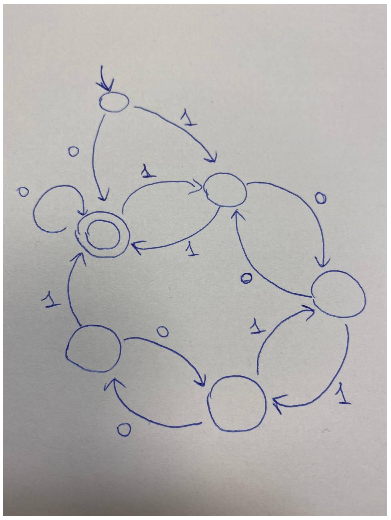
ДЗ2. *Регулярные выражения и автоматы.*

Степанов Андрей Федорович

19.09.2021

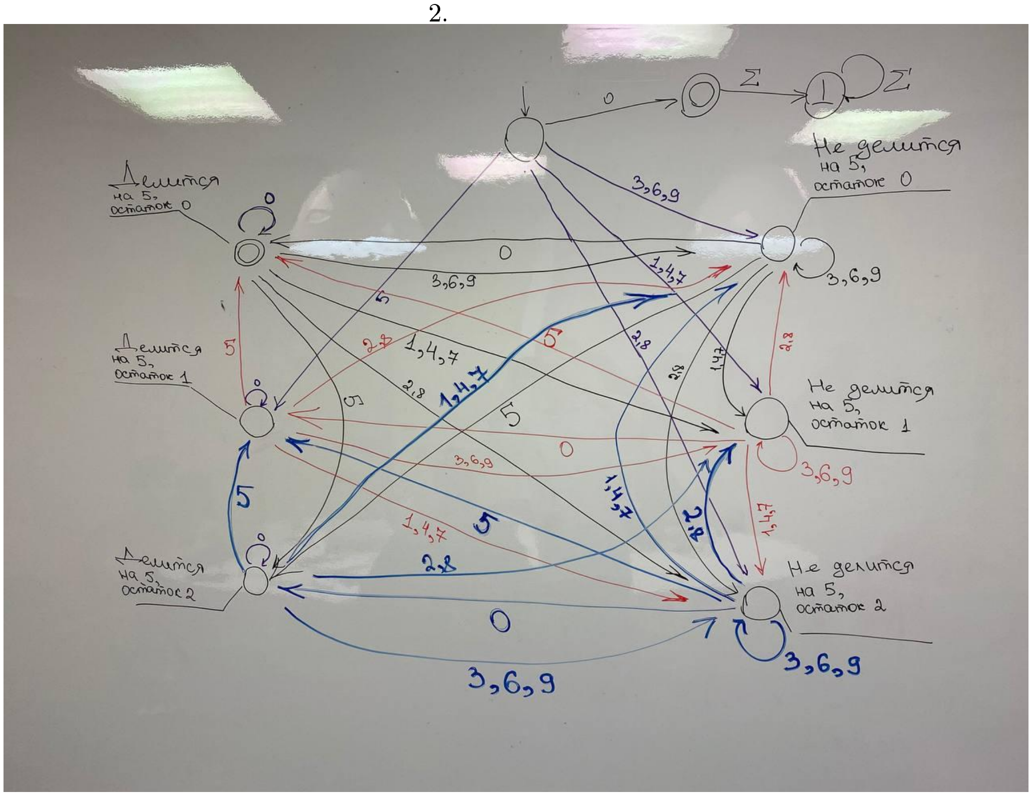
1. Сформулируем признак делимости на 3 для чисел в двоичной системе сичсления. Заметим, что 2 в чётной степени равно: $(3-1)^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \cdot 3^{2p-k} \cdot (-1)^k$. Любое слагаемое из суммы, кроме при $k = 2p$ будет делиться на 3. А при $k = 2p$ слагаемое будет равно 1. Из этого следует, что двойка в любой чётной степени будет давать остаток 1 по модулю 3. Аналогично все нечётные степени двойки будут давать остаток 2 (то есть -1) по модулю 3. Соответственно, чтобы число в двоичной системе счисления давало остаток 0 по модулю 3, модуль разности суммы цифр на чётных и нечётных позициях должен делиться на 3.

   Построим автомат, который на вход принимает число в двоичной системе счисления и определяет принадлежность его к языку "числа, делящиеся на 3". Он будет выглядеть следующим образом:



Данному автомату будет соответствовать такое регуляное выражение: **[UPD]:** (0|1(01*0)*1)+. Каждая звёздочка в данном регулярном выражении соответствует циклу в автомате. Заметим, что, если мы построим автомат по данному регулярному выражению, то он совпадёт с автоматом, изображённом на картинке.

2.



Данный автомат представляет собой пересечение двух автоматов: автомата, распознающего числа, делящиеся на 3 и автомата, распознающего числа, делящиеся на 5.

3. Построим автоматы по данным регулярным выражениям. Далее будем использовать следующий алгоритм проверки автоматов на эквивалентность. Пусть состояния автомата различимы, если существует такое слово, переход по которому из этих состояний приведёт к терминальному состоянию в одном автомате и не терминальному состоянию в другом. Далее рассмотрим все пары состояний (a, b), где a принадлежит множеству состояний первого автомата, а b принадлежит множеству состояний второго автомата и построим автомат, представляющий собой пересечение исходных автоматов. Обратим внимание на те пары, ровно один одно состояние из которых является терминальным

в соответствующем ему автомате. Данные пары состояний являются различимыми. Далее запустим `dfs` по обратным рёбрам из данных пар и докажем, что он найдёт ровно все пары различимых состояний. Понятно, что если мы посетили вершину, то соответствующая ей пара состояний является различимой (просто посмотрим на путь `dfs` из стартовой вершины обхода до данной). Теперь заметим, что непосещённой вершине соответствует пара неразличимых состояний, поскольку иначе по определению различимости существовал бы путь до вершины, сооcтветствующей паре различимых состояний.

Теперь эквивалентность атвоматов будет равносильна тому, что стартовые вершины неразличимы (то есть вершину, соответствующую паре стартовых состояний мы не посетили). Действительно, если бы существовало слово, которое бы матчил один автомат, но не матчил другой, то из вершины, соответствующей паре стартовых состояний существовал бы путь в вершину, соответствующий паре состояний, ровно одно из которых является терминальным.

4. Реализован лексер, анализирующий лексический синтаксис языка для описания автоматов, распознающий количество состояний, множество символов алфавита, терминальные вершины, функции перехода, разделители.

   Добавлены примеры и скриншот с примером работы.