

ЗАДАЧА О ЦЕПОЧКЕ

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим на примере, как, перенося процессы в цифровой мир, где время дискретно, можно сложную задачу решить школьными методами. Для этого исследуем следующую задачу.

Имеется цепочка длиной L которая свисает с шероховатого стола на длину L_0 , которой достаточно, чтобы цепочка начала соскальзывать (рис. 1). Длина цепочки меньше высоты стола. Необходимо построить график зависимости положения конца свисающей цепочки от времени, найти время, за которое цепочка полностью соскользнет со стола, а также ее скорость в этот момент. Коэффициент трения цепочки о стол μ .

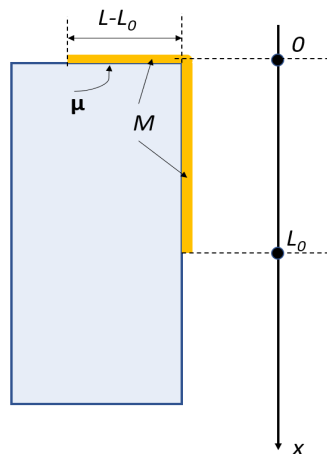


Рис.1. Задача о цепочке на столе

Рассмотрим силы, действующие на части цепочки (Рис.4). На все звенья свисающей части действует сила тяжести. Пусть в момент t со стола свисает часть цепочки x' массой $M' = Mx'/L$. На нее действует сила тяжести

$$P = Mgx'/L.$$

На столе в этот момент времени лежит часть цепочки длиной $L - x'$ и массой $m = M(L - x')/L$. Пусть на столе лежат r звеньев цепи. Масса каждого звена $m_3 = m/r$. На каждое звено действует сила тяжести $p_3 = m_3g$ и сила реакции опоры $N_3 = p_3 = m_3g$. Сила трения, действующая на каждое звено $F_3 = \mu N_3 = \mu m_3g = \mu mg/r$. Силу трения, действующую на лежащую часть цепочки в момент времени t найдем, суммируя силы трения, действующие на звенья цепочки. Получаем, что на всю часть цепи на столе действует сила трения

$$F_{\text{тр}} = rF_3 = \mu mg.$$

В процессе скольжения цепочка будет двигаться под действием разности сил $P = \frac{Mgx'}{L}$ и $F_{\text{тр}} = \frac{\mu Mg(L-x')}{L}$ (рис.4). Обозначим ее R :

$$R = P - F_{\text{тр}} = Mg \left(\frac{x' (1+\mu)}{L} - \mu \right).$$

Движение начнется, только если в начальный момент R больше 0.

Проблема точного решения этой задачи состоит в том, что разность сил R – величина переменная и зависит от положения цепочки. Поэтому движение цепочки не будет ни равномерным, ни равноускоренным.

1.2. Решение для дискретного времени

Пусть время течет не непрерывно, а принимает значения $t_i = i\Delta t$. Будем считать, что в пределах малого, но конечного интервала времени Δt силы, действующие на цепочку, не изменяются: $P_i = \frac{Mgx'_i}{L}$ и $F_{\text{тр}i} = \frac{\mu Mg(L-x'_i)}{L}$. Рассмотрим движение цепочки с момента времени t_i до $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. В пределах этого интервала $t_i \leq t < t_{i+1}$ R_i будем считать неизменным, таким же, как в момент времени t_i :

$$R_i = Mg \left(\frac{x'_i (1+\mu)}{L} - \mu \right);$$

Тогда мы можем найти скорость в конце этого интервала в момент t_{i+1} из второго закона Ньютона, согласно которому изменение импульса (произведение массы цепочки на изменение ее скорости) равно произведению силы R_i на время ее действия Δt :

$$M(v_{i+1} - v_i) = R_i \Delta t.$$

Отсюда

$$v_{i+1} = v_i + \frac{R_i \Delta t}{M}.$$

Теперь найдем новую координату свисающего конца цепочки x'_{i+1} , прибавив к ее координате в момент времени t_i x'_i перемещение ее конца, равное произведению средней скорости цепочки за отрезок времени $[t_i, t_{i+1}]$ на прошедшее время Δt :

$$x'_{i+1} = x'_i + \frac{v_i + v_{i+1}}{2} \Delta t.$$

Наконец, зная координату конца цепочки x'_{i+1} в момент времени t_{i+1} пересчитаем новое значение R_{i+1} в этот момент времени:

$$R_{i+1} = Mg \left(\frac{x'_{i+1}(1+\mu)}{L} - \mu \right);$$

Полученные формулы простые и не требуют знаний высшей математики. Таким образом, доказана первая часть гипотезы.

Из этих формул получаем алгоритм расчета (рис.2) и этим доказываем вторую часть гипотезы: вместо сложных уравнений мы получили простейший алгоритм, который сможет запрограммировать школьник, имеющий даже малый опыт программирования.

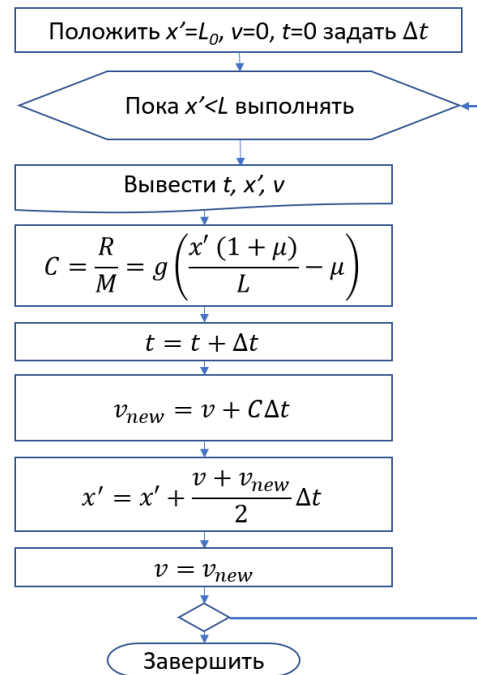


Рис. 2 Блок-схема алгоритма расчета

Далее пишем код на С++ (Приложение 1) (для этого подходит любой язык программирования), имея все параметры для расчета. Программа выполняется на микроконтроллере, что показывает его универсальность и возможность использовать не только для автоматизации эксперимента (см. ниже), но и для расчетов.

Расчет будем выполнять для реальной цепочки. Коэффициент ее трения цепочки о стол найдем экспериментально. Мы положили имевшуюся цепочку на деревянный стол и, наклоняя стол, нашли, при каком угле наклона стола начиналось соскальзывание цепочки. Для измерения угла использовалось приложение «Транспортир» на смартфоне, которое позволяет измерять угол с точностью до 0,1°.

Далее по известной из школьного курса формуле $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \mu$. Средний по трем изменениям угол начала скольжения цепочки $\alpha = 16,8^\circ$. $\mu = \operatorname{tg} \alpha = 0,3$.

Расчеты по написанной программе выполнялись для следующих параметров задачи, которые соответствуют условиям эксперимента, описанного ниже:

- Длина цепочки $L=0,72$ м.
- Начальная длина свешивающейся части $L_0 = 0,32$ м.
- Коэффициент трения $\mu = 0,3$
- Шаг по времени $\Delta t = 10^{-3}$ с

По результатам расчетов был построен график зависимости координаты (длины) свешивающегося конца от времени (рис. 12). Были получены следующие числовые значения:

- Время сваливания $0,46$ с.
- Скорость в момент сваливания $2,23$ м/с.

Задача решена. Теперь надо определить, насколько это решение соответствует картине этого явления в реальном мире с непрерывным временем.

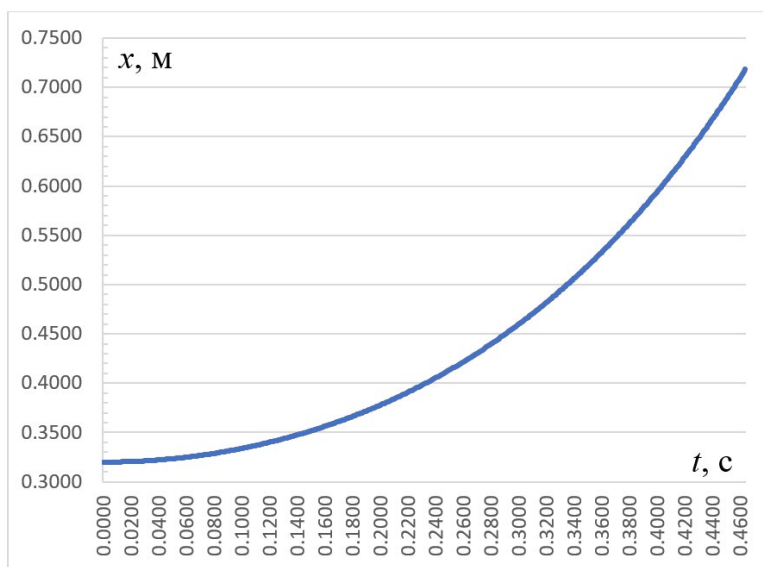


Рисунок 3. График зависимости длины свешивающейся части цепочки (координаты конца цепочки) от времени.