2?. Равномерная непрерывность.

$f \in C(A) \Leftrightarrow \forall x_0 \in A \ \ f \in C(x_0) \Leftrightarrow \forall x_0 \in A \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x_0 \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$

<u>опр:</u> ф-я $f(x)$ наз-ся равномерно непрер-ой на мн-ве $A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0; \ \forall x', x'' \in A \ \ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

<u>Замечание:</u> равн-я непр-ть $\Rightarrow$ непр-ть:

$x'' = x_0 \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ |x' - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x_0)| < \varepsilon$
$\Rightarrow f \in C(x_0)$.

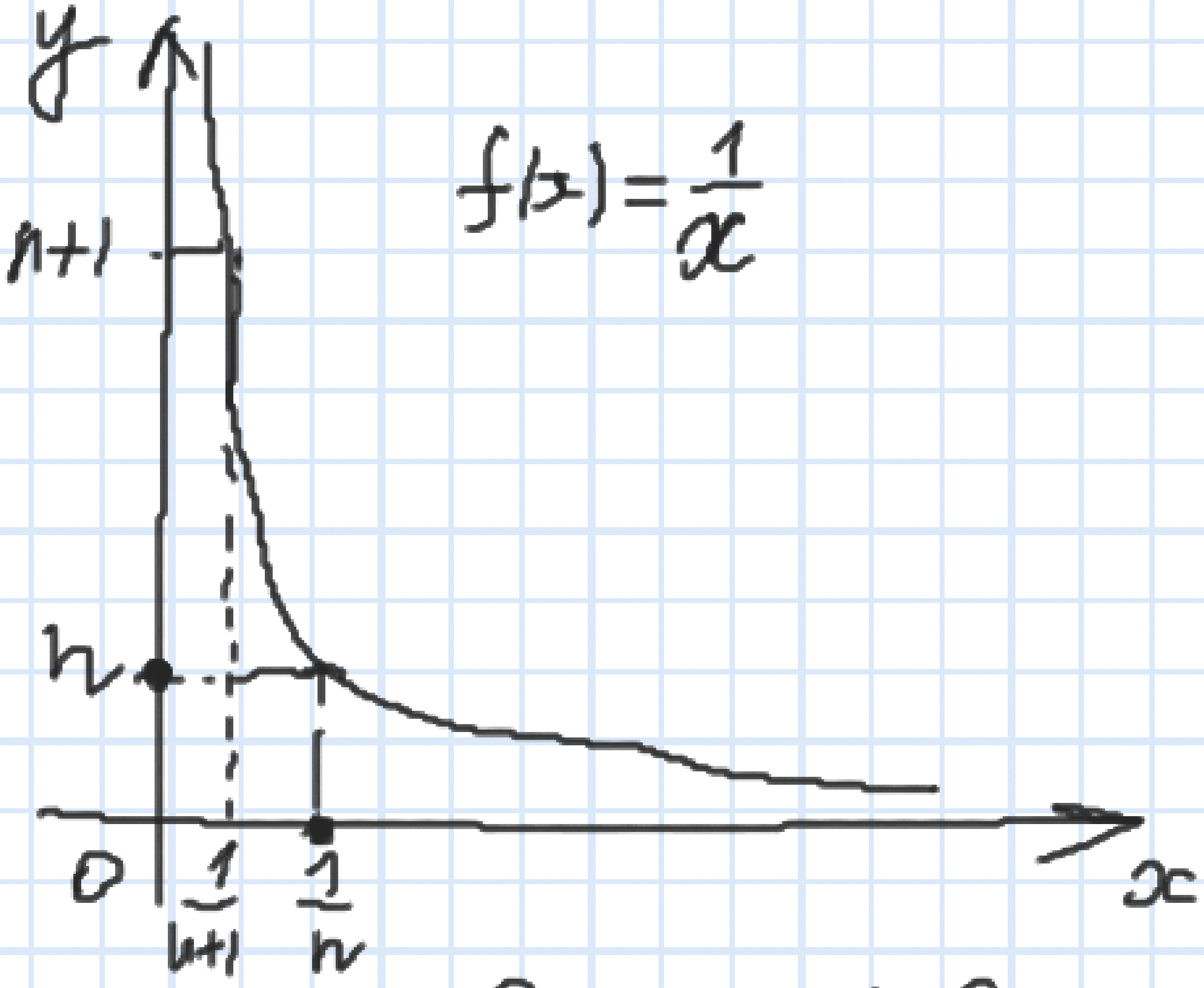
Обратное неверно.

<u>Пример:</u> $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$. $f \in C(0, 1]$.

f не явл-ся равн. непр-й на $(0, 1]$.

опр-ие того, что ф-я f не явл-ся равн. непр на A, как отри-цание к опр-ию равн-й непр-ти.

f не явл-ся равн-но непр-ой на A $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0$
$\exists x_\delta', x_\delta'' \in A : \quad |x_\delta' - x_\delta''| < \delta$, но $|f(x_\delta') - f(x_\delta'')| \geqslant \varepsilon_0$.



$x_\delta' = \frac{1}{n}$, $x_\delta'' = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

$|x_\delta' - x_\delta''| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)}$

$|f(x_\delta') - f(x_\delta'')| = |n - (n+1)| = 1$

$\forall \delta > 0$ м. указать $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n(n+1)} < \delta$

$\varepsilon_0 = 1 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta' = \frac{1}{n}, x_\delta'' = \frac{1}{n+1} : \quad |x_\delta' - x_\delta''| < \delta$,
$|f(x_\delta') - f(x_\delta'')| \geqslant 1$

Значит, $f(x) = \frac{1}{x}$ не явл. равн. непр. на $(0, 1]$.

Теорема Кантора. Если ф-я $f(x)$ непр-на на $[a,b]$, то она равн-но непр. на $[a,b]$.

Док-во; пусть $f(x) \in C[a,b]$. Предп-м, что $f(x)$ не явл-ся равн. непр-й на $[a,b] \Longleftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0$
$\exists x'_\delta, x''_\delta \in [a,b] ! \quad |x'_\delta - x''_\delta| < \delta$, но $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \delta = \frac{1}{n} \qquad \exists\, x'_n, x''_n \in [a,b] : \quad |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n},$

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0. \qquad (1)$$

Рассм-м $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.к. $\forall n \in \mathbb{N} \; x'_n \in [a,b]$, то $\{x'_n\}$ - огр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \{x'_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : x'_{n_k} \longrightarrow \xi$ при $k \to \infty$;

$\forall k \in \mathbb{N} \quad x_{n_k} \in [a,b] \Rightarrow \xi \in [a,b]$.

Рассм-м $\{x''_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. $\quad |x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$h_k \uparrow \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} h_k = 0 \quad \Rightarrow \quad x''_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \xi$

$f \in C[a,b] \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(\xi), \ \lim\limits_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(\xi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \left(f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\right) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} :$

$\forall k \geq K \quad |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| < \varepsilon$ — противоречие с (1)

Значит, f равн. непр. на $[a,b]$ ▶

ТЕМА. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ.

23. Понятие производной.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, $\Delta x\neq 0$, $x_0+\Delta x\in(a;b)$.

опр: приращение ф-ии $y=f(x)$ в т. x_0, соответствующее приращению Δx аргумента:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Лемма: $f\in C(x_0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0.$

◀ $f\in C(x_0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\left[\begin{array}{l} x-x_0=\Delta x,\ x=x_0+\Delta x \\ x\to x_0 \Longleftrightarrow \Delta x\to 0\end{array}\right] \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ ▶

опр: число $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ (при условии, что этот предел сущ-ет и конечен) наз-ся производной ф-ии $y=f(x)$ в т. x_0.

Обозн: $f'(x_0)$, $f'(x)\big|_{x=x_0}$, $y'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

Примеры:

1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ $\quad f'(0)=?$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\underbrace{x}_{\text{б.м.}}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{огр.}}=0=f(0)\Rightarrow f\in C(0)$$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{1}{\Delta x} = \left| t = \frac{1}{\Delta x} \right| = \lim_{t \to \infty} \sin t$$ не сущ-ет.

$f'(0)$ не сущ-ет.

2) $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Исследуем $f(x)$ на непр-ть в т. $x=0$:

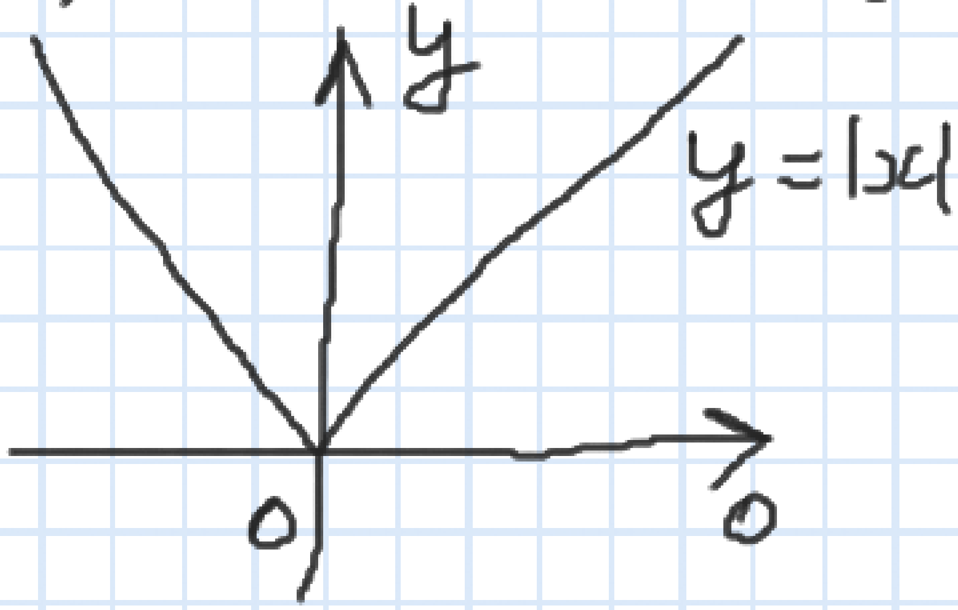
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f \in C(0).$$

Найдем $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \cdot \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x} = 0$$

3) $f(x)=|x|$, $f \in C(0)$, $f'(0)=?$



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\ldots=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\ne$$

$$\lim_{\Delta x\to -0} \text{ —||— } =\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ не сущ-ет $\Rightarrow$ $f'(0)$ не сущ-ет.

опр: правая произв-я ф-ии $y=f(x)$ в т. x_0:

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

левая произв-я ф-ии $y=f(x)$ в т. x_0:

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Теорема (критерий сущ-ия производной в т. ч/з одностор. производ-ые): ф-я $y=f(x)$ имеет в т. x_0 производную $f'(x_0)$ т. и т. т., к. $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$