26.3. Дифференцируемость суммы, произведения, частного дифференцируемых функций.

См. пособие

26.4. Производные основных элементарных функций.

См. пособие

27. Дифференциал функции.

$y=f(x)$ диф. в т. x_0, тогда

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$ где

$A\in R$, $\alpha(\Delta x)$ – б.м. при $\Delta x\to 0$.

<u>опр</u>: дифференциал ф-ии $y=f(x)$ в т. x_0 – линейная отн-но Δx функция $A\cdot\Delta x$.

<u>Обозн</u>: dy, $dy(x_0)$, $dy|_{x_0}$, df, $df(x_0)$, $df|_{x_0}$

$$dy = A\cdot\Delta x$$

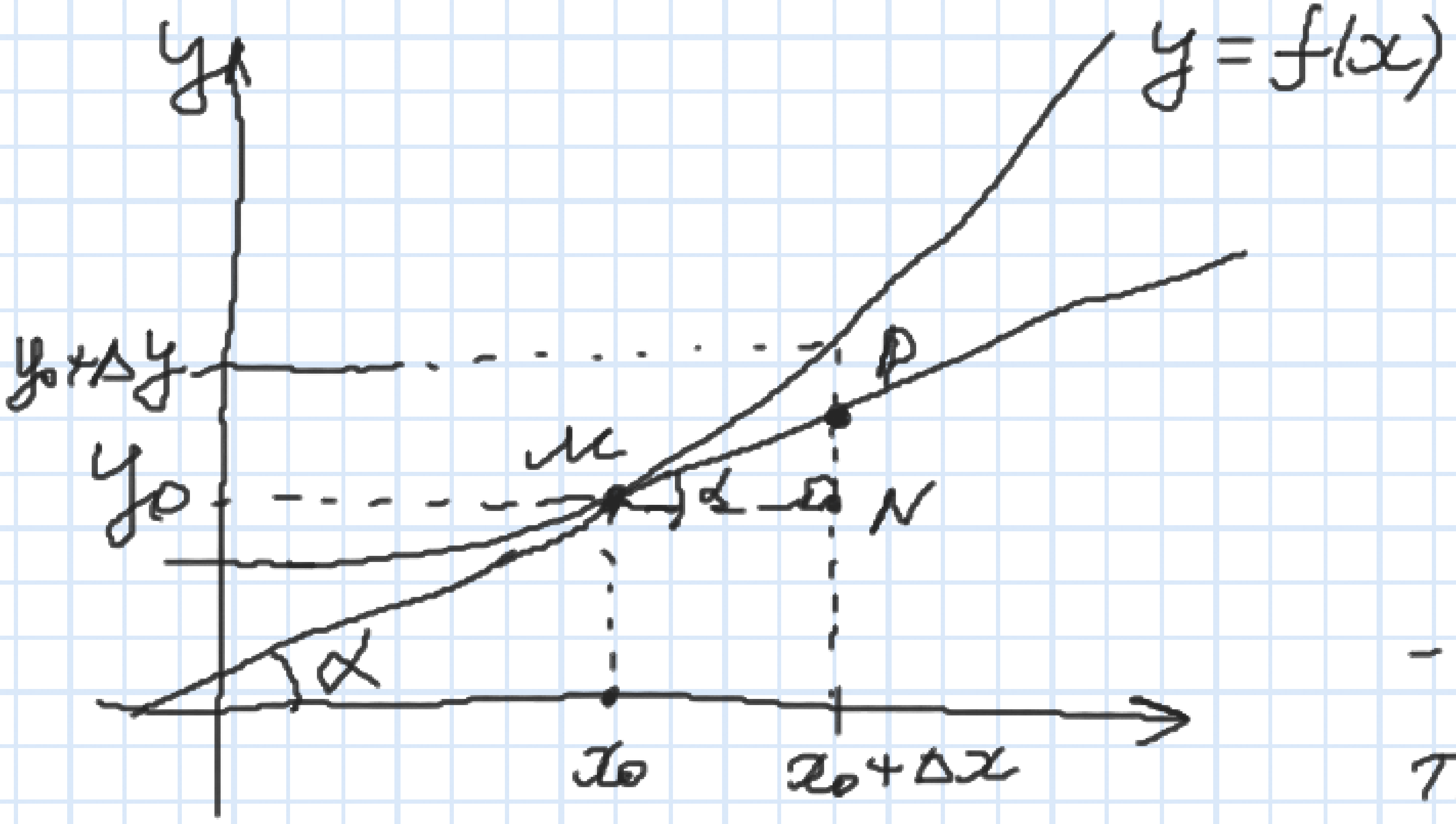
f диф. в т. $x_0 \Leftrightarrow \exists$ конеч. $f'(x_0)$

$$\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$dy(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$\Delta y = dy(x_0) + \bar{o}(\Delta x),\ \Delta x\to 0$$

$dy(x_0)$ – главная часть приращения Δy



$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

$$dy(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$|PN| = |MN|\cdot\operatorname{tg}\alpha =$$

$$= f'(x_0)\cdot\Delta x = dy(x_0)\ -$$

- приращение ординаты касательной к гр. ф-ии в т. (x_0, y_0)

$$f(x) = x,\ f'(x) = 1 \Rightarrow df(x) = 1\cdot\Delta x = \Delta x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \Delta x$$

$$dy(x_0) = f'(x_0)\cdot dx$$

Основные правила вычисления диф-ов:

1°. $d(u \pm v) = du \pm dv$;

2°. $d(uv) = v \cdot du + u\,dv$;

3°. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u \cdot dv}{v^2}$

◄ $d(u \pm v) = (u \pm v)' \cdot dx = (u' \pm v')dx = u'dx \pm v'dx =$
$= du \pm dv$ ►

$\Delta y = dy + \bar{o}(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$

$\Delta y \approx dy$, $\quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$,

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

$\sqrt[4]{1{,}02} \approx ?$ $\quad f(x) = \sqrt[4]{x}$, $\quad x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{-3/4} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $\quad f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = \frac{1}{4}$

$$\sqrt[4]{1,02} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,02 = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{50} = 1 + \frac{1}{200} = \frac{201}{200} = 1,005$$

$$\sqrt[4]{1,02} \approx 1,005.$$

Теорема (инвариантность формы первого диф-ла).

Пусть ф-я $y = f(x)$ диф-ма в т. x_0. Тогда её первый диф-ал имеет вид: $dy = f'(x_0) \cdot dx$, независимо от того, явл-ся ли x независ. перемен-й или ф-ей некоторого аргумента.

Док-во: 1) x – незав. переменная

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

2) $x = \varphi(t)$, φ – диф. в т. t_0, $x_0 = \varphi(t_0)$, $y = f(x) = f(\varphi(t))$

$$dy = \left(f(\varphi(t))\right)'\Big|_{t_0} \cdot dt = f'(\varphi(t_0)) \cdot \underbrace{\varphi'(t_0) \cdot dt} = f'(\varphi(t_0)) \cdot d\varphi =$$

$$= f'(x_0) \cdot dx. \blacktriangleright$$

28. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

опр: Пусть ф-я $y=f(x)$ диф-ма на (a,b) ($\Leftrightarrow \forall x \in (a,b)\ \exists$ конеч. $f'(x)$), если ф-я $f'(x)$ диф-ма в т. $x_0 \in (a,b)$, то $(f'(x))'\big|_{x_0}$ – вторая производная ф-ии $y=f(x)$ в т. x_0.

Обозн: $f''(x_0)$, $f^{(2)}(x_0)$, $\dfrac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x_0}$

опр: если ф-я $f^{(n-1)}(x)$ $(n=2,3,\dots)$ диф-ма в т. $x_0 \in (a,b)$, то $(f^{(n-1)}(x))'\big|_{x_0}$ – n-ая производная (производная n-го порядка) ф-ии $y=f(x)$ в т. x_0,

Обозн: $f^{(n)}(x_0)$, $\dfrac{d^nf}{dx^n}\Big|_{x_0}$.

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \quad n=1,2,\dots; \qquad f^{(0)} \equiv f.$$

Производные высших порядков осн-х элем. ф-ций.

1) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \left(\alpha x^{\alpha-1}\right)' = \alpha(\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2},$$

$$f'''(x) = \left(\alpha(\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2}\right)' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) x^{\alpha-3}$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-(n-1)) \cdot x^{\alpha-n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Док-ем по индукции.

$n = 1 \qquad f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Предп., что ф-ла верна при fix $n \in \mathbb{N}$, и док-ем, что формула верна и для $n+1$, т.е. док-ем, что

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-n) \cdot x^{\alpha-(n+1)}.$$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))\cdot x^{\alpha-n}\right)' =$$

$$= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))\cdot(\alpha-n)\cdot x^{\alpha-n-1}$$

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))\cdot x^{\alpha-n}$$

В частности, если $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\dots(m-(n-1))\cdot x^{m-n}, \text{ если } m \geq n$$

$$(x^m)^{(n)} = 0, \text{ если } m < n.$$

Для остальн. осн-х элем. ф-ций — см. кособие.

св-ва:

1°. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

2°. $(C \cdot u)^{(n)} = C \cdot u^{(n)}$, $C = const$.

3°. $(uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}$ – формула Лейбница

(док-во см. в пособии).

опр: Пусть ф-я $y = f(x)$ дифф-ма на $(a; b)$. Зафиксируем приращение аргумента $\Delta x = h$. Тогда $dy = f'(x)h$ – – функция аргумента x. Если эта ф-я дифф-ма в т. $x_0 \in (a, b)$, то её дифф-ал в т. x_0 имеет вид:
$d(f'(x) \cdot h)\big|_{x_0} = (f'(x) \cdot h)'\big|_{x_0} \cdot dx = f''(x_0) \cdot h \, dx$ Если выбрать приращение $\Delta x = h$, то полученное выра-

чение $d(dy)\big|_{x_0} = f''(x_0)\, h^2 = f''(x_0)\cdot(dx)^2$ назыв-ся второй диф-ом ф-ии в т. x_0, соответствующим приращению аргумента dx.

<u>Обозн:</u> $d^2y(x_0)$, $d^2f(x)\big|_{x_0}$.

n-ый диф-ал (диф-ал n-го порядка):

$$d^n f(x)\big|_{x_0} = d\left(d^{n-1}f(x)\right)\big|_{x_0}.$$

Если x – независ. переменная, то

$$d^n f(x)\big|_{x_0} = f^{(n)}(x_0)\cdot(dx)^n$$

<u>Замечание</u>: n-ый дифф-ал при $n \geq 2$ уже не обладает св-ом инвариантности:

1) x - незав. переменная:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)\underbrace{dx}_{const}) = dx \cdot d(f'(x)) =$$

$$= dx \cdot (f'(x))' \cdot dx = f''(x)(dx)^2$$

2) $x = \varphi(t)$,

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(d f(\varphi(t))) = d(f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt) =$$

$$= dt \cdot d(f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) = dt \cdot (f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t))' \cdot dt =$$

$$= (f''(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \varphi'(t) + f'(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t))(dt)^2 =$$

$$= f''(\varphi(t)) \cdot (\varphi'(t))^2 \cdot (dt)^2 + f'(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t)(dt)^2 =$$

$$= \left| \begin{matrix} (\varphi'(t))^2 \cdot (dt)^2 = (\varphi'(t)\,dt)^2 = (dx)^2 \\ \varphi''(t) \cdot (dt)^2 = d^2x \end{matrix} \right| =$$

$$= f''(x) \cdot (dx)^2 + f'(x) \cdot d^2x$$

x – незав, $\qquad d^2 f(x) = f''(x) \cdot (dx)^2$

$x = \varphi(t) \qquad d^2 f(x) = f''(x) \cdot (dx)^2 + \underline{f'(x) \cdot d^2x}$

Если x – незав. перем. (или лин-ая ф-я некот-го аргумента), то $d^n x = 0$, $n = 2, 3, \ldots$

$$d^n(u \pm v) = d^n u \pm d^n v; \qquad d^n(c \cdot u) = c \cdot d^n u, \quad c = \text{const}.$$

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot d^k u \, d^{n-k} v$$