Функциональная замкнутость и полнота.

Замыканием множества булевых функций $\boldsymbol{u}$ называется множество всех суперпозиций функций класса $\boldsymbol{u}$, которое обозначается $[\boldsymbol{u}]$.

Класс $\boldsymbol{u}$ называется *функционально замкнутым*, если $[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{u}$.

Пример. Примером функционально замкнутого класса может служить множество всех булевых функций P_2. Действительно, любая суперпозиций булевых функций также является булевой функцией.

Так как суперпозиция функций класса $\boldsymbol{u}$ сводится к переименованию переменных и подстановке вместо аргументов в функцию класса $\boldsymbol{u}$ других функций этого класса, и если $x \in \boldsymbol{u}$, то для доказательства функциональной замкнутости класса $\boldsymbol{u}$ достаточно доказать, что если $f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{u}$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{u}$, …, $f_k(x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{u}$, $g(y_1, y_2, ..., y_k) \in \boldsymbol{u}$, то

$$h(x_1, x_2, ..., x_n) = g(f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_k(x_1, x_2, ..., x_n)) \in \boldsymbol{u}.$$

Класс функций $\boldsymbol{u}$ называется *функционально полным*, если $[\boldsymbol{u}] = P_2$. Другими словами, класс функций называется функционально полным, если любая булева функция может быть представлена в виде суперпозиции функций этого класса.

Пример. Функционально полным классом является $\boldsymbol{u}_1 = \{\overline{x}, x \cdot y, x \vee y\}$. Это следует из того, что любая булева функция, отличная от тождественного 0, представима в виде СДНФ, где используются лишь функции из класса $\boldsymbol{u}_1$, а $f(x_1, x_2, ... x_n) \equiv 0 = x_1 \cdot \overline{x_1}$.

Из закона де Моргана следует, что $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$, поэтому функционально полным является также класс $\boldsymbol{u}_2 = \{\overline{x}, x \cdot y\}$

Класс функций $\boldsymbol{u}$ называется *функционально полным в слабом смысле*, если добавление в $\boldsymbol{u}$ констант 0 и 1 превращает его в функционально полный класс.

Пример. Из теоремы о представлении булевой функции полиномом Жегалкина следует, что класс $\boldsymbol{u}_3 = \{1, x\cdot y, x+y\}$ является функционально полным, значит, примером функционально полного в слабом смысле может быть класс $\boldsymbol{u}_4 = \{x\cdot y, x+y\}$.

Классы Поста.

1. *Класс функций, сохраняющих константу 0*:

$$T_0 = \{ f(x_1, x_2, ..., x_n) \mid f(0,0,...,0) = 0\}.$$

Часть булевых функций попала в T_0, а часть – нет.

Например, $x \vee y \in T_0$, $x \to y \notin T_0$.

Теорема о функциональной замкнутости класса T_0.

Класс T_0 функционально замкнут, то есть $[T_0] = T_0$.

Заметим, что $x \in T_0$.

Проверим, что если $f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \in T_0$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \in T_0$, …

…, $f_k(x_1, x_2, ..., x_n) \in T_0$, $g(y_1, y_2, ..., y_k) \in T_0$, то

$$h(x_1, x_2, ..., x_n) = g(f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_k(x_1, x_2, ..., x_n)) \in T_0.$$

Действительно, если

$f_1(0,0,...,0) = 0$, $f_2(0,0,...,0) = 0$, …, $f_k(0,0,...,0) = 0$, $g(0,0,...,0) = 0$, то

$$h(0,0,...,0) = g(f_1(0,0,...,0), f_2(0,0,...,0), ..., f_k(0,0,...,0)) = g(0,0,...,0) = 0.$$

Это означает, что $h(x_1, x_2, ..., x_n) \in T_0$.

Значит, функциональная замкнутость класса T_0 доказана. ■

Из функциональной замкнутости T_0 вытекает его функциональная неполнота, т.к. любая булева функция, не сохраняющая 0, не может быть получена с помощью суперпозиции функций класса T_0.

Пример. Подсчитать количество различных булевых функций от n переменных, сохраняющих константу 0.

Обозначим класс булевых функций от n переменных, сохраняющих константу 0, как $T_0^{(n)}$.

Изобразим общий вид таблицы булевой функции класса $T_0^{(n)}$:

Таблица 1

$x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n$	$f(x_1,x_2,\ldots x_n)$
0 0 … 0 0	0
0 0 … 0 1	a_1
0 0 … 1 0	a_2
…	a_3
1 1 … 1 0	…
1 1 … 1 1	a_{2^n-1}

Каждой булевой функции, зависящей от n аргументов, сохраняющей константу 0, однозначно соответствует двоичный вектор $(a_1,a_2,\ldots,a_{2^n-1})$ размерности $k=2^n-1$. Но по теореме о количестве различных упорядоченных двоичных наборов, количество двоичных векторов размерности k равно

$$2^k = 2^{2^n-1}. \quad \text{Значит, } |T_0^{(n)}| = 2^{2^n-1}.$$

2. *Класс функций, сохраняющих константу 1*:

$$T_1 = \{ f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid f(1,1,\ldots,1)=1 \}.$$

Часть булевых функций попала в T_1, а часть – нет. Например, $x\wedge y \in T_1$, $\bar{x} \notin T_1$.

Теорема о функциональной замкнутости класса T_1.

Класс T_1 функционально замкнут, то есть $[T_1]=T_1$.

Заметим, что $x \in T_1$.

Проверим, что если $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in T_1$,

$f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in T_1, \ldots, f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in T_1$, $g(y_1,y_2,\ldots,y_k)\in T_1$, то

$$h(x_1,x_2,\ldots,x_n) = g(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots, f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)) \in T_1.$$

Действительно, если

$f_1(1,1,\ldots,1)=1$, $f_2(1,1,\ldots,1)=1, \ldots, f_k(1,1,\ldots,1)=1$, $g(1,1,\ldots,1)=1$, то

$$h(1,1,\ldots,1) = g(f_1(1,1,\ldots,1), f_2(1,1,\ldots,1),\ldots, f_k(1,1,\ldots,1)) = g(1,1,\ldots,1)=1.$$

Это означает, что $h(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in T_1$.

Значит, функциональная замкнутость класса T_1 доказана. ◼

Из функциональной замкнутости T_1 вытекает его функциональная неполнота, т.к. любая булева функция, не сохраняющая 1, не может быть получена с помощью суперпозиции функций класса T_1.

Пример. Подсчитать количество различных булевых функций от n переменных, сохраняющих константу 1.

Обозначим класс булевых функций от n переменных, сохраняющих константу 1, как $T_1^{(n)}$.

Изобразим общий вид таблицы булевой функции класса $T_1^{(n)}$:

Таблица 2

$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n$	$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$
0 0 … 0 0	a_1
0 0 … 0 1	a_2
0 0 … 1 0	a_3
…	…
1 1 … 1 0	a_{2^n-1}
1 1 … 1 1	1

Каждой булевой функции, зависящей от n аргументов, сохраняющей константу 1, однозначно соответствует двоичный вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_{2^n-1})$ размерности $k = 2^n - 1$. Но по теореме о количестве различных упорядоченных двоичных наборов, количество двоичных векторов размерности k равно $2^k = 2^{2^n-1}$. Значит, $|T_1^{(n)}| = 2^{2^n-1}$.

3. *Класс линейных функций*:

$$L = \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \}.$$

Полином Жегалкина линейной функции содержит только линейную часть, не содержит конъюнкций.

Часть булевых функций попала в L, а часть – нет. Например, $x + y \in L$, $x \wedge y \notin L$.

Теорема о функциональной замкнутости класса L.

Класс L функционально замкнут, то есть $[L] = L$.

Заметим, что $x \in L$.

Проверим, что если $f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \in L$,

$f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \in L$, …, $f_k(x_1, x_2, ..., x_n) \in L$, $g(y_1, y_2, ..., y_k) \in L$, то

$$h(x_1, x_2, ..., x_n) = g(f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_k(x_1, x_2, ..., x_n)) \in L.$$

Действительно, если $f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} x_1 + a_2^{(1)} x_2 + ... + a_n^{(1)} x_n$,

$f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} x_1 + a_2^{(2)} x_2 + ... + a_n^{(2)} x_n$, …,

$f_k(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} x_1 + a_2^{(k)} x_2 + ... + a_n^{(k)} x_n$,

$g(y_1, y_2, ..., y_k) = b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_k y_k$, то

$$h(x_1, x_2, ..., x_n) = g(f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_k(x_1, x_2, ..., x_n)) =$$

$$b_0 + b_1(a_0^{(1)} + a_1^{(1)} x_1 + a_2^{(1)} x_2 + ... + a_n^{(1)} x_n) + b_2(a_0^{(2)} + a_1^{(2)} x_1 + a_2^{(2)} x_2 + ... + a_n^{(2)} x_n) + \ldots +$$

$+ b_k(a_0^{(k)} + a_1^{(k)} x_1 + a_2^{(k)} x_2 + ... + a_n^{(k)} x_n)$. Раскрыв все скобки и приведя подобные члены, получим, что $h(x_1, x_2, ..., x_n) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$. Это означает, что $h(x_1, x_2, ..., x_n) \in L$.

Значит, функциональная замкнутость класса L доказана. ■

Из функциональной замкнутости L вытекает его функциональная неполнота, т.к. любая нелинейная булева функция не может быть получена с помощью суперпозиции функций класса L.

Пример. Подсчитать количество различных линейных функций от n переменных, принадлежащих классу L. Обозначим класс линейных булевых функций от n переменных, как $L^{(n)}$.

Каждая функция класса $L^{(n)}$ имеет вид

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n.$$

Каждой линейной булевой функции, зависящей от n аргументов, однозначно соответствует двоичный вектор коэффициентов $(a_0, a_1, ..., a_n)$ размерности $k = n + 1$. Но по теореме о количестве различных упорядоченных двоичных наборов, количество двоичных векторов размерности k равно $2^k = 2^{n+1}$.

Значит, $|L^{(n)}| = 2^{n+1}$.

Двойственность и самодвойственность.

Функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$. **(1)**

Пример. Найти функцию, двойственную к конъюнкции: $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} = x \vee y$.

Видим, что функцией, двойственной к конъюнкции, является дизъюнкция.

Пример. Найти функцию, двойственную к функции

$$f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz.$$

$$f^*(x, y, z) = \overline{\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z}} = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} \cdot \overline{\overline{x}\,\overline{z}} \cdot \overline{\overline{y}\,\overline{z}} = (x \vee y)(x \vee z)(y \vee z) =$$

$$(x \vee xy \vee xz \vee yz)(y \vee z) == (xx \vee xy \vee xz \vee yz)(y \vee z) =$$

$$= (x \vee yz)(y \vee z) = xy \vee xz \vee yz \vee yz = xy \vee xz \vee yz = f(x, y, z).$$

Видим, что функция, двойственная к функции $f(x, y, z)$ совпала с самой функцией $f(x, y, z)$.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *самодвойственной*, если $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Примером самодвойственной функции является $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$.

Наборы называются *противоположными*, если все их соответствующие координаты имеют противоположные значения. Противоположным к набору $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$ является набор $\overline{\alpha} = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n})$. Из определения следует, что самодвойственная функция на всех противоположных наборах значений своих аргументов принимает противоположные значения. Множество всех самодвойственных функций обозначается, как S.

4. *Класс самодвойственных функций*:

$$S = \{ f(x_1, x_2, ..., x_n) \mid \forall \alpha \ f(\alpha) = \overline{f(\overline{\alpha})} \}.$$

Теорема о функциональной замкнутости класса S.

Класс S функционально замкнут, то есть $[S] = S$.

Заметим, что $x \in S$.

Проверим, что если $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$,

$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$, …, $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$, $g(y_1, y_2, \ldots, y_k) \in S$ то

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in S.$$

Действительно, если $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f_1(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$,

$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$, … , $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f_k(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$,
$g(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \overline{g(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_k})}$, то

$$h^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{h(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})} =$$

$$= \overline{g(f_1(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}), f_2(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}), \ldots, f_k(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}))} =$$

$$= \overline{g(\overline{\overline{f_1}}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}), \overline{\overline{f_2}}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}), \ldots, \overline{\overline{f_k}}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}))} =$$

$$= \overline{g(\overline{f_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \overline{f_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \overline{f_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n))} =$$

$$= g(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Это означает, что $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$.

Значит, функциональная замкнутость класса S доказана. ■

Из функциональной замкнутости S вытекает его функциональная неполнота, т.к. любая несамодвойственная булева функция не может быть получена с помощью суперпозиции функций класса S.

Пример. Подсчитать количество различных самодвойственных булевых функций от n переменных.

Обозначим класс самодвойственных булевых функций от n переменных, как $S^{(n)}$.

Изобразим общий вид таблицы булевой функции класса. Заметим, что противоположные наборы аргументов в таблице располагаются симметрично относительно горизонтальной середины таблицы, которая изображена двойной линией. Произвольно присваивать значения самодвойственной функции можно только на половине всех наборов аргументов, потому что на другой половине значения находятся из определения самодвойственной функции.

Таблица 3

$x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n$	$f(x_1,x_2,\ldots x_n)$
0 0 … 0 0	a_1
0 0 … 0 1	a_2
…	…
0 1 … 1 1	$a_{2^{n-1}}$
1 0 … 0 0	$\overline{a_{2^{n-1}}}$
…	…
1 1 … 1 0	$\overline{a_2}$
1 1 … 1 1	$\overline{a_1}$

Каждой самодвойственной булевой функции, зависящей от n аргументов, однозначно соответствует двоичный вектор $(a_1,a_2,\ldots,a_{2^{n-1}})$ размерности $k=2^{n-1}$. Но по теореме о количестве различных упорядоченных двоичных наборов, количество двоичных векторов размерности k равно $2^k=2^{2^{n-1}}$.

Значит, $|S^{(n)}|=2^{2^{n-1}}=2^{\frac{2^n}{2}}=\sqrt{2^{2^n}}$.

Монотонность.

Говорят, что набор $\alpha=(a_1,a_2,\ldots a_n)$ *предшествует* набору $\beta=(b_1,b_2,\ldots b_n)$ и пишут $\alpha\preccurlyeq\beta$, если $a_i\le b_i$ для $i=1,2,\ldots,n$.

5. *Класс монотонных функций*:

$$M=\{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,|\,\forall_\alpha\forall_\beta\ \alpha\preccurlyeq\beta\to f(\alpha)\le f(\beta)\}.$$

Часть булевых функций попала в M, а часть – нет. Проверим на монотонность дизъюнкцию $x\vee y$.

Для функции $f(x,y)=x\vee y$: $(0,0)\preccurlyeq(0,1)$ и $f(0,0)\le f(0,1)$,

$(0,0)\preccurlyeq(1,0)$ и $f(0,0)\le f(1,0)$,

$(0,0)\preccurlyeq(1,1)$ и $f(0,0)\le f(1,1)$, $(0,1)\preccurlyeq(1,1)$ и $f(0,1)\le f(1,1)$,

$(1,0)\preccurlyeq(1,1)$ и $f(1,0)\le f(1,1)$. Значит, $x\vee y\in M$.

x	y	$x\vee y$	$x\to y$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Проверим на монотонность импликацию $x \to y$. (0,0) $\preccurlyeq$ (1,0), но $0 \to 0 > 1 \to 0$. Значит, $x \to y \notin M$.

Заметим, что функция, тождественно равная нулю, является монотонной, в дальнейшем будем рассматривать только функции, отличные от тождественного нуля, не оговаривая это каждый раз. Проверка на монотонность функций многих переменных, заданных таблично, часто бывает затруднительна, поэтому полезной является следующая теорема:

Теорема о ДНФ без отрицаний.

Монотонные функции, и только они, представимы в виде ДНФ без отрицаний.

Необходимость. Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ представима в виде ДНФ без отрицаний $D(x_1, x_2, ..., x_n)$, и набор значений аргументов $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$ таков, что $D(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$. Значит, хотя бы одна конъюнкция $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot ... \cdot x_{i_k}$, входящая в состав $D(x_1, x_2, ..., x_n)$, на этом наборе равна 1. В этом случае $a_{i_1} = a_{i_2} = ... = a_{i_k} = 1$. Рассмотрим произвольный набор, которому предшествует α: $\beta = (b_1, b_2, ..., b_n)$,

$\alpha \preccurlyeq \beta$. Из определения понятия предшествования, $a_i \le b_i$ для $i = 1, 2, ..., n$.

Значит, $a_{i_p} \le b_{i_p}$ для $p = 1, 2, ..., k$. Тогда $b_{i_1} = b_{i_2} = ... = b_{i_k} = 1$, $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot ... \cdot x_{i_k}(b_1, b_2, ..., b_n) = 1$ и $D(b_1, b_2, ..., b_n) = 1$. Видим, что ДНФ без отрицаний на любом большем наборе не может принять меньшее значение, т.е. ДНФ без отрицаний является монотонной функцией.

Достаточность. Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in M$, покажем, что $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно представить в виде ДНФ без отрицаний. Запишем СДНФ нашей функции, и допустим для определённости, что переменная x_1 вошла с состав СДНФ с отрицанием. Сгруппируем дизъюнктивные слагаемые, содержащие $\overline{x_1}$, и вынесем $\overline{x_1}$ за скобки.

Получим: $f(x_1,x_2,...,x_n)=g(x_1,x_2,...,x_n)\vee\overline{x_1}\cdot K(x_2,...,x_n)$, **(2)**

где $g(x_1,x_2,...,x_n)$ не содержит $\overline{x_1}$.

Докажем справедливость формулы

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=f(x_1,x_2,...,x_n)\vee x_1\cdot K(x_2,...,x_n) \qquad \textbf{(3)}$$

Допустим, что на некотором наборе $\beta=(b_1,b_2,...,b_n)$ формула (3) нарушается. Это возможно только в случае, когда левая часть формулы (3) равна 0, а правая – 1. Тогда $f(\beta)=f(b_1,b_2,...,b_n)=0$, $\overline{b_1}\cdot K(b_2,...,b_n)=1$. Значит, $b_1=1$, $K(b_2,...,b_n)=1$, $\beta=(1,b_2,...,b_n)$. Рассмотрим набор $\alpha=(0,b_2,...,b_n)$. Как видим, $\alpha\preccurlyeq\beta$. Найдём значение функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ на наборе $\alpha=(0,b_2,...,b_n)$, используя формулу (2):

$$f(\alpha)=f(0,b_2,...,b_n)=g(0,b_2,...,b_n)\vee\overline{0}\cdot K(b_2,...,b_n)=$$
$$=g(0,b_2,...,b_n)\vee 1\cdot 1=g(0,b_2,...,b_n)\vee 1=1.$$

Получили, что нашлись такие наборы, что $\alpha\preccurlyeq\beta$, но $f(\alpha)>f(\beta)$, что противоречит монотонности функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$. Значит, формула (3) нигде не может быть нарушена. Подставим в правую часть формулы (3) правую часть формулы (2):

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=f(x_1,x_2,...,x_n)\vee x_1\cdot K(x_2,...,x_n)=$$
$$=g(x_1,x_2,...,x_n)\vee\overline{x_1}\cdot K(x_2,...,x_n)\vee x_1\cdot K(x_2,...,x_n)=$$
$$=g(x_1,x_2,...,x_n)\vee K(x_2,...,x_n)\cdot(\overline{x_1}\vee x_1)=$$
$$=g(x_1,x_2,...,x_n)\vee K(x_2,...,x_n)\cdot 1=g(x_1,x_2,...,x_n)\vee K(x_2,...,x_n).$$

Получена формула, равносильная исходной СДНФ, но не содержащая $\overline{x_1}$. Повторим аналогичные действия для каждой переменной, вошедшей в СДНФ с отрицанием, получим представление монотонной функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ в виде СДНФ без отрицаний. ■

Пример:

Доказать монотонность функции, заданной таблично, построением ДНФ без отрицаний.

xyz	f
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	0
111	1

$f(x,y,z)=\bar{x}yz\vee x\bar{y}z\vee xyz=$

$=(\bar{x}yz\vee xyz)\vee(x\bar{y}z\vee xyz)=$

$=(\bar{x}\vee x)yz\vee(\bar{y}\vee y)xz=$

$=1\cdot yz\vee 1\cdot xz=yz\vee xz$. Функция представлена в виде ДНФ без отрицаний, следовательно, она монотонна.

Теорема о функциональной замкнутости класса M.

Класс M функционально замкнут то есть $[M]=M$.

Заметим, что $x\in M$.

Проверим, что если $f_1(x_1,x_2,...,x_n)\in M$,

$f_2(x_1,x_2,...,x_n)\in M$, …, $f_k(x_1,x_2,...,x_n)\in M$, $g(y_1,y_2,...,y_k)\in M$ то

$h(x_1,x_2,...,x_n)=g(f_1(x_1,x_2,...,x_n),f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f_k(x_1,x_2,...,x_n))\in M$.

Действительно, каждая монотонная функция представима в виде ДНФ без отрицаний, и подстановка в ДНФ без отрицаний вместо переменных других ДНФ без отрицаний может дать лишь ДНФ без отрицаний, т.е. монотонную функцию, что доказывает функциональную замкнутость класса M. ■

Из функциональной замкнутости M вытекает его функциональная неполнота, т.к. любая немонотонная булева функция не может быть получена с помощью суперпозиции функций класса M.

Лемма о несамодвойственной функции.

Если функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ несамодвойственна, то из неё можно получить константу, подставляя в неё вместо аргументов выражения из множества $\{x,\bar{x}\}$.

Пусть $f(x_1,x_2,...,x_n)\notin S$. Тогда найдётся набор $(a_1,a_2,...,a_n)$ такой, что $f(a_1,a_2,...,a_n)=f(\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n)$.

Рассмотрим функцию $t(x) = f(x^{a_1}, x^{a_2}, ..., x^{a_n})$.

Тогда $t(1) = f(1^{a_1}, 1^{a_2}, ..., 1^{a_n}) = f(a_1, a_2, ..., a_n) =$

$= f(\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}) = f(0^{a_1}, 0^{a_2}, ..., 0^{a_n}) = t(0)$.

Значит, $t(x)$ - константа. Заметим, что $t(x)$ получена из $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ подстановкой вместо аргументов выражения из множества $\{x, \overline{x}\}$. ■

Пример. Проверить функцию $f(x, y, z)$, заданную таблицей 1.15, на самодвойственность, и в случае, если $f \notin S$, из функции $f(x, y, z)$ получить константу, подставляя в неё вместо аргументов выражения из множества $\{x, \overline{x}\}$.

Таблица 4

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Набор (0,1,0) противоположен набору (1,0,1), но $f(0,1,0) = f(1,0,1)$, значит, $f \notin S$.

Рассмотрим функцию $t(x) = f(x^1, x^0, x^1) = f(x, \overline{x}, x)$.

$t(0) = f(0,1,0) = f(1,0,1) = 0$. Итак, $t(x) \equiv 0$.

Заметим, что из этой функции можно получить также константу 1, рассмотрев, например, наборы (0,0,1) и (1,1,0).

Лемма о немонотонной функции.

Если функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ немонотонна, то из неё можно получить отрицание $\overline{x}$, фиксируя все переменные, кроме одной, и подстановкой на место этой одной переменной символа x.

Заметим, что если $\alpha = (a_1, a_2, ... a_n) \preccurlyeq \beta = (b_1, b_2, ... b_n)$, то существует цепочка соседних наборов $\alpha = \alpha_1 \preccurlyeq \alpha_2 \preccurlyeq ... \preccurlyeq \alpha_{k-1} \preccurlyeq \alpha_k = b_n$

такая, что для всех $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$ наборы α_i и α_{i+1} – соседние по некоторой переменной.

Пример. Построим цепочку соседних наборов для $\alpha = (0{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1{,}0)$, $\beta = (1{,}1{,}1{,}0{,}1{,}1{,}1)$:

$\alpha = (0{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1{,}0) \preccurlyeq (1{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1{,}0) \preccurlyeq (1{,}1{,}1{,}0{,}0{,}1{,}0) \preccurlyeq (1{,}1{,}1{,}0{,}1{,}1{,}0) \preccurlyeq$
$\preccurlyeq (1{,}1{,}1{,}0{,}1{,}1{,}1) = \beta$.

Если наборы α и β отличаются в $k-1$ координатах, то длина построенной цепочки равна k.

Пусть функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ немонотонна, значит, найдутся наборы $\alpha = (a_1, a_2, ... a_n) \preccurlyeq \beta = (b_1, b_2, ... b_n)$, такие, что $f(\alpha) > f(\beta)$. Построим цепочку соседних наборов

$\alpha = \alpha_1 \preccurlyeq \alpha_2 \preccurlyeq ... \preccurlyeq \alpha_{k-1} \preccurlyeq \alpha_k = b_n$

такая, что для всех $i \in \{1,2,...,k-1\}$ наборы α_i и α_{i+1} – соседние по некоторой переменной.

Найдётся пара наборов $\alpha_i \preccurlyeq \alpha_{i+1}$, такая, что $f(\alpha_i) > f(\alpha_{i+1})$.

Действительно, если бы это было не так, то

$f(\alpha) = f(\alpha_1) \le f(\alpha_2) \le ... \le f(\alpha_k) = f(\beta)$, откуда $f(\alpha) \le f(\beta)$, что противоречит неравенству $f(\alpha) > f(\beta)$.

Пусть $\alpha_i = (c_1, c_2, ..., c_{m-1}, 0, c_{m+1}, ..., c_n)$, $\alpha_{i+1} = (c_1, c_2, ..., c_{m-1}, 1, c_{m+1}, ..., c_n)$,

$f(c_1, c_2, ..., c_{m-1}, 0, c_{m+1}, ..., c_n) = 1$, $f(c_1, c_2, ..., c_{m-1}, 1, c_{m+1}, ..., c_n) = 0$.

Рассмотрим функцию $p(x) = f(c_1, c_2, ..., c_{m-1}, x, c_{m+1}, ..., c_n)$.

Тогда $p(0) = f(c_1, c_2, ..., c_{m-1}, 0, c_{m+1}, ..., c_n) = 1$,

$p(1) = f(c_1, c_2, ..., c_{m-1}, 1, c_{m+1}, ..., c_n) = 0$, т.е.

$p(x) = f(c_1, c_2, ..., c_{m-1}, x, c_{m+1}, ..., c_n) = \bar{x}$.

Заметим, что отрицание $\bar{x}$ получено из функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ фиксированием всех переменных, кроме одной, и подстановкой на место этой одной переменной символа x. ■

Пример. Проверить функцию $f(x, y, z)$, заданную таблицей 1.15, на монотонность, и в случае, если $f \notin M$, из функции $f(x, y, z)$

получить отрицание $\bar{x}$, фиксированием всех переменных, кроме одной, и подстановкой на место этой одной переменной символа x.

$(1,0,0) \preccurlyeq (1,0,1)$, но $f(1,0,0) > f(1,0,1)$, значит, $f(x,y,z) \notin M$.

Рассмотрим функцию $p(x) = f(1,0,x)$.

$p(0) = f(1,0,0) = 1$, $p(1) = f(1,0,1) = 0$. Значит, $p(x) = f(1,0,x) = \bar{x}$.

Лемма о нелинейной функции.

Если функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ нелинейна, то из неё можно получить конъюнкцию $x \cdot y$, фиксируя все переменные, кроме двух, и подстановкой на место этих двух переменных символов из множества $\{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$, и при необходимости, навешиванием отрицания на f.

Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n) \notin L$, тогда полином Жегалкина этой функции содержит хотя бы одну конъюнкцию. Без потери общности можно считать, что в конъюнкциях присутствуют переменные x_1 и x_2, в противном случае мы можем добиться этого, переименовав переменные. Приведём полином Жегалкина с помощью дистрибутивных и коммутативных законов к виду

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot P(x_3, ..., x_n) + x_1 \cdot Q(x_3, ..., x_n) + x_2 \cdot R(x_3, ..., x_n) + T(x_3, ..., x_n),$$

Где $P(x_3, ..., x_n), Q(x_3, ..., x_n), R(x_3, ..., x_n), T(x_3, ..., x_n)$ - полиномы, причём $P(x_3, ..., x_n) \not\equiv 0$, иначе конъюнкции переменных $x_1 \cdot x_2$ в полиноме Жегалкина не было бы. Пусть $P(a_3, ..., a_n) = 1$, тогда получим:

$$f(x_1, x_2, a_3, ..., a_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot 1 + x_1 \cdot Q(a_3, ..., a_n) + x_2 \cdot R(a_3, ..., a_n) + T(a_3, ..., a_n).$$

Обозначим: $Q(a_3, ..., a_n) = \alpha$, $R(a_3, ..., a_n) = \beta$, $T(a_3, ..., a_n) = \gamma$.

Будем иметь: $f(x_1, x_2, a_3, ..., a_n) = x_1 \cdot x_2 + \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 + \gamma$.

Рассмотрим функцию $h(x,y) = f(x+\beta, y+\alpha, a_3, ..., a_n) + \alpha\beta + \gamma =$

$$= (x+\beta)(y+\alpha) + \alpha(x+\beta) + \beta(y+\alpha) + \gamma + \alpha\beta + \gamma =$$

$$= x \cdot y + \alpha x + \beta y + \alpha\beta + \alpha x + \alpha\beta + \beta y + \alpha\beta + \gamma + \alpha\beta + \gamma = x \cdot y.$$

Получили $x \cdot y = f(x+\beta, y+\alpha, a_3, ..., a_n) + \alpha\beta + \gamma$.

Видим, что конъюнкция $x \cdot y$ получена из $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ фиксированием всех переменные, кроме двух, и подстановкой на место этих двух переменных символов из множества $\{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$. Если $\alpha\beta + \gamma = 1$, то при получении конъюнкции $x \cdot y$ будет использовано навешивание отрицания на f, т.к. $f + 1 = \bar{f}$. ■

Таблица 5

xyz	f
000	0
001	0
010	1
011	0
100	1
101	0
110	0
111	0

Пример. Проверить функцию $f(x, y, z)$, заданную таблицей 1.16, на линейность, и в случае, если $f \notin L$, из функции $f(x, y, z)$ получить конъюнкцию $x \cdot y$, фиксируя все переменные, кроме двух, и подстановкой на место этих двух переменных символов из множества $\{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$, и при необходимости, навешивания отрицания на f.

Найдём полином для $f(x,y,z)$:

$$f(x, y, z) = \sum_{\substack{(0,1,0) \\ (1,0,0)}} (x + \bar{a})(y + \bar{b})(z + \bar{c}) = (x+1)y(z+1) + x(y+1)(z+1) =$$

$$= xyz + xy + yz + y + xyz + xy + xz + x = xz + yz + x + y.$$

Так как полином функции f содержит конъюнкцию, то $f \notin L$.

Для построения конъюнкции зафиксируем одну переменную и переобозначим оставшиеся переменные так, чтобы полином принял вид $xy + \alpha x + \beta y + \gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}$.

Например, можно сделать так:

$$f(1, y, x) = 1 \cdot x + xy + 1 + y = xy + x + y + 1.$$

В этом случае $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Введём функцию

$$h(x, y) = f(1, y + \alpha, x + \beta) + \alpha\beta + \gamma = f(1, \bar{y}, \bar{x}) + 1 + 1 = f(1, \bar{y}, \bar{x}).$$

Найдём значения функции h на всех её наборах.

$h(0,0) = f(1,1,1) = 0;$ $\quad$ $h(0,1) = f(1,0,1) = 0;$

$h(1,0) = f(1,1,0) = 0;$ $\quad$ $h(1,1) = f(1,0,0) = 1.$

Как видим, таблица функции $h(x,y)$ совпадает с таблицей конъюнкции, следовательно, $x \cdot y = f(1, \overline{y}, \overline{x})$.

Рассмотрим критерий слабой функциональной полноты некоторого класса булевых функций $\boldsymbol{m}$.

Теорема о слабой функциональной полноте.

Для того, чтобы система булевых функций $\boldsymbol{m}$ была функционально полной в слабом смысле, необходимо и достаточно, чтобы она содержала немонотонную и нелинейную функции.

Запишем эту теорему в виде формулы:

$$[\boldsymbol{m} \cup \{0;1\}] = P_2 \Leftrightarrow \exists_{f_M \in m} \exists_{f_L \in m} (f_M \notin M \wedge f_L \notin L) \qquad \textbf{(4)}$$

Отметим, что функции f_M и f_L не обязательно различны.

Необходимость. Допустим, что левая часть формулы (4) выполнена, а правая часть – нет. Заметим, что константы 0 и 1 являются и монотонными, и линейными функциями. Тогда все функции класса $\boldsymbol{m} \cup \{0;1\}$ попадут хотя бы в один из классов M или L. Но каждый из этих классов функционально замкнут и не является функционально полным, что противоречит левой части (4). Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверно, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие правой части формулы (4), т.е. в системе найдутся немонотонная и нелинейная функции. С помощью констант из немонотонной функции получаем отрицание, что возможно по лемме о немонотонной функции. Имея отрицание и константы, строим конъюнкцию, что возможно по лемме о нелинейной функции. Так как система $\{\overline{x}, x \cdot y\}$ функциональна полна, значит, мы можем построить с помощью суперпозиций функций системы $\boldsymbol{m}$ любую булеву функцию. Достаточность доказана, а, значит доказана и вся теорема. ■

Теорема Поста о функциональной полноте.

Для того, чтобы система булевых функций $\boldsymbol{m}$ была функционально полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из пяти классов T_0, T_1, L, S, M система $\boldsymbol{m}$ содержала бы функцию, не принадлежащую этому классу.

Запишем эту теорему в виде формулы:

$$[\boldsymbol{m}] = P_2 \Leftrightarrow \exists_{f_0 \in m} \exists_{f_1 \in m} \exists_{f_S \in m} \exists_{f_M \in m} \exists_{f_L \in m} \left(f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_S \notin S, f_M \notin M, f_L \notin L \right) \quad \textbf{(5)}$$

Отметим, что функции f_0, f_1, f_S, f_M и f_L не обязательно различны.

Необходимость. Допустим, что левая часть формулы (5) выполнена, а правая часть – нет. Тогда все функции класса $\boldsymbol{m}$ попадут хотя бы в один из пяти классов Поста. Но каждый из этих классов функционально замкнут и не является функционально полным, что противоречит левой части (5). Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверно, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие правой части формулы (5), докажем возможность построения из функций системы $\boldsymbol{m}$ отрицания и конъюнкции, из чего будет вытекать функциональная полнота $\boldsymbol{m}$. На первом этапе докажем возможность построения обеих констант и отрицания.

Так как $f_0 \notin T_0$, то $f_0(0,0,\ldots 0) = 1$; $f_1 \notin T_1$, то $f_1(1,1,\ldots 1) = 0$.

Рассмотрим случаи:

а) $f_1(0,0,\ldots 0) = 1$, тогда $f_1(x, x, \ldots x) = \overline{x}$, имея отрицание и f_S, строим константу. Взяв от неё отрицание, строим вторую константу.

б) $f_1\ (0,0,\ldots,0) = 0$, $f_0(1,1,\ldots,1) = 1$. Тогда $f_1(x, x, \ldots x) \equiv 0$, $f_0(x, x, \ldots x) \equiv 1$.

Обе константы построены. Имея две константы и f_M, строим отрицание $\overline{x}$.

в) $f_0(1,1,\ldots,1) = 0$, тогда $f_0(x, x, \ldots x) = \overline{x}$, имея отрицание и f_S, строим константу. Взяв от неё отрицание, строим вторую константу.

Итак, видим, что в любом случае обе константы и отрицание $\overline{x}$ можно построить с помощью суперпозиций функций из $\boldsymbol{m}$.

Далее, имея обе константы и отрицание, строим конъюнкцию из f_L. Итак, с помощью суперпозиций функций класса удалось построить отрицание и конъюнкцию. Но, как было рассмотрено ранее, система $\{\bar{x}, x \cdot y\}$ функциональна полна, значит, мы можем построить с помощью суперпозиций функций системы ***m*** любую булеву функцию. Достаточность доказана, а, значит доказана и вся теорема. ■

Пример.

Проверить на функциональную полноту систему $\boldsymbol{m_1}$, состоящую из одной функции $f(x, y) = x \mid y$.

$f(0,0) = 0 \mid 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f \notin T_0;$

$f(1,1) = 1 \mid 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f \notin T_1;$

$f(1,0) = 1 \mid 0 = 0 \mid 1 = 1 \Rightarrow f \notin S;$

$(0,1) \preccurlyeq (1,1)$, но $f(0,1) > f(1,1) \quad \Rightarrow \quad f \notin M$

$x \mid y = \overline{x \cdot y} = x \cdot y + 1$. Так как полином содержит конъюнкцию, то $f \notin L$. Видим, что функция штрих Шеффера не попала ни в один из пяти классов Поста, значит, система $\boldsymbol{m_1}$ функциональна полна.

Следствие теоремы Поста.

Из каждой функционально полной системы булевых функций можно выделить функционально полную подсистему, содержащую не более четырёх функций.

Выберем из функционально полной системы набор функций f_0, f_1, f_S, f_M, f_L, таких, что $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_S \notin S$, $f_M \notin M$, $f_L \notin L$.

$f_0 \notin T_0$, тогда $f_0(0,0,\ldots 0) = 1$.

Если $f_0(1,1,\ldots 1) = 1$, то на противоположных наборах $(0,0,\ldots,0)$ и $(1,1,\ldots,1)$ функция принимает одинаковые значения, и $f_0 \notin S$.

Если $f_0(1,1,\ldots 1) = 0$, тогда $(0,0,\ldots,0) \preccurlyeq (1,1,\ldots,1)$, но $f_0(0,0,\ldots 0) > f_0(1,1,\ldots 1)$ и $f_0 \notin M$. Итак, f_0 является либо несамодвойственной, либо немонотонной функцией, и из функционально полного набора f_0, f_1, f_S, f_M, f_L можно удалить либо f_S, либо f_M, получив функционально полный набор из четырёх булевых функций. ■