Общие сведения

Блок №1, 1 семестр.

Поля и линейные пространства

Лекция №1

Обозначения

$\forall - \text{любое}$

$\exists - \text{существует}$

$\in - \text{принадлежит}$

$\notin - \text{не} \quad \text{принадлежит}$

Обозначения

Заглавные латинские буквы (A, …)- множества

Прописные латинские буквы (a,b…) – элементы множества

$\bigcup - \text{объединение множеств}$

$\bigcap - \text{пересечение множеств}$

$\times - \text{декартово произведение}$

множеств

Поле

Определение. Множество К называется полем, если в нем введены две бинарные операции: сложение $+ : K \times K \to K$ и умножение $\cdot : K \times K \to K$ удовлетворяющие аксиомам:

$$1. \textit{Коммутативность сложения}$$

$$a + b = b + a, \quad \forall a, b \in K$$

2.*Ассоциативность сложения*

$$(a+b)+c=a+(b+c), \ \ \forall a,b,c\in K$$

3.*Существование нуля*:

$$\exists\, 0\in K:\ a+0=a,\ \forall a\in K$$

4. *Существование противоположного элемента*:

$$\forall a\in K\ \exists b\in K: a+b=0$$

$$(b:=-a)$$

5. *Коммутативность умножения*:

$$ab = ba, \ \forall a, b \in K$$

6. *Ассоциативность умножения*

$$(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in K$$

7. *Дистрибутивность*:

$$a(b+c) = ab + ac, \ \forall a, b, c \in K$$

8. *Существование единицы*:

$$\exists 1 \in K, 1 \neq 0 : 1 \cdot a = a, \ \forall a \in K$$

9. *Существование обратного элемента*

$$\forall a \in K, \, a \neq 0 \ \exists b \in K : \ a \cdot b = 1 \ \ (b := a^{-1})$$

Простейшие свойства поля

1. Нулевой элемент единственный
2. Противоположный элемент единственный.
3. Единичный элемент единственный.
4. Обратный элемент единственный.

Определение вычитания и деления в поле

Определение.

$$a-b:=a+(-b)$$

$$\frac{a}{b}:=a\cdot b^{-1}$$

Замечание. Такое определение корректно, благодаря единственности противоположного и обратного элемента.

Примеры полей

Множество R – вещественных чисел является полем

Множество Q - рациональных чисел является полем.

Множество F_2 ={0,1} – из двух элементов является полем

Линейное пространство.

Определение. Множество V называется линейным пространством над полем K, если в нем введены две бинарные операции: сложение $+ : V \times V \to V$ и умножение на число из поля $\cdot : K \times V \to V$ удовлетворяющие аксиомам:

1. *Коммутативность сложения*

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a},\ \forall \overline{a},\overline{b}\in V$$

2. *Ассоциативность сложения*:

$$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c}),\ \forall \overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V$$

3. *Существование нуля*:

$$\exists\, \overline{0}\in V : \overline{a}+\overline{0}=\overline{a},\ \forall \overline{a}\in V$$

4. *Существование противоположного элемента*: $\forall \overline{a} \in V \ \exists \overline{b} \in V : \overline{a} + \overline{b} = \overline{0}$

5. *Умножение на* 1 *из поля*:

$1 \cdot \overline{a} = \overline{a}, \ \forall \overline{a} \in V$

6. *Дистрибутивность*: $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha \overline{a} + \beta \overline{a}$

7. $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha \overline{a} + \alpha \overline{b}$

8. $\alpha(\beta \overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}, \ \forall \alpha, \beta \in K, \forall \overline{a}, \overline{b} \in V$

Простейшие следствия из аксиом ЛП

1. Нулевой элемент единственный.
2. Противоположный вектор единственный.

Определение: $\overline{a}-\overline{b}:=\overline{a}+(-\overline{b})$

3. $0\cdot\overline{a}=\overline{0},\ \forall\overline{a}\in V$

4. $-\overline{a}=(-1)\overline{a},\ \forall\overline{a}\in V$

5. $\alpha\cdot\overline{0}=\overline{0},\ \forall\alpha\in K$

Линейная зависимость и линейная независимость систем векторов

Лекция №2

Линейная комбинация векторов

V- ЛП $\quad \overline{a}_1, \overline{a}_2 \ldots \overline{a}_n \in V - \textit{набор векторов}$

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in K - \textit{набор чисел}$

Определение. Выражение вида

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a}_2 + \ldots \alpha_n \overline{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{a_i}$$

называется линейной комбинацией векторов

Линейная оболочка векторов

Определение. Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_n}$ - система векторов. Множество <u>всех</u> линейных комбинаций данной системы векторов называют линейной оболочкой системы векторов: $< \overline{a}_1, \overline{a}_2 \ldots \overline{a}_n >$

Выражение вектора через линейную комбинацию

Определение. Если некоторый вектор $\overline{a} \in V$ представлен в виде

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + \ldots + \alpha_n \overline{a}_n$$

то говорят, что вектор $\overline{a}$ линейно выражается через вектора $\overline{a}_1, \overline{a}_2 \ldots \overline{a}_n$

Линейная зависимость

Определение. Система векторов называется $\overline{a_1}, \overline{a_2} \ldots \overline{a_n}$ линейно зависимой, если существует <u>ненулевой</u> набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ таких, что

$$\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots \lambda_n \overline{a}_n = \overline{0}$$

Линейная независимость

Определение. Система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2} \ldots \overline{a_n}$ называется линейно независимой, если

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots \lambda_n \overline{a_n} = \overline{0}$$

тогда и только тогда, когда все числа $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ равны нулю.

Алгебраические свойства систем линейных векторов.

1. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.
2. Если часть системы векторов (подсистема) линейно зависима, то и вся система векторов тоже линейно зависима.
3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда существует вектор, линейно выражающийся через остальные вектора

Геометрические свойства систем векторов.

1. Система состоящая из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.
2. Система состоящая из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда вектора коллинеарны.
3. Система состоящая из трех векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда три вектора компланарны.

Базис линейного пространства

V – ЛП

Определение. Система векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2} \ldots \overline{e_n},$

$\overline{e_i} \in V$ называется базисом ЛП V,

если эта система ЛНЗ и любой вектор из V линейно выражается через $\overline{e_1}, \overline{e_2} \ldots \overline{e_n}$

Замечание. В ЛП V базис определяется не единственным образом (можно выбрать несколько базисов), но количество базисных векторов n остается неизменной величиной.

Размерность линейного пространства

Определение. Количество векторов в базисе называется размерностью линейного пространства V.

Обозначение. dimV=n.

Координаты вектора в базисе

Из определения базиса ЛП V следует, что любой вектор в этом ЛП линейно выражается через базисные векторы :

$$\overline{x} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n \overline{e}_n$$

Определение. Координатами вектора x называются коэффициенты в разложении по базисным векторам: $\overline{x} = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$

Координаты вектора в базисе

Замечание. Координаты вектора x зависят от выбора базиса. В разных базисах у одного и того же вектора x разные координаты.

Системы координат

Лекция №3

Координаты точки М

Чтобы определить координаты произвольной точки *M*, принадлежащей плоскости, нужно определить координаты вектора *OM*. Координаты вектора – это коэффициенты в разложении по базисным векторам.

Декартова система координат

Выберем на плоскости произвольным образом точку *O*, эту точку будем называть началом координат. От этой точки отложим два равных по длине перпендикулярных вектора, обозначим их $\bar{i}$ и $\bar{j}$

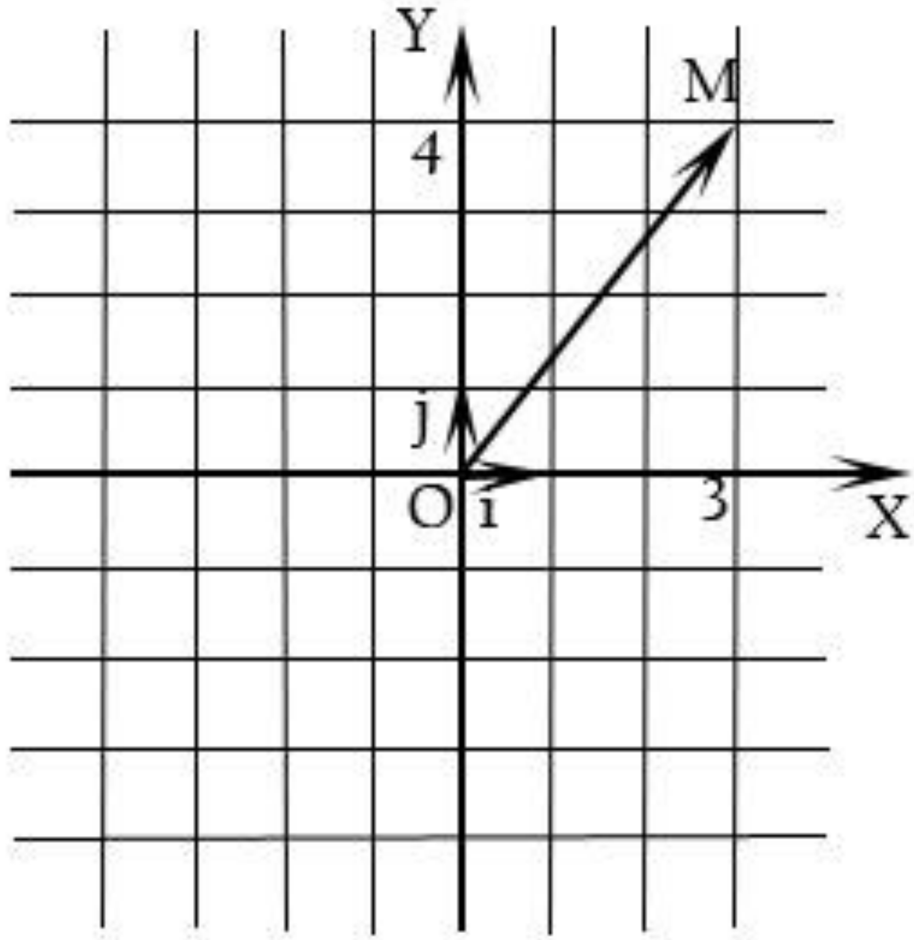
Набор $(O, \bar{i}, \bar{j})$

задает декартову систему координат на плоскости.

Оси координат

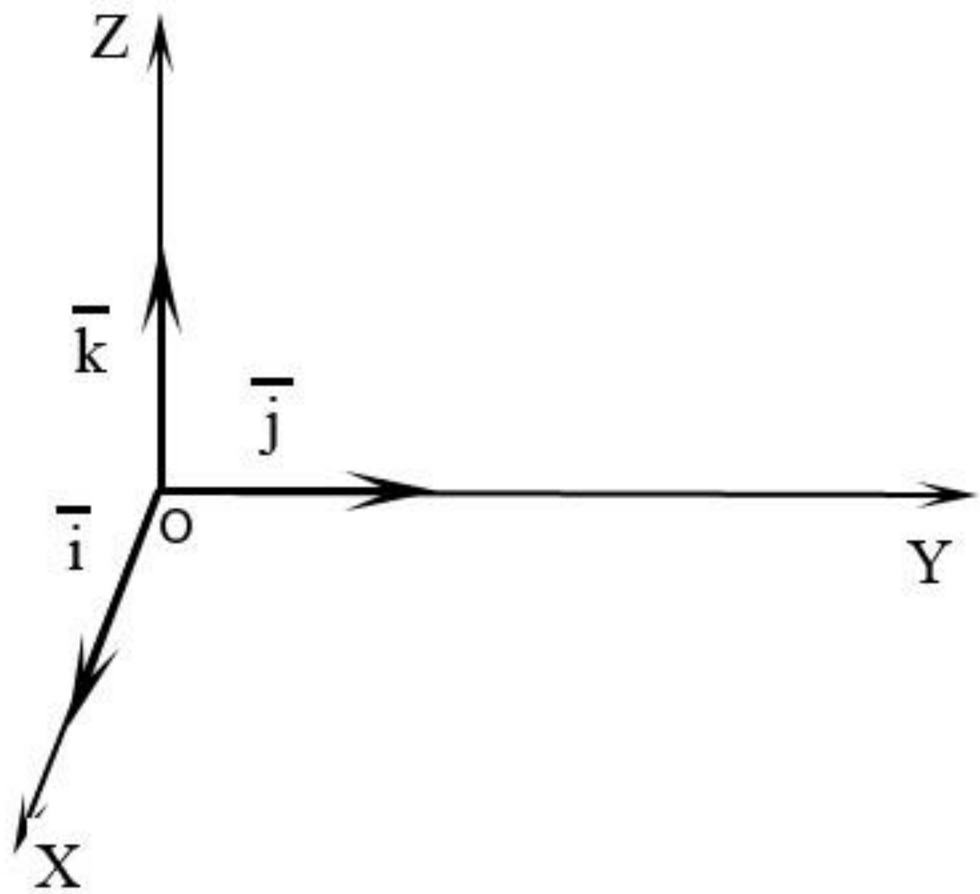
Для большей наглядности вводят понятие осей координат. Через точку *O* в направлении вектора *i* проводят прямую с заданным направлением (ось OX), в направлении вектора *j* проводят прямую с заданным направлением (ось OY). Вся плоскость разбивается на квадраты. Чтобы определить координаты точки достаточно спроецировать вектор на ось OX и ось OY.

Координаты на плоскости



Декартовы координаты в пространстве

Декартова система координат в пространстве состоит из начала координат (точки *O*), и трех равных по длине взаимно перпендикулярных векторов *i, j, k*. Ось OX направлена вдоль вектора *i*, ось OY направлена вдоль вектора *j* , ось OZ направлена вдоль вектора *k*.


Z
k
j
i
O
Y
X

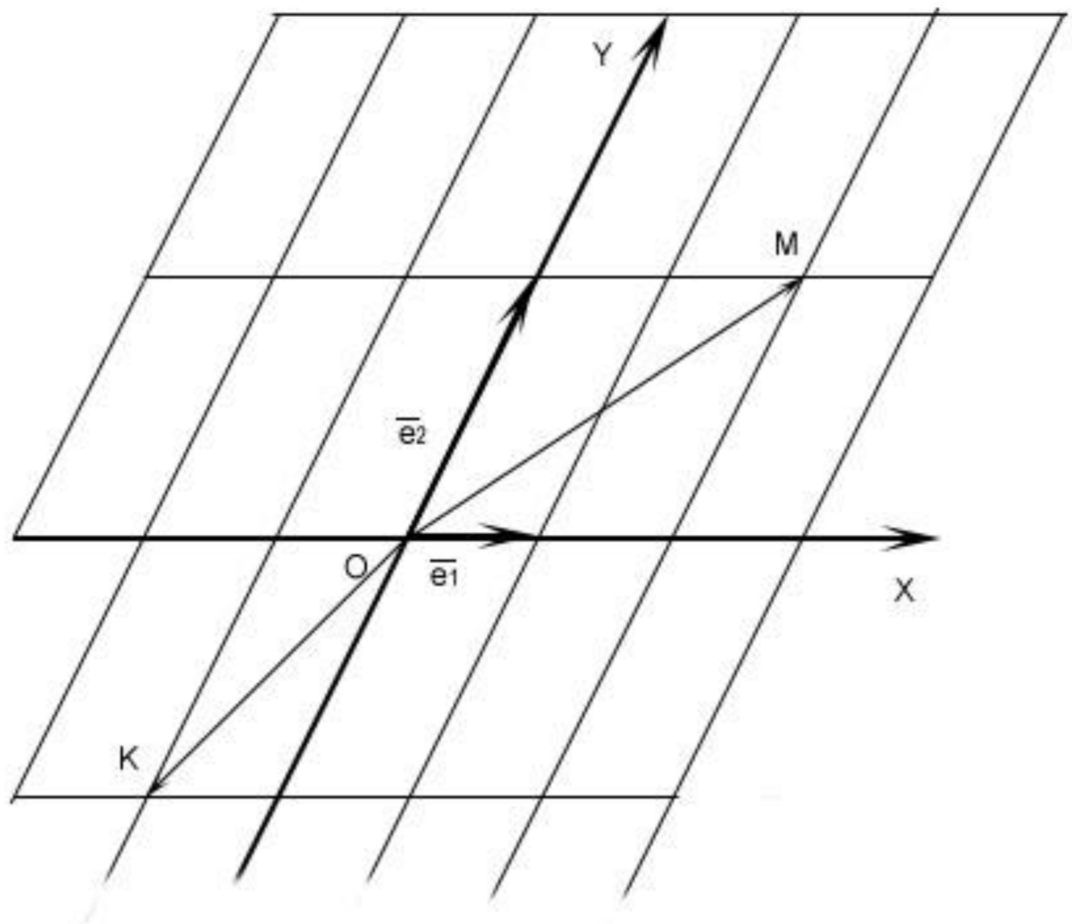
Правая тройка векторов

Набора *O, i, j, k* достаточно для того, чтобы определить координаты произвольной точки *M* пространства . Однако, как правило, на систему координат налагают ещё одно условие: если смотреть из конца вектора *k* , поворот от вектора *i* к вектору *j* должен происходить против часовой стрелки.

Аффинная система координат

Аффинная система координат на плоскости состоит из начала координат (точки *O*) и двух неколлинеарных векторов e_1 и e_2. Ось OX направлена вдоль вектора e_1, ось OY направлена вдоль вектора e_2. Координаты произвольной точки *M* определяются как координаты вектора *OM*. При этом всю плоскость можно разбить на параллелограммы, помогающие определить координаты точки.

Аффинная система координат на плоскости



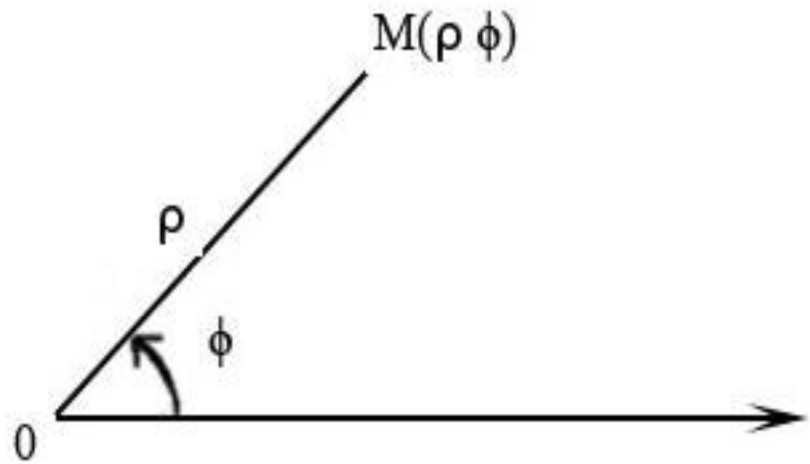
Аффинная система координат в пространстве

В пространстве аффинная система координат состоит из начала координат (точки *O*) и трех некомпланарных векторов e_1 , e_2 и e_3. Ось OX направлена вдоль вектора e_1 , ось OY направлена вдоль вектора e_2, ось OZ направлена вдоль вектора e_3.

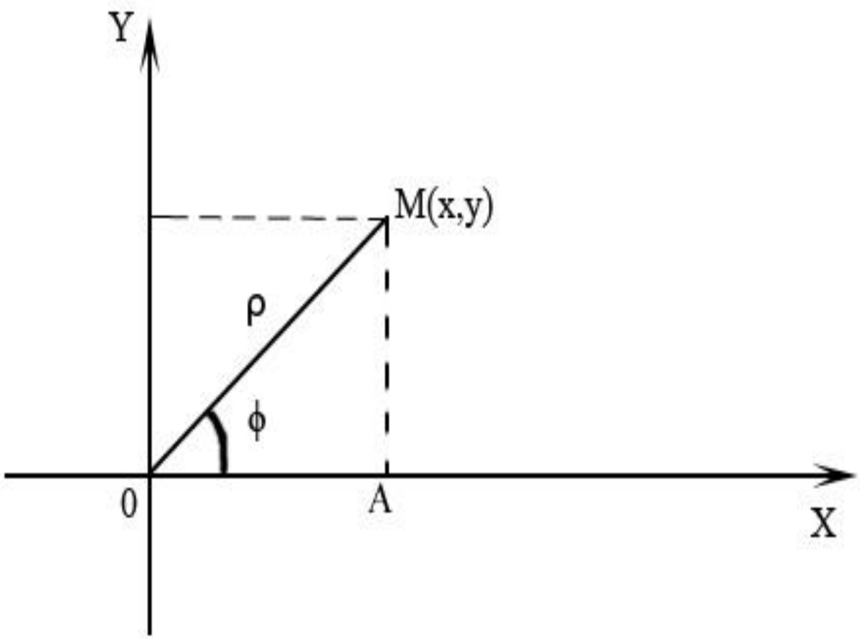
Полярная система координат

Чтобы задать полярную систему координат на плоскости, достаточно выбрать начало координат (точку *O*) и из этой точки провести луч (полярную ось). Координатами произвольной точки *M* являются два числа ρ и ф, где ρ- это расстояние от точки *O* до точки *M*, а ф- это угол поворота полярной оси против часовой стрелки до луча *OM* .

Полярная система координат



Переход от декартовой системы координат к полярной



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$