Бином Ньютона.

Выпишем формулы квадрата суммы для двух и трёх слагаемых:

$(x+a)^2 = xx + ax + xa + aa$;

$(x+a)^3 = xxx + xxa + xax + axx + xaa + axa + aax + aaa$.

Видно, что в эти формулы входят все перестановки с повторениями, составленные из двух букв в случае квадрата суммы, и из трёх – в случае куба суммы. То же самое будет и в общем случае. Запишем $(x+a)^n = \underbrace{(x+a)(x+a)\ldots(x+a)}_{n \text{ раз}}$. После раскрытия скобок получим в виде слагаемых всевозможные перестановки с повторениями букв x и a, состоящие из n элементов каждое.

Приведём подобные члены. Слагаемое $x^k a^{n-k}$ войдёт в общую сумму с коэффициентом $P(k, n-k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$.

Итак, $(x+a)^n = C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} a + C_n^{n-2} x^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^1 x\, a^{n-1} + C_n^0 a^n$

Формула (7) называется формулой *бинома Ньютона* и может быть записана в виде

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k a^{n-k} \qquad \textbf{(8)}$$

Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

Пример. С помощью формулы бинома Ньютона возвести в 7 степень двучлен $x + y$.

Найдём сначала все биномиальные коэффициенты вида C_7^k.

$$C_7^0 = \frac{7!}{7!0!} = 1;\ C_7^1 = \frac{7!}{6!1!} = 7;\ C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21;$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{6} = 35;\ C_7^4 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{6} = 35;$$

$$C_7^5 = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21;\ C_7^6 = \frac{7!}{6!1!} = 7;\ C_7^7 = \frac{7!}{7!0!} = 1.$$

Тогда

$$(x+y)^7 = C_7^0 x^7 + C_7^6 x^6 y + C_7^5 x^5 y^2 + C_7^4 x^4 y^3 + C_7^3 x^3 y^4 + C_7^2 x^2 y^5 + C_7^1 x\, y^6 + C_7^0 y^7 =$$

$= x^7 + 7x^6 y + 21x^5 y^2 + 35x^4 y^3 + 35x^3 y^4 + 21x^2 y^5 + 7x\ y^6 + y^7.$

Свойства биномиальных коэффициентов.

Из определения биномиальных коэффициентов вытекают свойства:

1) При $n \in \{0; 1; n-1; n\}$ биномиальные коэффициенты будут равны:

$C_n^0 = C_n^n = 1; \qquad C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$

Действительно, $C_n^0 = C_n^n = \dfrac{n!}{0!\cdot n!} = \dfrac{n!}{n!} = 1;$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n.$$

2) *Свойство симметричности*: $C_n^k = C_n^{n-k};$

По определению, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^{n-k}.$

1) *Свойство арифметического треугольника*: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$

Доказательство: $C_n^k + C_n^{k-1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k.$$

4) *Сумма биномиальных коэффициентов n – го порядка*:

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} + \ldots + C_n^1 + C_n^0 = 2^n$$

Эта формула получается из формулы бинома Ньютона при подстановке $x = 1; \quad a = 1.$

5) *Знакочередующаяся сумма биномиальных коэффициентов n – го порядка*: $\quad C_n^n - C_n^{n-1} + C_n^{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n^0 = 0$

Эта формула получается из формулы бинома Ньютона при подстановке $x=1;\quad a=-1$.

Пример: Вычислить сумму

$$C_{n+1}^{1}+3C_{n+1}^{2}+5C_{n+1}^{3}+\ldots+(2n+3)C_{n+1}^{n+1} \quad (n\ge 0).$$

Обозначим искомую сумму через S. Тогда

$$S-1=-1\cdot C_{n+1}^{0}+C_{n+1}^{1}+3C_{n+1}^{2}+5C_{n+1}^{3}+\ldots+(2n+3)C_{n+1}^{n+1} \quad (*)$$

Учитывая свойство симметричности, можем переписать (*) в виде:

$$S-1=(2n+3)C_{n+1}^{0}+(2n+1)C_{n+1}^{1}+\ldots+C_{n+1}^{n}-C_{n+1}^{n+1} \qquad (**)$$

Сложив равенства (*) и (**), получим:

$$2S-2=(2n+2)C_{n+1}^{0}+(2n+2)C_{n+1}^{1}+\ldots+(2n+2)C_{n+1}^{n}+(2n+2)C_{n+1}^{n+1},$$

откуда $S-1=(n+1)(C_{n+1}^{0}+C_{n+1}^{1}+\ldots+C_{n+1}^{n}+C_{n+1}^{n+1})$.

Используем свойство суммы биномиальных коэффициентов n – го порядка. Получим: $S-1=(n+1)2^{n+1}$, откуда $S=(n+1)2^{n+1}+1$.

Ответ: $(n+1)2^{n+1}+1$.

Полиномиальная формула.

Обобщим формулу бинома Ньютона на случай возведения в n – ю степень сумму не только двух, но и любого числа слагаемых.

Запишем

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\underbrace{(x_1+x_2+\ldots+x_m)\cdot\ldots(x_1+x_2+\ldots+x_m)}_{n\text{ раз}}\cdot$$

После раскрытия скобок получим в виде слагаемых всевозможные перестановки с повторениями букв $x_1,x_2,\ldots,x_m$, состоящие из n элементов каждое.

Приведём подобные члены. Слагаемое $x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_m^{k_m}$ войдёт в общую сумму с коэффициентом

$$P(k_1,k_2,\ldots,k_m)=\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}\cdot$$

Итак,

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_m=n\\ k_i\in N_0}} P(k_1,k_2,\ldots,k_m)\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_m^{k_m} \qquad \textbf{(9)}$$

Формула (9) называется *полиномиальной формулой.*

Пример. С помощью полиномиальной формулы возвести в 4 степень трёхчлен $a+b+c$.

Найдём сначала все полиномиальные коэффициенты вида $P(k_1,k_2,k_3)$, где $k_1+k_2+k_3=4$, $k_1,k_2,k_3\in N_0$.

$$P(0,0,4)=\frac{4!}{0!\cdot 0!\cdot 4!}=1;\ P(0,1,3)=\frac{4!}{0!\cdot 1!\cdot 3!}=\frac{4!}{3!}=4;$$

$$P(0,2,2)=\frac{4!}{0!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{4!}{2\cdot 2}=6;\ P(1,1,2)=\frac{4!}{1!\cdot 1!\cdot 2!}=\frac{4!}{2}=12.$$

Тогда $(a+b+c)^4=a^4+b^4+c^4+4(a^3b+b^3a+a^3c+c^3a+b^3c+c^3b)+$

$+6(a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2)+12(abc^2+bca^2+acb^2).$