Некоторые обозначения.

Символ $\forall$ называется *квантором общности*, и запись $\forall x$ будем употреблять в формулах для обозначения словосочетания «для всех x», или «для любых x».

Символ $\exists$ называется *квантором существования*, и запись $\exists x$ будем употреблять в формулах для обозначения словосочетания «существует x», или «найдётся x».

Символ $\exists!$ называется *квантором существования и единственности,* и запись $\exists! x$ будем употреблять в формулах для обозначения словосочетания «существует единственный x», или «найдётся единственный x».

Символы $\Rightarrow$ и $\rightarrow$ называются *знаками следствия*, и запись $A \Rightarrow B$ или $A \rightarrow B$ будем использовать в формулах для обозначения словосочетания «из A следует B», или «A влечёт B», или «A является достаточным условием для B», или «B является необходимым условием для A».

Символ $\Leftrightarrow$ называется *знаком равносильности*, и запись $A \Leftrightarrow B$ будем использовать в формулах для обозначения словосочетания «A равносильно B», или «A является необходимым и достаточным условием для B».

Булевы функции.

Двоичные векторы.

Множество - неопределяемое понятие. Запись $x \in A$ означает, что элемент x *принадлежит* множеству A. Если x не является элементом множества A, то пишут $x \notin A$ или $\overline{x \in A}$.

Два множества A и B считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество называется *пустым* и обозначается $\varnothing$, если оно не содержит элементов.

Упорядоченный набор (*вектор*) *размерности* n - неопределяемое понятие. Изображается в виде $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots x_n$ называются *координатами* или *компонентами вектора*, а число n - *размерностью вектора*. Чаще всего слово координаты мы будем употреблять, если $x_1, x_2, \ldots x_n$ числа, а термин компоненты – в остальных случаях.

Векторы $\alpha = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ и $\beta = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ называются *равными*, если для любого номера i, где $i = 1, 2, \ldots, n$, выполнено равенство $x_i = y_i$.

Теорема о количестве различных упорядоченных двоичных наборов размерности n.

Количество различных упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, каждая координата которых принадлежит множеству $\{0;1\}$, равно 2^n.

Доказательство. Применим метод мат. индукции, проведя индукцию по размерности вектора n.

1) Проверим справедливость утверждения теоремы при $n = 1$.

При $n = 1$ мы имеем два различных набора (0) и (1), т.е. утверждение теоремы верно.

2) Допустим справедливость теоремы для $n = k$, т.е. допустим, что количество различных упорядоченных двоичных наборов $(x_1, x_2, \ldots x_k)$ размерности k равно 2^k.

3) Докажем справедливость теоремы для $n = k + 1$, т.е. докажем, что количество различных упорядоченных двоичных наборов размерности $k + 1$ равно 2^{k+1}.

Множество всех упорядоченных двоичных наборов размерности $k+1$ разобьём на 2 части: наборы $(x_1, x_2, \ldots x_k, 0)$, оканчивающимися нулём и наборы $(x_1, x_2, \ldots x_k, 1)$, оканчивающимися единицей. Количество наборов каждого вида равно количеству наборов вида $(x_1, x_2, \ldots x_k)$, которое, по допущению индукции, равно 2^k. Тогда общее количество упорядоченных двоичных наборов размерности $k+1$ равно $2^k + 2^k = 2^{k+1}$, что и требовалось доказать.

На основании метода математической индукции утверждаем, что теорема справедлива для всех натуральных значениях n. ◻

Булевы функции. Основные понятия.

Булевой функцией (*булевской функцией*, *функцией алгебры логики*) называется функция $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, которая может принимать лишь значения 0, 1, и аргументы которой могут принимать лишь значения 0, 1.

Множество всех булевых функций будем обозначать через P_2. Если число n аргументов функции фиксировано, то множество всех булевых функций, зависящих от n аргументов, будем обозначать через $P_2^{(n)}$. Булевы функции можно задавать таблично – в виде *одномерной таблицы* 1 или в виде *двумерной таблицы* 2

Таблица 1

$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n$	$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$
0 0 … 0 0	a_1
0 0 … 0 1	a_2
0 0 … 1 0	a_3
…	…
1 1 … 1 0	a_{2^n-1}
1 1 … 1 1	a_{2^n}

Таблица 2

$x_{k+1}x_{k+2}\ldots x_{n-1}x_n$ / $x_1x_2\ldots x_{k-1}x_k$	00…00 00…01 … 11…01 11…11
0 0 … 0 0	a_1 a_2 …
0 0 … 0 1	…
...	...
1 1 … 1 0	…
1 1 … 1 1	… a_{2^n-1} a_{2^n}

В таблицах, задающей булеву функцию, наборы значений переменных пишут в определенном порядке - *лексикографическом*, который совпадает с порядком возрастания наборов, рассматриваемых, как числа в двоичной системе счисления.

Эта договорённость позволяет вместо *развёрнутой* записи, используемой в таблице 1, применить *сокращённую* (*векторную*) запись $f(x_1,x_2,\ldots x_n)=(\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\ldots\mathrm{a}_{2^n})$, причём запятые в записи вектора значений опускаются.

Таблица 3

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Пример представления функции $f(x,y,z)$ в развёрнутом (табл. 3) и в сокращённом виде

$$f(x,y,z)=(01101011).$$

Теорема о количестве различных булевых функций, зависящих от n аргументов.

Количество различных булевых функций, зависящих от n аргументов, равно 2^{2^n}.

Доказательство.

Каждой булевой функции, зависящей от n аргументов, однозначно соответствует двоичный вектор её значений размерности $k=2^n$. Но по теореме о количестве различных упорядоченных двоичных наборов, количество двоичных векторов размерности k равно $2^k = 2^{2^n}$.

Мощностью конечного множества называется число его элементов. Если множество A состоит из n элементов, то пишут $|A|=n$.

Теорему о количестве различных булевых функций, зависящих от n аргументов, можно записать в виде формулы

$$\left|P_2^{(n)}\right| = 2^{2^n}. \qquad \textbf{(1)}$$

Функция 2^{2^n} быстро растёт: $\left|P_2^{(1)}\right| = 2^2 = 4$, $\left|P_2^{(2)}\right| = 2^4 = 16$, $\left|P_2^{(3)}\right| = 2^8 = 256$, $\left|P_2^{(4)}\right| = 2^{16} = 65536$, $\left|P_2^{(5)}\right| = 2^{32} = 4\,294\,967\,296$.

Наборы α и β значений переменных называются *соседними по i - той переменной* (*соседними по переменной* x_i), если они отличаются только i - той координатой, то есть имеют вид:

$\alpha = (a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, $\beta = (a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

Переменная x_i называется *фиктивной переменной* булевой функции f, если для любых наборов α, β, соседних по i - той переменной, выполняется равенство $f(\alpha) = f(\beta)$.

Переменная x_i называется *существенной переменной* булевой функции f, если существуют хотя бы одна пара α, β наборов значений переменных, соседних по i - той переменной, такая, что справедливо неравенство $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Таблица 4

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Пример. Для функции $f(x,y,z) = (0101\ 1010)$ выяснить, какие её переменные являются существенными, а какие - фиктивными.

Переменная x является существенной для данной булевой функции, так как, например, наборы (0,0,0) и (1,0,0) являются соседними по переменной x и $f(0,0,0) \neq f(1,0,0)$.

Переменная z является существенной для данной булевой функции, так как, например, наборы (0,0,0) и (0,0,1) являются соседними по переменной z и $f(0,0,0) \neq f(0,0,1)$.

Переменная y является фиктивной для данной булевой функции, так как на всех наборах, соседних по переменной y, значения функции равны, то есть выполняются равенства:

$$f(0,0,0) = f(0,1,0),\ f(1,0,0) = f(1,1,0),\ f(0,0,1) = f(0,1,1),\ f(1,0,1) = f(1,1,1).$$

Заметим, что теорема о количестве различных булевых функций, зависящих от n аргументов, справедлива с учётом того, что некоторые булевы функции имеют фиктивные переменные.

Пусть даны функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ и $g(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$, причём для любого набора $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ выполнено равенство

$f(a_1, a_2, \ldots a_n) = g(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$. В этом случае переменная x_n является фиктивной переменной функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Переход от функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. к функции $g(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$ будем называть *удалением фиктивной переменной*, а переход от функции $g(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$ к функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ - ***введением фиктивной переменной***, а сами функции считать *равными*.

Пример. Для $f(x, y, z) = (0101\ 1010)$ переменная y является фиктивной, удаляя фиктивную переменную, перейдём к равной функции от двух переменных $g(x, z) = (0110)$.

Элементарными будем называть булевы функции, заданные таблицами 5, 6.

Элементарные функции от одной переменной:

Таблица 5

x	g_1	g_2	g_3	g_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Используются обозначения:

$g_1(x) \equiv 0$ - *константа 0*

$g_2(x) \equiv 1$ - *константа 1*

$g_3(x) = x$ - *тождественная функция*

$g_4(x) = \overline{x}$ - *отрицание*. Произносится «не x»Для отрицания употребляется также обозначение $\neg x$.

Элементарные функции от двух переменных:

Таблица 6

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0

$f_1(x,y) \equiv 0$ - *константа 0*.

$f_2(x,y) \equiv 1$- *константа 1*.

$f_3(x,y) = x$ - *тождественная функция*.

$f_4(x,y) = y$ - *тождественная функция*.

$f_5(x,y) = \overline{x}$ - *отрицание*.

$f_6(x,y) = \overline{y}$ - *отрицание*.

$f_7(x,y) = x \cdot y$ - *конъюнкция*, употребляются также обозначения $x \wedge y$, xy и $x \& y$. Произносится «x и y»

$f_8(x,y) = x \vee y$ - *дизъюнкция*. Произносится «x или y»

$f_9(x,y) = x \to y$- *импликация*, употребляется также обозначение $x \supset y$. Произносится «x влечёт y», «из x следует y», «x является достаточным условием для y», «y является необходимым условием для x».

$f_{10}(x,y) = y \to x$ - *импликация*.

$f_{11}(x,y) = x + y$ - *сложение по модулю два*, употребляется также обозначение $x \oplus y$. Произносится «x плюс y».

$f_{12}(x,y) = x \leftrightarrow y$ - *эквиваленция*, употребляется также обозначение $x \sim y$.

Произносится «x эквивалентно y», «x равносильно y», «x является необходимым и достаточным условием для y».

$f_{13}(x,y) = x \not\to y$ - *запрет*. Произносится «x запрещает y».

$f_{14}(x,y) = y \not\to x$ - *запрет*.

$f_{15}(x,y) = x \mid y$ - *штрих Шеффера*.

$f_{16}(x,y) = x \downarrow y$ - *стрелка Пирса*.

Пусть дано множество булевых функций $m = \{f_1, \ldots, f_k\}$. Назовём его *базисом*, функции, вошедшие во множество m, назовём *базисными*. Дадим индуктивное определение *формулы над множеством* m.

1) Выражение $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, где f – базисная функция, есть *формула*;
2) Если $f_i(x_1, x_2, \ldots x_m)$ – базисная функция, а выражения $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ либо являются формулами, либо символами переменных, то выражение $f_i(\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_m)$ есть *формула*.

Все формулы, встречающиеся в процессе построения заданной формулы, называются её *подформулами.*

Пример. Пусть базис m состоит из двух функций:

$$m = \{g(x_1, x_2), h(x_1, x_2, x_3)\}.$$

Выражение $\Phi = h(g(x_1, h(x_2, x_2, x_2)), x_1, h(x_1, g(x_2, x_2), x_1))$ является формулой над базисом m, а её подформулами будут $g(x_2, x_2)$, $h(x_1, g(x_2, x_2), x_1)$, $h(x_2, x_2, x_2)$, $g(x_1, h(x_2, x_2, x_2))$ и вся формула Φ.

Суперпозицией функций $f_{i_1},\dots,f_{i_p}$ называется булева функция, соответствующая формуле Φ, полученной с использованием этих функций. В предыдущем примере функция $\Phi(x_1,x_2)$ является суперпозицией функций множества m.

При составлении формул с использованием символов булевых функций для уменьшения количества скобок в записи формулы используют соглашение: если формула содержит символы булевых функций и не содержит скобок, то используем следующий порядок выполнения действий: отрицание, конъюнкция, сумма по модулю два, дизъюнкция, импликация, эквиваленция. При наличии в формуле других функций будем использовать скобки.

Пример. Построить таблицу булевой функции, заданной формулой $f(x,y,z)=x\to y\wedge z\vee\neg x$

Выпишем в таблицу под символами переменных все наборы значений, которые эти переменные принимают, а под символами булевых операций будем выписывать значения функций, соответствующие этим наборам.

Для наглядности сверху проставим числа, указывающие порядок выполнения действий, а снизу с помощью стрелок покажем, над какими столбцами производятся действия и куда пишется результат выполнения этих действий. Самой булевой функции $f(x,y,z)$ будет соответствовать столбец, обведённый двойной рамкой.

Таблица 7

	4		2			3	1	
x	$\to$	y	$\wedge$	z		$\vee$	$\neg$	x
0	1	0	0	0		1	1	0
0	1	0	0	1		1	1	0
0	1	1	0	0		1	1	0
0	1	1	1	1		1	1	0
1	0	0	0	0		0	0	1
1	0	0	0	1		0	0	1
1	0	1	0	0		0	0	1
1	1	1	1	1		1	0	1

Итак, мы нашли, что исходная формула задаёт булеву функцию $f(x,y,z)$, имеющую вектор значений (1111 0001).

Формулы называются *равносильными* (*эквивалентными*), если соответствующие им булевы функции равны.

Представление основных функций в базисе $\{0,1, x\cdot y, x\vee y, \bar{x}\}$:

$$\begin{cases} x+y=\bar{x}\cdot y\vee x\cdot \bar{y} & \textbf{(2)}\\ x\leftrightarrow y = x\cdot y\vee \bar{x}\cdot\bar{y} & \textbf{(3)}\\ x\to y=\bar{x}\vee y & \textbf{(4)}\\ x\not\to y = x\cdot\bar{y} & \textbf{(5)}\\ x\mid y=\overline{x\cdot y} & \textbf{(6)}\\ x\downarrow y=\overline{x\vee y} & \textbf{(7)} \end{cases}$$

Булевой формулой называется формула в базисе $\{0,1, x\cdot y, x\vee y, \bar{x}\}$.

Основные булевы формулы:

Закон двойного отрицания: $\bar{\bar{x}}=x$ **(8)**

Закон противоречия: $\bar{x}\cdot x=0$ **(9)**

Закон исключённого третьего: $$\bar{x} \vee x = 1 \tag{10}$$

Законы идемпотентности: $$\left.\begin{aligned} x \cdot x &= x \\ x \vee x &= x \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Тождества с константами: $$\left.\begin{aligned} x \cdot 0 &= 0 \\ x \vee 0 &= x \\ x \cdot 1 &= x \\ x \vee 1 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Законы поглощения: $$\left.\begin{aligned} x \cdot (x \vee y) &= x \\ x \vee (x \cdot y) &= x \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Законы де Моргана: $$\left.\begin{aligned} \overline{x \cdot y} &= \bar{x} \vee \bar{y} \\ \overline{x \vee y} &= \bar{x} \cdot \bar{y} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Коммутативные законы: $$\left.\begin{aligned} x \cdot y &= y \cdot x \\ x \vee y &= y \vee x \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Ассоциативные законы: $$\left.\begin{aligned} x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \\ x \vee (y \vee z) &= (x \vee y) \vee z \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Дистрибутивные законы: $$\left.\begin{aligned} x \cdot (y \vee z) &= (x \cdot y) \vee (x \cdot z) \\ x \vee (y \cdot z) &= (x \vee y) \cdot (x \vee z) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Правило вычёркивания: $$\bar{x} \cdot y \vee x = y \vee x \tag{18}$$

Формула склеивания: $$\bar{x} \cdot y \vee x \cdot y = x \tag{19}$$

Равносильность формул проверяем построением таблиц соответствующих булевых функций и сравнением векторов их значений.

Пример. Проверим справедливость одного из законов де Моргана: $\overline{x\vee y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$.

Таблица 8

$\neg$	$(x$	$\vee$	$y)$
1	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	0
0	1	1	1

Таблица 9

$\neg$	x	$\cdot$	$\neg$	y
1	0	1	1	0
1	0	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	0	0	1

Как видим, векторы значений булевых функций, соответствующих левой и правой частям этого закона де Моргана, совпали, следовательно, равносильность $\overline{x\vee y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$ доказана.

Сложностью формулы над множеством элементарных булевых функций называется количество вхождений в эту формулу переменных. Сложность формулы Φ будем обозначать как $l(\Phi)$.

Пример. Для формулы $\Phi=(x\to\bar{y})\vee\bar{x}\cdot\bar{z}+y$ её сложность $l(\Phi)=5$.

Упрощением формулы называется преобразование её в эквивалентную формулу меньшей сложности.

Пример. Над множеством элементарных булевых функций упростить формулу $((x\to y)\vee\bar{z})\,|\,x$.

$$((x\to y)\vee\bar{z})\,|\,x\overset{4}{=}(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})\,|\,x\overset{6}{=}\overline{(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})\cdot x}\overset{22}{=}\overline{\bar{x}\vee y\vee\bar{z}}\vee\bar{x}\overset{23}{=}$$

$$\overset{23}{=}\bar{\bar{x}}\cdot\bar{y}\cdot\bar{\bar{z}}\vee\bar{x}\overset{26}{=}x\cdot\bar{y}\cdot z\vee\bar{x}\overset{27}{=}\bar{y}\cdot z\vee\bar{x}.$$

Сложность формулы уменьшена с 4 до 3.

Применение булевых функций в теории множеств.

Будем говорить, множество A *включено* в множество B и писать $A \subseteq B$, если каждый элемент множества A является элементом множества B. В этом случае A называется *подмножеством* множества B, а B называется *надмножеством* множества A.

Считается, что для любого A справедливо включение $\varnothing \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то будем писать $A \subset B$ и говорить, что множество A *строго включено* во множество B.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\} \qquad \textbf{(20)}$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\} \qquad \textbf{(21)}$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\} \qquad \textbf{(22)}$$

Если все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого *универсального множества* U, то разность $U \setminus A$ называется *дополнением* A и обозначается $\overline{A}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество

$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad \textbf{(23)}$$

Будем говорить, что множества A и B находятся *в общем положении*, и писать $A \between B$, если существуют такие элементы a, b, c, что $a \in A$ и $a \notin B$, $b \in B$ и $b \notin B$, $c \in A$ и $c \in B$.

Пусть множества $B_1, B_2, \ldots, B_m$ составлены из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с помощью формул, содержащих теоретико-множественные операции $\cup$, $\cap$, $\setminus$, Δ , $-$.

Тогда любому из множеств B_i, $i = 1, \ldots, m$ можно поставить в соответствие булеву функцию $f_i(a_1, a_2, \ldots a_n)$, $i = 1, \ldots, m$, полученную из формулы, задающей B_i, заменой имён множеств A_i на символы переменных a_i, символ $\cup$ заменяется на $\vee$, $\cap$ на $\wedge$, $\setminus$ на $\not\rightarrow$, Δ на $+$, знак дополнения $\overline{}$ понимается, как отрицание. Тогда

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing \Leftrightarrow f_1 \wedge f_2 \equiv 0, \quad B_1 \subseteq B_2 \Leftrightarrow f_1 \rightarrow f_2 \equiv 1, \quad B_1 = B_2 \Leftrightarrow f_1 \equiv f_2.$$

Если между множествами $B_1, B_2, \ldots, B_m$ записано соотношение, содержащее кроме символов теоретико-множественных операций, символы: $\subseteq$ (включение), $=$ (равенство), $\varnothing$ (пустое множество), U (универсальное множество), то в соответствующей формуле для булевой функции делается замена $\subseteq$ на $\rightarrow$, $=$ на $\leftrightarrow$, $\varnothing$ на 0, U на 1.

Тогда исходное соотношение будет истинным для любых множеств $B_1, B_2, \ldots, B_m$ тогда и только тогда, когда соответствующая этому соотношению булева функция будет тождественно равна 1.

Пример. *Для произвольных множеств A, B, H проверить, является ли выполнение включения $A \cup B \subseteq H$ необходимым и достаточным условием выполнения равенства*

$$A \Delta H = (B \setminus A) \cup (H \setminus A).$$

Составим булеву функцию, соответствующую высказыванию, которое надо доказать:

$$f(a,b,h) = ((a \vee b) \rightarrow h) \leftrightarrow (a + h \leftrightarrow ((b \not\rightarrow a) \vee (h \not\rightarrow a)))$$

Построим таблицу булевой функции $f(a,b,h)$, соответствующей исследуемому утверждению.

Таблица 10

$((a$	$\vee$	$b)$	$\to$	$h)$	$\leftrightarrow$	$(a$	$+$	h	$\leftrightarrow$	$((b$	$\not\to$	$a)$	$\vee$	$(h$	$\not\to$	$a)))$
0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1

Видим, что столбец, соответствующий вектору значений функции $f(a,b,h)$, состоит из одних лишь единиц, следовательно, выполнение включения $A\cup B\subseteq H$ является необходимым и достаточным условием выполнения равенства $A\Delta H=(B\setminus A)\cup(H\setminus A)$.

Пример. Выяснить взаимное расположение множеств $D=(B\setminus C)\cup(A\setminus B)$, $E=A\setminus(B\setminus C)$, $F=A\cup B$, если A, B, C - произвольные подмножества универсального множества U.

Найдём соответствующие булевы функции:

$f_D(a,b,c)=(b\not\to c)\vee(a\not\to b)$, $f_E(a,b,c)=a\not\to(b\not\to c)$,

$f_F(a,b,c)=a\vee b$ и, построив таблицы, найдём векторы значений этих функций: $f_D=(0010\ 1110)$, $f_E=(0000\ 1101)$, $f_F=(0011\ 1111)$.

Так как множество единичных наборов функций f_D и f_E строго включены в множество единичных наборов функции f_F, то $f_D \to f_F \equiv 1$ и $f_E \to f_F \equiv 1$, но $f_D \neq f_F$ и $f_E \neq f_F$, значит $D \subseteq F$ и $E \subseteq F$.

Выясним взаимное расположение множеств D и E:

$$\left.\begin{array}{l} f_D(0,1,0)=1 \text{ и } f_E(0,1,0)=1 \Rightarrow D \not\subseteq E \\ f_D(1,1,1)=0 \text{ и } f_E(1,1,1)=1 \Rightarrow E \not\subseteq D \\ f_D(1,0,0)=1 \text{ и } f_E(1,0,0)=1 \Rightarrow E \cap D \neq \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow D \circledcirc E$$