

ЗАДАЧА О ДОСКЕ НА ВАЛИКАХ

Постановка задачи

Деревянная доска длиной $l = 2$ м лежит на 2 валиках, вращающихся навстречу друг другу, расстояние между которыми $L = 1$ м. Коэффициент трения валиков о доску $\mu = 0,3$. В начальный момент времени правый край доски смещен относительно центра правого валика на расстояние $x_0 = 0,6$ м, начальная скорость доски $v_0 = 0$ м/с. Найти зависимость изменения смещения правого края доски x и ее скорости v от времени t .

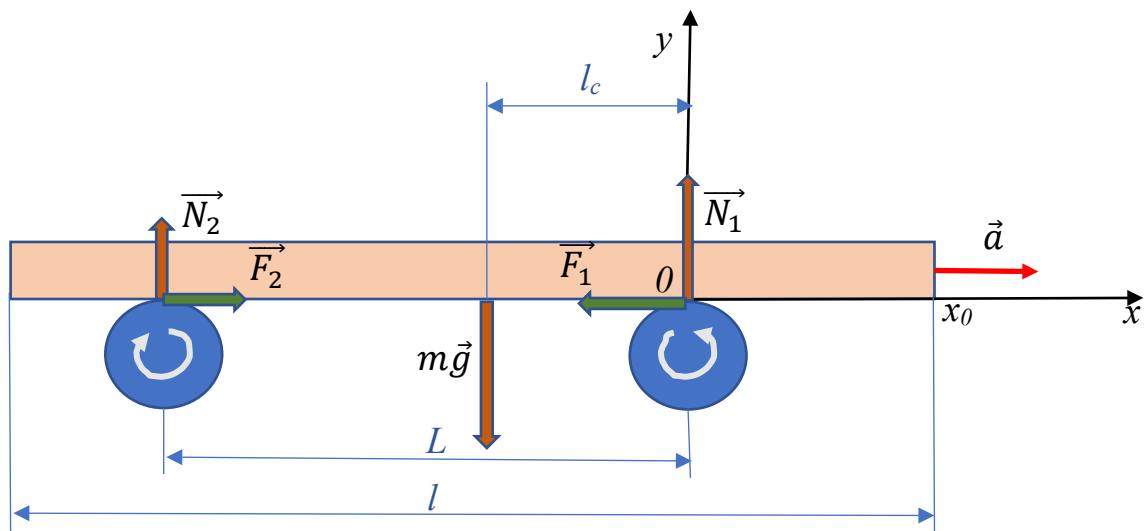


Рисунок 1. Задача о доске на валиках

Решение задачи

На доску (см. рис. 1) действуют две силы реакции опоры двух валиков N_1 и N_2 , на доску действует сила тяжести mg . Сумма проекций сил на ось Oy :

$$N_1 + N_2 - mg = 0. \quad (1)$$

При вращении валиков на доску действуют две силы трения F_2 и F_1 . Сумма проекций сил на ось Ox : $F_2 - F_1 = ma$. Силы трения соответственно равны μN , следовательно для проекций на ось Ox можем записать:

$$\mu N_1 + \mu N_2 = ma. \quad (2)$$

Сумма моментов сил относительно начала координат $N_2 l - mgl_c = 0$. Здесь l_c – расстояние от начала координат до центра масс доски, совпадающего с его серединой. Когда правый край доски смещен относительно оси валика и, соответственно, начала координат на расстояние x , можем записать $l_c = \frac{l}{2} - x$. Тогда

$$N_2 l - mg \left(\frac{l}{2} - x \right) = 0 \quad (3).$$

Из уравнений 1-3 для проекции ускорения на ось Ox получаем:

$$a = \mu g \left(\frac{2\left(\frac{l}{2} - x\right)}{L} - 1 \right).$$

Будем рассматривать движение доски в дискретные моменты времени. Рассмотрим значения координаты правого края доски x и ее скорость v каждые Δt . Считаем, что на этом малом интервале времени силы, действующие на доску остаются постоянными и ее движение является равноускоренным. Тогда изменение скорости за этот промежуток времени $\Delta v = a * \Delta t$, новая скорость $v_n = v + \Delta v$, отсюда изменение расстояния будет равно $\Delta x = \frac{v + v_n}{2} * \Delta t$. Следовательно, $x = x + \Delta x$, а новая текущая скорость $v = v_n$. Получили алгоритм расчета, который реализуем на языке C++ для микроконтроллера.

Результаты расчета:

Для $\Delta t = 0,001$ с получаем следующие графики координаты (рис. 2) и скорости, которые хорошо согласуются с физической картиной. Правый край доски колеблется вдоль оси Ox с периодом колебаний около 2,7 с и амплитудой около 20 см.

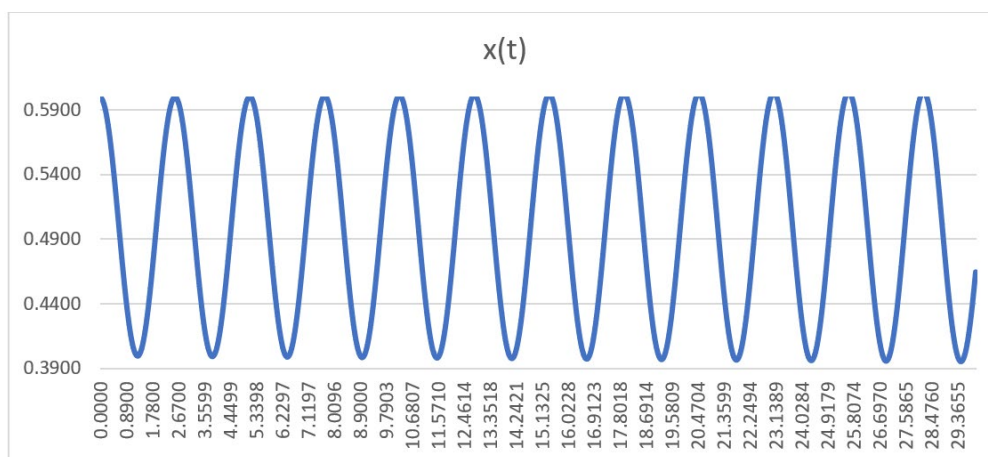


Рисунок 2. Расчет зависимости координаты (м) от времени (с) при $\Delta t = 0,001$ с

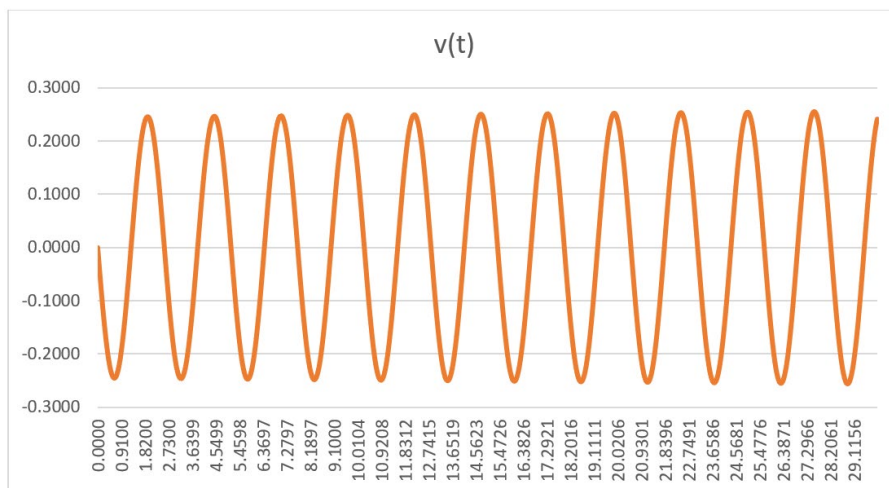


Рисунок 3. Расчет зависимости скорости (м/с) от времени (с) при $\Delta t = 0,001$ с

Для $\Delta t = 0,01$ с получаем следующие графики координаты и скорости. Видно, что амплитуды колебаний доски и ее скорости возрастают со временем, что нельзя объяснить физикой задачи. Здесь имеет место накопление ошибок дискретизации в процессе рекуррентных вычислений, которые хорошо заметны для относительно больших интервалов Δt . Этот эффект обсуждается в основном тексте работы в разделе 5.3 «Исследование погрешностей».

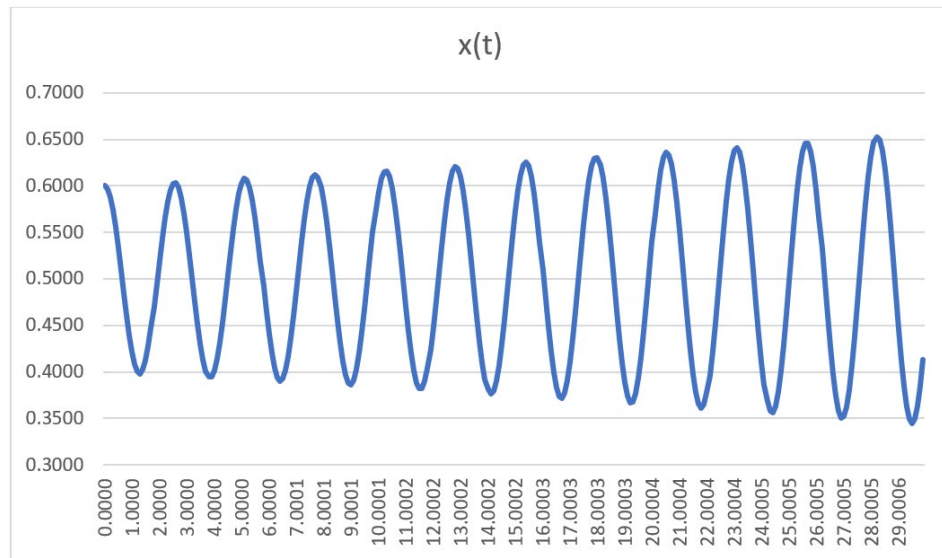


Рисунок 4. Расчет зависимости координаты (м) от времени (с) при $\Delta t = 0,01$ с

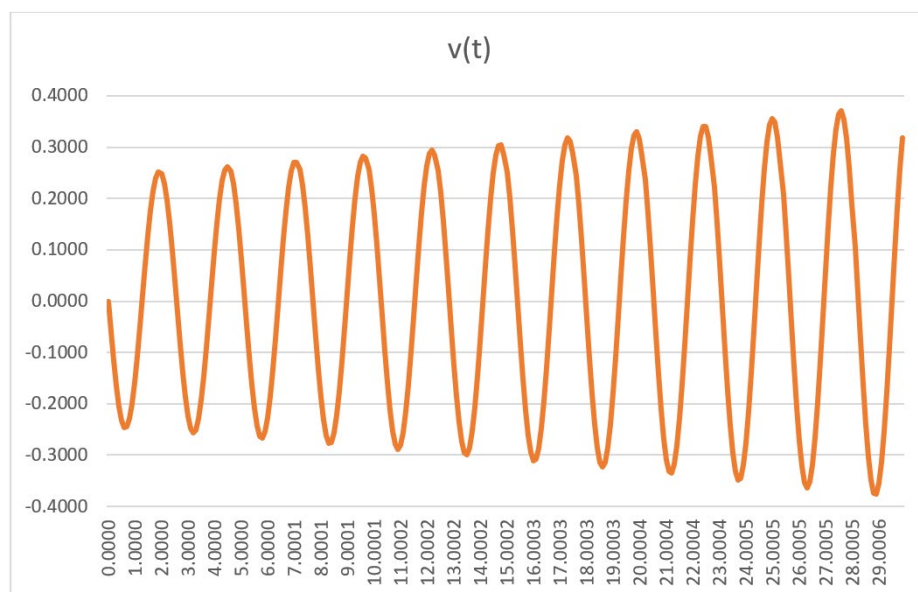


Рисунок 5. Расчет зависимости скорости (м/с) от времени (с) при $\Delta t = 0,01$ с