13. Свойства функций, имеющих конечный предел.

<u>Теорема 1</u> (об арифм. св-вах предела ф-ии в т.). $f, g: X \to \mathbb{R}$, $x=a$ – предельн. т. мн-ва X ($a \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$), $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ ($b, c \in \mathbb{R}$). Тогда:

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c, \quad \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = bc,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \ (c \neq 0).$$

<u>Док-во</u>: см. пособие И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко „Мат. ан. Предел и непр-ть ф-ии одной переменной: теория и задачи".

<u>Теорема 2</u> (о пределе сложной ф-ии). Пусть $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, тогда $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = f(x_0)$.

<u>Док-во</u>: fix $\varepsilon > 0$. $\exists\, \delta_1 > 0: \ \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(x_0) \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\exists\, \delta > 0: \ \forall t \in \mathring{U}_\delta(t_0) \ |\varphi(t) - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(\varphi(t)) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = f(x_0).$$

Теорема 3 (предельн. переход в нерав-ах). $f, g : X \to \mathbb{R}$, $x=a$ — пред. т. X, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Если $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ $f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow b \geqslant c$.

$$\{ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \quad f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \geqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

Док-во: см. пособие.

Замечание: $f(x) > g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \geqslant \lim_{x\to a} g(x)$

Пример: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$, $f(x) > g(x)$ $\forall x > 0$,

но $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Теорема 4 (о „зажатой" ф-ии). $f, g, h: X \to \mathbb{R}$, $x = a$ – пред. т. X, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = b$; $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap X$ $f(x) \le h(x) \le g(x)$, тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} h(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$.

Док-во: см. пособие.

Опр: $f: X \to \mathbb{R}$, $A \subseteq X$. f – огр. св. (сн.) на мн-ве $A \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$): $f(x) \le M$ ($f(x) \ge m$) $\forall x \in A$.

M – верхняя грань (граница) ф-ии f на мн-ве A;

m – нижняя —‖—

f – огр. на $A \Leftrightarrow f$ – огр. св. и сн. на A.

Теорема 5 (о локальной ограниченности имеющей в точке конеч. предел ф-ии).

Док-во: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b,\ b \in \mathbb{R} \Rightarrow \varepsilon = 1\ \exists\, \delta > 0:\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap X$

$|f(x) - b| < 1$, $b - 1 < f(x) < b + 1$

$a \notin X$, $\forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap X$ $m \le f(x) \le M$, где $m = b - 1$, $M = b + 1$

$a \in X$, $\forall x \in U_\delta(a) \cap X$ $m \le f(x) \le M$, где $m = \min\{f(a), b - 1\}$,

$M = \max\{f(a), b + 1\}$. ▶

14. Замечательные пределы.

Теорема 1 (1-й замеч. предел): $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

◀ см. пособие ▶

Следствие: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

Теорема 2 (2-й замеч. предел): $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Следствие: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\right)$;