

## ЗАДАЧА О ДОСКЕ НА ВАЛИКАХ

### *Постановка задачи*

Деревянная доска длиной  $l = 2$  м лежит на 2 валиках, вращающихся навстречу друг другу, расстояние между которыми  $L = 1$  м. Коэффициент трения валиков о доску  $\mu = 0,3$ . В начальный момент времени правый край доски смещен относительно центра правого валика на расстояние  $x_0 = 0,6$  м, начальная скорость доски  $v_0 = 0$  м/с. Найти зависимость изменения смещения правого края доски  $x$  и ее скорости  $v$  от времени  $t$ .

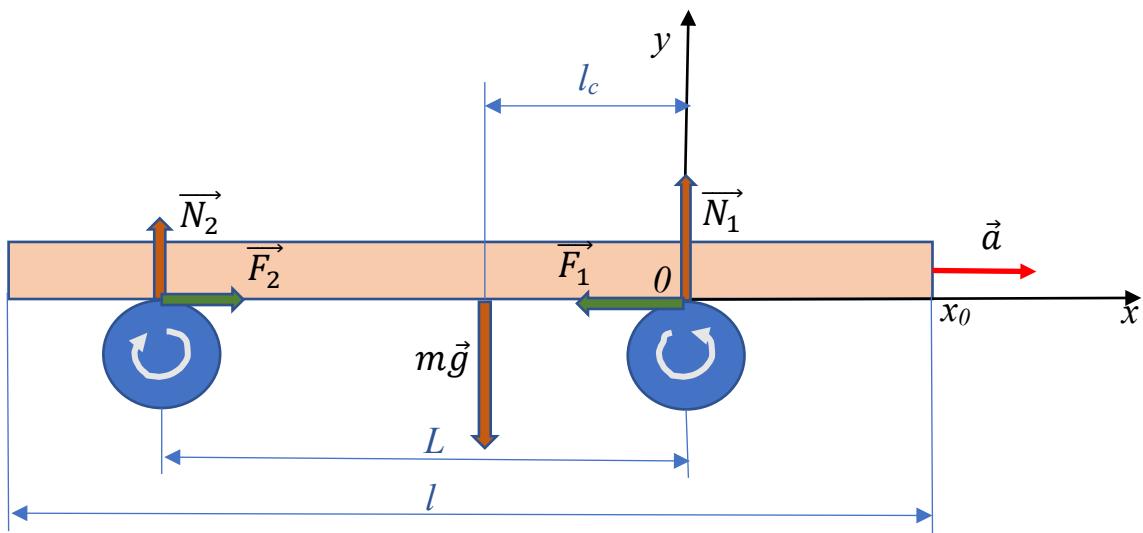


Рисунок 1. Задача о доске на валиках

### *Решение задачи*

На доску (см. рис. 1) действуют две силы реакции опоры двух валиков  $N_1$  и  $N_2$ , на доску действует сила тяжести  $mg$ . Сумма проекций сил на ось  $Oy$ :

$$N_1 + N_2 - mg = 0. \quad (1)$$

При вращении валиков на доску действуют две силы трения  $F_2$  и  $F_1$ . Сумма проекций сил на ось  $Ox$ :  $F_2 - F_1 = ma$ . Силы трения соответственно равны  $\mu N$ , следовательно для проекций на ось  $Ox$  можем записать:

$$\mu N_1 + \mu N_2 = ma. \quad (2)$$

Сумма моментов сил относительно начала координат  $N_2 l - mgl_c = 0$ . Здесь  $l_c$  – расстояние от начала координат до центра масс доски, совпадающего с его серединой. Когда правый край доски смещен относительно оси валика и, соответственно, начала координат на расстояние  $x$ , можем записать  $l_c = \frac{l}{2} - x$ . Тогда

$$N_2 l - mg \left( \frac{l}{2} - x \right) = 0 \quad (3).$$

Из уравнений 1-3 для проекции ускорения на ось  $Ox$  получаем:

$$a = \mu g \left( \frac{2\left(\frac{l}{2}-x\right)}{L} - 1 \right).$$

Будем рассматривать движение доски в дискретные моменты времени. Рассмотрим значения координаты правого края доски  $x$  и ее скорость  $v$  каждые  $\Delta t$ . Считаем, что на этом малом интервале времени силы, действующие на доску остаются постоянными и ее движение является равноускоренным. Тогда изменение скорости за этот промежуток времени  $\Delta v = a * \Delta t$ , новая скорость  $v_n = v + \Delta v$ , отсюда изменение расстояния будет равно  $\Delta x = \frac{v + v_n}{2} * \Delta t$ . Следовательно,  $x = x + \Delta x$ , а новая текущая скорость  $v = v_n$ . Получили алгоритм расчета, который реализуем на языке C++ для микроконтроллера.

*Результаты расчета:*

Для  $\Delta t = 0,001$  с получаем следующие графики координаты (рис. П) и скорости, которые хорошо согласуются с физической картиной. Правый край доски колебается вдоль оси  $Ox$  с периодом колебаний около 2,7 с и амплитудой около 20 см.

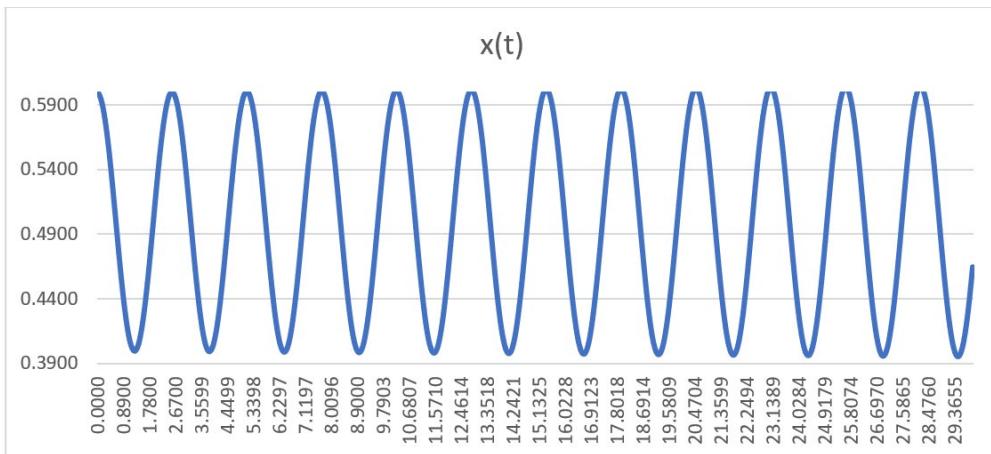


Рисунок 2. Расчет зависимости координаты (м) от времени (с) при  $\Delta t = 0,001$  с

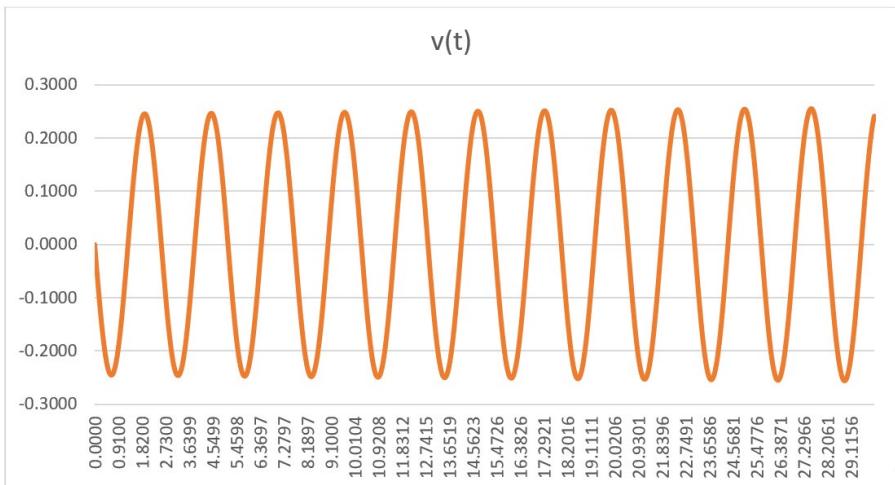


Рисунок 3. Расчет зависимости скорости (м/с) от времени (с) при  $\Delta t = 0,001$  с

Для  $\Delta t = 0,01$  с получаем следующие графики координаты и скорости. Видно, что амплитуды колебаний доски и ее скорости возрастают со временем, что нельзя объяснить физикой задачи. Здесь имеет место накопление ошибок дискретизации в процессе рекуррентных вычислений, которые хорошо заметны для относительно больших интервалов  $\Delta t$ . Этот эффект обсуждается в основном тексте работы в разделе 5.3 «Исследование погрешностей».

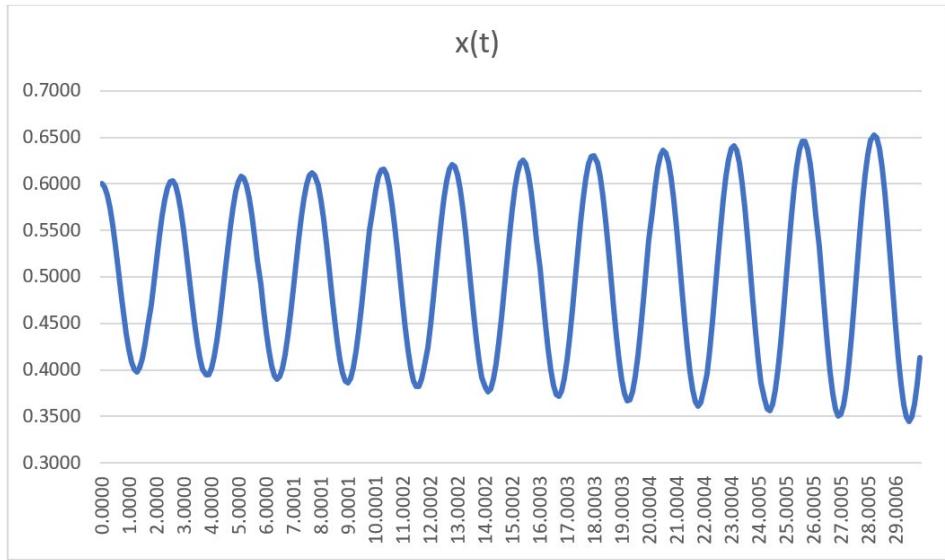


Рисунок 4. Расчет зависимости координаты (м) от времени (с) при  $\Delta t = 0,01$  с

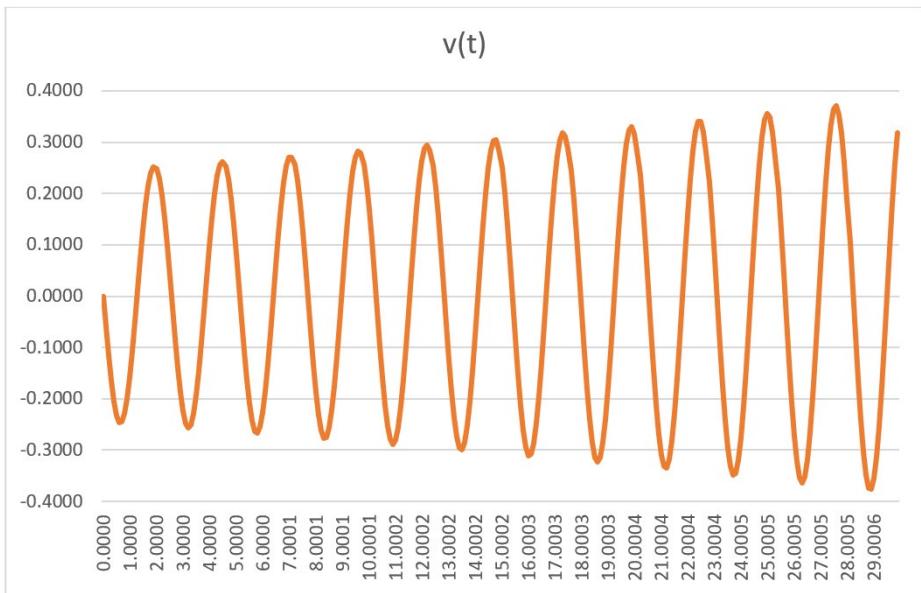


Рисунок 5. Расчет зависимости скорости (м/с) от времени (с) при  $\Delta t = 0,01$  с