Рассмотрим систему из 5 проводящих концентрических сфер. Рассчитаем матрицу ёмкостей $\hat{C}$ для данной системы. Пусть радиусы сфер $R_1 < R_2 < R_3 < R_4 < R_5$. Поместим на них заряды q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 соответственно. Положим, что потенциал электростатического поля на бесконечности равен нулю. Тогда потенциал (в системе СГС) на каждой из сфер будет даваться следующими соотношениями:

$$\varphi(R_5) = \frac{q_5}{R_5};$$

$$\varphi(R_4) = \frac{q_4}{R_4} - \frac{q_4}{R_5} + \frac{q_5}{R_5};$$
$$\varphi(R_3) = \frac{q_3}{R_3} - \frac{q_3}{R_4} + \frac{q_4}{R_4} - \frac{q_4}{R_5} + \frac{q_5}{R_5};$$
$$\varphi(R_2) = \frac{q_2}{R_2} - \frac{q_2}{R_3} + \frac{q_3}{R_3} - \frac{q_3}{R_4} + \frac{q_4}{R_4} - \frac{q_4}{R_5} + \frac{q_5}{R_5};$$
$$\varphi(R_1) = \frac{q_1}{R_1} - \frac{q_1}{R_2} + \frac{q_2}{R_2} - \frac{q_2}{R_3} + \frac{q_3}{R_3} - \frac{q_3}{R_4} + \frac{q_4}{R_4} - \frac{q_4}{R_5} + \frac{q_5}{R_5}.$$

Введём матрицы-векторы $\vec{q}$ и $\vec{\varphi}$. Причём,

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix}, \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix}.$$

Где $\varphi_i = \varphi(R_i)$. По определению $\vec{q} = \hat{C}\vec{\varphi}$. Последнее выражение можно переписать следующим образом: $\vec{\varphi} = \hat{C}^{-1}\vec{q}$. Заметим, что матрицу $\hat{C}^{-1}$ мы уже фактически нашли, записав выражения для потенциалов. Выпишем её в явном виде.

$$\hat{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} \\ 0 & \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_5} \end{pmatrix}$$

Матрица имеет вид верхней треугольной, что делает тривиальной задачу вычисления обратной матрицы. Запишем $\hat{C}$:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} & -\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_3 R_2}{R_3 - R_2} & -\frac{R_3 R_2}{R_3 - R_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_4 R_3}{R_4 - R_3} & -\frac{R_4 R_3}{R_4 - R_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R_5 R_4}{R_5 - R_4} & -\frac{R_5 R_4}{R_5 - R_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{pmatrix}$$