ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Е.И. КОНОВАЛОВА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

С А М А Р А 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Е.И. КОНОВАЛОВА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Рекомендовано редакционно-издательской комиссией по прикладной математике, информатике, вычислительной технике и информационной безопасности
в качестве учебного пособия

С А М А Р А
Издательство СГАУ
2016

УДК СГАУ: 514.122.1
ББК СГАУ:

Рецензент: д-р.т.н. проф. Коварцев А.Н.

Коновалова Е.И.

К **Аналитическая геометрия-1(векторная алгебра, прямая на плоскости, прямая и плоскость в пространстве):** учеб. пособие / *Е. И. Коновалова*. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. –
84 с.: ил.

Данное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 090105.65 «Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем» и студентов-бакалавров 010400.62 «Информационные технологии». Набор задач соответствует программе практических занятий по курсу «Алгебра и аналитическая геометрия» в 1 семестре.

Разработано на кафедре прикладной математики.

УДК СГАУ: 514.122.1
ББК СГАУ:

Оглавление

Занятие 1. Введение.

1. Понятие вектора. Операции над векторами.
2. Системы векторов. Базис. Координаты точки в базисе, координаты вектора в базисе.
3. Декартова, аффинная и полярная системы координат.
4. Деление отрезка в данном отношении.
5. Опорные задачи.
6. Задачи для самостоятельного решения.

Понятие вектора. Операции над векторами.

Термин «вектор» (от латинского vector – «несущий») впервые появился в 1845 году у ирландского математика Уильяма Гамильтона (1805-1865) в работах по построению числовых систем. Понятие вектор возникает там, где приходится иметь дело с объектами, которые характеризуются величиной и направлением: например, скорость, сила, ускорение.

Определение. Вектором называется направленный отрезок, то есть отрезок прямой, для которого указано, какой из его концов является началом, а какой – концом. Вектор, начало которого совпадает с концом, называется нулевым вектором.

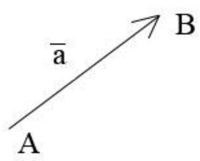


Рисунок 1. Вектор.

Вектор характеризуется своим направлением и длиной. Длина вектора также называется его модулем и обозначается $|\bar{a}|$. Длина нулевого вектора полагается равной нулю.

Определение. Два вектора называются коллинеарными (обозначение $\bar{a} \parallel \bar{b}$), если они расположены на параллельных прямых или на одной прямой. Два коллинеарных вектора сонаправлены, если они направлены в одну сторону и противоположно направлены, если они направлены в разные стороны.

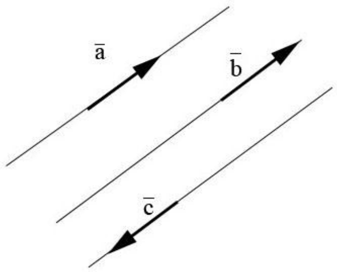


Рисунок 2. Коллинеарные вектора.

На Рисунок 2 вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены, вектора $\bar{a}$ и $\bar{c}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ противоположно направлены.

Определение. Два вектора называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

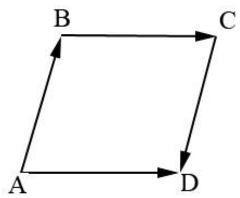


Рисунок 3. Равенство векторов.

На Рисунок 3 вектора $\overline{AD} = \overline{BC}$ (совпадают по длине и по направлению), $\overline{AB} = -\overline{CD}$ (равны по длине, но противоположны по направлению).

Умножение вектора на число. При умножение вектора на положительное число k результатом будет вектор, сонаправленный исходному вектору, длина которого изменилась в k раз, при умножении вектора на отрицательное число k результатом будет вектор, противоположно направленный исходному вектору, длина которого изменилась в k раз (если $|k|>1$, то длина вектора увеличивается, если $0<|k|<1$, то длина вектора уменьшается, если $k=0$ то получим нулевой вектор).

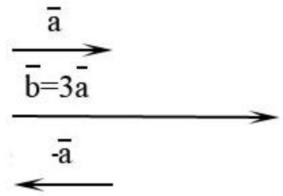


Рисунок 4. Умножение вектора на число.

Вектора можно складывать, пользуясь правилом треугольника или правилом параллелограмма.

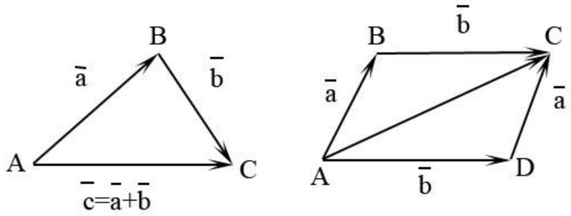


Рисунок 5. Сложение векторов.

На Рисунке 5 $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

Сложение векторов коммутативно $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ и ассоциативно $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (доказать самостоятельно).

Системы векторов. Базис. Координаты точки, координаты вектора.

Определение. Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется линейно зависимой, если существует ненулевой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ таких, что $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots \lambda_n\bar{a}_n = 0$.

Определение. Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется линейно независимой, если $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots \lambda_n\bar{a}_n = 0$ тогда и только тогда, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равны нулю.

Напомним свойства систем векторов.

Свойство 1. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

Свойство 2. Система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарные.

Свойство 3. Система из трех векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда они компланарные (принадлежат одной плоскости).

Определение. Базисом пространства называется система линейно независимых векторов из этого пространства, такая, что любой вектор из данного пространства линейно выражается через базисные вектора.

Заметим, что на плоскости в качестве базисных векторов можно взять два любых неколлинеарных вектора, а в пространстве в качестве базисных можно взять три любых некомпланарных вектора.

В следующем пункте рассмотрим подробно различные системы векторов.

Определение. Координатами вектора в базисе называются его коэффициенты в разложении по базисным векторам, а именно: пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$-базис, вектор $\bar{b}$ - произвольный вектор пространства. По определению базиса, его можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов: $\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots \lambda_n \bar{a}_n$. Тогда числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ будут координатами вектора $\bar{b}$ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, можно записать так: $\bar{b} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ - в виде вектора-строки, или так: $\bar{b} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ - в виде вектора-столбца.

Декартова, аффинная и полярная системы координат.

Сначала введем понятие декартовой системы координат на плоскости.

Выберем на плоскости произвольным образом точку O, эту точку будем называть началом координат. От этой точки отложим два равных по длине перпендикулярных вектора, обозначим их $\bar{i}$ и $\bar{j}$. Набор $(0, \bar{i}, \bar{j})$ задает декартову систему координат на плоскости.

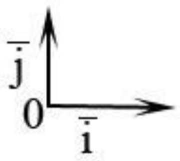


Рисунок 6. Декартова система координат на плоскости.

Чтобы определить координаты произвольной точки M, принадлежащей плоскости, нужно определить координаты вектора $\overline{OM} = \bar{r}$. Вектор $\overline{OM} = \bar{r}$ называется радиус-вектором точки M. Как уже было сказано в предыдущем пункте, координаты вектора – это коэффициенты в разложении по базисным векторам: $\overline{OM} = \bar{r} = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j}$, $\overline{OM} = \bar{r} = (\alpha, \beta)$.

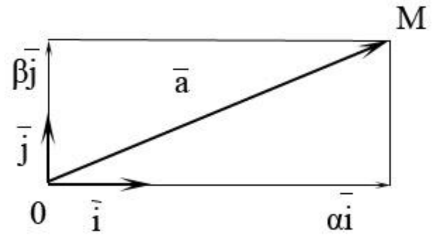


Рисунок 7. Определение координат точки М.

Заметим, что вектор $\bar{i}$ имеет координаты $\bar{i} = 1 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} = (1,0)$, вектор $\bar{j} = 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} = (0,1)$, точка $O(0,0)$.

Для большей наглядности вводят понятие осей координат. Через точку O в направлении вектора $\bar{i}$ проводят прямую с заданным направлением (ось OX), в направлении вектора $\bar{j}$ проводят прямую с заданным направлением (ось OY). Вся плоскость разбивается на квадраты. Чтобы определить координаты точки M достаточно спроецировать вектор $\overline{OM} = \bar{a}$ на ось OX и ось OY.

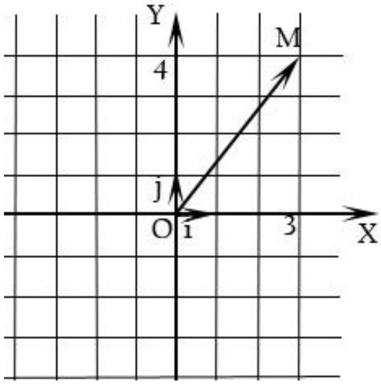


Рисунок 8. Координатная сетка.

На Рисунке 8 координаты точки $M(3,4)$.

Аналогичным образом вводится понятие декартовой системы координат в пространстве.

Декартова система координат в пространстве состоит из начала координат (точки O), и трех равных по длине взаимно перпендикулярных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Ось OX направлена вдоль вектора $\bar{i}$, ось OY направлена вдоль вектора $\bar{j}$, ось OZ направлена вдоль вектора $\bar{k}$.

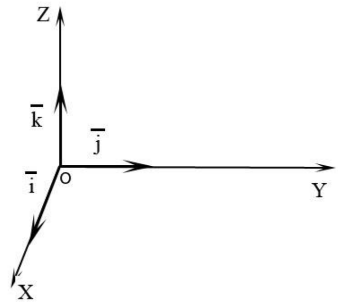


Рисунок 9. Декартова система координат в пространстве.

Набора O, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ достаточно для того, чтобы определить координаты произвольной точки пространства M. Однако, как правило, на систему координат налагают ещё одно условие: если смотреть из конца вектора $\bar{k}$, поворот от вектора $\bar{i}$ к вектору $\bar{j}$ должен происходить против часовой стрелки (в этом случае, тройка векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называется правой тройкой векторов – о правых и левых тройках векторов более подробно будет рассказано позднее).

Декартова система координат названа в честь французского ученого Рене Декарта (1596-1650), который в своих работах впервые применил метод координат.

Рассмотрим более общее понятие: аффинную систему координат. Другое название аффинной системы координат – общая декартова система координат.

Аффинная система координат на плоскости состоит из начала координат (точки O) и двух неколлинеарных векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Ось OX направлена вдоль вектора $\bar{e}_1$, ось OY направлена вдоль вектора $\bar{e}_2$. Координат произвольной точки M определяются как координаты вектора $\overline{OM} = \bar{a}$. При этом всю плоскость можно разбить на параллелограммы, помогающие определить координаты точки.

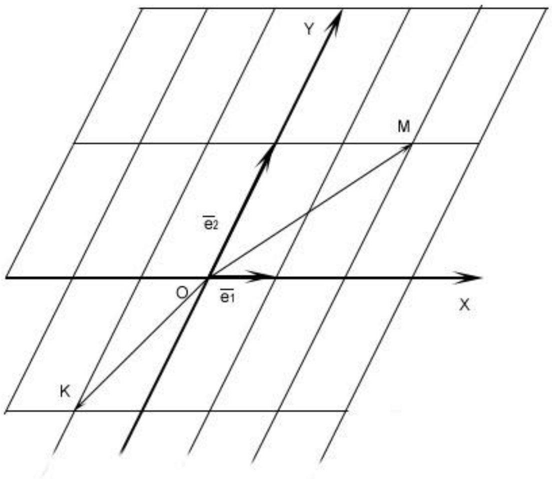


Рисунок 10. Аффинная система координат на плоскости.

На Рисунке 10 $\overline{OM} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2} = (2{,}1)$, координаты точки $M(2{,}1)$; $\overline{OK} = -\overline{e_1} - \overline{e_2} = (-1{,}-1)$, $K(-1{,}-1)$.

В пространстве аффинная система координат состоит из начала координат (точки O) и трех некомпланарных векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$. Ось OX направлена вдоль вектора $\bar{e}_1$, ось OY направлена вдоль вектора $\bar{e}_2$, ось OZ направлена вдоль вектора $\bar{e}_3$.

Мы рассмотрели аффинную систему координат, в которой положение точки устанавливается как проекции радиус-вектора на координатные оси. Теперь рассмотрим систему координат, в которой положение точки определяется как определение ее положения относительно некоторого центра (полюса)

Чтобы задать полярную систему координат на плоскости, достаточно выбрать начало координат (точку O) и из этой точки провести луч (полярную ось). Координатами произвольной точки M являются два числа ρ и φ, где ρ - это расстояние от точки O до точки M ($\rho = \left|\overline{OM}\right|$), а φ - это угол поворота полярной оси против часовой стрелки до луча OM.

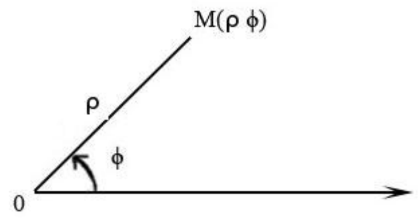


Рисунок 11. Полярная система координат.

Полярные координаты использовались учеными Древней Греции (Гиппарх, Архимед), персидскими математиками (Хабас аль-Хасиб аль-Марвази, Абу Райхан Бируни) для определения местоположения небесных тел. Современное понятие полярной системы координат сформировалось в XVII веке в работах крупнейших ученых того времени, таких как Кавальери, Паскаль, Ньютон и др.

Заметим, что координата ρ в полярной системе координат больше или равна нуля (обобщенную полярную систему координат, в которой координата ρ может принимать отрицательные значения, мы рассматривать не будем), координата φ принадлежит интервалу $[0,2\pi)$ или $(-\pi,\pi]$.

Выведем формулы перехода от декартовой системы координат к полярной.

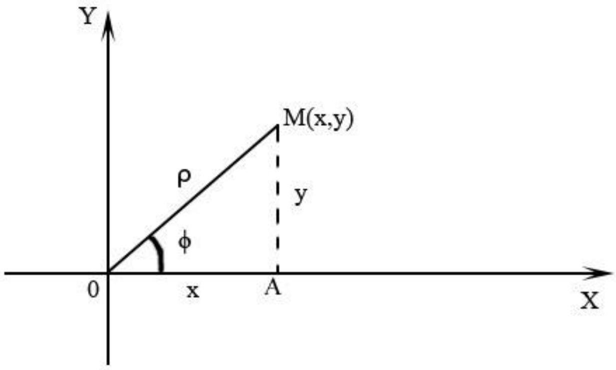


Рисунок 12. Переход к декартовой системе координат.

На Рисунке 12 в прямоугольном треугольнике OAM $OA = x$, $AM = y$ (декартовы координаты точки M); $OM = \rho$, $\angle MOA = \angle\varphi$ (полярные координаты точки M). Тогда переход от полярной к декартовой системе координат осуществляется по формулам: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$.

Деление отрезка в данном отношении.

Рассмотрим решение полезной прикладной задачи о делении отрезка в данном отношении.

Из школьного курса геометрии известна формула о нахождении координат середины отрезка: пусть известны координаты точек $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$, тогда координаты середины отрезка AB можно найти по формулам:

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2},\ y_c = \frac{y_a + y_b}{2} \qquad (1.1)$$

Рассмотрим более общий случай, когда точка C делит отрезок AB в некотором отношении λ. Пусть выполняется векторное равенство $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$. Вспомним, что если $\lambda > 0$ вектора $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ сонаправлены, если $\lambda < 0$ вектора $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ противоположно направлены. Обратите внимание на Рисунок 13. Если $\lambda > 0$, то говорят, что точка C делит отрезок AB внутренним образом, если $\lambda < 0$ то говорят, что точка C делит отрезок AB внешним образом.

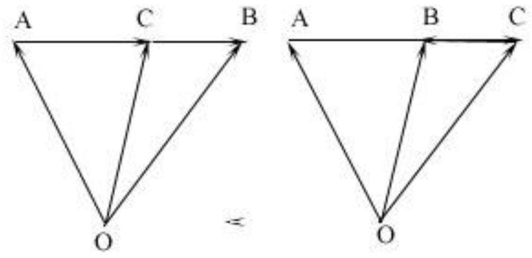


Рисунок 13. Деление отрезка AB точкой C внутренним и внешним образом.

Пусть известны координаты точек A и B. Для определения координат точки C, найдем координаты вектора $\overline{OC}$, где точка O - начало системы координат (аффинной или декартовой). Выразим вектор $\overline{OC}$ через вектора $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ (используем известные правила сложения векторов):

$$\begin{cases}\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{AC}\\ \overline{OC}=\overline{OB}+\overline{BC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{AC}\\ \overline{OC}=\overline{OB}-\overline{CB}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{OC}=\overline{OA}+\lambda\overline{CB}\\ \overline{CB}=\overline{OB}-\overline{OC}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overline{OC}=\overline{OA}+\lambda(\overline{OB}-\overline{OC})\Rightarrow\overline{OC}=\frac{\overline{OA}+\lambda\overline{OB}}{1+\lambda} \tag{1.2}$$

Напомним, что координаты векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ совпадают с координатами точек A, B, C соответственно. Подставляя в последнюю формулу координаты точек, получим:

$$x_c=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\ y_c=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda} \tag{1.3}$$

(в пространстве добавляем третью координату: $z_c=\dfrac{z_a+\lambda z_b}{1+\lambda}$).

Заметим, что при $\lambda=1$ ($AC=CB$) получаем уже известные формулы координат середины отрезка.

Опорные задачи.

1. В треугольнике ABC точка O является точкой пересечения медиан AD и BK. Выразить векторы $\overline{AD}$, $\overline{AO}$, $\overline{BK}$ через векторы $\overline{AB}=\overline{a}$ и $\overline{AC}=\overline{b}$

. Найти координаты векторов $\overline{AD}$, $\overline{AO}$, $\overline{BK}$ в аффинной системе координат $(A,\overline{a},\overline{b})$.

Решение.

Сделаем чертеж:

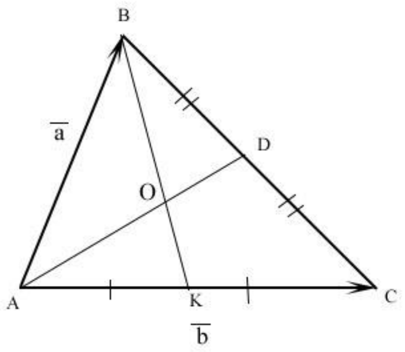


Рисунок 14. К задаче 1.

В треугольнике ABC:

$$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{AB}+\frac{1}{2}(\overline{BA}+\overline{AC})=$$
$$\overline{AB}+\frac{1}{2}(-\overline{AB}+\overline{AC})=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}.$$

Таким образом, координаты $\overline{AD}$ в аффинной системе координат $(A,\overline{a},\overline{b})$: $\overline{AD}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Найдем координаты $\overline{AO}$. Точка O - точка пересечения медиан, известно, что O делит медиану $\overline{AD}$ в отношении 2:1 считая от вершины (от точки A). Значит, $\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}\right)=\frac{1}{3}\overline{a}+\frac{1}{3}\overline{b}$. Координаты $\overline{AO}$ в аффинной системе координат $(A,\overline{a},\overline{b})$: $\overline{AO}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Найдем координаты $\overline{BK} = \overline{BA} + \overline{AK} = -\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} = -\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$. Координаты $\overline{BK}$ в аффинной системе координат $(A, \bar{a}, \bar{b})$: $\overline{BK} = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $\overline{AD} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{AO} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\overline{BK} = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

2. На плоскости задана декартова система координат. По рисунку определите координаты точки A:

1) в заданной декартовой системе координат;

2) в аффинной системе координат (начало в точке O, $\bar{e}_1 = 3\bar{i}$, $\bar{e}_2 = -\bar{i} + \bar{j}$);

3) в полярной системе координат (начало в точке O, направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси OX);

4) в полярной системе координат (начало в точке O, направление полярной оси противоположно направлению оси OX).

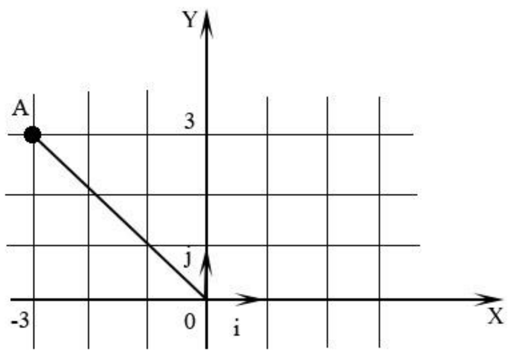


Рисунок 15. К задаче 2.

Решение.

1). Из рисунка 15: $\overline{OA} = -3\bar{i} + 3\bar{j}$, значит, в заданной декартовой системе координат точка A имеет координаты: $A(-3;3)$.

2). Найдем координаты точки A в системе $\bar{e}_1 = 3\bar{i}$, $\bar{e}_2 = -\bar{i} + \bar{j}$. Выразим вектора $\bar{i}$ и $\bar{j}$ через $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$: $\bar{i} = \frac{\overline{e_1}}{3}$, $\bar{j} = \frac{\overline{e_1}}{3} + \overline{e_2}$.

Тогда $\overline{OA} = -3\bar{i} + 3\bar{j} = -3\left(\frac{\overline{e_1}}{3}\right) + 3\left(\frac{\overline{e_1}}{3} + \overline{e_2}\right) = 3\overline{e_2}$, значит, точка A в аффинной системе координат $(O, \overline{e_1}, \overline{e_2})$ имеет координаты $A(0;3)$.

3). Найдем координаты точки A в указанной полярной системе координат.

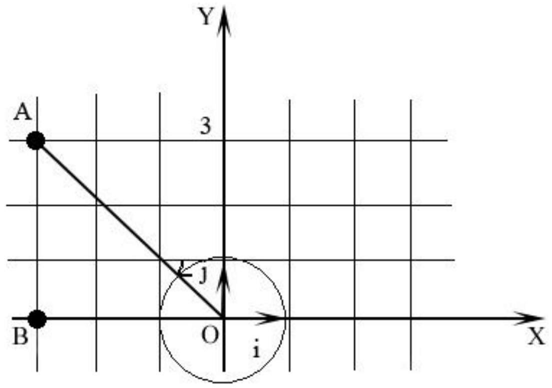


Рисунок 16. К задаче 2 пункт 3-4.

В треугольнике OAB: $\rho = |OA| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. Угол φ - это угол поворота оси OX против часовой стрелки до луча OA, из рисунка $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Значит, координаты точки $A\left(3\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

4). В этой задаче модуль $\rho = 3\sqrt{2}$ определяется так же, как и в пункте 3). Угол поворота полярной оси φ - это угол поворота луча OB (отрицательного направления оси OX) против часовой стрелки до луча OA, из рисунка $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ или можно считать, что $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (поворот полярной оси по часовой стрелки). Значит, координаты точки $A\left(3\sqrt{2};\frac{7\pi}{4}\right)=\left(3\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: 1) $A(-3;3)$, 2) $A(0;3)$, 3) $A\left(3\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$, 4) $A\left(3\sqrt{2};\frac{7\pi}{4}\right)$.

3. В треугольнике ABC точка K - точка пересечения биссектрисы его внутреннего угла при вершине A со стороной BC. Выразить вектор $\overline{AK}$ через вектора $\overline{AB}=\overline{a}$ и $\overline{AC}=\overline{b}$.

Решение.

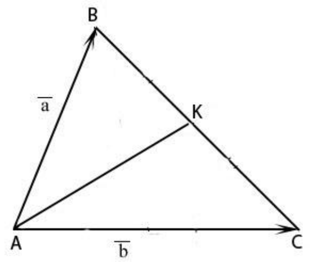


Рисунок 17. К задаче 3.

Из школьного курса известно, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, равном отношению двух прилежащих сторон, следовательно, точка K делит сторону BC в отношении $\frac{|BK|}{|KC|}=\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$. Тогда по формуле (1.2)

$$\overline{AK}=\frac{\overline{AB}+\frac{|a|}{|b|}\overline{AC}}{1+\frac{|a|}{|b|}}\Rightarrow\ \overline{AK}=\frac{|b|\overline{a}+|a|\overline{b}}{|a|+|b|}\ .$$

Ответ: $\overline{AK}=\frac{|b|\overline{a}+|a|\overline{b}}{|a|+|b|}$.

4. Даны вершины треугольника $A(1;-2)$, $B(2;-5)$, $C(4;7)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внутреннего угла при вершине A со стороной BC.

Решение.

Обозначим буквой K точку пересечения биссектрисы при вершине A со стороной BC. Отношение, в котором точка K делит сторону BC равно: $\lambda = \dfrac{|BK|}{|KC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$. Найдем длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (2-1; -5-(-2)) = (1; -3) \Rightarrow |AB| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10};$$

$$\overline{AC} = (4-1; 7-(-2)) = (3; 9) \Rightarrow |AC| = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90}.$$

Тогда $\lambda = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{90}} = \dfrac{1}{3}$. По формулам (1.3) найдем координаты точки K:

$$x_K = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{4}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{5}{2}; \quad y_K = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{-5 + \frac{7}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = -2.$$

Ответ: $K(2{,}5; -2)$.

Задачи для самостоятельного решения.

1.1. Доказать, что если точка M является точкой пересечения медиан в треугольнике ABC, то $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$.

1.2. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ через векторы $\overline{AK}$ и $\overline{AL}$.

1.3. Дан правильный шестиугольник $ABCBCD$. Принимая за базисные векторы $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{AC} = \overline{b}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$.

1.4. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Принимая за базисные векторы $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AD}=\overline{b}$ и $\overline{AA'}=\overline{c}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB'}$, $\overline{AD'}$, $\overline{BD'}$, $\overline{CA'}$.

1.5. Установить, какие из следующих троек векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ линейно зависимы; если тройка векторов линейно зависима, то представить вектор $\overline{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

1) $\overline{a}=\{1,2,5\}$, $\overline{b}=\{2,4,-1\}$, $\overline{c}=\{6,-1,-1\}$.

2) $\overline{a}=\{2,3,-4\}$, $\overline{b}=\{4,-3,3\}$, $\overline{c}=\{8,-15,17\}$.

3) $\overline{a}=\{4,6,-12\}$, $\overline{b}=\{-6,-9,18\}$, $\overline{c}=\{2,5,-1\}$.

1.6. На плоскости задана декартова система координат $(0,\ \bar{i},\ \bar{j})$. На чертеже изобразите точки $A=(4;0)$, $B=(1;\sqrt{3})$, $C=(-1;\sqrt{3})$, $D=(-1;-\sqrt{3})$, $E=(0;\sqrt{3})$, $F=(-3;0)$, $G=(0;-4)$, $H=(2;-2\sqrt{3})$, $R=(2;-2)$. Найдите координаты этих точек в полярной системе координат (начало в точке O, направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси OX).

1.7. На плоскости задана декартова система координат $(0,\ \bar{i},\ \bar{j})$. На чертеже изобразите точки $A=(0;3)$, $B=(1;4)$, $C=(-2;1)$, $D=(-3;-4)$, $E=(1;1)$, $F=(-1;2)$, $R=(2;-2)$. Найдите координаты этих точек в аффинной системе координат (начало в точке O, $\bar{e}_1=\bar{i}+\overline{j}$, $\bar{e}_2=-\bar{i}+2\bar{j}$).

1.8. Точки $M=(2;-1)$, $N=(-1;4)$ и $P=(-2;2)$ являются серединами сторон треугольника. Определить его вершины.

1.9. Определить координаты концов отрезка, который точками $C=(2;0;2)$ и $D=(5;-2;0)$ разделен на три равные части.

1.10. Даны вершины треугольника $A = (3;-5)$, $B = (-3;3)$, $C = (-1;-2)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внутреннего угла при вершине A со стороной BC.

1.11. Даны вершины треугольника $A = (-1;-1)$, $B = (3;5)$, $C = (-4;1)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внешнего угла при вершине A с продолжением стороны BC.

1.12. Даны вершины треугольника $A = (1;2;-1)$, $B = (2;-1;3)$, $C = (-5;2;-6)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B со стороной AC.

Занятие 2. Скалярное произведение векторов.

1. Проекция вектора на ось.
2. Определение скалярного произведения и его свойства.
3. Геометрические приложения скалярного произведения.
4. Вычисление скалярного произведения в аффинной системе координат.
5. Вычисление скалярного произведения в декартовой системе координат.
6. Опорные задачи.
7. Задачи для самостоятельного решения.

Проекция вектора на ось.

Определение. Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось ℓ называется скалярная величина, равная произведению длины вектора $\bar{a}$ на косинус угла между положительным направлением оси ℓ и вектором $\bar{a}$: $np_{\ell}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$.

Заметим, что из определения следует, что если угол между $\bar{a}$ и ℓ острый, то проекция - положительное число, если угол между $\bar{a}$ и ℓ тупой, то проекция – отрицательное число.

Определение. Проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется проекция вектора $\bar{a}$ на любую ось, сонаправленную с вектором $\bar{b}$.

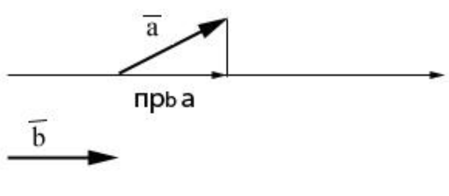


Рисунок 18. Проекция вектора.

Сформулируем свойства проекции вектора на ось (доказать самостоятельно).

1. Проекция на ось суммы векторов равна сумме их проекций.

2. Проекция на ось вектора, умноженного на число, равна произведению проекции вектора на это число.

3. В декартовой системе координат, проекции вектора на координатные оси равны координатам вектора.

4. Координаты вектора равны его направляющим косинусам, умноженным на длину вектора. Если вектор единичный, то его координатами служат направляющие косинусы. (Направляющие косинусы – это косинусы углов, образованных вектором с осями координат).

Определение скалярного произведения векторов и его свойства.

Определение. Скалярным произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется ***число***, равное произведению длин векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на косинус угла между ними: $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$.

Варианты обозначений: $\left(\bar{a},\bar{b}\right)$, $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

Заметим, что из определения следует, что если угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ острый, то скалярное произведение - положительное число, если угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ тупой, то скалярное произведение – отрицательное число.

Рассмотрим свойства скалярного произведения.

1. Скалярное произведение коммутативно: $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=(\bar{b},\bar{a})$.

2. Скалярное произведение можно определить через проекцию вектора: $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left|\bar{b}\right|\cdot np_b\bar{a}=|\bar{a}|\cdot np_a\bar{b}$.

3. Вынесение числа за скалярное произведение: $\left(\lambda\cdot\bar{a},\bar{b}\right)=\lambda\cdot(\bar{a},\bar{b})$, $\left(\bar{a},\lambda\cdot\bar{b}\right)=\lambda\cdot(\bar{a},\bar{b})$.

4. Дистрибутивность скалярного произведения: $\left(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}\right)=(\bar{a},\bar{c})+(\bar{b},\bar{c})$, $\left(\bar{a},\bar{b}+\bar{c}\right)=(\bar{a},\bar{b})+(\bar{a},\bar{c})$.

5. Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда вектора перпендикулярны: $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$ $(\overline{a} \neq \overline{0},\ \overline{b} \neq \overline{0})$.

6. Скалярное произведение вектора $\overline{a}$ на себя равно нулю тогда и только тогда, когда вектор $\overline{a}$ нулевой вектор: $(\overline{a},\overline{a})=0 \Leftrightarrow \overline{a}=\overline{0}$.

7. Скалярное произведение вектора $\overline{a}$ на себя равно квадрату его длины: $(\overline{a},\overline{a})=|\overline{a}|^2$.

Геометрические приложения скалярного произведения.

1. Вычисление длины вектора:

$$|\overline{a}|=\sqrt{(\overline{a},\overline{a})} \qquad (2.1)$$

(по 7 свойству скалярного произведения).

2. Вычисление угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} \qquad (2.2)$$

(по определению скалярного произведения).

3. Вычисление проекции вектора:

$$np_b\overline{a}=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{b}|} \qquad (2.3)$$

(по 2 свойству скалярного произведения).

4. Проверка векторов на перпендикулярность: два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю (по 5 свойству скалярного произведения).

Вычисление скалярного произведения в аффинной системе координат.

Пусть O, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ - аффинная система координат в пространстве.

Пусть даны координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$: $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, то есть вектор представим в виде: $\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3$(координаты вектора – это его коэффициенты в разложении по базисным векторам). Аналогично, координаты вектора $\bar{b}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$: $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\bar{b}=b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2+b_3\bar{e}_3$.

Вычислим скалярное произведение: $(\bar{a},\bar{b})=(a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3,b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2+b_3\bar{e}_3)=$

(используем 4 свойство)

$=(a_1\bar{e}_1,b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2+b_3\bar{e}_3)+(a_2\bar{e}_2,b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2+b_3\bar{e}_3)+(a_3\bar{e}_3,b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2+b_3\bar{e}_3)=$

(используем 4 свойство)

$=(a_1\bar{e}_1,b_1\bar{e}_1)+(a_1\bar{e}_1,b_2\bar{e}_2)+(a_1\bar{e}_1,b_3\bar{e}_3)+\quad(a_2\bar{e}_2,b_1\bar{e}_1)+(a_2\bar{e}_2,b_2\bar{e}_2)+(a_2\bar{e}_2,b_3\bar{e}_3)+$
$(a_3\bar{e}_3,b_1\bar{e}_1)+(a_3\bar{e}_3,b_2\bar{e}_2)+(a_3\bar{e}_3,b_3\bar{e}_3)=$

(используем 1 и 3 свойства и группировку слагаемых)

$=a_1b_1(\bar{e}_1,\bar{e}_1)+a_2b_2(\bar{e}_2,\bar{e}_2)+a_3b_3(\bar{e}_3,\bar{e}_3)+(a_1b_2+a_2b_1)(\bar{e}_1,\bar{e}_2)+$

$$+(a_1b_3+a_3b_1)(\overline{e_1},\overline{e_3})+(a_2b_3+a_3b_2)(\bar{e}_2,\bar{e}_3) \qquad (2.4)$$

Введем следующее обозначение: $g_{ij}=(\bar{e}_i,\bar{e}_j)$. Набор чисел g_{ij} называется метрическими коэффициентами. Получаем формулу для вычисления скалярного произведения: $(\bar{a},\bar{b})=a_1b_1g_{11}+a_2b_2g_{22}+a_3b_3g_{33}+(a_1b_2+a_2b_1)g_{12}+$
$+(a_1b_3+a_3b_1)g_{13}+(a_2b_3+a_3b_2)g_{23}$

$$(\bar{a},\bar{b})=\sum_{i,j=1}^{3}a_ib_jg_{ij} \qquad (2.5)$$

Вычисление скалярного произведения в декартовой системе координат.

Пусть в пространстве задана декартова система координат: O, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Декартова система координат является частным случаем аффинной системы координат, поэтому справедливы формулы (2.4), (2.5) . Вычислим метрические коэффициенты:

$$g_{11} = (\bar{i},\bar{i}) = |\bar{i}| \cdot |\bar{i}| \cos 0 = 1;$$
$$g_{22} = (\bar{j},\bar{j}) = |\bar{j}| \cdot |\bar{j}| \cos 0 = 1;$$
$$g_{33} = (\bar{k},\bar{k}) = |\bar{k}| \cdot |\bar{k}| \cos 0 = 1$$
$$g_{12} = g_{21} = (\bar{i},\bar{j}) = |\bar{i}||\bar{j}| \cos 90 = 0;$$
$$g_{13} = (\bar{i},\bar{k}) = |\bar{i}||\bar{k}| \cos 90 = 0;$$
$$g_{23} = (\bar{j},\bar{k}) = |\bar{j}||\bar{k}| \cos 90 = 0$$

Пусть даны координаты векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Используя формулу (2.4) и вычисленные метрические коэффициенты, получаем:

$$(\bar{a},\bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (2.6)$$

Используя формулу (2.6) и 7 свойство скалярного произведения, получим известную формулу для вычисления длины вектора в декартовой системе координат:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad (2.7)$$

Опорные задачи.

1. Вычислить проекцию вектора $\bar{a} = \{5, 2, 5\}$ на ось вектора $\bar{b} = \{2, -1, 2\}$.

   Решение.

Воспользуемся формулой (2.3): $np_b\bar{a} = \dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{b}|} = \dfrac{5\cdot 2+2\cdot(-1)+5\cdot 2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 2$.

Скалярное произведение $(\bar{a},\bar{b})$ и длина вектора $|\bar{b}|$находятся по формулам (2.6) и (2.7) соответственно.

Ответ: $np_b\bar{a} = 2$.

2. Дано $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$равен $\dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить:

1) скалярное произведение векторов $(\bar{a}+3\bar{b},\ -2\bar{a}+\bar{b})$;

2) длины векторов $|\bar{a}+3\bar{b}|$ и $|-2\bar{a}+\bar{b}|$;

3) угол между векторами $\bar{a}+3\bar{b}$ и $-2\bar{a}+\bar{b}$.

Решение.

1). Используя 1, 3 и 4 свойства скалярного произведения получим:

$$(\bar{a}+3\bar{b},\ -2\bar{a}+\bar{b}) = -2(\bar{a},\bar{a})+(\bar{a},\bar{b})-6(\bar{b},\bar{a})+3(\bar{b},\bar{b}) = -2(\bar{a},\bar{a})-5(\bar{a},\bar{b})+3(\bar{b},\bar{b}) \qquad (2.8)$$

Вычислим метрические коэффициенты: $(\bar{a},\bar{a}) = |\bar{a}|^2 = 9$, $(\bar{b},\bar{b}) = |\bar{b}|^2 = 4$, $(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi = 6\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3} = -3$. Подставим в формулу (2.8): $(\bar{a}+3\bar{b},\ -2\bar{a}+\bar{b}) = -2\cdot 9-5\cdot(-3)+3\cdot 4 = 9$.

2). По формуле (2.1) получим: $|\bar{a}+3\bar{b}| = \sqrt{(\bar{a}+3\bar{b},\bar{a}+3\bar{b})}$. Преобразуем подкоренное выражение, метрические коэффициенты были вычислены в пункте 1: $(\bar{a}+3\bar{b},\bar{a}+3\bar{b}) = (\bar{a},\bar{a})+6(\bar{a},\bar{b})+9(\bar{b},\bar{b}) = 9+6\cdot(-3)+9\cdot 4 = 27$, следовательно, $|\bar{a}+3\bar{b}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Аналогично вычислим длину второго вектора: $|-2\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{(-2\bar{a}+\bar{b},-2\bar{a}+\bar{b})} = 2\sqrt{13}$.

3). Найдем косинус угла между векторами по формуле (2.2): $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a}+3\bar{b}, -2\bar{a}+\bar{b})}{|\bar{a}+3\bar{b}|\cdot|-2\bar{a}+\bar{b}|} = \dfrac{9}{3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{13}} = \dfrac{3}{2\sqrt{39}}$, следовательно, искомый угол равен $\varphi = \arccos\dfrac{3}{2\sqrt{39}}$.

Ответ: 1). $(\bar{a}+3\bar{b},\ -2\bar{a}+\bar{b}) = 9$, 2). $|\bar{a}+3\bar{b}| = 3\sqrt{3}$, $|-2\bar{a}+\bar{b}| = 2\sqrt{13}$, 3). $\varphi = \arccos\dfrac{3}{2\sqrt{39}}$.

3. В декартовой системе координат даны векторы $\bar{a} = \{4; -2; 4\}$ и $\bar{b} = \{6; -3; 2\}$. Вычислить:

1) длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) скалярное произведение векторов $(\bar{a}+3\bar{b},\ -2\bar{a}+\bar{b})$;

4) длины векторов $|\bar{a}+3\bar{b}|$ и $|-2\bar{a}+\bar{b}|$;

5) угол между векторами $\bar{a}+3\bar{b}$ и $-2\bar{a}+\bar{b}$.

Решение.

1). По формуле (2.7): $|\bar{a}| = \sqrt{4^2+(-2)^2+4^2} = 6$, $|\bar{b}| = \sqrt{6^2+(-3)^2+2^2} = 7$.

2). По формуле (2.2): $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \dfrac{4\cdot 6+(-2)\cdot(-3)+4\cdot 2}{6\cdot 7} = \dfrac{19}{21}$.

3). Эту задачу можно решать аналогично 2 опорной задаче, пользуясь свойствами скалярного произведения, но удобнее вычислить координаты векторов:

$\bar{a}+3\bar{b} = \{4;-2;4\}+3\{6;-3;2\} = \{4;-2;4\}+\{18;-9;6\} = \{22;-11;10\}$;

$-2\bar{a}+\bar{b}=-2\{4;-2;4\}+\{6;-3;2\}=\{-8;4;-8\}+\{6;-3;2\}=\{-2;1;-6\}$. Тогда:

$(\bar{a}+3\bar{b},-2\bar{a}+\bar{b})=22\cdot(-2)-11\cdot1+10\cdot(-6)=-115$.

4). По формуле (2.7):

$|\bar{a}+3\bar{b}|=\sqrt{22^2+(-11)^2+10^2}=\sqrt{705}$,

$|-2\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-6)^2}=\sqrt{41}$.

5). По формуле (2.2): $\cos\phi=\dfrac{(\bar{a}+3\bar{b},-2\bar{a}+\bar{b})}{|\bar{a}+3\bar{b}|\cdot|-2\bar{a}+\bar{b}|}=\dfrac{-115}{\sqrt{705}\cdot\sqrt{41}}\approx-0{,}68$.

Ответ: 1). $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=7$, 2). $\varphi=\arccos\dfrac{19}{21}$, 3). $(\bar{a}+3\bar{b},-2\bar{a}+\bar{b})=-115$,

4). $|\bar{a}+3\bar{b}|=\sqrt{705}$, $|-2\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{41}$, 5). $\phi=\arccos(-0{,}68)$.

Задачи для самостоятельного решения.

2.1. Вычислить проекцию вектора $\bar{a}=\{1,-2,3\}$ на ось вектора $\bar{b}=\{1,0,2\}$.

2.2. Даны векторы $\bar{a}=\{1,-2,3\}$, $\bar{b}=\{0,2,-3\}$, $c=\{4,-2,2\}$. Вычислить $np_{b+c}\bar{a}$ и $np_c(3\bar{a}-2\bar{b})$.

2.3. Сила, определяемая вектором $\bar{F}=\{1,-8,-7\}$, разложена по трем направлением, одно из которых задано вектором $\bar{a}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$. Найти составляющую вектора $\bar{F}$ в направлении вектора $\bar{a}$.

2.4. Дано $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=2$, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\dfrac{\pi}{4}$. Вычислить:

1) скалярное произведение векторов $(-\bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}+3\bar{b})$;

2) длины векторов $|-\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}+3\bar{b}|$;

3) угол между векторами $-\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}+3\bar{b}$.

2.5. Даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Известно, что $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=3$, $|\bar{c}|=2$, $\bar{a}\wedge\bar{b}=\frac{\pi}{4}$, $\bar{a}\wedge\bar{c}=\frac{\pi}{3}$, $\bar{b}\wedge\bar{c}=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Вычислить:

1) скалярное произведение $(\bar{a}-\bar{b}+2\bar{c},\ \bar{a}-\bar{c})$;

2) скалярное произведение $(\bar{a}+2\bar{b}+\bar{c},\ \bar{a}-2\bar{c})$;

3) длины векторов $|-\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|$, $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}+2\bar{b}+\bar{c}|$.

2.6. В декартовой системе координат даны векторы $\bar{a}=\{2;-1;3\}$ и $\bar{b}=\{0;-5;2\}$. Вычислить:

1) длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) скалярное произведение векторов $(3\bar{a}-\bar{b},\ 2\bar{a}+3\bar{b})$;

4) длины векторов $|3\bar{a}-\bar{b}|$ и $|2\bar{a}+3\bar{b}|$;

5) угол между векторами $3\bar{a}-\bar{b}$ и $2\bar{a}+3\bar{b}$.

2.7. Определить внутренние углы треугольника с вершинами $A=(1;2;3)$, $B=(3;0;4)$, $C=(2;1;3)$.

2.8. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, в котором $A=(0;1;1)$, $B=(1;1;1)$, $D=(1;3;2)$, $A'=(-2;2;1)$. Вычислить:

1) координаты всех вершин;

2) длины всех сторон;

3) длины $|AC|$, $|AC'|$, $|B'D|$;

4) углы $\overline{AC}\wedge\overline{AC'}$, $\overline{AD}\wedge\overline{CB'}$, $\overline{BD'}\wedge\overline{AC'}$.

2.9. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, в котором $A=(0;1;1)$, $B=(1;1;1)$, $D=(1;3;2)$, $A'=(-2;2;1)$. Точка E делит отрезок BC в отношении $1:2$, точка F делит отрезок $A'D'$ в отношении $2:1$. Найти длину отрезка EF и угол между векторами $\overline{EF}$ и $\overline{AC'}$.

Занятие 3. Векторное произведение векторов.

1. Левые и правые тройки векторов.
2. Определение и свойства векторного произведения.
3. Геометрические приложения векторного произведения.
4. Вычисление векторного произведения в декартовой системе координат.
5. Двойное векторное произведение.
6. Опорные задачи.
7. Задачи для самостоятельного решения.

Левые и правые тройки векторов.

Определение. Три вектора называются упорядоченной тройкой векторов, если указано, какой вектор является первым, какой - вторым, какой - третьим.

Например, в упорядоченной тройки векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, вектор $\overline{a}$ - первый вектор, $\overline{b}$ - второй, $\overline{c}$ - третий.

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется правой тройкой векторов (левой тройкой векторов), если после приведения к общему началу вектор $\overline{c}$ располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, откуда кратчайший поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ кажется совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).

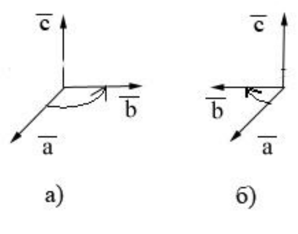


Рисунок 19. а) - правая тройка векторов, б) - левая тройка векторов

Равносильное определение: Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется правой тройкой векторов (левой тройкой векторов), если находясь внутри телесного угла, образованными приведенными к общему началу векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, мы видим поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$, затем к вектору $\bar{c}$ совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелки).

Если две тройки векторов обе являются правыми тройками или обе являются левыми тройками, то такие тройки называются одинаково ориентированными. Если из двух троек векторов одна тройка является правой тройкой векторов, а другая тройка является левой тройкой, то такие тройки называются противоположно ориентированными.

Рассмотрим декартову систему координат O, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Заметим, что тройки векторов ($\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$), ($\bar{j}$, $\bar{k}$, $\bar{i}$), ($\bar{k}$, $\bar{i}$, $\bar{j}$) являются правыми тройками векторов, а тройки ($\bar{j}$, $\bar{i}$, $\bar{k}$), ($\bar{k}$, $\bar{j}$, $\bar{i}$), ($\bar{i}$, $\bar{k}$ $\bar{j}$) – левыми тройками векторов. Вообще говоря, можно показать, что если в тройке векторов переставить местами два вектора, то тройка сменит ориентацию, а если в тройке выполнить циклическую перестановку (переставить вектора по кругу), то тройка сохранит ориентацию.

Определение и свойства векторного произведения.

Определение. Векторным произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется третий ***вектор*** $\bar{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$;
2. Длина вектора $\bar{c}$ определяется как произведение длин векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на синус угла между ними: $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$;
3. Тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - правая тройка векторов.

Варианты обозначений: $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{c}$, $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$.

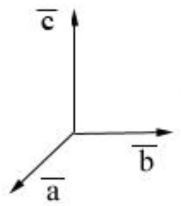


Рисунок 20. Векторное произведение векторов.

Векторное произведение было введено Уильямом Гамильтоном в 1846 году одновременно со скалярным произведением в связи с кватернионами (четырехмерное пространство над полем вещественных чисел, является расширением поля комплексных чисел).

Векторное произведение широко используется в механике. Если вектор $\bar{b}$ изображает приложенную в некоторой точке M силу, а вектор $\bar{a}$ идет из некоторой точки O в точку M, то вектор $\bar{c}=[\bar{a},\bar{b}]$ представляет собой момент силы $\bar{b}$ относительно точки O.

Рассмотрим свойства векторного произведения.

1. Векторное произведение антикоммутативно: $[\bar{a},\bar{b}]=-[\bar{b},\bar{a}]$.
2. Вынесение скалярного множителя: $[\lambda\bar{a},\bar{b}]=\lambda\cdot[\bar{a},\bar{b}]$, $[\bar{a},\lambda\bar{b}]=\lambda\cdot[\bar{a},\bar{b}]$.
3. Дистрибутивность векторного произведения: $[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}]=[\bar{a},\bar{c}]+[\bar{b},\bar{c}]$, $[\bar{a},\bar{b}+\bar{c}]=[\bar{a},\bar{b}]+[\bar{a},\bar{c}]$.
4. $[\bar{a},\bar{a}]=\bar{0}$ для любого вектора $\bar{a}$.

Геометрические приложения векторного произведения.

1. Вычисление площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $S_{параллелограмма}=|[\bar{a},\bar{b}]|$.

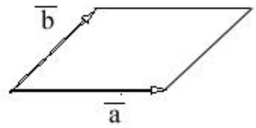


Рисунок 21. Параллелограмм, построенный на векторах a и b.

2. Вычисление площади треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$S_{треугольника} = \frac{|[\overline{a}, \overline{b}]|}{2}.$$

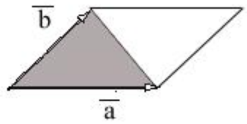


Рисунок 22. Треугольник, построенный на векторах a и b.

3. Вычисление высоты в параллелограмме и в треугольнике: $h = \dfrac{|[\overline{a}, \overline{b}]|}{|\overline{a}|}$.

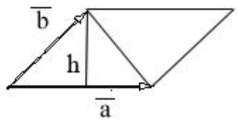


Рисунок 23. Высота в треугольнике и параллелограмме.

4. Проверка векторов на коллинеарность: два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю.

Вычисление векторного произведения в декартовой системе координат.

Пусть в пространстве задана декартова система координат: O, $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, в этой системе координат заданы координаты векторов $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Вычислим координаты вектора $\overline{c}$: $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}] = [a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}, b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}] =$

(используем 3 свойство)

$$=[a_1\bar{i},b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}]+[a_2\bar{j},b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}]+[a_3\bar{k},b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}]=$$

(используем 1, 2, 3 свойства и группировку слагаемых)

$$=a_1b_1[\bar{i},\bar{i}]+a_2b_2[\bar{j},\bar{j}]+a_3b_3[\bar{k},\bar{k}]+(a_1b_2-a_2b_1)[\bar{i},\bar{j}]+(a_1b_3-a_3b_1)[\bar{i},\bar{k}]+$$

$$+(a_2b_3-a_3b_2)[j,k] \qquad (3.1)$$

Вывод формулы (3.1) аналогичен выводу формулы (2.1) для скалярного произведения, но следует учитывать, что результатом векторного произведения будет вектор и то, что векторное произведение антикоммутативно.

Вычислим вектора, входящие в формулу (3.1):

$$\begin{array}{lll} [\bar{i},\bar{i}]=\bar{0}; & [\bar{j},\bar{j}]=\bar{0}; & [\bar{k},\bar{k}]=\bar{0} \\ [\bar{i},\bar{j}]=\bar{k}; & [\bar{i},\bar{k}]=-\bar{j}; & [\bar{j},\bar{k}]=\bar{i} \end{array} \qquad (3.2)$$

Подставим (3.2) в (3.1):

$$\bar{c}=[\bar{a},\bar{b}]=(a_2b_3-a_3b_2)\cdot\bar{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\cdot\bar{j}+(a_1b_2-b_2a_1)\cdot\bar{k} \qquad (3.3)$$

Итак, мы нашли координаты вектора $\bar{c}$:

$$\bar{c}=(a_2b_3-a_3b_2;\,-a_1b_3+a_3b_1;\,a_1b_2-b_2a_1)\cdot \qquad (3.4)$$

Заметим, что формулу (3.3) можно записать в сокращенном виде, используя теорему о разложении определителя по строке:

$$\bar{c}=\begin{vmatrix} i & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (3.5)$$

Двойное векторное произведение.

Определение. Двойным векторным произведением векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется **вектор**, который является векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $[\bar{b},\bar{c}]$: $[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]=[\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]]$.

В литературе этот тип произведения трех векторов называется как тройным векторным произведением (по числу векторов), так и двойным векторным произведением (по числу операций).

Формула Лагранжа. $[\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]]=\bar{b}(\bar{a},\bar{c})-\bar{c}(\bar{a},\bar{b})$.

Формулу Лагранжа можно запомнить по мнемоническому правилу: бац минус цаб.

Тождество Якоби. $[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]+[\bar{b},\bar{c},\bar{a}]+[\bar{c},\bar{a},\bar{b}]=\bar{0}$.

Тождество Якоби доказывается с помощью формулы Лагранжа:

$$[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]+[\bar{b},\bar{c},\bar{a}]+[\bar{c},\bar{a},\bar{b}]=\bar{b}(\bar{a},\bar{c})-\bar{c}(\bar{a},\bar{b})+\bar{c}(\bar{b},\bar{a})-\bar{a}(\bar{b},\bar{c})+$$
$$+\bar{a}(\bar{c},\bar{b})-\bar{b}(\bar{c},\bar{a})=\bar{0}$$

Опорные задачи.

1. Даны векторы $\bar{a}=\{3,-1,-2\}$, $\bar{b}=\{1,2,-1\}$. Найти координаты векторных произведений $[\bar{a},\bar{b}]$; $[2\bar{a}+\bar{b},\bar{b}]$; $[2\bar{a}-\bar{b},\ 2\bar{a}+\bar{b}]$.

   Решение.

   По формуле (3.5): $[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=5\bar{i}+\bar{j}+7\bar{k}=\{5;1;7\}$ (использовали разложение определителя по первой строке).

   Чтобы вычислить векторные произведения $[2\bar{a}+\bar{b},\bar{b}]$ и $[2\bar{a}-\bar{b},\ 2\bar{a}+\bar{b}]$, найдем соответствующие вектора:

   $2\bar{a}+\bar{b}=2\{3;-1;-2\}+\{1;2;-1\}=\{7;0;-5\}$;

   $2\bar{a}-\bar{b}=2\{3;-1;-2\}-\{1;2;-1\}=\{5;-4;-3\}$.

Тогда по формуле (3.5):

$$[2\overline{a}+\overline{b},\overline{b}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 7 & 0 & -5\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=10\overline{i}+2\overline{j}+14\overline{k}=\{10;2;14\},$$

$$[2\overline{a}-\overline{b},2\overline{a}+\overline{b}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 5 & -4 & -3\\ 7 & 0 & -5\end{vmatrix}=20\overline{i}+4\overline{j}+28\overline{k}=\{20;4;28\}.$$

Ответ: $[\overline{a},\overline{b}]=\{5;1;7\}$, $[2\overline{a}+\overline{b},\overline{b}]=\{10;2;14\}$, $[2\overline{a}-\overline{b},2\overline{a}+\overline{b}]=\{20;4;28\}$.

2. Даны точки $A=(0;1;1)$, $B=(1;1;1)$, $C=(1;3;2)$. Вычислить площадь треугольника ABC и расстояние от точки A до стороны BC.

Решение.

Сделаем чертеж:

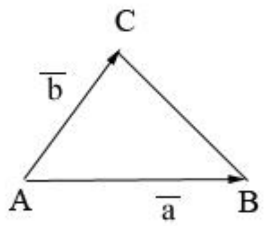


Рисунок 24. К задаче 2.

Воспользуемся формулой для вычисления площади треугольника:

$S_{треугольника}=\dfrac{|[\overline{a},\overline{b}]|}{2}$. Треугольник ABC построен на векторах $\overline{AB}=\overline{a}=\{1,0,0\}$ и $\overline{AC}=\overline{b}=\{1,2,1\}$. Вычислим векторное произведение:

$$[\overline{a},\overline{b}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0\cdot\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}=\{0;-1;2\},\ |[\overline{a},\overline{b}]|=\sqrt{0^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}.$$

Тогда $S_{треугольника}=\dfrac{|[\overline{a},\overline{b}]|}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Заметим, что расстояние от точки A до стороны BC это в точности высота в треугольнике ABC, проведенная к стороне BC. Тогда по формуле для вычисления высоты получим:

$$h = \frac{|[\bar{a}, \bar{b}]|}{\left|\overline{BC}\right|} = \frac{\sqrt{5}}{|\{0;2;1\}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2}} = 1.$$

Ответ: $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $h = 1$.

Задачи для самостоятельного решения.

3.1. Даны векторы $\bar{a} = \{1, 2, 3\}$, $\bar{b} = \{1, 0, -1\}$. Найти какой-нибудь вектор, перпендикулярный плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3.2. Даны векторы $\bar{a} = \{-1, 4, 2\}$, $\bar{b} = \{0, 3, -1\}$. Найти координаты векторных произведений $[\bar{a}, \bar{b}]$; $[\bar{a} - \bar{b}, 3\bar{b} + \bar{a}]$; $[2\bar{a}, 2\bar{a} - \bar{b}]$. Найти длины векторов $|[\bar{a}, \bar{b}]|$; $|[\bar{a} - \bar{b}, 3\bar{b} + \bar{a}]|$; $|[2\bar{a}, 2\bar{a} - \bar{b}]|$.

3.3. Даны векторы $\bar{a} = \{1, -2, 4\}$, $\bar{b} = \{-2, 3, 1\}$, $\bar{c} = \{1, 2, -1\}$. Найти координаты векторных произведений $[\bar{a}, \bar{c}]$; $[\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \bar{b} - \bar{a}]$; $[\bar{a} + \bar{c}, \bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}]$. Вычислить результат двойных векторных произведений: $[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$; $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{b} - \bar{c}, \bar{c}]$.

3.4. Проверить справедливость формулы Лагранжа на векторах $\bar{a} = \{1, -2, 4\}$, $\bar{b} = \{-2, 3, 1\}$, $\bar{c} = \{1, 2, -1\}$.

3.5. Даны точки $A = (2; 1; 0)$, $B = (-3; -6; 4)$, $C = (-2; 4; 1)$. Вычислить площадь треугольника ABC и длины всех его высот.

3.6. Даны точки $A = (4; 2; 3)$, $B = (5; 7; 0)$, $C = (2; 8; -1)$. Вычислить площадь треугольника ABC и длины всех его высот.

3.7. Найти расстояние от точки $C=(3;2;-2)$ до прямой, проходящей через точки $A=(1;2;-3)$ и $B=(5;2;0)$.

3.8. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ были коллинеарны?

Занятие 4. Смешанное произведение векторов.

1. Определение и свойства смешанного произведения векторов.
2. Геометрические приложения смешанного произведения.
3. Вычисление смешанного произведения в декартовой системе координат.
4. Опорные задачи.
5. Задачи для самостоятельного решения.

Определение и свойства смешанного произведения векторов.

Определение. Смешанным произведение трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется **число**, которое является скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $[\overline{b},\overline{c}]$: $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=(\overline{a},[\overline{b},\overline{c}])$.

Свойства скалярного произведения.

1. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=(\overline{a},[\overline{b},\overline{c}])=([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$ (это свойство указывает на то, что квадратные скобки внутри смешанного произведения можно не писать).
2. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=(\overline{c},\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{c},\overline{a})$(циклическая перестановка векторов не меняет смешанного произведения).
3. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=-(\overline{b},\overline{a},\overline{c})$; $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=-(\overline{c},\overline{b},\overline{a})$; $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=-(\overline{a},\overline{c},\overline{b})$(если поменять местами два вектора, то смешанное произведение изменит знак).

Геометрические приложения смешанного произведения.

1. Вычисление объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$: $V_{параллелепипеда}=|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})|$.

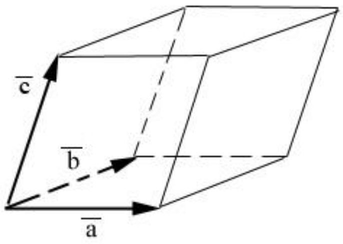


Рисунок 25. Параллелепипед, построенный на векторах a, b и c.

2. Вычисление объема тетраэдра, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

   $V_{тетраэдра} = \dfrac{|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})|}{6}$.

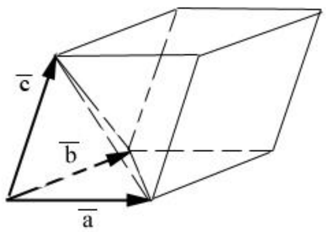


Рисунок 26. Тетраэдр, построенный на векторах a, b и c.

3. Вычисление высоты в параллелепипеде и тетраэдре: $h = \dfrac{|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})|}{|[\bar{a},\bar{b}]|}$.

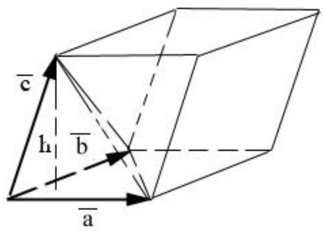


Рисунок 27. Высота в параллелепипеде и тетраэдре.

4. Определение ориентации тройки векторов: если $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) > 0$, то тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - правая, если $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) < 0$, то тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - левая.

5. Определение компланарности трех векторов: вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда смешанное произведение равно нулю $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 0$.

Вычисление смешанного произведения в декартовой системе координат.

Пусть в пространстве задана декартова система координат: O, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, в этой системе координат заданы координаты векторов $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\bar{c}=(c_1,c_2,c_3)$, тогда

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (4.1)$$

Формула (4.1) следует из формул (2.6) и (3.5) – проверьте самостоятельно.

Опорные задачи.

1. Даны точки $A=(1;2;4)$, $B=(2;1;2)$, $C=(-1;1;1)$, $D=(2;3;5)$. Вычислить:

   1) объем пирамиды $ABCD$;

   2) длину высоты из вершины D на основание ABC;

   3) угол между ребром AD и основанием ABC;

   4) угол между гранями ABC и ABD.

   Решение.

   1). Сделаем чертеж:

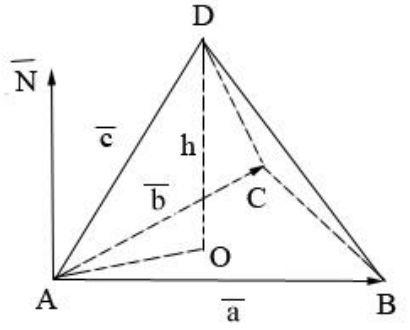


Рисунок 28. К задаче 1.

Пирамида $ABCD$ построена на векторах $\overline{AB}=\overline{a}=\{1,-1,-2\}$, $\overline{AC}=\overline{b}=\{-2,-1,-3\}$ и $\overline{AD}=\overline{c}=\{1,1,1\}$. Вычислим смешанное произведение по формуле (4.1): $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ -2 & -1 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=5$. Тогда объем пирамиды: $V_{тетраэдра}=\dfrac{|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})|}{6}=\dfrac{5}{6}$.

2). Длину высоты из вершины D на основание ABC найдем по формуле $h=\dfrac{|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})|}{|[\overline{a},\overline{b}]|}$. Вычислим векторное произведение:

$[\overline{a},\overline{b}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -1 & -2\\ -2 & -1 & -3\end{vmatrix}=1\cdot\overline{i}+7\overline{j}-3\overline{k}=\{1;7;-3\}$, модуль векторного произведения: $|[\overline{a},\overline{b}]|=\sqrt{1^2+7^2+(-3)^2}=\sqrt{59}$. Тогда $h=\dfrac{|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})|}{|[\overline{a},\overline{b}]|}=\dfrac{5}{\sqrt{59}}$.

3). Обозначим через точку O проекцию точки D на плоскость ABC. Угол между ребром AD и основанием ABC - это угол между $\overline{AD}$ и $\overline{AO}$. Заметим, что $\overline{AD}\wedge\overline{AO}+\overline{AD}\wedge\overline{N}=90^\circ$, где $\overline{N}$ - это нормаль к плоскости ABC (то есть вектор, который перпендикулярен плоскости). Найдем $\cos(\overline{AD}\wedge\overline{N})$. Нормаль к плоскости ABC найдем как векторное произведение двух неколлинеарных векторов, лежащих в плоскости: $\overline{N}=[\overline{AB},\overline{AC}]=\{1;7;-3\}$. Тогда

$\cos(\overline{AD}\wedge\overline{N})=\dfrac{(\overline{AD},\overline{N})}{|\overline{AD}|\cdot|\overline{N}|}=\dfrac{1\cdot1+1\cdot7+1\cdot(-3)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+7^2+(-3)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{177}}$. Искомый угол: $\overline{AD}\wedge\overline{AO}=90^\circ-\arccos\dfrac{4}{\sqrt{177}}=\arcsin\dfrac{4}{\sqrt{177}}$.

4). Угол между двумя плоскостями равен углу между их нормалями: $(ABC)\wedge(ABD)=\overline{N}_{ABC}\wedge\overline{N}_{ABD}$. Найдем вектора нормалей:

$\overline{N}_{ABC} = [\overline{AB}, \overline{AC}] = \{1,7,-3\}$, $\overline{N}_{ABD} = [\overline{AB}, \overline{AD}] = \{1,-3,2\}$. Найдем косинус угла между ними:

$$\cos(\overline{N}_{ABC} \wedge \overline{N_{ABD}}) = \frac{1\cdot 1 + 7\cdot(-3) + (-3)\cdot 2}{\sqrt{1^2+7^2+(-3)^2}\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{826}}.$$

Ответ: 1) $V_{тетраэдра} = \frac{5}{6}$, 2) $h = \frac{5}{\sqrt{59}}$, 3) $\overline{AD} \wedge \overline{AO} = \arcsin\frac{4}{\sqrt{177}}$, 4) $(ABC) \wedge (ABD) = \arccos\frac{4}{\sqrt{826}}$.

2. Найти вектор $\bar{c}$, перпендикулярный плоскости векторов $\bar{a} = \{1, 2, 3\}$, $\bar{b} = \{-1, 0, 1\}$, имеющий длину 2 и направленный так, чтобы тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ имела положительную ориентацию.

Решение.

Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - это вектор, перпендикулярный плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и направленный таким образом, что тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $[\bar{a}, \bar{b}]$ имеет положительную ориентацию. Найдем этот вектор: $\bar{d} = [\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k} = \{2;-4;2\}$, длина этого вектора: $\bar{d} = \sqrt{2^2+(-4)^2+2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Чтобы получить вектор длины 2, пронормируем вектор $\bar{d}$, то есть получим вектор длины 1, направленный так же, как и вектор $\bar{d}$: $\bar{e} = \frac{\bar{d}}{|\bar{d}|} = \frac{\{2;-4;2\}}{2\sqrt{6}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$. Теперь умножим вектор $\bar{e}$ на 2, тем самым получим искомый вектор $\bar{c}$ длины 2: $\bar{c} = 2\bar{e} = \left\{\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{4}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right\}$.

Ответ: $\bar{c}=\left\{\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{4}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right\}$.

3. Установить, компланарны ли векторы $\bar{a}=\{2,3,-1\}$, $\bar{b}=\{1,-1,3\}$ и $\bar{c}=\{1,9,-11\}$.

Решение.

Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда смешанное произведение равно нулю $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0$. Вычислим смешанное произведение: $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix}=0$, следовательно, вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны.

Ответ: вектора компланарны.

Задачи для самостоятельного решения.

4.1. Установить, компланарны ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Если векторы не компланарны, то указать, какой является тройка векторов – правой или левой.

1) $\bar{a}=\{3,-2,1\}$, $\bar{b}=\{2,1,2\}$, $\bar{c}=\{3,-1,-2\}$;

2) $\bar{a}=\{2,-1,2\}$, $\bar{b}=\{1,2,-3\}$, $\bar{c}=\{3,-4,7\}$;

3) $\bar{a}=\{0,-2,1\}$, $\bar{b}=\{4,-1,5\}$ и $\bar{c}=\{-3,0,2\}$;

4) $\bar{a}=\{1,5,0\}$, $\bar{b}=\{2,3,2\}$ и $\bar{c}=\{3,8,2\}$.

4.2. Доказать, что точки $A=(1;2;-1)$, $B=(0;1;5)$, $C=(-1;2;1)$, $D=(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

4.3. Даны точки $A=(2;-1;1)$, $B=(5;5;4)$, $C=(3;2;-1)$, $D=(4;1;3)$.

Вычислить:

1) объем пирамиды $ABCD$;

2) длину высоты из вершины A на основание BCD;

3) угол между ребром BD и основанием ABC;

4) угол между гранями ABC и BCD.

4.4. Даны точки $A=(2;3;1)$, $B=(4;1;-2)$, $C=(6;3;7)$, $D=(-5;-4;8)$.

Вычислить:

5) объем пирамиды $ABCD$;

6) длину высоты из вершины A на основание BCD;

7) угол между ребром BD и основанием ABC;

8) угол между гранями ABC и BCD.

4.5. Найти вектор $\overline{c}$, перпендикулярный векторам $\overline{a}=\{-1,0,3\}$ и $\overline{b}=\{5,4,-2\}$, имеющий длину 1 и направленный так, чтобы тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ имела отрицательную ориентацию.

4.6. Даны два вектора $\overline{a}=\{0,1,1\}$ и $\overline{b}=\{1,1,0\}$. Найти вектор $\overline{c}$ длины 1, перпендикулярный к вектору $\overline{a}$, образующий с вектором $\overline{b}$ угол $\dfrac{\pi}{4}$ и направленный так, чтобы тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ имела положительную ориентацию.

4.7. Доказать тождество $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}+\lambda\overline{a}+\mu\overline{b})=(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$, где λ и μ какие угодно числа.

4.8. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, удовлетворяющие условию $[\overline{a},\overline{b}]+[\overline{b},\overline{c}]+[\overline{c},\overline{a}]=0$, компланарны.

Занятие 5. Прямая на плоскости.

1. Уравнение линии на плоскости. Векторно-параметрическое уравнение прямой в аффинной системе координат.

2. Параметрическое и каноническое уравнение прямой, уравнение прямой через две точки в аффинной системе координат.

3. Общее уравнение прямой в аффинной системе координат.

4. Общее уравнение прямой в декартовой системе координат. Нормальный вектор.

5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, в отрезках на осях.

6. Опорные задачи.

7. Задачи для самостоятельного решения.

Уравнение линии на плоскости. Векторно-параметрическое уравнение прямой в аффинной системе координат.

Введем определение линии (кривой) на плоскости.

Определение. Уравнение вида $F(x, y) = 0$, где F - функция, x, y - переменные, называется уравнением линии на плоскости, если оно выражает необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка $M(x, y)$ лежала на данной линии.

Определение. Порядком линии $F(x, y) = 0$ называется степень многочлена $F(x, y)$.

Пример. Окружность с центром в начале координат и радиусом r описывается уравнением: $x^2 + y^2 = r^2$, то есть окружность является линией второго порядка.

Пример. Уравнение

$$y = kx + b \qquad (5.1)$$

описывает прямую на плоскости, здесь x, y - переменные, k, b - параметры. Подставляя вместо k и b произвольные числа, получаем различные прямые на плоскости. Однако уравнение (5.1) не описывает всех прямых на плоскости, например, прямые, параллельные оси OY ($x = const$), в виде (5.1) не представимы.

Выведем уравнение прямой. Из школьного курса геометрии известно, что для задания прямой необходимо и достаточно указать координаты двух точек, принадлежащих прямой. Это равносильно тому, чтобы указать координаты точки, принадлежащей прямой и координаты какого-нибудь ненулевого вектора, параллельного данной прямой.

Определение. Ненулевой вектор, параллельный прямой, называется направляющим вектором.

Пусть на плоскости задана произвольная аффинная система координат, начало в точке O, известны точка M_o, принадлежащей прямой и направляющий вектор прямой $\bar{a}$. Задача: найти произвольную точку M, принадлежащую прямой.

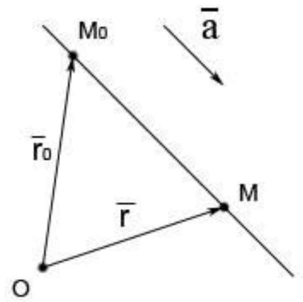


Рисунок 29. Векторно-параметрическое уравнение прямой.

Вектор $\overline{M_o M}$ коллинеарен направляющему вектору $\bar{a}$, следовательно, $\overline{M_o M} = t\bar{a}$, где t - произвольное число, параметр. Тогда по рисунку

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a} \qquad (5.2)$$

Уравнение (5.2) называется векторно-параметрическим уравнением прямой.

Параметрическое и каноническое уравнение прямой, уравнение прямой через две точки в аффинной системе координат.

Пусть известны координаты точки $M_o(x_0, y_0)$, принадлежащей прямой и координаты направляющего вектора $\bar{a} = \{a_1, a_2\}$. Координаты точки $M(x, y)$. Напомним, что координаты точек M_o и M совпадают с координатами радиус-векторов $\bar{r}_0 = \overline{OM_o}$ и $\bar{r} = \overline{OM}$. Подставим в векторно-параметрическое уравнение прямой (5.2) координаты векторов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad (5.3)$$

Запишем (5.3) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases} \qquad (5.4)$$

Система уравнений (5.4) называется параметрическим уравнением прямой.

В системе (5.4) выразим параметр t из уравнений:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{a_1} \\ t = \dfrac{y - y_0}{a_2} \end{cases} \qquad (5.5)$$

Тогда получаем уравнение:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \qquad (5.6)$$

Уравнение (5.6) называется каноническим уравнением прямой.

Выведем уравнение прямой, проходящей через две точки. Пусть точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ принадлежат прямой. Тогда вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\}$ является направляющим вектором прямой. Подставим эти данные в уравнение (5.6), заменив координаты точки M_o на координаты точки M_1 (также можно использовать координаты точки M_2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (5.7)$$

Уравнение (5.7) - уравнение прямой, проходящей через две точки.

Заметим, что уравнения (5.2), (5.4), (5.6) и (5.7) справедливы в любой аффинной системе координат.

Общее уравнение прямой в аффинной системе координат.

Преобразуем уравнение (5.6):

$a_2(x - x_0) = a_1(y - y_0) \Rightarrow a_2x - a_1y + (a_1y_0 - a_2x_0) = 0$.

Обозначим коэффициенты: $A := a_2;\ B := -a_1;\ C := a_1y_0 - a_2x_0$

Получаем уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (5.8)$$

Уравнение (5.8) называется общим уравнением прямой. Заметим, что вектор $\overline{a} = \{-B,\ A\}$ является направляющим вектором прямой.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. Прямые на плоскости – это в точности линии первого порядка.

Доказательство.

Общее уравнение прямой в декартовой системе координат. Нормальный вектор.

Пусть прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, как следует из предыдущего пункта, вектор $\overline{a} = \{-B, A\}$ является направляющим вектором прямой. В декартовой системе координат, вектор $\overline{N} = \{A, B\}$ перпендикулярен вектору $\overline{a} = \{-B, A\}$, так как скалярное произведение этих векторов равно нулю: $(\overline{N}, \overline{a}) = A \cdot (-B) + B \cdot A = 0$. Вектор $\overline{N}$ называется нормальным вектором прямой.

Определение. Ненулевой вектор, перпендикулярный прямой на плоскости, называется нормальным вектором прямой на плоскости.

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ с нормальным вектором $\overline{N} = \{A, B\}$ имеет уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (5.9)$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой в отрезках на осях.

Пусть прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и $B \neq 0$. Преобразуем уравнение $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ или $y = kx + b$, где $k = -\frac{A}{B}$ и $b = -\frac{C}{B}$.

Уравнение

$$y = kx + b \qquad (5.10)$$

называется уравнением прямой с угловым коэффициентом, k - угловой коэффициент, а b представляет собой величину отрезка, отсекаемого прямой от оси OY, начиная от начала координат. Геометрический смысл k - это тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси OX.

Из общего уравнения прямой можно получить ещё одно уравнение, называемое уравнением прямой в отрезках на осях. Предположим, что все коэффициенты в уравнении $Ax + By + C = 0$ не равны нулю. Тогда перенесем C в правую часть и разделим на него: $\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$. Обозначим $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, получим уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (5.11)$$

называется уравнением прямой в отрезках на осях. Геометрический смысл коэффициентов a и b заключается в том, что это отрезки, отсекаемые прямой от осей OX и OY соответственно. Легко убедиться в том, что прямая проходит через точки с координатами $(a, 0)$ и $(0, b)$.

Опорные задачи.

1. Дана точка $A(2;4)$ и направляющий вектор $\overline{a} = \{3,-2\}$. Написать уравнения прямой в параметрическом, в каноническом, в общем виде, в виде отрезков на осях и с угловым коэффициентом. Найти координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора прямой. Построить прямую, её направляющий вектор и нормальный вектор.

   Решение.

   Подставим в уравнение (5.4) координаты точки $(x_0; y_0) = (2;4)$, координаты направляющего вектора $\overline{a} = \{a_1; a_2\} = \{3;-2\}$:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 2a_2 \end{cases} \qquad (5.12)$$

   Уравнение (5.12) – параметрическое уравнение искомой прямой. Аналогично, в уравнение (5.6) подставим координаты точки и направляющего вектора:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-2} \qquad (5.13)$$

Уравнение (5.13) – каноническое уравнение данной прямой. Преобразуем уравнение (5.13): $-2(x-2)=3(y-4)$ следовательно,

$$2x+3y-16=0 \qquad (5.14)$$

Уравнение (5.14) – это общее уравнение искомой прямой. Уравнения (5.12), (5.13) и (5.14) справедливы в аффинной системе координат.

Предположим, что задана декартова система координат. Тогда в уравнении (5.14) коэффициенты при x и y - это координаты нормального вектора. Итак, вектор $\overline{N}=\{2;3\}$ - это нормальный вектор прямой.

В уравнении (5.14) свободный член -16 перенесем в правую часть и разделим на него:

$$\frac{x}{8}+\frac{3y}{16}=1 \qquad (5.15)$$

Уравнение (5.15) – это уравнение в отрезках на осях, по оси OX отсекается отрезок длины 8, по оси OY отсекается отрезок длины $\frac{16}{3}$.

Из уравнения (5.14) выразим y:

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{16}{3} \qquad (5.16)$$

Уравнение (5.16) – это уравнение с угловым коэффициентом, $k=-\frac{2}{3}$.

Построим данную прямую:

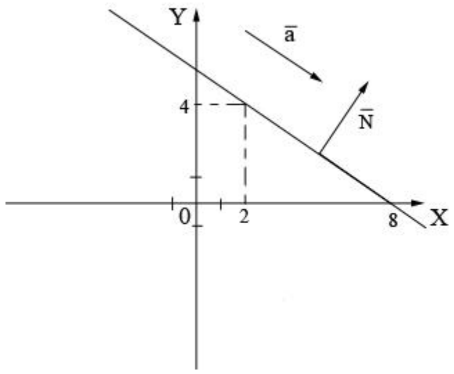


Рисунок 30. К задаче 1.

2. Определить взаимное расположение двух прямых на плоскости:

1) $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -3t + 1 \end{cases}$ и $3x + 2y - 12 = 0$;

2) $y = 5x + 6$ и $x + 5y - 10 = 0$;

3) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-1}$ и $3x + 5y - 2 = 0$.

Решение.

1). Первая прямая задана параметрическим уравнением, вторая прямая задана общим уравнением. Направляющий вектор первой прямой $\overline{a_1} = \{2;\ -3\}$ (коэффициенты при t в параметрическом уравнении прямой), направляющий вектор второй прямой $\overline{a_2} = \{-B,\ A\} = \{-2; 3\}$ (коэффициенты при x и y в общем уравнении прямой). Направляющие вектора параллельны: $\overline{a_1} = \{2;\ -3\} \,||\, \overline{a_2} = \{-2; 3\}$, следовательно, прямые параллельные или совпадающие. Возьмем произвольную точку, принадлежащую первой прямой, например, $(3;1)$ (свободные члены в параметрическом уравнении). Точка $(3;1)$ на принадлежит второй прямой $3x + 2y - 12 = 0$, следовательно, у прямых нет общих точек, значит, это параллельные прямые.

2). Первая прямая задана уравнением с угловым коэффициентом, вторая прямая – общим уравнением. Первое уравнение легко преобразовать к общему виду: $5x - y + 6 = 0$. Аналогично предыдущей задаче, направляющий вектор первой прямой $\overline{a_1} = \{1;\ 5\}$, второй прямой $\overline{a_2} = \{-5;1\}$. Направляющие вектора не параллельны, следовательно, прямые пересекаются. Можем найти точку пересечения, для этого решим систему уравнений: $\begin{cases} y = 5x + 6 \\ x + 5y - 10 = 0 \end{cases}$. Точка пересечения: $\left(-\dfrac{10}{13}; \dfrac{28}{13}\right)$. Также можно заметить, что в декартовой системе координат

вектора $\overline{a_1} = \{1;\ 5\}$ и $\overline{a_2} = \{-5;1\}$ перпендикулярны (их скалярное произведение равно нулю), следовательно, данные прямые перпендикулярны. Аналогичный вывод можно было сделать, сравнив их угловые коэффициенты: у первой прямой угловой коэффициент $k_1 = 5$, у второй прямой угловой коэффициент $k_2 = -\dfrac{1}{5}$. Произведение угловых коэффициентов: $k_1 \cdot k_2 = -1$, на основании этого можно сделать вывод о том, что прямые перпендикулярные.

3). Первая прямая задана каноническим уравнением, её направляющий вектор $\overline{a_1} = \{2;\ -1\}$, вторая прямая задана общим уравнением, её направляющий вектор $\overline{a_2} = \{-5;\ 3\}$. Направляющие вектора не параллельны, следовательно, прямые пересекаются. Точку пересечения прямых можно определить, решив систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-1} \\ 3x + 5y - 2 = 0 \end{cases}$. Точка пересечения $(-1;1)$.

Ответ: 1) параллельные, 2) пересекающиеся, 3) пересекающиеся.

3. Дан треугольник ABC: $A(6;-4)$, $B(-1;-3)$, $C(9;-1)$. Найти:

1) уравнения сторон;

2) уравнение медианы из вершины B;

3) уравнение высоты из вершины C;

4) уравнение биссектрисы из вершины A.

Решение.

1). Уравнение стороны AB запишем в виде (5.7): $\dfrac{x-6}{-1-6}=\dfrac{y+4}{-3+4}$, следовательно, $x+7y+22=0$ - уравнение AB в общем виде. Аналогично найдем уравнения AC: $x-y-10=0$, BC: $x-5y-14=0$.

2).

Задачи для самостоятельного решения.

5.1. Дана точка $A(3;1)$ и направляющий вектор $\overline{a}=\{1,0\}$. Написать уравнения прямой в параметрическом, в каноническом, в общем виде, в виде отрезков на осях и с угловым коэффициентом. Найти координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора прямой. Построить прямую, её направляющий вектор и нормальный вектор.

5.2. Дана точка $A(2;4)$ и направляющий вектор $\overline{a}=\{3,-2\}$. Написать уравнения прямой в параметрическом, в каноническом, в общем виде, в виде отрезков на осях и с угловым коэффициентом. Найти координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора прямой. Построить прямую, её направляющий вектор и нормальный вектор.

5.3. Даны точки $A(6;-4)$, $B(-1;-3)$. Написать уравнения прямой в параметрическом, в каноническом, в общем виде, в виде отрезков на осях и с угловым коэффициентом. Найти координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора прямой.

5.4. Даны точки $A(1;5)$, $B(1;-3)$. Написать уравнения прямой в параметрическом, в каноническом, в общем виде, в виде отрезков на осях и с угловым коэффициентом. Найти координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора прямой.

5.5. Дан треугольник ABC: $A(6;-4)$, $B(-1;-3)$, $C(9;-1)$. Найти:

1) уравнения сторон;
2) уравнение медианы из вершины B;
3) уравнение высоты из вершины C;
4) уравнение биссектрисы из вершины A.

5.6. Дан треугольник ABC: $A(-3;-5)$, $B(1;-13)$, $C(8;-3)$. Найти:

1) уравнения сторон;
2) уравнение медианы из вершины B;
3) уравнение высоты из вершины C;
4) уравнение биссектрисы из вершины A.

5.7. Через точку M провести прямую L_1, параллельную прямой L, и прямую L_2, перпендикулярную L, где:

1) $M(2;3)$ и L: $4x-7y+6=0$;
2) $M(-3;5)$ и L: $6x-2y-5=0$;

Занятие 6. Прямая и плоскость в пространстве.

1. Уравнение поверхности. Векторно-параметрическое уравнение плоскости.

2. Параметрическое уравнение плоскости. Уравнение плоскости через точку и два направляющих вектора. Уравнение плоскости через три точки.

3. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости с данным нормальным вектором. Уравнение плоскости в отрезках на осях.

4. Векторно-параметрическое уравнение прямой, параметрическое и каноническое уравнение прямой, уравнение прямой через две точки.

5. Условие совпадения двух плоскостей, условие параллельности двух плоскостей. Задание прямой в пространстве пересечением двух плоскостей.

6. Опорные задачи.

7. Задачи для самостоятельного решения.

Уравнение поверхности. Векторно-параметрическое уравнение плоскости.

Введем определение поверхности.

Определение. Уравнение вида $F(x,y,z)=0$, где F - функция, x, y, z - переменные, называется уравнением поверхности, если оно выражает необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка $M(x,y,z)$ лежала на данной поверхности.

Определение. Порядком поверхности $F(x,y,z)=0$ называется степень многочлена $F(x,y,z)$.

Пример. Сфера с центром в начале координат и радиусом r описывается уравнением: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, то есть сфера является поверхностью второго порядка.

Пример. Уравнение $z = const$ - это плоскость, параллельная плоскости OXY. Как мы покажем далее, всякая плоскость является поверхностью первого порядка.

Пример. Уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность (каждое сечение плоскостью $z = const$ является окружностью). Цилиндрическая поверхность – поверхность второго порядка.

Выведем уравнение плоскости. Из школьного курса геометрии известно, что для задания плоскости необходимо и достаточно указать координаты трех точек, принадлежащих плоскости. Это равносильно тому, чтобы указать координаты точки, принадлежащей плоскости и координаты двух неколлинеарных векторов, параллельных данной плоскости.

Определение. Ненулевой вектор, параллельный плоскости, называется направляющим вектором.

Пусть на плоскости задана произвольная аффинная система координат, начало в точке O, известны точка M_o, принадлежащей плоскости и два направляющих вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Задача: найти произвольную точку M, принадлежащую плоскости.

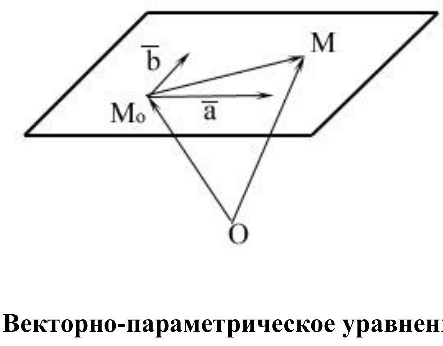


Рисунок 31. Векторно-параметрическое уравнение плоскости.

Набор $(M_0, \overline{a}, \overline{b})$ определяет аффинную систему координат на плоскости, следовательно, $\overline{M_oM} = u\overline{a} + v\overline{b}$, где u и v - произвольные числа, параметры. Набор (u, v) также называют плоскостными координатами точки M. Обозначим $\overline{r_0} = \overline{OM_0}$ (радиус-вектор точки M_0), $\overline{r} = \overline{OM}$ (радиус-вектор точки M). Тогда по рисунку

$$\overline{r} = \overline{r_0} + u\overline{a} + v\overline{b} \qquad (6.1)$$

Уравнение (6.1) называется векторно-параметрическим уравнением плоскости.

Параметрическое уравнение плоскости, уравнение плоскости через точку и два направляющих вектора. Уравнение плоскости через три точки. Пусть известны координаты точки $M_o(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей плоскости и координаты направляющих векторов $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Координаты точки $M(x, y, z)$. Напомним, что координаты точек M_o и M совпадают с координатами радиус-векторов $\overline{r_0} = \overline{OM_o}$ и $\overline{r} = \overline{OM}$. Подставим в векторно-параметрическое уравнение плоскости (6.1) координаты векторов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad (6.2)$$

Запишем (6.2) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases} \qquad (6.3)$$

Система уравнений (6.3) называется параметрическим уравнением плоскости.

Выведем уравнение плоскости, проходящую через точку $M_o(x_0, y_0, z_0)$, параллельную векторам $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Вектора $M_0M = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ компланарны, их смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.4)$$

Уравнение (6.4) называется уравнением плоскости через точку и два направляющих вектора.

Аналогично можно получить уравнение плоскости через три точки: пусть точки $M_o(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ принадлежат плоскости. Вектора $M_0M = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $M_0M_1 = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$, $M_0M_2 = \{x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0\}$ - компланарны, тогда:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.5)$$

Уравнение (6.5) называется уравнением плоскости через три точки.

Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости с данным нормальным вектором. Уравнение плоскости в отрезках на осях.

Выведем общее уравнение плоскости. В уравнении (6.4) разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}(x - x_0) - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0 \qquad (6.6)$$

Раскроем скобки и обозначим коэффициенты: $A=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, $B=-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$,

$C=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, $D=-\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}x_0+\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}y_0-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}z_0$. Получили уравнение:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (6.7)$$

Уравнение (6.7) называется общим уравнением плоскости. Уравнение (6.7) – это уравнение первой степени. Итак, всякую плоскость можно задать уравнением первой степени. Верно и обратное утверждение: всякое уравнение первой степени в пространстве задает плоскость. Вообще говоря, справедлива следующая теорема:

Теорема. Плоскость в пространстве – это в точности линия первого порядка.

В декартовой системе координат вектор $\overline{N}=\{A,B,C\}$, где $A=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$,

$B=-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, является векторным произведением векторов

$\overline{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ и $\overline{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, значит, вектор $\overline{N}$ перпендикулярен направляющим векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ плоскости, и, следовательно, перпендикулярен плоскости.

Определение. Вектор $\overline{N}$ перпендикулярный плоскости называется нормальным вектором плоскости.

Запишем уравнение (6.6) в следующем виде:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (6.7)$$

Уравнение (6.7) – уравнение плоскости с данным нормальным вектором $\overline{N}=\{A,B,C\}$ через заданную точку $M_o(x_0,y_0,z_0)$.

Из общего уравнения плоскости можно получить ещё одно уравнение, называемое уравнением плоскости в отрезках на осях. Предположим, что все коэффициенты в уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ не равны нулю. Тогда перенесем D в правую часть и разделим на него: $\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$. Обозначим $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$ получим уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (6.8)$$

называется уравнением плоскости в отрезках на осях. Геометрический смысл коэффициентов a, b и c заключается в том, что это отрезки, отсекаемые плоскостью от осей OX , OY и OZ соответственно. Легко убедиться в том, что плоскости проходит через точки с координатами $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$.

Векторно-параметрическое уравнение прямой, параметрическое и каноническое уравнения прямой, уравнения прямой через две точки.

Вывод уравнения прямой в пространстве аналогичен выводу уравнения прямой на плоскости. Напомним определение направляющего вектора прямой.

Определение. Ненулевой вектор, параллельный прямой, называется направляющим вектором.

Пусть на плоскости задана произвольная аффинная система координат, начало в точке O, известны точка M_o, принадлежащей прямой и направляющий вектор прямой $\bar{a}$. Задача: найти произвольную точку M , принадлежащую прямой.

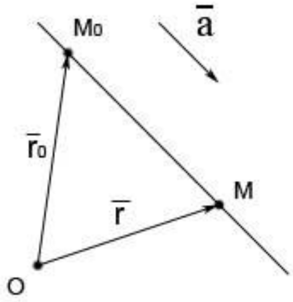


Рисунок 32. Векторно-параметрическое уравнение прямой.

Вектор $\overline{M_oM}$ коллинеарен направляющему вектору $\overline{a}$, следовательно, $\overline{M_oM} = t\overline{a}$, где t - произвольное число, параметр. Тогда по рисунку

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{a} \qquad (6.9)$$

Уравнение (6.9) называется векторно-параметрическим уравнением прямой.

Пусть известны координаты точки $M_o(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей прямой и координаты направляющего вектора $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Координаты точки $M(x, y, z)$. Напомним, что координаты точек M_o и M совпадают с координатами радиус-векторов $\overline{r_0} = \overline{OM_o}$ и $\overline{r} = \overline{OM}$. Подставим в векторно-параметрическое уравнение прямой (6.9) координаты векторов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad (6.10)$$

Запишем (6.10) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \qquad (6.11)$$

Система уравнений (6.11) называется параметрическим уравнением прямой.

В системе (6.11) выразим параметр t из уравнений:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{a_1} \\ t = \dfrac{y - y_0}{a_2} \\ t = \dfrac{z - z_0}{a_3} \end{cases} \qquad (6.12)$$

Тогда получаем уравнение:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad (6.13)$$

Уравнение (6.13) называется каноническим уравнением прямой.

Выведем уравнение прямой, проходящей через две точки. Пусть точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_3)$ принадлежат прямой. Тогда вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ является направляющим вектором прямой. Подставим эти данные в уравнение (6.13), заменив координаты точки M_o на координаты точки M_1 (также можно использовать координаты точки M_2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (6.14)$$

Уравнение (6.14) - уравнение прямой, проходящей через две точки.

Условие совпадения двух плоскостей, условие параллельности двух плоскостей. Задание прямой в пространстве пересечением двух плоскостей.
Рассмотрим две плоскости в пространстве : α: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и β: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Две плоскости в пространстве могут быть параллельны, могут пересекаться по прямой или могут совпадать. С алгебраической точки зрения, пересечение плоскостей в пространстве можно рассматривать как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (6.15)$$

Запишем систему уравнений (6.15) в виде матрицы: $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ - матрица системы (6.15), $\overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}$ - расширенная матрица системы (6.15). Возможны случаи: 1) $rank\ A = rank\ \overline{A} = 1$; 2) $rank\ A = 1,\ \ rank\ \overline{A} = 2$ и 3) $rank\ A = rank\ \overline{A} = 2$. Рассмотрим каждый из случаев отдельно:

1). Пусть $rank\ A = rank\ \overline{A} = 1$. В этом случае система (6.15) имеет бесконечно много решений, в пространстве решений можно выбрать два линейно независимых решения (количество линейно независимых решений определяется по формуле n-r, где n=3 – число неизвестных, а r=1 – ранг матрицы системы). С геометрической точки зрения пространством решений является плоскость, значит, плоскости α и β совпадают. С другой стороны, $rank\ A = rank\ \overline{A} = 1$ возможно в том и только в том случае, когда строки матрицы $\overline{A}$ пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \qquad (6.16)$$

Итак, условие (6.16) – условие совпадения двух плоскостей.

2). Пусть $rank\ A = 1,\ \ rank\ \overline{A} = 2$. По теореме Кронекера-Капелли система (6.15) решений не имеет. С геометрической точки зрения это означает, что плоскости α и β параллельные плоскости. Поскольку $rank\ A = 1$, то строки в матрице A пропорциональны, но $rank\ A \neq rank\ \overline{A}$, значит, выполняется условие:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \qquad (6.17)$$

Условие (6.17) – это условие параллельности двух плоскостей.

3). Пусть $rank\, A = rank\, \overline{A} = 2$. В этом случае, система (6.15) имеет бесконечно много решений, в пространстве решений можно выбрать одно линейно независимое решение, решение записывается в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad (6.18),$$

где $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$-частное решение системы (6.15), $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ - фундаментальное решение системы (6.15). С геометрической точки зрения, решение системы (6.15) является прямой, решение, записанное в виде (6.18) – это параметрическое задание этой прямой. Направляющий вектор прямой $\overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ можно найти как векторное произведение нормалей к плоскостям α и β: $\overline{a} = [\overline{N}_\alpha, \overline{N}_\beta]$, действительно, мы получим вектор $\overline{a}$, который перпендикулярен вектору $\overline{N}_\alpha$, следовательно, лежит в плоскости α, и, одновременно, перпендикулярен вектору $\overline{N}_\beta$, следовательно, лежит в плоскости β. Итак, получим вектор $\overline{a}$, лежащий в пересечении плоскостей α и β.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Дана точка $A(0;1;-2)$ и направляющий вектор $\overline{a} = \{1,0,2\}$. Написать уравнение прямой, проходящей через данную точку и с данным направляющим вектором. Записать уравнение прямой в векторном, в параметрическом и каноническом виде.

2. Дана точка $A(0;1;-2)$ и направляющий вектор $\overline{a} = \{1,0,2\}$. Написать уравнение прямой, проходящей через данную точку и с данным на-

правляющим вектором. Записать уравнение прямой в векторном, в параметрическом и каноническом виде.

3. Даны две точки $A(0;1;-2)$ и $C(2;-1;-2)$. Написать уравнение прямой, проходящей через эти точки. Записать уравнение прямой в векторном, в параметрическом и каноническом виде. Найти направляющий вектор прямой.

4. Даны две точки $A(1;3;2)$ и $B(4;3;1)$. Написать уравнение прямой, проходящей через эти точки. Записать уравнение прямой в векторном, в параметрическом и каноническом виде. Найти направляющий вектор прямой.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $C(2;-1;-2)$ и компланарной векторам $\overline{a}=\{1,5,2\}$, $\overline{b}=\{3,5,5\}$. Записать уравнение этой плоскости в параметрическом, общем виде и в виде отрезков на осях. Найти нормальный вектор плоскости.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0;1;-2)$ и компланарной векторам $\overline{a}=\{-1,3,-2\}$, $\overline{b}=\{1,0,5\}$. Записать уравнение этой плоскости в параметрическом, общем виде и в виде отрезков на осях. Найти нормальный вектор плоскости.

Занятие 7. Метрические задачи на прямую и плоскость в пространстве.

1. Угол между прямыми, угол между плоскостями, угол между прямой и плоскостью.
2. Проекция точки на плоскость, нахождение точки, симметричной плоскости, расстояние от точки до плоскости.
3. Проекция точки на прямую, нахождение точки, симметричной прямой, расстояние от точки до прямой.
4. Расстояние между плоскостями, расстояние между прямыми, расстояние между прямой и плоскостью.
5. Опорные задачи.
6. Задачи для самостоятельного решения.

Угол между прямыми, угол между плоскостями, угол между прямой и плоскостью.

Научимся решать некоторые метрические задачи.

Пусть даны две прямые: $\ell_1: \ \dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{a_2}=\dfrac{z-z_1}{a_3}$,

$\ell_2: \ \dfrac{x-x_2}{b_1}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{b_3}$. Угол между этими прямыми – это угол между их направляющими векторами: $\bar{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\bar{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, мы можем найти косинус угла между прямыми:

$$\cos \ell_1 \wedge \ell_2 = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} \qquad (7.1)$$

По формуле (7.1) находим угол между двумя прямыми.

Пусть даны две плоскости в пространстве: α: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и β: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, нормальные вектора этих плоскостей:

$\overline{N_\alpha} = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\overline{N_\beta} = \{A_2, B_2, C_2\}$. Угол между плоскостями – это угол между их нормальными векторами, с помощью скалярного произведения мы можем найти косинус этого угла:

$$\cos\alpha \wedge \beta = \frac{(\overline{N}_\alpha, \overline{N}_\beta)}{|\overline{N_\alpha}| \cdot |\overline{N_\beta}|} \qquad (7.2)$$

По формуле (7.2) находим угол между двумя плоскостями.

Пусть даны плоскость и прямая в пространстве: $\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\ell_1: \dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{a_2} = \dfrac{z - z_1}{a_3}$. Чтобы найти угол между плоскостью и прямой, найдем угол между нормалью к плоскостью и направляющим вектором – косинус этого угла равен синусу угла между плоскостью и прямой:

$$\sin\alpha \wedge \ell_1 = \cos\overline{N}_\alpha \wedge \bar{a} = \frac{(\overline{N}_\alpha, \bar{a})}{|\overline{N_\alpha}| \cdot |\bar{a}|} \qquad (7.3)$$

По формуле (7.3) находится угол между плоскостью и прямой.

Проекция точки на плоскость, нахождение точки, симметричной плоскости, расстояние от точки до плоскости.

Рассмотрим плоскость $\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ не принадлежащую плоскости. Чтобы найти проекцию точки на плоскость, воспользуемся следующим алгоритмом:

1) проведем прямую ℓ_1, проходящую через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, перпендикулярно плоскости α, направляющим вектором прямой ℓ_1 будет нормальный вектор плоскости α: $\ell_1: \dfrac{x - x_1}{A_1} = \dfrac{y - y_1}{B_1} = \dfrac{z - z_1}{C_1}$

   ;

2) найдем точку пересечения прямой ℓ_1 и плоскости α: $M_2 = \ell_1 \cap \alpha$ - это точка и будет ортогональной проекцией точки M_1 на плос-

кость α, чтобы найти её координаты следует решить систему уравнений: $\begin{cases} x = x_1 + tA_1 \\ y = y_1 + tB_1 \\ z = z_1 + tC_1 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$, в этой системе прямая ℓ_1 задана в параметрическом виде. Решение этой системы – это и есть искомые координаты точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Чтобы найти координаты точки $M_3(x_3, y_3, z_3)$, симметричной точке M_1 относительно плоскости α, воспользуемся тем, что точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ является серединой отрезка M_1M_3, из формулы для вычисления координат середины отрезка получим: $x_3 = 2x_2 - x_1$, $y_3 = 2y_2 - y_1$, $z_3 = 2z_2 - z_1$.

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости α можно вычислить как длину отрезка M_1M_2: $\rho(M_1, \alpha) = |M_1M_2|$.

В декартовой системе координат расстояние от точки до плоскости можно найти как длину высоты в параллелепипеде. Пусть плоскость α задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и двумя направляющими векторами $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, тогда расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости α - это длина высоты параллелепипеда:

$$\rho(M_1, \alpha) = \frac{V_{параллелепипеда}}{S_{основания}} = \frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}} \qquad (7.4)$$

Вспомним, что координаты нормали к плоскости находятся по формуле: $\overline{N_\alpha} = \{A_1, B_1, C_1\} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right\}$. Подставим координаты нормали в формулу (7.4), определитель в числителе разложим по первой строке:

$$\rho(M_1,\alpha)=\frac{|A_1(x_1-x_0)+B_1(y_1-y_0)+C_1(z_1-z_0)|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} \qquad (7.5)$$

Точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ принадлежит плоскости α: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, следовательно, $-A_1x_0-B_1y_0-C_1z_0=D_1$, тогда преобразуем формулу (7.5) к виду:

$$\rho(M_1,\alpha)=\frac{|A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} \qquad (7.6)$$

Формула (7.6) – это формула для нахождения расстояния от точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до плоскости α: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

Проекция точки на прямую, нахождение точки, симметричной прямой, расстояние от точки до прямой.

Рассмотрим плоскость $\ell: \dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$ и точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ не принадлежащую плоскости. Чтобы найти проекцию точки на прямую, воспользуемся следующим алгоритмом:

1) проведем плоскость α, проходящую через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, перпендикулярно прямой ℓ, нормальным вектором плоскости α будет направляющий вектор прямой ℓ
$\alpha: a_1(x-x_1)+a_2(y-y_1)+a_3(z-z_1)=0$;

2) найдем точку пересечения прямой ℓ и плоскости α: $M_2=\ell\cap\alpha$ - это точка и будет ортогональной проекцией точки M_1 на прямую ℓ, чтобы найти её координаты следует решить систему уравнений: $\begin{cases} x=x_0+ta_1 \\ y=y_0+ta_2 \\ z=z_0+ta_3 \\ a_1(x-x_1)+a_2(y-y_1)+a_3(z-z_1)=0 \end{cases}$, в этой системе прямая ℓ задана в параметрическом виде. Решение этой системы – это и есть искомые координаты точки $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

Чтобы найти координаты точки $M_3(x_3, y_3, z_3)$, симметричной точке M_1 относительно прямой ℓ, воспользуемся тем, что точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ является серединой отрезка M_1M_3, из формулы для вычисления координат середины отрезка получим: $x_3 = 2x_2 - x_1$, $y_3 = 2y_2 - y_1$, $z_3 = 2z_2 - z_1$.

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой ℓ можно вычислить как длину отрезка M_1M_2: $\rho(M_1, \ell) = |M_1M_2|$.

Расстояние между плоскостями, расстояние между прямыми, расстояние между прямой и плоскостью.

Расстояние между плоскостями зависит от взаимного расположения двух плоскостей в пространстве. В случае, когда плоскости пересекаются или совпадают, расстояние между ними равно нулю. В случае параллельных плоскостей расстояние между ними можно найти по формуле (7.6), взяв в качестве точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ любую точку на одной из плоскостей.

Найдем расстояние между прямыми в случае, когда прямые скрещиваются (остальные случаи разберите самостоятельно). Пусть даны две прямые: $\ell_1: \ \dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{a_2} = \dfrac{z - z_1}{a_3}$, $\ell_2: \ \dfrac{x - x_2}{b_1} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{b_3}$. Представим эти прямые как грани наклонного параллелепипеда.

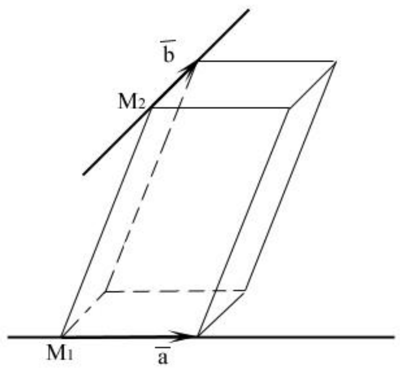


Рисунок 33. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \ell_1$, $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ - направляющий вектор ℓ_1, точка $M_2(x_2, y_2, z_2) \in \ell_2$, $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ - направляющий вектор ℓ_2. Тогда расстояние между ℓ_1 и ℓ_2 - это высота наклонного параллелепипеда, построенного на прямых ℓ_1 и ℓ_2 как показано на рисунке.

$$\rho(\ell_1,\ell_2)=\frac{V_{параллелепипеда}}{S_{основания}}=\frac{\left|(\bar{a},\bar{b},\overline{M_1M_2})\right|}{|[\bar{a},\bar{b}]|} \qquad (7.7)$$

По формуле (7.7) находится расстояние между скрещивающимися прямыми.

Нахождение расстояния между прямой и плоскостью зависит от их взаимного расположения: если прямая и плоскость пересекаются, то расстояние между ними равно нулю, если прямая параллельна плоскости, то расстояние между ними можно найти по формуле (7.6), взяв в качестве точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ любую точку, принадлежащую прямой.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Даны точки $A(1;2;4)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;1;1)$, $D(2;3;5)$. Найти:

    1) уравнения прямых AD и BC;
    2) угол между прямыми AD и BC;
    3) расстояние между прямыми AD и BC;
    4) уравнения плоскостей ABC и BCD;
    5) угол между плоскостями ABC и BCD;
    6) угол между прямой AD и плоскостью BCD;
    7) составить уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости BCD;
    8) найти проекцию точки A на плоскость BCD;
    9) найти точку, симметричную точки A относительно плоскости BCD;
    10) найти расстояние от точки A до плоскости BCD;

11) найти проекцию точки А на прямую ВС;

12) найти расстояние от точки А до прямой ВС;

13) найти уравнение прямой, проходящей через точку А перпендикулярно прямой ВС .

2. Даны точки $A(1;2;4)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;1;1)$, $D(2;3;5)$. Найти:

1) уравнения прямых AD и BC;

2) угол между прямыми AD и BC;

3) расстояние между прямыми AD и BC;

4) уравнения плоскостей ABC и BCD;

5) угол между плоскостями ABC и BCD;

6) угол между прямой AD и плоскостью BCD;

7) составить уравнение прямой, проходящей через точку А и перпендикулярной плоскости BCD;

8) найти проекцию точки А на плоскость BCD;

9) найти точку, симметричную точки А относительно плоскости BCD;

10) найти расстояние от точки А до плоскости BCD;

11) найти проекцию точки А на прямую ВС;

12) найти расстояние от точки А до прямой ВС;

13) найти уравнение прямой, лежащей в плоскости АВС и проходящей через точку А перпендикулярно прямой ВС .

Расчетная работа.

Задание. Даны точки: $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$, $D(d_1,d_2,d_3)$. Найти:

1. Координаты векторов $\alpha\overline{AB}+\beta\overline{AC}$ и $\beta\overline{AB}-\alpha\overline{AC}$.
2. Скалярное произведение $(\alpha\overline{AB}+\beta\overline{AC},\ \beta\overline{AB}-\alpha\overline{AC})$.
3. Сделать вывод о перпендикулярности векторов $\alpha\overline{AB}+\beta\overline{AC}$ и $\beta\overline{AB}-\alpha\overline{AC}$.
4. Угол между векторами $\alpha\overline{AB}+\beta\overline{AC}$ и $\beta\overline{AB}-\alpha\overline{AC}$.
5. Векторное произведение $[\alpha\overline{AB}+\beta\overline{AC},\ \beta\overline{AB}-\alpha\overline{AC}]$.
6. Проверить, компланарны ли вектора $\alpha\overline{AB}$, $\beta\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.
7. Найти объем тетраэдра $ABCD$.
8. Написать уравнение плоскости ABC.
9. Найти расстояние от точки D до плоскости ABC 1) с помощью смешанного произведения 2) по формуле (7.6).
10. Найти проекцию точки D на плоскость ABC.
11. Найти проекцию точки D на прямую AB.
12. Написать уравнение высоты в треугольнике ABC из вершины A.
13. Написать уравнение медианы в треугольнике ABC из вершины A.
14. Найти угол между плоскостями ABC и BCD.
15. Найти угол между прямой AB и плоскостью ABC.

Указания к выполнению расчетной работы. Работа выполняется на листах формата А4. Все необходимые параметры взять у преподавателя.

Занятие 1. Эллипс, гипербола и парабола.

1. Историческая справка.
2. Эллипс.
3. Гипербола.
4. Парабола.
5. Задачи для самостоятельного решения.

Историческая справка.

Определение. ***Кривой второго порядка*** называется множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля.

Пример.

а). $x^2 + y^2 - 1 = 0$ - известное уравнение окружности с радиусом 1.

б). $xy - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$ - известное уравнение гиперболы.

Впервые кривые второго порядка изучались одним из учеников Платона, предположительно Менехмом (IV в. до н. э.). До нашего времени сохранился знаменитый трактат Апполония Пергского «О конических сечениях». Апполоний рассматривал сечения двуполостного кругового конуса, в зависимости от угла наклона секущей плоскости получаются различные кривые, а именно окружность, эллипс, гипербола, парабола и несколько вырожденных кривых (см. рис.1) .

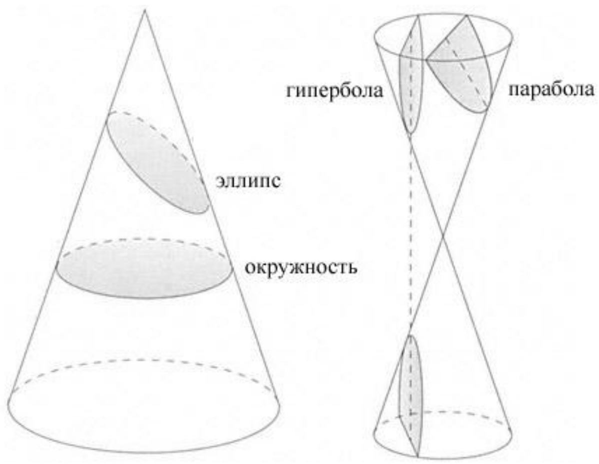


Рисунок 34. Конические сечения.

Аполлоний первый рассматривал эллипс, параболу и гиперболу как произвольные плоские сечения произвольных конусов с круговым основанием и детально исследовал их свойства. Обнаружил, что парабола — предельный случай эллипса, открыл асимптоты гиперболы; получил (в словесной форме) уравнение параболы; впервые изучал свойства касательных и подкасательных к коническим сечениям. Современные названия кривых также были введены Апполонием: эллипс (др.-греч. ἔλλειψις — опущение, недостаток, в смысле недостатка эксцентриситета до 1), гипе́рбола (др.-греч. ὑπερβολή, от ὑπερ — «верх» + βαλειν — «бросать»), пара́бола (греч. παραβολή — приложение).

Однако эти научные знания нашли применение лишь в XVII веке, когда стало известно, что планеты движутся по эллиптическим траекториям, а пушечный снаряд летит по параболической. Ещё позже стало известно, что если придать телу первую космическую скорость, то оно будет двигаться по окружности вокруг Земли, при увеличении этой скорости — по эллипсу, при достижении второй космической скорости — по параболе, а при скорости, большей второй космической — по гиперболе.

Эллипс.

Определение. ***Эллипсом*** называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух заданных точек F_1 и F_2 (называемых ***фокусами***) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

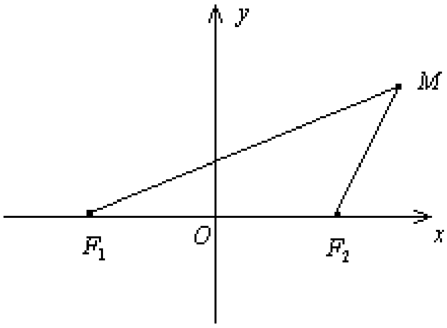


Рисунок 35. Построение эллипса.

Введем систему координат следующим образом: ось OX направим от F_1 к F_2, ось OY перпендикулярно оси OX, ось OY проходит через середину отрезка F_1F_2.

Обозначим: $|F_1F_2| = 2c$ - расстояние между фокусами, M – произвольная точка, принадлежащая эллипсу, расстояние $|F_1M| = r_1 \,|\, u |F_2M| = r_2$ - фокальные радиусы (расстояние от произвольной точки эллипса до фокусов). Тогда, по определению, уравнение эллипса принимает вид:

$$|F_1M| + |F_2M| = r_1 + r_2 = 2a \qquad (1.1)$$

где a - постоянная величина и $a > c$.

Найдем уравнение эллипса в веденной системе координат.

Точка $M(x; y)$ - произвольная точка эллипса, координаты фокусов в выбранной системе координат $F_1(-c;0)$, $F_2(0;c)$, фокусные расстояния

$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Подставим фокусные расстояния в уравнение (1.1) и преобразуем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (1.2)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения (1.2):

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Возведем в квадрат и преобразуем:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (1.3)$$

Обозначим константу $b^2 := a^2 - c^2$ (обозначение корректно, так как по определению эллипса $a > c$).

Уравнение (1.3) перепишем в виде:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (1.4)$$

Разделив обе части уравнения (1.4) на a^2b^2, получим ***каноническое уравнение эллипса:***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1.5)$$

Изобразим в декартовой системе координат:

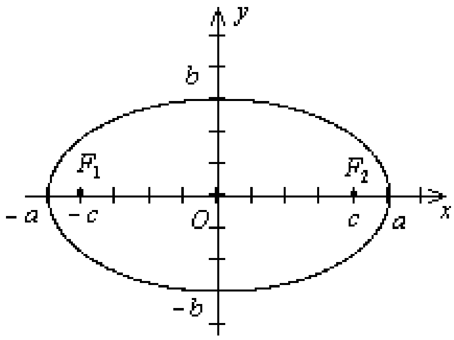


Рисунок 36. Эллипс.

Отрезок между двумя вершинами, содержащий фокусы называется большой осью (на рисунке это отрезок от точки с координатами (-a,0) до (a,0)). Отрезок между двумя другими вершинами называется малой осью.

Определение. ***Эксцентриситетом*** эллипса называют отношение фокусного расстояния к длине большой оси, то есть $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a}$.

Вообще говоря, эксцентриситет – это характеристика орбиты небесного тела, указывает, насколько эллиптическая орбита отличается от круговой.

Эксцентриситет – мера «сжатия» эллипса.

Как ясно из определения, эксцентриситет эллипса строго меньше единицы: $0 \le \varepsilon < 1$. Эксцентриситет равен нулю у окружности (вспомните уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$). Чем больше эксцентриситет эллипса отличается от нуля, тем он более «приплюснут» к своей большой оси.

Определение. ***Директриса*** — прямая, лежащая в плоскости эллипса и обладающая тем свойством, что отношение расстояния от любой точки кривой до фокуса кривой к расстоянию от той же точки до этой прямой есть величина постоянная, равная эксцентриситету (директориальное свойство эллипса).

Уравнения директрис: $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$ - это прямые, перпендикулярные большой оси, и отстоящие от центра эллипса на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$.

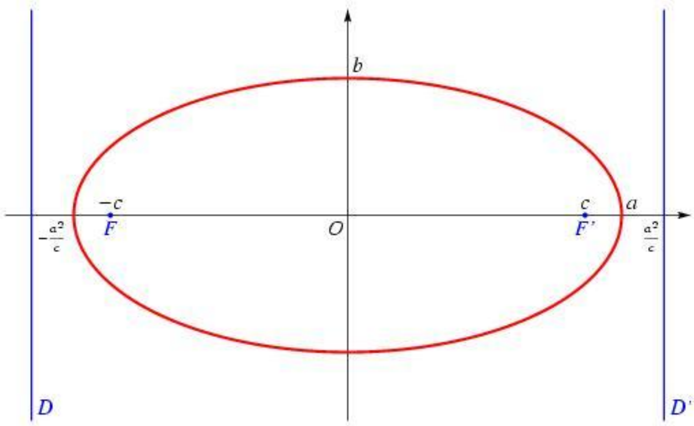


Рисунок 37. Директрисы эллипса.

Таблица 1. Характеристики эллипса в случае, когда a>b.

Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$, $c^2=a^2-b^2$
Вершины эллипса	$A_1(-a,0)$ $A_2(a,0)$ $B_1(0,-b)$ $B_2(0,b)$
Центр эллипса	O(0,0)
Координаты фокусов (на оси OX)	$F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$
Длина большой оси	2a
Длина малой оси	2b

Фокусное расстояние	2c
Эксцентриситет	$\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$
Уравнения директрис (перпендикулярны оси OX)	$x = -\dfrac{a}{\varepsilon} \quad x = \dfrac{a}{\varepsilon}$

Таблица 2. Характеристики эллипса в случае, когда b>a.

Каноническое уравнение	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ b > a,\ c^2 = b^2 - a^2$
Вершины эллипса	$A_1(-a,0)$ $A_2(a,0)$ $B_1(0,-b)$ $B_2(0,b)$
Центр эллипса	O(0,0)
Координаты фокусов (на оси OY)	$F_1(0,-c)$ $F_2(0,c)$
Длина большой оси	2b
Длина малой оси	2a
Фокусное расстояние	2c
Эксцентриситет	$\varepsilon = \dfrac{c}{b} < 1$
Уравнения директрис (перпендикулярны оси OY)	$y = -\dfrac{b}{\varepsilon} \quad y = \dfrac{b}{\varepsilon}$

Гипербола.

Определение. ***Гиперболой*** называется геометрическое место точек, для которых модуль разности расстояний до двух заданных точек F_1 и F_2 (называемых ***фокусами***) есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Введем систему координат следующим образом: ось OX направим от F_1 к F_2, ось OY перпендикулярно оси OX, ось OY проходит через середину отрезка F_1F_2.

Обозначим: $|F_1F_2| = 2c$ - расстояние между фокусами, M – произвольная точка, принадлежащая гиперболе, расстояние $|F_1M| = r_1 \, u \, |F_2M| = r_2$ - фокальные радиусы (расстояние от произвольной точки гиперболы до фокусов). Тогда, по определению, уравнение гиперболы принимает вид:

$$\big||F_1M| - |F_2M|\big| = \left|r_1 - r_2\right| = 2a,\ a < c \qquad (1.6)$$

Аналогично выводу уравнения эллипса, найдем уравнение гиперболы в веденной системе координат.

Точка $M(x;y)$ - произвольная точка эллипса, координаты фокусов в выбранной системе координат $F_1(-c;0)$, $F_2(0;c)$, фокусные расстояния $|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Подставим фокусные расстояния в уравнение (1.6) :

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a \qquad (1.7)$$

Предположим, что точка M находится ближе к фокусу F_2, то есть $|MF_1| > |MF_2|$, тогда преобразуем (1.7):

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (1.8)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения (1.8), выполним преобразования как и в случае эллипса:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = a^2(c^2 - a^2) \qquad (1.9)$$

Обозначим константу $b^2 := c^2 - a^2$ (обозначение корректно, так как по определению гиперболы $c > a$).

Уравнение (1.9) перепишем в виде:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \qquad (1.10)$$

Разделив обе части уравнения (1.10) на $a^2 b^2$, получим ***каноническое уравнение гиперболы:***

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1.11)$$

Изобразим в декартовой системе координат:

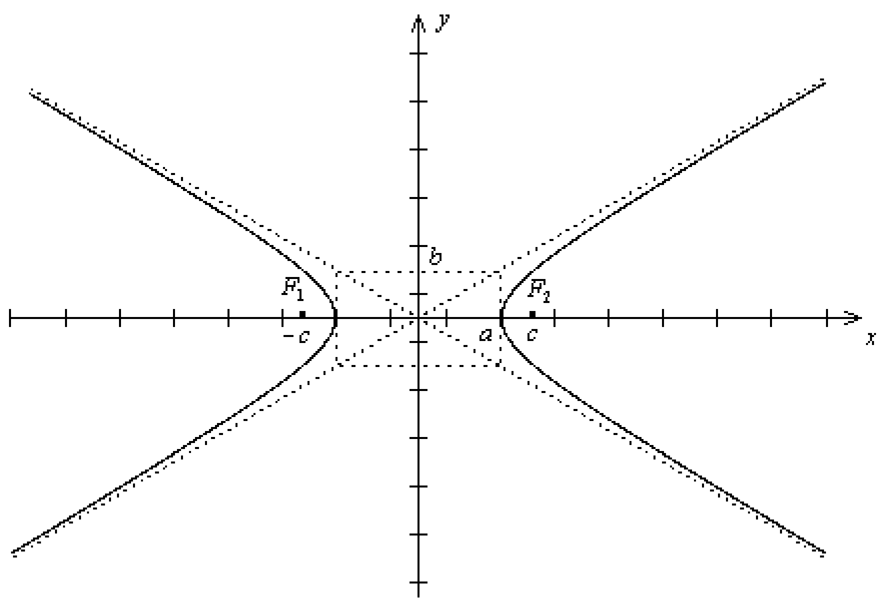


Рисунок 38. Гипербола.

Отрезок между двумя вершинами, содержащий фокусы называется действительной осью (на рисунке это отрезок от точки с координатами (-a,0) до (a,0)) (Отрезок между точками с координатами (0,-b) и (0,b) называется мнимой осью)

Определение. ***Эксцентриситетом*** гиперболы называют отношение фокусного расстояния к длине действительной оси, то есть $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} > 1$.

Определение. ***Директриса*** — прямая, лежащая в плоскости гиперболы и обладающая тем свойством, что отношение расстояния от любой точки кривой до фокуса кривой к расстоянию от той же точки до этой прямой есть величина постоянная, равная эксцентриситету (директориальное свойство гиперболы).

Уравнения директрис: $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$ - это прямые, перпендикулярные большой оси, и отстоящие от центра гиперболы на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$.

Прямоугольник со сторонами 2a и 2b, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, называется основным прямоугольником гиперболы.

Отрезки длиной 2a и 2b, соединяющие середины сторон основного прямоугольника гиперболы, также называют ее осями.

Определение. Диагонали основного прямоугольника (неограниченно продолженного) являются ***асимптотами*** гиперболы, их уравнения суть

$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

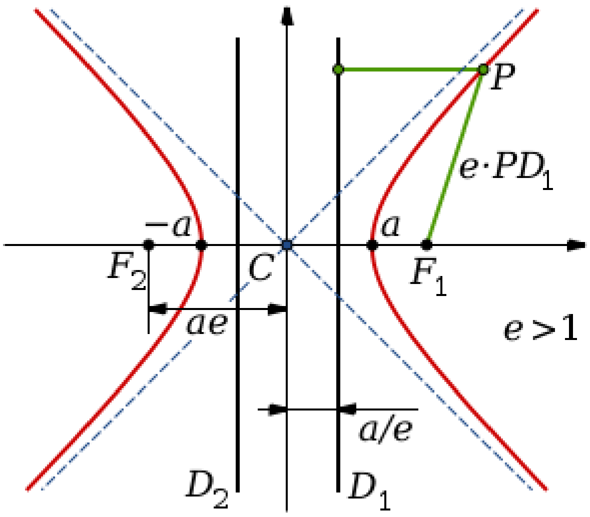


Рисунок 39. Основные характеристики гиперболы.

Сводная таблица характеристик гиперболы, в случае уравнения $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$**.**

Таблица 3. Характеристики гиперболы.

Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $c^2=a^2+b^2$
Вершины гиперболы (на оси OX)	A_1(-a,0) A_2(a,0)
Центр гиперболы	O(0,0)
Координаты фокусов	F_1(-c,0) F_2(c,0)
Длина действительной оси	2a
Длина мнимой оси	2b
Фокусное расстояние	2c

Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$
Уравнения директрис (перпендикулярны оси OX)	$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad x = \frac{a}{\varepsilon}$
Уравнения асимптот	$y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x$

Сводная таблица характеристик гиперболы, в случае, когда $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (сопряженная гипербола)

Таблица 4. Характеристики сопряженной гиперболы.

Каноническое уравнение	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ c^2 = b^2 + a^2$
Вершины гиперболы (на оси OY)	$B_1(0,-b)$ $B_2(0,b)$
Центр гиперболы	O(0,0)
Координаты фокусов	$F_1(0,-c)$ $F_2(0,c)$
Длина действительной оси	2b
Длина мнимой оси	2a
Фокусное расстояние	2c
Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{b} > 1$
Уравнения директрис (перпендикулярны оси OY)	$y = -\frac{b}{\varepsilon} \quad y = \frac{b}{\varepsilon}$

Уравнения асимптот	$y=\frac{b}{a}x \quad y=-\frac{b}{a}x$

Парабола.

Определение. ***Параболой*** называют геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки *F* (называемой ***фокусом***) и прямой *d* (называемой ***директрисой***).

Чтобы получить уравнение кривой, соответствующей этому определению, введем подходящую систему координат. Для этого из фокуса F опустим перпендикуляр FD на директрису *d*. Начало координат O расположим на середине отрезка FD, ось OX направим вдоль отрезка FD так, чтобы ее направление совпадало с направлением вектора $\overrightarrow{DF}$. Ось OY проведем перпендикулярно оси OX.

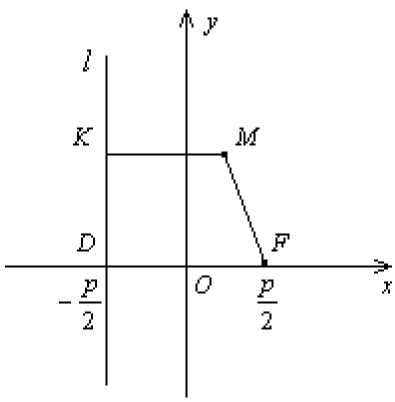


Рисунок 40. Построение параболы.

Каноническое уравнение параболы. $y^2 = 2px$

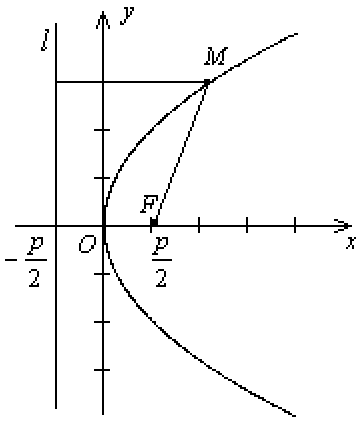


Рисунок 41. Парабола.

Задачи для самостоятельного решения.

1.1. Построить эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

1.2. Построить эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

1.3. Построить эллипс $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

1.4. Построить эллипс $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

1.5. Построить гиперболу $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и уравнения асимптот.

1.6. Построить гиперболу $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и уравнения асимптот.

1.7. Построить гиперболу $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-4)^2}{4}=1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и уравнения асимптот.

1.8. Построить гиперболу $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = -1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и уравнения асимптот.

1.9. Построить 4 параболы: $y^2 = 4x$, $y^2 = -4x$, $x^2 = 4y$, $x^2 = -4y$. Для каждой параболы найти координаты фокуса, уравнение директрисы, указать эксцентриситет и параметр.

1.10. Построить 4 параболы: $y^2 = 6x$, $y^2 = -6x$, $x^2 = 4y$, $x^2 = -4y$. Для каждой параболы найти координаты фокуса, уравнение директрисы, указать эксцентриситет и параметр.

1.11. Построить 4 параболы: $y^2 = 4x + 8$, $y^2 = -4x + 8$, $x^2 = 4y + 8$, $x^2 = -4y + 8$. Для каждой параболы найти координаты фокуса, уравнение директрисы, указать эксцентриситет и параметр.

Занятие №2. Общая теория кривых второго порядка.

1. Преобразование координат на плоскости.
2. Классификация кривых второго порядка.
3. Инварианты кривой второго порядка.
4. Приведение центральной кривой второго порядка к каноническому виду.
5. Приведение нецентральной кривой второго порядка к каноническому виду.
6. Задачи для самостоятельного решения.

Преобразования координат на плоскости.

Пусть на плоскости заданы две аффинные системы координат с началом в одной точке O: $(O,\overline{a_1},\overline{a_2})$ (старая система координат) и $(O,\overline{a_1'},\overline{a_2'})$ (новая система координат). Базисные векторы новой системы координат можно выразить через старые базисные векторы:

$$\begin{cases} \overline{a_1'} = t_{11}\overline{a_1} + t_{21}\overline{a_2} \\ \overline{a_2'} = t_{12}\overline{a_1} + t_{22}\overline{a_2} \end{cases} \quad \text{или} \quad (\overline{a'_1};\, \overline{a_2'}) = (\overline{a_1},\, \overline{a_2})\cdot T \text{, где} \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \text{ - матрица}$$

перехода от старого базиса к новому базису.

Тогда, как известно из курса алгебры, координаты точки преобразуются по правилу: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, где $(x;y)$ - координаты точки в старой системе координат, а $(x';y')$ - координаты точки в новой системе координат.

В общем случае, когда заданы две системы координат $(O,\overline{a_1},\overline{a_2})$ (старая система координат) и $(O',\overline{a_1'},\overline{a_2'})$ (новая система координат) с началами в разных точках, то координаты точки преобразуются по формуле:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, где $O' = (x_0; y_0)$ - координаты начала новой системы координат.

В случае, когда заданы две декартовы системы координат $(O, \overline{e_1}, \overline{e_2})$ (старая система координат) и $(O', \overline{e_1'}, \overline{e_2'})$ (новая система координат), остается справедливой формула

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

Заметим, что в это случае матрица $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ - это матрица перехода между двумя ортонормированными базисами, следовательно, T - ортогональная матрица.

Возможны два случая: $T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\det T = 1$ (геометрически представляет из себя поворот плоскости против часовой стрелки на угол α) и $T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\det T = -1$ (это комбинация поворота на угол α и отражения относительно прямой, заданной вектором $\overline{e_1}$).

Классификация кривых второго порядка.

Определение. ***Кривая второго порядка*** — геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (2.2)$$

в котором, по крайней мере, один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля.

Справедлива следующая теорема:

Теорема о классификации кривых второго порядка. Всякая кривая второго порядка это одна из следующих кривых:

1) эллипс;
2) мнимый эллипс;
3) точка;
4) гипербола;
5) пара пересекающихся прямых;
6) парабола;
7) пара параллельных кривых;
8) пара мнимых параллельных прямых;
9) пара совпадающих прямых

Инварианты кривой второго порядка.

Составим матрицу для уравнения (2.2) кривой второго порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Пример. Рассмотрим кривую $4x^2 + 6xy - 3y^2 - 5x + 4y + 10 = 0$.

Матрица этой кривой: $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5/2 \\ 3 & -3 & 2 \\ -5/2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

Особую роль в изучении кривой второго порядка играют инварианты – величины, которые не изменяются при преобразованиях плоскости (поворотов и параллельных переносов осей координат).

Будем использовать три инварианта:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Известно, что в случае, когда $I_2 \neq 0$ кривая второго порядка имеет единственный центр симметрии. Такая кривая второго порядка называется ***центральной***. Это эллипс, гипербола, мнимый эллипс, точка, пара пересекающихся прямых. В противном случае, кривая называется ***нецентральной*** (это парабола, параллельные прямые, совпадающие прямые).

В случае, когда $I_3 \neq 0$ кривая второго порядка называется невырожденной (эллипс, мнимый эллипс, гипербола, парабола). Если $I_3 = 0$, то кривая является вырожденной.

Таблица 5. Определение типа кривой второго порядка по инвариантам.

Невырожденные кривые		$I_3 \neq 0$
Название кривой	*Каноническое уравнение*	*Значение инвариантов*
эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$I_2 > 0,\ I_1 I_3 < 0$

<table>
<tr><td>мнимый эллипс</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$</td><td>$I_2>0,\ I_1I_3>0$</td></tr>
<tr><td>гипербола</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td>$I_2<0$</td></tr>
<tr><td>парабола</td><td>$y^2=2px$</td><td>$I_2=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вырожденные кривые</td><td>$I_3=0$</td></tr>
<tr><td>Точка (вырожденный эллипс)</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$</td><td>$I_2>0$</td></tr>
<tr><td>Пара пересекающихся прямых (вырожденная гипербола)</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td>$I_2<0$</td></tr>
<tr><td>Пара мнимых параллельных прямых</td><td>$y^2=-a^2$</td><td rowspan="3">$I_2=0$</td></tr>
<tr><td>Пара параллельных прямых</td><td>$y^2=-a^2$</td></tr>
<tr><td>Слившиеся прямые</td><td>$y^2=0$</td></tr>
</table>

Приведение центральной кривой второго порядка к каноническому виду.

Типичная задача теории кривых второго порядка состоит в следующем: дано уравнение (2.2), требуется найти каноническое уравнение кривой и систему координат, в которой кривая принимает канонический вид (каноническую систему координат).

Левую часть уравнения (2.2) обозначим через $F(x,y)$, тогда уравнение (2.2) записывается в виде:

$F(x,y)=0$

Выражение $f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ называется квадратичной частью, $2a_{13}x+2a_{23}y$ - линейной частью, a_{33} - свободным членом уравнения.

Преобразование системы координат сводится к комбинации поворота и параллельного переноса. Начнем с выполнения параллельного переноса системы координат в точку $O'(x_0;y_0)$, координаты преобразуются по формулам:

$$\begin{cases} x=x'+x_0 \\ y=y'+y_0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

Подставим (2.3) в (2.2). После раскрытия скобок и приведения подобных членов будем иметь:

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+2(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})x'+2(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23})y'+$$
$$+(a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33})=0 \qquad (2.4)$$

Заметим, что квадратичная часть сохранилась, а свободный член стал равен $F(x_0,y_0)=0$. Выберем начало новой системы координат так, чтобы линейная часть уравнения стала равной нулю, т. е. чтобы

$$\begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0 \\ a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0 \end{cases} \qquad (2.5)$$

Система (2.5) имеет единственное решение только при условии

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2.6)$$

Если условие (2.6) выполнено, то кривая является центральной (см. таблицу 5). Решив систему (2.5), мы получим точку $O'(x_0; y_0)$, которая называется центром кривой. Таким образом, перенеся начало в центр кривой, мы приведем уравнение (2.2) к виду:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + F(x_0, y_0) = 0 \qquad (2.7)$$

Далее выполним поворот системы координат, то есть приведем квадратичную часть $f(x', y') = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2$ к каноническому виду.

Матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Введя в рассмотрение линейный оператор φ с матрицей A, мы найдем ортогональный базис из собственных векторов $\overline{f_1}$, $\overline{f_2}$ с собственными значениями λ_1, λ_2.

Найденная система координат $(O', \overline{f_1}, \overline{f_2})$ является канонической системой координат, в которой уравнение кривой (2.2) принимает канонический вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + F(x_0, y_0) = 0 \qquad (2.8)$$

Преобразование системы координат имеет вид (3.1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad ,$$

где столбцы матрицы перехода T - это координаты собственных векторов $\overline{f_1}$, $\overline{f_2}$.

В уравнении (2.8) свободный член $F(x_0, y_0)$ можно по правилу $F(x_0, y_0) = \dfrac{I_3}{I_2}$.

Формулу легко получить исходя из уравнения (2.8):

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & F(x_0, y_0) \end{vmatrix} = I_3, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = I_2.$$

Пример. Найти канонический вид и каноническую систему координат кривой

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0 \qquad (2.9)$$

Решение.

Запишем матрицу кривой, вычислим инварианты:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{pmatrix}, \; I_1 = 5 + 8 = 13, \; I_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{vmatrix} = -36^2.$$

По таблице 5 кривая (2.9) есть эллипс. Выпишем матрицу квадратичной части, найдем собственные значения и собственные вектора:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9).$$

Собственные значения $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$,

собственные векторы $\overline{f_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{f_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Вычислим свободный член: $F(x_0, y_0) = \dfrac{I_3}{I_2} = -36$.

Подставим в уравнение (2.8): $4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$. Отсюда находим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

Осталось найти координаты центра новой системы координат. Решим систему (2.5):

$$\begin{cases}5x+2y-16=0\\2x+8y-28=0\end{cases}$$

Решение – это координаты центра новой системы координат: $O'(2;3)$.

Ответ: Каноническое уравнение: $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$, каноническая система координат $O'(2;3)$, $\overline{f_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\overline{f_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Приведение нецентральной кривой второго порядка к каноническому виду.

Пусть кривая (2.2) является нецентральной, то есть система (2.5) однозначно не разрешима, $I_2=0$.

Преобразование уравнения (2.2) начнем с приведения квадратичной части $f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ к каноническому виду. Как и в предыдущем случае, найдем собственные значения и собственные вектора линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}$. Одно из собственных значений равно нулю, поскольку $I_2=0$. Предположим, что $\lambda_1=0$, тогда в новой системе координат уравнение (2.2) принимает вид:

$$\lambda_2 y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0 \qquad (2.10)$$

Осталось выполнить параллельный перенос системы координат (с помощью выделения полного квадрата) и кривая будет приведена к каноническому виду.

Пример. Найти канонический вид и каноническую систему координат кривой

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0 \qquad (2.11)$$

Решение.

Запишем матрицу кривой, вычислим инварианты:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 7 \end{pmatrix},\ I_1 = 4 + 1 = 5,\ I_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ I_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -225.$$

По таблице 5 кривая (2.11) есть парабола.

Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5).$$

Собственные значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$,

собственные векторы $\overline{f_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Формулы преобразования координат имеют вид:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ или в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - 2y'}{\sqrt{5}} \\ y = \dfrac{2x' + y'}{\sqrt{5}} \end{cases} \qquad (2.12)$$

Подставим (2.12) в (2.11) (в квадратичную часть подставлять не надо, так как известно, что $f(x', y') = \lambda_2 y'^2$), после подстановки получим уравнение:

$5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0$. Преобразуем это уравнение к виду:

$$5\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 6\sqrt{5}\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 0.$$

Выполним параллельный перенос по формулам:

$$\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ y'' = y' - \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Получим уравнение параболы: $5y''^2 - 6\sqrt{5}x'' = 0$, в каноническом виде:

$$y''^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}x''.$$

Центр новой системы координат располагается в точке $O'(x' = \dfrac{\sqrt{5}}{5}; y' = \dfrac{\sqrt{5}}{5})$, его координаты в исходной системе вычисляются по формулам (2.12):

$$O'(x = -\frac{1}{5}; y = \frac{3}{5}).$$

Ответ: Каноническое уравнение: $y''^2 = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}x''$, каноническая система координат $O'(-\dfrac{1}{5}; \dfrac{3}{5})$, $\overline{f_1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f_2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения.

2.1 Определить тип кривой второго порядка, найти каноническое уравнение, каноническую систему координат, выписать преобразование, приводящие кривую к каноническому виду и построить:

1) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;

2) $5x^2+12xy-12x-12y-19=0$;

3) $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$;

4) $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$;

5) $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$;

6) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$;

7) $8x^2+6xy-26x-12y+11=0$;

8) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

9) $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$;

10) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$;

Занятие №3. Поверхности второго порядка

1. Классификация поверхностей второго порядка.

2. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.

3. Задачи для самостоятельного решения.

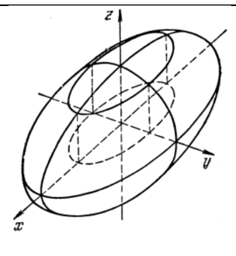
Классификация поверхностей второго порядка.

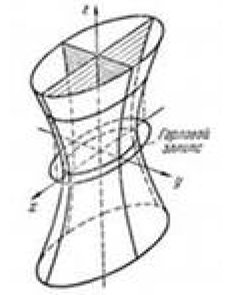
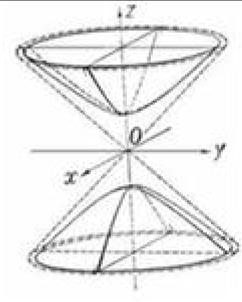
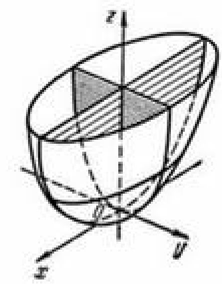
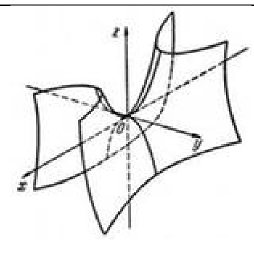
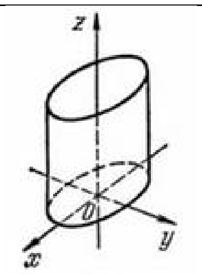
Определение. ***Поверхностью второго порядка*** называется множество точек 3-мерного действительного пространства, координаты которых в декартовой системе удовлетворяют алгебраическому уравнению 2-й степени

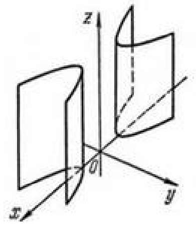
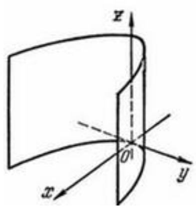
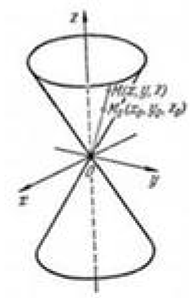
$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) может и не определять действительного геометрического образа, в таких случаях говорят, что уравнение (3.1) определяет мнимую поверхность второго порядка. В зависимости от значений коэффициентов общего уравнения (3.1) оно может быть преобразовано с помощью параллельного переноса и поворота системы координат на некоторый угол к одному из 17 приведенных ниже канонических видов.

Таблица 6. Классификация поверхностей второго порядка.

каноническое уравнение	название	чертеж
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	эллипсоид	

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	мнимый эллипсоид	-
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	однополостный гиперболоид	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	двуполостный гиперболоид	
$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0$	эллиптический параболоид	
$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0$	гиперболический параболоид	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	эллиптический цилиндр	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	мнимый эллиптический цилиндр	-

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	гиперболический цилиндр	
$y^2=2px$	параболический цилиндр	
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$	коническая поверхность	
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$	мнимая коническая поверхность	
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$	пара пересекающихся плоскостей	
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$	пара мнимых пересекающихся плоскостей	
$\dfrac{x^2}{a^2}=1$	пара параллельных плоскостей	
$\dfrac{x^2}{a^2}=-1$	пара мнимых параллельных плоскостей	
$x^2=0$	пара совпадающих плоскостей	

Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.

Решение задачи о приведении уравнения (3.1) к каноническому виду во многом схоже с решением аналогичной задачи для кривой второго порядка. Будем предполагать, что уравнение (3.1) задано в начальной декартовой системе координат $(O,\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3})$. При переходе в новую декартову систему координат уравнение (3.1) преобразуется подстановкой

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

где T – ортогональная 3х3 матрица.

Как и в случае кривой второго порядка, рассмотрим квадратичную часть уравнения (3.1):

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \qquad (3.3)$$

Матрица квадратичной части:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

Найдем ее собственные значения $\lambda_1,\lambda_2,\ \lambda_3$ и ортонормированный базис из собственных векторов $\overline{f_1},\overline{f_2},\overline{f_3}$. Если все три собственных значения не равны нулю, то поверхность является эллипсоидом или одним из гиперболоидов или конусом. Если два собственных значения не равны нулю и одно равно нулю, то поверхность или один из параболоидов или цилиндр над центральной кривой второго порядка. Если одно собственное значение не равно нулю и два равны нулю, то поверхность является цилиндром над нецентральной кривой.

Перейдем в новую декартову систему координат со старым центром O и новым базисом $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{pmatrix}$, $\overline{f}_2 = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \end{pmatrix}$, $\overline{f}_3 = \begin{pmatrix} t_{13} \\ t_{23} \\ t_{33} \end{pmatrix}$.

Координаты преобразуются по формуле $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$.

После перехода к новой системе координат уравнение (3.1) преобразуется к виду:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{24}z' + a'_{44} = 0, \qquad (3.5)$$

где λ_1, λ_2, λ_3 - это собственные значения матрицы квадратичной части (3.4).

Далее, нахождение канонической формы и канонического базиса во многом сводится к переносу начала координат.

Если все три собственных значения не равны нулю, то решение задачи можно упростить, воспользовавшись тем, что в новой системе координат уравнение (3.1) примет вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0, \qquad (3.6)$$

где $I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$, $I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Из уравнения (3.6) легко найти каноническую форму уравнения поверхности.

Центр канонической системы координат (в случае ненулевых собственных значений), является центром симметрии поверхности второго порядка и находится из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0 \end{cases} \qquad (3.7)$$

Рассмотрим несколько примеров приведения уравнения поверхности к каноническому виду.

Пример 1. Определить тип поверхности второго порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

$$5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy - 4yz + 18x - 24y - 6z + 30 = 0$$

Решение.

Матрица квадратичной части $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения и соответствующие им собственные вектора (собственные вектора должны образовывать ортонормированный базис): $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 9$ и

$$\overline{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overline{f}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overline{f}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения канонической формы вычислим I_3 , I_4 :

$$I_3=\begin{vmatrix}5 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 7\end{vmatrix}=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=162,\; I_4=\begin{vmatrix}5 & -2 & 0 & 9\\ -2 & 6 & -2 & -12\\ 0 & -2 & 7 & -3\\ 9 & -12 & -3 & 30\end{vmatrix}=972.$$

Подставим в (3.6) : $3x'^2+6y'^2+9z'^2+6=0$.

Отсюда каноническое уравнение поверхности: $\dfrac{x'^2}{2}+\dfrac{y'^2}{1}+\dfrac{z'^2}{2/3}=1.$

Поверхность – эллипсоид. Найдем центр новой системы координат, воспользовавшись формулами (3.7):

$$\begin{cases}5x_0-2y_0+9=0\\ -2x_0+6y_0-2z_0-12=0\\ -2y_0+7z_0-3=0\end{cases}\Rightarrow O'(-1{,}2{,}1).$$

Ответ: поверхность эллипсоид, каноническое уравнение $\dfrac{x'^2}{2}+\dfrac{y'^2}{1}+\dfrac{z'^2}{2/3}=1$,

каноническая система координат $O'(-1{,}2{,}1)$, $\overline{f}_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overline{f}_2=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$,

$\overline{f}_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Пример 2. Определить тип поверхности второго порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

$$2x^2-7y^2-4z^2+4xy+20yz-16xz+60x-12y+12z-90=0 \qquad (3.8)$$

Решение.

Матрица квадратичной части $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix}$. Найдем ее собственные значения и соответствующие им собственные вектора (собственные вектора должны образовывать ортонормированный базис): $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -18$, $\lambda_3 = 0$ и

$\overline{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Перейдем в новую систему координат со старым центром $O(0;0;0)$ и новым базисом $\overline{f_1}$, $\overline{f_2}$ $\overline{f_3}$. Формула преобразования координат (3.2) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad (3.9)$$

После подстановки (3.9) в (3.8) уравнение поверхности примет вид:

$$9x'^2 - 18y'^2 + 60\cdot\frac{1}{3}(-2x' + y' - 2z') - 12\cdot\frac{1}{3}(x' - 2y' - 2z') +$$
$$+12\cdot\frac{1}{3}(2x' + 2y' - z') - 90 = 0$$

Уравнение поверхности после преобразования:

$$9x'^2 - 18y'^2 - 36x' + 36y' - 36z' - 90 = 0$$

Выделив полный квадрат, получим:

$$9(x'-2)^2 - 18(y'-1)^2 - 36(z'+3) = 0$$

После параллельного переноса системы координат:

$$\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' - 1 \\ z'' = z' + 3 \end{cases} \qquad (3.10)$$

Уравнение поверхности принимает вид:

$$9x''^2 - 18y''^2 - 36z'' = 0$$

или в каноническом виде:

$$\frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{1} = 2z''$$

Обращаясь к таблице 6, узнаем, что поверхность – гиперболический параболоид.

Осталось найти центр новой системы координат. Центр находится в точке $O'(x'' = 0; y'' = 0; z'' = 0)$. После подстановки в (3.10) находим: $O'(x' = 2; y' = 1; z'' = -3)$ и , наконец, его координаты в исходной системе координат можно найти, подставив в формулу (3.9): $O'(x = 1; y = 2; z = 3)$.

Ответ: Гиперболический параболоид $\frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{1} = 2z''$, каноническая система координат $O'(1;2;3)$, $\overline{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения.

3.1Построить поверхности:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$;

2) $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$;

3) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$;

4) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$;

5) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+z^2=1$;

6) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$;

7) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-z^2=1$;

8) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=-1$;

9) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$;

10) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=0$;

11) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=-1$;

12) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=0$;

13) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-z^2=0$

14) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+z^2=0$

3.2 Построить цилиндрические поверхности:

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

2) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;

3) $y^2+z^2=1$;

4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$;

5) $y^2-z^2=4$;

6) $xz=4$;

7) $y^2=6x$;

8) $x^2=4z$.

3.3 Построить области, ограниченные следующими поверхностями:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = z$;

2) $z = x^2 + y^2$, $x = y$, $x = 1$, $z = 0$, $y = 0$;

3) $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$;

4) $z = x^2$, $z = 2 - x^2$;

5) $x^2 + y^2 = 4$, $z^2 + y^2 = 4$.

3.4 Определить тип поверхности второго порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$
2) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$
3) $7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$
4) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$

Расчетная работа.

Буква a – последняя ненулевая цифра зачетной книжки/студенческого билета, буква b – предпоследняя, буква c – предпредпоследняя (все цифры ненулевые).

1. Построить кривые второго порядка. Найти фокусы, эксцентриситеты, уравнения директрис и асимптот.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$
$y^2=2ax$
$x^2=-2by$

2. Определить тип поверхности второго порядка. Построить.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$
$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=2y$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$

$\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
$y^2=2az$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$

Литература.

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— 10-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 304 с.

2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов. — 7-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 224 с. — (Курс высшей математики и математической физики.)

3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - 13-е изд., стереотип. — М.: Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1980. — 240с.

4. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. -3 изд. -М., Наука, 1968 год. - 176 с.

5. Просветов Г. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения. - М., Альфа-Пресс,2009. - 208 с.

6. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 31-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2003. — 336 с, ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

Учебное издание

Коновалова Елена Игоревна

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ-1

**(ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА,
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ,
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ)**

Учебное пособие

Самарский государственный

аэрокосмический университет.

443086 Самара, Московское шоссе, 34.