15. Асимптотическое сравнение функций.

Понятие предела ф-ии в точке характеризует локальное поведение ф-ии в точке (в некот. проколотой окр-ти этой точки). Если имеется 2 ф-ии, то можно сравнивать их локальн. поведение. Вместо слов „лок. поведение ф-ии" говорят ещё об асимптотике ф-ии.

Опр: f ограничена по сравнению с g при $x \to x_0$ (ф-я f подчинена ф-ии g при $x \to x_0$), если $\exists \overset{\circ}{U}(x_0)$, $\exists C > 0$:
$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$.

Обозн: $f(x) = \underline{O}(g(x)),\ x \to x_0$

(f равно „О большое" от g)

Примеры:

1) $\sin x = \underline{O}(x),\ x \to 0 \quad (|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R})$

2) $x^2 = \underline{O}(x),\ x \to 0 \quad (x^2 \leq |x|$ при $|x| \leq 1)$

3) $x = \underline{O}(x^2)$, $x \to \pm\infty$ (при $|x| \geq 1$ $|x| \leq x^2$)

<u>Замечания:</u> 1) экв-ое опр-ие:

$f(x) = \underline{O}(g(x))$, $x \to x_0 \iff \exists \overset{\circ}{U}(x_0)$, $\exists \varphi(x)$: $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$

$f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$, φ – огр. в $\overset{\circ}{U}(x_0)$.

2) запись „$x \to x_0$" означает, что рассматриваемое св-во имеет место лишь в некот. окр-ти т. x_0; ни о каком пределе здесь речи нет.

3) $f(x) = \underline{O}(1)$, $x \to x_0 \iff f$ лок. огр. в т. x_0.

<u>Лемма 1:</u> $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. Если $\exists$ конеч. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, то $f = \underline{O}(g)$, $x \to x_0$.

◀ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=k,\ k\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, \mathring{U}_1(x_0): \left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<1 \ \forall x\in\mathring{U}_1(x_0)$

$-1+k<\frac{f(x)}{g(x)}<1+k, \quad -|k|\le k\le |k| \Rightarrow -1-|k|<\frac{f(x)}{g(x)}<1+|k| \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<1+|k|.$

Т. о. $\forall x\in\mathring{U}_1(x_0)$ $\quad |f(x)|<(1+|k|)\cdot|g(x)| \Rightarrow f=\underline{O}(g),\ x\to x_0$ ▶

<u>Пример:</u>

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty,\\ x\to\infty)}}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)=$

$=a_0 \Rightarrow a_0x^n+\ldots+a_n=\underline{O}(x^n),\ x\to+\infty\ (x\to-\infty,\ x\to\infty)$

$a_0x^n+\ldots+a_n=\underline{O}(x^{n+1}),\ x\to\pm\infty$

опр: f пренебрежимая по сравнению с g при $x \to x_0 \iff$
$\exists \overset{\circ}{U}(x_0)$, $\exists \alpha(x)$: $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.
($\alpha(x)$ - б.м. при $x \to x_0$).

Обозн: $f(x) = \bar{o}(g(x))$, $x \to x_0$.
(„о малое")

$\underline{O}$, $\bar{o}$ – символы Ландау

Лемма 2. $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f = \bar{o}(g)$, $x \to x_0$.

◄ $f(x) = \underbrace{\dfrac{f(x)}{g(x)}}_{\alpha(x)} \cdot g(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to x_0$ ►

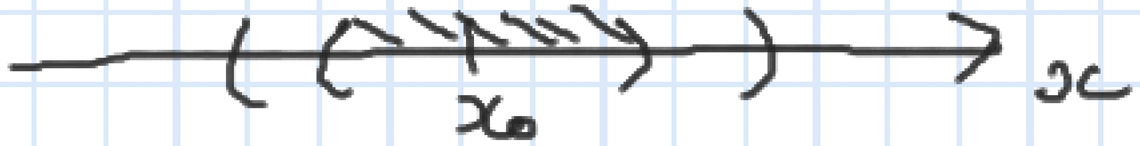
Лемма 3. $f = \bar{o}(g)$, $x \to x_0 \Rightarrow f = \underline{O}(g)$, $x \to x_0$.

◀ $f=\bar{o}(g),\ x\to x_0 \Rightarrow \forall x\in \mathring{U}_1(x_0)\quad f(x)=\alpha(x)\cdot g(x),\quad \alpha(x)$ – б.м., $x\to x_0$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \Rightarrow \forall x\in\mathring{U}_2(x_0)\quad |\alpha(x)|<1$

$\forall x\in \mathring{U}_1(x_0)\cap\mathring{U}_2(x_0)\qquad |f(x)|=|\alpha(x)|\cdot|g(x)|<|g(x)| \Rightarrow$

$\mathring{U}_1(x_0)\cap\mathring{U}_2(x_0)\supset\mathring{U}(x_0) \qquad \Rightarrow f=\underline{O}(g),\ x\to x_0.$ ▶



<u>Замечание:</u> обратное неверно.

контрпример: $a_0x^n+\ldots+a_n=\underline{O}(x^n),\ x\to\infty$, но

$x^n\neq\bar{o}(a_0x^n+\ldots+a_n)$, $\quad a_0\neq 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a_0x^n+\ldots+a_n}=\frac{1}{a_0}\neq 0$$

Опр: f эквивалентна g при $x \to x_0 \Leftrightarrow \exists \overset{\circ}{U}(x_0), \exists \gamma(x)$: $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = 1$, $f(x) = \gamma(x) \cdot g(x)$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$.

Обозн: $f \sim g$, $x \to x_0$.

Примеры:

1) $\sin x \sim x$, $x \to 0$, т.к. $\sin x = \overset{\gamma(x)}{\dfrac{\sin x}{x}} \cdot x$, $\lim\limits_{x \to 0} \gamma(x) = 1$.

2) $a_0 x^n + \ldots + a_n \sim a_0 x^n$, $x \to \infty (\pm\infty)$, $a_0 \neq 0$.

Замечания: 1) $f \sim g \Rightarrow g \sim f$.

$f \sim g \Rightarrow f(x) = \gamma(x) \cdot g(x)$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0)$

$\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = 1 > 0 \Rightarrow \gamma(x) > 0$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}_2(x_0)$

$\overset{\circ}{U}(x_0) \subset \overset{\circ}{U}_1(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_2(x_0)$

$g(x) = \frac{1}{\gamma(x)} \cdot f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\gamma(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x)} = 1 \Rightarrow g \sim f$, $x \to x_0$

2) $f \sim g,\ g \sim h,\ x \to x_0 \Rightarrow f \sim h,\ x \to x_0$

<u>Лемма 3</u>. $g(x) \neq 0\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то $f \sim g,\ x \to x_0$.

◀ $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ – б. м., $x \to x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = g(x) \cdot (1 + \alpha(x))$, $\lim\limits_{x \to x_0} (1 + \alpha(x)) = 1$ ▶

<u>Лемма 4</u>. $f \sim g,\ x \to x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x)),\ x \to x_0$.

◀ $f \sim g,\ x \to x_0 \Rightarrow f(x) = \gamma(x) \cdot g(x)$, $\gamma(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$; $\gamma(x) = 1 + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ – б. м., $x \to x_0 \Rightarrow f(x) = (1 + \alpha(x)) \cdot g(x) = g(x) + \alpha(x) \cdot g(x)$,

$f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x)),\ x \to x_0$

Пусть $f(x) = g(x) + \overline{o}(g(x)),\ x \to x_0 \Rightarrow \ldots$ ▶

Замечания: $g(x)$ назыв-ся главной частью ф-ии $f(x)$ при $x \to x_0$. Для заданной ф-ии $f(x)$ гл. часть опр-ся неоднозначно: любая ф-я, экв-ая $f(x)$, явл-ся её главной частью.