Нормальные формы булевых функций.

Введём обозначения $x^a = \begin{cases} \bar{x}, & \text{если } a = 0 \\ x, & \text{если } a = 1 \end{cases}.$ **(1)**

Из определения «возведения в степень» вытекают формулы

$$x^x = 1 \quad \textbf{(2)}$$

$$x^{\bar{x}} = 0 \quad \textbf{(3)}$$

Таким образом, результат возведения в степень равен 1, если основание и показатель степени совпадают, и 0, если не совпадают.

Рассмотрим конъюнкцию $x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \ldots \cdot x_k^{a_k}$. Эта конъюнкция обращается в 1 на единственном наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, в котором значения всех переменных совпадают с соответствующими значениями показателей степеней, на остальных же наборах она равна 0.

Теорема о дизъюнктивном разложении по совокупности переменных.

Для любой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ справедлива *формула дизъюнктивного разложения по совокупности переменных*:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \bigvee_{(a_1, a_2, \ldots, a_k)} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{a_k} \cdot f(a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \quad \textbf{(4)}$$

где разложение ведётся по всем 2^k наборам $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Доказательство. Докажем эту формулу непосредственной подстановкой, подставив вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствующие константы $c_1, c_2, \ldots, c_n$. В этом случае в левой части формулы (4) получим значение $f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. При подстановке переменных в правую часть формулы (4) получим:

$$\bigvee_{(a_1, a_2, \ldots, a_k)} c_1^{a_1} \cdot c_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot c_k^{a_k} \cdot f(a_1, \ldots, a_k, c_{k+1}, \ldots, c_n).$$

Среди 2^k конъюнкций, вошедших в это выражение, $2^k - 1$ дизъюнктивных "слагаемых" равны нулю, т.к. все выражения $c_1^{a_1} \cdot c_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot c_k^{a_k}$ равны 0, кроме одного - $c_1^{c_1} \cdot c_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot c_k^{c_k}$, которое равно 1. Получаем:

$$\bigvee_{(a_1,a_2,\ldots,a_k)} c_1^{a_1}\cdot c_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot c_k^{a_k}\cdot f(a_1,\ldots,a_k,c_{k+1},\ldots,c_n)=$$

$$=0\vee 0\vee\ldots\vee c_1^{c_1}\cdot c_2^{c_2}\cdot\ldots\cdot c_k^{c_k}\cdot f(c_1,\ldots,c_k,c_{k+1},\ldots,c_n)=$$

$$=1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot f(c_1,\ldots,c_k,c_{k+1},\ldots,c_n)=f(c_1,\ldots,c_k,c_{k+1},\ldots,c_n).$$

Итак, на любом наборе аргументов левая и правая часть соотношения (4) равны, что и доказывает справедливость теоремы.

Заметим, что эта формула остаётся справедливой и для разложения по любой совокупности k переменных, а не только по первым k переменным.

Пример. Применим формулу дизъюнктивного разложения функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ по переменным x_2, x_4.

Для этого случая формула дизъюнктивного разложения по совокупности переменных примет вид:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bigvee_{(a_2,a_4)} x_2^{a_2}\cdot x_4^{a_4}\cdot f(x_1,a_2,x_3,a_4)=\bigvee_{\substack{(0,0)\\(0,1)\\(1,0)\\(1,1)}} x_2^{a_2}\cdot x_4^{a_4}\cdot f(x_1,a_2,x_3,a_4)=$$

$$=x_2^0\cdot x_4^0\cdot f(x_1,0,x_3,0)\vee x_2^0\cdot x_4^1\cdot f(x_1,0,x_3,1)\vee x_2^1\cdot x_4^0\cdot f(x_1,1,x_3,0)\vee$$

$$\vee x_2^1\cdot x_4^1\cdot f(x_1,1,x_3,1)=$$

$$=\bar{x}_2\cdot\bar{x}_4\cdot f(x_1,0,x_3,0)\vee\bar{x}_2\cdot x_4\cdot f(x_1,0,x_3,1)\vee x_2\cdot\bar{x}_4\cdot f(x_1,1,x_3,0)\vee x_2\cdot x_4\cdot f(x_1,1,x_3,1)$$

Рассмотрим частные случаи формулы (4).

Положим в формуле (4) $k=1$, учтём замечание, запишем общий вид формулы (4) при $k=1$.

Получим *формулу дизъюнктивного разложения по одной переменной*:

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n)=\bar{x}_i\cdot f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)\vee x_i\cdot f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)\quad\mathbf{(5)}$$

Пример. Разложим функцию $f(x,y,z)$ по переменной x: $f(x,y,z)=\bar{x}\cdot f(0,y,z)\vee x\cdot f(1,y,z)$.

Положим в формуле (4) $k=n$. Тогда для функции, отличной от тождественного нуля, можно записать:

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n)=\bigvee_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)} x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}\cdot f(a_1,\ldots,a_n)=$$

$$=\bigvee_{\substack{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\\ f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=1}} x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}\cdot f(a_1,\ldots,a_n)=$$

$$= \bigvee_{\substack{(a_1, a_2, ..., a_n) \\ f(a_1, a_2, ..., a_n)=1}} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot ... \cdot x_n^{a_n} \cdot 1 = \bigvee_{\substack{(a_1, a_2, ..., a_n) \\ f(a_1, a_2, ..., a_n)=1}} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot ... \cdot x_n^{a_n} .$$

Итак, для функции, отличной от тождественного нуля, имеем

$$f(x_1, x_2, ... x_n) = \bigvee_{\substack{(a_1, a_2, ..., a_n) \\ f(a_1, a_2, ..., a_n)=1}} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot ... \cdot x_n^{a_n} \qquad \textbf{(6)}$$

Правая часть формулы (6) называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)* данной булевой функции.

Пример. Найти СДНФ для функции $f(x, y, z) = (0001\ 0101)$.

Запишем таблицу данной функции в развёрнутом виде:

Таблица 1

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Найдём СДНФ данной функции:

$$f(x, y, z) = \bigvee_{\substack{(a,b,c) \\ f(a,b,c)=1}} x^a y^b z^c = \bigvee_{\substack{(0,1,1) \\ (1,0,1) \\ (1,1,1)}} x^a y^b z^c =$$

$$= x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^1 = \bar{x} yz \vee x \bar{y} z \vee xyz .$$

Элементарной конъюнкцией называется выражение $x_{i_1}^{a_{i_1}} \cdot x_{i_2}^{a_{i_2}} \cdot ... \cdot x_{i_m}^{a_{i_m}}$, где все переменные, вошедшие в состав конъюнкции, различны, $m \geq 1$.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) данной булевой функции f называется её представление в виде $f = K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_p$, где $p \geq 1$, а $K_1, K_2, ..., K_p$ - различные элементарные конъюнкции.

Из определения следует, что СДНФ некоторой функции $f(x_1, x_2, ... x_n)$ – это такая её ДНФ, в которой каждая из элементарных конъюнкций, вошедших с её состав, содержит n переменных.

Конъюнктивные нормальные формы.

Рассмотрим дизъюнкцию $x_1^{\overline{a_1}} \vee x_2^{\overline{a_2}} \vee ... \vee x_k^{\overline{a_k}}$. Эта дизъюнкция обращается в 0 на единственном наборе $(a_1, a_2, ..., a_k)$, в котором значения всех переменных совпадают с соответствующими значениями показателей степеней, на остальных же наборах она равна 1.

Теорема о конъюнктивном разложении по совокупности переменных.

Для любой булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ справедлива *формула конъюнктивного разложения по совокупности переменных*:

$$f(x_1, x_2, ... x_n) = \bigwedge_{(a_1, a_2, ..., a_k)} (x_1^{\overline{a_1}} \vee x_2^{\overline{a_2}} \vee ... \vee x_k^{\overline{a_k}} \vee f(a_1, ..., a_k, x_{k+1}, ..., x_n)) \quad \textbf{(7)}$$

где разложение ведётся по всем 2^k наборам $(a_1, a_2, ..., a_k)$.

Доказательство. Докажем эту формулу непосредственной подстановкой, подставив вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ соответствующие константы $c_1, c_2, ..., c_n$. В этом случае в левой части формулы (7) получим значение $f(c_1, c_2, ..., c_n)$. При подстановке переменных в правую часть формулы (41) получим:

$\bigwedge_{(a_1, a_2, ..., a_k)} (c_1^{\overline{a_1}} \vee c_2^{\overline{a_2}} \vee ... \vee c_k^{\overline{a_k}} \vee f(a_1, ..., a_k, c_{k+1}, ..., c_n))$. Среди 2^k дизъюнкций, вошедших в это выражение, $2^k - 1$ конъюнктивных "сомножителей" равны единице, т.к. все выражения $c_1^{\overline{a_1}} \vee c_2^{\overline{a_2}} \vee ... \vee c_k^{\overline{a_k}}$ равны 1, кроме одного - $c_1^{\overline{c_1}} \vee c_2^{\overline{c_2}} \vee ... \vee c_k^{\overline{c_k}}$, которое равно 0.

Получаем: $\bigwedge_{(a_1, a_2, ..., a_k)} (c_1^{\overline{a_1}} \vee c_2^{\overline{a_2}} \vee ... \vee c_k^{\overline{a_k}} \vee f(a_1, ..., a_k, c_{k+1}, ..., c_n)) =$

$= 1 \wedge 1 \wedge ... \wedge 1 \wedge (c_1^{\overline{c_1}} \vee c_2^{\overline{c_2}} \vee ... \vee c_k^{\overline{c_k}} \vee f(c_1, ..., c_k, c_{k+1}, ..., c_n)) =$

$= 0 \vee 0 \vee ... \vee 0 \vee f(c_1, ..., c_k, c_{k+1}, ..., c_n) = f(c_1, ..., c_k, c_{k+1}, ..., c_n)$.

Итак, на любом наборе аргументов левая и правая часть соотношения (7) равны, что и доказывает справедливость формулы (7). ■

Заметим, что эта формула остаётся справедливой и для разложения по любой совокупности k переменных, а не только по первым k переменным.

Пример. Применим формулу конъюнктивного разложения функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменным x_1, x_3.

Для этого случая формула конъюнктивного разложения по совокупности переменных примет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bigwedge_{(a_1, a_3)} (x_1^{\bar{a}_1} \vee x_3^{\bar{a}_3} \vee f(a_1, x_2, a_3)) = (x_1^1 \vee x_3^1 \vee f(0_1, x_2, 0)) \wedge$$

$$\wedge (x_1^1 \vee x_3^0 \vee f(0_1, x_2, 1)) \wedge (x_1^0 \vee x_3^1 \vee f(1_1, x_2, 0)) \wedge (x_1^0 \vee x_3^0 \vee f(1_1, x_2, 1)) =$$

$$= (x_1 \vee x_3 \vee f(0_1, x_2, 0)) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee f(0_1, x_2, 1)) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee f(1_1, x_2, 0)) \wedge$$

$$\wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee f(1_1, x_2, 1)) .$$

Рассмотрим частные случаи формулы (7).

Положим в формуле (7) $k = 1$, учтём замечание, запишем общий вид формулы (7) при $k = 1$.

Получим *формулу конъюнктивного разложения по одной переменной*:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = (x_i \vee f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)) \wedge (\bar{x}_i \vee f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)) \quad \textbf{(8)}$$

Пример. Применим формулу конъюнктивного разложения функции $f(x, y, z)$ по переменной z:

$$f(x, y, z) = (z \vee f(x, y, 0)) \wedge (\bar{z} \vee f(x, y, 1)).$$

Положим в формуле (7) $k = n$. Тогда для функции, отличной от тождественного нуля, можно записать:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \bigwedge_{(a_1, a_2, \ldots, a_n)} (x_1^{\bar{a}_1} \vee x_2^{\bar{a}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{a}_n} \vee f(a_1, \ldots, a_n)) =$$

$$= \bigwedge_{\substack{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0}} (x_1^{\bar{a}_1} \vee x_2^{\bar{a}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{a}_n} \vee f(a_1, \ldots, a_n)) =$$

$$= \bigwedge_{\substack{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0}} (x_1^{\bar{a}_1} \vee x_2^{\bar{a}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{a}_n} \vee 0) = \bigwedge_{\substack{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0}} (x_1^{\bar{a}_1} \vee x_2^{\bar{a}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{a}_n}).$$

Итак, для функции, отличной от тождественной единицы, имеем

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \bigwedge_{\substack{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0}} (x_1^{\bar{a}_1} \vee x_2^{\bar{a}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{a}_n}). \qquad \textbf{(9)}$$

Правая часть формулы (9) называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)* данной булевой функции.

Пример. Найти СКНФ функции $f(x,y,z)$, заданной таблицей 1.

$$f(x,y,z)=\bigwedge_{\substack{(a,b,c)\\ f(a,b,c)=0}}(x^{\bar a}\vee y^{\bar b}\vee z^{\bar c})=\bigwedge_{\substack{(0,0,0)\\(0,0,1)\\(0,1,0)\\(1,0,0)\\(1,1,0)}}(x^{\bar a}\vee y^{\bar b}\vee z^{\bar c})=$$

$$=(x^1\vee y^1\vee z^1)\wedge(x^1\vee y^1\vee z^0)\wedge(x^1\vee y^0\vee z^1)\wedge(x^0\vee y^1\vee z^1)\wedge(x^0\vee y^0\vee z^1)=$$

$$=(x\vee y\vee z)\wedge(x\vee y\vee \bar z)\wedge(x\vee \bar y\vee z)\wedge(\bar x\vee y\vee z)\wedge(\bar x\vee \bar y\vee z).$$

Элементарной дизъюнкцией называется выражение

$x_{i_1}^{a_{i_1}}\vee x_{i_2}^{a_{i_2}}\vee\ldots\vee x_{i_m}^{a_{i_m}}$, где $m\ge 1,$ а все переменные, вошедшие в состав дизъюнкции, различны.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) данной булевой функции f называется её представление в виде $f=D_1\wedge D_2\wedge\ldots\wedge D_p$, где $p\ge 1$, а $D_1,D_2,\ldots,D_p$ - различные элементарные дизъюнкции.

Из определения следует, что СКНФ некоторой функции $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ – это такая её КНФ, в которой каждая из элементарных дизъюнкций, вошедших с её состав, содержит n переменных.

Полиномы.

Рассмотрим несколько формул в базисе $\{0,1,x+y,x\cdot y\}$.

$$x+x=0 \qquad \textbf{(10)}$$

$$x+0=x \qquad \textbf{(11)}$$

$$x+1=\bar x \qquad \textbf{(12)}$$

$$x+y=y+x \qquad \textbf{(13)}$$

$$(x+y)+z=x+(y+z) \qquad \textbf{(14)}$$

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \qquad \textbf{(15)}$$

$$x^a=x+\bar a \qquad \textbf{(16)}$$

Полиномом Жегалкина булевой функции называется её представление в виде $f=K_1+K_2+\ldots+K_p$, $p\ge 1$, где K_1 – элементарная конъюнкция без отрицаний или константа 1, а $K_2,K_3,\ldots,K_p$ –

различные элементарные конъюнкции без отрицаний. Исключением является булева функция $f(x_1,x_2,...x_n)\equiv 0$, полиномом которой можно считать, например, x_1+x_1.

Теорема о представлении булевых функций полиномами Жегалкина.

Каждая булева функция, отличная от тождественного нуля, единственным образом представляется в виде полинома Жегалкина.

Замечание. Единственность понимается с точностью до перестановки переменных в каждой конъюнкции и перестановки конъюнкций в сумме.

Докажем для булевой функции, отличной от тождественного нуля, формулу

$$f(x_1,x_2,...x_n)=\sum_{\substack{(a_1,a_2,...,a_n)\\ f(a_1,a_2,...,a_n)=1}} x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot ...\cdot x_n^{a_n} \qquad \textbf{(17)}$$

Пусть набор $(b_1,b_2,...b_n)$ таков, что $f(b_1,b_2,...b_n)=0$. Тогда все конъюнкции в правой части формулы (17) равны нулю, т.к. суммирование проводится только по единичным номерам, и вся правая часть формулы (17) на наборе $(b_1,b_2,...b_n)$ также равна нулю.

Пусть набор $(c_1,c_2,...c_n)$ таков, что $f(c_1,c_2,...c_n)=1$. Тогда все конъюнкции в правой части формулы (17) равны нулю, кроме конъюнкции $c_1^{c_1}\cdot c_2^{c_2}\cdot ...\cdot c_n^{c_n}$ и правая часть формулы (17) примет вид $0+0+...+0+c_1^{c_1}\cdot c_2^{c_2}\cdot ...\cdot c_n^{c_n}=0+1=1$. Итак, на любых наборах левая и правая части формулы (17) принимают одинаковые между собой значения, следовательно, формула (17) доказана.

Сделаем замены в формуле (17) с использованием закона (16). Получим:

$$f(x_1,x_2,...x_n)=\sum_{\substack{(a_1,a_2,...,a_n)\\ f(a_1,a_2,...,a_n)=1}} (x_1+\bar{a}_1)\cdot(x_2+\bar{a}_2)\cdot ...\cdot(x_n+\bar{a}_n) \qquad \textbf{(18)}$$

Раскроем скобки, приведём подобные с помощью соответствующих формул, получим однозначное представление функции в виде полинома Жегалкина. Очевидно, что различные функции не могут дать одинаковые полиномы, так как построение таблицы истинности для каждого полинома даёт однозначный результат. ■

Пример. Найти полином Жегалкина функции $f(x,y,z)$, заданной таблицей 1.

Таблица 1

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Способ 1.

Воспользуемся формулой (6):

$$f(x,y,z)=\sum_{\substack{(0,1,1)\\(1,0,1)\\(1,1,1)}}(x+\bar{a})(y+\bar{b})(z+\bar{c})=$$

$$=(x+1)(y+0)(z+0)+(x+0)(y+1)(z+0)+$$

$$=(x+0)(y+0)(z+0)=(x+1)yz+x(y+1)z+xyz=$$

$$=xyz+xz+xyz+yz+xyz=xz+yz+xyz.$$

Итак, $f(x,y,z)=xz+yz+xyz.$

Способ 2. Применим метод неопределённых коэффициентов.

Будем искать полином для данной функции в виде:

$$f(x,y,z)=a_0+a_1x+a_2y+a_3z+a_4xy+a_5xz+a_6yz+a_7xyz. \qquad \textbf{(19)}$$

Используя таблицу функции, будем подставлять наборы значений переменных и значения функции в соотношение (19) и последовательно находить неопределённые коэффициенты a_i:

$$f(0,0,0)=0=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+a_3\cdot 0+a_4\cdot 0+a_5\cdot 0+a_6\cdot 0+a_7\cdot 0=a_0 \Rightarrow \ a_0=0,$$

$$f(0,0,1)=0=0+a_3\cdot 1 \ \Rightarrow \ a_3=0,$$

$$f(0,1,0)=0=0+a_1\cdot 1=a_2 \Rightarrow \ a_2=0,$$

$$f(0,1,1)=1=0+a_6\cdot 1=a_6 \Rightarrow \ a_6=1,$$

$$f(1,0,0)=0=0+a_1\cdot 1=a_1 \Rightarrow \ a_1=0,$$

$$f(1,0,1)=1=0+a_1\cdot 1+a_3\cdot 1+a_5\cdot 1=a_5 \Rightarrow \ a_5=1,$$

$$f(1,1,0)=0=0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+a_4\cdot 1=a_4 \Rightarrow \ a_4=0,$$

$$f(1,1,1)=1=a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+a_3\cdot 1+a_4\cdot 1+a_5\cdot 1+a_6\cdot 1+a_7\cdot 1=$$

$$=0+a_5\cdot 1+a_6\cdot 1+a_7\cdot 1=0+1+1+a_7=a_7 \ \Rightarrow \ a_7=1.$$

Получили, что

$$f(x,y,z)=0+0\cdot x+0\cdot y+0\cdot xy+1\cdot xz+1\cdot yz+1\cdot xyz= xz+yz+xyz.$$

Как и следовало ожидать, результаты, найденные различными способами, совпали. Итак, $f(x,y,z)=xz+yz+xyz.$

Критерий существенности переменной булевой функции.

Переменная x_i является существенной переменной булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ тогда и только тогда, когда она явно входит в полином Жегалкина этой функции.

Доказательство. Для технического удобства докажем теорему для переменной x_n.

Необходимость. Доказательство необходимости проведём методом от противного. Пусть x_n - существенная переменная булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Допустим, что полином Жегалкина $P(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ не содержит явно переменную x_n. Рассмотрим произвольные наборы $\alpha = (a_1, a_2, ...a_{n-1}, 0)$ и $\beta = (a_1, a_2, ...a_{n-1}, 1)$, соседние по переменной x_n.

Тогда $f(\alpha) = P(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) = f(\beta)$. Значит, ввиду произвольности наборов α и β имеем, что переменная x_n является фиктивной переменной булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Получено противоречие. Значит, допущение о том, что полином Жегалкина $P(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ может не содержать явно существенную переменную x_n, неверно. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть полином Жегалкина $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ содержит переменную x_n. Сгруппируем слагаемые, вошедшие в полином, содержащие x_n, вынесем x_n за скобки. Получим представление $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в виде

$$x_n \cdot Q(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) + T(x_1, x_2, ..., x_{n-1}).$$

Заметим, что $Q(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ не является тождественным нулём, иначе $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имела бы своим полиномом $T(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, не содержащую переменную x_n. Значит, найдётся набор $(b_1, b_2, ..., b_{n-1})$ такой, что $Q(b_1, b_2, ..., b_{n-1}) = 1$. Пусть $T(b_1, b_2, ..., b_{n-1}) = c$.

Тогда $f(b_1, b_2, ..., b_{n-1}, x_n) = x_n + c$.

$f(b_1, b_2, ..., b_{n-1}, 0) = 0 + c = c$, $f(b_1, b_2, ..., b_{n-1}, 1) = 1 + c = \overline{c}$.

Итак, нашлась пара наборов, соседних по переменной x_n, на которой значения функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ различны. Значит, переменная x_n является существенной переменной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, достаточность доказана, и вместе с ней доказана и вся теорема. ■

Таблица 2

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Пример. Для функции $f(x, y, z)$, заданной таблично, выяснить, какие её переменные являются существенными, а какие – фиктивными.

Найдём полином Жегалкина данной функции:

$$f(x, y, z) = (x+1)(y+1)z + (x+1)yz + x(y+1)(z+1) + \\ + xy(z+1) =$$

$$= xyz + xz + yz + z + xyz + yz + xyz + xy + xz + x + xyz + xy =$$

$= z + x$. Получен полином, не содержащий переменной y, но содержащий переменные x и z.

Значит, x и z являются существенными переменными, а y – фиктивная переменная функции $f(x, y, z)$.