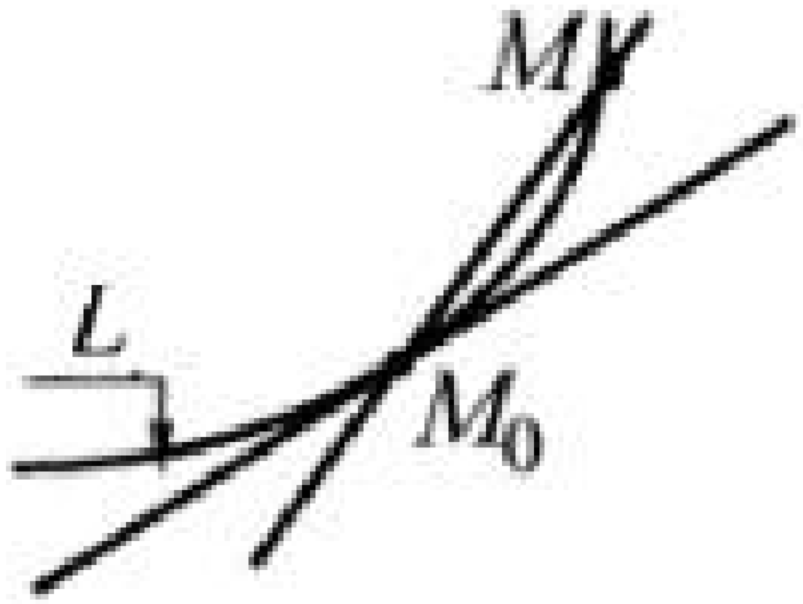
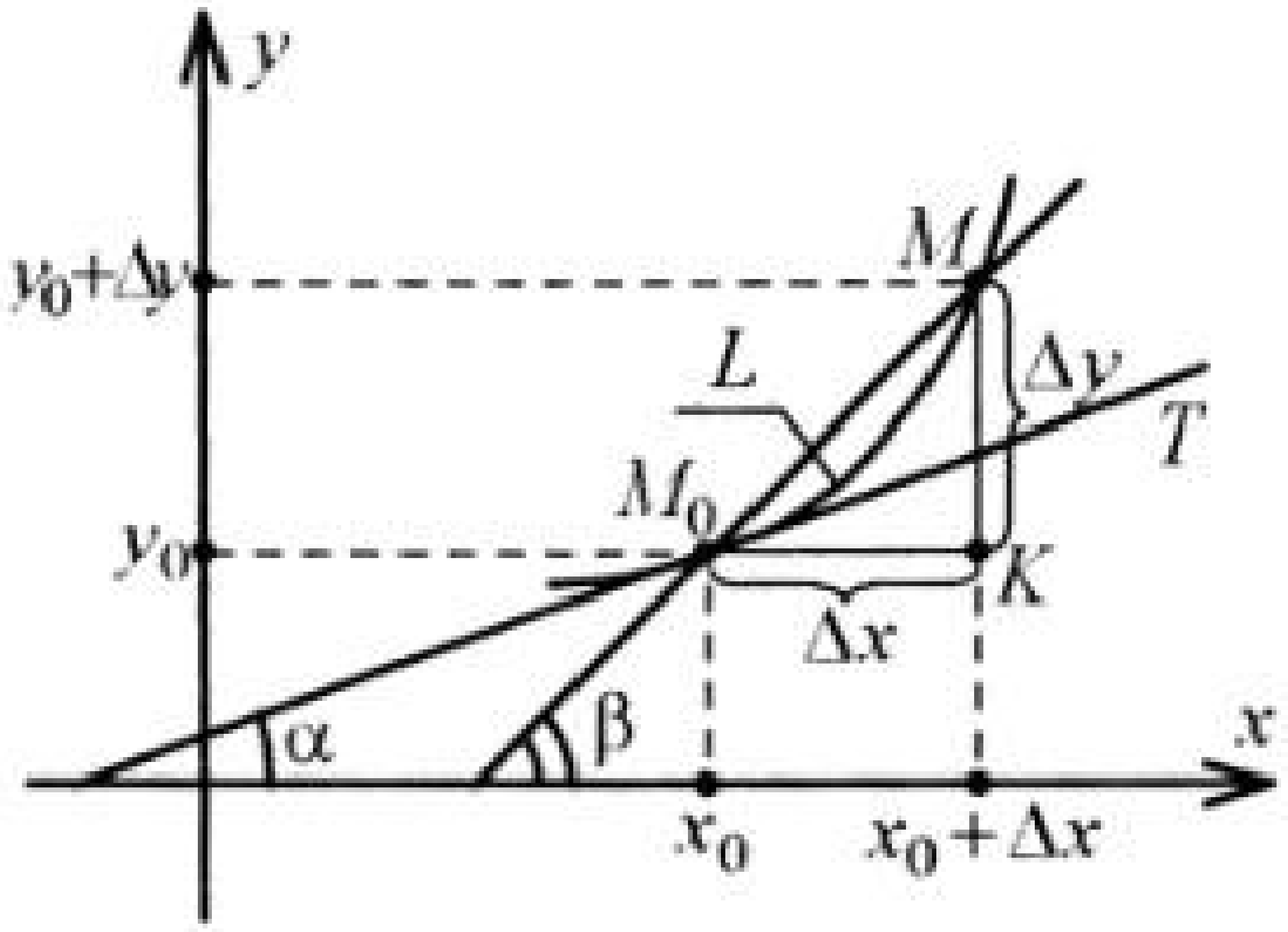
24. Геометрический смысл производной.

Определение. *Касательной* к кривой L в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M, проходящей через точку M_0 и некоторую другую точку M, лежащую на кривой L, когда точка M вдоль кривой произвольным образом стремится к совпадению с точкой M_0.





L – график ф-ии $y=f(x)$:

$L=\{(x,y):\ y=f(x)\}$

$f\in C(x_0)$.

$y_0=f(x_0)$, $M_0(x_0,y_0)\in L$

$\Delta x\neq 0$

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$M(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\in L$

Секущая M_0M: $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$, где

$k=k(\Delta x)=\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$|M_0M|\to 0$ при $\Delta x\to 0$: $f\in C(x_0)\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$;

$|M_0M|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0$.

M_0T – предельное положение секущей M_0M; $\operatorname{tg}\beta\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}\operatorname{tg}\alpha$.

$\exists$ конеч. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\,\beta \Leftrightarrow \exists$ конеч. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$\Leftrightarrow \exists$ конеч. $f'(x_0)$.

Если $f(x)$ в т. x_0 имеет конечную производ. $f'(x_0)$, то ур-ие M_0T имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

(предельн. переход при $\Delta x\to 0$ в ур-ии секущей M_0M)

Ур-ие касат-ой к гр-ку ф-ии $y = f(x)$ в т. $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$f'(x_0) = tg\,\alpha$, α - угол наклона касат. в т. M_0 к оси Ox.

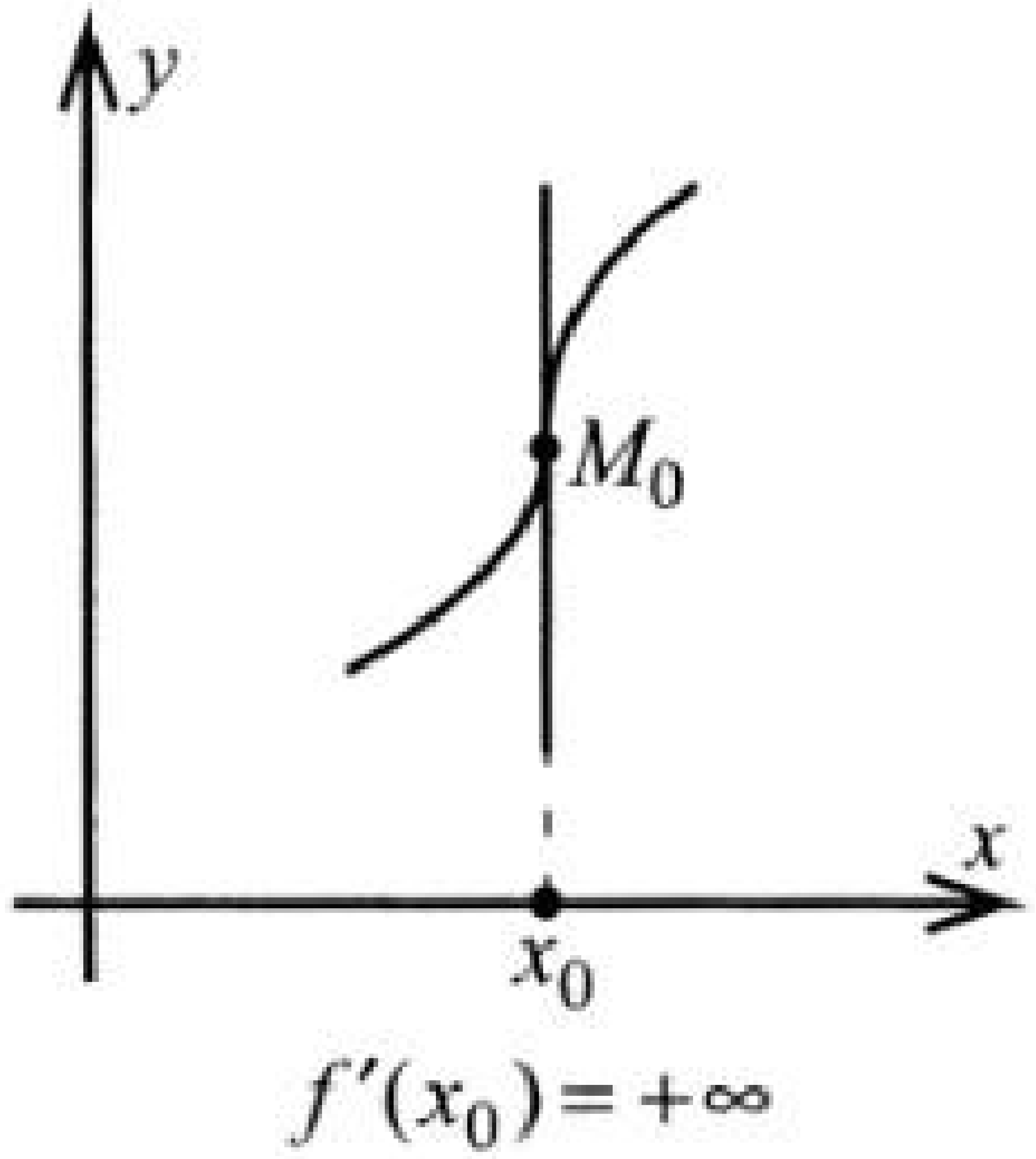
Если $f(x)$ имеет в т. x_0 бесконеч. произв-ую, т.е.

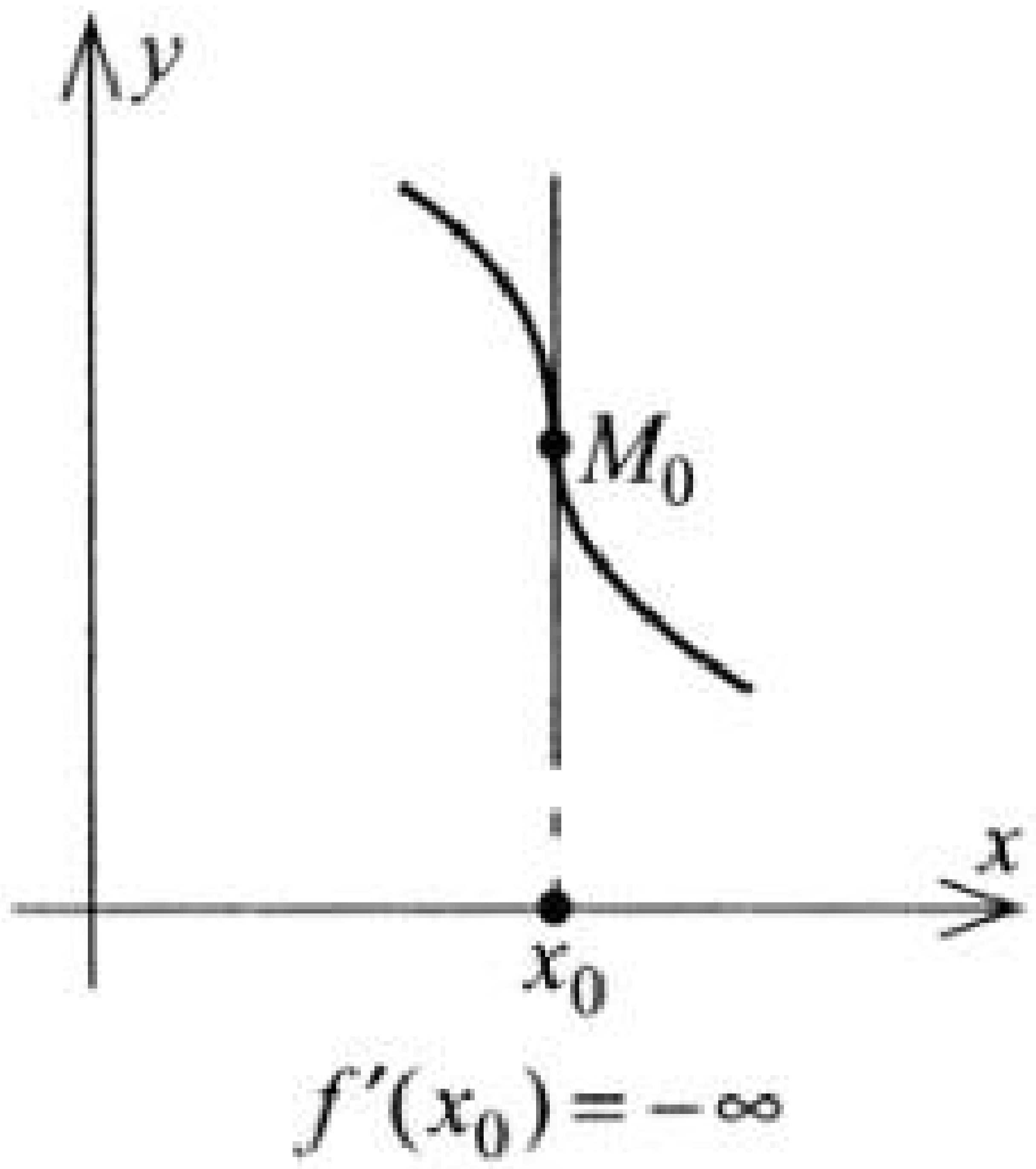
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty, \text{ то } \lim_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty.$$

$M_0 M$: $\frac{y - y_0}{k} = x - x_0$. Перейдем к $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$:

$0 = x - x_0 \Rightarrow x = x_0$ – ур-ие касат-ой к гр-ку ф-ции $y = f(x)$ в т. M_0, если $f'(x_0) = \pm\infty$

<u>Замечание</u>: если ф-я $f(x)$ имеет в т. x_0 бесконеч. производную, то имеется в виду бесконечность определенного знака: $+\infty$ или $-\infty$.

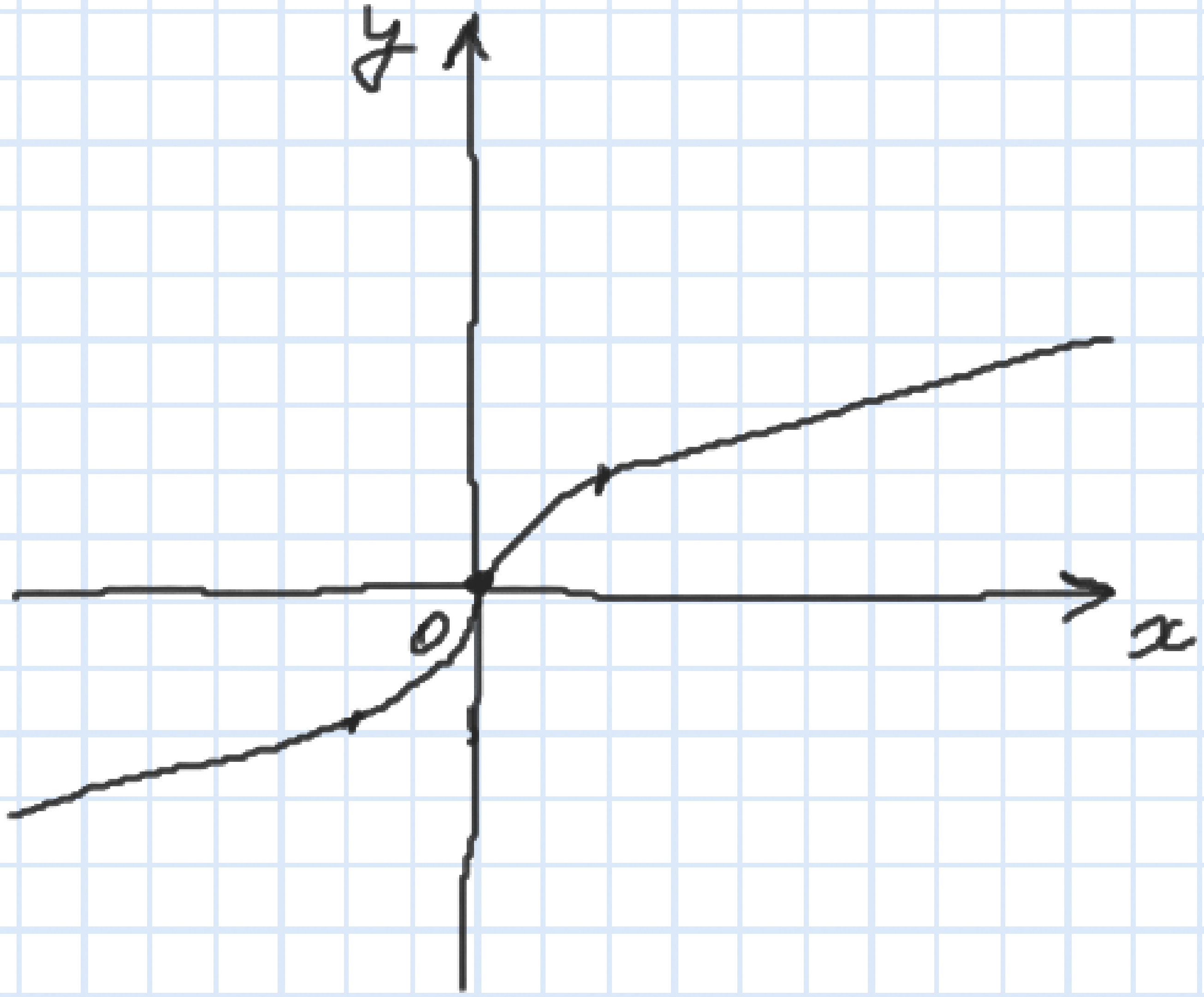




Вертикальная касательная к гр-ку ф-ии $y = f(x)$.

Примеры:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $\quad f'(0)=?$

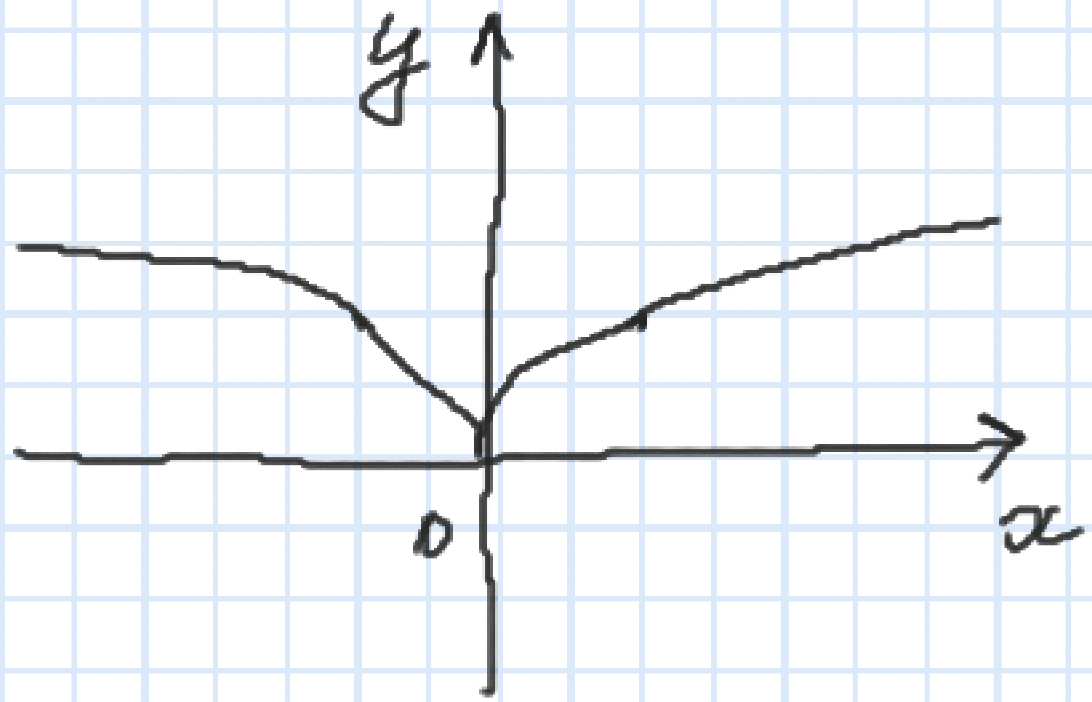


$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\underbrace{\Delta x^2}_{>0}}}=+\infty$$

$$f'(0)=+\infty$$

2) $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$, $f'(0)=?$



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{|\Delta x|}}{\Delta x}$$

$$\Delta x>0 \Rightarrow |\Delta x|=\Delta x \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{|\Delta x|}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}$$

$$\Delta x<0 \Rightarrow |\Delta x|=-\Delta x \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{|\Delta x|}}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{-\Delta x}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{-\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=-\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}$$

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\sqrt[3]{|\Delta x|}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}=+\infty \Rightarrow f'_+(0)=+\infty;$$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sqrt[3]{|\Delta x|}}{\Delta x}=-\infty \Rightarrow f'_-(0)=-\infty$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\infty \Rightarrow f'(0)$ не сущ-ет.

25. Понятие дифференцируемости функции.

$f: U(x_0) \to \mathbb{R}$; $y = f(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$.

$\Delta x \neq 0$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ $(|\Delta x| < \delta)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если приращение Δy этой функции в точке x_0 может быть представлено в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \,, \qquad (1)$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx, а α — функция аргумента Δx такая, что $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

<u>Замечание:</u> соотношение (1) остаётся верным и в том случае, когда $\Delta x = 0$. Ф-я $\alpha(\Delta x)$, вообще говоря, не опр-на в т. $\Delta x = 0$. Пусть $\alpha(0) = 0$, тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0 = \alpha(0)$, т.е. $\alpha \in C(0)$.

Теорема 1 (необх. и дост. условие диф-ти ф-ии). Ф-я $y=f(x)$ дифференцируема в т. x_0 $\Longleftrightarrow$ $\exists$ конеч. $f'(x_0)$.

Док-во: ($\Rightarrow$) Необходимость.

Дано: $y=f(x)$ диф-ма в т. x_0.

Док-ть: $\exists$ конеч $f'(x_0)$.

$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, где $A\in\mathbb{R}$, $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

$\Delta x\neq 0$ $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A+\alpha(\Delta x) \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A \Rightarrow f'(x_0)=A$.

($\Leftarrow$) Достаточность.

Дано: $\exists$ конеч. $f'(x_0)$.

Док-ть: $y=f(x)$ диф. в т. x_0.

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$ – б. м. при $\Delta x\to 0$. $\quad \alpha(\Delta x)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$.

$$\Delta y = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{число, не завис. от } \Delta x} \cdot \Delta x + \underbrace{\alpha(\Delta x)}_{\text{б.м. при } \Delta x \to 0} \cdot \Delta x \Rightarrow y = f(x) \text{ диф. в т. } x_0$$

▶

Диф-ть ф-ии $y = f(x)$ в т. x_0 равносильна сущ-ю в этой т. конеч. производ. $f'(x_0)$. При этом:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = (f'(x_0) + \alpha(\Delta x)) \cdot \Delta x,$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \bar{o}(\Delta x), \ \Delta x \to 0.$$

<u>Теорема 2</u> (необх. условие диф-ти ф-ии в точке; связь между понятиями диф-ти и непр-ти ф-ии).

Если $y = f(x)$ диф-ма в т. x_0, то f непр. в т. x_0.

<u>Док-во</u>: $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $A \in \mathbb{R}$, $\alpha = \alpha(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Rightarrow f \in C(x_0)$ ▶

Замечание: т. 2 необратима: из непрер-ти ф-ии в точке не следует диф-ть в этой точке (необходимое условие диф-ти не явл-ся достаточным).

Пример: $f(x)=|x|$, $f\in C(0)$. $\nexists\, f'(0) \Rightarrow f$ не диф-ма в т. $x=0$.

26. Формулы и правила вычисления производных.

26.1. Производная обратной функции.

Теорема (о производной обратной ф-ии). Пусть ф-я $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некот. окр-ти $U(x_0)$ точки x_0. Пусть $\exists f'(x_0) \neq 0$, Тогда в некот. окр-ти $U(y_0)$ такой $y_0 = f(x_0)$ определена обратная ф-ия $x = g(y)$, причём она диф-ма в т. y_0 и $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ (короче $x'_y = \frac{1}{y'_x}$)

Док-во: обратная ф-я $x = g(y)$ определена, строго монотонна и непрер-на в окр-ти $U(y_0)$ т. y_0 по т-ме об обрат. ф-ии.

Пусть $\Delta y \neq 0$, $\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)$ – приращение ф-ии $x = g(y)$ в т. y_0, соответствующее приращению аргумента Δy.

$\Delta x \neq 0$ в силу строгой монот. обратной ф-ии $x = g(y)$.

Тогда $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

$$\Delta x = g(y_0+\Delta y) - g(y_0) \Rightarrow \Delta x + g(y_0) = g(y_0+\Delta y),$$
$$\Delta x + x_0 = g(y_0+\Delta y) \Rightarrow f(x_0+\Delta x) = y_0+\Delta y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta y = f(x_0+\Delta x) - y_0 = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

След-но, приращение аргумента Δy обратной ф-ии $x=g(y)$ есть приращение ф-ии $y=f(x)$.

Заметим, что при $\Delta y \to 0$ $\Delta x \to 0$, т.к. $x=g(y)$ непр-нер в точке y_0. След-но,

$$\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}_{g'(y_0)} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$ ►

26.2. Производная сложной функции.

<u>Теорема</u> (о производной сложной ф-ции). Пусть ф-я $x=\varphi(t)$ диф-ма в т. t_0, ф-я $y=f(x)$ диф-ма в т. $x_0=\varphi(t_0)$. Тогда сложная ф-я $y=f(\varphi(t))$ диф-ма в т. t_0, причём

$$\left(f(\varphi(t))\right)'\Big|_{t=t_0}=f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0).$$

<u>Док-во</u>: $\Delta t\neq 0$,

$$\Delta x=\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)=\varphi'(t_0)\cdot\Delta t+\beta(\Delta t)\cdot\Delta t,$$

где $\beta(\Delta t)\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}0$.

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=f'(x_0)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\alpha(\Delta x)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}=$$

$$= f'(x_0)\cdot \frac{\varphi'(t_0)\cdot\Delta t + \beta\cdot\Delta t}{\Delta t} + \alpha\cdot\frac{\varphi'(t_0)\cdot\Delta t + \beta\cdot\Delta t}{\Delta t} =$$

$$= f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0) + f'(x_0)\cdot\beta(\Delta t) + \alpha(\Delta x)\cdot\varphi'(t_0) + \alpha(\Delta x)\cdot\beta(\Delta t)$$

φ – дифф. в т. t_0 $\Rightarrow$ $\varphi\in C(t_0)$ $\Rightarrow$ $\Delta x\to 0$ при $\Delta t\to 0$

f – дифф. в т. x_0 $\Rightarrow$ $f\in C(x_0)$ $\Rightarrow$ $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\Delta y\to 0$ при $\Delta t\to 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0),$$

$$\left(f(\varphi(t))\right)'\Big|_{t=t_0} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0).$$