Теорема 160. *Пусть f(a) непрерывна в* $[a,b]$ *и пусть*

$$f`(x) \geq 0 \text{ при } a < x < b.$$

Тогда

$$f(b) \geq f(a).$$

Доказательство. Применяя теорему 159, имеем

$$f`(\xi) \geq 0;$$

поэтому

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0,$$

$$f(b) \geq f(a).$$

Пример. $f(x)=e^x - x, a = 0, b > 0.$
Так как

$$f`(x) = e^x - 1 \geq 0 \text{ для } x \geq 0,$$

то получаем, что

$$e^b - b \geq 1 \text{ для } b > 0$$

(это уже известно нам и из теоремы 37 с x=e^b).

Теорема 161. *Пусть* $f(x)$*и* $g(x)$ *непрерывны в* $[a,b]$*и пусть*

$$f`(x) \geq g`(x) \text{ при } a < x < b.$$

Тогда

$$f(b) - f(a) \geq g(b) - g(a).$$

Доказательство. Теорема 160 с заменой $f(x)$ на $f(x)$-$g(x)$ дает

$$f(b) - g(b) \geq f(a) - g(a).$$

Теорема 162. *Пусть* $f(x)$*и* $g(x)$ *непрерывны в* $[a,b]$*и пусть*

$$f`(x) = g`(x) \text{ при } a < x < b.$$

Тогда

$$f(x) = g(x) + (f(a) - g(a)) \text{ при } a \leq x \leq b$$

(и, значит, $f(x)$-$g(x)$ постоянно в $[a,b]$).

Доказательство. Пусть $a \leq \xi \leq b$. При ξ = a имеем

$$f(\xi) = g(\xi) + (f(a) - g(a)).$$

При $a \leq \xi \leq b$ теорема 161 в применении к [a,ξ] дает

$$f(\xi) - f(a) \geq g(\xi) - g(a),$$

и, так как *f(x) и g(x)* симметрично входят в наши предположения, — также

$$g(\xi) - g(a) \geq f(\xi) - f(a).$$

Поэтому

$$f(\xi) - f(a) = g(\xi) - g(a),$$

$$f(\xi) = g(\xi) + (f(a) - g(a)).$$

Теорема 163. *Пусть f(x) непрерывна в [a,b] и пусть*

$$f'(x) = 0 \text{ при } a < x < b.$$

Тогда

$$f(x) = f(a) \text{ при } a \leq x \leq b$$

(т. е. *f(x)* - постоянная в [a,b])

Доказательство: теорема 162 с

$$g(x) = 0.$$

Теорема 164. *Пусть a<b, f'(x) существует при* $a \leq x \leq b$ и

$$f'(a) < c < f'(b)$$

Тогда существует ξ *такое, что*

$$a < \xi < b, f'(\xi) = c.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что c=0 (иначе мы рассмотрели бы *f(x)-cx*) и что

$$f'(a) > 0 > f'(b)$$

(иначе мы рассмотрели бы - $f(x)$).