§ 10. Предельные точки последовательностей.

<u>опр:</u> $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\uparrow$: $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Посл-ть $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ – подпосл-ть посл-ти $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>Обозн:</u> $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

<u>Теорема 1.</u> Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то любая п/п посл-ти $\{x_n\}$ также сх-ся к a.

◄ fix $\varepsilon > 0$. $\exists N: \ \forall n \geq N \ \ |x_n - a| < \varepsilon$

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – произв п/п посл-ти $\{x_n\}$. $y_k = x_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$

$\{n_k\}$ неогр. $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N}: n_K \geq N$

$\{n_k\}\uparrow \Rightarrow n_{K+1} > n_K \geq N$, $n_{K+2} > n_{K+1} > n_K \geq N, \ldots$

$\forall k \geq K \ \ n_k > N \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists K \in \mathbb{N}: \ \forall k \geq K \ \ |y_k - a| < \varepsilon \Rightarrow y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$ ►

__Теорема 2.__ Если все п/п посл-ти $\{x_n\}$ сх-ся, то они сх-ся к одному и тому же числу a, и, в частности, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

◀ $\{x_n\}$ – п/п посл-ти $\{x_n\}$

$\{n_k\}$: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow$ по т. 1 $\forall \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ ▶

__опр 1:__ $x \in \mathbb{R}$ – предельная точка (частичный предел) посл-ти $\{x_n\}$, если в $\forall$ окр-ти этой точки содержится беск. много элементов посл-ти $\{x_n\}$.

__опр 2:__ $x \in \mathbb{R}$ – предельн. точка (частич. предел) посл-ти $\{x_n\}$, если $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

__Теорема 3.__ опр 1 и опр 2 эквивалентные.

◀ 1) опр 1 $\Rightarrow$ опр 2.

$x \in R$ – пред. т. посл-ти $\{x_n\}$ в смысле опр 1 $\Rightarrow$ в $\forall$ окр-ти т. x содержится беск. много членов посл-ти $\{x_n\}$.

Тогда $\exists\, n_1 \geq 1,\ n_1 \in \mathbb{N}:\quad x_{n_1} \in (x-1, x+1)$,

$\exists\, n_2 > n_1:\quad x_{n_2} \in \left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$.

$\vdots$

$\exists\, n_k > n_{k-1}:\quad x_{n_k} \in \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}\right)$

$\vdots$

$\forall \varepsilon > 0\quad \exists\, K = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1:\ \forall k \geq K\quad |x_{n_k} - x| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x$.

2) опр 2 $\Rightarrow$ опр 1.

$x \in R$ – пред. т. $\{x_n\}$ в смысле опр-ия 2 $\Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}$:

$\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists K:\ \forall k \geq K\ |x_{n_k} - x| < \varepsilon \Rightarrow$

$x_{n_k} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \Rightarrow$ в $\forall\, \varepsilon$-окр-ти т. x содержится беск. много членов посл-ти $\{x_n\}$ $(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}}, \dots) \Rightarrow x$ – пред. т. $\{x_n\}$ в смысле опр-ия 1. ▶

<u>Теорема 4.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда $\{x_n\}$ имеет ровно одну пред. точку – точку x.

◀ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\{x_n\}$ – п/п посл-ти $\{x_n\} \Rightarrow$ по опр 2 x – пред. точка $\{x_n\}$. Единств-ть следует из т. 1. ▶

<u>опр:</u> наибольшая (наименьшая) из пред. точек $\{x_n\}$ – верхний (нижний) предел посл-ти $\{x_n\}$.

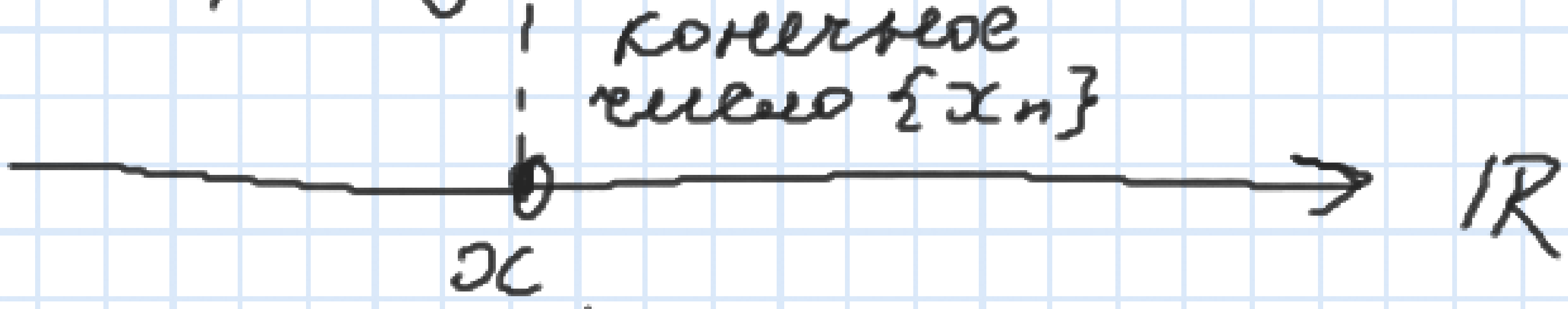
<u>Обозн:</u> $\overline{\lim}\, x_n$ – верх. предел; $\underline{\lim}\, x_n$ – нижний предел.

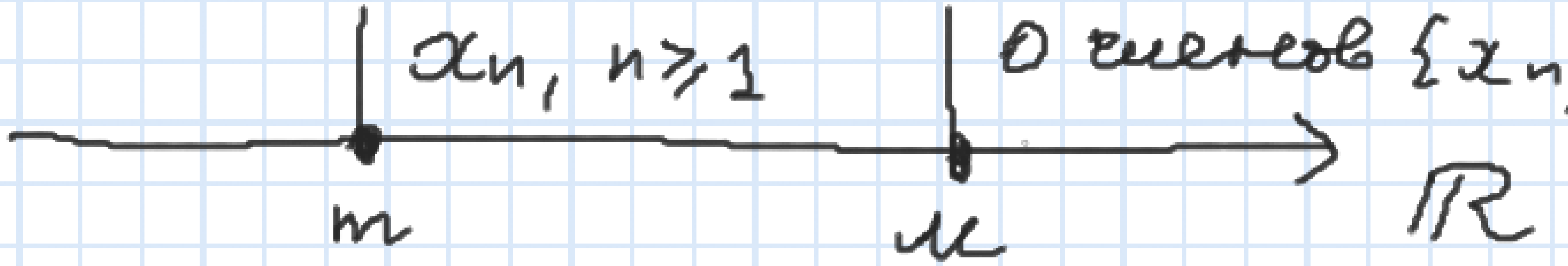
Если мн-во пред. точек посл-ти $\{x_n\}$ не огр. сверху, то $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$; —//— снизу, то $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$.

Теорема 5. $\{x_n\}$ — огр. $\Rightarrow \exists$ конеч. $\overline{\lim}\, x_n$, $\underline{\lim}\, x_n$ и, в частности, хотя бы одна пред. точка.

◄ $\{x_n\}$ - огр. $\Rightarrow \exists M, m \in \mathbb{R}: \ \forall n \geq 1 \quad m \leq x_n \leq M$.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid$ только для конечного числа членов посл-ти $\{x_n\}$ справедливо нерав-во $x_n > x\}$



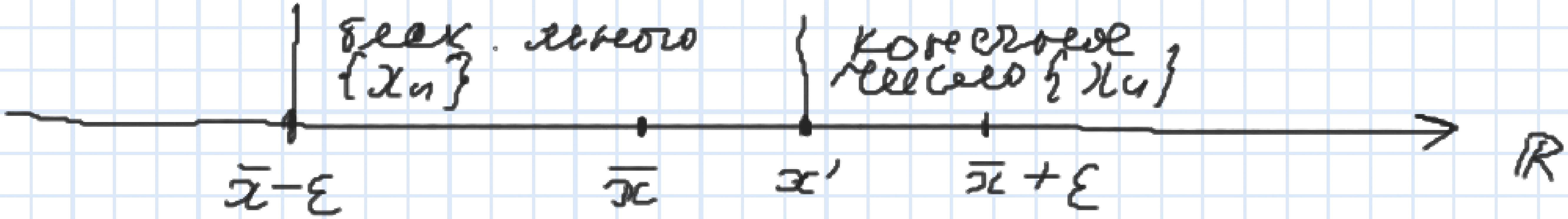


$M \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

A огр. снизу числом $m-1$: $\forall x \in A \quad x \geq m-1$.

$A \neq \emptyset$, A огр. сн. $\Rightarrow \exists$ конеч. $\inf A$. $\bar{x} = \inf A$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$

fix $\varepsilon > 0$, $\bar{x} = \inf A$ $\Rightarrow$ 1) $\bar{x} - \varepsilon \notin A$ $\Rightarrow$ правее точки $\bar{x} - \varepsilon$ на числовой оси лежит беск. много членов $\{x_n\}$

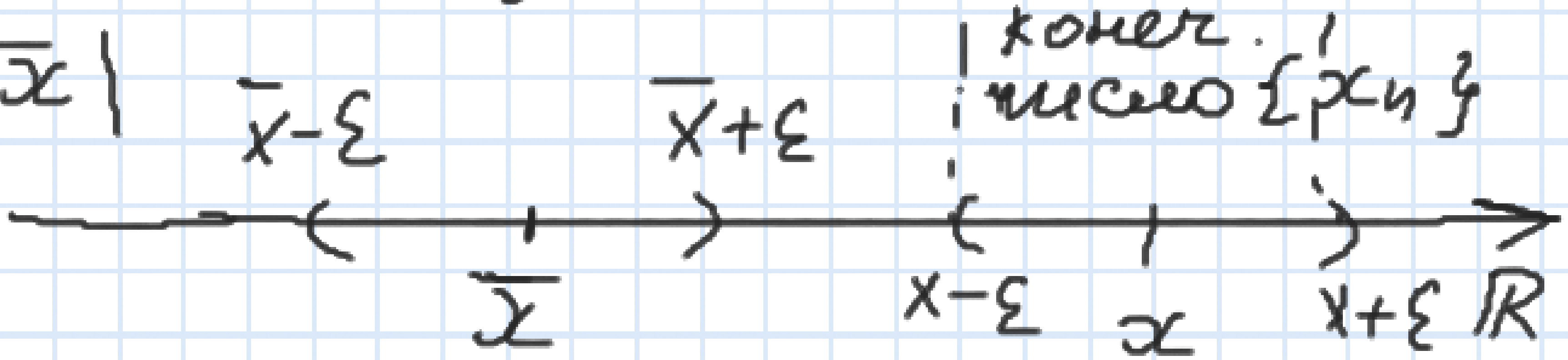


2) $\exists\, x' \in A: \ \bar{x} \le x' < \bar{x} + \varepsilon$ $\Rightarrow$ правее точки x' лежит конечное число членов $\{x_n\}$ $\Rightarrow$ правее $\bar{x} + \varepsilon$ лежит конеч. число членов $\{x_n\}$

Тогда в интервале $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ лежит беск. много членов $\{x_n\}$ $\Rightarrow$ $\bar{x}$ – пред. точка $\{x_n\}$

Покажем, что $\bar{x}$ – наибольш. из пред. точек $\{x_n\}$.

Пусть $x > \bar{x}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|x - \bar{x}|$



x не явл-ся пред. точкой $\{x_n\}$.

$\Rightarrow \bar{x} = \overline{\lim}\, x_n$.

Следствие 1. $\{x_n\}$ огр., $\overline{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{x} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N \ \ x_n \in (\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$.

Следствие 2 (теорема Больцано-Вейерштрасса).

Из любой огр-ой посл-ти можно выделить сх-ся п/п.

Следствие 3. $\{x_n\}$ сх-ся $\Longleftrightarrow$ $\{x_n\}$ огр. и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

◀ $(\Rightarrow)$ $\{x_n\}$ сх $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ огр. и имеет 1! пред. точку (теор. 4)

$\Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

$(\Leftarrow)$ $\{x_n\}$ огр., $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = x \Rightarrow$ сл. 1. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N:$

$\forall n \geq N \ \ x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ▶

<u>Теорема 6</u>. Пусть $\{x_n\}$ такова, что её можно разбить на конечное число m ($m \in \mathbb{N}$) непересек-ся п/посл-ей, каждая из которых имеет предел: $a_1, \ldots, a_m$. Тогда числа $a_1, \ldots, a_m$ — пределн. точки $\{x_n\}$, и других пред. точек у $\{x_n\}$ нет.

◀ сам-но по пособию И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко и др. „Мат. анализ. Вещ. числа и посл-ти." ▶

§ 11. Критерий Коши сходимости последовательности.

сам-но (§5 пособия)