Комбинаторика

Комбинаторика – раздел математики, в котором рассматриваются способы и методы подсчёта количеств комбинаций различных элементов.

Рассмотрим два основных правила комбинаторики: правило суммы и правило произведения.

Правило суммы. Если предмет A может быть выбран n различным числом способов, а B - k числом способов, причём ни один способ выбора предмета A не совпадает ни с одним способом выбора предмета B, тогда выбор «A или B» может быть совершён $n + k$ числом способов.

Правило суммы имеет следующую теоретико-множественную интерпретацию:

Если множество A конечно и $|A| = n$, множество B конечно и $|B| = k$, причём $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = n + k$.

Правило произведения. Если предмет A может быть выбран n различным числом способов, и после каждого выбора A предмет B может быть выбран k различным числом способов, тогда выбор пары «A и B» может быть совершён $n \cdot k$ различным числом способов.

Правило произведения имеет следующую теоретико-множественную интерпретацию:

Если множество A конечно и $|A| = n$, множество B конечно и $|B| = k$, то $|A \times B| = n \cdot k$.

Выборка.

Пусть имеются n предметов, отмеченных идентификаторами $a_1, a_2, ..., a_n$. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Рассмотрим две процедуры:

1) *Выбор с возвращением (первая схема выбора)*.

Выбираем предмет $a_{i_1} \in A$, записываем его идентификатор a_{i_1};

Выбираем предмет $a_{i_2} \in A$, дописываем его идентификатор к предыдущей записи: $a_{i_1} a_{i_2}$;

…

Выбираем предмет $a_{i_k} \in A$, дописываем его идентификатор к предыдущей записи: $a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k}$.

2) *Выбор без возвращения (вторая схема выбора)*.

Выбираем предмет $a_{i_1} \in A$, записываем его идентификатор a_{i_1};

Выбираем предмет $a_{i_2} \in A \setminus \{a_{i_1}\}$, дописываем его идентификатор к предыдущей записи: $a_{i_1} a_{i_2}$;

…

Выбираем предмет $a_{i_2} \in A \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{k-1}}\}$, дописываем его идентификатор к предыдущей записи: $a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k}$.

Запись, полученная по первой или второй схеме выбора, называется *выборкой из n элементов по k* и обозначается $[a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k}]$

Заметим, что выборка – это не множество, так как некоторые символы в записи могут совпадать. Также, выборка – это не вектор, так как в некоторых случаях порядок записи символов не существенен.

Запись, полученная по схеме выбора с возвращением, называется *выборкой с повторениями*, а запись, полученная по схеме выбора без возвращений, называется *выборкой без повторений*.

Выборка называется *упорядоченной* выборкой, или *размещением из n элементов по k*, если две выборки, отличающиеся только порядком записи символов, считают различными.

Выборка называется *неупорядоченной* выборкой, или *сочетанием из n элементов по k*, если две выборки, отличающиеся только порядком записи символов, считают совпадающими.

Размещения с повторениями.

Как следует из определения, размещение с повторениями – упорядоченная выборка с повторениями. Число различных размещений с повторениями из n элементов по k обозначается так: $\overline{A}_n^k$.

Теорема о количестве различных размещений с повторениями из n элементов по k.

Количество различных размещений с повторениями из n элементов по k равно n^k.

Запишем утверждение теоремы в виде формулы:

$$\overline{A}_n^k = n^k \qquad \textbf{(1)}$$

Пусть $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ - размещение с повторениями из n элементов по k.

Каждый из символов $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ может принимать n значений. Тогда, по правилу произведения, количество размещений с повторениями из n элементов по k равно $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ сомножителей}} = n^k$. ■

Пример. В некотором велосипедном клубе используются только двухзначные номера участников заезда, причём уставом клуба запрещено использование цифр 0 и 8, напоминающих об авариях. Каково могло быть максимальное количество участников заезда членов этого клуба?

Решение. Каждый номер представляет собой упорядоченную выборку с повторениями из 8 цифр 1,2,3,4,5,6,7,9 по 2 в каждом номере. Максимальное количество таких номеров будет равно $\overline{A}_8^2 = 8^2 = 64$.

Размещения без повторений.

Как следует из определения, размещение без повторений – упорядоченная выборка без повторений. Число различных размещений без повторений из n элементов по k обозначается так: A_n^k.

Теорема о количестве различных размещений без повторений из n элементов по k.

Количество различных размещений без повторений из n элементов по k равно $\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ сомножителей}}$.

Запишем утверждение теоремы в виде формулы:

$$A_n^k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ сомножителей}} \qquad \textbf{(2)}$$

Пусть $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ - размещение без повторений из n элементов по k.

Символ a_{i_1} может принимать n значений, символ a_{i_2} - любое из оставшихся n - 1 значений, …, символ a_{i_k} - любое из оставшихся $n-k+1$ значений. Тогда, по правилу произведения, количество размещений без повторений из n элементов по k равно $\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ сомножителей}}$. $\blacksquare$

Эту формулу можно записать иначе, домножив числитель и знаменатель на $(n-k) \cdot (n-k-1) \ldots 2 \cdot 1$:

$$A_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

Произведение всех целых чисел от 1 до n включительно называют *факториалами* и обозначают $n!$ (читают: «эн факториал»).

Считают, что 0! = 1.

Таким образом, формула (2) примет вид:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad \textbf{(3)}$$

Пример. В правление избрано 9 человек. Из них нужно выбрать председателя, заместителя председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать, если один человек не может занимать несколько должностей?

Решение. В этом случае нужно найти число размещений (так как важен не только состав руководства правления, но и каким образом распределены должности внутри руководства) без повторений (так как один человек не может занимать несколько должностей). Поэтому ответ даётся формулой $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Перестановки без повторений.

Формула числа размещений без повторений справедлива при $k \le n$.

Если $k = n$, будем говорить, что имеет место *перестановка*, или *перестановка без повторений*, n предметов.

Количество перестановок без повторений обозначается P_n или $P(n)$, и, как следует из формулы (2),

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad \textbf{(4)}$$

Пример. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова «логарифм»?

Пояснение: *словом* будем называть любую последовательность (не обязательно осмысленную) символов алфавита.

Решение. В слове «логарифм» 8 различных букв. Максимальное количество различных слов, составленных из этих букв, равно $P_8 = 8! = 40320$.

Перестановки с повторениями.

Пусть имеется k_1 предметов 1-го типа, k_2 предметов 2-го типа,…, k_m предметов m-го типа, причём предметы одного типа считаем неразличимыми, и $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Тогда упорядоченная выборка этих n предметов называется *перестановкой с повторениями*. Количество перестановок с повторениями в этом случае обозначается $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Теорема о количестве различных перестановок с повторениями.

В условиях, описанных выше, количество перестановок с повторениями равно
$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2 \cdot ! \ldots \cdot k_m!} \qquad \textbf{(5)}$$

Общее количество перестановок $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ различных предметов равно $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!$. Но из-за того, что некоторые элементы неразличимы, получится меньшее число перестановок. Предметы первого типа можно переставить между собой $k_1!$ способами. Так как предметы первого типа неразличимы, такие перестановки ничего не меняют. Точно так же ничего не меняют $k_2!$ перестановок элементов 2 типа,…, $k_m!$ перестановок элементов m-го типа. Перестановки элементов каждого типа можно делать независимо друг от друга. Поэтому, по правилу произведения, элементы перестановки можно переставлять друг с другом $k_1!\cdot k_2\cdot!\ldots\cdot k_m!$ числом способов так, что она останется неизменной. Значит, число различных перестановок с повторениями будет равно $\dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\cdot k_2\cdot!\ldots\cdot k_m!}$. ■

Числа $P(k_1,k_2,\ldots,k_m)$ называются *полиномиальными коэффициентами.*

Пример. Сколькими способами можно расположить 8 белых шахматных фигур на первой горизонтали шахматной доски?

В данном случае мы имеем фигуры: один ферзь, один король, два неразличимых между собой коня, 2 два неразличимых между собой слона, две неразличимых между собой ладьи. Тогда общее число способов расположения фигур будет выражаться коэффициентом

$$P(1_1,1,2,2,2)=\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{8!}{8}=7!=5040\cdot$$

Сочетания без повторений.

Как следует из определения, *сочетание без повторений* – неупорядоченная выборка без повторений. Число различных сочетаний без повторений из n элементов по k обозначается C_n^k или $\binom{n}{k}$.

Теорема о количестве различных сочетаний без повторений из n элементов по k.

Количество различных сочетаний без повторений из n элементов по k равно

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot \qquad \textbf{(6)}$$

Сравним количество сочетаний без повторений из n элементов по k с количеством размещений без повторений из n элементов по k.

Переставляя выбранные k элементов местами (что можно сделать $k!$ числом способов), мы будем получать различные размещения, но одно и то же сочетание. Поэтому, количество сочетаний без повторений из n элементов по k в $k!$ раз меньше числа размещений без повторений из n элементов по k.

Таким образом, $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ■

Пример. Отмечены вершины правильного 10-угольника. Сколько существует выпуклых 4-угольников с вершинами в отмеченных точках?

Каждая неупорядоченная четвёрка отмеченных вершин определяет единственный выпуклый четырёхугольник. Следовательно, количество таких четырёхугольников равно

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 210 \cdot$$

Сочетания с повторениями.

Как следует из определения, *сочетание с повторениями* – неупорядоченная выборка с повторениями. Число различных сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначается $\overline{C}_n^k$.

Теорема о количестве различных сочетаний с повторениями из *n* элементов по *k*.

Количество различных сочетаний с повторениями из n элементов по k равно $$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k \, . \qquad \textbf{(7)}$$

Поставим каждому сочетанию с повторениями из n элементов по k в соответствие перестановку с повторениями из k неразличимых точек и n – 1 перегородки. Количество точек, расположенных левее первой перегородки, будет соответствовать количеству символов a_{i_1} в данной выборке, количество точек, расположенных между первой и второй перегородками будет соответствовать количеству символов a_{i_2}, …, количество точек, расположенных правее n – 1 перегородки, будет соответствовать количеству символов a_{i_k} в данной выборке. Очевидно, что это соответствие – биекция. Количество полученных перестановок с повторениями равно

$$P(n-1,k)=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}=C_{n+k-1}^{k}. \qquad \blacksquare$$

Пример. Сколькими способами можно купить в киоске набор из 15 открыток, если там имеется 4 вида открыток?

В данном случае мы имеем неупорядоченную выборку с повторениями из 4 типов по 15. Количество различных выборок такого типа равно числу сочетаний с повторениями

$$\overline{C}_4^{15}=C_{18}^{15}=\frac{18!}{15!3!}=\frac{16\cdot17\cdot18}{2\cdot3}=816.$$