Распределения.

Рассмотрим распределения предметов по некоторым объектам и подсчитаем количество таких распределений в различных случаях. В качестве модели выберем распределение шаров по ящикам. Будем различать случаи, когда шары различимы или неразличимы, а также ящики различимы или неразличимы. Отдельно разберём случаи, когда допускаются пустые ящики или каждый ящик не пуст. Количество распределений, в которых каждый ящик не пуст, будем помечать символом *.

Пусть имеется n шаров и k ящиков.

- ***Шары различимы, ящики различимы (U).***

В этом случае количество распределений n шаров по k ящикам будем обозначать $U(n,k)$, если допускаются пустые ящики или $U^*(n,k)$, если каждый ящик должен быть не пуст.

Подсчитаем $U(n,k)$.

Так как каждый из n шаров может быть помещён в любой из k ящиков, то, по правилу произведения, общее число способов распределения равно $\underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{n \text{ сомножителей}} = k^n$.

Значит,
$$U(n,k) = k^n \qquad \textbf{(1)}$$

Подсчитаем $U^*(n,k)$.

Для нахождения $U^*(n,k)$ воспользуемся принципом включений и исключений. Согласно нему, для отыскания количества распределений, когда ни один ящик не пуст, из общего числа распределений n различимых шаров по k различимым ящикам, равного k^n вычитаем случаи, когда один ящик пуст. Этот пустой ящик из k возможных можно выбрать C_k^1 числом способов, а в оставшиеся $k-1$ ящик n шаров можно распределить $(k-1)^n$ числом способов. Затем, два пустых ящика из k возможных можно выбрать C_k^2 числом способов, а в оставшиеся $k-2$ ящика n шаров можно распределить $(k-2)^n$

числом способов, и слагаемое $C_k^2(k-2)^n$ войдёт в сумму со знаком «плюс», и так далее. В результате получаем формулу

$$U^*(n,k) = k^n - C_n^1(k-1)^n + C_n^2(k-2)^n - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} \quad \textbf{(2)}$$

Формулу (4) можно записать в виде

$$U^*(n,k) = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^n C_k^i (k-i)^n \quad \textbf{(2')}$$

- ***Шары различимы, ящики неразличимы (V).***

В этом случае количество распределений n шаров по k ящикам будем обозначать $V(n,k)$, если допускаются пустые ящики или $V^*(n,k)$, если каждый ящик должен быть не пуст.

Подсчитаем $V^*(n,k)$.

Количество распределений $V^*(n,k)$ меньше, чем $U^*(n,k)$ в $k!$ раз, так как в случае $V^*(n,k)$ перестановка k ящиков местами не даёт нам нового распределения.

Итак,

$$V^*(n,k) = \frac{U^*(n,k)}{k!} \quad \textbf{(3)}$$

Подсчитаем $V(n,k)$.

Количество распределений $V(n,k)$ получаем, суммируя количества $V^*(n,k)$ распределений, когда ни один из k ящиков не пуст, с числом $V^*(n,k-1)$ распределений, когда ровно один ящик пуст, и так далее. В результате получаем формулу

$$V(n,k) = V^*(n,k) + V^*(n,k-1) + V^*(n,k-2) + \ldots + V^*(n,1) \quad \textbf{(4)}$$

Или

$$V(n,k) = \sum_{i=1}^{k} V^*(n,i) \quad \textbf{(4')}$$

Пример.

Сколькими способами можно распределить 6 различных открыток в 4 1) различных; 2) неразличимых конвертов, если:

а) все конверты непусты; б) допускаются пустые конверты. (Всего рассмотреть 4 случая).

1б) Если конверты различимы и допускаются пустые конверты, то число способов распределения равно $U(6,4)=4^6=4096;$

1а) если конверты различимы, и все они должны быть непусты, то число способов распределения равно

$$U^*(6,4)=C_4^0 4^6-C_4^1 3^6+C_4^2 2^6-C_4^3=4096-4\cdot 729+6\cdot 64-4=1560;$$

2а) если конверты неразличимы, и все они должны быть непусты, то число способов распределения равно

$$V^*(6,4)=\frac{U^*(6,4)}{4!}=\frac{1560}{24}=65;$$

2б) если конверты неразличимы и допускаются пустые конверты, то число способов распределения равно

$$V(6,4)=V^*(6,4)+V^*(6,3)+V^*(6,2)+V^*(6,1)=$$

$$=65+\frac{U^*(6,3)}{3!}+\frac{U^*(6,2)}{2!}+U^*(6,1)=$$

$$=65+\frac{C_3^0\cdot 3^6-C_3^1\cdot 2^6+C_3^2\cdot 1^6}{6}+\frac{C_2^0\cdot 2^6-C_2^1}{2}+C_1^0=$$

$$=65+\frac{1\cdot 729-3\cdot 64+3}{6}+\frac{64-2}{2}+1=65+90+31+1=187.$$

Ответ: а2) 4096; а1) 1560; б1) 65; б2) 187.

• ***Шары неразличимы, ящики различимы (T).***

В этом случае количество распределений n шаров по k ящикам будем обозначать $T(n,k)$, если допускаются пустые ящики или $T^*(n,k)$, если каждый ящик должен быть не пуст.

Подсчитаем $T(n,k)$.

Каждому распределению n неразличимых шаров по k различимым ящикам в случае, когда допускаются пустые ящики, поставим в соответствие перестановку n неразличимых точек и $k-1$ перегородки.

$$\underset{1}{\bullet}\ \underset{2}{\bullet}\ \bullet\ \underset{1}{\Big|}\ \bullet\ \bullet\ \underset{2}{\Big|}\underset{3}{\Big|}\ \bullet\ldots\bullet\ \underset{k-1}{\Big|}\ \bullet\ \underset{n}{\bullet}$$

Количество точек, расположенных левее первой перегородки, соответствует количеству шаров в 1-м ящике, число точек, расположенных между первой и второй перегородками, соответствует количеству шаров во 2-м ящике,…, количество точек, расположенных правее последней перегородки, соответствует количеству шаров в $k-$м ящике. Если между двумя стоящими рядом перегородками с номерами $i-1$ и i нет точек, это означает, что $i-$тый ящик пуст.

Отсутствие точек перед первой перегородкой означает, что первый ящик пуст, а отсутствие точек правее последней перегородки означает, что $k-$й ящик не содержит шаров.

Очевидно, что таким образом установленное соответствие является биекцией.

Согласно формуле перестановок с повторениями, количество перестановок вышеуказанных точек и перегородок, равно $P(n,k-1)=\dfrac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}=C_{n+k-1}^{k-1}$.

Значит, $$T(n,k)=C_{n+k-1}^{k-1} \qquad \textbf{(5)}$$

Подсчитаем $T^*(n,k)$.

Для нахождения $T^*(n,k)$ будем использовать те же самые точки и перегородки. Так как ни один ящик не должен пустовать, никакие две перегородки не должны стоять рядом. Этого можно добиться, если выберем из $n-1$ промежутка между точками $k-1$ позицию и расставим туда перегородки.

$$\bullet \underset{1}{\ } \bullet \underset{2}{\ } \bullet \underset{1}{\Big|} \bullet\ \bullet \underset{2}{\Big|} \bullet\ldots\bullet \underset{k-1}{\Big|} \bullet \underset{n-1}{\ } \bullet$$

Количество способов выбора из $n-1$ промежутка между точками $k-1$ позиции равно числу сочетаний $C_{n-1}^{k-1}=\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$.

Значит, $$T^*(n,k)=C_{n-1}^{k-1} \qquad \textbf{(6)}$$

- ***Шары неразличимы, ящики неразличимы (W).***

В этом случае количество распределений n шаров по k ящикам будем обозначать $W(n,k)$, если допускаются пустые ящики или $W^*(n,k)$, если каждый ящик должен быть не пуст.

Число $W^*(n,k)$ равно количеству решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n \qquad \textbf{(7)}$$

где решения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаем совпадающими, а $x_i \in N$.

Сделаем замену $\tilde{x}_i = x_i - 1$. Подставляя $x_i = \tilde{x}_i + 1$ в формулу (7), получим $\tilde{x}_1 + 1 + \tilde{x}_2 + 1 + \ldots + \tilde{x}_k + 1 = n$ или

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{x}_k = n - k \qquad \textbf{(8)}$$

где $\tilde{x}_i \in N_0$. Число $W(n-k,k)$ равно количеству решений уравнения (8), где решения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаем совпадающими, а $\tilde{x}_i \in N_0$. Замена $\tilde{x}_i = x_i - 1$ задаёт биекцию между множествами решений уравнения (7) и (8). Следовательно, справедлива формула $W^*(n,k) = W(n-k,k)$ **(9)**

Количество распределений $W(n,k)$ может быть получено, суммируя количества $W^*(n,k)$ распределений, когда ни один из k ящиков не пуст, с числом $W^*(n,k-1)$ распределений, когда ровно один ящик пуст, и так далее. В результате получаем формулу

$$W(n,k) = W^*(n,k) + W^*(n,k-1) + W^*(n,k-2) + \ldots + W^*(n,1) \qquad \textbf{(10)}$$

Или
$$W(n,k) = \sum_{i=1}^{k} W^*(n,i) \qquad \textbf{(10}'\textbf{)}$$

Формулы (9) и (10) позволяют сводить вычисления при больших значениях n и k к меньшим значениям этих переменных.

Пример.

Сколькими способами можно представить число 13 в виде 4

а) неотрицательных, б) положительных целых слагаемых,

если представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются

1) различными 2) одинаковыми. (Всего рассмотреть 4 варианта)

Данная задача равносильна задаче распределения 13 неразличимых шаров (т.е. единиц, образующих число 13) по 4 ящикам (4 слагаемым).

1а) Если слагаемые неотрицательны, а представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются различными, то количество различных способов представления числа 13 в виде суммы 4 слагаемых равно

$$T(13,4) = C_{13+4-1}^{4-1} = C_{16}^{3} = \frac{16!}{3!13!} = 560.$$

1б) Если слагаемые положительны, а представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются различными, то количество различных способов представления числа 13 в виде суммы 4 слагаемых равно

$$T^*(13,4) = C_{13-1}^{4-1} = C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!9!} = 220.$$

2а), 2б). Для нахождения количества различных способов представления числа 13 виде суммы 4 слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются различными, нужно найти числа $W(13,4)$ и для случаев неотрицательных и положительных слагаемых соответственно. Заметим, что $W^*(n,1) = W(n,1) = 1;$ если $n = k$, то $W^*(n,k) = 1;$

если $n < k$ то $W^*(n,k) = 0;$ значит,

$$W^*(1,2) = W^*(1,3) = W^*(1,4) = 0;$$

n k	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1 1	1 0	1 0	1 0
2	1 1	2 1	2 0	2 0
3	1 1	2 1	3 1	3 0
4	1 1	3 2	4 1	5 1
5	1 1	3 2	5 2	6 1
6	1 1	4 3	7 3	9 2
7	1 1	4 3	8 4	11 3
8	1 1	5 4	10 5	15 5
9	1 1	5 4	12 7	18 6
10	1 1	6 5	14 8	23 9
11	1 1	6 5	16 10	27 11
12	1 1	7 6	19 2	34 15
13	1 1	7 6	21 14	39 18

$W(1,2) = W^*(1,2) + W^*(1,1) = 0 + 1 = 1,$

аналогично, $W(1,3) = W(1,4) = 1;$

$W^*(2,1) = W^*(2,2) = 1;$

$W(2,2) = W^*(2,1) + W^*(2,2) = 1 + 1 = 2;$

$W(2,3) = W^*(2,1) + W^*(2,2) + W^*(2,3) = 1 + 1 + 0 = 2;$

аналогично, $W(2,4) = 2; W^*(3,2) = W(3-2,2) = W(1,2) = 1;$

Продолжим вычисление коэффициентов $W(n,k)$ и $W^*(n,k)$, заполним таблицу, в левом верхнем углу каждой клетки будем писать значение $W(n,k)$, а в правом нижнем углу – $W^*(n,k)$. Получим таблицу. Как видно из таблицы, $W^*(13,4) = 18$, $W(13,4) = 39$.

Ответ: 1а) 560; 1б) 220; 2а) 39; 2б) 18.