Комплексные числа

Блок №5

История возникновения

Сципион дель Ферро (1465 — 1526) — итальянский математик, открывший общий метод решения неполного кубического уравнения.

Никколо Фонтана Тарталья (1499—1557) — итальянский математик.

Джерола́мо (Джироламо, Иероним) **Карда́но** (1501-1576) итальянский математик, инженер, философ, медик и астролог. В его честь названы открытые Сципионом дель Ферро формулы решения кубического уравнения (Кардано был их первым публикатором), карданов подвес и карданный вал.

История возникновения

Сам Кардано в своей книге «*Великое искусство*» честно сообщил:

Сципион дель Ферро открыл формулу, согласно которой куб неизвестного плюс неизвестное равен числу. Это была очень красивая и замечательная работа… Соревнуясь с ним, Никколо Тарталья из Брешии, наш друг, будучи вызван на состязание с учеником дель Ферро по имени Антонио Марио Фиоре, решил, дабы не быть побежденным, ту же самую проблему и после долгих просьб передал ее мне.

История возникновения

Рафаэль Бомбелли (1526 — 1572) — итальянский математик, инженер-гидравлик. Известен тем, что ввёл в математику комплексные числа и разработал базовые правила действий с ними.

Леона́рд Э́йлер (1707, Базель, Швейцария — 1783, Санкт-Петербург, Российская империя) — швейцарский, немецкий и российский математик и механик. Предложил $\sqrt{-1} = i$

Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс (1777-1855) — немецкий математик, механик, физик и астроном. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков». Термин «комплексные числа» был введен Гауссом в 1831 году.

Определение комплексного числа

Определение. Множество пар (a,b) , где $a,b \in R$ с отношением равенства

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

и операциями сложения $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

и умножения $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

называется множеством ***комплексных чисел***.

Алгебраическое представление

Определение. Множество C={a+ib, где $a, b \in R$
i – корень уравнения $x^2=-1$ (то есть $i^2=-1$) } - называется множеством комплексных чисел.

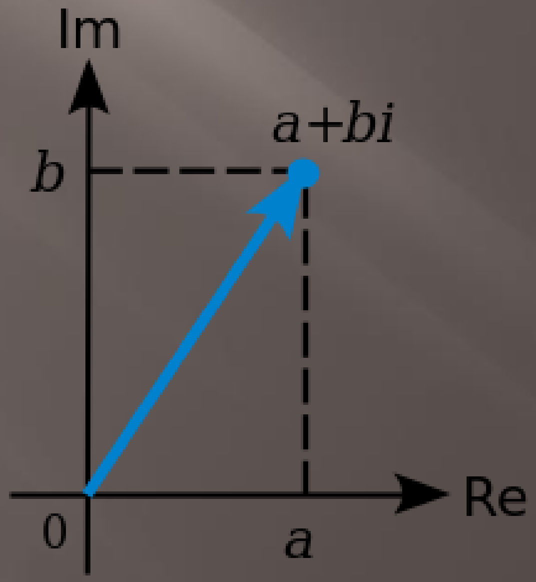
Комплексное число z=a+ib определяется парой вещественных чисел (a,b)

Определение. Re(z)= a – вещественная часть

Im(z)=b – мнимая часть

Геометрическое представление

Всякое комплексное число можно представить точкой на плоскости. По вещественной оси (абсцисс) откладывается число a=Re(z), по мнимой оси (ординат) откладывается число b=Im(z)



Степени числа i

i	$i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$
$i^2=-1$	$i^{-2}=\frac{1}{i^2}=-1$
$i^3=i^2\cdot i=-i$	$i^{-3}=\frac{1}{i^3}=\frac{i}{i^4}=i$
$i^4=i^2\cdot i^2=1$	$i^{-4}=1$
$i^5=i^4\cdot i=i$	$i^{-5}=i^{-8+3}=i^3=-i$

Степени числа i, общая формула

$$i^{4n} = 1, \;\; n \in Z$$

$$i^m = i^{4n+k} = \begin{cases} i, \; если \; k = 1 \\ -1, \; если \;\; k = 2 \\ -i, \; если \;\; k = 3 \\ 1, \; если \; k = 0 \end{cases}$$

$$n, m \in Z, \;\; k = \{0,1,2,3\}$$

Операции над комплексными числами

$z_1=a_1+ib_1$

$z_2=a_2+ib_2$

Определение. $z_1+z_2=a_1+a_2+i(b_1+b_2)$

$z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+b_1a_2)$

Теорема. Комплексные числа с введенными операциями сложения и умножения образуют поле.

(Доказательство состоит в проверке аксиом поля)

Кмплексное сопряжение

Определение. Число $\overline{z} = a - ib$ называется ***комплексно-сопряженным*** к числу $z = a + ib$.

Пример.

1. $z_1 = 5 - 3i \quad \overline{z_1} = 5 + 3i$

2. $z_2 = -3 + 4i \quad \overline{z_2} = -3 - 4i$

3. $z_3 = 5i \quad \overline{z_3} = -5i$

4. $z_4 = 5 \quad \overline{z_4} = 5$

Свойства комплексного сопряжения

$$1.\ \overline{\overline{z}} = z$$

$$2.\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$3.\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$4.\ \overline{\left(z_1 / z_2\right)} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$$

$$5.\ z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in R$$

Деление комплексных чисел

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} =$$

$$= \frac{a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Извлечение квадратного корня из комплексного числа

Определение. Комплексное число w такое, что $w^2=z$ будем называть квадратным корнем из числа z, $w=\sqrt{z}$

Пусть $z=a+ib$, $w=u+iv$. Цель: найти u и v

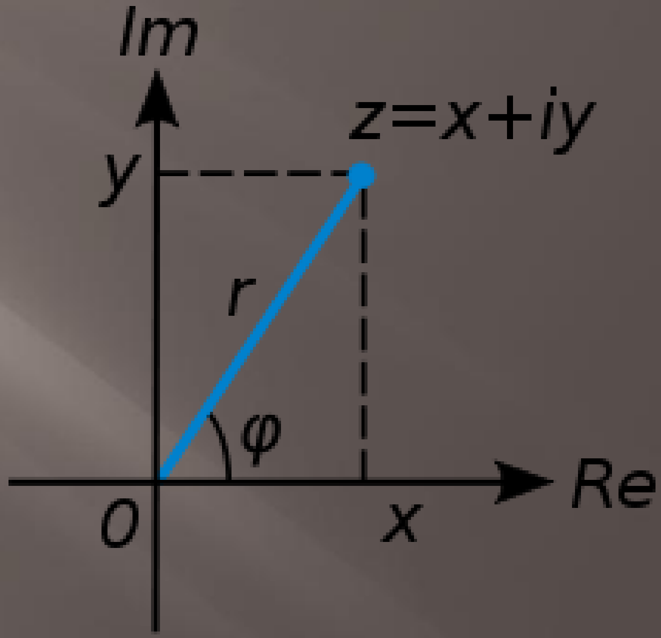
$$w^2 = z \Rightarrow (u+iv)^2 = a+ib \Rightarrow u^2 - v^2 + 2uvi = a+ib$$

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a \\ 2uv = b \end{cases} \Rightarrow \textit{находим}\,(u_1, v_1)\,\textit{и}\,(u_2, v_2)\ (\textit{две пары})$$

Всякое комплексное число (кроме 0) имеет два различных корня

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

z=a+ib=r(cosφ+isinφ)



Модуль z:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Аргумент z:

$$\arg(z) = \varphi \in (-\pi; \pi], \quad Arg(z) = \{\arg(z) + 2\pi k\}$$

Аргумент

1). Если $a>0$, $b>0$, то $\arg(z)=\mathrm{arctg}(b/a)$

2). Если $a<0$, $b>0$, то $\arg(z)=\pi-\mathrm{arctg}(-b/a)$

3). Если $a<0$, $b<0$, то $\arg(z)=\pi+\mathrm{arctg}(b/a)$

4). Если $a>0$, $b<0$, то $\arg(z)=\mathrm{arctg}(b/a)$

Свойства модуля и аргумента

$$1. |z| \geq 0$$

$$2. |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$3. |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$4. |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$1. Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$$

$$2. Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

Утверждение 1. При умножение комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Утверждение 2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Показательная форма записи

Формула Эйлера: $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Показательная форма:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

Частный случай: $$e^{i\pi} = -1$$

Умножение и деление в показательной форме

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \qquad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

Утверждение 1.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Утверждение 2.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Формула Муавра

Абрахам де Муавр (1667 - 1754) - английский математик французского происхождения.

Открыл (1707) формулу Муавра для возведения в степень (и извлечения корней) комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

$$z^n = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n)$$

$$z^n = r^n e^{\varphi n i}$$

Извлечение корня n-й степени

$$w^n = z, \quad w = \sqrt[n]{z}$$

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$k = 0,1,2\ldots n-1$$

Основная теорема алгебры

Теорема. Всякий многочлен над полем комплексных чисел имеет хотя бы один корень.

Следствие. Всякий многочлен степени n над полем комплексных чисел раскладывается на n линейных множителей.

Иначе: всякий многочлен степени n имеет n комплексных корней, возможно, совпадающих.Совпадающие корни называются кратными.

Рекомендуемые ссылки

1. http://ru.wikibooks.org/wiki/Интегральное_исчисление/Краткие_сведения_о_комплексных_числах
2. Википедия
3. http://ahiin.livejournal.com/tag/opus