычно позволяет сокращать секвенции, использованные в доказательстве.

Доказательство в *G*3 называется *несводимым*, если оно не содержит никакой пары сходных секвенций, из которых одна стоит выше другой в той же самой ветви.

Теорема 56. (a) *Если* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *в G*3a (*и подавно, если* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *в G*3), *то* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *в G*2 (*или в G*1), *причем используются в точности те логические правила, одноименные которым используются в данном доказательстве в G*3a, *и смешения* (*или сечения*) *не используются.*

(b) *Обратно, если* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *в G*2 (*или в G*1) *и никакая переменная не входит в* $\Gamma \to \Theta$ *и свободно, и связанно, то* $\vdash \Gamma \to \Theta$ *в G*3 (*и подавно в G*3a), *причем используются только те логические правила, одноименные которым используются в данном доказательстве в G*2 (*или в G*1). *Леммы*

32a—33b (*установленные выше для G*1 *и сечения и для G*2 *и смешения*) *справедливы также и для G*3 (*и для G*3a).

(c) *Формула* E, *в которую никакая переменная не входит и свободно, и связанно, доказуема в H в том и только в том случае, если в G*3 *имеется несводимое доказательство секвенции* $\to$ E.

(d) *Разрешающая процедура* (*или алгоритм*) *для установления того, доказуема ли данная пропозициональная формула* E *в исчислении высказываний H, состоит в процессе попытки построить несводимое доказательство секвенции* $\to$ E *в G*3. *В соответствии с тем, будет ли найдено такое доказательство или будет установлено, что его не существует,* E *доказуема или не доказуема в H*[1]).

Доказательства. (a) Каждая аксиома *G*3a может быть доказана посредством *УП*-шагов, исходя из аксиомы *G*2. Если дан вывод в *G*3a, то посредством *УСП*-шагов можно привести его посылки к стандартной форме, указанной в списке постулатов для *G*3. После этого применяется соответствующее правило *G*2 с данным заключением или заключением, которое может быть приведено к нему посредством *УСП*-шагов.

Пример 2. Указанный слева вывод в интуиционистской системе *G*3a может быть выполнен в *G*2, как указано справа:

$$\frac{\mathscr{B},\ \mathscr{B}\to\mathscr{A},}{\mathscr{B},\ \neg\mathscr{A}\to\mathscr{C}.}\ \neg\to_{3a} \qquad\qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathscr{B},\ \mathscr{B}\to\mathscr{A}}{\neg\mathscr{A},\ \mathscr{B}\to\mathscr{A}}}{\neg\mathscr{A},\ \neg\mathscr{A},\ \mathscr{B}\to}\ \neg\to_{2}}{\mathscr{B},\ \neg\mathscr{A}\to\mathscr{C}.}$$

(b) В силу теоремы 48 (и леммы 34), можно считать, что дано доказательство в *G*2 без смешения. Аксиома *G*2 является аксиомой *G*3; и легко проверяется, что всякий вывод в *G*2 без смешения может быть проведен (в один или несколько шагов) в системе, которая получается из *G*3 путем присоединения шести правил *УСП*. Поэтому достаточно показать, что присоединение к *G*3 этих правил не увеличивает класса доказуемых секвенций этой системы. С этой целью показываем сперва по индукции, что если $\vdash \Gamma\to\Theta$ в *G*3, то и $\vdash \Gamma\to\Theta$, C в *G*3, при условии, что в интуиционистском случае Θ пуста, т. е. мы установим, что $\to$ *У* имеет место как выводимое правило системы *G*3. В этой индукции ограничение на переменные для применения $\to\forall$ или $\exists\to$ удовлетворяется путем предварительного применения леммы 35 (которая для *G*3 устанавливается так же, как и для *G*1 и *G*2), состоящего в замене b в ее свободных вхождениях в данное доказательство прежней посылки на новую переменную, не входящую свободно в C. Правило *У*$\to$ рассматривается аналогично, а $\to$*C*, *C*$\to$, $\to$*П*, *П*$\to$ имеют место просто в силу соглашения о том, как применяются правила системы *G*3.

(c) В силу (a), (b) и теорем 46 и 47, E доказуема в *H* в том и только в том случае, если имеется доказательство $\to$E в *G*3. Но если дано доказательство секвенции $\to$E в *G*3, то можно найти и несводимое доказательство той же секвенции, что показывается путем индукции по числу пар сходных секвенций, стоящих одна над другой в той же самой ветви. Если

[1]) Другие алгоритмы для решения проблемы разрешимости в конструктивном (интуиционистском) исчислении высказываний предложены Б. Ю. Пильчак [1950, 1952] и Н. Н. Воробьевым [1952]. — *Прим. ред.*

имеется такая пара, то можно удалить ее нижнюю секвенцию и все промежуточные вместе со всеми впадающими в них ветвями.

Доказательство (d) отложим до рассмотрения следующего примера, иллюстрирующего разрешающую процедуру.

Пример 3. (a) Доказуема ли формула $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ в интуиционистском исчислении предикатов H? Согласно (c), это имеет место в том и только в том случае, если имеется несводимое доказательство секвенции $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ в интуиционистской системе $G3$. Мы попытаемся найти такое доказательство следующим образом. Секвенция $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ не является аксиомой $G3$, что усматривается непосредственно. Единственное правило вывода $G3$, которое может привести к заключению $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$, — это правило $\rightarrow \vee$. Интуиционистски вывод $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ по этому правилу может иметь посылкой только $\rightarrow \mathcal{A}$ или $\rightarrow \neg \mathcal{A}$. Ни одна из этих секвенций не является аксиомой, первая $\rightarrow \mathcal{A}$ не может быть заключением никакого вывода в $G3$, а вторая $\rightarrow \neg \mathcal{A}$ может получиться только путем применения $\rightarrow \neg$ с посылкой $\mathcal{A} \rightarrow$ или же с посылкой вроде $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \rightarrow$, сходной с $\mathcal{A} \rightarrow$. Но так как две сходные секвенции можно в доказательствах в $G3$ заменять друг на друга, то достаточно рассматривать $\mathcal{A} \rightarrow$. Эта секвенция не является аксиомой, и она не может служить заключением никакого вывода в $G3$. Все построение показано ниже на фигуре, состоящей из трех строк, или уровней, занумерованных снизу вверх, считая от данной конечной секвенции $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$. Короче говоря, мы всеми возможными способами применяем правила $G3$, рассматривая их снизу вверх, как переход от заключения к посылкам, не различая сходных секвенций.

$$\begin{array}{ll} 3. & \qquad\qquad\quad \mathcal{A} \rightarrow \\ 2. & \rightarrow \mathcal{A} \text{ или } \rightarrow \neg \mathcal{A} \\ 1. & \quad \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}. \end{array}$$

Этим построением мы исчерпали все возможности найти доказательство секвенции $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ в интуиционистской системе $G3$ и не нашли такого доказательства. Следовательно, формула $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ недоказуема в интуиционистской системе H.

(b) Нам уже известно, что формула $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ доказуема в классическом исчислении высказываний H (*51 § 27). Но интересно посмотреть, каким образом наша разрешающая процедура приводит к доказательству секвенции $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ в классической системе $G3$, откуда, следуя доказательствам теоремы 56 (a), теоремы 47 и результатов гл. V, на которые опирается доказательство этой последней теоремы, мы могли бы получить доказательство $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ в классической системе H. В строке 2 формула $\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ сохраняется теперь в сукцеденте (согласио различию между классическим и интуиционистским правилом $\rightarrow \vee$ в $G3$). Это увеличивает число возможностей в строке 3. Цифра «2» в этой строке означает, что секвенция, стоящая под ней в строке 2, является одной из возможных посылок строки 3 (по правилу $\rightarrow \vee$). Так как мы ищем несводимое доказательство, нам надо рассматривать далее только новую посылку $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A}$ или $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \neg \mathcal{A}$. Ниже показано построение до строки 4.

$$\begin{array}{llll} 4. & 3 \text{ или } \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} & 3 \text{ или } \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} & 3 \text{ или } \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \\ 3. & 2 \text{ или} \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} & 2 \text{ или} \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} \text{ или } & \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} \\ 2. & \quad \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A} \qquad \text{или} & & \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} \\ 1. & & \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}. & \end{array}$$

В строке 4 три из наших рядов выборов закончились аксиомой, т. е. мы нашли доказательство секвенции $\rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}$ в $G3$. Выбирая, например, левый вариант иа строке 2 (и новые варианты выше этой строки), мы получаем, в частности, следующее доказательство в $G3$ (слева). Его секвенции в $G3$a могут быть упрощены (справа).

$$\begin{array}{rcl} 4. & \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} & \\ \hline 3. & \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} & \rightarrow \neg \\ \hline 2. & \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A} & \rightarrow \vee \\ \hline 1. & \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}. & \rightarrow \vee \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 4. & \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} & \\ \hline 3. & \rightarrow \mathcal{A}, \neg \mathcal{A} & \rightarrow \neg \\ \hline 2. & \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A} & \rightarrow \vee \\ \hline 1. & \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}. & \rightarrow \vee \end{array}$$

В терминах $G2$ (или $G1$) последнее приобретает вид:

и т. д.

$$\begin{array}{rcl} 3. & \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A} & \\ \hline 2. & \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}, \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A} & \rightarrow \vee \\ \hline 1. & \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}. & \rightarrow C \end{array}$$

(c) Нам уже известно, что формула $\neg \neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A})$ доказуема интуиционистски в H (*51a). Ниже следует доказательство секвенции $\rightarrow \neg \neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A})$ в системе $G3$a, полученное с помощью нашей разрешающей процедуры. В терминах $G2$ сокращение, которое было невозможно в (a) из-за интуиционистского ограничения, что в сукцеденте не может стоять более одной формулы, возможно теперь, потому что оно происходит в антецеденте.

$$\begin{array}{rcl} 7. & \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} & \\ \hline 6. & \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A} & \rightarrow \vee \\ \hline 5. & \mathcal{A}, \neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}) \rightarrow & \neg \rightarrow \\ \hline 4. & \neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}) \rightarrow \neg \mathcal{A} & \rightarrow \neg \\ \hline 3. & \neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A} & \rightarrow \vee \\ \hline 2. & \neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}) \rightarrow & \neg \rightarrow \\ \hline 1. & \rightarrow \neg \neg (\mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}). & \rightarrow \neg \end{array}$$

Доказательство теоремы 56 (d). То, что процедура, рассмотренная в примере 3, может быть доведена до любого желаемого уровня, усматривается из следующего обстоятельства. Для любой данной секвенции $\Gamma \rightarrow \Theta$, составленной из пропозициональных формул, и для каждого выбора в качестве главной некоторой формулы из Γ или из Θ, содержащей логический символ, имеется ровно один или два несходных выбора посылок для вывода $\Gamma \rightarrow \Theta$ в $G3$.

Остается доказать, что эта процедура должна закончиться. В силу свойства подформулы для $G3$, каждая секвенция в доказательстве $\rightarrow E$ в $G3$ должна быть составлена из подформул E. Но пропозициональная формула E имеет только конечное число подформул, и имеется только конечное число k способов, которыми эти формулы могут входить в антецедент и входить в сукцедент. Значит, можно написать не более чем k несходных секвенций, составленных из подформул E. Следовательно, не может существовать иесводимого доказательства секвенции $\rightarrow E$, содержащего более чем k уровней; поэтому можно исчерпать все возможности найти такое доказательство, если довести процедуру (самое большее) до k-го уровня включительно.

Пример 4. Выводима ли в интуиционистском исчислении высказываний формула $\neg \neg (\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \supset \neg \neg \mathcal{A}_1 \vee \neg \neg \mathcal{A}_2$?

Мы начнем следующим образом:

$$
\begin{array}{ll}
3. & \neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \to \neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \text{ или } \neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \to \neg\neg\mathcal{A}_1 \text{ или } \neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \to \neg\neg\mathcal{A}_2 \\
\hline
2. & \neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \to \neg\neg\mathcal{A}_1 \vee \neg\neg\mathcal{A}_2 \\
\hline
1. & \to \neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \supset \neg\neg\mathcal{A}_1 \vee \neg\neg\mathcal{A}_2.
\end{array}
$$

Не продолжая процесса далее, мы уже можем ответить на наш вопрос отрицательно. В самом деле, с помощью двузначных таблиц истинности мы быстро устанавливаем, что ни одна из секвенций, стоящих в 3-й строке, недоказуема (даже в классическом исчислении высказываний). Так, первая из них, $\neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \to \neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$, может быть доказуема в $G3$ и, следовательно (теорема 56 (a)), в $G1$ только в том случае, если $\neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \supset \neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$ доказуема в H (следствие из теоремы 47). Но $\neg\neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \supset \neg(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$ недоказуема в H, потому что она принимает значение f, когда $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ принимают значения t, t (теорема 9 § 28).

Теорема 57. (a) *В интуиционистском исчислении высказываний H для любых формул* A *и* B: *если* $\vdash$ A $\vee$ B, *то* $\vdash$ A *или* $\vdash$ B[1]. (Гёдель [1932].)

(b) *Ни один из результатов под номерами* *14, *15, *49, *51, *52, *55 — *62, *установленных в гл.* VI *только для классического исчисления высказываний, не имеет места для интуиционистского исчисления высказываний (то же самое относится к обращению каждой импликации из* *49a — *62a).

Доказательства. Часть (a) сразу усматривается из вида $\to\vee$ в $G3$. Для (b) мы могли бы показать при помощи нашей разрешающей процедуры, что каждая формула, о которой идет речь, не доказуема, если A и B — пропозициональные буквы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, — аналогично тому, что уже было проделано для *51 в примере 3 (a). (Для *51 недоказуемость следует также из части (a) и теоремы 9.) Но для остальных формул мы быстрее придем к цели, если воспользуемся выводами в интуиционистском исчислении высказываний. Например, если бы имело место *49, то, по замечанию 1 § 27, имело бы место и *51, что противоречит нашему результату о *51. Остальные случаи мы рассмотрим в порядке их номеров.

*14. Допустим, что $\neg A \supset B \vdash \neg B \supset A$ имеет место в интуиционистском исчислении высказываний для всех формул A и B. Тогда мы, в частности, имели бы $\neg\mathcal{A} \supset \neg\mathcal{A} \vdash \neg\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{A}$, откуда с помощью *1 получили бы $\vdash \neg\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{A}$, что противоречит нашему результату о *49.

*56. (Ср. *56a.) Если для всех A и B $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \supset A \vee B$ интуиционистски, то, в частности, $\vdash \neg(\neg\mathcal{A} \& \neg\mathcal{A}) \supset \mathcal{A} \vee \mathcal{A}$, откуда, в силу *37 и *38, опять получаем $\vdash \neg\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{A}$. И подавно, в силу &-удал., $\vdash A \vee B \sim \neg(\neg A \& \neg B)$ для всех A и B не может иметь место интуиционистски.

*62. (Ср. *62a.) Если для всех A и B $\vdash \neg(A \& B) \supset \neg A \vee \neg B$ интуиционистски, то, в частности, $\vdash \neg(\mathcal{A} \& \neg\mathcal{A}) \supset \neg\mathcal{A} \vee \neg\neg\mathcal{A}$, откуда, в силу *50, $\vdash \neg\mathcal{A} \vee \neg\neg\mathcal{A}$. В силу части (a) доказываемой теоремы, тогда должно быть $\vdash \neg\mathcal{A}$ или $\vdash \neg\neg\mathcal{A}$, в противоречие с теоремой 9.

Замечание 1. Аналогично, этими же методами можно доказать (за одним исключением), что все теоремы и следствия гл. VI, помеченные значком ° в знак того, что они были установлены только классически, теряют силу

[1]) Эта теорема, как и ее доказательство, сохраняет силу и для исчисления предикатов, где верна также теорема: *если* $\vdash \exists x A(x)$, *то* $\vdash A(a)$ *при некотором* a; см. Расёва и Сикорский [1954]. — *Прим. перев.*

интуиционистски. Так, теорема 8 дала бы *49; ее следствие позволило бы вывести *55 из *54; в силу теоремы 11, была бы доказуема эквивалентность $\neg\neg\mathcal{A}$ одной из формул $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$, $\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \& \neg\mathcal{A}$; и т. д. Исключение: Теорема 12, очевидно, является ложной для интуиционистского исчисления высказываний в том смысле, что указанная в ней процедура не применима. Гёдель [1932] показал, что неприменима и никакая другая табличная процедура с конечным числом значений истинности. Но существует эффективная разрешающая процедура другого рода (теорема 56 (d)).

Исчисление предикатов. По теореме 54 § 76 не существует разрешающей процедуры для распознавания доказуемости формулы исчисления предикатов. (В каком пункте сорвется доказательство теоремы 56 (d), если мы попытаемся применить его к исчислению предикатов? Сравните примеры 2 и 3 (a) § 78.) Хотя в случае исчисления предикатов теорема 56 (c) и не дает разрешающей процедуры для распознавания доказуемости, все же она полезна при исследовании вопроса о доказуемости в этом исчислении. Для данной предикатной формулы E, пытаясь найти несводимое доказательство секвенции $\rightarrow$ E в $G3$, мы можем действительно найти такое доказательство или обнаружить некоторые особенности имеющейся ситуации, благодаря которым такого доказательства существовать не может.

Теорема 58. *В интуиционистском исчислении предикатов H*:

(a) $\neg\neg\forall x(\mathcal{A}(x) \vee \neg\mathcal{A}(x))$ *недоказуема*. (Гейтинг [1930a]; Клини [1945] и Нельсон [1947].)

(b) (i) $\forall x(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \supset \mathcal{A} \vee \forall x\mathcal{B}(x)$ *недоказуема*,

(ii) $\neg\neg\{\forall x(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \supset \mathcal{A} \vee \forall x\mathcal{B}(x)\}$ *доказуема, но*

(iii) $\neg\neg\forall y\{\forall x(\mathcal{A}(y) \vee \mathcal{B}(x)) \supset \mathcal{A}(y) \vee \forall x\mathcal{B}(x)\}$ *недоказуема*.

(c) *В каждой таблице следствия из теоремы* 17 § 35, *если* A(x) — *простая предикатная буква* $\mathcal{A}(x)$, *то импликация от формулы, стоящей под чертой, к формуле, стоящей над этой чертой (а значит, и эквивалентность между этими формулами), недоказуема, и аналогично для двойного отрицания этой импликации (а значит*, в силу *25, *и для двойного отрицания этой эквивалентности), если формулы разделены двойной чертой*. (Гейтинг [1946].)

(d) *Ни один из результатов под номерами* *83—*85, *92, *97—*99 (*теорема* 17), *установленных в гл.* VII *только для классического исчисления предикатов, не имеет места. Если же к их формулам применить двойное отрицание, то* *83, *92 *и* *97 *будут иметь место, а* *84, *85, *98 *и* *99 — *нет*.

Доказательство. (a) Мы попытаемся следующим образом построить несводимое доказательство секвенции $\rightarrow\neg\neg\forall x(\mathcal{A}(x) \vee \neg\mathcal{A}(x))$ в интуиционистской системе $G3$. Для сокращения, пусть «B» заменяет в некоторых местах $\forall x(\mathcal{A}(x) \vee \neg\mathcal{A}(x))$. При переходе от строки 3 к строке 4 главной формулой вывода может быть $\neg$ B или B. Если $\neg$ B (с помощью $\neg\rightarrow$), то посылка совпадает с уже имеющейся в строке 3 (потому что первоначальное B исчезает как Θ, но зато возникает новое вхождение B в качестве боковой формулы). Для определения понятия доказательства данной секвенции в $G3$ все переменные, не входящие в эту секвенцию, равноправны; поэтому в строке 4 достаточно выбрать посылку для $\rightarrow\forall$ с некоторой конкретной переменной b_1. Затем в строке 8 мы аналогично выбираем другую конкретную переменную b_2, которая должна отличаться от b_1, чтобы выполнялось ограничение на переменные для правила $\to\forall$; и т. д.

$$\cdots$$

*11. $\neg B, \mathcal{A}(b_1), \mathcal{A}(b_2) \to B$

10. $7 \qquad 7$ или $\neg B, \mathcal{A}(b_1), \mathcal{A}(b_2) \to$

9. 7 или $\neg B, \mathcal{A}(b_1) \to \mathcal{A}(b_2)$ или $\neg B, \mathcal{A}(b_1) \to \neg \mathcal{A}(b_2)$

8. 7 или $\neg B, \mathcal{A}(b_1) \to \mathcal{A}(b_2) \vee \neg \mathcal{A}(b_2)$

*7. $\neg B, \mathcal{A}(b_1) \to B$

6. $3 \qquad 3$ или $\neg B, \mathcal{A}(b_1) \to$

5. 3 или $\neg B \to \mathcal{A}(b_1)$ или $\neg B \to \neg \mathcal{A}(b_1)$

4. 3 или $\neg B \to \mathcal{A}(b_1) \vee \neg \mathcal{A}(b_1)$

*3. $\neg B \to B$

2. $\neg B \to$

1. $\to \neg\neg B.$

Общий ход построения ясен из приведенной части фигуры. В первой новой секвенции $\neg B, \mathcal{A}(b_1) \to \mathcal{A}(b_2)$ строки 9 у нас не получалась аксиома, потому что переменные b_1 и b_2 различны; аналогично в первой новой секвенции $\neg B, \mathcal{A}(b_1), \mathcal{A}(b_2) \to \mathcal{A}(b_3)$ строки 13; и т. д. Еще очевиднее, что каждая из остальных секвенций не является аксиомой. Следует обратить внимание на вид строк $3, 7, 11, \cdots$; в строке $3+4n$ для $n=0,1,2, \ldots$ исключается возможность найти несводимое доказательство для $\to \neg\neg B$ путем, отличным от построения такого доказательства для $\neg B, \mathcal{A}(b_1), \ldots, \mathcal{A}(b_n) \to B$ с различными переменными $b_1, \ldots, b_n$. Итак, поиски несводимого доказательства для $\to \neg\neg B$ в $G3$ никогда не увенчаются успехом, а только поведут нас вверх путем отступления по бесконечной последовательности секвенций возрастающей сложности. Иными словами, мы установим, что имеется несводимое доказательство для $\to \neg\neg B$ в $G3$, только если имеется более короткое несводимое доказательство для секвенции $\neg B \to B$, еще более короткое для секвенции $\neg B, \mathcal{A}(b_1) \to B$, еще более короткое, чем предыдущее, для секвенции $\neg B, \mathcal{A}(b_1), \mathcal{A}(b_2) \to B$, и так до бесконечности. Так как нелепо предположение о том, что существует бесконечная последовательность все более коротких доказательств, начинающаяся с некоторого первого доказательства, то мы заключаем, что в интуиционистской системе $G3$ для секвенции $\to \neg\neg B$ не существует несводимого доказательства; следовательно, по теореме 56 (c), не существует доказательства для $\neg\neg B$ интуиционистском исчислении предикатов H.

(b) (i) Мы попытаемся построить доказательство в $G3$; первый шаг однозначно определен следующим образом:

2. $\forall x(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \to \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x)$

1. $\to \forall x(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \supset \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x).$

По виду секвенции, стоящей в строке 2, и правил системы $G3$ мы устанавливаем, что в каждой секвенции, стоящей выше этих двух, в антецедент могут входить только формулы четырех видов $\forall x(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x))$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(\mathrm{t})$ (t — терм, т. е., для чистого исчисления предикатов, переменная), $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}(\mathrm{t})$, а как сукцедент — только формула одного из четырех видов $\mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x)$, $\mathcal{A}$, $\forall x \mathcal{B}(x)$ и $\mathcal{B}(\mathrm{b})$ (b — переменная). Такая секвенция может оказаться аксиомой только в том случае, если она имеет вид $\mathcal{A}, \Gamma \to \mathcal{A}$ или $\mathcal{B}(\mathrm{t}), \Gamma \to \mathcal{B}(\mathrm{b})$, где t есть b. Когда применяется правило $\vee\to$ с двумя посылками, дерево, которое мы строим, разветвляется. Остальные правила, которые могут применяться после первого шага, — это правила с одной посылкой $\forall\rightarrow$, $\rightarrow\vee$ и $\rightarrow\forall$. Чтобы нашлось доказательство, для некоторой последовательности выборов каждая ветвь должна наверху закончиться аксиомой. Мы теперь покажем, что как бы ни производились наши шаги, идя по одной из ветвей, мы не получим аксиомы. С этой целью мы определяем *предназначенную ветвь* (идя по которой, как мы покажем, нельзя встретить аксиому) путем следующего способа выбора принадлежащей ей посылки в каждом случае применения $\vee\rightarrow$. Пусть главная формула применения $\vee\rightarrow$ будет $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}(\mathrm{t})$. Если формула сукцедента совпадает с $\mathscr{A}$ или содержит $\mathscr{A}$ как свою часть, то предназначенной ветви будет принадлежать та посылка этого применения $\vee\rightarrow$ (*предназначенная посылка*), которая имеет своей боковой формулой $\mathscr{B}(\mathrm{t})$; в противном случае предназначенной посылкой будет та, которая имеет своей боковой формулой $\mathscr{A}$. Рассмотрим теперь *свойство* P секвенции, которое состоит в том, что (1) $\mathscr{A}$ не входит в секвенцию в качестве одной из антецедентных формул, если сукцедентная формула совпадает с $\mathscr{A}$ или содержит $\mathscr{A}$, и (2) для каждой переменной b $\mathscr{B}(\mathrm{b})$ не входит в качестве одной из антецедентных формул, если $\mathscr{B}(\mathrm{b})$ (с той же самой b) является сукцедентной формулой. Аксиома каждого из описанных выше видов ие может обладать свойством P. Поэтому, чтобы показать, что на предназначенной ветви не может встретиться аксиома, достаточно показать, что каждая секвенция этой ветви обладает свойством P. Это мы покажем по индукции. Действительно, секвенции, стоящие в строках 1 и 2, обладают свойством P. Далее, как мы сейчас покажем, каждый вывод сохраняет свойство P вдоль предназначенной ветви, т. е. если заключение этого вывода обладает свойством P, то и посылка (или, в случае $\vee\rightarrow$, предназначенная посылка) обладает свойством P. Чтобы убедиться в этом, следует рассмотреть четыре случая, соответствующих виду главной формулы вывода. Случай 1: $\forall x(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}(x))$ в антецеденте. Свойство P, очевидно, сохраняется, потому что боковая формула, введенная в антецедент посредством $\forall\rightarrow$, имеет вид $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}(\mathrm{t})$, а сукцедент не меняется. Случай 2: $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}(\mathrm{t})$ в антецеденте. Если сукцедент совпадает с $\mathscr{A}$ или содержит $\mathscr{A}$ как свою часть, то свойство P сохраняется благодаря принятию $\mathscr{B}(\mathrm{t})$ в качестве боковой формулы предназначенной посылки. Если же сукцедент не совпадает с $\mathscr{A}$ и не содержит $\mathscr{A}$ в качестве своей части, то свойство P сохраняется благодаря принятию $\mathscr{A}$ в качестве боковой формулы предназначенной посылки. Случай 3: $\mathscr{A}\vee\forall x\mathscr{B}(x)$ — сукцедент. Ввиду того, что заключение обладает свойством P, формула $\mathscr{A}$ не входит в качестве антецедентной формулы, согласно (1). Поэтому принятие в сукцеденте $\mathscr{A}$ или $\forall x\mathscr{B}(x)$ в качестве боковой формулы для $\rightarrow\vee$ сохраняет свойство P. Случай 4: $\forall x\mathscr{B}(x)$ — сукцедент. В силу ограничения на переменные правила $\rightarrow\forall$, переменная b боковой формулы $\mathscr{B}(\mathrm{b})$ не может входить в антецедент, благодаря чему выполняется условие (2) свойства P.

(ii) Рассмотрим теперь вместо предыдущей формулы формулу $\neg\neg\{\forall x(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}(x))\supset\mathscr{A}\vee\forall x\mathscr{B}(x)\}$; обозначим ее «$\neg\neg$ C». Теперь в антецедентах секвенций, стоящих выше самой нижней строки, может встречаться также формула $\neg$ C, а в сукцедентах — C. Индуктивное доказательство для свойства P теперь срывается в случае, если $\neg$ C стоит в антецеденте, потому что посредством $\neg\rightarrow$ формула C может быть введена в сукцедент после того, как в антецедент уже была введена формула $\mathscr{A}$, чем нарушается условие (1). Это создает увертку, следуя которой в предыдущем доказательстве недоказуемости, мы приходим к доказательству $\rightarrow\neg\neg\{\forall x(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}(x))\supset\mathscr{A}\vee\forall x\mathscr{B}(x)\}$, которое мы приводим в системе $G3a$. Левая ветвь — это та предназначенная ветвь, которая не могла бы закончиться аксиомой, если бы не применение $\neg C$ в качестве главной формулы для $\neg\to$.

$$
\begin{array}{rcl}
11. & \mathcal{A} \to \mathcal{A} & \\
10. & \mathcal{A} \to \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x) & \to\vee \\
9. & \mathcal{A} \to \forall x(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \supset \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x) & \to\supset \\
8. & \neg C, \mathcal{A} \to \qquad \mathcal{B}(b) \to \mathcal{B}(b) & \neg\to \\
7. & \neg C, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}(b) \to \mathcal{B}(b) & \vee\to \\
6. & \neg C, \forall x(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \to \mathcal{B}(b) & \forall\to \\
5. & \neg C, \forall x(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \to \forall x \mathcal{B}(x) & \to\forall \\
4. & \neg C, \forall x(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \to \mathcal{A} \vee \forall x \mathcal{B}(x) & \to\vee \\
3. & \neg C \to C & \to\supset \\
2. & \neg C \to & \neg\to \\
1. & \to \neg\neg C. & \to\neg
\end{array}
$$

(iii) Если мы теперь заменим предыдущую формулу на $\neg\neg\forall y\{\forall x(\mathcal{A}(y) \vee \mathcal{B}(x)) \supset \mathcal{A}(y) \vee \forall x\mathcal{B}(x)\}$, то увертка пропадает. В самом деле, $\mathcal{A}$, полученная в антецеденте перед $\neg\to$, превращается теперь в $\mathcal{A}$(c) для некоторой переменной c. Затем $\mathcal{A}$, которая появляется в сукцеденте после $\neg\to$, за которым теперь будет следовать $\to\forall$ по отношению к переменной y, превратится в $\mathcal{A}$(d), где d — переменная, отличная от c, в силу ограничения на переменные для $\to\forall$. Читателю предоставляется разработать изменения доказательства (i), чтобы недоказуемость рассматриваемой формулы была установлена строго.

(c) Для данной таблицы рассмотрим формулы A, B, C, D, где B есть A или стоит ниже A, C стоит сразу под B и отделена от него чертой, а D есть C или стоит ниже C. В силу *2, если $\vdash A \supset B$ и $\vdash C \supset D$, но не $\vdash C \supset B$, то не $\vdash D \supset A$. Аналогично, в силу *24 и *49a, если $\vdash A \supset B$ и $\vdash C \supset D$, но не $\vdash \neg\neg(C \supset B)$, то не $\vdash \neg\neg(D \supset A)$ и не $\vdash D \supset A$. Поэтому достаточно рассмотреть случаи импликаций снизу вверх между шестью парами соседних формул, разделенных чертой, или двойных отрицаний таких импликаций, если черта двойная.

$\mathrm{Ib} \supset \mathrm{Ia}$, $\mathrm{IIb} \supset \mathrm{IIa}$. Если бы одна из этих импликаций была доказуема, то, подставляя $\mathcal{A}$ вместо $\mathcal{A}(x)$ (теорема 15 § 34) и применяя *75 или *76, или же пользуясь теоремой 22 § 37 для $k=1$, мы получили бы, что формула $\neg\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{A}$ доказуема. Поэтому не $\vdash \mathrm{Ib} \supset \mathrm{Ia}$ и не $\vdash \mathrm{IIb} \supset \mathrm{IIa}$.

$\neg\neg(\mathrm{Ic}_1 \supset \mathrm{Ib})$. Введем «$\mathrm{B}(x)$» для сокращения формулы $\mathcal{A}(x) \vee \neg\mathcal{A}(x)$. В силу *51a и $\forall$-введ., $\vdash \forall x \neg\neg \mathrm{B}(x)$. Поэтому

$$\forall x \neg\neg \mathrm{B}(x) \supset \neg\neg\forall x \mathrm{B}(x) \vdash \neg\neg\forall x\mathrm{B}(x).$$

Теперь, применяя $\supset$-введ. и два раза контрапозицию (*13, *12), получаем $\vdash \neg\neg\{\forall x\neg\neg \mathrm{B}(x) \supset \neg\neg\forall x\mathrm{B}(x)\} \supset \neg\neg\forall x\mathrm{B}(x)$. Итак, если бы формула $\neg\neg\{\forall x\neg\neg \mathrm{B}(x) \supset \neg\neg\forall x\mathrm{B}(x)\}$ была доказуема, то доказуема была бы и $\neg\neg\forall x\mathrm{B}(x)$. Но в силу (a), не $\vdash \neg\neg\forall x\mathrm{B}(x)$; поэтому не $\vdash \neg\neg\{\forall x\neg\neg \mathrm{B}(x) \supset \neg\neg\forall x\mathrm{B}(x)\}$; следовательно, по правилу подстановки (теорема 15), не $\vdash \neg\neg\{\forall x\neg\neg\mathcal{A}(x) \supset \neg\neg\forall x\mathcal{A}(x)\}$, т. е. не $\vdash \neg\neg(\mathrm{Ic}_1 \supset \mathrm{Ib})$.

$\neg\neg(\mathrm{IIIc} \supset \mathrm{IIIb}_2)$. Легко сводится к $\neg\neg(\mathrm{Ic}_1 \supset \mathrm{Ib})$.

$\mathrm{IIc}_1 \supset \mathrm{IIb}$. В силу примера 3 § 37 и примера 4 этого параграфа.

$\mathrm{IIIb}_1 \supset \mathrm{IIIa}$. Легко сводится к $\mathrm{IIc}_1 \supset \mathrm{IIb}$.

(d) *83—*85, *92. Содержится в (b) и (c) (согласно *25, *92a).

*97. Недоказуемость $(\mathcal{A} \supset \exists x\mathcal{B}(x)) \supset \exists x(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(x))$ мы покажем аналогично недоказуемости $\mathrm{IIc}_1 \supset \mathrm{IIb}$ (после применения теоремы 22 с $k=2$ мы получим в строке 3: $\{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \to \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$, $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \to$

$\to (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1) \vee (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_2)\}$ или $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \to \mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1$ или $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \to$ $\to \mathcal{A} \supset \mathcal{B}_2$. При рассмотрении первой возможности достаточно, конечно, показать недоказуемость первой посылки $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2 \to \mathcal{A}$). Формулу $\neg\neg \{(\mathcal{A} \supset \exists x \mathcal{B}(x)) \supset \exists x (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(x))\}$ мы докажем аналогично (b) (ii). (В строках 4—9 применяем последовательно $\to\exists$, $\to\supset$, $\supset\to$, $\neg\to$, $\to\supset$, $\exists\to$.) См. *97a.

*98. Подставляя $\mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}$ вместо $\mathcal{B}$ в

$$\neg\neg \{(\forall x \mathcal{A}(x) \supset \mathcal{B}) \supset \exists x (\mathcal{A}(x) \supset \mathcal{B})\}$$

и применяя *50 и *44, мы получили бы $\neg\neg$(IIIc $\supset$ IIIa).

*99. Сводится к *98 (см. первый метод для Ib $\supset$ Ia).

Гейтинг [1930a, стр. 65] выводит недоказуемость формулы теоремы 58 (a) и $\mathrm{Ic}_1 \supset$ Ib из интерпретации интуиционистского исчисления предикатов в терминах брауэровской теории множеств (конец § 13).

Доказательство теоремы 58 (a), данное Клини [1945] и Нельсоном [1947], относится к числу результатов, которые будут изложены в § 82.

Предыдущий способ рассмотрения (a) и (b) был изложен у Клини [1948], а некоторые аналогичные применения теоремы Генцена имеются в книге Карри [1950] (которая в 1948 году уже находилась в печати). Де Ион [1948] применяет этот метод для установления интуиционистской классификации тех формул, образованных из $\mathcal{A}(x, y, z)$ с помощью кванторов по x, y и z и, возможно, применений отрицания, которые классически эквивалентны $\forall x \exists y \forall z \mathcal{A}(x, y, z)$; эта классификация аналогична каждой из четырех таблиц Гейтинга [1946] для одного квантора (следствие из теоремы 17 § 35 и теорема 58 (c))[1]. Он берет для примера именно эту последовательность кванторов, потому что она существенна в формулировке понятия сходимости последовательности к пределу (см. § 35 (i) или (ii), если всюду опустить там x).

Мостовский [1948] доказывает недоказуемость $\neg\neg(\mathrm{Ic}_1 \supset \mathrm{Ib})$ и (b) (i) посредством интерпретации интуиционистского исчисления предикатов в терминах «полных брауэровских» структур. Хенкин [1950a] обобщил результаты Мостовского, получив алгебраическую характеристику кванторов как для интуиционистской, так и для классической логики.

§ 81. РЕДУКЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ К ИНТУИЦИОНИСТСКИМ

Далее, до конца главы, мы будем пользоваться системами H гильбертовского типа. Если Γ — последовательность из нуля или большего числа формул, то $\neg\Gamma$, $\neg\neg\Gamma$, Γ° и т. д. будут означать результат применения $\neg$, $\neg\neg$, $^\circ$ (определение см. ниже) и т. д. соответственно к каждой из формул Γ.

Основной результат первой части этого параграфа мы даем в нескольких вариантах, хотя его значение можно усмотреть из одного. Читатель, предпочитающий упрощенное рассмотрение, может ограничиться следующим: теорема 59 с ее доказательством, определение и комментарий, касающиеся $^\circ$, теорема 60 (a) только для $^\circ$ и (c), лемма 43a с доказательством, доказательство теоремы 60 (c), следствие 2 (опуская до этого места весь остальной материал).

Теорема 59. (a1) *Если* $\Gamma \vdash E$ *в классическом исчислении высказываний, то* $\neg\neg\Gamma \vdash \neg\neg E$ *в интуиционистском исчислении высказываний.* (a2) *Если* $\neg\Gamma, \Delta \vdash \neg E$ *в классическом исчислении высказываний, то* $\neg\Gamma$, $\neg\neg\Delta \vdash \neg E$ *в интуиционистском исчислении высказываний* (Гливенко [1929]).

---

[1]) Ср. статью Ониси [1953].—*Прим. перев.*

(b) *Аналогично для исчисления предикатов без правила* 9 *и для формальной арифметической системы без правила* 9.

Доказательства. (a1) Пользуемся индукцией по длине данного классического вывода $\Gamma \vdash E$ (т. е. вывода E из Γ, существование которого утверждается в «$\Gamma \vdash E$», см § 22) и следующими замечаниями. Если E — аксиома классического исчисления высказываний, получающаяся по какой-нибудь схеме аксиом, за исключением 8, то E является также интуиционистской аксиомой и, по *49a § 27, $\vdash \neg\neg E$ в интуиционистской системе. Если E — аксиома по классической схеме аксиом 8, то, согласно *51b, опять $\vdash \neg\neg E$ интуиционистски. Далее, соответственно правилу 2, $\neg\neg A$, $\neg\neg(A \supset B) \vdash \neg\neg B$ интуиционистски, с помощью *23 § 26. (a2) Из (a1) с помощью *49b.

(b) Ввиду того, что дополнительные схемы аксиом и отдельные аксиомы принадлежат не только классической, но и интуиционистской системе, нам остается только рассмотреть дополнительное правило вывода 12. В силу *23, правила 12 и *49a, (i) $\neg\neg(A(x) \supset C) \vdash \neg\neg A(x) \supset \neg\neg C \vdash^{x} \exists x \neg\neg A(x) \supset \neg\neg C \vdash \neg\neg(\exists x \neg\neg A(x) \supset \neg\neg C)$. В силу *49a, *70 § 32 и *49a, (ii) $\vdash \neg\neg(\exists x A(x) \supset \exists x \neg\neg A(x))$. Согласно *51b, (iii) $\vdash \neg\neg(\neg\neg C \supset C)$. Сочетая (ii), (i) и (iii) посредством *24, получаем $\neg\neg(A(x) \supset C) \vdash^{x} \neg\neg(\exists x A(x) \supset C)$.

Пример 1. В силу (a1), каждый из занумерованных результатов, установленных в гл. VI только для классического исчисления высказываний (см. теорему 57 (b)), в интуиционистской системе имеет место, если навесить двойное отрицание на соответствующую формулу (а в случае *14 и *15 — на обе формулы).

Пример 2. Справедливость *97 в интуиционистской системе после навешивания двойного отрицания (доказанная выше другим методом в теореме 58 (d)) следует также из (b) и теоремы 49 § 78.

Следствие (из (a2)). *Если* E — *пропозициональная формула, не содержащая логических символов, кроме* & *и* ¬, *и* $\vdash E$ *в классическом исчислении высказываний, то* $\vdash E$ *в интуиционистском исчислении высказываний* (Гёдель [1932 — 33]).

Доказательство. Пусть E — конъюнкция n формул ($n \geqslant 1$), каждая из которых не является конъюнкцией и, следовательно, является пропозициональной буквой или начинается с символа ¬. В силу &-удал., каждая из этих n компонент доказуема классически. Но никакая пропозициональная буква недоказуема (по теореме 9 § 28). Значит, каждая компонента является отрицанием и, по теореме Гливенко ((a2)), доказуема также интуиционистски. Следовательно, в силу &-введ., то же верно и для E.

Определение операции °. Вплоть до конца этого параграфа формулы Γ, формула E и т. д. будут пропозициональными, предикатными или арифметическими формулами, в соответствии с тем, что рассматривается — исчисление высказываний, исчисление предикатов или формальная арифметика. Под *элементарной частью* формулы мы будем подразумевать (связную) часть, являющуюся элементарной формулой, т. е. формулой, не содержащей ни одного логического символа.

Для любой формулы E мы определяем E° посредством следующей рекурсии. 1. Если P — элементарная формула, то P° есть P. 2 — 5. Если A и B — формулы, то $(A \supset B)^\circ$ есть $A^\circ \supset B^\circ$, $(A \& B)^\circ$ есть $A^\circ \& B^\circ$, $(A \vee B)^\circ$ есть $\neg(\neg A^\circ \& \neg B^\circ)$ и $(\neg A)^\circ$ есть $\neg A^\circ$. 6—7. Если x — переменная, а A(x) — формула, то $(\forall x A(x))^\circ$ есть $\forall x A^\circ(x)$ (где $A^\circ(x)$ есть $(A(x))^\circ$), а $(\exists x A(x))^\circ$ есть $\neg \forall x \neg A^\circ(x)$.

Короче говоря, E° получается из E путем замены (или «перевода») каждой части E любого из видов, указанных ниже в первой строке, на соответствующее выражение из второй строки:

$A \supset B$	$A \& B$	$A \vee B$	$\neg A$	$\forall x A(x)$	$\exists x A(x)$
„	„	$\neg(\neg A \& \neg B)$	„	„	$\neg \forall x \neg A(x)$

Пример 3. Пусть A(x) и B — элементарные формулы (и B не содержит x свободно). Если

E есть $[\forall x A(x) \supset B] \supset \exists x [A(x) \supset B]$ (см. *98), то
E° есть $[\forall x A(x) \supset B] \supset \neg \forall x \neg [A(x) \supset B]$.

Комментарий по поводу $^\circ$. В следующей теореме показывается, что классические системы могут быть определены в интуиционистских. В частности, для арифметической системы, если $\vdash$ E классически, то $\vdash E^\circ$ интуиционистски. Обратное предложение очевидно (так как $\vdash E \sim E^\circ$ классически), так же как обращения для теоремы 59 и обращения других частей теоремы 60. Таким образом, формула E доказуема в классической системе в том и только в том случае, если соотнесенная ей формула E° доказуема в интуиционистской системе. Можно считать, что формула E° получается из E путем замены логических символов $\supset, \&, \vee, \neg, \forall, \exists$ на $\supset^\circ, \&^\circ, \vee^\circ, \neg^\circ, \forall^\circ, \exists^\circ$ соответственно, где «$A \supset^\circ B$» является сокращением для $A \supset B$, «$A \vee^\circ B$» для $\neg(\neg A \& \neg B)$ и т. д. Смысл, в котором классические формулы «переводятся» при этом в интуиционистские, можно подчеркнуть путем употребления других логических символов (например, $\supset^c, \&^c, \vee^c, \neg^c, \forall^c, \exists^c$) для классической системы (верхняя строка приведенной выше таблицы перевода).

Определение операции $'$ и др. Мы будем пользоваться и другими операциями над формулами рассматриваемых исчислений. Пусть E' получается из E аналогично E°, с той разницей, что $A \supset B$ переводится как $\neg(A \& \neg B)$. Пусть $E^\dagger$ получается из E путем замены каждой элементарной части P на $\neg\neg P$, а $E^\ddagger$ — аналогично, но с той разницей, что P заменяется на $\neg\neg P$ только там, где она встречается самостоятельно (т. е. если E сама есть P), или непосредственно в области действия некоторого & или $\forall$, или как вторая часть в области действия некоторого $\supset$. Пусть, далее, E^* получается аналогично $E^\ddagger$, но только без замен для второй части области действия $\supset$.

Пример 3 (окончание).

E' есть $\neg\{\neg[\forall x A(x) \& \neg B] \& \neg\neg \forall x \neg\neg [A(x) \& \neg B]\}$,

$E^{\circ\dagger}$ есть $[\forall x \neg\neg A(x) \supset \neg\neg B] \supset \neg \forall x \neg [\neg\neg A(x) \supset \neg\neg B]$,

$E^{\circ\ddagger}$ есть $[\forall x \neg\neg A(x) \supset \neg\neg B] \supset \neg \forall x \neg [A(x) \supset \neg\neg B]$ и

$E^{*\prime}$ есть $\neg\{\neg[\forall x \neg\neg A(x) \& \neg B] \& \neg\neg \forall x \neg\neg [A(x) \& \neg B]\}$.

Для исчисления высказываний не может существовать обратной теоремы, дающей аналогичное сведéние интуиционистской системы к классической, при котором интуиционистские пропозициональные связки определялись бы явно через классические. В самом деле, такое сведéние дало бы табличный критерий доказуемости для интуиционистского исчисления высказываний, а это противоречит результату Гёделя [1932].

Теорема 60. (а) *Для любой формулы* E *в исчислении высказываний, в исчислении предикатов или в формальной арифметической системе классически* $\vdash E \sim E^{\circ} \sim E' \sim E^{\circ\dagger} \sim E^{\circ\ddagger} \sim E^{*\prime}$ (*в силу* *56, *83, *58, *49).

(b1) *Для исчисления высказываний, если* $\vdash E$ *классически, то* $\vdash E'$ *интуиционистски.* (b2) *Для арифметической формальной системы, если* $\Gamma \vdash E$ *классически, то* $\Gamma' \vdash E'$ *интуиционистски* (Гёдель [1932—33]).

(c) *Для арифметической формальной системы, если* $\Gamma \vdash E$ *классически, то* $\Gamma^{\circ} \vdash E^{\circ}$ *интуиционистски* (Генцен [1936, стр. 532] и Бернайс).

(d) *Для исчисления высказываний, исчисления предикатов или арифметической формальной системы, если* $\Gamma \vdash E$ *классически, то* $\Gamma^{\circ\dagger} \vdash E^{\circ\dagger}$ (*а также* $\Gamma^{\circ\ddagger} \vdash E^{\circ\ddagger}$ *и* $\Gamma^{*\prime} \vdash E^{*\prime}$) *интуиционистски*[1]).

Доказательство. (b1) В силу (а), если $\vdash E$ классически, то $\vdash E'$ классически. Но E' может содержать в качестве операторов только & и $\neg$. Таким образом, (b1) вытекает из следствия из теоремы 59. (Обратно, следствие из теоремы 59 вытекает из (b1).)

Мы докажем (c) после следующей леммы, а потом выведем (b2).

Лемма 43а. *Для формальной арифметической системы, если* F *не содержит логических символов, кроме* $\supset$, &, $\neg$, $\forall$ (*в частности, если* F *есть* E° *для некоторой формулы* E), *то* $\vdash \neg\neg F \supset F$ (*и, следовательно,* $\vdash \neg\neg F \sim F$) *интуиционистски.* (По Гёделю (b) [1932—33].)

Доказательство леммы 43а путем индукции по числу (вхождений) логических символов в F.

Базис: F имеет вид $s=t$, где s и t — термы. По *158 § 40, $\vdash s = t \vee \neg s=t$, откуда, по *49c, $\vdash \neg\neg s=t \supset s=t$. Инд. шаг. Случай 1: F есть $A \supset B$. По предп. инд.: (i) $\vdash \neg\neg B \supset B$. По *60g, h : (ii) $\neg\neg(A \supset B) \vdash A \supset \neg\neg B$. Из (ii) и (i), по цепному заключению (*2), $\neg\neg(A \supset B) \vdash A \supset B$ и, по $\supset$-введ., $\vdash \neg\neg(A \supset B) \supset (A \supset B)$. Случай 2: F есть A & B. По предп. инд., $\vdash \neg\neg A \supset A$ и $\vdash \neg\neg B \supset B$. Воспользоваться *25. Случай 3: F есть $\neg A$. По *49b. Случай 4: F есть $\forall x A(x)$. Воспользоваться предп. инд., *69 и $\vdash Ib \supset Ic_1$ из следствия из теоремы 17.

Доказательство теоремы 60 (c). Путем индукции по длине данного классического вывода $\Gamma \vdash E$ и рассмотрения следующих случаев.

Случай 1: E — одна из аксиом 14—21 или аксиома по любой схеме, кроме 11. Тогда или E° есть E, или E° — аксиома по той же схеме, или E° выводима в классическом исчислении высказываний (с помощью *56 и теоремы 6 § 26) из аксиомы по той же схеме; таким образом, E° дока-

---

[1]) Легко видеть, что справедливы и обращения утверждений (b), (c), (d). Действительно, если, например, $\Gamma' \vdash E'$ верно в интуиционистской системе, то, очевидно, $\Gamma' \vdash E'$ верно и в классической системе, а тогда, в силу пункта (а), в классической системе верно $\Gamma \vdash E$. Поэтому операции $^{\circ}$, $'$, $^{\circ\ddagger}$, $^{\circ\dagger}$, $^{*\prime}$ являются погружающими операциями. (Операция α, перерабатывающая формулу в формулу, называется *погружающей*, коль скоро выводимость формулы E в классической системе равносильна выводимости формулы αE в интуиционистской системе; через αE здесь обозначен результат применения операции α к формуле E.) Понятие погружающей операции ввел и изучил Н. А. Шанин [1954, 1955]. Первая погружающая операция была построена А. Н. Колмогоровым [1925], который с ее помощью установил непротиворечивость значительной части классической математики при условии, что непротиворечивы соответствующие разделы интуиционистской математики (см. ниже следствие 2 теоремы 60). — *Прим. ред.*

зуема в системе классического исчисления высказываний с добавленными другими аксиомами и схемами аксиом. (Например, если E есть аксиома $A \supset (B \supset A)$ по схеме 1a, то $E°$ есть $A° \supset (B° \supset A°)$, которая является аксиомой по той же схеме. Если E есть аксиома $A \supset A \vee B$ по схеме 5a, то $E°$ есть $A° \supset \neg(\neg A° \& \neg B°)$, которая выводима из $A° \supset A° \vee B°$ в силу *56 и теоремы 6, так как заменяемая часть не стоит в области действия квантора.) Поэтому, в силу теоремы 59 (b), $\vdash \neg\neg E°$ в интуиционистской арифметической системе; а отсюда, по лемме 43a, $\vdash E°$ в этой же системе. Случай 2: Схема аксиом 11. Тогда E есть $A(t) \supset \exists x A(x)$, а $E°$ есть $A°(t) \supset \supset \neg \forall x \neg A°(x)$, которая доказуема интуиционистски путем контрапозиции (*13) аксиомы $\forall x \neg A°(x) \supset \neg A°(t)$. Случай 3: Правило 2. Нам надо показать, что $A°, (A \supset B)° \vdash B°$ интуиционистски. Но $(A \supset B)°$ есть $A° \supset B°$. Случай 4: Правило 9. Аналогично. Случай 5: Правило 12. С помощью *12 и леммы 43a.

Доказательство теоремы 60 (b2). По лемме 43a и *58f § 27, любая часть $Г°$, $E°$ вида $A \supset B$ эквивалентна $\neg(A \& \neg B)$.

Лемма 43b. *Для исчисления высказываний или предикатов, если* F *не содержит логических символов, кроме* $\supset$, $\&$, $\neg$, $\forall$, *(в частности, если* F *есть* $E°$ *для некоторой формулы* E*), то* $\vdash \neg\neg F^{\dagger} \supset F^{\dagger}$ *(а значит, и* $\vdash \neg\neg F^{\dagger} \sim F^{\dagger}$*) интуиционистски.*

Доказательство леммы 43b. Аналогично лемме 43a, но в базисе используется *49b вместо *158 и *49c.

Доказательство теоремы 60 (d). Для арифметической системы и $^{\circ\dagger}$ — из (c) по лемме 43a. Для исчисления высказываний или предикатов и $^{\circ\dagger}$ — с помощью леммы 43b таким же образом, как (c) с помощью леммы 43a. (Применяя лемму 43a или 43b, *58e и *49b, этот результат можно заменить на $Г^{\circ\ddagger} \vdash E^{\circ\ddagger}$; применяя также *58f,—на $Г^{*\prime} \vdash E^{*\prime}$.)

Замечание 1. Чтобы показать, что теорема 59 не имеет места для исчисления предикатов при сохранении правила 9 и что теорема 60 (b) неверна для исчисления предикатов, рассмотрим в качестве примера $\forall x \neg\neg \mathcal{A}(x) \supset \neg\neg \forall x \mathcal{A}(x)$. Обозначим эту формулу «E». Тогда классически $\vdash$ E, но интуиционистски не $\vdash$ E и не $\vdash \neg\neg$ E (следствие из теоремы 17 § 35 и теорема 58(c)), и даже не $\vdash E'$, потому что из E' при помощи *49b и *58b можно интуиционистски вывести E. Пример $\neg\neg \mathcal{A} \supset \mathcal{A}$ показывает, что теорема 60(c) не имеет места для исчисления высказываний или предикатов, а пример $\neg\neg \mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$ — что следствие из теоремы 59 и теорема 60(b1) неверны при наличии исходных формул Г. Пример, показывающий, что теорема 59 неверна для арифметической системы при сохранении правила 9, мы сможем привести только в следующем параграфе (теорема 63 (iii)), потому что сейчас у нас еще нет метода, позволяющего установить, что некоторая арифметическая формула классически доказуема, но интуиционистски недоказуема.

Следствие 1 (из (c)). *Для арифметической формальной системы, если* Г, E *не содержат логических символов, кроме* $\supset$, $\&$, $\neg$, $\forall$, *и если классически* $Г \vdash E$, *то и интуиционистски* $Г \vdash E$. (из (d) для $^{\circ\ddagger}$.) *Аналогично для исчисления высказываний или предикатов, при условии, что в* Г, E *каждая буква входит с отрицанием или в качестве антецедента импликации.*

Следствие 2 (из (b2), (c) или (d)). *Если просто непротиворечива интуиционистская арифметическая формальная система, то просто непротиворечива и классическая.*

Доказательство следствия 2. Если бы формула 1=0 была доказуема в классической системе, она была бы доказуема и в интуиционистской.

Комментарий. Гёдель замечает: «Эта теорема [т. е. теорема 60 (b2)—или, как мы видим, (c)]... показывает, что интуиционистская арифметика и теория чисел только по видимости уже классической, в действительности же (она) содержит всю классическую [теорию чисел], только в несколько отличной интерпретации». Гейтинг добавляет: «Но для интуиционистов эта интерпретация является существенной вещью» [1934*, стр. 18].

Де Ион говорит: «С нашей сигнифицистской точки зрения наиболее существенным преимуществом интуиционистской математики является то, что она в каждом случае делает различие между прямо и косвенно доказанными предложениями и путем анализа разделяет математические понятия на ряд понятий различной степени косвенности»[1]) [1948, стр. 746].

Ван Данциг [1947] предлагает исследовать, в какой мере дальнейшее построение классической математики можно провести в пределах интуиционистской, наподобие только что доказанной возможности такого построения для всей обыкновенной элементарной арифметики. С этой целью классические формулы E переводятся в их классические эквиваленты F, которые интуиционистски являются *устойчивыми*, т. е. для них $\vdash \neg\neg F \sim F$ интуиционистски (ср. лемму 43a). Ван Данциг высказывает предположение, что возможно интерпретировать практически всю классическую математику в пределах этой устойчивой части интуиционистской системы.

С точки зрения проблемы непротиворечивости изложенные результаты можно рассматривать как свидетельство того, что интуиционистская арифметика в той же мере, как и классическая, нуждается в метаматематическом доказательстве непротиворечивости. Или же, если на основе интерпретации интуиционистской системы принимается её непротиворечивость, то можно считать, что она гарантирует непротиворечивость классической системы.

Некоторые формалисты указывают, что методы интуиционистской элементарной арифметики выходят за пределы того, что они считают финитным (см. Гильберт и Бернайс [1934, стр. 43], Бернайс [1935]). Утверждается, что в интуиционистском употреблении отрицания сложных формул и импликаций, у которых в антецеденте стоит сложная формула (например, формула всеобщности или другая импликация), содержится общее логическое понятие интуиционистского доказательства. Именно благодаря такому употреблению отрицания и импликации Брауэр и его последователи сумели пойти в построении конструктивистской математики дальше, чем предшественник Брауэра Кронекер.

Интуиционисты не пытаются дать точное определение их понятия доказательства вообще и утверждают, что такое определение принципиально невозможно.

Таким образом, интуиционистское употребление отрицания и импликации следует понимать только как требование, чтобы мы признали, например, интуиционистскую приемлемость некоторого конкретного предложенного доказательства — или (когда доказывается предложение вида $(A \to B) \to C$) признали, что если можно получить интуиционистски приемлемый вывод предложения B из другого предложения A, то на основе этого вывода на-

[1]) Косвенными доказательствами называют доказательства от противного.—*Прим. перев.*

верняка можно посредством данного метода построить интуиционистски приемлемое доказательство третьего предложения *C*.

Бернайс [1938] отстаивает генценовскую трансфинитную индукцию до ε_0 (конец § 79) как образующую в меньшей мере расширение узкофинитной точки зрения, чем вся совокупность интуиционистских методов в арифметике.

Де Ион [1948] коротко рассматривает распространенные рассуждения об интуиционизме и смежных направлениях (в частности, о *сигнифике* (significs), см. Маниури [1909, 1925, 1934, 1947*]).

Рассмотрим теперь с интуиционистской точки зрения, каким образом следствие 2 из теоремы 60 дает доказательство непротиворечивости для классической элементарной арифметики. Вторая часть этого доказательства состоит в явной или неявной проверке того, что интуиционистская формальная система для арифметики интуиционистски верна.

Так как доказательство следствия 2 из теоремы 60 совершенно элементарно, то, по гёделевской теореме о доказательствах непротиворечивости (теорема 30 § 42), вторая часть полностью элементарной быть не может[1]).

Интересно заметить, что, как и в случае генценовского доказательства непротиворечивости с помощью трансфинитной индукции до ε_0, анализ рассматриваемого нами доказательства непротиворечивости показывает, что оно в единственном его неэлементарном шаге зависит от использования предиката, определяемого посредством индукции, в индукционный шаг которой входят кванторы обоих родов, а именно, речь идет здесь о предикате истинности для арифметических формул. Мы сейчас определим этот предикат.

При обычной интерпретации символов 0, ′, +, ·, переменных как переменных для натуральных чисел и операций построения термов из этих символов и переменных как соответствующих содержательным операциям явного определения, всякий терм $\mathrm{t}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, содержащий только различные переменные $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, выражает примитивно-рекурсивную функцию $t(x_1, \ldots, x_n)$ или, при $n=0$, число t. Далее, при обычной интерпретации символа = каждая элементарная формула $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, содержащая только $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, выражает примитивно-рекурсивный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ или, при $n=0$, предложение P. Для любой замкнутой элементарной формулы P истинность или ложность P определяется (и притом эффективно разрешимо) в нашей теории примитивно-рекурсивных функций, поэтому мы не будем останавливаться здесь на этой части определения истинности. (На самом деле эта теория увлечет нас несколько дальше; см. ниже пример 4.)

(A) Отправляясь от сказанного как от базиса, мы определим „истинность" в применении к любой замкнутой арифметической формуле E путем индукции по числу (вхождений) логических символов в E. В этом определении слово «если» означает, конечно, «если и только если», как это принято в определениях.

1. Замкнутая элементарная формула P *истинна*, если P, т. е. если P — истинное предложение теории рекурсивных функций.

В пунктах 2—5 A и B — любые замкнутые формулы.

2. A & B *истинна*, если A *истинна* и B *истинна*.

3. A ∨ B *истинна*, если A *истинна* или B *истинна*.

4. A ⊃ B *истинна*, если то, что A *истинна*, влечет, что B *истинна* (т. е. если: A *истинна* только если B *истинна*).

5. ¬ A *истинна*, если A не *истинна*.

Для пунктов 6 и 7 x — переменная, а A(x) — формула, которая содержит свободно только x[2]). (Притом, если x — натуральное число, то $\boldsymbol{x}$ — соответствующая этому числу цифра, § 41.)

[1]) Если непротиворечива классическая элементарная арифметика. — *Прим. перев.*

[2]) Или вообще не содержит свободных переменных — см. § 17, определение формулы на стр. 69 и § 18, стр. 72. — *Прим. перев.*

6. $\exists x A(x)$ *истинна*, если, для некоторого натурального числа x, $A(x)$ *истинна*.

7. $\forall x A(x)$ *истинна*, если, для каждого натурального числа x, $A(x)$ *истинна*.

(B) Арифметическая формула $A(y_1, \ldots, y_m)$, содержащая свободно только различные переменные $y_1, \ldots, y_m$, *истинна*, если для каждой m-ки $y_1, \ldots, y_m$ натуральных чисел $A(y_1, \ldots, y_m)$ *истинна*. (Здесь не надо оговаривать, что $y_1, \ldots, y_m$ все входят свободно в $A(y_1, \ldots, y_m)$ или уславливаться о порядке вхождения, потому что, если формула истинна для какого-нибудь одного списка $y_1, \ldots, y_m$, то она истинна и для всякого другого.)

Пример 4. Истинна или ложна (т. е. не истинна) формула E, не содержащая переменных, — это можно решить, пользуясь двузначными таблицами истинности; и каждая формула $A(x_1, \ldots, x_n)$, не содержащая кванторов и содержащая в точности $x_1, \ldots, x_n$ в качестве своих переменных, выражает примитивно-рекурсивный предикат $A(x_1, \ldots, x_n)$, такой, что $A(x_1, \ldots, x_n) \equiv \equiv \{A(x_1, \ldots, x_n)$ истинна$\}$. (См. перед теоремой 51 § 79.) В силу (A), (C) и (D) § 41: *В арифметической формальной системе каждая истинная формула без переменных доказуема и каждая формула* $A(x_1, \ldots, x_n)$ *без кванторов нумерически выражает тот предикат* $A(x_1, \ldots, x_n)$, *который она выражает в интерпретации.*

Пользуясь этим определением, можно установить следующую теорему — в основном тем же способом, что и теорему 21 § 37, которая ей соответствует в исчислении предикатов.

Теорема 61. (a)^N *Если* $\Gamma \vdash E$ *в интуиционистской системе формальной арифметики и формулы* Γ *истинны, то* E *истинна.* (b)^C *Аналогично в классической формальной системе арифметики.*

Единственное различие в доказательствах частей (a) и (b) состоит в том, что для (b) мы должны воспользоваться классическими методами при рассмотрении аксиомы, полученной по классической схеме аксиом 8. Мы пометили часть (a) значком «^{N}» для указания, что хотя рассуждение является интуиционистским, в нем используются неэлементарные методы, а часть (b) — значком «^{C}» для указания, что использованы неинтуиционистские классические методы (см. § 37).

Так как A и $\neg$A не могут быть обе истинными, то теорема 61(a) (для пустой Γ) влечет простую непротиворечивость интуиционистской арифметики (а значит, по следствию 2 из теоремы 60, и классической арифметики), как «^{N}»-результат. Выигрыш, который нам дает теорема 60, состоит в том, что если бы мы вывели непротиворечивость классической арифметики непосредственно из теоремы 61(b), то мы могли бы считать ее только «^{C}»-результатом.

Пример 5. (a) *Если* $\forall\exists$*-предваренная формула истинна, то она общерекурсивно истинна* (§ 79). Например, если формула $\forall v \exists w_0 \exists w_1 C(v, w_0, w_1)$, где $C(v, w_0, w_1)$ не содержит кванторов и содержит только переменные v, w_0, w_1, различные между собой, истинна, то (v) $\{C(v, w_0(v), w_1(v))$ принимает значение $t\}$, где $w_i(v) = (\mu w C(v, (w)_0, (w)_1))_i$; эта функция общерекурсивна, в силу #19 § 45 и теоремы III § 57. (b)$^{N \text{ или } C}$. Отсюда, в силу теоремы 61 (a) или (b), следует, что *в арифметической формальной системе каждая доказуемая* $\forall\exists$*-предваренная формула обще-рекурсивно истинна.* (Ср. замечание 2 § 79).)

Посредством гёделевской нумерации формул предикат „А истинна“ превращается в арифметический предикат $T(a)$, значения которого даются в виде предложений, построенных, исходя из примитивно-рекурсивных предикатов, при помощи операций исчисления высказываний и кванторов, причём последние используются в неограниченном количестве[1]). Из теоремы 30 видно, что этот предикат $T(a)$ нельзя выразить в системе с последующим доказательством его существенных свойств, так как тогда нам удалось бы формализовать изложенное доказательство непротиворечивости в самой системе. (См. Гильберт и Бернайс [1939, стр. 329—340].)

В самом деле, каждый из предикатов $(Ex)T_1(a, a, x)$, $(x)(Ey)T_2(a, a, x, y)$, $(Ex)(y)(Ez)T_3(a, a, x, y, z)$, ... (см. часть II (b) теоремы V, § 57) выразим в виде $T(\phi(a))$ с примитивно-рекурсивной ϕ[2]), что можно усмотреть из следствия теоремы I § 49 (в силу которого формулы, нумерически выражающие предикаты T_1, T_2, T_3, ... согласно следствию из теоремы 27, выражают их и при интерпретации) и примера 2 § 52. Следовательно, в силу теорем VII (d) и V, предикат $T(a)$ — не арифметический.

Определения истинности для формальных систем были изучены прежде всего Тарским [1932, 1933]. Он обнаружил, что если какая-нибудь (эффективная) формальная система, содержащая обычную арифметику, непротиворечива, то предикат $T(a)$ для этой системы нельзя выразить формулой $\mathrm{T}(\mathrm{a})$, так чтобы $\mathrm{T}(\boldsymbol{a}) \sim \mathrm{A}_a$ была доказуема в системе, коль скоро a — гёделевский номер замкнутой формулы A_a. Действительно, тогда в системе можно было бы провести рассуждения парадокса Эпименида (§ 11). (Более подробно см. у Гильберта и Бернайса [1939, стр. 254—269].)[3])

Интуиционистское и классическое понятия истинности для формул должны различаться. Но предыдущее определение истинности выражено одними и теми же словами для обеих систем, и все различие в понятиях должно происходить от различия в понимании тех слов, которые используются в определении. В § 82 мы дадим другое определение истинности с соответствующим ему аналогом теоремы 61, которое мы будем применять только для интуиционистской системы. Первые результаты, как и теорема 61 (a), будут интуиционистскими, хотя и не элементарными («$^{\mathrm{N}}$»), но они приведут нас к результатам, метаматематическим в узком смысле.

§ 82. РЕКУРСИВНАЯ РЕАЛИЗУЕМОСТЬ

Наша задача — выразить интерпретацию интуиционистской арифметики в такой форме, чтобы выявились некоторые черты, в которых эта интерпретация отличается от классической.

Согласно нашему интуиционистскому пониманию экзистенциального предложения «$(Ex)A(x)$», последнее является неполным сообщением о предложении, которое дает такое число x, что $A(x)$ (Гильберт и Бернайс

---

[1]) Определение $T(a)$ основано на восстановлении формулы по ее номеру a и применении предыдущего индуктивного определения истинности (при этом каждому квантору формулы соответствует квантор в построении предиката $T(a)$, а число кванторов в формуле может быть сколь угодно большим). — *Прим. перев.*

[2]) $\varphi(a)$ — номер формулы, например $\exists \mathrm{x} \forall \mathrm{y} \exists \mathrm{z}\, \mathrm{T}_3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, где T_3 нумерически выражает T_3 и получена по следствию из теоремы 27. — *Прим. перев.*

[3]) Именно, пусть $s(k)$ — номер формулы, которая получится, если в формуле с номером k заменить все свободные вхождения переменной a на $\boldsymbol{k}$ (и 0, если это определение неприменимо), p — номер формулы $\neg \mathrm{T}(\mathrm{s}(a))$. Тогда $\mathrm{T}(\boldsymbol{a}) \sim \mathrm{A}_a$ приводит к формуле $\mathrm{T}(\mathrm{s}(\boldsymbol{p})) \sim \neg \mathrm{T}(\mathrm{s}(\boldsymbol{p}))$. Далее, используя аналогичным образом парадокс Ришара, Гильберт и Бернайс показывают, что в системах такого рода нельзя формализовать определение понятия „терм, определяющий число“. — *Прим. перев.*

[1934, стр. 32][1]). Но «$A(x)$» может, в свою очередь, быть неполным сообщением. Скажем поэтому, что «$(Ex)A(x)$» является неполным сообщением, которое может быть восполнено путем задания некоторого x, такого, что $A(x)$, и дальнейшей информации, нужной для восполнения сообщения «$A(x)$» для этого x.

Эту идею можно распространить на другие логические операции. Например, предложение о всеобщности «$(x)A(x)$» интуиционистски можно рассматривать как неполное сообщение, которое может быть восполнено путем задания эффективного общего метода для нахождения для любого x информации, восполняющей сообщение «$A(x)$» для этого x.

Аналогично, импликацию «$A \to B$» можно рассматривать как неполное сообщение, которое может быть восполнено путем задания эффективного общего метода получения информации, восполняющей «B» по данной информации, восполняющей «A».

Отрицание можно свести к импликации (см. пример 3 § 74).

Далее, эффективные общие методы являются рекурсивными, если ими задается натуральное число (§§ 60, 62, 63)[2]). Кроме того, с помощью гёделевской нумерации информацию можно задавать в виде числа.

Сочетая эти идеи, мы определим свойство арифметической формулы, которое будет равнозначно истинности формулы при намеченной только что интерпретации. Однако вместо „истинная" мы будем говорить о формуле „рекурсивно реализуемая", чтобы отличать определяемое ниже свойство от „истинности", определенной посредством прямого перевода формальных логических символов соответствующими содержательными словами (конец § 81).

Интерпретация терма $\mathrm{t}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, содержащего свободно только $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$, посредством примитивно-рекурсивной функции $t(x_1, \ldots, x_n)$ или, для $n=0$, посредством числа t, а также интерпретация элементарной формулы $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ посредством примитивно-рекурсивного предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$ или, для $n=0$, посредством предложения P (конец § 81), в интуиционистском случае не отличаются от классических. На них мы будем основывать определение „реализуемости", которое интуиционистски интерпретирует логические операторы в применении к арифметическим формулам.

Сперва мы определяем условия, при которых натуральное число e „(рекурсивно) реализует" замкнутую арифметическую формулу E (или служит „реализующим числом" (для) этой формулы) путем индукции по числу (вхождений) логических символов в E[3]).

(А) 1. *e реализует* замкнутую элементарную формулу P, если $e=0$ и P истинна (другими словами, если $e=0$ и P).

В пунктах 2—5 A и B — любые замкнутые формулы.

2. *e реализует* $\mathrm{A} \& \mathrm{B}$, если $e=2^a \cdot 3^b$, где *a реализует* A и *b реализует* B.

3. *e реализует* $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$, если $e=2^0 \cdot 3^a$, где *a реализует* A, или $e=2^1 \cdot 3^b$, где *b реализует* B.

---

[1]) Ср. § 13, стр. 50. — *Прим. перев.*

[2]) И данные служат натуральными числами; этого тоже можно достичь с помощью гёделевской нумерации. — *Прим. перев.*

[3]) Этот абзац следует понимать в том смысле, что к прямым пунктам (А) 1 — (А) 7 рассматриваемого определения следует добавить еще косвенный пункт (§ 6), согласно которому e реализует замкнутую формулу A только в том случае, если это следует из (А) 1 — (А) 7. — *Прим. перев.*

4. *e реализует* A ⊃ B, если *e* является гёделевским номером частично-рекурсивной функции φ от одной переменной такой, что если *a реализует* A, то $\varphi(a)$ *реализует* B.

5. *e реализует* ¬ A, если *e реализует* A ⊃ 1 = 0.

В пунктах 6 и 7 x — переменная, а A(x) — формула, содержащая свободно только x[1]).

6. *e реализует* ∃x A(x), если $e = 2^x \cdot 3^a$, где *a реализует* A($\boldsymbol{x}$).

7. *e реализует* ∀x A(x), если *e* является гёделевским номером общерекурсивной функции φ от одной переменной такой, что для каждого *x* число $\varphi(x)$ *реализует* A($\boldsymbol{x}$).

„(Рекурсивную) реализуемость" для любой арифметической формулы мы теперь определяем следующим образом.

(В) Формула A, не содержащая свободных переменных, *реализуема*, если существует число *p*, которое реализует A. Формула A($y_1, \ldots, y_m$), содержащая свободно только переменные $y_1, \ldots, y_m$ ($m \geqslant 0$), отличные друг от друга, *реализуема*, если существует обще-рекурсивная функция φ от *m* переменных (именуемая *реализующей функцией* для A($y_1, \ldots, y_m$)) такая, что для каждой *m*-ки $y_1, \ldots, y_m$ число $\varphi(y_1, \ldots, y_m)$ реализует A($\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m$). (Согласно § 44, если данная формула реализуема для одного выбора переменного $y_1, \ldots, y_m$, то она реализуема и для всякого другого такого выбора.)

В этом определении реализуемости рассмотрение свободных переменных отличается от того, которое было у Клини [1945]. Таким образом упрощается доказательство первой теоремы (теоремы 62), после которой эквивалентность обоих определений получится по следствию 1.

Изложенное определение реализуемости относится только к нашему понятию арифметической формулы, т. е. к правнлам образования нашей формальной системы.

Чтобы получить модифицированное понятие реализуемости, относящееся к перечню постулатов системы и, если требуется, к исходным формулам Γ, достаточно следующим образом изменить три пункта. В пункте 3 заменить слова «*a реализует* A» на «*a реализует* A и Γ ⊢ A», а «*b реализует* B» на «*b реализует* B и Γ ⊢ B». В пункте 4 заменить «*a реализует* A» на «*a реализует* A и Γ ⊢ A». В пункте 6 заменить «*a реализует* A($\boldsymbol{x}$)» на «*a реализует* A($\boldsymbol{x}$) и Γ ⊢ A($\boldsymbol{x}$)». Вместо «реализует» («реализуема») в этом модифицированном смысле мы будем говорить *реализует*-(Γ ⊢) [реализуема-(Γ ⊢)].

Теорема 62$^{\mathrm{N}}$. (a) *Если* Γ ⊢ E *в интуиционистской арифметической формальной системе и формулы* Γ *реализуемы, то* E *реализуема* (Нельсон [1947, часть I]).

(b) *Аналогично с заменой «реализуемости» на «реализуемость-*(Γ ⊢)».

Лемма 44$^{\mathrm{N}}$. *Если* x — *переменная,* A(x) — *формула, не содержащая свободных переменных, отличных от* x, *а* t — *терм без переменных, который поэтому выражает некоторое число* t, *то e реализует* A(t) *в том и только в том случае, если e реализует* A($\boldsymbol{t}$).

Доказательство леммы 44. Если A(x) элементарна, то утверждение об истинности A(t) эквивалентно утверждению об истинности A($\boldsymbol{t}$). Поэтому, в силу пункта 1, лемма верна для элементарной A(x). Отправляясь от этого базиса, можно доказать лемму для любой другой формулы A(x) при помощи

---

1) Или вообще не содержащая свободиых переменных — ср. сноску на стр. 440. — *Прим. перев.*

индукции по числу логических символов в A(x), рассматривая случаи, соответствующие другим пунктам определения „реализуемости".

Лемма 45^N. *Если E — замкнутая формула, то e реализует E в том и только в том случае, если e реализует результат замены каждой части E вида* ¬ A, *где* A — *какая-то формула, на* $A \supset 1 = 0$.

Леммы 44 и 45 остаются в силе, если в них заменить «*e реализует*» на «Г ⊢» или на «*e реализует*-(Г ⊢)», где ⊢ относится к интуиционистской арифметической системе, а Г — любые формулы. (Для леммы 44 при этом надо использовать (A) § 41 и теорему 24 (b) § 38.)

Доказательство теоремы 62. Мы изложим доказательство для (a), а читатель, если захочет, возьмет на себя небольшую дополнительную заботу проверить, что выполняются дополнительные условия для (b). Доказательство проводится индукцией по длине данного вывода Г ⊢ E путем разбора случаев, соответствующих постулатам нашей формальной системы.

Рассмотрим сперва аксиомы. Если $A(y_1, \ldots, y_m)$ — аксиома, а $y_1, \ldots, y_m$ - все содержащиеся в ней свободные переменные, то для того, чтобы установить ее реализуемость, надо, согласно (B), найти обще-рекурсивную функцию $\varphi(y_1, \ldots, y_m)$, такую, что для каждой m-ки натуральных чисел $y_1, \ldots, y_m$ число $\varphi(y_1, \ldots, y_m)$ реализует $A(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$. Но для каждой схемы аксиом исчисления высказываний мы сможем найти число, реализующее $A(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$ для любой аксиомы $A(y_1, \ldots, y_m)$ по этой схеме и любых $y_1, \ldots, y_m$. Достаточно будет указать это число (которое реализует все замкнутые аксиомы, получающиеся по этой схеме), потому что при наличии свободных переменных $y_1, \ldots, y_m$ в качестве $\varphi(y_1, \ldots, y_m)$ можно будет взять функцию-константу от m переменных, значение которой является этим числом (§ 44). Аналогично для отдельных арифметических аксиом мы просто укажем число, которое реализует результат любой подстановки цифр вместо всех свободных переменных этой аксиомы. Аналогично для схемы аксиом 13 реализующее число можно будет дать в виде обще-рекурсивной функции от x, зависящей только от цифры $\boldsymbol{x}$, подставленной вместо x, а для каждой из схем аксиом 10 и 11 — в виде обще-рекурсивной функции от $x_1, \ldots, x_n$, зависящей только от t и от цифр $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, подставленных вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ терма t. Тогда, если среди $y_1, \ldots, y_m$ содержатся другие переменные, то $\varphi(y_1, \ldots, y_m)$ можно будет получить путем распространения этой функции до функции, зависящей и от этих дополнительных переменных, с помощью функций тождества (§ 44).

Для каждой из схем аксиом и отдельных аксиом (§§ 19, 23) мы выразим наше реализующее число или функцию с помощью обозначений § 65. В тех случаях, которые не будут рассмотрены подробно, доказательства того, что это — действительно реализующее число или функция, а также необходимая проверка рекурсивности, предоставляются читателю.

1a. Согласно предварительным замечаниям, рассмотрим аксиому $A \supset (B \supset A)$ по схеме 1a, не содержащую свободных переменных. Покажем, что $\Lambda a \Lambda b\, a$, т. е. $\Lambda a \Lambda b\, U_1^2(a, b)$ (§ 44), реализует $A \supset (B \supset A)$. Действительно, пусть a реализует A; по пункту 4, нам надо показать, что $\{\Lambda a \Lambda b\, a\}(a)$, т. е. $\Lambda b\, a$ (по (71) § 65), реализует $B \supset A$. Чтобы это показать, допустим, что b реализует B; нам надо показать, что $\{\Lambda b\, a\}(b)$, т. е. a, реализует A. Но a реализует A по условию.

1b. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$ реализуется числом $\Lambda p \Lambda q \Lambda a \{q(a)\}(p(a))$. Действительно, пусть p реализует $A \supset B$; нам надо показать, что $\{\Lambda p\,\Lambda q\,\Lambda a\,\{q(a)\}(p(a))\}(p)$, т. е. что $\Lambda q\,\Lambda a\,\{q(a)\}(p(a))$, реализует $(A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)$. Чтобы это показать, допустим, что q реализует $A \supset (B \supset C)$; нам надо показать, что $\Lambda a\,\{q(a)\}(p(a))$ реализует $A \supset C$. Чтобы это показать, допустим, что a реализует A; нам надо показать, что $\{q(a)\}(p(a))$ реализует C. По условию, p реализует $A \supset B$ и a реализует A; следовательно, $p(a)$ реализует B. Кроме того, q реализует $A \supset (B \supset C)$ и a реализует A; следовательно, $q(a)$ реализует $B \supset C$. Итак, $q(a)$ реализует $B \supset C$, а $p(a)$ реализует B; следовательно, $\{q(a)\}(p(a))$ реализует C, что и требовалось доказать.

3. $A \supset (B \supset A \& B)$. $\Lambda a\,\Lambda b\,2^a \cdot 3^b$.

4a. $A \& B \supset A$. $\Lambda c\,(c)_0$ (см. # 19 § 45). 4b. $A \& B \supset B$. $\Lambda c\,(c)_1$.

5a. $A \supset A \vee B$. $\Lambda a\,2^0 \cdot 3^a$. 5b. $B \supset A \vee B$. $\Lambda b\,2^1 \cdot 3^b$.

6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$.

$\Lambda p\,\Lambda q\,\Lambda r\,\overline{\mathrm{sg}}((r)_0) \cdot p((r)_1) + (r)_0 \cdot q((r)_1)$ (см. # 9 § 44.) Короче говоря, нам надо показать, что если p реализует $A \supset C$, q реализует $B \supset C$, а r реализует $A \vee B$, то $\overline{\mathrm{sg}}((r)_0) \cdot p((r)_1) + (r)_0 \cdot q((r)_1)$ реализует C. Случай 1: $r = 2^0 \cdot 3^a$, где a реализует A. Тогда $(r)_0 = 0$ и $(r)_1 = a$. Так как p реализует $A \supset C$, а $(r)_1$ реализует A, то $p((r)_1)$ реализует C. Но $(r)_0 = 0$, значит, $\overline{\mathrm{sg}}((r)_0) = 1$. Следовательно, $\overline{\mathrm{sg}}((r)_0) \cdot p((r)_1) + (r)_0 \cdot q((r)_1) = p((r)_1)$ и реализует C, что и требовалось показать. Случай 2: $r = 2^1 \cdot 3^b$, где b реализует B. Аналогично.

7. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$. В силу леммы 45, число, реализующее замкнутые аксиомы по схеме аксиом 1b (в частности, те замкнутые аксиомы по схеме 1b, в которых в качестве C стоит $1 = 0$), реализует также замкнутые аксиомы по рассматриваемой схеме.

8[I]. $\neg A \supset (A \supset B)$. 0. Действительно, если p реализует $\neg A$, то, по пункту 5, p реализует $A \supset 1 = 0$. Но тогда никакое число a не может реализовать A, потому что при этом $p(a)$ реализовало бы ложную замкнутую элементарную формулу $1 = 0$, в противоречие с пунктом 1[1]). Значит, тривиальным образом, если p реализует $\neg A$ и a реализует A, то $\{0(p)\}(a)$ реализует B. (Рекомендуем читателю проверить, что для классической схемы аксиом 8 никакие видимые способы рассмотрения не приводят к цели.)

10. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 0)$ — в точности все различные переменные, которые содержат терм t аксиомы; обозначим этот терм через «$t(x_1, \ldots, x_n)$», и пусть $t(x_1, \ldots, x_n)$ — примитивно-рекурсивная функция (или, при $n = 0$, число), которую он выражает. В силу предварительных замечаний, допустим теперь, что аксиома содержит свободно только переменные $x_1, \ldots, x_n$; запишем ее в виде $\forall x\,A(x, x_1, \ldots, x_n) \supset A(t(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)$. Так как $t(x_1, \ldots, x_n)$ свободен для x в $A(x, x_1, \ldots, x_n)$, то результатом подстановки цифр $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ вместо (свободных вхождений) $x_1, \ldots, x_n$ в аксиому будет $\forall x\,A(x, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \supset A(t(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n), \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$. Мы покажем теперь, что число $\Lambda p\,p(t(x_1, \ldots, x_n))$, являющееся при переменных $x_1, \ldots, x_n$ общерекурсивной (на самом деле даже примитивно-рекурсивной) функцией от этих переменных, реализует эту формулу. В силу пункта 4, для этого надо показать, что если p реализует $\forall x\,A(x, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, то $p(t(x_1, \ldots, x_n))$ реализует $A(t(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n), \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$. Но, если p реализует $\forall x\,A(x, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, то, по пункту 7, $p(t(x_1, \ldots, x_n))$ реализует $A(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, где $t = t(x_1, \ldots, x_n)$; следовательно, по лемме 44, $p(t(x_1, \ldots, x_n))$ реализует

[1]) Следовало бы сказать: в противоречие с косвенным пунктом (см. прим. перев. на стр. 443). — *Прим. перев.*

также $\mathrm{A}(\mathrm{t}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n), \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, что и требовалось показать.

11. $\mathrm{A}(\mathrm{t}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n), \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) \supset \exists \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$. $\Lambda a\, 2^{t(x_1, \ldots, x_n)} \cdot 3^a$.

13. $\mathrm{A}(0) \,\&\, \forall \mathrm{x}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}')) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x})$. Мы рассмотрим случай, когда $\mathrm{A}(\mathrm{x})$ содержит свободно только x, потому что справедливость утверждения для общего случая будет тогда следовать из предварительных замечаний. Пусть частично-рекурсивная функция $\rho(x, a)$ определяется следующей примитивной рекурсией:

$$\begin{cases} \rho(0, a) = (a)_0, \\ \rho(x', a) = \{\{(a)_1\}(x)\}(\rho(x, a)). \end{cases}$$

Мы покажем теперь, что для каждого x число $\Lambda a \rho(x, a)$, являющееся примитивно-рекурсивной функцией от x, реализует $\mathrm{A}(0) \,\&\, \forall \mathrm{x}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}')) \supset \mathrm{A}(\boldsymbol{x})$. Для этого мы (по пункту 4) докажем индукцией по x, что если a реализует $\mathrm{A}(0) \,\&\, \forall \mathrm{x}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}'))$, то $\rho(x, a)$ реализует $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$. Базис: если a реализует $\mathrm{A}(0) \,\&\, \forall \mathrm{x}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}'))$, то, по пункту 2, $\rho(0, a)$ $[= (a)_0]$ реализует $\mathrm{A}(0)$. Инд. шаг.: аналогично $(a)_1$ реализует $\forall \mathrm{x}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}'))$, а поэтому (пункт 7) $\{(a)_1\}(x)$ реализует $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}) \supset \mathrm{A}(\boldsymbol{x}')$. Но, по индуктивному предположению, $\rho(x, a)$ реализует $\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$. Следовательно (пункт 4), $\rho(x', a)$ $[= \{\{(a)_1\}(x)\}(\rho(x, a))]$ реализует $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}')$.

14. После подстановки цифр мы получаем из этой аксиомы $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}' \supset \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Эта формула реализуется числом $\Lambda p\, 0$. Действительно, допустим, что p реализует $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}'$. Нам надо показать, что тогда 0 реализует $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Так как $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}'$ — элементарная формула, то она реализуема только в том случае, если она истинна, т. е. если $a' = b'$. Тогда $a = b$, следовательно, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ тоже истинна и 0 ее реализует.

Аналогично, для остальных отдельных аксиом после подстановки цифр мы получаем следующие реализующие числа:

$$15, 18-21\colon\ 0. \qquad 16\colon\ \Lambda p \Lambda q\, 0. \qquad 17\colon\ \Lambda p\, 0.$$

Правила вывода. 2. Ввиду замечания, сопровождавшего определение реализуемости, мы будем считать, что каждая формула зависит от всех переменных, входящих свободно хотя бы в одну из них. Тогда наше правило можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{A}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m) \qquad \mathrm{A}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m) \supset \mathrm{B}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m)}{\mathrm{B}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m).}$$

По индуктивному предположению, посылки $\mathrm{A}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m)$ и $\mathrm{A}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m) \supset \mathrm{B}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m)$ реализуемы, т. е. имеются обще-рекурсивные функции α и ϕ, такие, что для каждой m-ки натуральных чисел $y_1, \ldots, y_m$ формула $\mathrm{A}(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$ реализуется числом $\alpha(y_1, \ldots, y_m)$, а $\mathrm{A}(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m) \supset \mathrm{B}(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$ — числом $\phi(y_1, \ldots, y_m)$. Тогда число $\{\phi(y_1, \ldots, y_m)\}(\alpha(y_1, \ldots, y_m))$ реализует $\mathrm{B}(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$. Кроме того, $\{\phi(y_1, \ldots, y_m)\}(\alpha(y_1, \ldots, y_m))$, очевидно, является частично-рекурсивной функцией от $y_1, \ldots, y_m$. Но ее значение служит реализующим числом при любых $y_1, \ldots, y_m$, так что она должна быть определена для любых $y_1, \ldots, y_m$; значит, она обще-рекурсивна. Итак, заключение $\mathrm{B}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m)$ реализуемо.

9. $$\frac{\mathrm{C}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m)}{\mathrm{C}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m) \supset \forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m).}$$

По индуктивному предположению и определению реализуемости, имеется обще-рекурсивная функция ϕ, такая, что для любых $x, y_1, \ldots, y_m$ число

$\phi(x, y_1, \ldots, y_m)$ реализует $C(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m) \supset A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$. Мы докажем, что при любых $y_1, \ldots, y_m$ число $\Lambda c \Lambda x \{\phi(x, y_1, \ldots, y_m)\}(c)$ реализует $C(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m) \supset \forall x A(x, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$. Отсюда будет следовать реализуемость заключения, потому что $\Lambda c \Lambda x \{\phi(x, y_1, \ldots, y_m)\}(c)$ — примитивно-рекурсивная, и подавно обще-рекурсивная, функция от $y_1, \ldots, y_m$. Для этого предположим, что c реализует $C(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$; нам надо показать, что $\Lambda x \{\phi(x, y_1, \ldots, y_m)\}(c)$ реализует $\forall x A(x, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$. А для этого надо показать, что $\{\phi(x, y_1, \ldots, y_m)\}(c)$ для каждого x реализует $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$. Но так как c реализует $C(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$ и, по индуктивному предположению, $\phi(x, y_1, \ldots, y_m)$ реализует $C(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m) \supset A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$, то $\{\phi(x, y_1, \ldots, y_m)\}(c)$ реализует $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$. (Заметим, как срывается это рассуждение, если C содержит свободно x. Обозначим C через «$C(x, y_1, \ldots, y_m)$». В этом случае нам пришлось бы предположить, что c реализует $C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$ для некоторого x, и мы могли бы заключить только, что $\{\phi(x, y_1, \ldots, y_m)\}(c)$ реализует $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m)$ для этого x, тогда как нам надо заключить это для любого x.)

12. $$\frac{A(x, y_1, \ldots, y_m) \supset C(y_1, \ldots, y_m)}{\exists x A(x, y_1, \ldots, y_m) \supset C(y_1, \ldots, y_m).}$$

Аналогично, используя $\Lambda p \{\phi((p)_0, y_1, \ldots, y_m)\}((p)_1)$ в качестве реализующей функции для заключения, если ϕ — реализующая функция для посылки.

Эта теорема влечет простую непротиворечивость интуиционистской арифметической формальной системы (в силу (а) при пустом Γ и $1=0$ в качестве E), так же как и теорема 61 (а). Дополнительный интерес, который в этой связи вызывает теорема 62, вызван различием условий, налагаемых на новые аксиомы Γ, при которых доказывается сохранение простой непротиворечивости (это мы обсудим ниже вслед за теоремой 63).

Следствие 1^N. *Если* $y_1, \ldots, y_m$ — *различные переменные, а* $A(y_1, \ldots, y_m)$ — *формула, то* $A(y_1, \ldots, y_m)$ *реализуема в том и только в том случае, если реализуема формула* $\forall y_1 \ldots \forall y_m A(y_1, \ldots, y_m)$.

В самом деле, $A(y_1, \ldots, y_m)$ и $\forall y_1 \ldots \forall y_m A(y_1, \ldots, y_m)$ выводимы друг из друга в интуиционистской формальной системе.

Это следствие (будучи применено к случаю, когда $y_1, \ldots, y_m$ — все свободные переменные данной формулы в порядке их первого свободного вхождения) дает эквивалентность изложенной здесь формы определения реализуемости (Клини [1948]) с той, которая была у Клини [1945].

Следствие 2^N. (а) *Если* Γ — *реализуемые формулы,* $A(x_1, \ldots, x_n, y)$ — *формула, содержащая свободно только отличные друг от друга переменные* $x_1, \ldots, x_n, y$, *и* $\Gamma \vdash \exists y A(x_1, \ldots, x_n, y)$ *в интуиционистской арифметической формальной системе, то имеется обще-рекурсивная функция* $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, *такая, что для любых* $x_1, \ldots, x_n$ *реализуема формула* $A(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})$, (*где* $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$).

(b) *Аналогично с заменой «реализуемости» на любую из следующих комбинаций свойств:* (i) *«реализуема-*($\Gamma \vdash$) *и выводима из* Γ», (ii) *«реализуема-*($\Gamma \vdash$), *выводима из* Γ *и истинна»,* (iii) *«реализуема-*($\Gamma \vdash$), *выводима из* Γ *и реализуема»,* (iv) *«реализуема-*($\Gamma \vdash$), *выводима из* Γ, *истинна и реализуема».*

Доказательства. (a) В силу (a) теоремы и (B) и (A) 6 определения. (b) (i) Пользуясь вместо этого частью (b) теоремы. (ii) Пользуясь, далее, теоремой 61 (а) для заключения, что $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})$ истинна. (iii) Пользуясь, далее, частью (а) теоремы 62 для заключения, что $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})$ реализуема.

Реализуемость надлежит рассматривать как интуиционистскую интерпретацию формулы; а интуиционистское утверждение, что $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})$ реализуема, должно влечь за собой интуиционистскую истинность этой формулы, т. е. справедливость предложения $A(x_1, \ldots, x_n, y)$, представляющего ее интуиционистский смысл. Формула $\exists y \mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{y})$ утверждает существование для любых $x_1, \ldots, x_n$ некоторого y, зависящего от $x_1, \ldots, x_n$, такого, что $A(x_1, \ldots, x_n, y)$, или, другими словами, существование такой функции $y=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, что для любых $x_1, \ldots, x_n$ имеет место $A(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n))$. В силу части (а) следствия для пустой Γ, эта формула может быть доказана в интуиционистской формальной системе только в том случае, если существует такая функция φ, являющаяся обще-рекурсивной. Короче говоря, интуиционистски можно доказать существование только таких арифметических функций, которые являются обще-рекурсивными. (Мы рассматриваем здесь утверждение о существовании значения функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для всех n-ок $x_1, \ldots, x_n$ в качестве аргументов, так что это не противоречит нашему интуиционистскому использованию частично-рекурсивных функций.)

Будучи выведен из (а), этот результат зависит от принятия тезиса о том, что реализуемость формулы $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})$ влечет ее истинность. Однако, пользуясь частью (b) с пустой Γ (в этом случае, поскольку для пустой Γ не приходится требовать, чтобы Γ удовлетворяла перечисленным выше условиям, мы можем выбрать для заключения самую сильную форму (iv), т. е. что $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y})$ реализуема-($\vdash$), доказуема, истинна и реализуема), мы получаем тот же самый результат независимо от этого тезиса.

Наличие Γ в следствии показывает, что этот результат сохраняет силу после расширения формальной системы за счет присоединения любых подходящих аксиом Γ. Если тезис о том, что реализуемость влечет истинность, интуиционистски принят, то эти аксиомы должны только быть реализуемыми. В противном случае они должны быть реализуемыми-($\Gamma \vdash$) и истинными (выводимость из Γ для формул из Γ имеет место автоматически).

Этот результат устанавливает связь между брауэровской логикой, формализованной по Гейтингу, и тезисом Чёрча (§ 62) о том, что только обще-рекурсивные функции эффективно вычислимы. Оба построения возникли на основе конструктивистской точки зрения, но в деталях первоначально не были связаны друг с другом.

Формула $\exists y \mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{y})$ не утверждает единственности функции $y=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, такой, что $A(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n))$; для этого нужна формула $\exists ! y \mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{y})$ (§ 41).

Классически, если дано существование функции φ, такой, что $A(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n))$ для всех $x_1, \ldots, x_n$, то принцип наименьшего числа формально дает метод описания некоторой такой функции (*149 § 40, *174b § 41). Хотя интуиционистски принцип наименьшего числа не имеет места, в силу следствия 2 мы знаем, что коль скоро нам дано какое-нибудь интуиционистское доказательство формулы $\exists y \mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{y})$, на основе этого доказательства мы можем содержательно описать некоторую обще-рекурсивную функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, такую, что для всех $x_1, \ldots, x_n$ выполняется

$$A(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Пример 1. (Ср. пример 8 (с) § 74.) Пусть S_1 — интуиционистская арифметическая система. Пусть $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ — формула, содержащая свободно только x и y. Допустим, что для каждого x формула $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ истинна в точности для одного y. Тогда, если мы введем f и аксиому $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x}))$, то эта аксиома означает, что f выражает в интерпретации некоторую функцию φ (расширенную систему будем обозначать S_2, как в § 74). В силу $\exists$-введ. и новой аксиомы, $\vdash_2 \exists \mathrm{y} \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Допустим теперь, что f и аксиома $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x}))$ устранимы. Тогда $\vdash_1 \exists \mathrm{y} \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Значит, согласно следствию 2(b) (ii) из теоремы 62 с пустой Г, имеется обще-рекурсивная функция $y=\varphi_1(x)$, такая, что $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ истинна для каждого x. Но тогда $\varphi_1=\varphi$. Итак, *в интуиционистской арифметической системе новый функциональный символ* f (*выражающий какую-то функцию* φ), *введенный вместе с аксиомой вида* $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x}))$, *где* $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *содержит свободно только* x *и* y *и* $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *истинна в том и только в том случае, если* $y=\varphi(x)$, *устраним тогда и только тогда, когда* φ *обще-рекурсивна.*

Пример 2. Пусть $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ — формула, содержащая свободно только x и y, такая, что $\vdash_1 \exists \mathrm{y} \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Тогда, как в примере 1, найдется обще-рекурсивная функция $y=\varphi_1(x)$, такая, что $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ истинна для каждого x. Это показывается конструктивно (в основном рассуждениями доказательства теоремы 62(b)); по данному доказательству $\exists \mathrm{y} \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ (или гёделевскому номеру такого доказательства) можно найти систему E равенств, рекурсивно определяющую φ_1 (или гёделевский номер φ_1). Кроме того, эффективно разрешим вопрос о том, является ли число a гёделевским номером доказательства формулы вида $\exists \mathrm{y} \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, где A содержит свободно только x и y (случай 1) или нет (случай 2). Пусть

$$\theta(a)=\begin{cases}\text{гёделевскому номеру } \varphi_1 \text{ в случае } 1,\\ \Lambda x\, x \text{ (т. е. гёделевскому номеру функции } U_1^1) \text{ в случае } 2,\end{cases}$$

где произвол в выборе гёделевского номера φ_1 (или гёделевского номера функции U_1^1) устраняется путем каких-нибудь подходящих соглашений. Тогда $\theta(a)$ эффективно вычислима. Значит, по тезису Чёрча, мы можем ожидать, что $\theta(a)$ обще-рекурсивна. (На самом деле легко доказать, что $\theta(a)$ примитивно-рекурсивна, если сперва доказать (1). *Имеется примитивно-рекурсивная функция* $\xi(a)$, *такая, что если* a — *гёделевский номер доказательства в интуиционистской арифметической системе, то* $\xi(a)$ — *гёделевский номер некоторой реализующей-*($\vdash$) *функции* $\varphi(y_1, \ldots, y_m)$ *для конечной формулы* $\mathrm{A}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m)$ *этого доказательства, где* $\mathrm{y}_1 \ldots, \mathrm{y}_m$ — *свободные переменные этой конечной формулы в порядке их вхождения в наш перечень переменных.*) Пусть $\varphi(x)=\{\theta(x)\}(x)+1$. Тогда $\varphi(x)$ обще-рекурсивна. Пусть теперь $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ — такая формула, что $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ истинна в точности тогда, когда $y=\varphi(x)$ (например, формула, которая нумерически представляет φ, см. теорему 32 (a) § 59). Если мы теперь возьмем эту формулу в качестве $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ примера 1, то допущение, что f и аксиома $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x}))$ устранимы, приводит нас к противоречию. Итак: (2) *имеется обще-рекурсивная функция* φ *такая, что в интуиционистской арифметической системе выражающий ее новый функциональный символ* f *и аксиома вида* $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x}))$, *где* $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *содержит свободно только* x *и* y *и* $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *истинна в том и только в том случае, если* $y=\varphi(x)$, *не устранимы* (*и формула* $\exists \mathrm{y} \mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *недоказуема для любой такой* $\mathrm{A}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$).

Теорема 63^{N}. *Можно так выбрать формулы* $\mathrm{A}(\mathrm{x})$, $\mathrm{B}(\mathrm{x})$ *и* $\mathrm{C}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, *что следующие классически доказуемые формулы будут нереализуемы и, следовательно* (по теореме 62 (a)), *недоказуемы в интуиционистской формальной* *системе арифметики.* (*А именно, пусть* A(x, z) *нумерически выражает предикат* $T_1(x, x, z)$ *из* § 57, согласно следствию из теоремы 27 § 49. *Пусть* A(x) *будет формулой* $\exists z$A(x, z), B(x) — *формулой* A(x) $\vee \neg$ A(x) *и* C(x, y) — *формулой* y = 1 $\vee$ (A(x) & y = 0).)

(i) $\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{A}(\mathrm{x})$.

(ii) $\forall \mathrm{x}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{A}(\mathrm{x}))$ (замыкание (i)).

(iii) $\neg\neg \forall \mathrm{x}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \neg \mathrm{A}(\mathrm{x}))$ (двойное отрицание (ii)).

(iv) $\forall \mathrm{x} \neg\neg \mathrm{B}(\mathrm{x}) \supset \neg\neg \forall \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x})$.

(v) $\neg\neg \{\forall \mathrm{x} \neg\neg \mathrm{B}(\mathrm{x}) \supset \neg\neg \forall \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x})\}$ (двойное отрицание (iv)).

(vi) $\exists \mathrm{y} \mathrm{C}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \supset \exists \mathrm{y}[\mathrm{C}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \& \forall \mathrm{z}(\mathrm{z} < \mathrm{y} \supset \neg \mathrm{C}(\mathrm{x}, \mathrm{z}))]$ (см. *149 § 40).

(vii) $\exists \mathrm{y}[\mathrm{y} < \mathrm{w} \& \mathrm{C}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \& \forall \mathrm{z}(\mathrm{z} < \mathrm{y} \supset \neg \mathrm{C}(\mathrm{x}, \mathrm{z}))] \vee \forall \mathrm{y}[\mathrm{y} < \mathrm{w} \supset \neg \mathrm{C}(\mathrm{x}, \mathrm{y})]$ (см. *148).

То же самое справедливо для замыкания и двойного отрицания замыкания формул (vi) *и* (vii). ((i) — (v): Клини [1945] и Нельсон [1947].)

Лемма 46^N. (а) *Если* A *реализуема, а* B *нереализуема, то* A $\supset$ B *нереализуема.* Следовательно, *если* A *реализуема, то* $\neg$ A *нереализуема.* (b) *Если* A *замкнута и нереализуема, то* A $\supset$ B *и* (следовательно) $\neg$ A *реализуемы, а* $\neg\neg$ A *нереализуема* (последнее в силу (а)).

Доказательство леммы 46. (а) По теореме 62 (а) или случаю для правила 2 в ее доказательстве, если формулы A и A $\supset$ B реализуемы, то реализуема и B. (b) Для замкнутой B любое число, например 0, реализует A $\supset$ B, потому что, тривиальным образом, когда a реализует A (т. е. никогда), тогда $0(a)$ реализует B.

Лемма 47^N. *Если* $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ *нумерически выражает обще-рекурсивный предикат* $P(x_1, \ldots, x_n)$ *в интуиционистской арифметической формальной системе, то для любых* $x_1, \ldots, x_n$ *формула* $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ *реализуема в том и только в том случае, если* $P(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказательство леммы 47. Если $P(x_1, \ldots, x_n)$, то, по (i) из § 41, $\vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ и, следовательно, по теореме 62 (а), $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ реализуема. Обратно, допустим, что $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ реализуема. Так как $P(x_1, \ldots, x_n)$ — обще-рекурсивный предикат, то (конструктивным образом) можно утверждать, что для данных $x_1, \ldots, x_n$ либо $P(x_1, \ldots, x_n)$, либо $\overline{P}(x_1, \ldots, x_n)$. Но в последнем случае, по (ii) из § 41, $\vdash \neg \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ и, следовательно, по теореме 62 (а), $\neg \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ реализуема, что в силу леммы 46 (а) противоречит нашему допущению о том, что $\mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ реализуема.

Доказательство теоремы 63. (i) Допустим, что (i), т. е. $\exists z$A(x, z) $\vee$ $\vee$ $\neg \exists z$A(x, z), реализуема. Пусть $\varphi(x)$ — реализующая функция для этой формулы, и положим $\rho(x) = (\varphi(x))_0$. Тогда $\rho(x)$ обще-рекурсивна и принимает только значения 0 и 1 (в силу (B) и (A)3 из определения реализуемости). Фиксируем x произвольно. Случай 1: $\rho(x) = 0$. Тогда $(\varphi(x))_1$ реализует $\exists z$A($\boldsymbol{x}$, z); следовательно, $(\varphi(x))_{1,1}$ реализует A($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$), где $z = (\varphi(x))_{1,0}$, а в этом случае, по лемме 47, $T_1(x, x, z)$. Таким образом, $(Ez)T_1(x, x, z)$. Случай 2: $\rho(x) = 1$. Тогда $(\varphi(x))_1$ реализует $\neg \exists z$A($\boldsymbol{x}$, z), т. е. $(\varphi(x))_1$ реализует

$$\exists \mathrm{z} \mathrm{A}(\boldsymbol{x}, \mathrm{z}) \supset 1 = 0.$$

Мы покажем, что в этом случае $\overline{(Ez)}T_1(x, x, z)$. Действительно, если бы имелось такое z, что $T_1(x, x, z)$, то, по лемме 47, $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ была бы реализуема; пусть, например, число k реализовало бы эту формулу. Тогда $2^z \cdot 3^k$ реализовало бы $\exists z A(\boldsymbol{x}, z)$, а $\{(\varphi(x))_1\}(2^z \cdot 3^k)$ реализовало бы $1=0$, что невозможно. Эти два случая показывают, что обще-рекурсивная функция $\rho(x)$ служит представляющей функцией для $(Ez)T_1(x, x, z)$. Но предикат $(Ez)T_1(x, x, z)$ не рекурсивен ((15) теоремы V § 57); следовательно, такой обще-рекурсивной функции $\rho(x)$ существовать не может. Этим доказана от противного нереализуемость (i).

(ii), (iii). Посредством $\forall$-удал. (i) выводима интуиционистски из (ii), так что, по теореме 62 (a), формула (ii) также нереализуема; по лемме 46 (b) нереализуема также (iii), потому что (ii) замкнута.

(iv). Формула (iii) может быть выведена из (iv) с помощью *51a § 27 и $\forall$-введ.

(vi). Мы покажем сейчас, что (i) выводима из (vi). Из $1=1$ (эта формула доказуема) путем $\vee$- и $\exists$-введ. мы получаем $\exists y C(x, y)$. Далее, из (vi), по $\supset$-удал., получаем

$$\exists y[C(x, y) \& \forall z(z < y \supset \neg C(x, z))].$$

Подготавливая &- и $\exists$- удал., допустим $C(x, y)$, т. е.

$$y=1 \vee (A(x) \& y=0) \tag{1}$$

и

$$\forall z(z < y \supset \neg C(x, z)), \text{ т. е.}$$

$$\forall z(z < y \supset \neg\{z=1 \vee (A(x) \& z=0)\}). \tag{2}$$

Путем разбора случаев из (1) мы с помощью (2) выведем (i). Случай 1: допустим $y=1$. Для приведения к нелепости допустим, далее, $A(x)$. Из этой формулы и $0=0$ путем &- и $\vee$- введ. получаем

$$0=1 \vee (A(x) \& 0=0).$$

Но, кроме того, из $y=1$ посредством *135b мы получаем $0<y$, и далее, из (2) посредством $\forall$-удал. (с 0 в качестве t) и $\supset$-удал. мы получаем

$$\neg\{0=1 \vee (A(x) \& 0=0)\}.$$

Отсюда, ввиду reductio ad absurdum, $\neg A(x)$. По $\vee$-введ., $A(x) \vee \neg A(x)$, а это есть формула (i), и она не содержит переменной y предстоящего $\exists$-удал. Случай 2: допустим $A(x) \& y=0$. По &-удал. и $\vee$-введ., $A(x) \vee \neg A(x)$. (Этот вывод связан с содержательным рассуждением примера 6 § 64.)

(vii). Из (vii) можно вывести (vi) так же, как формула из *149 была выведена из формулы из *148.

Теорема 63 (i)—(v) влечет недоказуемость формулы $\mathscr{A} \vee \neg \mathscr{A}$ в интуиционистском исчислении высказываний и формул

$$\forall x(\mathscr{A}(x) \vee \neg \mathscr{A}(x)), \quad \neg\neg\forall x(\mathscr{A}(x) \vee \neg \mathscr{A}(x)),$$
$$\forall x \neg\neg \mathscr{A}(x) \supset \neg\neg\forall x \mathscr{A}(x) \quad \text{и} \quad \neg\neg\{\forall x \neg\neg \mathscr{A}(x) \supset \neg\neg\forall x \mathscr{A}(x)\}$$

в интуиционистском исчислении предикатов; эти результаты нам уже известны из теоремы 57 (b) и теоремы 58 (a) и (c). Только что изложенные доказательства менее элементарны чем те, которые основаны на теореме Генцена о нормальной форме, но они помогают вникнуть в то, как работает интуиционистская логика в качестве орудия арифметических рассуждений. Нам удалось показать недоказуемость $A \vee \neg A$ в интуиционистской арифметике только при наличии свободной переменной x[1]).

Следствие (для (ii))^N. *Формула* $\neg \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ *реализуема* (*хотя она и является отрицанием классически доказуемой формулы*).

Это следует из нереализуемости (ii) и леммы 46 (b).

Формула $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ классически доказуема и, следовательно, истинна при классических интерпретациях. Но она не реализуема. Значит, если принять реализуемость в качестве необходимого условия для интуиционистской истинности, то она интуиционистски не истинна и, следовательно, недоказуема не только в рассматриваемой интуиционистской формальной системе, но и при помощи каких угодно интуиционистских методов.

Из этого, в частности, следует, что наша классическая формальная система, обоснованная интуиционистским доказательством ее простой непротиворечивости, может служить орудием интуиционистского доказательства, как мы предполагали в § 14, только для формул, принадлежащих очень узкому классу (который содержит формулы вида $B(x)$ и $\forall x B(x)$ конца § 42, но не рассматриваемую формулу $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$).

Отрицание $\neg \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ этой формулы классически ложно, но (в силу следствия) реализуемо, а значит, интуиционистски истинно, если мы считаем реализуемость (установленную интуиционистски) достаточным условием для интуиционистской истинности.

Таким образом, оказывается возможным утверждать интуиционистски формулу $\neg \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$. Значит, мы получаем такое расширение интуиционистской арифметики, которую мы прежде рассматривали как подсистему классической, что интуиционистская и классическая арифметики расходятся, причем $\neg \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ имеет место в интуиционистской, а $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ — в классической арифметике.

Примеры такого рода расхождений хорошо известны математикам — одним из таких примеров служат эвклидова и неэвклидова геометрии, — но в арифметике это явление ново. Первый пример такого рода получается в результате присоединения к арифметическому формализму формулы $A_p(p)$ или формулы $\neg A_p(p)$, см. конец §§ 42 и 75.

Не только реализуема сама формула $\neg \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$, но, в силу теоремы 62 (a) (с формулой $\neg \forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ в качестве Γ), если добавить эту формулу к рассматриваемой интуиционистской системе, то в расширенной системе будут доказуемы только реализуемые формулы. Значит, каждая доказуемая формула будет истинной в интерпретации реализуемости. Таким образом, в частности, эта интерпретация показывает простую непротиворечивость усиленной интуиционистской системы[2]).

Более полное обсуждение этого вопроса имеется у Клини [1945], где расширение неусиленной интуиционистской формальной арифметической системы S до усиленной интуиционистской системы S', которая расходится с классической системой S_c, предлагается в виде отождествления истинности с реализуемостью.

---

[1]) Классически, для замкнутой A, формула $A \vee \neg A$ реализуема в силу леммы 46 (b), $\vee$-введ. и теоремы 62 (a) (Клини [1945]).—*Прим. перев.*

[2]) В то же время мы видим (классически), что эта «усиленная интуиционистская система», т. е. система реализуемых формул арифметики, не аксиоматизируема и, таким образом, не является формальной системой. Действительно, классически каждая замкнутая формула или ее отрицание реализуемы (лемма 46 (b)) и, значит, по первой теореме Гёделя для интуиционистской системы (теорема 29), класс реализуемых формул арифметики не рекурсивно-перечислим. (См. добавление I, стр 474).—*Прим. перев.*

Нельсоном [1947, части II—IV] (и Клини [1945]) получены уточнения результатов, изложенных нами здесь на основе интерпретации. Так как все они опираются на непротиворечивость арифметического формализма, то вполне элементарного рассмотрения ожидать нельзя. Но эта неэлементарность сведена к минимуму в результатах, основанных на этой дальнейшей работе Нельсона, так что в конечном счете эти результаты доказаны в элементарной метаматематике при условии простой непротиворечивости S. В частности, в силу этих результатов и результатов Гёделя [1932—33] (см. следствие 2 из теоремы 60), метаматематически доказано, что как S', так и S_c просто непротиворечивы, если просто непротиворечива S. (Нельсон в качестве своей S выбирает не нашу интуиционистскую формальную систему, а систему, которая, если отвлечься от несущественного различия в постулатах равенства, получается из нашей путем присоединения некоторых дополнительных функциональных символов с их определяющими уравнениями. Эти уравнения подходят под наши схемы (I)—(V) § 43[1]) или под очень похожие схемы, если не считать того, что допускается также некоторая схема возвратной рекурсии. С помощью нельсоновских результатов (i)—(iv) на стр. 332 его работы, для каждого применения этой схемы без этого применения доказуема пара уравнений того же вида с заменой $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{t}_i$ на $\mathfrak{f}', \mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{t}_i'$; таким образом, эта схема возвратной рекурсии устранима. Далее, в силу примера 9 § 74 и предшествующих ему замечаний, устранимы дополнительные функциональные символы.)

Нельсон [1949] вводит понятие „Р-реализуемости“, с помощью которого можно построить арифметическую систему, расходящуюся как с усиленной интуиционистской, так и с классической.

Роуз [1952] исследует реализуемость в связи с интуиционистским исчислением высказываний[2]).

Клини [1950a] намечает применение рекурсивных функций в интерпретации интуиционистской теории множеств.

Пример 3. (а) *Операторы* $\supset$, $\neg$, $\&$, $\vee$ *в применении к замкнутым формулам* A *и* B *подчиняются сильным трехзначным таблицам истинности* (§ 64, переформулированный для рассматриваемых сейчас символов), *если* $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{u}$ *читать соответственно как „реализуема“, „нереализуема“, „неизвестно (или значение несущественно)“*, т. е. эти таблицы, если исходить из правильной информации о реализуемости или нереализуемости формул A

[1]) В § 43 эти уравнения назывались «равенствами». — *Прим. перев.*

[2]) Формула исчисления высказываний называется реализуемой, если реализуема всякая арифметическая формула, получающаяся из нее путем подстановки. Джин Роуз [1953] показывает, что формула

$$\mathrm{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : ((\neg\neg \mathrm{D} \supset \mathrm{D}) \supset (\neg\neg \mathrm{D} \vee \neg \mathrm{D})) \supset (\neg\neg \mathrm{D} \vee \neg \mathrm{D}),$$

где D есть $\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$, реализуема, хотя и не доказуема интуиционистски (последнее можно установить, например, с помощью теоремы 56 (d)). Реализуемость следует из того, что каждая формула $\mathrm{P}(M, \mathrm{N})$, получающаяся подстановкой замкнутых арифметических формул M и N в $\mathrm{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, реализуема одним и тем же числом — а именно, гёделевским номером функции

$$\lambda b\ \mu c\, \{[[(\{b\}(h_1))_0 = 0 \vee (\{b\}(h_2))_0 = 0] \,\&\, c = 1] \vee$$
$$\vee\ [[(\{b\}(h_1))_0 = 1 \,\&\, (\{b\}(h_2))_0 = 1] \,\&\, c = 2]\},$$

где h_1 и h_2 — гёделевские номера функций-констант 1 и 2. Джин Роуз доказывает классически по существу это. Но закон исключенного третьего нужен только для утверждения $[(\{b\}(h_1))_0 = 0 \vee (\{b\}(h_2))_0 = 0] \vee [(\{b\}(h_1))_0 = 1 \,\&\, (\{b\}(h_2))_0 = 1]$. (Эта дизъюнкция соответствует альтернативе: $\neg M \vee \neg \mathrm{N}$ не не-реализуема или нет.) Комбинируя шаги по вычислению $\{b\}(h_1)$ и $\{b\}(h_2)$, на некотором шаге мы закончим вычисления и, определив четность полученного числа, докажем указанную дизъюнкцию. Существование же упомянутого шага может быть интуиционистски установлено с помощью результата Новикова (см. сноску на стр. 491). — *Прим. перев.*

и B, могут дать только правильную информацию о реализуемости или нереализуемости формул $A \supset B$, $\neg A$, $A \& B$, $A \vee B$. Доказательство. Рассмотрим $\supset$. Если B реализуема, то, в силу *11 § 26 и теоремы 62 (a), реализуема также $A \supset B$, что соответствует трем t в столбце 1 таблицы для $\supset$ (стр. 298). Если A нереализуема, то, по лемме 46 (b), $A \supset B$ реализуема, что соответствует трем t в строке 2. Если A реализуема, а B нереализуема, то, по лемме 46 (a), $A \supset B$ нереализуема, что соответствует f в пересечении строки 1 и столбца 2. Таблица для $\neg$ — это просто столбец для f из таблицы для $\supset$, а & и $\vee$ рассматриваются легко. (b) *Формула без переменных реализуема в том и только в том случае, если она истинна.* Значит, ее реализуемость (и истинность) или нереализуемость (и ложность) эффективно разрешимы посредством процедуры оценки, которую дают обычная интерпретация 0, $'$, $+$, $\cdot$, $=$ и классические 2-значные таблицы истинности для $\supset$, $\neg$, &, $\vee$ (см. § 79 перед теоремой 51). Доказательство проводится с помощью примера 4 § 81 или следующим образом. Для замкнутых элементарных формул истинность и реализуемость совпадают и разрешимы. А далее, при построении составных формул посредством операций исчисления высказываний, мы всегда будем оставаться в пределах первых двух строк и столбцов 3-значных таблиц. (c) Всякое число e мы будем называть *R-оценкой* замкнутой формулы E, если либо $e = 2^0 \cdot 3^{e_1}$ (тогда $e_1 = (e)_1$) и e_1 реализует E, либо $e = 2^1 \cdot 3^0$ и E нереализуема. Для открытых формул *R-оценочная функция* определяется по аналогии с „реализующей функцией". *Всякая формула* $C(z_1, \ldots, z_m)$, *не содержащая кванторов и содержащая только отличные друг от друга переменные* $z_1, \ldots, z_m$ $(m > 0)$, *обладает примитивно-рекурсивной R-оценочной функцией* $\gamma(z_1, \ldots, z_m)$. Доказательство (мы для экономии места опускаем «$(z_1, \ldots, z_m)$»). Случай 1: C — элементарная формула P. Тогда P выражает примитивно-рекурсивный предикат P с представляющей функцией φ. Положим $\gamma = 2^{\varphi} \cdot 3^0$. Случай 2: C есть $A \supset B$, где, по индуктивному предположению, имеются примитивно-рекурсивные R-оценочные функции α и β для A и B соответственно. Положим

$$\gamma = \begin{cases} 2^0 \cdot [3 \exp \Lambda a (\beta)_1], & \text{если} \quad (\beta)_0 = 0, \\ 2^0 \cdot 3^0, & \text{если} \quad (\alpha)_0 = (\beta)_0 = 1, \\ 2^1 \cdot 3^0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Случай 3: $\neg A$. Возьмем $\beta = 2^1 \cdot 3^0$ в случае 2. Случай 4: $A \& B$. Положим

$$\gamma = \begin{cases} 2^0 \cdot [3 \exp 2^{(\alpha)_1} \cdot 3^{(\beta)_1}], & \text{если } (\alpha)_0 = (\beta)_0 = 0, \\ 2^1 \cdot 3^0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Случай 5: $A \vee B$. Аналогично. (d) *Предваренная формула реализуема в том и только в том случае, если она обще-рекурсивно истинна.* (Ср. замечание 2 § 79 и пример 5 § 81.) Доказательство. Рассмотрим снова формулу G, использованную в качестве примера в § 79 (стр. 411). Пусть $\alpha(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3)$ — примитивно-рекурсивная R-оценочная функция для $A(y_1, x_1, y_2, x_2, y_3)$. Тогда, если формула G рекурсивно истинна, то

$$2^{y_1} \cdot [3 \exp \Lambda x_1 \, 2^{y_2(x_1)} \cdot [3 \exp \Lambda x_2 \, 2^{y_3(x_1, x_2)} \cdot 3 \exp (\alpha(y_1, x_1, y_2(x_1), x_2, y_3(x_1, x_2)))]]$$

служит для нее реализующей функцией. Обратно, если g реализует G, то G рекурсивно истинна, причем $y_1 = (g)_0$, $y_2(x_1) = (\{(g)_1\}(x_1))_0$ и $y_3(x_1, x_2) = (\{(\{(g)_1\}(x_1))_1\}(x_2))_0$ служат требуемыми числом и обще-рекурсивными функциями.

Пример 4. Воспользуемся тезисом, что $(x)(Ei)\,B(x, i)$ имеет место интуиционистски, только если имеется такая обще-рекурсивная функция α, что $(x)\,B(x, \alpha(x))$ (см. выше или Клини [1943], стр. 69, Тезис III), если покажем, что

(a) $$(y)\,(Ei)_{i<a}A(i, (y)_i) \to (Ei)_{i<a}(y)\,A(i, y)$$

не имеет места интуиционистски для всех A (ср. (20) § 57). С помощью (51) § 61 мы получим

$$(x)\,(y)\,(Ei)_{i<2}\overline{\overline{W}}_i(x, (y)_i).$$

Поэтому, если бы интуиционистски имело место (a), то мы получили бы интуиционистски $(x)\,(Ei)_{i<2}(y)\overline{\overline{W}}_i(x, y)$; откуда, согласно только что высказанному тезису, для некоторой рекурсивной α, принимающей значения, меньшие чем 2, было бы $(x)\,(y)\overline{\overline{W}}_{\alpha(x)}(x, y)$; откуда $(x)\,\overline{(\overline{Ey})\,W_{\alpha(x)}(x, y)}$, откуда для каждого x

(b) $$(Ey)\,W_0(x, y) \to \alpha(x)=1, \quad (Ey)\,W_1(x, y) \to \alpha(x)=0.$$

Но можно взять $\alpha(x)=1$ в качестве $R_0(x, y)$ и $\alpha(x)=0$ в качестве $R_1(x, y)$ из (57) и (58) § 61. Тогда либо $\alpha(f)=1$, либо $\alpha(f)=0$. Если $\alpha(f)=1$, то $(Ey)\,R_0(f, y)$, откуда, как в § 61, следует, что $(Ey)\,W_1(f, y)$, что противоречит (b). Аналогично при $\alpha(f)=0$.

ДОБАВЛЕНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

ДОБАВЛЕНИЕ I [1])

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ

Воспроизводим, следуя идее Гильберта и Бернайса [1939], доказательство теоремы 30. Предполагается, что читатель уже прочел первые 54 параграфа этой книги, а также §§ 73 и 74 гл. XIV.

Мы будем рассматривать формальную систему S, которая получается присоединением к системе гл. IV оператора ιw (см. § 74), но наши рассуждения без затруднений переносятся на случай, когда система S содержит в конечном числе дальнейшие функциональные и предикатные символы и аксиомы. Эта система методом § 50 погружается в обобщенную арифметику, причем ι надлежит рассматривать как новый (четырнадцатый) нуль; таким же образом надлежит рассматривать упомянутые выше дальнейшие функциональные и предикатные символы, если таковые имеются. В гёделевской арифметизации § 52 символу ι ставится в соответствие число 29. Вместо $\iota w F(x_1, \ldots, x_n, w)$ мы будем попрежнему пользоваться обозначениями типа $f(x_1, \ldots, x_n)$ (ср. § 74).

Мы покажем, что формула (II), приведенная на стр. 190 перед формулировкой теоремы 30, выводима в системе S. Из результатов § 74 (теорема 42) будет следовать, что формула (II) выводима и в системе гл. IV (или в системе, получающейся из нее присоединением дополнительных функциональных и предикатных символов и аксиом в конечном числе; конечность числа символов несущественна — лишь бы они были перечислимы; то же можно сказать и об аксиомах, ввиду замечания на стр. 474 этого добавления и того факта, что множество следствий из рекурсивно-перечислимого множества аксиом рекурсивно-перечислимо; ср. замечания о $F_0(a)$ в доказательстве теоремы 38 § 72).

Этим и будет доказана теорема 30.

Знак $\vdash$ ниже относится к системе S.

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — какая-нибудь примитивно-рекурсивная функция и $\varphi_1, \ldots, \varphi_k (= \varphi)$ — ее примитивно-рекурсивное описание. Согласно примеру 9 § 74, в S имеются функциональные символы $f_1, \ldots, f_k$, выражающие функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ таким образом, что в S доказуемы все равенства, полученные из применений схем (I) — (Vb) (§ 43) для $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ путем замены каждой φ_i на f_i и содержательных переменных $x_1, x_2 \ldots$ на формальные переменные $x_1, x_2, \ldots$. О каждом из таких символов f_i мы будем говорить, что он *формально выражает* соответствующую функцию φ_i. (Это отношение между f и φ зависит от примитивно-рекурсивного описания данной функции φ.) (И мы будем говорить, что терм $f_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$ *формально выражает* функцию $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$; m_i — число аргументов функции φ_i в рекурсивных равенствах для φ_i, входящих в примитивно-рекурсивное описание функции φ.) Пользуясь индукцией по длине k примитивно-рекурсивного описания функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и вычислимостью каждой функции

[1]) Редактор перевода не принимал участия в редактировании этих добавлений. — *Прим. ред.*

$\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ (§ 43), легко доказать, что для терма $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, формально выражающего $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, имеет место

(1) $$(x_1) \ldots (x_n)(y)\{\varphi(x_1, \ldots, x_n) = y \equiv \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{y}\}.$$

Если терм $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ формально выражает функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, то $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ также и *нумерически выражает* функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ в том смысле, что

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = y \rightarrow \vdash \mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{y} \quad \text{и}$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \neq y \rightarrow \vdash \neg\, \mathrm{f}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{y}.$$

Далее, индукцией по длине примитивно-рекурсивного описания функции $\varphi(x, y)$ легко показать (используя *66), что если терм $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ формально выражает функцию $\varphi(x, y)$, то терм $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \boldsymbol{q})$ формально выражает функцию $\varphi(x, q)$, где q — произвольное фиксированное число); и далее, в тех же предположениях, если терм $\mathrm{g}(\mathrm{n})$ нумерически выражает примитивно-рекурсивную функцию $\psi(n)$, то $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{g}(\boldsymbol{p}))$ формально выражает функцию $\varphi(x, m)$, где $m = \psi(p)$ (p — любое фиксированное число) (используя теорему 24b).

Пусть теперь $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — представляющая функция примитивно-рекурсивного предиката $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ (§ 45), и терм $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ формально выражает функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. О каждой формуле $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, такой, что

(2) $$\vdash \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) \sim \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) = 0,$$

мы будем говорить, что она *формально выражает* предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ (это отношение между $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ и $P(x_1, \ldots, x_n)$ зависит от выбора примитивно-рекурсивного описания представляющей функции φ).

Для каждого примитивно-рекурсивного предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$ *существует формула* $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, *формально выражающая этот предикат*, например формула $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) = 0$, где $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ — терм, формально выражающий представляющую функцию этого предиката. При этом:

(3) *Для всякой формулы* $\vdash \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, *формально выражающей какой-либо примитивно-рекурсивный предикат* $P(x_1, \ldots, x_n)$, *существует терм* $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, *формально выражающий представляющую функцию* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *этого предиката и притом такой, что имеет место*

$$\vdash \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) = 0 \sim \mathrm{F}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n).$$

Из определения представляющей функции (с использованием (1), $\vdash \neg\, 1 = 0$, (2) и * 30) вытекает, что если формула $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ формально выражает примитивно-рекурсивный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$, то

(4) $$(x_1) \ldots (x_n)\{P(x_1, \ldots, x_n) \equiv \vdash \mathrm{P}(\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_n)\}.$$

Из $\vdash \neg\, 1 = 0$, *30, (1), (2) и (4) видно, что формула $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, формально выражающая предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$, нумерически выражает этот предикат. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места (см. конец этого добавления).

Из (2), *158 и *66 следует, что интуиционистски

$$\vdash \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) \vee \neg\, \mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$$

для всякой формулы $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$, формально выражающей примитивно-рекурсивный предикат.

Введем в рассмотрение следующие предикаты и функции обобщенной арифметики (гл. X):

$$\mathfrak{s}(X, \mathfrak{l}) \asymp \mathfrak{S}(X, \mathfrak{l}, a) \quad \text{(см. пример 2 § 52).}$$

$$\mathfrak{e}(X) \asymp \begin{cases} (\neg, X), & \text{если X формула системы } S, \\ X & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\mathfrak{B}(X, F) \equiv \mathfrak{Pf}(X) \& \{X\}_0 \asymp F \quad \text{(см. Dn 12 § 51).}$$

Пусть $s(x, l)$ $e(x)$ и $B(x, y)$ — соответствующие функции и вполне соответствующий предикат обыкновенной содержательной арифметики. Методом § 52 убеждаемся в их примитивной рекурсивности.

Пусть формула $\mathrm{B}(x, y)$ системы S получена из формулы, определяющей $B(x, y)$ в содержательной арифметике, путем перевода при помощи таблицы на стр. 202. Ясно, что $\mathrm{B}(x, y)$ формально выражает $B(x, y)$.

Пусть, кроме того, $\mathrm{s}(x, y)$ и $\mathrm{e}(x)$ — термы, формально выражающие $s(x, y)$ и $e(x)$ и определенные методом § 52.

Без потери общности в дальнейших рассуждениях согласимся считать, что формула $\mathrm{B}(a, b)$ и термы $\mathrm{s}(x, y)$, $\mathrm{e}(x)$ не содержат связанных вхождений переменных a, b и c (см. прим. ред. на стр. 176—177).

Этот выбор формулы $\mathrm{B}(x, y)$ и термов $\mathrm{s}(x, y)$ и $\mathrm{e}(x)$ среди всевозможных выборов формул и термов, нумерически выражающих $B(x, y)$, $s(x, y)$ и $e(x)$ соответственно, мы будем называть *естественным выбором*. В дальнейшем он будет играть очень важную роль.

А сейчас мы допустим, что $\mathrm{s}(x, y)$ и $\mathrm{e}(x)$ — любые термы, не содержащие переменных a, b и c, нумерически выражающие функции $s(x, y)$ и $e(x)$, а $\mathrm{B}_0(x, y)$ — любая формула, нумерически представляющая примитивно-рекурсивную функцию $\varphi(x)$, осуществляющую пересчет всех доказуемых формул системы S. (Такая функция найдется в силу теоремы XIV § 60 и следствия из нее, а также в силу сказанного в конце § 53.)

Пусть, далее, p — номер формулы $\forall c \neg \mathrm{B}_0(c, \mathrm{s}(a, a))$ в гёделевской нумерации, в соответствии с чем эта формула получает обозначение $\mathrm{A}_p(a)$ (см. § 42, стр. 186); тогда формула $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$ есть $\forall c \neg \mathrm{B}_0(c, s(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}))$. Номер этой формулы есть $s(p, p)$. Допустим, что она доказуема, т. е. допустим, что

$$(5) \qquad \vdash \forall c \neg \mathrm{B}_0(c, \mathrm{s}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})),$$

и пусть $\varphi(k)$ — ее номер в пересчете всех доказуемых формул, осуществляемом функцией φ. Тогда $\varphi(k) = s(p, p)$, следовательно $\vdash \mathrm{B}_0(\boldsymbol{k}, \mathrm{s}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}))$; по $\exists$-введ., $\vdash \exists c \mathrm{B}_0(c, \mathrm{s}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}))$, по *83а $\vdash \neg \forall c \neg \mathrm{B}_0(c, \mathrm{s}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}))$. Это вместе с (5) означает, что система S противоречива. Поэтому, если система S непротиворечива, то не-$\vdash \mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$.

Это — видоизмененное доказательство первой части теоремы 28 (видоизменение относится к выбору формулы $\mathrm{B}_0(b, a)$ в качестве $\mathrm{A}(a, b)$ леммы 21 § 42; это видоизменение применимо и ко второй части этой теоремы). Как и в § 42 стр. 187, утверждение «не-$\vdash \mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$» выражается в гёделевской нумерации формулой $\mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$, а результат всего рассуждения — формулой

$$(\mathrm{II}') \qquad \mathrm{Consis} \supset \mathrm{A}_p(\boldsymbol{p})$$

(ср. стр. 190). При этом в качестве формулы Consis, входящей в (II′), мы выберем формулу

$$\mathrm{Wid:} \qquad \forall a \neg (\exists c \mathrm{B}(c, a) \,\&\, \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{e}(a))),$$

эквивалентную (см. *86 и *58b) формулам:

$$\neg \exists a (\exists b \mathrm{B}(b, a) \,\&\, \exists b \mathrm{B}(b, \mathrm{e}(a)))$$

и

$$\forall a (\exists b \mathrm{B}(b, a) \supset \neg \exists b \mathrm{B}(b, \mathrm{e}(a)))$$

(первая из них есть разновидность формулы $\neg \exists a (\exists b \mathrm{C}(a, b) \,\&\, \exists c \, \mathrm{D}(a, c))$ стр. 189, а вторая — это формула, рассмотренная Гильбертом и Бернайсом).

Будем еще считать, что в Consis $\mathrm{e}(a)$ формально выражает $e(a)$, а $\mathrm{B}_0(c, a)$ в $\mathrm{A}_p(a)$ формально выражает предикат $\varphi(c) = a$.

Приступаем к выводу формулы (II′) в предположении, что

(0) *Для формулы* $\exists c \mathrm{B}(c, a)$, *входящей в* Wid, *и некоторой формулы* $\mathrm{B}_0(a, b)$, *формально выражающей предикат* $\varphi(a) = b$, *где* $\varphi(a)$ — *примитивно-рекурсивная функция, осуществляющая пересчет номеров теорем системы* S,

$$\vdash \exists c \mathrm{B}(c, a) \sim \exists c \mathrm{B}_0(c, a),$$

и для термов $\mathrm{s}(a, b)$ и $\mathrm{e}(a)$, формально выражающих функции $s(a, b)$ и $e(a)$, справедливы перечисленные ниже утверждения I, II и III (см. Гильберт и Бернайс [1939, стр. 285—286]). (A_n всюду ниже обозначает формулу с номером n, ср. стр. 186).

I. *Если* $\mathrm{A}_k \vdash \mathrm{A}_l$, *то* $\vdash \exists c \mathrm{B}(c, k) \supset \exists c \mathrm{B}(c, l)$.

II. $\vdash \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{e}(b)) \supset \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{e}(\mathrm{s}(b, d)))$.

III. *Если терм* $\mathrm{f}(a)$ *формально выражает примитивно-рекурсивную функцию* $\varphi(a)$ *от одной переменной и* r — *номер равенства* $\mathrm{f}(a) = 0$, *то*

$$\vdash \mathrm{f}(b) = 0 \supset \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{s}(r, b)).$$

Возьмем, согласно (3), терм $\mathrm{b}(a, c)$, такой, что

(6) $$\vdash \mathrm{b}(a, c) = 0 \sim \mathrm{B}_0(a, c).$$

Терм $\mathrm{b}(a, c)$ формально выражает представляющую функцию предиката $\varphi(c) = a$. Поэтому $\mathrm{b}(a, \mathrm{s}(p, p))$ формально выражает одноместную примитивно-рекурсивную функцию, а именно, представляющую функцию предиката $\varphi(c) = s(p, p)$, где p — фиксированное число, определенное выше. Пусть r — номер формулы $\mathrm{b}(a, \mathrm{s}(p, p)) = 0$ и, значит, $e(r)$ — номер формулы $\neg \mathrm{b}(a, \mathrm{s}(p, p)) = 0$.

В силу III

$$\vdash \mathrm{b}(b, \mathrm{s}(p, p)) = 0 \supset \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{s}(r, b));$$

откуда, в силу (6),

(7) $$\vdash \mathrm{B}_0(b, \mathrm{s}(p, p)) = 0 \supset \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{s}(r, b)).$$

Имеет место $\forall c \neg \mathrm{B}_0(c, \mathrm{s}(p, p)) \vdash \neg \mathrm{B}_0(a, \mathrm{s}(p, p))$ ($\forall$-удал.), значит (см. (6)) $\mathrm{A}_{s(p,p)} \vdash \mathrm{A}_{e(r)}$; в силу I (и утверждений $\vdash \mathrm{s}(p, p) = q$ и $\vdash \mathrm{e}(r) = s$ для $q = s(p, p)$ и $s = e(r)$)

$$\vdash \exists c \quad (c, \mathrm{s}(p, p)) \supset \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{e}(r)),$$

и так как, согласно II и *66, $\vdash \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{e}(r)) \supset \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{e}(\mathrm{s}(r, b)))$, в силу *2,

(8) $$\vdash \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{s}(p, p)) \supset \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{e}(\mathrm{s}(r, b))).$$

Кроме того $\vdash \mathrm{B}_0(b, \mathrm{s}(p, p)) \supset \exists c \mathrm{B}_0(c, \mathrm{s}(p, p))$ (акс. 11), а значит, в силу (0) и теоремы 6,

(9) $$\vdash \mathrm{B}_0(b, \mathrm{s}(p, p)) \supset \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{s}(p, p)).$$

(9) и (8) дают, в силу *2,

(10) $$\vdash \mathrm{B}_0(b, \mathrm{s}(p, p)) \supset \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{e}(\mathrm{s}(r, b))).$$

(7) и (10), согласно тождественной пропозициональной формуле

$$(A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset B \& C)),$$

дают

$$\vdash B_0(b, s(p, p)) \supset \exists c B(c, s(r, b)) \& \exists c B(c, e(s(r, b)))$$

и, по контрапозиции (*12),

$$\vdash \neg(\exists c B(c, s(r, b)) \& \exists c B(c, e(s(r, b)))) \supset \neg B_0(b, s(p, p)).$$

Так как $\vdash \mathrm{Wid} \supset \neg(\exists c B(c, s(r, b)) \& \exists c B(c, e(s(r, b))))$ по $\forall$-удал. и $\supset$-введ., то в силу *2 $\vdash \mathrm{Wid} \supset \neg B_0(b, s(p, p))$, откуда, согласно правилу 9 (и *73), получаем $\vdash \mathrm{Wid} \supset \forall c \neg B_0(c, s(p, p))$, т. е. $\vdash \mathrm{Wid} \supset A_p(p)$.

Итак, мы доказали формулу (II′) и тем самым теорему 30 в перечисленных выше предположениях.

Взаимно-однозначный переход в какой-либо другой гёделевской нумерации формул системы S не меняет ситуации, по крайней мере при условии, что этот переход и обратный ему совершаются посредством обще-рекурсивных функций φ и χ соответственно, переводящих номер произвольной формулы F в старой нумерации в номер этой формулы в новой нумерации и обратно и таких, что имеются термы f и g, нумерически выражающие функции φ и χ соответственно, для которых $\vdash g(f(a)) = a$. В самом деле, утверждения (0) и I, II и III продолжают выполняться и для новой нумерации, если в качестве формул $B_0(c, a)$, $\exists c B(c, a)$ и термов $s(a, b)$ и $e(a)$ выбрать $B_0(c, g(a))$, $\exists c B(c, g(a))$, $f(s(g(a), b))$ и $f(e(g(a)))$ соответственно.

Покажем теперь, что для системы S наши предположения (0) и I, II и III выполняются при естественном выборе $B(x, y)$, $s(x, y)$ и $e(x)$.

В справедливости предположения (0) можно убедиться путем отображения в S доказательства следствия из теоремы XIV § 60, или же просто можно выбрать $B_0(x, y)$ в качестве $B(x, y)$ в Wid.

Остается доказать справедливость утверждений I, II и III для системы S при естественном выборе $B(x, y)$, $s(x, y)$ и $e(x)$. С этой целью мы обратимся теперь к рассмотрению обобщенной арифметики гл. X, для которой мы сперва опишем некоторую формализацию.

Мы будем считать, что в нашей обобщенной арифметике имеется только конечное число допустимых значений s (см. стр. 221—222), которые мы будем называть «допустимыми числами». В дальнейшем s без всякого индекса будет обозначать наибольшее допустимое число; остальные допустимые числа мы будем обозначать через s с различными индексами. Нас будет интересовать только система S, тогда $s = 2$ и числа 0 и 1 допустимы (эти три допустимых числа мы будем обозначать s_0, s_1 и s_2).

В гл. X были определены объекты обобщенной арифметики, названные там «вещами», причем в §§ 51 и 52 рассматривались предикаты и функции от этих вещей. Рассуждения о вещах и предикатах над ними велись в гл. X на содержательном языке, но мы далее будем записывать предложения обобщенной арифметики в виде формул, соединяя пропозициональными связками и т. д. элементарные предложения, выраженные предикатами, и пользуясь кванторами (в обычном смысле) по отношению к переменным вещам x, y, ... Выражения системы S, рассматриваемые как объекты обобщенной арифметики, мы будем продолжать записывать таким же образом, как в системе S (ср. стр. 223); этим устраняется возможность смешения знаков, употребляемых в системе S, с аналогичными знаками обобщенной арифметики, так как все предикаты последней всегда обозначаются готическими буквами и другими знаками, отсутствующими в системе S. Символы системы S, встречающиеся в формулах обобщенной арифметики, следует понимать в смысле системы S тогда и только тогда, когда они входят в состав *терма* обобщенной арифметики, не образуя этого терма.

(*Термы* обобщенной арифметики — это выражения, могущие служить аргументами ее предикатов; мы не вводим оператора ιw для обобщенной арифметики.)

Таким образом, обобщенную арифметику можно рассматривать как формальную систему, эту систему мы будем обозначать W. Перечислим постулаты этой системы, которыми нам придется пользоваться в дальнейшем (не заботясь об их независимости).

Прежде всего, к числу постулатов отнесем все формулы, полученные согласно постулатам исчисления предикатов с равенством (понимая под равенством знак «$\asymp$»). (Определение свободного и связанного вхождений переменной дается как в гл. IV.) Таким образом, в системе W можно пользоваться всеми правилами вывода теоремы 2 § 23; мы сохраняем за ними их прежние названия ($\exists$-введ. и т. п.).

Аксиомы для функции $\{x\}_i$ от одного аргумента x при каждом $i \leqslant s$:

Для любых допустимых чисел l и m и $i \leqslant s$, $k \leqslant r$ (r — число нулей, § 50), $l < i$, $i \leqslant m$:

$$\{0_k\}_i \asymp 0_k, \ \{(x_0, \ldots, x_l)\}_i \asymp (x_0, \ldots, x_l) \text{ и } \{(x_0, \ldots, x_m)\}_i \asymp x_i.$$

Упомянутые на стр. 222 «аксиомы Пеано» (l, m — допустимые числа):

$$(p_0) \qquad \neg\, 0_i \asymp 0_k \text{ для } i \neq k,$$
$$(p_1) \qquad \neg\, (x_0, \ldots, x_l) \asymp (x_0, \ldots, x_m) \quad \text{для } l \neq m,$$
$$(p_2) \qquad (x_0, \ldots, x_l) \asymp (y_0, \ldots, y_l) \supset x_0 \asymp y_0 \,\&\ldots\&\, x_l \asymp y_l,$$
$$(p_3) \qquad \neg\, (x_0, \ldots, x_l) \asymp 0_k \quad (k = 0, \ldots, r).$$

Схема аксиом индукции ($s_1, \ldots, s_t (= s)$ — все допустимые числа):

$$(I) \quad A(0_0) \,\&\ldots\&\, A(0_r) \,\&\, \forall x_0 \ldots \forall x_{s_1} (A(x_0) \,\&\ldots\&\, A(x_{s_1}) \supset A((x_0, \ldots, x_{s_1}))) \,\&\ldots$$
$$\ldots \&\, \forall x_0 \ldots \forall x_{s_t} (A(x_0) \,\&\ldots\&\, A((x_{s_t}) \supset A((x_0, \ldots, x_{s_t}))) \supset A(x).$$

Эта схема оправдывает употребление следующего правила индукции по x:

$$(\mathrm{i}) \qquad \frac{A(0_0), \ldots, A(0_r), \qquad A(x_0) \,\&\ldots\&\, A(x_{s_1}) \supset \supset A((x_0, \ldots, x_{s_1})), \ldots, A(x_0) \,\&\ldots\&\, A(x_{s_t}) \supset A((x_0, \ldots, x_{s_t}))}{A(x)}$$

Введем также схему аксиом для явного определения предикатов:

$$\mathfrak{P}(x_0, \ldots, x_n) \sim A(x_0, \ldots, x_n),$$

где в каждом применении этой схемы $A(x_0, \ldots, x_n)$ означает любую формулу системы W, не содержащую свободных переменных кроме $x_0, \ldots, x_n$, а $\mathfrak{P}$ — любой предикатный символ, не встречающийся в этой формуле и ранее использованных аксиомах.

С помощью этой схемы вводится предикат $\mathfrak{B}(x,y)$ (см. выше).

Чтобы не рассматривать во всех подробностях теорию рекурсивных определений, мы ограничимся следующими постулатами:

Для каждого из предикатов, определенных в Dn1 — Dn13a § 51, мы вводим соответствующую аксиому. Эта аксиома имеет вид эквивалентности, левую часть которой составляет символ рассматриваемого предиката с различными переменными, стоящими на аргументных местах; правая же часть является конъюнкцией косвенного пункта и дизъюнкции всех прямых пунктов индуктивного определения этого предиката, с теми же переменными на соответствующих аргументных местах; при этом прямые пункты получаются формализацией соответствующего словесного выражения каждого такого пункта в определениях Dn1 — Dn13a, а косвенный пункт является импликацией, в которой левая часть совпадает с левой частью рассматриваемой аксиомы, а правая часть является дизъюнкцией только что описанных прямых пунктов.

Для этих предикатов мы продолжаем пользоваться в W теми же символами, что и в § 51.

Индуктивное определение предиката $x \prec y$ (приведенное автором, на стр. 222) не приспособлено для такой формализации, так как y фигурирует в его прямых пунктах в виде $(x_0, \ldots, x_s)$.

Мы заменим его всеми аксиомами следующих четырех видов, где l — любое допустимое число и $i \leqslant l$:

$$x_i \prec (x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_l);\quad y \prec x_i \supset y \prec (x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_l);$$
$$\neg (y \prec 0_k)\ (k = 0, \ldots, r);\quad y \prec (x_0, \ldots, x_l) \supset y \asymp x_0 \vee y \prec x_0 \vee \ldots$$
$$\ldots \vee y \asymp x_l \vee y \prec x_l.$$

Постоянным термом мы будем называть терм, не содержащий переменных.

Для определения по рекурсии новых функций мы вводим схемы аксиом, аналогичные схемам (II)—(Vb) § 43 и $\#$F § 45, и будем обозначать их посредством (II)′ — (Vb)′ и $\#$F′ соответственно. Каждая из схем (II)′ — (IV)′ получается из соответствующей схемы § 43 заменой переменных $x_1, \ldots, x_n$ на $x_1, \ldots, x_n$, символа «$=$» на «$\asymp$» и q — на произвольный постоянный терм. Схема (Vb)′ является системой «равенств»

$$\begin{cases} \varphi(0_i,\ x_2, \ldots, x_n) \asymp \psi_i(x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 0, \ \ldots, r), \\ \varphi((y_0, \ldots, y_l),\ x_2, \ldots, x_n) \asymp \chi_l(y_0, \ldots, y_l,\ \varphi(y_0, x_2, \ldots, x_n), \ldots \\ \ldots, \varphi(y_l,\ x_2, \ldots, x_n),\ x_2, \ldots, x_n) \text{ для каждого допустимого } l \end{cases}$$

(χ_l зависит от $n + 2l + 1$ параметров).

Схема (Va)′ получается из (Vb)′ заменой $\psi_i(x_2, \ldots, x_n)$ на произвольный постоянный терм и опусканием «$, x_2, \ldots, x_n$».

Введем, наконец, еще одну схему определения функций, $\#$F′, служащую обобщением схемы (Va)′. Для простоты мы начнем с описания этой схемы, которым будем пользоваться и в дальнейшем, причем покажем, как это описание формализуется в W. Описание, о котором идет речь, родственно содержательному способу изложения § 38:

$$\begin{array}{l} \varphi((y_0, \ldots, y_l), \\ \quad x_1, \ldots, x_n) \end{array} \begin{cases} \asymp \psi_1(\varphi(y_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi(y_l,\ x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n), \\ \text{если } Q_1(\varphi(y_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi(y_l, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \asymp \psi_m(\varphi(y_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi(y_l, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n), \asymp \\ \text{если } Q_m(\varphi(y_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi(y_l, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n); \\ \asymp \psi_{m+1}(\varphi(y_0, x_1, \ldots, x_n)), \ldots, \varphi(y_l, x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n) \\ \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $Q_i(y_0, \ldots, y_l, x_1, \ldots, x_n)$ — формулы системы W, не содержащие символа φ, *причем все формулы вида* $\neg(Q_i(y_0, \ldots, y_l, x_1, \ldots, x_n) \& Q_j(y_0, \ldots, y_l, x_1, \ldots, x_n))$ $(i \neq j)$ *доказаны.*

Формально эта схема записывается в системе W в следующем виде (где мы для краткости опускаем аргументы $x_1, \ldots, x_n$, играющие роль параметров; правую часть обозначаем «$F_l\{x\}$»):

$$\begin{array}{ll} & \varphi(x) \asymp y \sim (\psi_1(\varphi(\{x\}_0), \ldots, \varphi(\{x\}_l)) \asymp y \,\&\, Q_1(\varphi(\{x\}_0), \ldots, \varphi(\{x\}_l))) \vee \ldots \\ \#\mathrm{F}'. & \ldots \vee (\psi_m(\varphi(\{x\}_0), \ldots, \varphi(\{x\}_l)) \asymp y \,\&\, Q_m(\varphi(\{x\}_0), \ldots, \varphi(\{x\}_l))) \vee \\ & \vee\ \psi_{m+1}(\varphi(\{x\}_0), \ldots, \varphi(\{x\}_l))\ y. \end{array}$$

Разрешая l пробегать $s_0, s_1, \ldots, s$, получаем схему $\#F'$. Формально, справа стоит дизъюнкция членов $\exists x_0 \ldots \exists x_l (x = \{x_0, \ldots, x_l\} \& F_l x)$.

Частным случаем этой схемы является такая схема:

$$\begin{cases} \varphi((a_1)) \asymp z_1, \ldots, \varphi((a_k)) \asymp z_k, & (a_1, \ldots, a_k \text{ фиксированные термы } W); \\ \varphi((x, y)) \asymp \phi(x, \varphi(y)), & \text{если } Q(x, y); \\ \varphi((x, y, z)) \asymp \chi(x, \varphi(y), \varphi(z)), & \text{если } R(x, y, z); \\ \varphi(y) \asymp y \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Эту запись следует понимать как описание схемы

$$\varphi(x) \asymp \begin{cases} z_1, \text{ если } x \asymp (a_1), \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_k, \text{ если } x \asymp (a_k), \\ \phi(x, \varphi(\{x\}_1)), \quad \text{если } \exists y \exists z (x \asymp (y, z) \& Q(y, z)), \\ \chi(x, \varphi(\{x\}_1), \varphi(\{x\}_2)), \text{ если } \exists y \exists z \exists w (x \asymp (y, z, w) \& R(y, z, w)), \\ x \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

О каждой из этих схем (II)—(Vb)′ и $\#F'$ мы будем говорить, что она *определяет* функцию, *обозначенную* через φ.

Греческие буквы φ, ϕ, χ (с индексами) в каждой из схем (II)′—(Vb)′ являются лишь именами (§ 50, стр. 224) функциональных символов из W. Чтобы получить аксиому по одной из этих схем, надо заменить каждое имя ϕ, χ (с индексами или без индексов) на функциональный символ функции, ранее определенный по одной из этих схем или имевшийся изначально, как $(x_0, \ldots, x_l)$ для допустимого l или $\{x\}_i$, а φ — на новый функциональный символ, отличный от всех ранее определенных и имевшихся изначально. Чтобы получить такой символ, нет надобности вводить в рассмотрение новый нуль обобщенной арифметики, можно воспользоваться методом получения переменных $a_|$, $a_{||}$, ... на стр. 223, используя, например, «′» вместо a (ср. также § 56, стр. 246). В качестве числа знаков «|» можно взять любое число, еще не использованное для этой цели, например гёделевский номер левой части рассматриваемой аксиомы при отображении согласно § 52.

Применяя схему $\#F'$, надо, кроме того, каждый раз предварительно убедиться в соблюдении условия, выделенного курсивом на стр. 465.

Этим мы заканчиваем описание системы W. Для обозначения доказуемости и выводимости в этой системе мы будем применять знак $\vdash_1$.

Заметим, что предикат $\mathfrak{N}(y)$ („быть цифрой“), определенный в Dn1, представляется формулой $\mathfrak{N}(y)$ нашей системы. Согласно примеру 13 § 74, это дает возможность ввести в W переменные нового рода (выбирая $\mathfrak{N}(w)$ в качестве формулы $M(w)$ указанного примера). Мы будем называть эти переменные цифровыми и обозначать их курсивом: a, b, c, ... (Это обозначение подсказано отображением в систему W содержательной арифметики натуральных чисел.)

В § 52 было определено отображение объектов обобщенной арифметики — вещей и предикатов и функций над ними — в содержательную арифметику натуральных чисел. Эту содержательную арифметику можно затем отобразить в формальную систему S, пользуясь таблицей на стр. 202 и наличием оператора ιw в S (см. пример 9, § 74). Полученное таким образом отображение вещей, предикатов и функций обобщенной арифметики в S мы затем продолжим до отображения W в S, естественным образом отображая в S логические операторы системы W. При этом отображении каждое применение одного из правил 2, 9 или 12 в системе W переходит в применение того же правила в системе S.

Каждой аксиоме W соответствует при этом доказуемая формула системы S, например, (p_2) при $l=2$ переходит в арифметическую теорему $2^{x_0}\cdot 3^{x_1}\cdot 5^{x_2}=2^{y_0}\cdot 3^{y_1}\cdot 5^{y_2}\supset x_0=y_0\,\&\,x_1=y_1\,\&\,x_2=y_2$, а (I) дает (для $r=13$ и 0, 1 и 2 в качестве всех допустимых чисел):

$$\mathrm{E}(x)\supset[\mathrm{A}(0_0)\,\&\ldots\&\,\mathrm{A}(0_{13})\,\&\,\forall y\,(\mathrm{E}(y)\,\&\,\mathrm{A}(y)\supset\mathrm{A}(2^y))\,\&$$
$$\&\,\forall y_0\forall y_1(\mathrm{E}(y_0)\,\&\,\mathrm{E}(y_1)\,\&\,\mathrm{A}(y_0)\,\&\,\mathrm{A}(y_1)\supset\mathrm{A}(2^{y_0}\cdot 3^{y_1}))\,\&$$
$$\&\,\forall y_0\forall y_1\forall y_2(\mathrm{E}(y_0)\,\&\,\mathrm{E}(y_1)\,\&\,\mathrm{E}(y_2)\,\&\,\mathrm{A}(y_0)\,\&\,\mathrm{A}(y_1)\,\&\,\mathrm{A}(y_2)\supset$$
$$\supset\mathrm{A}(2^{y_0}\cdot 3^{y_1}\cdot 5^{y_2})\supset\mathrm{A}(x)],$$

где формула $\mathrm{E}(x)$ выражает арифметический предикат, вполне соответствующий (см. § 52) предикату «быть вещью».

Для каждой функции, определенной в системе W (методом § 46 для схем $(\mathrm{V})'$ и $\#\mathrm{F}'$), можно доказать примитивную рекурсивность соответствующей арифметической функции (ср. § 52). Далее, каждая аксиома, определяющая функцию в W, перейдет в некоторую формулу системы S, причем функциональный символ, обозначенный в схеме буквой φ, перейдет в знак соответствующей арифметической функции; этот знак вводится в S, как описано в § 74 (см. теорему 42 и пример 9); выводимость полученной формулы в S следует из результатов примера 9 § 74.

Итак, каждая аксиома, определяющая в W функцию, перейдет в доказуемую формулу системы S.

Аналогичное заключение можно сделать об остальных аксиомах W.

Поэтому каждое доказательство системы W перейдет в доказательство соответствующей формулы системы S.

Поэтому каждый вывод формулы A системы W из формул $B_1, \ldots, B_k$ перейдет при этом в системе S в вывод соответствующей формулы A′ из соответствующих формул $B_1', \ldots, B_k'$.

Иногда мы будем, как в гл. X, обозначать переменные W прописными буквами.

Пусть $\mathfrak{B}_{z_1 \ldots z_k}(\mathrm{Y}, x)$ есть предикат: «Y есть вывод в системе S формулы x из формул $z_1, \ldots, z_k$». Определение последнего предиката получается из предыдущего, если в Dn 8 § 51 добавить прямой пункт 0.

0. $$\mathrm{D}\asymp z_1\vee\ldots\vee\mathrm{D}\asymp z_k.$$

При этом Dn 12 переходит в определение предиката, который мы будем обозначать $\mathfrak{Pf}_{z_1,\ldots,z_k}(\mathrm{Y})$, а Dn8 — в определение предиката, который мы будем обозначать $\mathfrak{A}_{z_1\ldots z_k}(0)$.

Этот модифицированный предикат $\mathfrak{Pf}_{z_1\ldots z_k}(\mathrm{Y})$, так же как и другой, который понадобится ниже для определения предиката $\mathfrak{B}_{z_1\ldots z_k}(\mathrm{Y}, x)$, могут быть определены по имеющимся в системе W схемам; действительно, их определение не требует рекурсий по двум переменным. Чтобы этого не проверять, можно считать, что они участвуют в определении системы W наравне с предикатами, определенными в Dn1 — Dn13a.

Заметим, что предикат $\mathfrak{B}_x(y, z)$ разрешим, т. е. для любых постоянных термов x, y, z $\vdash_1 \mathfrak{B}_x(y, z)$ или $\vdash_1 \neg\,\mathfrak{B}_x(y, z)$ (и притом доказуемая формула истинна; аналогично будет обстоять дело для тех разрешимых предикатов, которые нам встретятся ниже). Это доказывается так же, как разрешимость каждого примитивно-рекурсивного арифметического предиката (§§ 43—45 и 54).

Для доказательства утверждений I и II мы рассмотрим соответствующие утверждения I′ и II′ в системе W.

Утверждение I′ можно записать в W таким образом:

$$\exists Y \mathfrak{B}_x(Y, y) \vdash_1 \exists Z \mathfrak{B}(Z, x) \supset \exists Z \mathfrak{B}(Z, y).$$

Докажем более общее утверждение Ia′:

$$\exists Y \mathfrak{B}_{x_1 \ldots x_s}(Y, y) \vdash_1 \exists Z \mathfrak{B}(Z, x_1) \& \ldots \& \exists Z \mathfrak{B}(Z, x_s) \supset \exists Z \mathfrak{B}(Z, y).$$

Рассмотрим случай $s = 1$, указывая изменения для случая $s > 1$.

Допустим для $\exists$-удал. $-\mathfrak{B}_x(Y, y)$, $\mathfrak{B}(Z, x)$. Определим в системе W функцию φ при помощи следующей схемы:

$$\begin{cases} \varphi((x)) \asymp Z \\ \varphi((D, P)) \asymp (D, \varphi(P)), & \text{если } \mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(P) \& \mathfrak{C}(D, \{P\}_0), \\ \varphi((D, P, Q)) \asymp (D, \varphi(P), \varphi(Q)), & \text{если } \mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(P) \& \mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(Q)\ \mathfrak{C}(D, \{P\}_0, \{Q\}_0), \\ \varphi(y) \asymp y & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(Для $s > 1$ вместо $\varphi((x)) \asymp Z$ будет система $\varphi((x_1)) \asymp Z_1, \ldots, \varphi((x_s)) \asymp Z_s$.)

(11) $$\vdash \mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(Y) \supset \mathfrak{P}\mathfrak{f}(\varphi(Y)) \& \{Y\}_0 \asymp \{\varphi(Y)\}_0.$$

Путем индукции по x мы докажем (11). Для этого заметим, что (ср. определение $\#F'$ выше, а также (1) на стр. 229)

(12) $$\begin{aligned} \vdash_1 \mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(Y) \sim \exists D(Y \asymp (D) \& \mathfrak{A}_x(D)) \vee \exists D \exists P(Y \asymp (D, P) \& \mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(P) \& \\ \& \mathfrak{C}(D, \{P\}_0)) \vee \exists D \exists P \exists Q(Y \asymp (D, P, Q) \& \mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(P) \& \\ \& \mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(Q) \& \mathfrak{C}(D, \{P\}_0, \{Q\}_0)). \end{aligned}$$

Доказательство (11): Базис индукции: $Y \asymp 0_i$. $\vdash_1 \neg \mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(0_i)$ легко выводится из (p_3) и (12).

Шаг индукции: пусть $Y \asymp (D, P, Q)$ и $\mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(Y)$; из (12) и (p_1) заключаем, что для этого Y первые два дизъюнктивных члена правой части эквивалентности, стоящей в (12), опровержимы; поэтому верен третий член. Допустим для $\exists$-удал. $Y \asymp (D, P, Q) \& \mathfrak{C}(D, \{P\}_0, \{Q\}_0) \& \mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(P) \& \mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(Q)$; по индуктивному предположению для P и Q, $\mathfrak{P}\mathfrak{f}(\varphi(P))$, $\mathfrak{P}\mathfrak{f}(\varphi(Q))$ и $\{P\}_0 \asymp \{\varphi(P)\}_0$, $\{Q\}_0 \asymp \{\varphi(Q)\}_0$, откуда $\mathfrak{C}(D, \{\varphi(P)\}_0, \{\varphi(Q)\}_0)$ и для $Y \asymp (D, \varphi(P), \varphi(Q))$, т. е. для $\varphi(Y)$, получаем третий член той дизъюнкции, которая будет стоять справа в эквивалентности (12), если стереть индекс x при $\mathfrak{P}\mathfrak{f}$ — значит, верна и вся эта дизъюнкция — и в силу этой эквивалентности (которая, как и (12), доказуема в обобщенной арифметике) получаем $\mathfrak{P}\mathfrak{f}(\varphi(Y))$. Кроме того, $\{Y\}_0 \asymp \{\varphi(Y)\}_0 \asymp D$. Значит, $\mathfrak{P}\mathfrak{f}(\varphi(Y)) \& \{Y\}_0 \asymp \{\varphi(Y)\}_0$. Аналогично для $Y \asymp (D, P)$ и $Y \asymp (x)$; в последнем случае $\{Y\}_0 \asymp \{\varphi(Y)\}_0$ вытекает из $\mathfrak{B}(Z, x)$. Случай $\varphi(Y) \asymp Y$ тривиален. Теперь (11) получается при помощи $\exists$-удал., $\vee$-удал., $\supset$-введ. и применения схемы индукции.

$\mathfrak{B}_x(Y, y)$ дает $\mathfrak{P}\mathfrak{f}_x(Y)$; в силу (11), $\mathfrak{P}\mathfrak{f}(\varphi(Y))$ и так как $\{\varphi(Y)\}_0 \asymp \{Y\}_0 \asymp y$ (последнее в силу $\mathfrak{B}_x(Y, y)$), то $\mathfrak{B}(\varphi(Y), y)$ и, по $\exists$-введ., $\exists Z \mathfrak{B}(Z, y)$. Так как при этом переменные Y и Z исходных формул $\mathfrak{B}_x(Y, y)$ и $\mathfrak{B}(Z, x)$ не варьировались, то $\exists$-удал. законно (лемма 7b § 24). С помощью $\supset$-введ. в этих $\exists$-удал. получаем теперь I′.

Из утверждения I′ сразу получается I. Действительно, по условию утверждения 1, $\mathfrak{B}_{A_k}(Y, A_l)$ истинно для некоторого Y; в силу разрешимости $\mathfrak{B}_x(y, z)$, $\vdash_1 \mathfrak{B}_{A_k}(Y, A_l)$ для этого Y и далее, $\exists$-введ. дает $\vdash_1 \exists Y \mathfrak{B}_{A_k}(Y, A_l)$. Согласно I′, получаем $\vdash_1 \exists Z \mathfrak{B}(Z, A_k) \supset \exists Z \mathfrak{B}(Z, A_l)$. Перевод в систему S дает $\vdash \exists z B(z, k) \supset \exists z B(z, l)$, причем в качестве z можно взять c.

Утверждение II'. $\vdash_1 \exists X \mathfrak{B}(X, \mathfrak{e}(b)) \supset \exists X \mathfrak{B}(X, \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(b, d)))$. Действительно, пользуясь словесным рассмотрением обобщенной арифметики, как в гл. X, и рассматривая $\mathfrak{e}(b)$ и $\mathfrak{s}(\mathfrak{e}(b), d)$ как (неопределенные) формулы системы S, мы видим, что имеется вывод Y второй формулы из первой: $\mathfrak{e}(b) \overset{a}{\vdash} \mathfrak{s}(\mathfrak{e}(b), d)$. А именно, в качестве такого Y можно взять следующую вещь обобщенной арифметики:

$$(\mathfrak{s}(\mathfrak{e}(b), d), (\forall b \mathfrak{e}(b), (\neg a' = 0), (\neg a' = 0 \supset \forall b \mathfrak{e}(b), (\neg a' = 0 \supset \mathfrak{e}(b), (\mathfrak{e}(b)),$$
$$(\mathfrak{e}(b) \supset (\neg a' = 0 \supset \mathfrak{e}(b)))) (\forall b \mathfrak{e}(b) \supset \mathfrak{s}(\mathfrak{e}(b), d))).$$

(Эта вещь получена как представление в обобщенной арифметике вывода $\mathfrak{e}(b) \overset{a}{\vdash} \mathfrak{s}(\mathfrak{e}(b), d)$, состоящего в $\forall$-введ. и $\forall$-удал; $\forall$-удал. заменяем аксиомой 11, а $\forall$-введ. устраняем по методу § 23, стр. 92, выбирая в качестве C аксиому 15. Значит, $\mathfrak{B}_{\mathfrak{e}(b)}(Y, \mathfrak{s}(\mathfrak{e}(b), d))$ — истинная формула обобщенной арифметики и, в силу разрешимости предиката $\mathfrak{B}_x(y, z)$ в W, $\vdash_1 \mathfrak{B}_{\mathfrak{e}(b)}(Y, \mathfrak{s}(\mathfrak{e}(b), d))$. Далее, $\vdash_1 \mathfrak{s}(\mathfrak{e}(b), d) \asymp \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(b, d))$ (индукцией (I)). Отсюда $\vdash_1 \mathfrak{B}_{\mathfrak{e}(b)}(Y, \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(b, d)))$ — и $\exists$-введ. дает $\vdash_1 \exists Y \mathfrak{B}_{\mathfrak{e}(b)}(Y, \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(b, d))$ — и далее, в силу I',

$$\vdash_1 \exists X \mathfrak{B}(X, \mathfrak{e}(b)) \supset \exists X \mathfrak{B}(X, \mathfrak{e}(\mathfrak{s}(b, d))).$$

Перевод II' в систему S при надлежащем выборе переменных дает II.

III. Введем следующие предварительные определения: $\mathfrak{S}^{a \ldots y}_{a \ldots y}X$ есть функция в системе W, которая каждую вещь переводит в результат замены всех свободных вхождений переменной a на цифру $\boldsymbol{a}$, ..., всех свободных вхождений переменной y на цифру $\boldsymbol{y}$ (вместо переменных a, ..., y могут стоять и другие). Эта функция определяется для случая, когда X есть терм или формула системы S, итерированным применением функции $\mathfrak{S}(E, t, x)$, а для случая, когда X есть доказательство — с помощью условия $\mathfrak{S}(D, P, Q) \asymp (\mathfrak{S}D, \mathfrak{S}P, \mathfrak{S}Q)$ и аналогичных условий для $\mathfrak{S}(D, P)$ и $\mathfrak{S}(D)$ (здесь и ниже $\mathfrak{S}D$ является сокращенной записью для $\mathfrak{S}^{a \ldots y}_{a \ldots y}D$, причем во всех вхождениях $\mathfrak{S}$ в формулу это сокращение надлежит восстанавливать одинаковым образом). Если a, ..., y — первые переменные в алфавитном перечне переменных системы S, то мы будем писать $\mathfrak{s}(X, a, \ldots, y)$ вместо $\mathfrak{S}^{a \ldots y}_{a \ldots y}X$. $s(x, a, \ldots, y)$ — соответствующая $\mathfrak{s}(X, a, \ldots, y)$ арифметическая функция, а $s(x, a, \ldots, y)$ — терм, формально выражающий эту функцию в системе S и построенный методом § 52 (ср. (N_2) ниже).

$\mathfrak{B}_{z_1 \ldots z_k}(X, y)$ — предикат системы W, означающий, что X является выводом формулы y из формул $A_1, \ldots, A_8$, полученных подстановкой из аксиом 14—21 и формул $z_1, \ldots, z_k$, в котором правила 9 и 12 не применяются.

С помощью индукции (I) по (A, B)[1]) легко доказывается

$$\vdash_1 \mathfrak{S}(A \supset B) \asymp (\mathfrak{S}A \supset \mathfrak{S}B),$$

а также (индукцией по (D, E, F)) $\vdash_1 \mathfrak{C}(D, E, F) \supset \mathfrak{C}(\mathfrak{S}D, \mathfrak{S}E, \mathfrak{S}F)$, откуда затем (индукцией по (X, Y, Z)) мы получаем

(13) $$\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_Z(X, Y) \supset \hat{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{S}Z}(\mathfrak{S}X, \mathfrak{S}Y).$$

Кроме того, в силу $\vdash A_1, \ldots, \vdash A_8$ и (Ia'),

(14) $$\vdash_1 \exists X \hat{\mathfrak{B}}_Z(X, Y) \supset \exists X \mathfrak{B}_Z(X, Y).$$

[1]) Доказательством формулы P(A, B) индукцией по (A, B) мы называем доказательство формулы $P(\{x\}_0, \{x\}_1)$ индукцией по x; аналогично для P(A, B, C).

Для понимания дальнейшего полезно следующее замечание.

Пусть $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ — формула системы S; для любых чисел $x_1, \ldots, x_n$ выражение $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ означает формулу, получающуюся подстановкой цифр $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, соответствующих этим числам, вместо переменных $\mathrm{x}, \ldots, \mathrm{x}_n$ в формулу $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ (ср. § 41, стр. 176). Формула $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ служит термом в системе W; комбинируя способ записи такого рода термов W в виде формул из S с употреблением курсивных букв вместо цифровых переменных системы W, мы будем обозначать такой терм системы W с переменными цифрами посредством $\mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n)$ (и писать, например, $a=b$ для обозначения равенства вида $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ с переменными цифрами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$). Пусть $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ — арифметическая функция, значение которой при любых $x_1, \ldots, x_n$ равно гёделевскому номеру соответствующей формулы $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, а $\mathrm{p}(x_1, \ldots, x_n)$ — терм, формально выражающий эту функцию в системе S[1]). Тогда при отображении системы W в S терм $\mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n)$ перейдет в терм $\mathrm{p}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ системы S. Аналогичное замечание справедливо для термов S.

(N_1) Для любой формулы $\mathrm{A}(a, b)$ системы S индукцией по (a, b) легко доказывается $\vdash_1 \mathfrak{N}(\mathrm{a}) \,\&\, \mathfrak{N}(\mathrm{b}) \supset \mathrm{A}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \asymp \mathfrak{s}(\mathrm{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \mathrm{a}, \mathrm{b})$ или, короче,

$$\vdash_1 \mathrm{A}(a, b) \asymp \mathfrak{s}(\mathrm{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), a, b). \tag{15}$$

(Примеры:

$$\vdash_1 a=b \asymp \mathfrak{s}(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}, a, b), \tag{16}$$

$$\vdash_1 a'=b \asymp \mathfrak{s}(\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{b}, a, b).) \tag{17}$$

Пусть $\tau(x, y)$ — функция, значение которой равно гёделевскому номеру формулы $\mathrm{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, определенному методом § 52, $\mathrm{t}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ — терм, формально выражающий эту функцию в S. Тогда при отображении W в S утверждение (15) перейдет в $\vdash \mathrm{t}(a, b)=\mathrm{s}(\boldsymbol{r}, a, b)$, где r номер формулы $\mathrm{A}(a, b)$. Аналогичное утверждение верно для любого числа переменных $a, b, c, \ldots$. Пример:

$$\vdash_1 a=b' \asymp \mathfrak{s}(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}', a, b, c). \tag{18}$$

(N_2) Пусть $\pi(x, y)$ — функция, значение которой равно гёделевскому номеру формулы $\mathrm{x}=\mathrm{y}$, полученному методом § 52, т. е. $\pi(x, y)= =2^{15}\cdot 3^{Nu(x)}\cdot 5^{Nu(y)}$, а r — номер равенства $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{b}$. Тогда утверждение приведенного выше примера (17) при отображении W в S перейдет в $\vdash \mathrm{p}(a', b)= =\mathrm{s}(\boldsymbol{r}, a, b)$, где $\mathrm{p}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ — терм, формально выражающий $\pi(x, y)$ в S.

(N_3) Пусть X — формула системы S. Непосредственно из определения функций $\mathfrak{s}(\mathrm{X}, a, b, \ldots, y)$ получаем:

$$\vdash_1 \mathfrak{s}(\mathrm{X}, a, b, \ldots, x, 0) \asymp \mathfrak{s}(\mathfrak{S}_0^y \mathrm{X}, a, b, \ldots, x).$$

Перевод в систему S дает, если r есть номер формулы X, а q — номер $\mathfrak{S}_0^y\mathrm{X}$ в гёделевской нумерации: $\vdash \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, a, \ldots, x, 0)=\mathrm{s}(\boldsymbol{q}, a, \ldots, x)$.

Приступим теперь непосредственно к доказательству утверждения III для формулы $\exists c \mathrm{B}(c, b)$. Мы докажем более общее утверждение.

(A) Если $\mathrm{f}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n)$ формально выражает примитивно-рекурсивную функцию $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ и r — номер равенства $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)=\mathrm{y}$, где $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{y}$ — первые $n+1$ переменные в перечне $a, b, c, \ldots$, то

$$\vdash \mathrm{f}(\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n)=\mathrm{b} \supset \exists \mathrm{c} \mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, \mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n, \mathrm{b})).$$

(Применяя (A) к функции $\varphi(a)$ утверждения III ($n=1$) и подставляя 0 вместо b, мы с помощью (N_3) получим утверждение III.)

[1]) И построенный методом § 52. Аналогично для $\mathrm{t}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ в (N_1), $\mathrm{p}(a, b)$ в (19), f_0 и h_0 на стр. 472.

Мы будем доказывать (А) индукцией по длине k примитивно-рекурсивного описания функции $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$. При этом, чтобы получить утверждение III для каждого конкретного терма $\mathrm{f}(\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_n)$, выражающего примитивно-рекурсивную функцию, в частности, для терма $\mathrm{b}(b, \mathrm{s}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})) = 0$, стр. 462, достаточно провести доказательство для базиса и для шага индукции, а саму индукцию можно при этом заменить конечным числом $\supset$-удал.

Базис. $k = 1$. Пусть $\pi(a, b)$ — номер равенства $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$; легко видеть, что $\pi(a, b)$ — примитивно-рекурсивная функция. Докажем

(19) $$\vdash a = b \supset \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{p}(a, b))$$

(p — формально выражает π). Индукция по b: $b = 0$. Индукция по a: $\mathfrak{B}(\mathrm{X}, \pi(0, 0))$ истинно для некоторого X, откуда $(Ex) \vdash \mathrm{B}(\boldsymbol{x}, \mathrm{p}(0, 0))$ и по $\exists$-введ. $\vdash \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(0, 0))$, и по $\supset$-введ. $\vdash 0 = 0 \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(0, 0))$. Индукционный шаг: $\vdash a' = 0 \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(a', 0))$, так как $\vdash \neg a' = 0$. Индукционный шаг индукции по b: допустим $a = b \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(a, b))$ и еще $a = b'$. Тогда $\neg a = 0$ и, по *137, $\exists c (a = c')$; допустим, для $\exists$-удал., $a = c'$; тогда $c' = b'$, и по аксиоме 14 $c = b$; по индуктивному предположению, $\exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(c, b))$. Далее, $c = b \vdash c' = b'$ (аксиома 17), отсюда, для некоторого Y, $\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{c=b}(\mathrm{Y}, c' = b')$ и для $\mathrm{Y}_1 \asymp \mathfrak{S}^{a, b, c}_{a, b, c}\mathrm{Y}$ в силу (13) $\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{z}(c=b, a, b, c)}(\mathrm{Y}_1, \mathfrak{z}(c' = b', a, b, c))$ и далее в силу (16) $\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{c=b}(\mathrm{Y}_1, c' = b')$; $\exists$-введ. и (14) дают $\vdash_1 \exists \mathrm{Y} \mathfrak{B}_{c=b}(\mathrm{Y}, c' = b')$; по I′ получаем $\vdash_1 \exists \mathrm{Y} \mathfrak{B}(\mathrm{Y}, c = b) \supset \exists \mathrm{Y} \mathfrak{B}(\mathrm{Y}, c' = b')$, а, значит, в арифметике натуральных чисел

$$\vdash \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(c, b)) \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(c', b'));$$

$a = c'$ дает

$$\vdash \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(c, b)) \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(a, b')).$$

Значит, $\exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(a, b'))$; по $\supset$-введ., $a = b' \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{p}(a, b'))$.

Случай (I.) $\varphi(x) = x'$. Надо доказать $\vdash b' = c \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, b, c))$, где r — номер равенства $a' = b$. Но это следует из (19), так как согласно $(\mathrm{N}_2) \vdash \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, b, c) = \mathrm{p}(b', c)$.

Случай (II.) $\varphi(x) = q$. Согласно (19), надо лишь доказать $\vdash \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}) = \mathrm{p}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{a})$, где r — номер равенства $q = a$. Применяем (15) с $\boldsymbol{q} = a$ в качестве $\mathrm{A}(a, b)$.

Случай (III.) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Утверждение доказывается как предыдущее с помощью (19) и (16).

Индукционный шаг. Случай (Vb). $n = 2$. Пусть $\varphi(0, x_2) = \psi(x_2)$, $\varphi(y', x_2) = \chi(y, \varphi(y, x_2), x_2)$.

По индуктивному предположению

$$\vdash \mathrm{g}(b) = c \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{p}, b, c)),$$

$$\vdash \mathrm{h}(e, b, d) = c \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{q}, e, b, d, c)),$$

где p и q — номера формул $\mathrm{g}(a) = b$ и $\mathrm{h}(a, b, c) = d$ соответственно, $\mathrm{g}(a)$ и $\mathrm{h}(a, b, c)$ формально выражают $\psi(a)$ и $\chi(a, b, c)$ соответственно. В силу примера 9 § 74, *137 и аксиомы 15,

(20) $$\vdash \mathrm{f}(a, b) = c \sim (a = 0 \,\&\, \mathrm{g}(b) = c) \vee \exists e (a = e' \,\&\, \mathrm{h}(e, \mathrm{f}(e, b), b) = c).$$

Надо доказать

(21) $$\vdash \mathrm{f}(a, b) = c \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, a, b, c)),$$

где r — номер равенства $\mathrm{f}(a, b) = c$.

Допустим $\mathrm{f}(a, b) = c$ и докажем $\exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, a, b, c))$ с **фиксированными** a, b и c. Воспользуемся индукцией по a.

Базис $a = 0$. Предоставляем читателю. Индукционный шаг. В силу (20), допущение дает $\exists e (a = e' \,\&\, \mathrm{h}(e, \mathrm{f}(e, b), b) = c)$. Допустим, для $\exists$-удал.,

$a = e' \,\&\, \mathrm{h}(e, \mathrm{f}(e, b), b) = c$. Это дает (&-удал., *100, &- и $\exists$-введ.): $\exists \mathrm{y}(\mathrm{f}(e, b) = \mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{h}(e, \mathrm{y}, b) = c)$. Допустим, для $\exists$-удал., $\mathrm{f}(e, b) = \mathrm{y} \,\&\, \mathrm{h}(e, \mathrm{y}, b) = c$ и применим &-удал. Применяя индуктивные предположения для e и $\mathrm{h}(a, b, c)$, имеем

$$\vdash \mathrm{f}(e, b) = \mathrm{y} \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, e, b, \mathrm{y})),$$

$$\vdash \mathrm{h}(e, \mathrm{y}, b) = c \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{q}, e, \mathrm{y}, b, c))$$

и

$$\vdash a = e' \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{t}, e, a)),$$

где t — номер равенства $a' = b$ (см. случай базиса и *101). Следовательно:

(22) $\exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{t}, e, a))$, $\exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{q}, e, \mathrm{y}, b, c)$ и $\exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, e, b, \mathrm{y}))$.

Кроме того, с помощью теоремы 24(а) § 38, &- и $\vee$-введ., *101 и (20) получаем $e' = a$, $\mathrm{h}(e, y, b) = c$, $\mathrm{f}(e, b) = y \vdash \mathrm{f}(a, b) = c$ без применения правил 9 и 12, откуда в обобщенной арифметике

$$\hat{\mathfrak{B}}_{e' = a,\ \mathrm{h}(e, y, b) = c,\ \mathrm{f}(e, b) = y}(\mathrm{Y}, \mathrm{f}(a, b) = c)$$

для некоторого Y. Ввиду разрешимости $\mathfrak{B}_{\mathrm{x}}(\mathrm{y}, \mathrm{z})$,

$$\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{e' = a,\ \mathrm{h}(e, y, b) = c,\ \mathrm{f}(e, b) = y}(\mathrm{Y}, \mathrm{f}(a, b) = c);$$

откуда, в силу (13),

(23) $$\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{e' = a,\ \mathrm{h}(e, y, b) = c,\ \mathrm{f}(e, b) = y}\left(\mathfrak{S}^{abcey}_{abcey}\mathrm{Y}, \mathrm{f}(a, b) = c\right);$$

(23), $\exists$-введ. и (14) дают:

(24) $$\vdash_1 \exists \mathrm{Y} \mathfrak{B}_{e' = a,\ \mathrm{h}(e, y, b) = c,\ \mathrm{f}(e, b) = y}(\mathrm{Y}, \mathrm{f}(a, b) = c).$$

Ia' для $s = 3$ дает в применении к (24):

(25) $$\vdash_1 \exists \mathrm{Z} \mathfrak{B}(\mathrm{Z}, e = a') \,\&\, \exists \mathrm{Z} \mathfrak{B}(\mathrm{Z}, \mathrm{h}(e, y, b) = c) \,\&\, \exists \mathrm{Z} \mathfrak{B}(\mathrm{Z}, \mathrm{f}(e, b) = y) \supset \supset \exists \mathrm{Z} \mathfrak{B}(\mathrm{Z}, \mathrm{f}(a, b) = c).$$

Пусть $\varphi(a, b, c)$ — примитивно-рекурсивная функция, значение которой при a, b, c равно номеру равенства $\mathrm{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}$, $\chi(a, b, c, d)$ — аналогичная функция для $\mathrm{h}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{d}$; пусть f_0 и h_0 формально выражают φ и χ соответственно; (см. сноску на стр. 470) r — номер равенства $\mathrm{f}(a, b) = c$. Замечая, что $\vdash \mathrm{f}_0(a, b, c) = \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, a, b, c)$ (см. (N_1) выше) и аналогично для h_0, получаем из (25) путем перевода в систему S:

$$\vdash \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{t}, e, a)) \,\&\, \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{q}, e, y, b, c)) \,\&\, \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, e, b, y)) \supset \supset \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, a, b, c)).$$

Ввиду (22), $\exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{s}(\boldsymbol{r}, a, b, c))$.

Этим заканчивается доказательство теоремы 30 для указанного выше выбора формулы Consis. Покажем, что она переносится на случай другого выбора этой формулы. Пусть Consis означает формулу $\neg \exists c \mathrm{B}(c, \boldsymbol{r})$, где r — номер формулы $1 = 0$ (ср. § 42). Докажем $\vdash$ Wid $\sim$ Consis. $1 = 0 \vdash \mathrm{A}_{e(r)}$; в силу *1 и утверждения I,

$$\vdash \exists c \mathrm{B}(c, \boldsymbol{r}) \supset \exists c \mathrm{B}(c, \boldsymbol{r}) \text{ и } \vdash \exists c \mathrm{B}(c, \boldsymbol{r}) \supset \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{e}(\boldsymbol{r})),$$

откуда $\vdash \exists c \mathrm{B}(c, \boldsymbol{r}) \supset \exists c \mathrm{B}(c, \boldsymbol{r}) \,\&\, \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{e}(\boldsymbol{r}))$, и по $\exists$-введ. и *2

(26) $$\vdash \exists c \mathrm{B}(c, \boldsymbol{r}) \supset \exists a (\exists c \mathrm{B}(c, a) \,\&\, \exists c \mathrm{B}(c, \mathrm{e}(a))),$$

откуда в силу *12 и *86 $\vdash$ Wid $\supset$ Consis. С другой стороны, в исчислении высказываний A, $\neg$A $\vdash 1 = 0$ (§ 23); отсюда в обобщенной арифметике $\hat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{A}, \neg \mathrm{A}}(\mathrm{Z}, 1 = 0)$ для некоторого Z.

Пусть $\mathfrak{s}(\mathrm{P}, \mathrm{y})$ — функция системы W, которая переводит доказательство P исчисления высказываний в результат замены в нем буквы A всюду на формулу y.

Предоставим читателю в обобщенной арифметике построить эту функцию и убедиться в том, что $\hat{\mathfrak{B}}_{y,\neg y}(\mathfrak{s}(Z, y), 1=0)$ — откуда, в силу разрешимости предиката $\hat{\mathfrak{B}}_{x,y}(Z, w)$ и (ср. замечание о $\mathfrak{B}_x(y, z)$ выше)

$\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{y,\neg y}(\mathfrak{s}(Z, y), 1=0)$ и, далее, ($\exists$-введ. и 14)) $\vdash_1 \exists Z\mathfrak{B}_{y,\neg y}(Z, 1=0)$.

Далее, Ia′ для $s=2$ дает $\vdash_1 \exists Z\mathfrak{B}(Z, y) \& \exists Z\mathfrak{B}(Z, \neg y) \supset \exists Z\mathfrak{B}(Z, 1=0)$. Отображение в систему S дает $\vdash \exists c\mathrm{B}(c, a) \& \exists c\mathrm{B}(c, \mathrm{e}(a)) \supset \exists c\mathrm{B}(c, r)$. Правило 12 дает

$$(27) \qquad \vdash \exists a(\exists c\mathrm{B}(c, a) \& \exists c\mathrm{B}(c, \mathrm{e}(a))) \supset \exists c\mathrm{B}(c, r).$$

(26), (27), *16 и *30 дают $\vdash \neg\exists a(\exists c\mathrm{B}(c, a) \& \exists c\mathrm{B}(c, \mathrm{e}(a))) \sim \mathrm{Consis}$, т. е. (см. *86) $\vdash \mathrm{Wid} \sim \mathrm{Consis}$.

Замечая, что если $\vdash \neg \mathrm{A}_k$, то $\mathrm{A}_k \vdash 1=0$ и $1=0 \vdash \mathrm{A}_k$, т. е. $\mathrm{A}_k \vdash \mathrm{A}_r$ и $\mathrm{A}_r \vdash \mathrm{A}_k$, мы, в силу I и *16, получаем $\vdash \exists c\mathrm{B}(c, k) \sim \exists c\mathrm{B}(c, r)$ и, в силу *30, $\vdash \neg\exists c\mathrm{B}(c, k) \sim \mathrm{Consis}$. Поэтому формулу $\neg\exists c\mathrm{B}(c, k)$ также можно взять в качестве Consis в теореме 30.

Заметим еще, что в качестве Consis можно взять и формулу Con: $\exists b[\mathrm{F}(b) \& \neg\exists c\mathrm{B}(c, b)]$. ($\mathrm{F}(x)$ есть образ в S формулы $\mathfrak{F}(x)$ из W.) Для доказательства достаточно установить $\vdash \mathrm{Con} \supset \mathrm{Consis}$; по правилу 12, достаточно показать

$$\vdash \mathrm{F}(b) \& \neg\exists c\mathrm{B}(c, b) \supset \mathrm{Consis}.$$

В системе W $\hat{\mathfrak{B}}_{1=0}(Z, \mathrm{A})$ для некоторого Z и, далее, $\hat{\mathfrak{B}}_{1=0}(\mathfrak{s}(Z, y), y)$, откуда $\vdash_1 \hat{\mathfrak{B}}_{1=0}(\mathfrak{s}(Z, y), y)$, откуда, по $\exists$-введ. и (14), $\vdash_1 \exists Z\mathfrak{B}_{1=0}(Z, y)$ и, согласно I′,

$$\vdash_1 \exists Z\mathfrak{B}(Z, 1=0) \supset \exists Z\mathfrak{B}(Z, y)$$

и по $\supset$-введ. $\vdash_1 \mathfrak{F}(y) \supset [\exists Z\mathfrak{B}(Z, 1=0) \supset \exists Z\mathfrak{B}(Z, y)]$. Отображая в систему S, получаем $\vdash \mathrm{F}(b) \supset \exists c[\mathrm{B}(c, r) \supset \exists c\mathrm{B}(c, b)]$, и по *12 и *2 — $\vdash \mathrm{F}(b) \supset$ $\supset [\neg\exists c\mathrm{B}(c, b) \supset \neg\exists c\mathrm{B}(c, r)]$, по *4 — $\vdash \mathrm{F}(b) \& \neg\exists c\mathrm{B}(c, b) \supset \neg\exists c\mathrm{B}(c, r)$, то есть $\vdash \mathrm{F}(b) \& \neg\exists c\mathrm{B}(c, b) \supset \mathrm{Consis}$, что и требовалось доказать.

Однако следует заметить, что утверждение второй теоремы Гёделя может утратить силу, если в определении формулы Consis вместо $\mathrm{B}(a, b)$ воспользоваться другой формулой, нумерически выражающей предикат $B(a, b)$. Например, легко проверить, что формула $\mathrm{B}(a, b) \& \neg\mathrm{B}(a, r)$ тоже нумерически выражает $B(a, b)$ (если система S непротиворечива, то второй член этой конъюнкции при подстановке любой цифры вместо a превращается в доказуемую формулу; если же система S противоречива, то согласно определению § 41 (стр. 176), любая ее формула нумерически выражает любой предикат с тем же или большим числом переменных). (Если нам ничего неизвестно о непротиворечивости системы S, то приведенное рассуждение опирается на метаматематическое применение tertium non datur.) Между тем, $\vdash \forall a\neg(\mathrm{B}(a, r) \& \neg\mathrm{B}(a, r))$ (*50 и $\forall$-введ.). Эта формула выражает недоказуемость формулы $1=0$. Этот пример, иллюстрирующий различие между первой и второй теоремами Гёделя, показывает также, что существуют различные, не эквивалентные друг другу, формулы $\mathrm{B}_0(a, b)$ и $\mathrm{B}_1(a, b)$, нумерически выражающие один и тот же предикат (в чем можно убедиться и проще: формула $\neg\mathrm{B}(a, r)$ нумерически выражает тот же предикат, что и $a=a$). Аналогичное обстоятельство имеет место для представляющих функций этих предикатов.

Таким образом, в отличие от первой теоремы Гёделя, для справедливости которой достаточно трех условий: непротиворечивости системы, наличия в ней системы гл. IV в качестве подсистемы (ср. § 76) и рекурсивной перечислимости[1]) множества номеров доказуемых формул, для справедливости второй теоремы Гёделя существенно соблюдение дальнейших условий (0), I, II и III. *Если эти условия не выполнены, то формула, выражающая непротиворечивость системы, может оказаться доказуемой в этой системе.*

Далее буквы A, B и C служат для обозначения формальных систем, содержащих систему гл. IV и имеющих рекурсивно-перечислимое множество номеров теорем; кроме того, будем считать, B и C связаны условиями, аналогичными (0) и I, II и III, где формула $\exists c\mathrm{B}(c, a)$ берется из B, а функции $e(x)$ и φ и символ $\vdash$ относятся к C. Допустим, что в B доказуема непротиворечивость C (в виде Wid, Consis или Con выше, но построенная с помощью формулы $\exists c\mathrm{B}(c, a)$); допустим еще, что B непротиворечива. Тогда непротиворечива и C, потому что если формула $1=0$ с номером r была бы доказуема в C, то для некоторого k было бы $\varphi(k)=r$ и в B было бы $\vdash \mathrm{B}_0(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r})$ и $\vdash \exists c\mathrm{B}(c, \boldsymbol{r})$, вместе с $\vdash$ Consis это давало бы противоречие в B.

Допустим теперь, что A — формальная система с перечисленными свойствами, которая находится с B в том же отношении, что и B и C выше. Тогда предыдущее рассуждение формализуемо в A, и эта формализация приводит к результату, что *если в A доказуема непротиворечивость B, а в B доказуема непротиворечивость C, то в A доказуема непротиворечивость C.*

В силу сказанного, *если непротиворечивость каждой из двух систем B и C, находящихся в рассмотренных выше отношениях, доказуема в другой из этих систем, то обе системы противоречивы.*

Пусть ω-Con — формула, выражающая ω-непротиворечивость данной системы S (ср. § 60, стр. 270).

Допустим, что S ω-непротиворечива; тогда S непротиворечива и из вида $\forall x \neg \mathrm{B}(x, \boldsymbol{r})$ формулы Consis и ω-непротиворечивости S вытекает, что система S_1, полученная добавлением к S новой аксиомы Consis, непротиворечива. Пусть Consis_1 выражает непротиворечивость S_1 в арифметике. Формализация предыдущего рассуждения дает тогда $\vdash \omega\text{-Con} \supset \mathrm{Consis}_1$ (в арифметике — и подавно в S_1). Допустим, что в S $\vdash \mathrm{Consis} \supset \omega\text{-Con}$; тогда эта формула доказуема в S_1, и в S_1 $\vdash \mathrm{Consis} \supset \mathrm{Consis}_1$. Так как Consis есть аксиома S_1, то в $S_1 \vdash \mathrm{Consis}_1$. С другой стороны выполнение условий теоремы 30 для S влечет их выполнение для S_1 (так как из функции φ легко получить функцию, осуществляющую пересчет номеров теорем S вида $\mathrm{Consis} \supset \mathrm{A}$, соответствующих теоремам A системы S_1; кроме того, можно считать, что формула $\exists c\mathrm{B}(c, a)$ из Consis_1 построена с помощью $\exists c\mathrm{B}(c, a)$ из S и $\mathrm{Consis} \supset \mathrm{A}$). Отсюда следует, что *если система S удовлетворяет условиям теоремы* 30 *и ω-непротиворечива, то формула* $\mathrm{Consis} \supset \omega\text{-Con}$ *недоказуема в S.*

ДОБАВЛЕНИЕ II

ВОСПОЛНЕНИЕ ПРОБЕЛА В §§ 49 и 74

Проведем доказательства утверждений (α) и (β) замечания 1 § 49. Этим будет восполнен пробел в § 74 (стр. 368). (α) С помощью *180 b, $\vdash \mathrm{B}(\mathrm{w}, \mathrm{w}, 0, \mathrm{w})$; дважды $\exists$-введ. (β) доказывается гораздо сложнее; мы проведем доказательство, следуя Гильберту и Бернайсу [1934] (см. § 49, стр. 220 и § 74 стр. 368). Для простоты мы будем искать доказательство формулы из (β) в системе S_1, которая получается добавлением к системе S гл. IV следу-

[1]) Ср. Мостовский [1947*].

ющих правил образования термов и аксиом: *если в системе* S_1 *доказуема формула* $\exists! \mathrm{wF}(\mathrm{w})$ *этой системы и* $\mathrm{F}(\mathrm{z})$ — *формула, конгруэнтная* $\mathrm{F}(\mathrm{w})$, *то* $\iota\mathrm{wF}(\mathrm{w})$ — *терм этой системы и формулы*: 1) $\mathrm{F}(\iota\mathrm{wF}(\mathrm{w}))$ *и* 2) $\iota\mathrm{wF}(\mathrm{w}) = \iota\mathrm{zF}(\mathrm{z})$ — *аксиомы*. Аксиомы 2) позволяют осуществить переименования связанных переменных w, чем устраняются трудности, связанные с подстановкой вместо свободных переменных, входящих в эти новые термы. Теорема 42 позволяет устранить термы этого рода из доказательства всякого предложения, не содержащего символа ι.

В системе S_1 рассмотрим, следуя Гильберту и Бернайсу[1]), явное определение.

$$\mu\mathrm{yF}(\mathrm{y}) = \iota\mathrm{y}\,[(\mathrm{F}(\mathrm{y})\,\&\,\forall\mathrm{z}(\mathrm{z} < \mathrm{y} \supset \neg\,\mathrm{F}(\mathrm{z}))) \vee (\neg\,\exists\mathrm{zF}(\mathrm{z})\,\&\,\mathrm{y} = 0)]$$

(приемлемое интуиционистски в случае, когда верны утверждения: (1) $\vdash \mathrm{F}(\mathrm{x}) \vee \neg\,\mathrm{F}(\mathrm{x})$ и (2) $\vdash \exists\mathrm{xF}(\mathrm{x}) \vee \neg\,\exists\mathrm{xF}(\mathrm{x})$; см. *149a и *174b; если для некоторого терма t (3) $\vdash \exists\mathrm{xF}(\mathrm{x}) \supset \exists\mathrm{x}\,[\mathrm{x} < \mathrm{t}\,\&\,\mathrm{F}(\mathrm{x})]$, то, в силу *150, второе условие следует из первого, так что достаточно $\vdash \mathrm{F}(\mathrm{x}) \vee \neg\,\mathrm{F}(\mathrm{x})$ и (3). Заметим, что при (4) $\vdash \mathrm{F}(\mathrm{s})$, (3) имеет место для $\mathrm{t} = \mathrm{s}'$).

Терм $\mu\mathrm{yF}(\mathrm{y})$ (в который, как и в $\iota\mathrm{yF}(\mathrm{y})$, могут входить не указанные явно свободные переменные) выражает оператор $\varepsilon\mathrm{yF}(\mathrm{y})$ (см. § 62, стр. 283 и пример 8 § 74). Легко доказываются следующие формулы (μ_1) — (μ_3) (ср. Гильберт и Бернайс [1934, стр. 396]):

(μ_1) $\mathrm{F}(\mathrm{a}) \supset \mathrm{F}(\mu\mathrm{yF}(\mathrm{y}))$,

(μ_2) $\mathrm{F}(\mathrm{a}) \supset \mu\mathrm{yF}(\mathrm{y}) \leqslant \mathrm{a}$, (*13 и *139, *61a)

(μ_3) $\neg\,\exists\mathrm{yF}(\mathrm{y}) \supset \mu\mathrm{yF}(\mathrm{y}) = 0$,

а также (μ_0): $\mu\mathrm{yF}(\mathrm{y}) = \mu\mathrm{zF}(\mathrm{z})$ для всякой формулы $\mathrm{F}(\mathrm{z})$, конгруэнтной $\mathrm{F}(\mathrm{y})$. (Можно, наоборот, ввести сразу термы $\mu\mathrm{yF}(\mathrm{y})$ с аксиомами (μ_0) — (μ_3); терм $\iota\mathrm{yF}(\mathrm{y})$ становится тогда ненужным, так как, если его ввести, то в случае $\vdash \exists!\mathrm{yF}(\mathrm{y})$ будет $\vdash \iota\mathrm{yF}(\mathrm{y}) = \mu\mathrm{yF}(\mathrm{y})$ (Гильберт и Бернайс [1934, стр. 400]); введение $\mu\mathrm{yF}(\mathrm{y})$ имеет то преимущество, что не связано ни с какими условиями для формулы $\mathrm{F}(\mathrm{y})$).

Введем теперь следующие определения. Пусть $\mathrm{t}(\mathrm{x})$ — любой терм, а $\mathrm{L}(\mathrm{y}, \mathrm{w})$ — формула

$$\exists\mathrm{c}\exists\mathrm{d}\,\{\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, 0, 1)\,\&\,\forall\mathrm{i}\,[\mathrm{i} < \mathrm{y} \supset \exists\mathrm{u}\exists\mathrm{v}\,[\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}', \mathrm{u})\,\&\,\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{i}, \mathrm{v})\,\&\,\&\,\mathrm{v}\cdot\mathrm{T}(\mathrm{i}) = \mathrm{u}]]\,\&\,\mathrm{B}(\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{y}, \mathrm{w})\}.$$

В силу *180c, $\vdash \exists!\mathrm{wL}(\mathrm{y}, \mathrm{w})$. Из доказательства теоремы 27 видно, что если формула $\mathrm{t}(\mathrm{x}) = \mathrm{z}$ выражает предикат $t(x) = z$, то формула $\mathrm{L}(\mathrm{y}, \mathrm{w})$ выражает предикат $\prod\limits_{x<y} t(x) = w$. Обозначим через $\prod\limits_{\mathrm{x}<\mathrm{s}} \mathrm{t}(\mathrm{x})$ терм $\iota\mathrm{wL}(\mathrm{s}, \mathrm{w})$. Дальнейшие обозначения: $\rho(\mathrm{s}, \mathrm{t})$ для $\iota\mathrm{xR}(\mathrm{s}, \mathrm{t}, \mathrm{x})$; $\mathrm{s} \equiv \mathrm{t}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{u})$ для

$$\exists\mathrm{x}\,(\mathrm{s} = \mathrm{ux} + \mathrm{t} \vee \mathrm{t} = \mathrm{ux} + \mathrm{s})$$

(это позволяет писать, например, $\vdash \rho(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \iota\mathrm{xR}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{x})$,

(5) $\vdash \mathrm{a} \equiv \mathrm{b}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{n}) \sim \exists\mathrm{x}\,(\mathrm{a} = \mathrm{nx} + \mathrm{b} \vee \mathrm{b} = \mathrm{nx} + \mathrm{a})$

и т. п.). Легко доказываются утверждения:

(6) $\vdash \mathrm{a} \equiv \mathrm{a}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{n})$; (7) $\vdash \mathrm{a} \equiv \mathrm{b}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{n}) \supset \mathrm{b} \equiv \mathrm{a}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{n})$; (8) $\vdash \mathrm{a} \equiv \mathrm{b}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{n}) \supset \mathrm{ac} \equiv \mathrm{bc}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{nc})$; (9) $\vdash \mathrm{a} \equiv \mathrm{b}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{n})\,\&\,\mathrm{a} \equiv \mathrm{c}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{n}) \supset \mathrm{b} \equiv \mathrm{c}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{n})$; (10) $\vdash \mathrm{a} \equiv \mathrm{b}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{nc}) \supset \mathrm{a} \equiv \mathrm{b}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{n})$; (11) $\vdash \mathrm{a} \equiv \mathrm{b}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{n}) \sim \mathrm{a} + \mathrm{c} \equiv \mathrm{b} + \mathrm{c}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{n})$; (12) $\vdash \mathrm{a} \equiv \rho(\mathrm{a}, \mathrm{b})\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{b})$.

$$\vdash \exists\mathrm{y}\,(\mathrm{a} = \mathrm{by} + \mathrm{r}) \supset \rho(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \leqslant \mathrm{r},$$

$$\vdash \mathrm{b} \neq 0 \supset \rho(\mathrm{a}, \mathrm{b}) < \mathrm{b}.$$

---

1) Гильберт и Бернайс пишут ι_x, μ_x, а не ιx, μx.

В силу (5), $\vdash r \equiv s \pmod{b} \supset r \geqslant b+s \vee s \geqslant b+r \vee r=s$. Откуда

(13) $$\vdash a \equiv r \pmod{b} \& r < b \supset r = \rho(a, b),$$

и далее $\vdash a \equiv b \pmod{n} \sim \rho(a, n) = \rho(b, n)$. Для $a \mid b$, определенного в § 40, имеем

(14) $$\vdash a \mid b \sim b \equiv 0 \pmod{a},$$

что, согласно (5), равносильно $\vdash a \mid b \sim \rho(b, a) = 0$.

(15) $$\vdash a \mid b \& b \equiv c \pmod{a} \supset a \mid c.$$

Отношение *взаимной простоты* введем путем следующего определения, гарантирующего выполнение известной теоремы (см. 21 ниже), только и нужной в дальнейшем.

(16) $$\mathrm{Prim}(a, b) \sim \exists x (ax \equiv 1 \pmod{b}).$$

Отсюда:

(17) $$\vdash \mathrm{Prim}(a, b) \& c \mid a \supset \mathrm{Prim}(c, b),$$

(18) $$\vdash \mathrm{Prim}(a, n) \& a \equiv b \pmod{n} \supset \mathrm{Prim}(b, n).$$

Замечая, что из $\vdash ax \equiv 1 \pmod{n}$ и $\vdash by \equiv 1 \pmod{n}$ вытекает $\vdash abx \equiv b \pmod{n}$, $\vdash abxy \equiv by \pmod{n}$ и тем самым $\vdash (ab)(xy) \equiv 1 \pmod{n}$, получаем:

(19) $$\vdash \mathrm{Prim}(a, n) \& \mathrm{Prim}(b, n) \supset \mathrm{Prim}(ab, n).$$

Нам нужна еще симметричность $\mathrm{Prim}(a, b)$. «Исключительные» случаи $b=0$ и $b=1$ рассматриваются с помощью $\vdash \mathrm{Prim}(1, a)$, $\vdash \mathrm{Prim}(a, 0) \supset a=1$, $\vdash \mathrm{Prim}(0, 1)$. Далее:

$$\vdash b > 1 \& \mathrm{Prim}(a, b) \supset \exists x \exists y (x < b \& y < a \& ax = by + 1).$$

Допустим, для $\exists$-удал., $x < b \& y < a \& ax = by + 1$; тогда $\exists u \exists v (x + u = b \& y + v = a \& ax = by + 1)$. Допустим, для &-введ. и $\exists$-удал., $x + u = b$, $y + v = a$, $ax = by + 1$. Тогда $ax + au = ab$, $by + bv = ba\ (= ab)$, $ax + au = by + bv$, $by + 1 + au = by + bv$, $1 + ay = bv$. Отсюда $bv \equiv 1 \pmod{a}$, и $\exists$-введ. дает $\mathrm{Prim}(b, a)$. Итак,

(20) $$\vdash \mathrm{Prim}(a, b) \supset \mathrm{Prim}(b, a),$$

откуда $\vdash \mathrm{Prim}(a, b) \supset \exists x (ax \equiv 1 \pmod{b}) \& \exists x (bx \equiv 1 \pmod{a})$. Замечая, что $\vdash ar \equiv 1 \pmod{b} \& bs \equiv 1 \pmod{a} \supset arq + bsk \equiv q \pmod{b} \& arq + bsk \equiv k \pmod{a}$, получаем:

(21) $$\vdash \mathrm{Prim}(a, b) \supset \exists x (x \equiv k \pmod{a} \& x \equiv q \pmod{b}).$$

Дальнейшие определения («*Общее наименьшее кратное*»):

$$m(a, b) = \mu x (x \neq 0 \& a \mid x \& b \mid x).$$

(22) $$m_x(t(x); r) = \mu x (x \neq 0 \& \forall y (y < r \supset t(y) \mid x))$$

(в качестве терма s из (4) можно взять ab и $\prod_{y<r} t(y)$ соответственно; (1) доказывается с помощью *159, замечания (1b) § 29 и *151). Индукцией по n доказывается (см. *129, *66 и *56a с *13): $\vdash \forall y (y < n \supset t(y) \neq 0) \supset \prod_{y<n} t(y) \neq 0$, и далее, с помощью утверждения $\vdash \forall y (y < n \supset t(y) \mid \prod_{y<n} t(y))$ (которое доказывается индукцией по n с помощью *152 и *154),

$$\vdash \forall y (y < n \supset t(y) \neq 0) \supset \exists x (x \neq 0 \& \forall y (y < n \supset t(y) \mid x)).$$

Эта формула выражает существование общего кратного чисел $t(y)\ (\neq 0)$, $y < n$. Остаток от деления всякого общего кратного чисел $t(y)$, $y < n$ на их общее наименьшее кратное $m_x(t(x); n)$ должен, согласно (22), быть общим кратным чисел $t(y)$, $y < n$ и, будучи меньше $m_x(t(x); n)$, должен равняться 0. В силу (5) и (14),

(23) $\vdash \forall y(y < n \supset t(y) \mid a) \supset m_x(t(x); n) \mid a.$

Кроме того:

(24) $\vdash \forall y(y < n \supset t(y) \neq 0) \supset m_x(t(x); n) \neq 0,$

(25) $\vdash \forall y(y < n \supset t(y) \mid m_x(t(x); n))$

и

(26) $\vdash b \equiv c(\operatorname{mod} m_x(t(x); a')) \supset \forall y(y \leqslant a \supset b \equiv c(\operatorname{mod} t(y))).$

Из (19) получаем путем индукции по n:

$\vdash \forall x(x < n \supset \mathrm{Prim}(t(x), a)) \supset \mathrm{Prim}\left(\prod_{x<n} t(x), a\right)$ и далее, в силу (23) и (17),

(27) $\vdash \forall x(x < n \supset \mathrm{Prim}(t(x), a)) \supset \mathrm{Prim}(m_x(t(x); n), a).$

*66 дает (для $x' \cdot k + 1$ в качестве $t(x)$):

(28) $\vdash \forall x(x < n \supset \mathrm{Prim}(x' \cdot k + 1, n' \cdot k + 1)) \supset \mathrm{Prim}(m_x(x' \cdot k + 1; n), n' \cdot k + 1),$

далее: $\vdash r' + a = n' \supset r' \cdot k + 1 + ak = n' \cdot k + 1$, откуда

(29) $\vdash r' + a = n' \supset n' \cdot k + 1 \equiv a \cdot k(\operatorname{mod} r' \cdot k + 1).$

(30) $\vdash \mathrm{Prim}(r' \cdot k + 1, k),$

(31) $\vdash \mathrm{Prim}(k, r' \cdot k + 1)$ ((30) и (20)),

(32) $\vdash a \mid k \supset \mathrm{Prim}(a, r' \cdot k + 1)$ ((31), (17)).

(31), (32) и (19) дают $\vdash a \mid k \supset \mathrm{Prim}(ak, r' \cdot k + 1)$. Далее, в силу (29) и (18), $\vdash a \mid k \,\&\, r' + a = n' \supset \mathrm{Prim}(n' \cdot k + 1, r' \cdot k + 1)$ и (20) дает: $\vdash a \mid k \,\&\, r' + a = n' \supset \mathrm{Prim}(r' \cdot k + 1, n' \cdot k + 1)$, откуда

(33) $\vdash \exists x(x \mid k \,\&\, r' + x = n') \supset \mathrm{Prim}(r' \cdot k + 1, n' \cdot k + 1).$

Легко видеть:

(34) $\vdash \forall x(x < n \supset x' \mid k) \supset (r < n \supset \exists x(x \mid k \,\&\, r' + x = n')).$

(33) и (34) дают:

$$\vdash \forall x(x < n \supset x' \mid k) \supset \forall x(x < n \supset \mathrm{Prim}(x' \cdot k + 1, n' \cdot k + 1)),$$

откуда, с помощью (27), получаем

(35) $\vdash \forall x(x < n \supset x' \mid k) \supset \mathrm{Prim}(m_x(x' \cdot k + 1; n), n' \cdot k + 1).$

Подставляя в (35) a' вместо n, с помощью результатов $\vdash r < a' \,\&\, a < n \supset r < n'$, $\vdash r < n' \supset r' \mid m_x(x'; n')$ и *154, получаем:

(36) $\vdash m_x(x'; n') \mid k \,\&\, a < n \supset \mathrm{Prim}(m_x(x' \cdot k + 1; a'), a'' \cdot k + 1).$

Из (21) путем подстановки:

(37) $\vdash \mathrm{Prim}(m_x(x' \cdot k + 1; a'), a'' \cdot k + 1) \supset \exists z[z \equiv c(\operatorname{mod} m_x(x' \cdot k + 1; a')) \,\&\, z \equiv$
$\equiv \rho(m, a'' \cdot q + 1)(\operatorname{mod} a'' \cdot k + 1)].$

Используя формулы, получающиеся подстановкой (*66) в (26) и (9), получаем:

(38) $\vdash \{\forall y[y \leqslant a \supset c \equiv \rho(m, y' \cdot q + 1)(\operatorname{mod} y' \cdot k + 1)] \,\&\, b \equiv$
$\equiv c(\operatorname{mod} m_x(x' \cdot k + 1; a'))$
$\&\, b \equiv \rho(m, a'' \cdot q + 1)(\operatorname{mod} a'' \cdot k + 1)\} \supset \forall y[y \leqslant a' \supset b \equiv$
$\equiv \rho(m, y' \cdot q + 1) \operatorname{mod}(y' \cdot k + 1)].$

Из (36), (37) и (38) получаем

$$(39)\ \vdash m_x(x'; n')\,|\,k \,\&\, a < n \supset \{\exists x \forall y [y \leqslant a \supset x \equiv \rho(m, y' \cdot q + 1) (\mathrm{mod}\, y' \cdot k + 1)] \supset \exists x \forall y [y \leqslant a' \supset x \equiv \rho(m, y' \cdot q + 1) (\mathrm{mod}\, y' \cdot k + 1)]\}.$$

С помощью (39) доказываем индукцией по a:

$$(40)\ \vdash m_x(x'; n')\,|\,k \,\&\, a \leqslant n \supset \exists x \forall y [y \leqslant a \supset x \equiv \rho(m, y' \cdot q + 1) (\mathrm{mod}\, y' \cdot k + 1)].$$

Подставляя в (40) n вместо a и опуская $n \leqslant n$ в посылке, получим:

$$(41)\ \vdash m_x(x'; n')\,|\,k \supset \exists x \forall y [y \leqslant n \supset x \equiv \rho(m, y' \cdot q + 1) (\mathrm{mod}\, y' \cdot k + 1)].$$

Подставляя в (35) n' вместо n и пользуясь тем, что

$$\vdash r < n' \supset r'\,|\,m_x(x'; n') \quad \text{и} \quad \vdash r'\,|\,m_x(x'; n') \,\&\, m_x(x'; n')\,|\,k \supset r'\,|\,k,$$

получим:

$$(42)\qquad \vdash m_x(x'; n')\,|\,k \supset \mathrm{Prim}(m_x(x' \cdot k + 1; n'), n'' \cdot k + 1).$$

Этот результат дает, с помощью (41), (9) и формул, получающихся из (21) и (26) путем подстановки,

$$(43)\ \vdash m_x(x'; n')\,|\,k \supset \exists x \{\forall y [y \leqslant n \supset x \equiv \rho(m, y' \cdot q + 1) (\mathrm{mod}\, y' \cdot k + 1)] \,\&\, x \equiv w (\mathrm{mod}\, n'' \cdot k + 1)\}.$$

Подставляя в (13) $c' \cdot k + 1$ вместо b и принимая во внимание $\vdash k < c' \cdot k + 1$, получаем:

$$(44)\qquad \vdash a \equiv r (\mathrm{mod}\, c' \cdot k + 1) \,\&\, r \leqslant k \supset r = \rho(a, c' \cdot k + 1).$$

Заметим, что *143a дает с помощью индукции по n:

$$(45)\qquad \vdash \forall y (y \leqslant n \supset \rho(m, y' \cdot q + 1) \leqslant \prod_{x < n'} (\rho(m, x' \cdot q + 1))').$$

Из (43), (44) и (45) получаем:

$$(46)\qquad \vdash m_x(x'; n')\,|\,k \,\&\, \prod_{x < n'} (\rho(m, x' \cdot q + 1))' \leqslant k \,\&\, w \leqslant k \supset$$

$$\supset \exists x [\forall y (y \leqslant n \supset \rho(x, y' \cdot k + 1) = \rho(m, y' \cdot q + 1)) \,\&\, \rho(x, n'' \cdot k + 1) = w].$$

Кроме того,

$$(47)\qquad \vdash \exists u (m_x(x'; n')\,|\,u \,\&\, \prod_{x < n'} (\rho(m, x' \cdot q + 1))' \leqslant u \,\&\, w \leqslant u).$$

Из (46) и (47) получаем, наконец,

$$\vdash \exists u \exists x [\forall y (y \leqslant n \supset \rho(x, y' \cdot u + 1) = \rho(m, y' \cdot q + 1)) \,\&\, \rho(x, n'' \cdot u + 1) = w],$$

откуда, с помощью определения терма $\rho(s, t)$, получаем утверждение (β) для системы S_1. Применяя теорему 42 для устранения термов, содержащих ι, и тем самым также термов, содержащих μ, получаем (интуиционистское) доказательство утверждения (β) для исходной формальной системы S.

ДОБАВЛЕНИЕ III

О ФОРМАЛИЗУЕМОСТИ ПЕРЕХОДА ОТ (iv) К (v) В ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ 36

Чтобы формализовать переход от (iv) к (v), достаточно провести соответствующее содержательное рассуждение в аксиоматизированной обобщенной арифметике. (При этом выгодно воспользоваться упрощением Хазенъегера — Хенкина, см. сноску на стр. 345), а затем отобразить его в формальную арифметику S натуральных чисел.)

Заметим, что такого рода формализации может быть подвергнуто вообще всякое содержательное рассуждение, если все использованные в нем определения допустимы в системе W добавления I (быть может с добавленными к ней дальнейшими постулатами, переходящими при отображении W в S в доказуемые предложения S) и если, кроме того, в доказательствах нигде не содержится выхода за пределы метаматематики, например, за счет перехода в область метаметаматематики (конец § 15) или за счет теоретико-множественных рассуждений. Нам надлежит отобразить таким образом содержательное доказательство леммы 22. Из его просмотра видно, что оно не содержит никаких умозаключений, выходящих за рамки метаматематики с законом исключенного третьего — по крайней мере, если допустимы все его определения. В самом деле, каждый из классов F_i можно заменить соответствующим ему фиксированным предикатом $\mathfrak{F}_i$. Что же касается определимости этих предикатов, то из доказательства леммы 22 видно, каким образом определение каждого $\mathfrak{F}_{i+1}$ сводится к отношению $\mathrm{F}_i \vdash \mathrm{A}$, которое мы обозначим сейчас $\mathfrak{F}(i, \mathrm{A})$. Поэтому достаточно, чтобы к системе W была присоединена схема для определения отношения $\mathfrak{F}(i, \mathrm{A})$; оставшаяся же часть рассуждений проходит в системе W без всяких трудностей[1]). Но из доказательства теоремы 35 видно, что арифметический предикат $F(i, a)$, вполне соответствующий $\mathfrak{F}(i, \mathrm{A})$, является арифметическим по Гёделю и, следовательно, выразим в S (см. пример 8 § 74).

Теорема 36 верна и для исчисления предикатов с равенством; в этом случае формула F^* получается из F^{Q} (стр. 354) заменой на формулу $\exists x \forall y \mathrm{R}_j(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{n_j}, x, y)$, построенную на стр. 351, каждой части $\mathrm{P}_j(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{n_j})$ (в том числе части с Q) и каждой переменной w по методу примера 13 § 74 на $\overline{\mathrm{w}}$, т. е. каждой части вида $\forall \mathrm{w}\, \mathrm{B}(\mathrm{w})$ на $\forall \mathrm{w}(M(\mathrm{w}) \supset \mathrm{B}(\mathrm{w}))$ (сокращенно $\forall \overline{\mathrm{w}}\, \mathrm{B}(\overline{\mathrm{w}})$) и каждой части $\exists \mathrm{w}\, \mathrm{B}(\mathrm{w})$ на $\exists \mathrm{w}(M(\mathrm{w})\, \&\, \mathrm{B}(\mathrm{w}))$ (сокращенно $\exists \overline{\mathrm{w}}\, \mathrm{B}(\overline{\mathrm{w}})$), где, по определению, $M(\mathrm{w}) \sim \exists \mathrm{y}(\mathrm{Q}(\mathrm{y}, \mathrm{w})\, \&\, \forall \mathrm{z}(\mathrm{z} < \mathrm{w} \supset \neg \mathrm{Q}(\mathrm{y}, \mathrm{z})))$ (ср. пример 1 § 74), а $\mathrm{Q}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ — как в лемме 24 § 73. (Каждой свободной переменной w соответствует при этом добавление $(M(\mathrm{w})) \supset$ перед всей формулой, а сама формула заключается в скобки.) Формализация и в этом случае таким же образом дает

$$\vdash \forall \mathrm{y}\, \mathrm{D}(\mathrm{y}) \supset \mathrm{F}^*,$$

где $\forall \mathrm{y}\, \mathrm{D}(\mathrm{y})$ выражает неопровержимость формулы F.

ДОБАВЛЕНИЕ IV

ПОСТРОЕНИЕ ФОРМУЛЫ В ПРИМЕРА 2 § 79

Опишем, следуя Гильберту — Бернайсу [1934, стр. 360—366], процесс редукции, то есть перехода от A к B со свойствами (1) — (4). Читателю рекомендуется проверить, что каждый шаг редукции переводит формулу в эквивалентную ей в системе S.

---

[1]) В связи с данной F значения истинности требуются в конце доказательства леммы 22 только для формул с ограниченным числом логических операторов. Ср. [1]) на стр. 442.

Ниже буквы p, q, ..., u означают любые термы.

Предварительно для каждого числа $\boldsymbol{k}$ введем явное определение $t\cdot\boldsymbol{k}=\overbrace{(t+t)+\ldots+t}^{k\text{ раз}}$, а также $t\cdot 0=0$ и, для $\boldsymbol{k}\neq 0$ и 1: $s\equiv t\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{k})\sim\sim\exists x\,(s=t+x\cdot\boldsymbol{k}\vee t=s+x\cdot\boldsymbol{k})$. Для каждого $\boldsymbol{n}$ в системе S доказуема (индукцией по x) формула: $x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,n_1)\vee\ldots\vee x\equiv n-1\ (\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n})$ ($\boldsymbol{n}-1$ — цифра для $n-1$). (Это обстоятельство играет основную роль в проверке дальнейших утверждений о сравнимости; утверждения же, касающиеся неравенств, рассматриваются обычным образом, так как все необходимое для этого имеется в рассматриваемой системе.) Кроме того, $s<t\sim\exists c\,(c'+s=t)$. Эти символы ($s\cdot\boldsymbol{k}$, $s\equiv t\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{k})$ и $s<k$) мы будем теперь считать содержащимися в формальной системе S. Каждую часть A вида $\forall x\,C(x)$ заменяем на $\neg\exists x\neg C(x)$. Затем устраняем изнутри все части вида $\exists x\,C(x)$ — не изменяя запаса свободных, а также связанных переменных всей формулы — путем следующих процессов над выражением $C(x)$:

(a) Приводим формулу к дизъюнктивной нормальной форме, состоящей из равенств, иеравенств и сравнений, и заменяем всюду: $s=t$ на $s<t'\,\&\,t<s'$, $s\neq t$ на $s<t\vee t<s$, $\neg s<t$ на $t<s'$ и $\neg s\equiv t\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{k})$ на $s\equiv t+1\ (\mathrm{mod}\,\boldsymbol{k})\vee\ldots\vee s\equiv t+(\boldsymbol{k}-1)\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{k})$ ($\boldsymbol{k}-1$ — цифра для $k-1$). Восстанавливаем дизъюнктивную нормальную форму (если она была нарушена), тогда каждый член ее будет конъюнкцией иеравеиств и сравиений.

(b) Выражения, встречающиеся на одной стороне неравенств или сравнений, мы приведем теперь к виду $x\cdot\boldsymbol{k}+r$ или $x\cdot\boldsymbol{k}$, где r не содержит x. Для этого каждое выражение $s\overbrace{''\cdots'}^{k}$, где s — не цифра и $\boldsymbol{k}\neq 0$, заменим на $s+\boldsymbol{k}$ и к выражениям, содержащим $+$, применим обычные правила вычисления. Затем добьемся того, что каждое неравенство и каждое сравнение будет содержать x не более, чем на одной стороне, для чего заменим каждое неравенство $x\cdot\boldsymbol{k}+r<x\cdot\boldsymbol{k}+s$ на $r<s$, каждое $x\cdot\boldsymbol{k}+r<x\cdot\boldsymbol{l}+s$ на $r<x\cdot\boldsymbol{p}+s$, где $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{l}\geqslant\boldsymbol{k}$) и $x\cdot\boldsymbol{l}+r<x\cdot\boldsymbol{k}+s$ — на $x\cdot\boldsymbol{p}+r<s$; и аналогично для сравнеиий; в последних, кроме того, перенесем, переставляя части, x в левую часть; останутся сравнения вида $x\cdot\boldsymbol{p}\equiv s\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n})$ и $x\cdot\boldsymbol{p}+r\equiv s\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n})$. Затем все сравнения последнего вида заменим на $x\cdot\boldsymbol{p}\equiv s+r\cdot(\boldsymbol{n}-1)\ (\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n})$ ($\boldsymbol{n}-1$ — цифра для $n-1$), т. е. иа сравиения вида $x\cdot\boldsymbol{p}\equiv t\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n})$ — и далее все сравнения последнего вида на

$$(t\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n})\,\&\,x\cdot\boldsymbol{p}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n}))\vee(t\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n})\,\&\,x\cdot\boldsymbol{p}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n}))\vee\ldots$$
$$\ldots\vee(t\equiv\boldsymbol{n}-1\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n})\,\&\,x\cdot\boldsymbol{p}\equiv\boldsymbol{n}-1\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n})).$$

Затем снова приводим все выражение к дизъюнктивной нормальной форме. В последней каждый член будет конъюнкцией членов, не содержащих x и членов вида $x\cdot\boldsymbol{p}+r<s$, $r<x\cdot\boldsymbol{p}+s$ и $x\cdot\boldsymbol{p}\equiv\boldsymbol{z}\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{z}$ — цифра (r и s могут и не быть цифрами).

(c) Для каждой конъюнкции сравиений вида $x\cdot\boldsymbol{p}\equiv\boldsymbol{z}\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{n})$ ($\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{n}$ — цифры) можно эффективным путем установить, разрешимы ли они, т. е. эквивалентны одному сравнению вида $x\equiv\boldsymbol{q}\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{m})$, или не разрешимы[1]) в первом случае заменим эту конъюнкцию всюду на $x\equiv\boldsymbol{q}\,(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{m})$, а во втором — на $0<0$.

Далее, для каждой конъюнкции неравенств, содержащих x, можно добиться, что все их части, содержащие x, примут один и тот же вид $x\cdot\boldsymbol{p}+k$. А именно, пару неравенств $x\cdot\boldsymbol{p}_1+r_1<s_1$, $x\cdot\boldsymbol{p}_2+r_2<s_2$ можно замеиить парой

$$x\cdot(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)+(r_1\cdot\boldsymbol{p}_2+r_2\cdot\boldsymbol{p}_1)<s_1\cdot\boldsymbol{p}_2+r_2\cdot\boldsymbol{p}_1,$$
$$x\cdot(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)+(r_1\cdot\boldsymbol{p}_2+r_2\cdot\boldsymbol{p}_1)<s_2\cdot\boldsymbol{p}_1+r_1\cdot\boldsymbol{p}_2,$$

[1]) См., например, Виноградов И. М., Основы теории чисел (1938), гл. 4, § 3.

($\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2$ — цифра для $p_2 \cdot p_2$) и аналогично для пар неравенств $x \cdot \boldsymbol{p}_1 + r_1 < s_1$, $s_2 < x \cdot \boldsymbol{p}_2 + r_2$ или $s_1 < x \cdot \boldsymbol{p}_1 + r_1$, $s_2 < x \cdot \boldsymbol{p}_2 + r_2$. Уменьшая таким образом число различиых частей иравеиств вида $x \cdot \boldsymbol{p} + r$, мы доведем его до 1 (если оно было > 1). Затем каждую конъюнкцию неравенств вида $x \cdot \boldsymbol{p} + t < s_1 \& \ldots \& x \cdot \boldsymbol{p} + t < s_m$ мы заменим на m-членную дизъюнкцию с l-м членом

$$s_l < s_1 + 1 \& s_l < s_2 + 1 \& \ldots \& s_l < s_m + 1 \& x \cdot \boldsymbol{p} + t < s_l$$

и каждую конъюнкцию неравенств $r_1 < x \cdot \boldsymbol{p} + t \& \ldots \& r_n < x \cdot \boldsymbol{p} + t$ — на n-членную дизъюнкцию с l-ым членом

$$r_1 < r_l + 1 \& r_2 < r_l + 1 \& \ldots \& r_n < r_l + 1 \& r_l < x \cdot \boldsymbol{p} + t.$$

Затем восстанавливаем дизъюнктивную нормальную форму. Каждый член этой формы будет содержать x не более чем в трех конъюнктивных членах, а именно, не более чем в одном сравнении вида $x \equiv \boldsymbol{q} \pmod{\boldsymbol{m}}$ ($\boldsymbol{q}$ — цифра) и не более чем в одном неравенстве каждого из видов $a < x \cdot \boldsymbol{p} + t$ и $x \cdot \boldsymbol{p} + t < b$, причем если входят оба, то член $x \cdot \boldsymbol{p} + t$ оба раза один и тот же.

Преобразовав посредством (a), (b) и (c) C(x) к некоторой дизъюнктивной нормальной форме, распределим теперь $\exists x$ между членами последней (*88) и далее вынесем конъюнктивные члены без x за знак $\exists x$ (*90). Тогда останется удалить x только из выражений

(i): $\exists x (x \equiv \boldsymbol{q} \pmod{\boldsymbol{m}} \& s < x \cdot \boldsymbol{p} + t \& x \cdot \boldsymbol{p} + t < u)$

или отличающихся от них отсутствием одного или двух конъюнктивных членов.

Случай, когда отсутствует член $s < x \cdot \boldsymbol{p} + t$, можно исключить из рассмотреиия, так как $x \cdot \boldsymbol{p} + t < u$ можно замеиить на $0 < x \cdot \boldsymbol{p} + t' \& x \cdot \boldsymbol{p} + t' < u'$. Если отсутствует $x \cdot \boldsymbol{p} + t < u$, заменим все выражение на $0 < 1$. Если отсутствует сравнение и $p = 1$, то имеем $\exists x (s < x + t \& x + t < u)$, что мы заменим иа $s' < u \& t < u$. Если отсутствует сравнение и $p > 1$, то, заменив $\exists x (s < x \cdot \boldsymbol{p} + t \& x \cdot \boldsymbol{p} + t < u)$ на $\exists x (x \equiv 0 \pmod{\boldsymbol{p}} \& s < x + t \& x + t < u)$, получим общий случай с той особеииостью, что $p = 1$, но этого можно достичь и в общем случае, заменяя (i) на

$$\exists x (x \equiv \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} \pmod{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{p}} \& s < x + t \& x + t < u)$$

и подставляя вместо $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{p}$ их цифровые значения.

Остается рассмотреть только случай выражения $\exists x (x \equiv \boldsymbol{z} \pmod{\boldsymbol{n}} \& s < x + t \& x + t < u)$, где $\boldsymbol{z}$ цифра и $\boldsymbol{z} < \boldsymbol{n}$, потому что иначе можно было бы заменить z на $\mathrm{rm}(z, n)$. Каждое такое выражение мы заменим на дизъюнкцию $(s < t \& t + \boldsymbol{z} < u) \vee T_1 \vee \ldots \vee T_n$, где T_p — сокращение для $t < s' \& s + \boldsymbol{p} < u \& s + \boldsymbol{p} \equiv t + \boldsymbol{z} \pmod{\boldsymbol{n}}$.

Теперь x устранено; добавляя конъюнктивные члены вида $a = a$, восстановим все отличные от x переменные, входившие в C(x), но исчезнувшие в ходе изложенных преобразований.

Этим закончено преобразование части $\exists x\, C(x)$; таким образом, последовательно изгоняем (изнутри) все кванторы. Наконец, исключим выражения $t \cdot \boldsymbol{k}$, $s \equiv t \pmod{\boldsymbol{k}}$ и $s < t$, пользуясь их явными определениями. Полученная формула и будет B.

ДОБАВЛЕНИЕ V

ОБ УСТРАНИМОСТИ РАВЕНСТВА И НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ОПИСАНИЙ

Приведем еще несколько теорем об устранимости. *Пусть S — предикатная формула, выводимая с помощью аксиом равенства. Тогда S выводима и в исчислении предикатов* (Гильберт и Бернайс [1934, стр. 381—382]).

Для доказательства заменим сперва данное доказательство формулы S доказательством, построенным по теореме 41 (c). Затем заменим всюду в этом доказательстве каждую элементарную часть вида $x = y$ на $G(x, y)$, получающуюся $\forall$-введением по всем переменным, отличным от x и y, примененным к конъюнкции всех формул вида $P(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \sim \sim P(a_1, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ по всем аргументным местам элементарных частей S. Тогда формула S не изменится, а формула $Eq(=, P_1, \ldots, P_s)$ теоремы 41 (c) превратится в формулу, доказуемую в исчислении предикатов, — и связность доказательства не нарушится.

(Для исчисления предикатов с предикатными переменными нужен еще дополнительный шаг по замене этих переменных новыми постоянными предикатными символами в начале и обратная замена в конце этого рассуждения.)

Дальнейшие результаты об устранимости равенства и описаний получены Хэйлперином [1954].

Рассмотрим теперь расширение S_ε произвольной формальной системы S, получающееся путем присоединения термов вида $\varepsilon_x A(x)$ и «ε-аксиом» $A(t) \supset A(\varepsilon_x A(x))$, где t свободен для x в $A(x)$ (а также правила переименования связанной переменной x при соблюдении конгруэнтности). Для классической системы употребление таких термов и аксиом может заменить собой употребление кванторов, если пользоваться правилом подстановки § 23. В самом деле, если, не вводя кванторов, ввести только что описанные термы и затем ввести квантор $\exists$ соглашением, что $\exists x A(x)$ есть сокращение для $A(\varepsilon_x A(x))$, то каждая аксиома по схеме 11 переходит в ε-аксиому, а применение постулата 12 сводится к применению правила подстановки. Квантор $\forall$ можно затем ввести, принимая формулу *84 за аксиому; при этом $\forall x A(x)$ будет формулой, эквивалентной формуле $\neg \neg A(\varepsilon_x \neg A(x))$, в свою очередь эквивалентной $A(\varepsilon_x \neg A(x))$.

(A). *Пусть формула* F *какой-нибудь классической формальной системы* S *доказуема в* S_ε, *тогда* F *доказуема в* S. *В частности, если* S *непротиворечива, то и* S_ε *непротиворечива.* (Гильберт и Бернайс [1939, стр. 18 и 138 – 140].)

Доказательство. Достаточно доказать вторую половину утверждения. После этого первая половина получится, если (без ограничения общности считая F замкнутой) взять вместо S систему, полученную присоединением $\neg$ F к S в качестве аксиомы. Иными словами, достаточно доказать первую половину утверждения, считая, что F есть формула вида $A \& \neg A$ с гёделевским номером r.

Пусть C — конъюнкция замыканий тех аксиом системы S, которые используются при выводе в F в S_ε; Wid_C — арифметическая формула, выражающая непротиворечивость системы, получающейся из исчисления предикатов путем присоединения формулы C в качестве аксиомы. Под «исчислением предикатов» здесь можно понимать как чистое исчисление предикатов, так и исчисление предикатов с равенством. По теореме 36 для чистого исчисления предикатов или по сказанному в добавлении 3 для исчисления предикатов с равенством,

(p) $$\vdash \mathrm{Wid}_C \supset C^*,$$

где формула C^* получается из C, как описано в доказательстве теоремы 36 (или добавлении 3).

Допустим, что $C \vdash_\varepsilon F$ (знак $\vdash_\varepsilon$ означает выводимость в S_ε); по теореме о дедукции, тогда $\vdash_\varepsilon C \supset F$. Произведем в этом доказательстве те же замены, посредством которых C^* получается из C и, кроме того, заменим всюду букву ε буквой μ. Тогда получится вывод формулы $C^* \supset F^*$ в арифметике с помощью μ-символа (см. добавление 2) (ε-аксиомы при этом перейдут в формулы, получающиеся из формул (μ_1) (стр. 475) посредством подстановки (*66)); здесь F^* — некоторая формула вида $B \& \neg B$. По предыдущему устраняем использование символа μ и затем с помощью *12 и *50 получим вывод формулы $\neg C^*$ в арифметике. (p) дает (с помощью *12) (в арифметике)

(q) $\vdash \neg \mathrm{Wid}_C$.

Wid_C можно считать формулой $\neg \exists x B(x, r)$, где r — номер фиксированной формулы вида $A \& \neg A$ из системы S (ср. добавление I). Тогда (q) в классической системе дает

(r) $\vdash \exists x B(x, r)$.

($B(m, n)$ нумерически выражает предикат «m есть номер доказательства в S формулы с номером n».) В силу общей рекурсивности этого предиката (§ 55) и результата Новикова (добавление VII), (r) может быть доказано и интуиционистки (хотя и не элементарно), т. е. можно эффективно указать такое число k, что в арифметике

(s) $\vdash B(k, r)$.

По этому k можно восстановить доказательство с номером k — оно будет выводом противоречивой формулы вида $A \& \neg A$ из формулы C — тем самым и доказательством формулы $A \& \neg A$ в системе S.

Таким образом, из непротиворечивости S следует непротиворечивость S_ε, чем доказано утверждение (A) («2-я ε-теорема» Гильберта — Бернайса [1939, стр. 131 — 140]). Результат можно выразить формулой

(t) $\mathrm{Wid}_S \supset \mathrm{Wid}_{S_\varepsilon}$,

где Wid_S и $\mathrm{Wid}_{S_\varepsilon}$ имеют вид $\neg \exists x B^\circ(x, r)$ (об $^\circ$ см. в § 81). Это доказательство не является элементариым интуиционистским доказательством, но если его арифметизировать, то можно получить вывод формулы (t) в классической и далее, в силу *86 и теоремы 60 (c), в интуиционистской арифметике. Последнее доказательство будет уже элементарным.

Заметим, что после присоединения ε-символа и ε-аксиом теорема 41 уже теряет силу: например, равенство $\varepsilon_x(x \neq 0 + 0) = \varepsilon_x(x \neq 0)$ не выводимо без помощи схем аксиом 13 и 23, хотя с помощью схемы 23 оно выводимо даже без постулата 13; это вытекает из непротиворечивости формализма, полученного путем присоединеиия к арифметике без постулата 13 ε-символа с ε-аксиомами и двух аксиом $\varepsilon_x(x \neq 0) = 1$ и $\varepsilon_x(x \neq 0 + 0) = 2$. (Эта непротиворечивость доказывается с помощью теоремы, аналогичной теореме 51 (b) (Гильберт — Бернайс [1939, сноска на стр. 60 — 61]).) При наличии формулы $\neg a = 0 \supset (\mathrm{pd}(a))' = a$[1], вытекающей из рекурсивных равенств для $\mathrm{pd}(a)$ (см. § 45, #5), ε-формулы позволяют заменить схему индукции схемой $A(a) \supset \neg \varepsilon_x A(x) = a'$ (Гильберт — Бернайс [1939, стр. 85 — 87]).

1-я ε-теорема Гильберта — Бернайса состоит в том, что если формула F, а также аксиомы формализма, полученного путем присоединения к исчислению предикатов с постулированным правилом подстановки аксиом без переменных предикатов («собственных аксиом»), ε-символа и ε-аксиом, не содержат связанных переменных и F доказуема в этом формализме, то F доказуема и без использования связанных перемениых.

Эта теорема обобщается и на случай формулы F вида $\exists x_1 \ldots \exists x_r A$, где A не содержит связанных переменных: если F доказуема в формализме описанного рода, то в этом формализме имеется доказательство без связанных переменных некоторой дизъюнкции $A_1 \vee \ldots \vee A_s$, где каждая формула A_i ($i = 1, \ldots, s$) получается из A подстановкой некоторых термов $t_1^i, \ldots, t_r^i$, не содержащих ε-символа, вместо $x_1, \ldots, x_r$ в A. 1-я ε-теорема и это ее

[1]) Здесь мы комбинируем обозначения содержательной арифметики, часть III, с обозначениями формальной системы гл. IV; это не должно привести к недоразумениям, потому что речь идет здесь об определенном формализме.

обобщение справедливы и для исчисления предикатов с равенством (Гильберт и Бернайс [1939, стр. 18, 32, 79—80]).

В силу 2-й ε-теоремы, доказательство 1-й ε-теоремы и ее обобщения достаточно рассматривать лишь для случая, когда ε-символы в данное доказательство формулы F не входят. Пусть A — конъюнкция аксиом, использованных при выводе F, тогда F выводима в исчислении предикатов из $\forall$A, причем все переменные являются фиксированными; по теореме 46, в $G1$ будет выводима $\forall \mathrm{A} \to \mathrm{F}$. В силу теоремы 50 и следствия из теоремы 47, F или некоторая дизъюнкция описанного выше вида, если речь идет об обобщенной 1-й ε-теореме, выводима без помощи связанных переменных из формул, получающихся подстановкой термов в аксиомы, а значит, и из аксиом, если рассматривать исчисление предикатов с постулированным правилом подстановки.

Если рассматривается исчисление предикатов с равенством, то применяем еще теорему 41 (с) (формула вида $\mathrm{Eq}(=, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s)$ не содержит связанных переменных).

ДОБАВЛЕНИЕ VI

О ФОРМАЛИЗАЦИИ ИНДУКЦИИ ДО ПОРЯДКОВЫХ ЧИСЕЛ, МЕНЬШИХ ε_0 В СИСТЕМЕ ГЛ. IV

(по Гильберту — Бернайсу [1939, стр. 361—366])

Пусть τ_n — число $\overbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}^{n}$. Тогда индукция до τ_n сводится к обыкновенной путем упорядочения $\prec_n$ натуральных чисел, определяемого по рекурсии следующим образом: $a \prec_0 b \equiv a < b$;

$$a \prec_{n+1} b \equiv b \neq 0 \,\&\, [a = 0 \vee (El)\,[(a)_l < (b)_l \,\&\, (k)\,(k \prec_n l \to (a)_k = (b)_k)]]$$

(см. § 45 #19). Здесь мы воспользуемся содержательным изложением § 38 и, в соответствии с теоремой 42 § 74, введем в систему гл. IV функциональные символы $(a)_x$, p_x, а также введем предикатные символы

$$a|b, \; a \prec_n b \;\; (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

То, что каждое $\prec_n$ упорядочивает натуральный ряд по типу τ_{n+1}, доказывается с помощью функций $\zeta_n(k)$, определяемых индуктивно следующим образом: $\zeta_0(k) = k$; $\zeta_{n+1}(0) = 0$, $\zeta_{n+1}(2^t) = t + 1$, $\zeta_n(p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_s}) = \omega^{\zeta_n(i_1)} + \ldots$ $\ldots + \omega^{\zeta_n(i_s)}$, где $i_{m+1} \preceq i_m$ $(m = 1, \ldots, s-1)$. (Гильберт и Бернайс рассматривают порядковые числа $< \varepsilon_0$ как формальные выражения — «0-ω-фигуры», составленные с помощью « + » и символического возведения в степень из 0 и ω, например, $3 = \omega^0 + \omega^0 + \omega^0$. Сравнение порядковых чисел приобретает при этом финитный смысл из рассмотрения 0-ω-фигур и их частей. ε_0 — первое порядковое число, не представимое в виде 0-ω-фигуры.)

Наметим план, по которому можно восстановить доказательство утверждения *162b^n, получающегося из *162b заменой $<$ на $\prec_n$. *162b^0 есть *162b. Пусть *162b^n доказано. Будем доказывать *162b^{n+1}. Пусть $\mathrm{D}^{n+1}_{\mathrm{A}(\cdot)}(a)$ означает $\forall y (y \prec_{n+1} a \supset \mathrm{A}(y))$; допустим $\forall \mathrm{x} (\mathrm{D}^{n+1}_{\mathrm{A}(\cdot)}(\mathrm{x}) \supset \mathrm{A}(\mathrm{x}))$ и докажем $\mathrm{A}(\mathrm{x})$ с фиксированным x. Пусть $\mathrm{C}_n(a, b)$ означает $\forall \mathrm{x} [\mathrm{x} < a \,\&\, (a)_{\mathrm{x}} \neq 0 \,\&\, \mathrm{x} \neq b \supset$ $\supset b \prec_n \mathrm{x}] \,\&\, a \neq 0$, а $\mathrm{B}(b)$ — $\forall \mathrm{x} [\mathrm{C}_n(\mathrm{x}, b) \,\&\, \mathrm{D}^{n+1}_{\mathrm{A}(\cdot)}(\mathrm{x})) \supset \mathrm{D}^{n+1}_{\mathrm{A}(\cdot)}(\mathrm{x} \cdot \mathrm{p}_b))]$. Сперва доказывается лемма

$$\forall k [\mathrm{p}_k | q \supset \mathrm{B}(k)] \,\&\, \mathrm{D}^{n+1}_{\mathrm{A}(\cdot)}(a) \,\&\, \forall l \neg [\mathrm{p}_l | a \,\&\, \exists m (l \prec_n m \,\&\, \mathrm{p}_m | q)] \supset \mathrm{D}^{n+1}_{\mathrm{A}(\cdot)}(a \cdot q).$$

Эта лемма доказывается путем последовательного присоединения к a простых делителей q в невозрастающем относительно $\prec_{n+1}$ порядке; формально индукция идет по числу $t = \sum_{x \leqslant a} (a)_x$. При $a = 1$ лемма дает $\vdash \forall x B(x) \supset \forall x A(x)$, поэтому доказываем $\forall x B(x)$ — или $B(x)$ — индукцией по x в упорядочении $\prec_n$. $B(0)$ означает $D^{n+1}_{A(\cdot)}(a) \supset D^{n+1}_{A(\cdot)}(2a)$ и следует из того, что в $\prec_{n+1}$ за a непосредственно следует $2a$. Пусть $b \neq 0 \,\&\, \forall x [x \prec_n b \supset B(x)]$. Доказываем $B(b)$ (с фиксированным b). Для этого пусть $a \neq 0 \,\&\, \forall c [c \prec_n b \supset \supset \neg (p_c \mid a)] \,\&\, D^{n+1}_{A(\cdot)}(a)$. Доказываем $D^{n+1}_{A(\cdot)}(a \cdot p_b)$, т. е. $d \prec_{n+1} a \cdot p_b \supset A(d)$. Пусть $d \prec_{n+1} a \cdot p_b$. Тогда $D^{n+1}_{A(\cdot)}(a)\, d \preceq_{n+1} a \quad \vdash A(d)$. $D^{n+1}_{A(\cdot)}(a), a \prec_{n+1} d \vdash \exists q (q > 1 \,\&\, d = aq \,\&\, \forall c (p_c \mid q \supset c \prec_n b))$. К этому q применяем лемму и получаем $A(a \cdot q)$, т. е. $A(d)$.

ДОБАВЛЕНИЕ VII

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ АРИФМЕТИКИ С ПОМОЩЬЮ ИНДУКЦИИ ДО ε_0 (ПО ШЮТТЕ). РЕЗУЛЬТАТ П. С. НОВИКОВА

С целью установить ряд результатов, сформулированных автором в конце § 79, а также обосновать во многих случаях возможность перехода от классических доказательств к интуиционистским, опишем построение арифметики генценовского типа $G1$. Кроме того, мы покажем, что для этой системы имеют место (при сформулированных ниже условиях) теоремы, аналогичные теоремам 48 и 50 настоящей книги.

Под системой (классической арифметики типа) H мы будем понимать систему гл. IV, из которой устранены функциональные символы $+$ и $\cdot$, как в примере 11а § 74. Термы этой системы — переменные, переменные со штрихами и цифры.

Кроме того, при желании читатель может считать, что H содержит и другие предикатные символы, причем для каждого такого символа $F(x_1, \ldots, x_k)$ и любых $n_1, \ldots, n_k$ утверждение $\vdash F(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k) \vee \vdash \neg F(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k)$ имеет место интуиционистски; это значит, что одна из формул $F(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k)$ и $\neg F(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k)$ является истинной, а другая — ложной и имеется метод распознавания истинности этих формул.

Из формул этой системы образуются, как в § 77, секвенции. К числу аксиом добавляются секвенции вида $\rightarrow F$, где F — элементарная замкнутая истинная формула системы H, и секвенции вида $G \rightarrow$, где G — элементарная замкнутая ложная формула системы H. Эти аксиомы $\rightarrow F$ и $G \rightarrow$ называются арифметическими аксиомами.

К числу (логических предикатных) правил вывода § 77 присоединяется следующее правило бесконечной индукции («правило Карнапа»):

$$\text{(C)} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A(0) \quad \Gamma \rightarrow \Theta, A(1) \quad \ldots \quad \Gamma \rightarrow \Theta, A(\boldsymbol{n}) \quad \ldots}{\Gamma \rightarrow \Theta, \forall x A(x).}$$

(Интуиционистски при каждом применении этого правила доказательства его посылок должны допускать эффективный пересчет, т. е. должен существовать алгоритм, дающий для каждого числа n доказательство посылки $\Gamma \rightarrow \Theta$, $A(\boldsymbol{n})$. Употребление гёделевских номеров (см. §§ 52, 58) позволяет рассматривать каждое такое применение правила (C) как финитный объект.) Последовательное применение нескольких утончений мы будем считать за одно применение правила «*У*».

Доказательства этой системы $G1$ можно рассматривать в виде дерева; применение каждого вывода присоединяет (снизу) заключение этого вывода к каждой из ветвей доказательства его посылок, причем таким образом образуется каждая ветвь продолженного доказательства. Это утверждение доказывается индукцией от доказательства посылок к доказательству заключения; но в важном для нас случае можно будет обойтись без такой индукции.

Каждой секвенции любого доказательства мы припишем порядковое число, которое мы будем называть *высотой* этой секвенции[1]). Именно, аксиомам припишем *высоту* 1, а каждому заключению правила вывода (кроме *СП*-правил) — наименьшее порядковое число, превосходящее *высоты* посылок. Заключению *СП*-правила припишем ту же *высоту*, что и его посылке. *Высотой* доказательства назовем высоту его конечной секвенции.

Степень формулы — это число вхождений в нее логических символов ($\supset$, $\&$, $\vee$, $\dot\neg$, $\forall$, $\exists$). *Степень* сечения — это степень его формулы С.

Степенью доказательства мы будем называть наибольшую из степеней сечений этого доказательства (или, если такой наибольшей степени нет, то предел этих степеней); если доказательство не содержит сечений, то припишем ему *степень* 0.

Для этой системы имеет место лемма 36, и в каждом случае можно считать, что ее применение не повышает высоты доказательства.

Каждому вхождению формулы в последовательность Г или Θ, встречающуюся в посылке некоторого вывода, соответствует (то же по счету в Г или Θ) вхождение этой формулы в заключение этого вывода; мы будем называть такие вхождения *соответствующими* друг другу. Кроме того, мы будем называть *соответствующими* друг другу вхождения формулы, обозначенной в схемах через С, в посылки и заключение вывода. Это отношение продолжаем до транзитивного.

Совокупность вхождений формул, соответствующих какой-нибудь формуле А, входящей в доказательство, мы будем называть *связкой* формул, проходящей через это вхождение А. В каждой ветви может иметься только конечное число вхождений из каждой связки.

Верхним вхождением формулы А в связку (или просто верхней формулой этой связки) мы будем называть вхождение этой формулы в секвенцию, не соответствующее никакому вхождению формулы А в посылку этой секвенции (в частности, вхождение в аксиому).

Докажем, что для каждой теоремы Е системы *Н* в *G*1 имеет место $\vdash \rightarrow \forall$E.

Пусть Е — любая из аксиом 14 — 17 или формул $+(a,\ 0,\ a)$, $+(a,\ b',\ d)\&$ $\&+(a,\ b,\ c)\supset d=c'$, $\cdot(a,\ 0,\ 0)$ или $\cdot(a,\ b',\ c)\&\cdot(a,\ b,\ d)\supset+\ d,\ a,\ c)$ системы Н, а E^0 получается из Е подстановкой цифр вместо всех переменных. (Четыре написанные формулы заменяют в *Н* аксиомы 18 — 21.) Тогда в *G*1 $\vdash\rightarrow\mathrm{E}^0$. (Например, для акс. 16 $\rightarrow\mathrm{E}^0$ получается путем двух $\rightarrow\supset$ из секвенций вида $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{m}\rightarrow\boldsymbol{l}=\boldsymbol{m}$, а последние секвенции — путем утончений из арифметических аксиом.) Правило (С) дает $\vdash\rightarrow\forall$E.

Пусть Е или В(х) есть формула $\mathrm{A}(0)\&\forall x(\mathrm{A}(x)\supset\mathrm{A}(x'))\supset\mathrm{A}(x)$ (акс. 13). Тогда $\mathrm{A}(0)\&\forall x(\mathrm{A}(x)\supset\mathrm{A}(x'))\,\mathrm{A}(x)\vdash\mathrm{A}(x')$ с фиксированным х и без использования арифметических аксиом. Значит, применима теорема 46, которая дает $\mathrm{A}(0)\&\forall x(\mathrm{A}(x)\supset\mathrm{A}(x')),\ \mathrm{A}(x)\rightarrow\mathrm{A}(x')$ в *G*1 и, по лемме 36, для любой цифры $\boldsymbol{n}$ получаем $\mathrm{A}(0)\&\forall x(\mathrm{A}(x)\supset\mathrm{A}(x')),\ \mathrm{A}(\boldsymbol{n})\rightarrow$ $\rightarrow\mathrm{A}(\boldsymbol{n}')$. Теперь для каждого *n* можно, отправляясь от $\mathrm{A}(0)\&\forall x(\mathrm{A}(x)\supset$ $\supset\mathrm{A}(x'))\rightarrow\mathrm{A}(0)$ (случай 4а теоремы 46) и применяя *n* раз сечение, доказать $\mathrm{A}(0)\&\forall x(\mathrm{A}(x)\supset\mathrm{A}(x'))\rightarrow\mathrm{A}(\boldsymbol{n})$. Правило (С) дает $\vdash\mathrm{A}(0)\&\forall x(\mathrm{A}(x)\supset$ $\supset\mathrm{A}(x'))\rightarrow\forall x\mathrm{A}(x)$, и по $\rightarrow\supset$ получаем $\vdash\rightarrow\mathrm{A}(0)\&\forall x(\mathrm{A}(x)\supset\mathrm{A}(x'))\supset$ $\supset\forall x\mathrm{A}(x)$, что равносильно $\vdash\rightarrow\forall$E (см. *95 и теоремы 46 и 47).

Отсюда следует, что в *G*1 $\vdash\rightarrow\forall$E для всякой аксиомы Е системы *Н*. Теорема 46 и сечения приводят к тому же результату и для всякой теоремы Е системы *Н*; при этом степень полученных доказательств системы *G*1 конечна. Из предыдущего рассуждения извлекаем также представление доказательства $\rightarrow\forall$E в виде дерева. Здесь используется только индукция от

[1]) Высота секвенции с подъемом по дереву уменьшается.

посылок вывода к его заключению для системы H; эта индукция сводится к обыкновенной.

Приведем теперь доказательства системы $G1$ к некоторому специальному виду. Сначала устраним из каждого доказательства символы $\supset$, $\vee$ и $\exists$, пользуясь для этой цели эквивалентностями *58, *56 и *83. Соответствующие этим символам правила вывода стаиут тогда излишними, и мы их опустим. (См. прим. перев. на стр. 393.)

Правило (C) и лемма 36 позволяют теперь устранить употребление свободных переменных в доказательстве каждой секвенции, не содержащей свободных переменных. ($\rightarrow\forall$ заменяются при этом правилом (C).)

Теперь можно устранить и аксиомы вида $C\rightarrow C$; в самом деле, для замкнутых формул C каждая такая аксиома доказывается с помощью правил, соответствующих последнему символу, употребленному для построения C, в предположении, что для формул C' меньшей степени утверждение доказано. (Например, если $\vdash F(n)\rightarrow F(n)$ для всех n, то $\forall\rightarrow$ дает $\vdash \forall x F(x)\rightarrow F(n)$ для каждого n и далее, применяя правило (C), получаем $\vdash \forall x F(x)\rightarrow \forall x F(x)$.)[1])

Итак, мы будем отныне считать, что система $G1$ содержит только арифметические аксиомы и не содержит никаких логических операторов, кроме $\forall x$, $\&$ и $\neg$, а также не содержит свободных переменных.

Возвратиой индукцией по высоте α данного доказательства секвенции доказываются нижеследующие утверждения (A) — (F). Применяя эту индукцию, мы неявно воспользуемся тем, что применение *СП*-шагов не меняет высоты доказательства.

(A) *если конечная секвенция данного доказательства имеет вид* $\Gamma\rightarrow\Theta,\ \forall x A(x)$, *то для каждого числа n найдется доказательство секвенции* $\Gamma\rightarrow\Theta,\ A(n)$, *имеющее высоту* $\leqslant\alpha$.

Доказательство: Если данная конечная секвенция получена одним из *СП*-шагов, то, поднимаясь вверх по дереву, мы дойдем до секвенции, отличающейся от $\Gamma\rightarrow\Theta, \forall x A(x)$ лишь порядком и числом вхождений формул и полученной посредством вывода, отличного от *СП*-шагов. Указанному выше вхождению $\forall x A(x)$ в конечную секвенцию в найденной секвенции соответствует одно или несколько вхождений этой формулы в сукцедент; назовем их *существенными* вхождениями. Посылки этого последнего вывода, отличного от *СП*, имеют высоту меньше чем α. Возможны два случая: 1) одно из существенных вхождений $\forall x A(x)$ является вхождением главной формулы (называя так, в частности, формулы C, вводимые утончениями). Если при этом мы имеем дело с правилом (C), то для каждого n найдется посылка с $A(n)$ вместо рассматриваемого вхождения $\forall x A(x)$ — и, применяя в случае надобности несколько раз правило $\rightarrow П$ и индуктивное предположение, можно заменить каждое вхождение $\forall x F(x)$, соответствующее существенному, на $A(n)$ и найти доказательство высоты $<\alpha$ для полученной секвенции, из которого затем с помощью *СП*-шагов получим доказательство высоты $<\alpha$ для требуемой секвенции. Если имеем дело с правилом *У*, то, применяя в случае надобности правило $\rightarrow П$ и индуктивное предположение, можно в посылке этого *У* заменить все вхождения $\rightarrow\forall x A(x)$, соответствующие существенным, на $A(n)$ ($n=0,\ 1,\ 2,\ldots$) и затем применить *У* с $A(n)$ вместо наших $\forall x A(x)$. Затем, применяя *СП*-шаги, получим для секвенции $\Gamma\rightarrow\Theta, A(n)$ доказательство высоты $\leqslant\alpha$. 2) Если данное вхождение $\forall x A(x)$ не соответствует вхождению главной формулы, то ему соответствует вхождение $\forall x A(x)$ хотя бы в одной посыл-

[1]) При этом для каждой секвенции $C\rightarrow C$ найдется доказательство высоты $2n+1$, где n — степень формулы C.

ке последнего не *СП*-вывода. По индуктивному предположению, заменяем каждое такое вхождение $\forall x A(x)$ в посылку вхождением формулы $A(\boldsymbol{n})$, а затем применяем то же правило вывода; получим секвенцию, от которой можно затем *СП*-шагами придти к секвенции $\Gamma \to \Theta$, $A(\boldsymbol{n})$ высоты $\leqslant \alpha$.

(B) *Если конечная секвенция данного доказательства имеет вид* $\Gamma \to \Theta$, $A \& B$, *то для каждой из секвенций* $\Gamma \to \Theta$, A *и* $\Gamma \to \Theta$, B *найдется доказательство высоты* $\leqslant \alpha$.

Это доказывается аналогично (A).

(E)—(F). *Если конечная секвенция данного доказательства имеет вид* $\Gamma \to \Theta$, $\neg A$ (*вид* $\neg A$, $\Gamma \to \Theta$), *то найдется доказательство секвенции вида* A, $\Gamma \to \Theta$ (*вида* $\Gamma \to \Theta$, A), *имеющее высоту* $\leqslant \alpha$.

Доказывается, как (A)—(B). (Предварительным «восстановлениям» сокращений с формулой $\neg A$ в качестве формулы C правила $\to C$ (правила $C \to$) соответствуют сокращения с формулой A в качестве формулы C правила $C \to$ (правила $\to C$) в конце доказательства.)

(G)—(H). *Если конечная секвенция данного доказательства имеет вид* F, $\Gamma \to \Theta$ (*вид* $\Gamma \to \Theta$, G), *где* F — *элементарная замкнутая истинная формула* (G — *элементарная замкнутая ложная формула*), *то для секвенции* $\Gamma \to \Theta$ *найдется доказательство высоты* $\leqslant \alpha$.

(G)—(H) доказываются, как (A), причем в случае 1) возможен только вывод *У* (т. е. ряд $У\to$ и $\to У$). Устраняя в посылке этого *У* все существенные вхождения F (G) (если таковые имелись), мы затем, воздерживаясь от некоторых $У \to$ ($\to У$), при помощи *СП*-шагов приходим к секвенции $\Gamma \to \Theta$ (высоты $< \alpha$). Случай 2) рассматривается аналогично 2) в (A) и приводит к доказательству $\Gamma \to \Theta$ высоты $\leqslant \alpha$.

Пусть теперь дано некоторое доказательство конечной степени. Мы покажем, что *существует доказательство той же секвенции без сечений, причем высота этого доказательства не превосходит наименьшего* ε-*числа, превосходящего высоту данного доказательства*. Для этого достаточно указать метод преобразования данного доказательства степени > 0 в доказательство меньшей степени, которое имеет высоту $\leqslant 2^{\alpha}$ ($\leqslant \omega^{\alpha}$), где α — высота данного доказательства. (Действительно, если данное доказательство содержит сечения только степени 0, то от них можно избавиться, заменяя каждое такое сечение вполне определенным утончением, полученным после применения (H)—(G) к формуле этого сечения и одной из его посылок.)

Возможность такого преобразования доказывается индукцией по высоте данного доказательства. Именно, пусть она доказана для всех доказательств высоты $< \alpha$ и пусть теперь нам дано доказательство высоты α. Если конечная секвенция этого доказательства получена из посылок не посредством *СП* или сечения, то достаточно применить индуктивное предположение к доказательствам этих посылок (которые ведь имеют высоту $< \alpha$), и, применяя к каждой из них уже имеющееся преобразование, получаем (вполне определенное) доказательство прежней конечной секвенции меньшей степени, которому (в силу монотонности функции 2^{α}) нужно приписать высоту $\leqslant 2^{\alpha}$. Если же конечная секвенция данного доказательства получена путем сечения степени $k > 0$ (случай последнего сечения степени 0 рассматривается аналогично предыдущему), то, смотря по виду формулы C, возможны три случая:

Случай 1. Формула C имеет вид $\forall x F(x)$. Пусть посылками рассматриваемого сечения служат секвенции $\Gamma \to \Theta$, $\forall x F(x)$ и $\forall x F(x), \Delta \to \Lambda$ с высотами α_1 и α_2 соответственно. Пользуясь индуктивным предположением, заменим доказательство этих секвенций доказательствами этих же секвенций, имеющими степень $< k$ и высоты $\leqslant 2^{\alpha_1}$ и $\leqslant 2^{\alpha_2}$ соответственно. Если степень формулы $\forall x F(x)$ меньше k, то получится доказательство прежней конечной секвенции $\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda$ степени $< k$ высоты $\leqslant \max(2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}) + 1 \leqslant 2^{\alpha}$. Пусть теперь степень формулы $\forall x F(x)$ равна k.

Мы вскоре опишем некоторую операцию над ветвями доказательства правой посылки $\forall x F(x), \Delta \to \Lambda$ рассматриваемого сечения. Для этого нам потребуются некоторые предварительные рассмотрения.

Рассмотрим все верхние формулы связки, проходящей через вхождение $\forall x F(x)$ в качестве формулы сечения из правой посылки последнего сечения; каждая из них входит в антецедент некоторой секвенции. Эти вхождения не могут быть вхождениями в аксиому (потому что аксиома не может содержать вхождений формулы $\forall x F(x)$), значит каждое из них возникло в результате некоторого вывода; этим выводом может быть только $\forall \to$ или *У*. Пусть некоторая верхняя формула рассматриваемой связки возникла в результате вывода $\forall \to$, тогда в посылке этого вывода боковой формулой была некоторая формула $F(n_i)$. Обозначим эту посылку $F(n_i), \Delta_i \to \Lambda_i$ (и пусть ее высота $\leqslant 2^{\alpha_1} + \gamma, \gamma < \beta$). По (А) найдется доказательство высоты $\leqslant 2^{\alpha_1}$ для секвенции $\Gamma \to \Theta, F(n_i)$. Путем сечения получаем доказательство секвенции $\Gamma, \Delta_i \to \Theta, \Lambda_i$ степени $< k$ (и высоты $\leqslant 2^{\alpha_1} + \beta$). Если же верхняя формула рассматриваемой связки возникла в результате *У* из секвенции $\Delta_j \to \Lambda_j$ (высоты $< 2^{\alpha_2}$), то мы получим из доказательства последней секвенции с помощью утончений доказательство секвенции $\Gamma, \Delta_j \to \Theta, \Lambda_j$ степени $< k$ (и высоты $\leqslant 2^{\alpha_1} + \beta$, если высота посылки была $\leqslant 2^{\alpha_1} + \gamma, \gamma < \beta$).

Таким образом, в любом случае для каждой секвенции $\forall x F(x), \Delta_i \to \Lambda_i$, в которую входит какая-нибудь верхняя формула рассматриваемой связки, мы получим доказательство секвенции $\Gamma, \Delta_i \to \Theta, \Lambda_i$ степени $< k$.

Произведем теперь над каждой ветвью доказательства секвенции $\forall x F(x), \Delta \to \Lambda$ следующую операцию. Выкинем все секвенции, не содержащие вхождений формулы $\forall x F(x)$, принадлежащих рассматриваемой связке. Останутся лишь секвенции вида $\forall x F(x), \ldots, \forall x F(x), \Delta_i \to \Lambda_i$ (с точностью до порядка формул в антецеденте), где наши $\forall x F(x) \bar{\in} \Delta_i$; мы заменим каждую такую секвенцию на $\Gamma, \Delta_i \to \Theta, \Lambda_i$. Верхняя секвенция преобразованной ветви, по предыдущему, имеет доказательство степени $< k$.

Приклеим это доказательство к верхней секвенции преобразованной ветви.

Получится фигура, также имеющая вид дерева; каждой ее формуле припишем *высоту* $\leqslant 2^{\alpha_1} + \beta$, где β — высота соответствующей секвенции прежнего доказательства. Для рассмотренных верхних секвенций найдутся, по предыдущему, доказательства нужной высоты. Можно доказать, что новая фигура тоже является доказательством или же может быть превращена в таковое с помощью дополнительных *СП*-шагов. (И слово «*высота*» может означать высоту в прежнем смысле.) В самом деле, никакое вхождение $\forall x F(x)$ в рассмотренную выше связку не является вхождением боковой формулы какого-нибудь вывода или вхождением формулы С какого-нибудь сечения. Поэтому каждая секвенция преобразованной ветви получается из преобразованных посылок соответствующей непреобразованной секвенции путем применения того же правила вывода, каким эта последняя секвенция была до преобразования получена из своих посылок (кроме уже упомянутых верхних секвенций), не считая того, что могут потребоваться дополнительные *СП*-шаги. Конечная секвенция преобразованного доказательства правой посылки $\forall x F(x), \Delta \to \Lambda$ совпадает с данной конечной секвенцией $\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda$. Степень этого доказательства $< k$, а высота $\leqslant 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} \leqslant 2^{\alpha}$.

Случай 2. Формула С имеет вид А & В. Этот случай рассматривается тем же методом, что и случай 1, но проще.

Случай 3. Формула C имеет вид $\neg A$. Посылки рассматриваемого сечения имеют вид $\Gamma_1 \to \Theta_1, \neg A$ и $\neg A, \Gamma_2 \to \Theta_2$. Их высоты α_1 и α_2 меньше чем α; заменяем их (согласно (E)—(F)) секвенциями $\Gamma_2 \to \Theta_2$, A и A, $\Gamma_1 \to \Theta_1$ с доказательствами высоты $\leqslant \alpha_1$ и $\leqslant \alpha_2$ и, далее, по индуктивному предположению, заменяем последние доказательства доказательствами степени $< k$ высоты $\leqslant 2^{\alpha_1}$ и $\leqslant 2^{\alpha_2}$. Затем совершаем сечение с формулой A и после сокращений и перестановок получаем доказательство секвенции $\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2$ высоты $\leqslant \max(2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2})+1 \leqslant 2^{\max(\alpha_1, \alpha_2)}+1 \leqslant 2^{\alpha}$. Так как степень формулы A меньше, чем степень формулы $\neg A$, а последняя не превосходит k, то степень полученного доказательства данной конечной секвенции $\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2$ меньше k.

Если данное доказательство получено описанным выше образом, как доказательство $\vdash \to \forall E$, где E — теорема системы H, то ему можно приписать высоту $< \varepsilon_0$, и полученное доказательство без сечений будет также иметь высоту $< \varepsilon_0$, так что и все рассуждение использует в этом случае только порядковые числа $< \varepsilon_0$.

Так как в $G1$ пустая секвенция $\to$ очевидно недоказуема без сечений, то $\to$ недоказуема в $G1$, откуда, согласно § 79 (стр. 422), вытекает непротиворечивость классической арифметики H. Помимо элементарных интуиционистских средств, это доказательство непротиворечивости использует только трансфинитную индукцию до ε_0. (Изложенное здесь доказательство является некоторым видоизменением доказательства Шютте [1951]; Шютте рассматривает системы типа H, применяя к ним генценовский способ рассуждений.)

С помощью индукции до ε_1 можно следующим образом доказать *ω-непротиворечивость классической арифметики:*

Если $\forall x F(x)$ — замкнутая формула системы H и для $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\vdash F(\boldsymbol{n})$ в H, то в $G1$ $\vdash \to F(\boldsymbol{n})$, и секвенция $\to F(\boldsymbol{n})$ имеет при этом высоту $< \varepsilon_0$. Следовательно, секвенция $\to \forall x F(x)$ имеет доказательство высоты $\leqslant \varepsilon_0$. Отсюда следует недоказуемость формулы $\neg \forall x F(x)$ в H; в самом деле, если бы эта формула была доказуема в H, то в $G1$ имели бы доказательство секвенции $\to \neg \forall x F(x)$ высоты $< \varepsilon_0$, а значит, в силу (E), имелось бы доказательство секвенции $\forall x F(x) \to$ высоты $< \varepsilon_0$. Сечение дало бы доказательство секвенции $\to$ в $G1$, имеющее высоту $\leqslant \varepsilon_0 + 1$. В силу предыдущего результата, имелось бы доказательство $\to$ без сечений высоты $< \varepsilon_1$, что нелепо.

ω-непротиворечивость классической арифметики была впервые доказана П. С. Новиковым более сильными конструктивными средствами его работы [1943]. (Именно, использовалась индукция того же типа, что и упомянутая выше индукция перехода от доказательств посылок к доказательству заключения выводов в $G1$.)

Заметим, что, доказывая непротиворечивость, а также ω-непротиворечивость классической арифметики, мы использовали трансфинитную индукцию до ε_0, соответственно до ε_1, но не пользовались не только законом исключенного третьего, но и следующим, также вызывающим возражения, принципом интуиционистской математики: «из лжи следует все, что угодно» (см. прим. перев. на стр. 94). В самом деле, не прибегая к этому принципу, мы показали, как из всякого противоречия классической математики можно получить вывод $\to$ в $G1$ без сечения. Значит, если классическая арифметика противоречива (ω-противоречива), то возможен такой абсурдный вывод. Это доказано с помощью индукции до ε_0 (до ε_1) в интуиционистской арифметике без только что упомянутого принципа, т. е. в так называемом минимальном исчислении (см. прим. перев. на стр. 94). Применение этого принципа могло бы состоять в извлечении следствий из полученного абсурда, чего нам не потребовалось. (Дальнейшее применение контрапозиции: если вывод $\to$ в $G1$ без сечений невозможен, то классическая арифметика ω-непротиворечива — имеет неабсурдную посылку.) Так как классическая арифметика содержит обсуждаемый принцип, то предыдущие результаты можно рассматривать как обоснование — в применении к арифметике — и этого принципа, а не только закона исключенного третьего.

Заметим теперь, что для доказательств секвенций, *не содержащих* $\supset$, $\vee$, $\exists$ *и свободных переменных, не содержащих* $\forall$ *в сукцеденте и имеющих конечную степень*, сохраняет силу теорема 50. (Условие отсутствия $\forall$ в сукцеденте ввиду устранимости сечений и ввиду того, что все формулы — предваренные, так что $\neg \rightarrow$ не могло применяться к формулам, содержащим $\forall$, обеспечивает, что правило (С) в построенном выше доказательстве без сечений не применялось[1]); в остальном доказательство проводится, как в § 79.)

Пусть теперь в классической системе H доказана замкнутая формула вида $\exists x B(x)$, где $B(x)$ — (интуиционистски) нумерически разрешимая формула. Тогда в $H \vdash \neg \forall x \neg B(x)$ и, по предыдущему, в $G1 \vdash \rightarrow \neg \forall x \neg B(x)$; в силу (E), в $G1 \vdash \forall x \neg B(x) \rightarrow$. Далее, в H

$$\vdash \forall x \neg B(x) \supset 1=0, \quad \forall x \neg B(x) \vdash 1=0.$$

По теореме 46, в $G1 \vdash \forall x \neg B(x) \rightarrow 1=0$. Как в теореме 50, модифицируем доказательство этой секвенции и находим среднюю секвенцию, которая может иметь только вид $\neg B(\boldsymbol{n}_1), \ldots, \neg B(\boldsymbol{n}_k) \rightarrow 1=0$. Она доказуема. В интуиционистской H для каждого $i=1, \ldots, k \vdash B(\boldsymbol{n}_i) \vee \vdash \neg B(\boldsymbol{n}_i)$ (в силу нумерической разрешимости $B(x)$, которая, по предположению, имеет место интуиционистски). Отсюда следует (интуиционистски), что $\vdash B(\boldsymbol{n}_i)$ для некоторого $i=1, \ldots, k$ или $\vdash \neg B(\boldsymbol{n}_i)$ для всех таких i. Если бы имел место второй случай, то в $G1$ имели бы $\vdash \rightarrow \neg B(\boldsymbol{n}_i)$ для $i=1, \ldots, k$ и k последовательных сечений, примененные к средней секвенции, дали бы $\rightarrow 1=0$ (а значит и $\rightarrow$) в $G1$. Это противоречит доказанному выше. Следовательно, для некоторого $i \vdash B(\boldsymbol{n}_i)$, причем этот результат имеет место интуиционистски. Отсюда далее вытекает, что $\vdash \exists x B(x)$ имеет место в интуиционистской системе H.

Отсюда вытекает результат:

Если интуиционистски устанавливается нумерическая разрешимость формулы $F(x)$ *и классически* $\vdash \exists x F(x)$, *то* $\vdash \exists x F(x)$ *имеет место также интуиционистски.* (Ср. Новиков [1943][2]).)

В доказательстве Новикова использовалась индукция, аналогичная упомянутой выше индукции от доказательства посылок к доказательству заключения в интуиционистской системе $G1$.

Это — ^{N}-результат, по терминологии § 81. (Он может быть перенесен на арифметику с конструктивным правилом Карнапа.) Во многих случаях этот результат позволяет извлечь интуиционистские, и притом элементарные, доказательства из классических доказательств. (См., например, Добавление V, конец доказательства 2-й ε-теоремы и конец прим. перев. на стр. 454, а также прим. перев. 1 на стр. 192.)

Применим этот результат Новикова к теореме VI (b) § 57.

Пусть для некоторого предиката $(Ey)R(x, y)$; где $R(x, y)$ обще-рекурсивный предикат, интуиционистски имеет место $\overline{(Ey)} R(x, y) \equiv (Ey) S(x, y)$, где $S(x, y)$ — обще-рекурсивный предикат, и пусть в системе гл. IV $\vdash \neg \exists y R(x, y) \sim \exists y S(x, y)$, где $R(x, y)$ и $S(x, y)$ — формулы, формально

---

1) Откуда следует конечность доказательства.

2) В силу результата Новикова, из классической доказуемости формулы $\forall x \exists y B(x, y)$ (где $B(x, y)$ нумерически выражает обще-рекурсивный предикат) вытекает конструктивная истинность этой формулы. Квантор $\exists y$ может отсутствовать (см. *76), т. е. речь может идти о формуле $\forall x B(x)$, где $B(x)$ выражает одноместный обще-рекурсивный предикат.

(см. добавление I), а значит и нумерически, выражающие предикаты $R(x, y)$ и $S(x, y)$ соответственно. Тогда в этой (классической) системе

$$\vdash \exists y \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \exists y \mathrm{S}(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \text{ и в силу *88 } \vdash \exists y(\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{S}(\mathrm{x}, \mathrm{y})).$$

Значит, для каждой цифры $\boldsymbol{n}$, $\vdash \exists y(\mathrm{R}(\boldsymbol{n}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{S}(\boldsymbol{n}, \mathrm{y}))$. Под квантором $\exists y$ стоит нумерически разрешимая формула (§ 41, (D)), следовательно, в силу результата Новикова, $\vdash \exists y(\mathrm{R}(\boldsymbol{n}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{S}(\boldsymbol{n}, \mathrm{y}))$ в интуиционистской формальной арифметике — и более того, из доказательства этого результата видно, что $\vdash \mathrm{R}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}) \vee \mathrm{S}(\mathbf{n}, \boldsymbol{l})$ для некоторой цифры $\boldsymbol{l}$, которая находится по $\boldsymbol{n}$ эффективно. Согласно тезису Чёрча заключаем, что l — обще-рекурсивная функция от n, $l = \varphi(n)$. (На самом деле, функция φ может быть извлечена из доказательства результата Новикова; именно, сперва следует построить обще-рекурсивную функцию, выражающую номер средней секвенции в применении теоремы 50 через число n и номер доказательства секвенции

$$\forall y \neg [\mathrm{R}(\boldsymbol{n}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{S}(\boldsymbol{n}, \mathrm{y})] \rightarrow.)$$

Значит, $R(x, \varphi(x)) \vee S(x, \varphi(x))$ имеет место интуиционистски — и далее интуиционистски $(Ey) R(x, y) \vee (Ey) S(x, y)$ и, наконец, интуиционистски $(Ey) R(x, y) \vee \overline{(Ey)} R(x, y)$. Это означает общую рекурсивность предиката $(Ey) R(x, y)$.

Аналогичное утверждение справедливо для любого числа переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Таким образом, теореме VI (b) § 57 соответствует следующий $^{\mathrm{N}}$-результат (в смысле § 81). *Если интуиционистски* $\overline{(Ey)} R(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv$ $\equiv (Ey) S(x_1, \ldots, x_n, y)$ *и доказательство того, что данный предикат выразим в обеих формах* $(Ey) R(x_1, \ldots, x_n, y)$ *и* $(y) S(x_1, \ldots, x_n, y)$, *где* R *и* S — *примитивно-рекурсивны, формализуется в классической арифметике (т. е. в системе гл.* IV), *то этот предикат обще-рекурсивен.*

БИБЛИОГРАФИЯ

Дата, стоящая в квадратных скобках (например [1908], а не просто 1908) рядом с именем автора, служит ссылкой на эту библиографию (например, Брауэр [1908]). Обычно дата является датой публикации всего тома журнала, в котором помещена цитированная статья. Имеются исключения, главным образом касающиеся статей, опубликованных на международных конгрессах, для которых датой служит обычно дата конгресса (например, Гильберт [1904]). Буквами a, b и т. д., добавленными к дате, отмечаются дальнейшие названия с той же датой; звездочка * возле даты при ссылке указывает, что библиографическое описание сопровождается примечанием[1]).

Перечисляются только те работы, которые упоминаются в тексте этой книги (или — в нескольких случаях — где-либо в этой библиографии). Приведенные выше цитаты не английских работ переведены на английский язык автором[2]).

Алонцо Чёрч в «A bibliography of symbolic logic», образующей № 4 тома I (1936, стр. 121—128) в The journal of symbolic logic, и в «Additions and corrections» (с предметным указателем), помещенных в томе III (1938, № 4, стр. 178—212), претендует на полноту библиографического описания всей литературы по символической логике (включая также смежные области, как рекурсивные функции) вплоть до 1935 г. (С тех пор вышли в свет некоторые дополнительные указатели, перечисленные в последующих томах.)

Литература, вышедшая начиная с 1935 г., отражена в критических рефератах в The journal of symbolic logic. Для них имеется авторский указатель, помещаемый в том же журнале раз в два года (в нечетные годы), и предметный — раз в пять лет (в 1940, 1945 и т. д.).

Настоящая библиография содержит некоторые источники, не являющиеся общедоступными. Сведения о работах, опубликованных после 1935 г., можно почти всегда получить из раздела рефератов в The journal of symbolic logic, а о работах, опубликованных после 1938 г., также и из раздела «Foundations» в Mathematical reviews[3]).

Составляя настоящую библиографию, автор пользовался *Библиографией* Чёрча и разделом рефератов в The journal of symbolic logic, а также библиографиями Френкеля [1928] и Гейтинга [1934] (особенно в отношении источников, которых нет в *Библиографии* Чёрча и в Journal).

Начиная с 1951 г., выходит международная серия монографий под заглавием Studies in logic and the foundations of mathematics (North-Holland Pub. Co., Amsterdam), в которую включаются обзорные исследования и изложения многих разделов этой науки[4]).

А д я н С. И.

1955°. Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп, Докл. АН СССР, 103, № 4, 533—535.

1955°. О проблеме делимости в полугруппах, Докл. АН СССР, 103, № 5, 747—750

А к к е р м а н (A c k e r m a n n W i l h e l m)

1924—25. Begründung des «tertium non datur» mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, Mathematische Annalen, 93, 1—36.

1928. Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, ibid., 99, 118—133.

---

[1]) Кружочек ° возле даты указывает, что соответствующая работа добавлена в список литературы при переводе.—*Прим. перев.*

[2]) Русский текст этих цитат является переводом с английского.—*Прим. перев.*

[3]) О работах, опубликованных после 1 января 1953 г., из раздела «Основания математики и математическая логика» реферативного журнала «Математика».—*Прим. перев.*

[4]) Обзор работ (по 1947 г.) советских ученых по математической логике и исчерпывающую библиографию читатель найдет в статье С. А. Яновской [1956]. Обзор исследований по основаниям математики см. также у Гейтинга [1934] и Мостовского [1953].—*Прим. ред.*

1940. Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, ibid., 117, 162—194.
1954°. Solvable cases of the decision problem. Amsterdam, North-Holland publ. Co., VIII 114 p., Studies in logic and the foundations of mathematics, L. E. J. Brouwer (a. o.) ed.
См. также Гильберт и Аккерман.

Александров П. С.
1948°. Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 441 стр.

Арсенин В. Я. и Ляпунов А. А.
1950°. Теория A-множеств, Успехи матем. наук, 5, № 5 (39), 45—108.

Беман (Behmann Heinrich)
1922. Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem, Math. Annalen 86, 163—229.

Берецки (Bereczki Ilona)
1949. Не опубликовано. Результаты были сообщены автору в письме от Кальмара, датированном 17 ноября 1949 г. (A)—(C) примера 1 § 57 автор получил после прочтения этого письма; (D) было (в основном) устно сообщено автору Кальмаром 18 августа 1948 г.
1951. On recursive functions which are not elementary, Acta scientiarum mathematicarum (Szeged), 13? (должно было появиться). Результат Берецки относительно ^{b}a содержится также в книге Р. Петер [1951, стр. 61 и след.; русск. изд. 1954, стр. 85].

Бернайс (Bernays Paul)
1935. Sur le platonisme dans les mathématiques, L'Enseignement mathématique, 34, 8, 52—69.
1935a. Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik. David Hilbert Gesammelte Abhandlungen, vol. 3, Berlin (Springer), p. 196—216.
1936. Logical calculus. Записки лекций в Институте Высших Исследований (The Institute for Advanced Studies), подготовленные с помощью Фиккеиа (F. A. Ficken). Mimeographed. Inst. for Adv. Study, Princeton, N. J., 1936, 125 p.
1937—54. A system of axiomatic set theory, The journal of symbolic logic, 2 (1937), 65—77; 6 (1941), 1—17; 7 (1942), 65—89 и 133—145; 8 (1943), 89—106; 13 (1948), 65—79; 19 (1954).
1938. Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration. Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6—9 Décembre 1938, Exposés et discussions, опубликованные Ф. Гонсетом, Zurich (Leemann), 1941, p. 144—152. Дискуссия на стр. 153—161.
См. также Гильберт и Бернайс.

Бернштейн (Bernstein Felix)
1898. См. Борель [1898, стр. 104].

Берри (Berry G. G.)
1906. См. Рассел [1906, стр. 645].

Биркгоф (Birkhoff Garret)
1948°. Lattice theory, New York. [Русский перевод: Биркгоф Г., Теория структур, М., 1952, 407 стр.]

Блэк (Black Max)
1933. The nature of mathematics. A critical survey. London (Kegan Paul, Trench, Trubner) and New York (Harcourt, Brace), XIV+219. Перепечатка: London (Routledge and Kegan Paul) and New York (The Humanities Press) 1950.

Борель (Borel Émile)
1898. Leçons sur la théorie des fonctions, Paris (Gauthier—Villars).

Бочвар Д. А.
1938°. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления, Матем. сб., 4 (46), 287—308
1943°. К вопросу о непротиворечивости одного трехзначного исчисления, Матем. сб., 12 (54), 353—369
1944°. К вопросу о парадоксах математической логики и теории множеств, Матем. сб., 15 (57), 369—384.

Брауэр (Brouwer L. E. J.)
1908. De onbetrouwbaarheid der logische principes (Недостоверность принципов логики), Tijdschrift voor wijsbegeerte 2, 152—158. Перепечатано в L. E. J. Brouwer, Wiskunde, waarheid, werkelijkheid, Groningen (P. Noordhoff), 1919, 12 p.

1923. Über die Bedeutungen des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **154** (1925), 1—7. Оригинал по-голландски, 1923.

1928. Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, 1928, p. 48—52. См. также Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the section of sciences, **31**, 374—379.

Буль (Boole George)

1847. The mathematical analysis of logic, being an essay toward a calculus of deductive reasoning. Cambridge (Macmillan, Barclay & Macmillan) and London (George Bell), 82 p. Перепечатка: Oxford (Basil Blackwell) and New York (Philosophical Library, Inc.), 1948.

1854. An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. London (Walton and Maberly), v+iv+424 p. Перепечатана в качестве 2-го тома George Boole's collected works, под редакцией Журдэна (Ph. E. B. Jourdain), Chicago & London, 1916. Перепечатка: New York (Dover Publications), 1951.

Бун (Boone William W.)

1951, резюме. An extension of a result of Post, The journal of symbolic logic, **16**, 237—238.

1952. Реферат статьи Тьюринга [1950], ibid., **17**, 74—76.

Бурали-Форти (Burali-Forti Cesare)

1897. Una questione sui numeri transfiniti. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **11**, 154—164. См. также ibid., 260. Об открытии Кантором парадоксов Бурали-Форти и Кантора см. Френкель, 1932, стр. 470.

Вайсберг (Wajsberg Mordechaj)

1938. Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting, Wiadomości matematyczne, **46**, 45—101.

Вандивер (Vandiver H. S.)

1946. Fermat's last theorem. Its history and the nature of the known results concerning it, Amer. math. monthly, **53**, 555—578.

Ван Хао (Wang Hao)

1952. Logic of many-sorted theories, Journ. symbolic logic, **17**, №2, 105—116

1953. Certain predicates defined by induction schemata, ibid., **18**, № 1, 49—59

См. Россер и Ван Хао, Крейсел и Ван Хао.

Ван Хао и Мак-Нотон (Wang Hao, McNaughton Robert)

1953°. Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles, Paris—Louvain.

Веблен (Veblen Oswald)

1904. A system of axioms for geometry, Trans. Amer. Math. Soc., **5**, 343—384.

См. Веблен и Басси.

Веблен и Басси (Veblen Oswald and Bussey W. H.)

1906. Finite projective geometries, Trans. Amer. Math. Soc., **7**, 241—259.

Вейль (Weyl Hermann)

1918. Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Leipzig (Gruyter), iv+84 p. Перепечатано в 1932 г.

1919. Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, **28**, 85—92.

1926. Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik. Sonderdrücke des Symposion, Erlangen (im Weldkreis-Verlag), Heft 3 (1926), 32 p. Также в Symposium (Berlin), vol. 1 (1925—27), p. 1—32. (Русский перевод составляет раздел I сборника [1934], дополнительного списка литературы.)

1928. Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, **6**, 86—88.

1931. Die Stufen des Unendlichen. Jena (Fischer), 19 p.

1944. David Hilbert and his mathematical work, Bull. Amer. Math. Soc., **50**, 612—654.

1946. Mathematics and logic. A brief survey serving as a preface to a review of «The Philosophy of Bertrand Russell», Amer. math. monthly, **53**, 2—13.

1949. Philosophy of mathematics and natural science. Princeton, N. J. (Princeton University Press), x+311 p. Переработанное и дополненное английское издание на основе перевода Хельмера (Olaf Helmer) с немецкого оригинала [1927].

Воробьев Н. Н.

1952°. Проблема выводимости в конструктивном исчислении высказываний с сильным отрицанием, Докл. АН СССР, **85**, № 4, 689—692.

Гейтинг (Heyting Arend)
1930. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, 1930, 42—56.
1930a. Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, ibid., 57—71, 158—169.
1931—32. Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik, Erkenntnis, 2, 106—115.
1934. Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 3, No 4, Berlin (Springer), iv+73. Ошибка: Теорема Гёделя [1932—33] не имеет места для исчисления предикатов, как утверждает Гейтинг на стр. 18. См. выше § 81, замечание 1.
[Русский перевод: Гейтинг А., Обзор исследований по основаниям математики, М.—Л., 1936.]
1946. On weakened quantification, Journal symbolic logic, 11, 119—121.

Генцен (Gentzen Gerhard)
1934—35. Untersuchungen über das logische Schliessen, Mathematische Zeitschrift, 39, 176—210, 405—431. Не считая мелких отличий в понятии формулы, а для систем гильбертовского типа в точном выборе постулатов, наша классическая «формальная система *H*» для исчисления предикатов (см. § 77) является тем же, что и «Kalkül *LHK*» Генцена, наша интуиционистская «*H*»—его «*LHJ*», наша классическая «*G*1»—его «*LK*» и наша интуционистская «*G*1»—его «*LJ*».
1936. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Mathematische Annalen, 112, 493—565. Он употребляет 1, 2, 3... там, где мы употребляем 0, 1, 2,... .
1938. Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung, Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, new series, No 4, Leipzig (Hirzel), p. 5—18.
1938a. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, ibid., p. 19—44.
1943. Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie, Math. Ann., 119, No 1, p. 140—161.

Гёдель (Gödel Kurt)
1930. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte für Mathematik und Physik, 37, 349—360.
1931. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, ibid., 38, 173—198.
1931—32. Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 3 (за 1930—31, вышла из печати в 1932), p. 12—13. В этой статье результаты приводятся без доказательств.
1931—32a. Remarks contributed to a Diskussion zur Grundlegung der Mathematik, Erkenntnis, 2, 147—148.
1932. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül, Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Anzeiger, 69 (1932), 65—66. Перепечатка в Ergebnisse eines mathematischen Kolloquims, Heft 4 (за 1931—32, вышла из печати в 1933), p. 40.
1932—33. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. Ergebnisse eines math. Koll., Heft 4 (за 1931—32, вышла из печати в 1933), p. 34—38.
1934. On undecidable propositions of formal mathematical systems. Записки Клини (S. C. Kleene) и Россера (Barkley Rosser) лекций в Институте высших исследований (the Institute for Advanced Study), Mimeographed, Princeton, N. J., 1934, 30 p.
1936. Über die Länge von Beweisen, Ergebnisse eines math. Koll. Heft 7 (за 1934—35, вышла из печати в 1936, с замечанием, добавленным в печати), p. 23—24.
1938. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis, Proceedings of the National Academy of Sciences, 24, 556—557. Полное доказательство изложено в [1940].
1939. Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis, ibid., 25, 220—224.
1940. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. Лекции, читанные в Институте Высших Исследований (the Institute for Advanced Study) в 1938—1939 гг., записки Брауна (George W. Brown). Annals of Mathematics studies, No 3. Lithoprinted. Princeton University Press, Princeton 1940, 66 p. (В аксиоме A4 следует вставить «(u)» после «(∃z)».). Это сделано в русском переводе А. Маркова.—*Прим. перев.* (См. также пример 13 § 74 выше). Дополнительный тираж 1951, 74 p. [Русский перевод: Гёдель К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, Успехи матем. наук, 3, № 1 (1948), 96—149.]
1944. Russell's mathematical logic, The philosophy of Bertrand Russell, ed. by Paul Arthur Schilpp, Northwestern University, Evanston and Chicago, p. 123—153.

1947. What is Cantor's continuum problem? American mathematical monthly, **54**, 515—525.
Гильберт (Hilbert David)
1899. Grundlagen der Geometrie. 7-ое изд. (1930), Leipzig und Berlin (Teubner), vii+326 pp. [Русский перевод: Гильберт Д., Основания геометрии, ОГИЗ, М.—Л., 1948, 491 стр.]
1900. Über den Zahlbegriff. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 8, p. 180—184. Неполностью перепечатана в Grundlagen der Geometrie, 7-ое изд., Leipzig und Berlin (Teubner) 1930, p. 241—246 (стр. 315—321 русского перевода).
1904. Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904, Leipzig, 1905, p. 175—185. Перепечатана Loc. cit., p. 247—261 (стр. 322—337 русского перевода).
1918. Axiomatisches Denken, Mathematische Annalen, **78**, 405—415. Перепечатка в David Hilbert Gesammelte Abhandlungen, vol. 3, Berlin (Springer) 1935, p. 146—156.
1926. Über das Unendliche, Math. Ann., **95**, 161—190. Перепечатка и сокращенном виде в Jahresb. Deutschen Math. Verein., **36** (1927), 201—215, а также с некоторыми изменениями в Grundlagen der Geometrie, 7-ое изд., 1930, p. 262—288 (стр. 338—364 русского перевода).
1928. Die Grundlagen der Mathematik, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, **6**, 65—85. Перепечатка с сокращениями в Grundlagen der Geometrie, 7-ое изд., р. 289—312 (стр. 365—388 русского перевода).
См. Гильберт и Аккерман, Гильберт и Бернайс.
Гильберт и Аккерман (Hilbert David and Ackermann Wilhelm)
1928. Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin (Springer), viii+120 pp., 2-ое изд., 1938, viii+133 pp. Перепечатка: New York (Dover Publications) 1946, 3-е изд., Berlin, Göttingen, Heidelberg (Springer) 1949, viii+155 pp. [Русский перевод со второго издания: Гильберт и Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ, М., 1947, 302 стр.]
[Во втором издании 1938 г. имелись неточности, неисправленные в русском переводе. Две из них относятся к определению правил вывода $\alpha 3$) и δ) узкого исчисления предикатов. Исправляем их по русскому изданию:
1) $\alpha 3$) На стр. 98 после слова «переменных» (11-я строка снизу) следует вставить запятую и слова: «в каждом случае встречи F и $\mathfrak{A}$ пустые места в F заполнены только такими переменными, которые не встречаются в $\mathfrak{B}(x_1,\dots,x_n)$ в связанном виде». (Эту поправку мы заимствуем из 3-го немецкого издания 1949 г.).
2) δ) На стр. 99 (11-ая строка снизу) после слова «формула» следует вставить точку с запятой и слова: «кроме того, новая связанная переменная не должна входить в исходную формулу в качестве свободной». (Иначе из формулы $(Ey)(x \neq y)$ получили бы по правилу δ) $(Ex)(x \neq x)$.)
Имеются неточности также в доказательстве теоремы о полноте узкого исчисления. Прежде всего, не показано, что тождественность формулы не может возникнуть или потеряться при переходе к нормальной форме Сколема, так что переход к этой форме на стр. 126 не обоснован. Для исправления этого пробела нужную половину указанного утверждения можно получить по аналогии с рассуждениями стр. 115—116. (Из теоремы Гёделя о полноте и теоремы о нормальной форме Сколема в свою очередь вытекает это утверждение.) Кроме того, теоретико-числовой предикат Φ на стр. 132 определен не для всех значений аргументов и его следует доопределить (любым образом).
В третьем издании 1949 г. содержится улучшенное изложение этой теоремы о полноте, а также более подробное изложение теории типов.—*Прим. перев.*]
Гильберт и Бернайс (Hilbert David and Bernays Paul)
1934. Grundlagen der Mathematik, vol. I, Berlin (Springer), xii +471 p. Перепечатка в Ann Arbor, Mich. (J. W. Edwards) 1944.
1939. Ibid., vol. 2, Berlin (Springer), xii+498 p. Перепечатка в Ann Arbor, Mich. (Edwards) 1944.
Гливенко (Glivenko V.)
1929. Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, Académie Royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences, ser. 5, **15**, 183—188.
Гонсет (Gonseth Ferdinand)
1933. La verité mathématique et la réalité, L'Enseignement mathématique, **31** (за 1932, вышло из печати в 1933), 96—114.
См. также: A propos d'un catalogue paradoxical, Réponse de M. Gonseth à M. Winants, ibid., p. 269—271.
ван Данциг (Dantzig, D. van)
1947. On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics, Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the section of scien-

ces, 50, 918—929, 1092—1103; см. также Indagationes mathematicae, 9, 429—440, 506—517.
1948 Significs, and its relation to semiotics, Library of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11—18, 1948), vol. 2 Philosophical essays, Amsterdam (Veen), 1948, p. 176—189.

Дедекинд (Dedekind Richard)
1872. Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig (5-ое изд. 1927). Также в Dedekind Gesammelte mathematische Werke, vol. III, Braunschweig (Vieweg & Sohn), 1932, p. 315—334. [Русский перевод: Дедекинд Р., Непрерывность и иррациональные числа, Mathesis, Одесса, 1923.]
1888. Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig (6-ое изд. 1930). Также в Werke, vol. III, 335—391. Английский перевод Бимена (Beman), The nature and meaning of numbers, loc. cit., p. 31—105.

Деккер (Dekker J. C. E.),
1954°. A theorem on hypersimple sets. Proc. Amer. Math. Soc., 5, No 5, 791—796.

Детловс В. К.
1953°. Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции, Докл. АН СССР, 90, 723—725.

Диксон (Dixon A. C.)
1906. On «well-ordered» aggregates, Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, 4, 18—20. Ср. ibid., p. 317—319.

Дэйвис (Davis Martin)
1950, резюме. Relatively recursive functions and the extended Kleene hierarchy, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U.S.A., Aug. 30—Sept. 6, 1950), 1952, vol. 1, p. 723.

Есенин-Вольпин А. С.
1954°. Реферат книги Ван Хао и Мак-Нотона [1953], Реф. журн. Математика, № 8, реф. 4328.

Иоганссон (Johansson Ingebrigt)
1936°. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus, Compositio Mathematica, 4 (1), 119—136.

Ион (Iongh Johan J., de)
1948. Restricted forms of intuitionistic mathematics, Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11—18, 1948), Amsterdam (North-Holland Pub. Co.) 1949, p. 744—748 (fasc. 2).

Кальмар (Kalmár László)
1934—35. Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls, Acta scientiarum mathematicarum (Szeged), 7, 222—243.
1943. Egyszerű példa eldönthetetlen aritmetikai problémára (Ein einfaches Beispiel für ein unentscheibares arithmetisches Problem). Matematikai és fizikai lapok, 50, 1—23. По-венгерски, с немецким резюме. Кальмар выбирает в качестве базиса для элементарных функций переменные, 1, $+$, $\cdot$, $|a-b|$, $[a/b]$, $\sum\limits_{y=w}^{z}$, $\prod\limits_{y=w}^{z}$, замечая, однако, что $\cdot$ и $[a/b]$ сводимы к остальным. (Ср. выше § 57, пример 1.)
1948. On unsolvable mathematical problems, Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11—18, 1948), Amsterdam (North-Holland Pub. Co.) 1949, p. 756—758 (fasc. 2). Preprints 1948, p. 534—536.
1950. Eine einfache Konstruktion unentscheidbarer Sätze in formalen Systemen, Methodos, 2, 220—226. Английский перевод Глазерфельда (Ernst v. Glasersfeld), p. 227—231.
1950a. Another proof of the Gödel-Rosser incompletability theorem, Acta scientiarum mathematicarum (Szeged), 12, 38—43.

Кантор (Cantor Georg)
1874. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 77, 258—262. Перепечатана в Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen, Berlin (Springer), 1932, p. 115—118.
1895—97. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Mathematische Annalen, 46 (1895), 481—512; 49 (1897), 207—246. Перепечатана в Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen, стр. 282—351. Английский перевод Журдэна (Ph. E. B. Jourdain) под заголовком Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, Chicago and London (Open Court), 1915, xi+211 p.

Карнап (Carnap Rudolf)
1931—32. Die logizistische Grundlegung der Mathematik, Erkenntnis, 2, 91—105.

1934. The logical syntax of language. New York (Harcourt, Brace) and London (Kegan Paul, Trench, Trubner) 1937, xvi+352 p. Перевод с немецкого оригинала А. Смитон (Amethe Smeaton), 1934, с добавлениями.

Карри (Curry Haskell B.)
1929. An analysis of logical substitution, American journal of mathematics, 51, 363—384.
1930. Grundlagen der kombinatorischen Logik, ibid., 52, 509—536, 789—834.
1932. Some additions to the theory of combinators, ibid., 54, 551—558.
1939. A note on the reduction of Gentzen's calculus *LJ*, Bulletin of the American Mathematical Society, 45, 288—293.
1948—49. A simplification of the theory of combinators, Synthese, 7, 391—399.
1950. A theory of formal deducibility, Notre Dame mathematical lectures, No 6, University of Notre Dame, Notre Dame, Ind. IX+126 pp.
1952. The permutability of rules in the classical inferential calculus, The journal of symbolic logic, 17, № 4, 245—248.

Кемени (Kemeny John G.)
1948. Реферат статьи Мостовского [1947a], Journal symbolic logic, 13, 46—48.

Кетонен (Ketonen Oiva)
1944. Untersuchungen zum Prädikatenkalkül, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, ser. A, I. Mathematica-Physica 23, Helsinki, 71 p.

Клини (Kleene Stephen C.)
1934. Proof by cases in formal logic, Ann. of math., 2 s., 35, 529—544. В связи с § 20 этой книги, см. стр. 534. Употребление «⊢» для выражения выводимости по правилам вывода исходит от Россера; видоизменение, делающее ⊢ зависимым также и от аксиом, исходит от автора.
1935. A theory of positive integers in formal logic, Amer. jour. math., 57, 153—173, 219—244.
1936. General recursive functions of natural numbers, Math. Ann., 112, 727—742. По поводу ошибки и упрощения см. Journal symbolic logic, 3, 152; 2, 38 и 4 верх стр. IV в конце.
1936a. λ-definability and recursiveness, Duke mathematical journal, 2, 340—353.
1936b. A note on recursive functions, Bull. Amer. Math. Soc., 42, 544—546.
1938. On notation for ordinal numbers, Journ. symbolic logic, 3, 150—155.
1943. Recursive predicates and quantifiers, Transactions of the American Mathematical Society, 53, 41—73. Опустить § 15, потому что доказательство теоремы I в [1944] содержит ошибку. В сноске ([21]) указывается только функция, являющаяся частично, но не потенциально рекурсивной, хотя и тексте упоминаются также предикаты. (На этот просмотр внимание автора обратил Деккер (J. C. E. Dekker) 18 марта 1952 г.) Предикат такого рода приведен выше и примере 6 § 63.
1944. On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals, Amer. journ. math., 66, 41—58. На стр. 43 у (4) и (11) следует опустить звездочки (ср. *86 и *95 выше). Рассмотрение примера $P(a)$ в 8 является неполным. Действительно, (18) не только служит другим способом записи индуктивного определения «a доказуема», но может иметь и другие решения для $P(a)$ помимо $P(a) \equiv \{a$ доказуема$\}$ (например, $P(a) \equiv \{a$—формула$\}$). Однако для любого решения (18), $\{a$ доказуема$\} \rightarrow P(a)$; и легко вывести из (22), что для частного решения $P(a) \equiv (Ex)R(a,x)$, $P(a) \rightarrow \rightarrow \{a$ доказуема$\}$. Аналогично для всех применений этого метода, в которых частное решение содержит только квантор существования (ср. конец § 53). Но и применении к $a \in Q$ (в 14, где имеется также квантор общности, рассуждение не может быть этим методом доведено до конца, а потому теорема 1 и первая половина теоремы 2 не доказаны. Автор рассчитывает вернуться к рассмотрению этого вопроса во второй статье под тем же заглавием. (См. Клини [1955].—*Прим. ред.*)
1945. On the interpretation of intuitionistic number theory, Journ. symbolic logic, 10, 109—124.
1948. On the intuitionistic logic, Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11—18, 1948), Amsterdam (North-Holland Pub. Co.) 1949, p. 741—743 (fasc. 2). Preprints 1948, p., 185—187.
1950. A symmetric form of Gödel's theorem, Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Proceedings of the section of sciences, 53, 800—802; также Indagationes mathematicae, 12, 244—246.
1950a. Recursive functions and intuitionistic mathematics. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U. S. A., Aug. 30,—Sept. 6, 1950), 1952, vol. 1, p. 679—685.
1952. Permutability of inferences in Gentzen's calculi *LK* and *LJ*. Memoirs of the American Mathematical Society, No 10, p. 1—26.
См. Чёрч и Клини, Клини и Пост.

Клини и Пост (Kleene S. C., Post E. L.)
1954°. The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability, Ann. Math., 59, No 3, 379—407.

Колмогоров А. Н.
1925°. О принципе tertium non datur; Матем. сб., 32, 646—667.
1932°. Zur Deutung der intuitionistischen Logik., Math. Zeits., 35, 58—65.
1953, резюме°. О понятии алгоритма, Успехи матем. наук, 8, № 4, 175—176.

Крейсел (Kreisel G.)
1950. Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus, Fundamenta mathematicae, 37, 265—285.

Куайн (Quine Willard Van Orman)
1940. Mathematical logic. New York (Norton), xiii + 348 p. См. Россер [1942] и Куайн [1941] по поводу того обстоятельства, что в системе этой книги появляется парадокс Бурали-Форти (хотя, повидимому, не проходит парадокс Кантора), как это было обнаружено Россером и Линдоном (Roger C. Lyndon). Переработанное издание, Harvard University Press, 1951, xii +346 p.
1941. Element and number, Journ. symbolic logic, 6, 135—149.
См. Чёрч и Куайн.

Кузнецов А. В.
1950. О примитивно-рекурсивных функциях большого размаха, Докл. АН СССР, 71, 233—236.

Лангфорд (Langford Cooper Harold)
1927. On inductive relations, Bull. Amer. Math. Soc., 33, 599—607.
См. Льюис и Лангфорд.

Лёвенгейм (Löwenheim Leopold)
1915. Über Möglichkeiten im Relativkalkül, Math. Ann., 76, 447—470.

Лось (Łoś J.)
1954°. On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems, Colloquium Math., 3, 58—62.

Лукасевич (Łukasiewicz Jan)
1920. O logice trójwartościowej (О трехзначной логике), Ruch filozoficzny (Lwów), 5, 169—171.
1925. Démonstration de la compatibilite des axioms de la théorie de la déduction, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 3 (за 1924, вышло из печати в 1925), 149.
См. Лукасевич и Тарский.

Лукасевич и Тарский (Łukasiewicz Jan and Tarski Alfred)
1930. Untersuchungen über den Aussagenkalkül, Comptes rendus des seances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, 23, 30—50.

Льюис (Lewis Clarence Irving)
1912. Implication and the algebra of logic, Mind. n. s., 21, 522—531.
1917. The issues concerning material implication, The journal of philosophy, psychology and scientific method, 14, 350—356.
См. Льюис и Лангфорд.

Льюис и Лангфорд (Lewis Clarence Irvig and Langford Cooper Harold)
1932. Symbolic logic, New York and London (The Century Co.), XI+506 p. Перепечатка New York (Dover Publications), 1951.

Ляпунов А. А.
См. Арсенин В. Я. и Ляпунов А. А.

Мак-Кинси (McKinsey J. C. C.)
1939. Proof of the independence of the primitive symbols of Heyting's calculus of propositions, Journ. symbolic logic, 4, 155—158.
См. Фэйс и Мак-Кинси, Мак-Кинси и Тарский.

Мак-Кинси и Тарский (McKinsey J. C. C. and Tarski Alfred)
1948. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting, Journ. Symbolic Logic 13, 1—15.

Мак-Лейн (MacLane Saunders)
1934. Abgekürtze Beweise im Logikkalkul, Dissertation Göttingen, 61 p.

Мак-Нотон (McNaughton Robert)
См. Ван Хао и Мак-Нотон.

Маннури (Mannoury Gerrit)
1909. Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik, Haarlem (P. Visser), viii+276 p.
1925. Mathesis en mystiek, Amsterdam. Французский перевод: Les deux pôles de l'esprit, Paris, 1933.
1934. Die signifischen Grundlagen der Mathematik, Erkenntnis, 4, 288—309, 317—345.
1947°. Les fondements psycho-linguistiques des mathématiques, Neuchâtel, изд. Griffon, 1947, Bibliothèque scientifique 7, Phylosophie, 63 p.

Марков А. А.
1947. Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем, Докл. АН СССР, новая серия, 55, 587—590.
1947a. О некоторых неразрешимых проблемах, касающихся матриц, Докл. АН СССР, новая серия, 57, 539—542.
1947b. Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем II, Докл. АН СССР, новая серия, 58, 353—356.
1947c. О представлении рекурсивных функций, Докл. АН СССР, новая серия, 58, 1891—1892.
1949. О представлении рекурсивных функций, Изв. АН СССР, серия матем., 13, 417—424. Англ. перев. On the representation of recursive functions, Amer. Math. Soc., translation No 54, lithoprinted, New York 1951, 13 p.
1950°. Теория алгорифмов. Comptes Rendus du Premier Congrès des mathématiciens Hongrois, 191—203.
1951. Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем, Докл. АН СССР, новая серия, 77, 19—20.
1951a. Невозможность алгорифмов распознавания некоторых свойств ассоциативных систем, Докл. АН СССР, новая серия, 77, 953—956.
1951b. Об одной неразрешимой проблеме, касающейся матриц, Докл. АН СССР, новая серия, 78, 1089—1092.
1951c°. Теория алгорифмов, Труды матем. ин-та АН СССР, 38, 176—189.
1952°. О неразрешимых алгорифмических проблемах, Матем. сб., 31, 24—32.
1954°. Теория алгорифмов, Труды матем. ин-та АН СССР, 42, 374 стр.

Медведев Ю. Т.
1955°. Степени трудности массовых проблем, Докл. АН СССР, 104, № 5, 501—504

Де Морган (De Morgan Augustus)
1847. Formal logic: or, the calculus of inference, necessary and probable, London, xvi+336 p. Перепечатка: Chicago and London 1926, под ред. Тейлора (A. E. Taylor).
1864. On the syllogism, no IV, and on the logic of relations (прочитана 23 апреля 1860) Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 10, 331—358.

Мостовский (Mostowski Andrzej)
1947. On definable sets of positive integers, Fundamenta mathematicae, 34, 81—112. [Автор, в частности, переносит теорему 28° на расширения арифметики, в которых гёделевские номера теорем образуют класс, арифметический по Гёделю.—*Прим. перев.*].
1947a. On absolute properties of relations, Journ. symbolic logic, 12, 33—42.
1948. Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus, ibid., 13, 204—207.
1948a. On a set of integers not definable by means of one-quantifier predicates, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 21, 114—119.
1949. An undecidable arithmetical statement, Fund. math., 36, 143—164.
1951. A classification of logical systems, Studia philosophica, 4, 237—274.
1952. Sentences undecidable in formalized arithmetic. An exposition of the theory of Kurt Gödel, Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.), VIII+117 p.
1952a. Models of axiomatic systems, Fund. Math., 39, 133—158. Ср. Рыль-Нардзевский [1952].
1953°. Современное состояние исследований по основаниям математики, Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3, 3—38.
См. Мостовский и Тарский.

Мостовский и Тарский (Mostowski Andrzej and Tarski Alfred)
1949, резюме. Undecidability in the arithmetic of integers and in the theory of rings, Journ. symbolic logic, 14, 76.

Нельсон (Nelson David)
1947. Recursive functions and intuitionistic number theory, Trans. Amer. Math. Soc., 61, 307—368.
1949. Constructible falsity, Journ. Symbolic logic, 14, 16—26.

Нейман (Neumann, John von)
1925. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 154, 219—240. Berichtigung, ibid., 155 (1926), 128.
1927. Zur Hilbertschen Beweistheorie, Math. Zeit., 26, 1—46.
1928. Die Axiomatisierung der Mengenlehre, ibid., 27, 669—752.
1931—32. Die formalistische Grundlegung der Mathematik, Erkenntnis, 2, 116—121.
1947. The mathematician. The works of the mind, ed. by Robert B. Heywood, Chicago (U. of Chicago Press), p. 180—196.

Новиков П. С.
1939°. О некоторых теоремах существования, Докл. АН СССР, 23, 438—440.
1943°. On the consistency of certain logical calculus, Матем. сб., 12 (54), 231—261.
1947°. О логических парадоксах, Докл. АН СССР, 56, 451—453.
1951°. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств, Труды матем. ин-та АН СССР, 38, 279—316.
1952°. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества, Докл. АН СССР, 85, № 4, 709—712.
1955°. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, Труды матем. ин-та АН СССР, 44, 143 стр.

Ониси (Ohnishi Masao)
1953°. On intuitionistic functional calculus, Osaka Math. J., 5, no 2, 203—209.

Паш (Pasch Moritz)
1882. Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig (Teubner), IV+201 p. Перепечатано в Vorlesungen über neuere Geometrie, M. Pasch und Max Dehn, Berlin (Springer) 1926, VIII+275 p.

Пеано (Peano Giuseppe)
1889. Arithmetices principia, nova methodo exposita, Turin (Bocca), XVI+20 p.
1891. Sul concetto di numero, Rivista di matematica, 1, 87—102, 256—267. Пеано формулирует свои аксиомы для целых положительных чисел. (Многие авторы называют их «натуральными числами».)
1894—1908. Formulaire de mathématiques, Turin. Введение и пять томов. Под ред. Пеано. Написано им в сотрудничестве с Беттацци (Rodolfo Bettazzi), Бурали-Форти (Cesare Burali-Forti), Кастеллано (F. Castellano), Фано (Gino Fano), Джудиче (Francesco Giudice), Вайлати (Giovanni Vailati) и Виванти (Giulio Vivanti).

Петер (Péter Rózsa)
1934. Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, Math. Ann., 110, 612—632.
1935. Konstruktion nichtrekursiver Funktionen, ibid., 111, 42—60.
1935a. A rekursív függvények elméletéhez (Zur Theorie der rekursiven Funktionen). По-венгерски с подробным немецким резюме. Matematikai és fizikai lapok, 42, 25—49.
1936. Über die mehrfache Rekursion, Math. Ann., 113, 489—527.
1940. Реферат статьи Сколема [1939], Journ. symbolic logic, 5, 34—35.
1950. Zusammenhang der mehrfachen und transfiniten Rekursionen, ibid., 15, 248—272.
1951. Rekursive Funktionen. Akadémiai Kiadó (Akademischer Verlag) Budapest, 206 p. [Русский перевод: Петер Р., Рекурсивные функции, ИЛ, М., 1954, 264 стр.]

Пильчак Б. Ю.
1950°. О проблеме разрешимости для исчисления задач, Докл. АН СССР, 75, № 6, 773—776.
1952°. Об исчислении задач, Украинский матем. журнал, 4, № 2, 174—194.

Пирс (Peirce Charles Sanders)
1867. On an improvement in Boole's calculus of logic (представлено 12 марта 1867), Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, 7 (1865—68), 250—261. Перепечатка в Collected papers of Charles Sanders Peirce, ed. by Charles Hartshorne & Paul Weiss, Cambridge, Mass. (Harvard University Press), vol. 3 (1933), p. 3—15.
1880. On the algebra of logic. Chapter I.—Syllogistic. Chapter II.—The logic of non-relative terms. Chapter III—The logic of relatives, Amer. journ. math., 3, 15—57. Перепечатана с исправлениями в Collected papers, vol. 3, p. 104—157.

Пост (Post Emil L.)
1921. Introduction to a general theory of elementary propositions, Amer. journ. math., 43, 163—185.
1936. Finite combinatory processes—formulation I, Journ. symbolic logic, 1, 103—105.
1943. Formal reductions of the general combinatorial decision problem, Amer. journ. math., 65, 197—215.

1944. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems, Bull. Amer. Math. Soc., 50, 284—316.
1946. A variant of a recursively unsolvable problem, ibid., 52, 264—268.
1946a. Note on a conjecture of Skolem, Journ. symbolic logic, 11, 73—74.
1947. Recursive unsolvability of a problem of Thue, ibid., 12, 1—11.
1948, резюме. Degrees of recursive unsolvability. Предварительное сообщение, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 641—642.
См. Клини и Пост.

Прандтль (Prandtl Carl)
1855. Geschichte der Logik im Abendlande, vol. 1, Leipzig (S. Hirzel), XII+734 p. (Остальные тома 1861, 1867, 1870.) Перепечатка, 1927.

Пресбургер (Presburger M.)
1930. Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. Sprawozdanie z I Kongresu Matematyków Krajów Slowiańskich (Comptes-rendus du I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves), Warszawa 1929, Варшава 1930, p. 92—101, 395.

Пуанкаре (Poincaré Henri)
1900. Du role de l'intuition et de la logique en mathématiques, Compte rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens, tenu a Paris du 6 au 12 aout 1900, Paris (Gauthier-Villars) 1902, p. 115—130.
1902. La science et l'hypothèse, Paris, 284 p. Перевод на английский Хальстеда (Bruce Halsted) помещен на стр. 27—197 в H. Poincaré, The foundations of science New York (The Science Press), 1913; перепечатка, 1929. [Русский перевод: Пуанкаре А., Наука и гипотеза, с пред. Н. А. Умова, М., 1904, 268 стр.]
1905—06. Les mathématiques et la logique. Revue de métaphysique et de morale, 13 (1905), 815—835; 14 (1906), 17—34, 294—317. Перепечатана в 1908 г. с существенными изменениями и добавлениями.
1908. Science et méthode, Paris, 311 p. Перевод Хальстеда помещен на стр. 359—546 в The foundations of science, New York, 1913; перепечатка, 1929. [Русский перевод: Пуанкаре Г., Наука и метод, Mathesis, Одесса, 1910.]

Рамсей (Ramsey F. P.)
1926. The foundations of mathematics, Proc. London Math. Soc., ser. 2, 25, 338—384. Перепечатано на стр. 1—61 в F. P. Ramsey, The foundations of mathematics and other logical essays, ed. by R. B. Braithwaite, London (Kegan Paul, Trench, Trubner) and New York (Harcourt, Brace) 1931. Перепечатка этого издания London (Routledge and Kegan Paul) and New York (Humanities Press) 1950.

Расёва и Сикорский (Rasiowa H. and Sikorski R.)
1950. A proof of the completeness theorem of Gödel, Fund. math., 37, 193—200. По поводу упрощения Тарского, ср. Journ. symbolic logic., 17, 72.
1953°. Algebraic treatment of the notion of satistiability, Fund. Math., 40, 62—95.
1954°. On existential theorems in non classical functional calculi, Fund. math., 41, № 1, 21—28.

Рассел (Russell Bertrand) (Russell B. A. W.)
1902. On finite and infinite cardinal numbers (§ III, статьи Уайтхеда On cardinal numbers), Amer. journ. math., 24, 378—383.
1902—03. Парадокс Рассела встречается у Фреге [1903] в postscriptum'е (датированном Фреге октябрем 1902 г.), стр. 253—265. По поводу независимого открытия Цермело этого парадокса, см. Цермело [1908a, стр. 119] и Гильберт [1926, стр. 169].
1906. Les paradoxes de la logique, Revue de métaphysique et de morale, 14, 627—650.
1908. Mathematical logic as based on the theory of types, Amer. journ. math., 30, 222—262.
1910. La théorie des types logiques, Rev. métaph. mor., 18, 263—301.
1919. Introduction to mathematical philosophy. London (G. Allen and Unwin) and New York (Macmillan), VIII + 208 p., 2nd ed. 1920.
См. Уайтхед и Рассел.

Ришар (Richard Jules)
1905. Les principes des mathématiques et le probleme des ensembles, Revue générale des sciences pures et appliquées, 16, 541—543. Также в Acta mathematica, 30 (1906), 295—296.

Робинсон Дж. (Robinson Julia)
1949, резюме. Undecidability in the arithmetic of integers and rationals and in the theory of fields, Journ. symbolic logic, 14, 77.

1949. Definability and decision problems in arithmetic, ibid., 98—114. Для § 48 выше, ее рассмотрение целых положительных чисел может быть приспособлено к натуральным числам.

1950. General recursive functions, Proceedings of the American Mathematical Society, 1, 703—718.

Робинсон Р. М. (Pobinson Raphael M.)

1947. Primitive recursive functions, Bull. Amer. Math. Soc., 53, 925—942.

1948. Recursion and double recursion, ibid., 54, 987—993.

1949, резюме. Undecidable rings, ibid., 55, 1050.

1950, резюме. An essentially undecidable axiom system, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U.S.A., Aug. 30—Sept. 6, 1950), 1952, vol. 1, p. 729—730. Система Робинсона проще той, которой мы пользовались прежде (согласно Мостовскому и Тарскому [1949, резюме]) для той же цели в §§ 41, 49 и 76.

Россер (Rosser Barkley) (Rosser J. B.; Rosser J. Barkley)

1935. A mathematical logic without variables, Ann. math., 2 s., 36, 127—150 и Duke math. journ., 1, 328—355. В связи с § 20 этой книги см. стр. 130, 329 и замечание в связи с Клини [1934] (в этой библиографии).

1936. Extensions of some theorems of Gödel and Church, Journ. symbolic logic, 1, 87—91.

1936a. Реферат статьи Гёделя [1936] ibid., 1, 116.

1937°. Gödel Theorems for non-constructive logics, Journ. Symb. Logic, v. 2, 129—137.

1939. On the consistency of Quine's «New foundations for mathematical logic», ibid., 4, 15—24.

1942. The Burali-Forti paradox, ibid., 7, 1—17.

1942a. New sets of postulates for combinatory logics, ibid., 18—27. См. поправку у Карри [1948—49].

См. Россер и Туркетт, Россер и Ван Хао.

Россер и Ван Хао (Rosser J. Barkley and Wang Hao)

1950. Non-standard models for formal logics, Journ. symbolic logic, 15, 113—129.

Россер и Туркетт (Rosser J. B. and Turquette A. R.)

1945. Axiom schemes for m-valued propositional calculi, Journ. symbolic logic, 10, 61—82. Ср. [1950].

1948—51. Axiom schemes for m-valued functional calculi of first order. Part I. Definition of axiom schemes and proof of plausibility, ibid., 13 (1948), 177—192. Part II. Deductive completeness, ibid., 16 (1951), 22—34.

1949. A note on the deductive completeness of m-valued propositional calculi, ibid., 14, 219—225.

1952. Many-valued logics. Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.), 124 p.

Роуз (Rose Gene F.)

1952. Jaskowski's truth-tables and realizability. Докторская диссертация, The University of Wisconsin.

1953°. Propositional calculus and realizability, Trans. Amer. Math. Soc., 75, 1—19.

Рыль-Нардзевский (Ryll-Nardzewski Czesław)

1952. The role of the axiom of induction in the elementary arithmetic, Fund. Math., 39, 239—263. С тех пор Мостовский получил дальнейшие результаты [1952a].

Рюстов (Rüstow Alexander)

1910. Der Lügner, Theorie, Geschichte und Auflösung, Leipzig (Teubner), V+147 p.

Серпинский (Sierpiński W.)

1928°. Leçons sur les nombres transfinis, Paris, Gauthier-Villars. 2-е изд., 1950, 240 стр.

Сколем (Skolem Thoralf)

1919. Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalkuls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 1919, no 3, 37 p.

1920. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, ibid., 1920, No 4, 36 p.

1922—23. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem Fünften Kongress der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922, Helsingfors 1923, p. 217—232.

1923. Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichen Ausdehnungsbereich, Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 1923, No 6, 38 p.
1929. Über einige Grundlagenfragen der Mathematik. Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Matematisk-naturvidenskapelig klasse, 1929, No 4, 49 p.
1929—30. Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik. Den Syvende Skandinaviske Matematikerkongress i Oslo 19—22 August 1929, Oslo (Brøggers) 1930, p. 3—21.
1930—31. Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik. Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Matematisk-naturvidenskapelig klasse 1930, No 7, 28 p. (1931).
1933. Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems, Norsk matematisk forenings skrifter, ser. 2, No 10, p. 73—82.
1934. Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen, Fund. math., 23, 150—161.
1936—37. Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierten Relationen auf «arithmetische», Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Franscisco-Iosephinae, Sectio scientiarum mathematicarum (Szeged), 8, 73—88.
1938. Sur la portée du théoreme de Löwenheim-Skolem. Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6—9 Décembre 1938, Exposés et discussions, опубликованные Гонсетом (F. Gonseth), Zurich (Leeman) 1941, p. 25—47. Дискуссия на стр. 47—52.
1939. Eine Bemerkung über die Induktionsschemata in der rekursiven Zahlentheorie, Monatshefte Math. Phys., 48, 268—276.
1944. Some remarks on recursive arithmetic. Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab, Forhandlinger, 17, 103—106. Это вторая заметка из серии, содержащей четыре заметки; остальные помещены в том же томе, стр. 89—92, 107—109, 126—129.
1951. Реферат статьи Россера и Ван Хао [1950], Journ. Symbolic logic, 16, 145—146.

Тарский (Tarski Alfred)
1930. Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik, Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, 23, 22—29.
1932. Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen, Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Anzeiger, 69, 23—25. Проспект на 1933.
1933. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. Studia philosophica, vol. I (1936), p. 261—405 (оттиски датированы 1935 г.). Перевод Блауштейна (L. Blaustein) с польского оригинала, 1933, с добавлением postscriptum'а.
1933a. Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit, Monatshefte Math. Phys., 40, 97—112.
1941°. Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences, New York. [Русский перевод: Тарский А., Введение в логику и методологию дедуктивных наук, М., 1948.]
1949, резюме. On essential undecidability, Journ. symbolic logic, 14, 75—76.
1949a, резюме. Undecidability of group theory, ibid., 76—77.
1949b, резюме. Undecidability of the theories of lattices and projective geometries, ibid., 77—78.
См. Лукасевич и Тарский, Мак-Кинси и Тарский, Мостовский и Тарский.

Трахтенброт Б. А.
1950. Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах, Докл. АН СССР, новая серия, 70, 569—572.
1952°. О рекурсивной отделимости, Докл. АН СССР, 88, № 6, 953—956.

Туэ (Thue Axel)
1914. Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln, Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 1914, no 10, 34 p.

Тьюринг (Turing Alan Mathison)
1936—37. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc., ser. 2, 42 (1936—37), 230—265. A correction, ibid., 43 (1937), 544—546.
1937. Computability and λ-definability, Journ. symbolic logic, 2, 153—163.
1939. Systems of logic based on ordinals, Proc. London Math. Soc., ser. 2, 45, 161—228.

1950. The word problem in semi-groups with cancellation, Ann. of math., 2 s., 52, 491—505. Некоторые пункты в доказательстве нуждаются в пояснении, которое может быть дано, как указал Бун [1952].

Уайтхед и Рассел (Whitehead Alfred and Russell Bertrand)
1910—13. Principia mathematica, Vol. 1, 1910, XV+666 p. (2nd ed. 1925), Vol. 2, 1912, XXIV+772 p., (2nd ed. 1927). Vol. 3, 1913, X+491 p. (2nd ed. 1927). Cambridge, England (University Press).

Успенский В. А.
1953°. Теорема Гёделя и теория алгоритмов, Докл. АН СССР, 91, № 4, 737—740.
1955°. О вычислимых операциях. Докл. АН СССР, 103, № 5, 773—776.
1955°. Системы перечислимых множеств и их нумерации, Докл. АН СССР, 105, № 6, 1155—1158. (Изложение, не предполагающее специальных знаний в области теории алгоритмов, см. Успехи матем. наук, 1956, XI, № 4 (70), 172—175)

Финслер (Finsler Paul)
1926. Formale Beweise und die Entscheidbarkeit, Mathematische Zeitschrift, 25, 676—682.

Фреге (Frege Gottlob)
1879. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle (Nebert), VIII+88 p.
1884. Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau, XIX+119 p. Перепечатка: Breslau (M. & H. Marcus) 1934. Английский перевод Остина (J. L. Austin) (с немецким оригиналом): The foundations of arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number. Oxford (Basil Blackwell) and New York (Philosophical Library) 1950, (XII+XI, 119)×2 стр.
1893. Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. Jena (H. Pohle), vol. 1, XXXII+254 p.
1903. Ibid., vol. 2, XV+265 p. Английский перевод §§ 86—137 Блэка (Max Black) под заголовком Frege against the formalists опубликован в The philosophical review, 59 (1950), 77—93, 202—219, 332—345.

Френкель (Fraenkel Adolf)
1922. Der Begriff «definit» und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch mathematische Klasse, 1922, p. 253—257.
1925. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, Mathematische Zeitschrift, 22, 250—273.
1928. Einleitung in die Mengenlehre, 3-е изд., Berlin (Springer) 1928, XIII+424 p. Перепечатка: New York (Dover Publications) 1946.
1932. Das Leben Georg Cantors. Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, под ред. Цермело (Ernst Zermelo), Berlin (Springer), p. 452—483.
1952. Abstract set theory, Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.), XII+489 p., вышла в 1953 г.

Фэйс (Feys Robert)
1937—38. Les logiques nouvelles des modalités, Revue néoscolastique de philosophie, 40, (1937), 517—553; 41 (1938), 217—252.
См. Фэйс и Мак-Кинси.

Фэйс и Мак-Кинси (Feys R. and McKinsey J. C. C.)
1952. Modal logics. Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.)

Хазенъегер (Hasenjaeger Gisbert)
1950. Über eine Art von Unvollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe, Journ. Symbolic Logic, 15, 273—276.
1953°. Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe, ibid., 18, no 1, 42—48.

Хаусдорф (Hausdorff Felix)
1914. Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig (Viet), VIII+467 p.
1927. Mengenlehre. Göschens Lehrbucherei, I Gruppe Band 7, Berlin und Leipzig (Gruyter), второе переработанное издание [1914] (в некоторых вопросах менее полное), 285 p. 3-е изд., 1935, 307 p. Перепечатка, New York (Dover Publications) 1944. [Русский перевод: Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, М.—Л., 1937, 304 стр.]

Хенкин (Henkin Leon)
1949. The completeness of the first-order functional calculus, The journal of symbolic logic, 14, 159—166.
1950. Completeness in the theory of types, ibid., 15, 81—91.
1950a. An algebraic characterization of quantifiers, Fundamenta mathematicae, 37, 63—74.

Хермес (Hermes Hans)
1938. Semiotik. Eine Theorie der Zeichengestalten als Grundlage für Untersuchungen von formalisierten Sprachen, Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, n.s., No 5, Leipzig (Hirzel), 22 pp.
Холл (Hall Marshall, Jr.)
1949. The word problem for semigroups with two generators, The journal of symbolic logic, vol. 14, p. 115—118.

Хэйлперин (Hailperin)
1954. Remarks on identity and description in first-order axiom systems Journ. of Symbolic Logic, 19, № 1, 14—20.

Цермело (Zermelo Ernst)
1904. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, Math. Ann., 59, 514—516. См. также [1908a].
1908a. Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, ibid., 65, 107—128.
1908. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, ibid., 261—281.

Чёрч (Church Alonzo)
1932. A set of postulates for the foundation of logic, Annals of mathematics, second series, 33, 346—366.
1933. A set of postulates for the foundation of logic (second paper), ibid., 34, 839—864.
1935. A proof of freedom from contradiction, Proceedings of the National Academy of Sciences, 21, 275—281.
1936. An unsolvable problem of elementary number theory, American journal of mathematics, 58, 345—363.
1936a. A note on the Entscheidungsproblem, The journal of symbolic logic., 1, 40—41. Correction, ibid., 101—102.
1938. The constructive second number class, Bulletin of the American Mathematical Society, 44, 224—232.
1941. The calculi of lambda-conversion. Annals of Mathematics studies, no 6. Lithoprinted. Princeton University Press, Princeton, N. J., II+77 p. Дополнительный тираж 1951, II+82 pp.
1951. Special cases of the decision problem, Revue philosophique de Louvain, 49, 203—221. A correction, ibid., 50 (1952), 270—272.
1952—53. Introduction to mathematical logic, Princeton University Press, Princeton, N. J., vol. I, 1952 или 1953, vol. 2 должен выйти.
См. также Чёрч и Клини, Чёрч и Куайн.

Чёрч и Клини (Church Alonzo and Kleene S. C.)
1936. Formal definitions in the theory of ordinal numbers, Fundamenta mathematicae, 28, 11—21.

Чёрч и Куайн (Church Alonzo and Quine W. V.)
1952. Some theorems on definability and decidability. The journal of symbolic logic, 17, 179—187.

Шанин Н. А.
1953°. О некоторых операциях над логико-арифметическими формулами, Докл. АН СССР, 93, № 5, 779—782.
1954°. О погружениях классического логико-арифметического исчисления в конструктивное логико-арифметическое исчисление, Докл. АН СССР, 94, № 2, 193—196.
1955°. О некоторых логических проблемах арифметики, Труды матем. ин-та АН СССР, 43, 111 стр.

Шейнфинкель М. И. (Schönfinkel Moses)
1924. Über die Bausteine der mathematischen Logik, Math. Ann., 92, 305—316.

Шеффер (Sheffer H. M.)
1913. A set of five independent postulates for Boolean algebras with application to logical constants. Trans. Amer. Math. Soc., 14, 481—488.
Согласно Куайну [1940, стр. 49], определимость &, $\vee$ и $\neg$ через один оператор была известна Пирсу в 1880 г. (См. выше § 30.)

Шмидт (Schmidt Arnold)
1938. Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen, Math. Ann., 115, 485—506.

Шрёдер (Schröder Ernst)
1877. Der Operationskreis des Logikkalkuls, Leipzig, V+37 p.
1890—1905. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik), vol. I, Leipzig (Teubner) 1890, XII+717 p., vol. 2, part 1, Leipzig 1891, XIII+400 p., vol. 3, Algebra und Logik der Relative часть 1, Leipzig 1895, VIII+649 p. Вторая часть второго тома вышла посмертно под ред. Мюллера (Eugen Müller), Leipzig 1905, XXIX+205 p. Abriss der Algebra der Logik, ed. by Müller, часть 1 Elementarlehre, Leipzig and Berlin, 1909, V+50 p., part 2 Aussagentheorie, Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen, Leipzig and Berlin, 1910, VI+51+159 p.

Шютте (Schütte Kurt)
1951. Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie. Math. Ann., 122, 369—389.

Эйнштейн (Einstein Albert)
1944. Remarks on Bertrand Russell's theory of knowledge. The philosophy of Bertrand Russell, ed. by Paul Arthur Schilpp, Northwestern University, Evanston and Chicago, p. 277—291. (По-немецки с английским переводом Шильпа (Schilpp).)

Эрбран (Herbrand Jacques)
1928. Sur la théorie de la démonstration, Comptes rendus hebdomadaires de séances de l'Académie des Sciences (Paris), 186, 1274—1276.
1930. Recherches sur la théorie de la démonstration, Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III sciences mathématiques et physiques, no 33, 128 pp.
1931—2. Sur la non-contradiction de l'arithmétique, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 166, 1—8.

Юнг (Young John Wesley)
1911. Lectures on fundamental concepts of algebra and geometry, New York (Macmillan), VII+247 p.

Яблонский С. В.
1954°. О функциональной полноте в трехзначном исчислении, Докл. АН СССР, 95, № 6, 1153—1155.
1956 резюме° функциональные построения в многозначных логиках, Труды Третьего всесоюзного математического съезда, Москва, июнь—июль 1956, т. II, М., 1956, стр. 71—73.

Яновская С. А.
1948°. Основания математики и математическая логика, Математика в СССР за тридцать лет, М.—Л., стр. 9—50.

Яськовский (Jaskowski Stanisław)
1934. On the rules of suppositions in formal logic. Studia logica, No 1, Warsaw, 32 p.
1936. Recherches sur le systéme de la logique intuitioniste, Actes du Congrés International de Philosophie Scientifique, VI Philosophie des mathématiques, Actualités scientifiques et industrielles 393, Paris (Hermann & Cie), p. 58—61. Яськовский не приводит подробных доказательств; доказательства были воспроизведены Дж. Роуз [1952], ч. 1 (и [1953], ч. 1. [Еще раньше они были воспроизведены Б. Пильчак [1950].—*Прим. перев.*]

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бочвар Д. А.
1945°. Некоторые логические теоремы о нормальных множествах и предикатах, Матем. сб., 16 (58), 345—352.
Бун (Boone William W.)
1954—55°. Certain simple, unsolvable problems of group theory I—IY, Indagationes Mathematicae, 16, No 3, 231—237; 16, No 5, 492—497; 17, No 2, 252—256; 17, No 5, 571—577.
Вейль (Weyl Hermann)
1921°. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, Math. Zeitschr., 10. (Русский перевод см. в разделе III сборника [1934].)
1927°. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, 4 выпуск Handbuch der Philosophie, под ред. A. Baemler и M. Schroter. (Русский перевод части этой книги см. в разделе II сборнике [1934].)
1934°. О философии математики, Сб., М.—Л., 1934, 128 стр.

Ефимов Н. В.
1945°. Высшая геометрия, М., 487 стр., 3-е переработанное изд., М., 1953.
Клини (Kleene Stephen C.)
1955°. On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals second paper, Amer. Journ. math., 77, No 3, 405—428.
Крейсел и Ван Хао (Kreisel G., Hao Wang)
1955°. Some applications of formalized consistency proofs, Fund. math., 42, No 1, 101—110.
Мучник А. А.
1956°. Неразрешимость проблемы сводимости теории алгоритмов, Докл. АН СССР, 108, № 2, 194—197. (Доказательство—классическое.—*Прим. перев.*)
1956°. Об отделимости рекурсивно-перечислимых множеств, Докл. АН СССР, 109, № 1, 29—32.
Успенский В. А.
1956 резюме. ° Об алгоритмической сводимости, Труды Третьего всесоюзного математического съезда, Москва, июнь—июль 1956, т. II, М., 1956, стр. 66—69.
Цейтин Г. С.
1956°. Относительно проблемы распознавания свойств ассоциативных исчислений, Докл. АН СССР, 107, № 2, 209—212.
1956° а. Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности, Докл. АН СССР, 107, № 3, 370—371.

СИМВОЛЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1—1	11	$=$	16, 19	$\cap, \cup, \setminus, -$	17	ε_0	422
$\sim$	16	$<$	17, 19	O, Λ	15	ω	421
$\subset, \subseteq$	16	$>$	17	0	19	$\aleph_0$	19
$\in$	16	$\leqslant$	19	$+1$	19	$\mathfrak{D}$	22
$\notin$	16	$+$	16, 22	$\{a, b, \ldots\}$	15	$\mathfrak{S}$	22
$\bar{\ }$, $=$	16	$\cdot$	16, 22	$2^{\overline{\overline{M}}}$	22	$\mathfrak{U}$	21

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ФОРМАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА

$\vdash$	82	$=$	67, 353, 354	0	67		
$\vdash^{x_1 \ldots x_n}$	91,95	$\neq$	71	$^\circ$	94, 129	C	160
$\rightarrow$	389,392	$\asymp, \not\asymp$	222	ab	166	$\mathrm{E}\mathfrak{f}$	237, 290
$\sim$	104	$<$	71, 141	$\{x\}_i$	222	Eq	354, 358
$\supset$	67	$>, \leqslant, \geqslant$	169	A (x), B (x), ...	78	$\mathfrak{f}$	116
&	67	$\prec$	222	$a, b, \ldots$	67	$\mathrm{F}_{\mathrm{v}}^{t_1, \ldots, t_n}$	364
$\vee$	67	$\mid$	173	$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots$	100, 130	G 1, G 2, ...	390, 398, 424, 425
$\neg$	67	$+$	67	$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$n, ...	227, 246	H	390
$\forall$	67, 138	$\cdot$	67	$f, g, \ldots$	235	N	441
				$\prod_x, \sum_x$	162	Pr	173
$\exists$	67	$'$	67	$x, y, \ldots$	176	*П, С, У*	392
$\exists!$	180	$\mid$	222, 246	$\mathrm{A}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{p})$	186	t	116

РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ И НЕФОРМАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА

$\rightarrow$	202, 298	0	25, 195	$\lambda x_1 \ldots x_n$	37	p_i	207
		0	281	Λ	339		
&	202, 298	$'$	25, 195	$\Lambda x_1 \ldots x_n$	306	pd	200
$\vee$	202, 298	$+$	200	μy	202, 248, 293	Pr	207
$-$	202, 298	$\cdot$	200	νy	309	R_q^i, R^n	199
(y)	202, 300	!	200	$\prod$	201	rm	183, 200
(Ey)	202, 300	$\dot{-}$	200	$\sum$	201	S	198
$(E!y)$	202	$\lvert a \dot{-} b \rvert$	200	Φ_n, Φ_n^{Ψ}	303, 304	S_n^m	305
$\equiv$	202, 298	$\mid$	182, 207	$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \ldots$	210	$\mathbf{S}_m^n$	198
$\cong$	292	$[a/b]$	183, 200	c	253	sg, $\overline{\mathrm{sg}}$	200
$=$	26, 204, 292	$a * b$	207	C_q^n	198	t	202, 296, 298
$\simeq$	292	a^b	200	exp	200	T_n, T_n^{Φ}	250, 259
$<$	26, 33, 206	$(a)_i$	207	$\mathfrak{f}$	202, 296, 299	U	248, 257
$\leqslant, >$	19, 33	$\{z\}(x_1, \ldots, x_n)$	303	lh	207	u	290, 296, 299
$\tilde{\varphi}$	208, 259	$\beta(c, d, i)$	216	$M(a, k)$	256	U_i^n	198
$\hat{x}$	273	εy	283	min, max	200	W_0, W_1	274

Обозначения, относящиеся к машинам Тьюринга 317, 318, 321, 322, 323, 326

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

акс. [ax.]	аксиома
введ. [introd.]	введение
н. в. г. [l. u. b.]	наименьшая верхняя грань
н. н. г. [g. l. b.]	наибольшая нижняя грань
с. д. н. ф. [p. d. n. f.]	совершенная дизъюнктивная нормальная форма
с. к. н. ф. [p. c. n. f.]	совершенная конъюнктивная нормальная форма
удал. [elim.]	удаление

ПРЕДМЕТНЫЙ И АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ[1])

[1]) В скобках указаны страницы английского оригинала.—*Прим. перев.*

Часть третья

РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Часть четвертая
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
(дополнительные разделы)

ДОБАВЛЕНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

ИСПРАВЛЕНИЕ

Когда книга была уже в печати, автор любезно сообщил, что в § 34 имеется неточность, а именно на стр. 147, начиная с пункта (ii) в 7-й строке сверху и кончая 12-й строкой сверху текст нужно заменить на следующий: она содержит переменные $a_1, \ldots, a_n$ и никаких других. Две элементарные называющие формы $A_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ и $A_j(a_1, \ldots, a_{n_j})$ мы будем называть *различными* (как элементарные называющие формы), если формулы $A_i(t_1, \ldots, t_{n_i})$ и $A_j(u_1, \ldots, u_{n_j})$ различны, каковы бы ни были термы $t_1, \ldots, t_{n_i}$, $u_1, \ldots, u_{n_j}$. Например, $a+a=b$ и $0=a \cdot b$ различны, а $a+a=b$ и $a=b \cdot c$ не различны.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
35	13 сн.	$x = x + \{x\}$	$\bar{x} = x + \{x\}$
40	25 св.	себя [1])	себя
40	26 св.	себя	себя [1])
51	18 сн.	*B* имеет место	*B* имеет место,
88	25 сн.	вспомогательное правило	правило вспомогательного
88	21 сн.	вспомогательных правил	правил вспомогательного
120	15 сн.	системы. В таком	системы и в таком
148	в формуле *94.	(Bx)	B (x)
171	в формуле *148a	Ay)	A (y)
196	9 сн.	a' есть	a ' есть
227	14—15 св.	частей	пунктов
237	8 сн.	$\mathfrak{y}_{m_j}$),	$\mathfrak{y}_{m_j}$,
302	10 св.	*расширением*	*расширением (или продолжением)*
333	4 св.	$7^{2^{0} \cdot 3 1}$	$7^{2^{0} \cdot 3^{1}}$
370	3 сн.	E′	в (Ia) E′
391	16—18 св.	Введение символа	Введение символа ∀
395	1 сн.	$\vdash \theta^{\dagger}$	$\vdash \theta^{\dagger''}$
417	20 св.	x_n, *w*)	x_n, w)
432	8 сн.	в сукцедентах	в качестве сукцедента
445	2 св.	«реализуемости»	понятия «реализует»
455	5 сн.	)))]]	)))$_1$]]
465	1 сн.	y	$\asymp$ y.
471	19 св.	$\hat{\mathfrak{B}}_{c=b}$	$\hat{\mathfrak{B}}_{c=b}$
476	18 сн.	ay	au
508	16 сн.	[1950]	[1952]