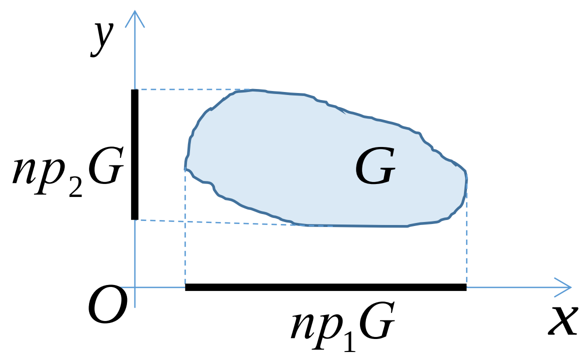
Проекции.

Проекцией вектора $\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)$ на $i-$тую ось называется $i-$тая компонента этого вектора, и обозначается $np_i\alpha$, то есть

$$np_i\alpha = a_i. \qquad \textbf{(23)}$$

Проекцией множества векторов $G=\{\alpha\,|\,\alpha=(a_1,a_2,...,a_n)\}$ на $i-$тую ось называется множество проекций векторов этого множества на $i-$тую ось и обозначается np_iG, то есть

$$np_iG=\{np_i\alpha\,|\,\alpha\in G\}. \qquad \textbf{(24)}$$



(рис.8)

Соответствия.

Соответствием Γ *называется тройка* $\Gamma=(X,Y,G)$, такая, что $G\subseteq X\times Y$. где X называется *областью отправления* соответствия Γ, $Y-$ *областью прибытия* соответствия Γ, $G-$ *график соответствия* Γ.

Если $(x,y)\in G$, то говорят, что $y-$ *образ* x при данном соответствии G, а $x-$ *прообраз* y при данном соответствии G.

Если $A\subseteq X$, то *образ множества* A при данном соответствии обозначается $\Gamma(A)$ и определяется так:

$$\Gamma(A)=\{y\,|\,x\in A,(x,y)\in G\}. \qquad \textbf{(25)}$$

Если $B \subseteq Y$, то *проображ множества* B при данном соответствии обозначается $\Gamma^{-1}(B)$ и определяется так:

$$\Gamma^{-1}(B) = \{x \mid y \in B, (x, y) \in G\}. \qquad \textbf{(26)}$$

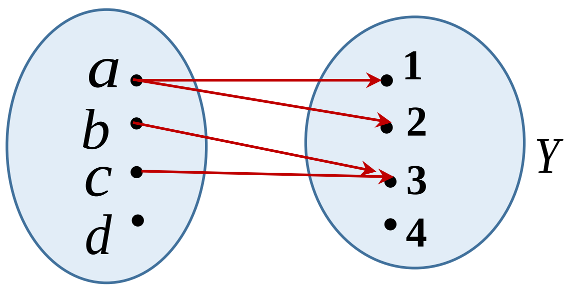
Областью определения соответствия G называется $np_1 G$.

Областью значений соответствия G называется $np_2 G$.

Пример. Пусть

$\Gamma = (\{a, b, c, d\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{(a, 1), (a, 2), (b, 3), (c, 3)\})$.

Это соответствие можно записать в виде графа:



(рис.9)

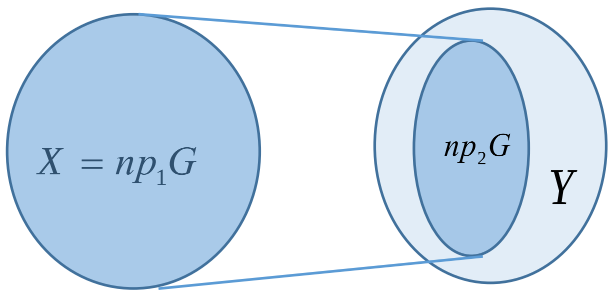
Областью отправления этого соответствия является множество $\{a, b, c, d\}$, областью прибытия - $\{1, 2, 3, 4\}$, областью определения - $\{a, b, c\}$, областью значений - $\{1, 2, 3\}$.

Если $A = \{a, b\}$, $B = \{3, 4\}$, то $\Gamma(A) = \{1, 2, 3\}$, $\Gamma^{-1}(B) = \{b, c\}$.

Свойства соответствий.

Соответствие называется *всюду определённым*, если его область определения совпадает с областью отправления, то есть $X = пр_1 G$.

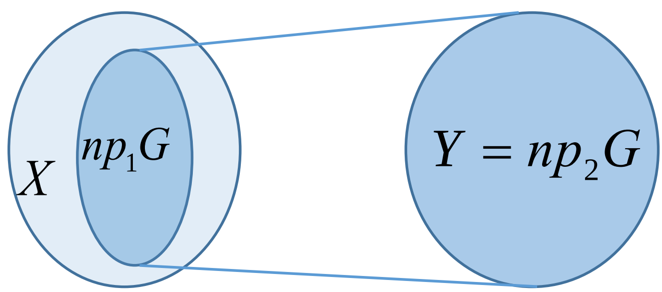
Всюду определённое соответствие схематично можно изобразить так:



(рис.10)

Соответствие называется *сюръективным*, если его область значений совпадает с областью прибытия, то есть $Y = пр_2 G$.

Сюръективное соответствие схематично можно изобразить так:

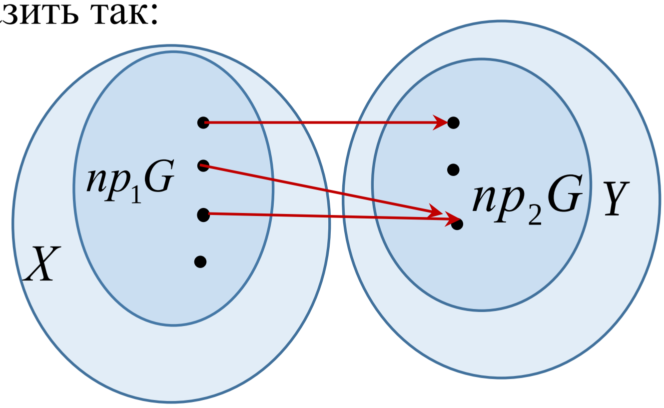


(рис.11)

Соответствие называется *функциональным соответствием*, или *функцией*, если его график не содержит пар с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами. Другими словами, для функционального соответствия выполняется соотношение:

$$(x, y_1) \in G,\ (x, y_2) \in G \ \Rightarrow y_1 = y_2. \quad \textbf{(27)}$$

Пример функционального соответствия схематично можно изобразить так:

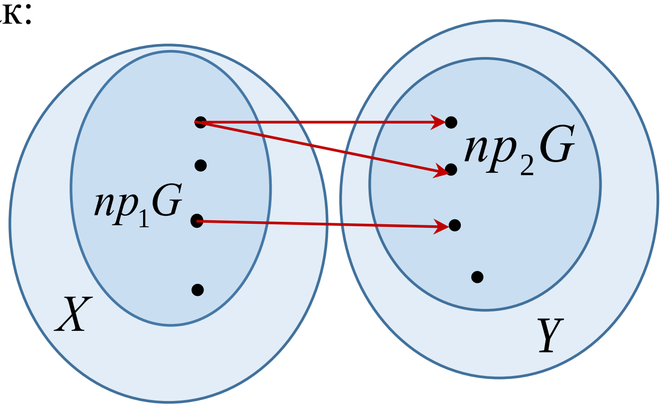


(рис.12)

Соответствие называется *инъективным соответствием*, или *инъекцией*, если его график не содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами. Другими словами, для инъективного соответствия выполняется соотношение:

$$(x_1, y) \in G,\ (x_2, y) \in G\ \Rightarrow x_1 = x_2. \qquad \textbf{(28)}$$

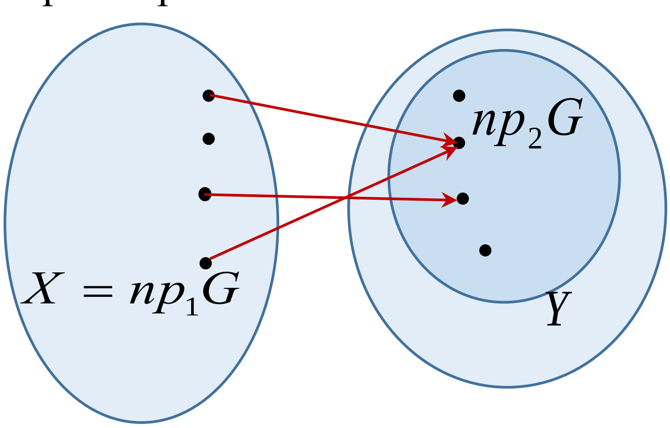
Пример инъективного соответствия схематично можно изобразить так:



(рис.13)

Отображением X *в* Y называется всюду определённая функция.

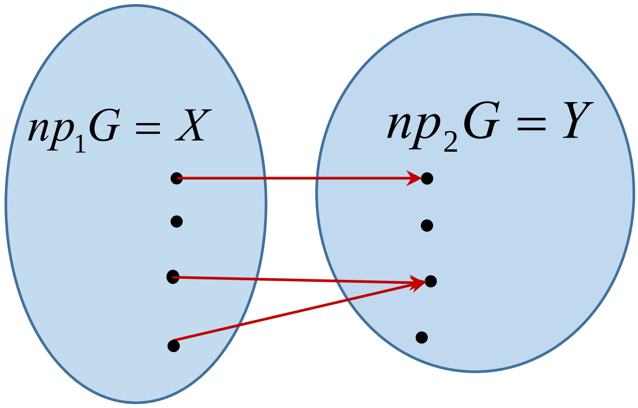
Пример отображения X *в* Y схематично можно изобразить так:



(рис.14)

Отображением X *на* Y называется всюду определённая сюръективная функция.

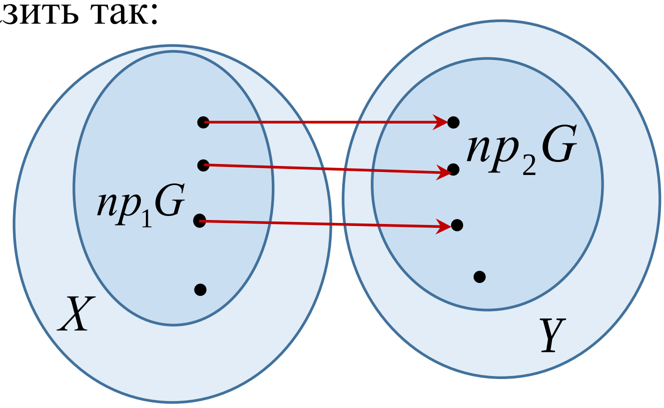
Пример отображения X *на* Y схематично можно изобразить так:



(рис.15)

Взаимно-однозначным соответствием называется инъективная функция.

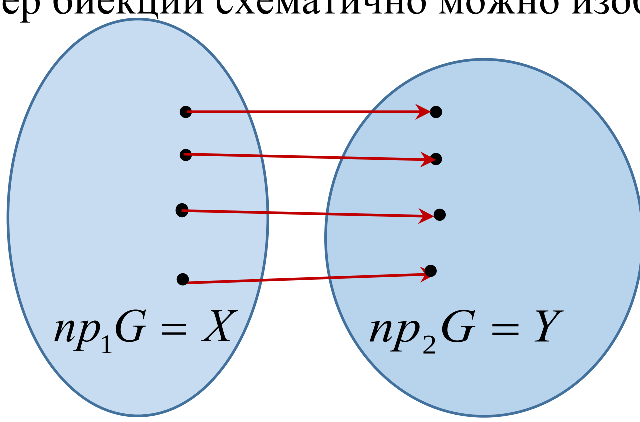
Пример взаимно-однозначного соответствия схематично можно изобразить так:



(рис.16)

Биекцией называется взаимно-однозначное отображение X *на* Y.

Пример биекции схематично можно изобразить так:



(рис.17)

Если между множествами X и Y можно установить биекцию, то пишут $X \sim Y$.

Пример. Пусть N – множество натуральных чисел, а N_{2n} – множество чётных натуральных чисел.

Тогда формула $f(n) = 2n$ **(*)** задаёт биекцию между этими двумя множествами.

Действительно, для каждого натурального числа n однозначно найдётся результат умножения его на 2, значит данное соответствие всюду определено и функционально.

И обратно, для каждого чётного натурального числа однозначно найдётся результат деления его на 2, значит данное соответствие сюръективно и инъективно.

Значит, формула (*) устанавливает биекцию между множествами N и N_{2n}.

Теорема о равномощных конечных множествах.

Между двумя конечными множествами можно установить биекцию тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую мощность.

Запишем эту теорему в виде формулы:

$$\left(|A| < \infty, |B| < \infty\right) \Rightarrow \left(A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|\right) \qquad \textbf{(29)}$$

Доказательство.

Необходимость.

Докажем необходимость от противного.

Пусть $A \sim B$, $|A| = n$, $|B| = k$, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$, и $n \neq k$. Рассмотрим случаи:

1) $n < k$. Тогда, в силу функциональности соответствия, только n элементов из множества B будут иметь прообразы, что противоречит сюръективности;
2) $n > k$. Тогда, в силу инъективности соответствия, только k элементов из множества A будут иметь образы, что противоречит всюду определённости.

Допущение, что n может не равняться k, приводит к противоречию, необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть $|A|=|B|$, $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$, биекцию между множествами A и B можно установить, например, сопоставив каждому элементу a_i элемент b_i, где $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Нетрудно проверить, что данное соответствие обладает всеми свойствами биекции.

Теорема полностью доказана. ■

Множество A называется *счётным*, если между ним и множеством натуральных чисел можно установить биекцию, то есть, если $A \sim N$.

Теорема о счётном подмножестве бесконечного множества.

Каждое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Эту теорему можно записать формулой:

$$|A|=\infty \Rightarrow \exists_{A^*}(A^* \subseteq A,\ A^* \sim N) \qquad \textbf{(30)}$$

Доказательство.

Возьмём $a_1 \in A$,

$a_2 \in A \setminus \{a_1\}$,

$a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$,

…

$a_n \in A \setminus \{a_1, a_2, \dots a_{n-1}\}$,

…

Этот процесс выбора всё новых элементов из A никогда не остановится, так как невозможность выбора на каком-то шаге нового элемента из A означала бы конечность множества A, что противоречит условию. Образуем из выбранных элементов множество A^*: $A^*=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$. Каждый элемент множества A снабжён уникальным индексом, то есть между множеством A и множеством натуральных чисел установлена биекция. Итак, счётное подмножество A^* бесконечного множества A найдено. ■

Критерий бесконечного множества.

Множество бесконечно тогда и только тогда, когда между ним и его некоторым собственным подмножеством можно установить биекцию.

Эту теорему можно записать в виде формулы:

$$|A| = \infty \Leftrightarrow \exists_{A^*}(A^* \subset A,\ A^* \sim A) \qquad \textbf{(31)}$$

Доказательство.

Необходимость.

Пусть множество A бесконечно. По теореме о счётном подмножестве бесконечного множества, в A найдётся счётное подмножество $M = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Пусть $M^* = \{a_2, a_4, ..., a_{2n}, ...\}$.

Очевидно, что $A = (A \setminus M) \cup M$. Пусть $A^* = (A \setminus M) \cup M^*$.

Заметим, что $A^* \subset A$, так как A^* составлено только из элементов множества A, но некоторые элементы множества A, например, a_1, не принадлежат A^*.

Заметим также, что между A и A^* можно установить биекцию, например, так: между множеством $A \setminus M$ и им же самим биекцию задаёт тождественное соответствие, а между множествами M и M^* биекцию можно задать так: каждому элементу $a_n \in M$ ставим в соответствие элемент $a_{2n} \in M^*$. Таким образом, между A и A^* установлена биекция. Необходимость доказана.

Достаточность.

Докажем достаточность от противного: допустим, что правая часть эквиваленции (31) выполнена, а левая – нет, то есть множество A является конечным. Но так как $A^* \subset A$, то $|A^*| < |A|$.

Получили, что между двумя конечными множествами различной мощности существует биекция, что противоречит теореме о равномощных конечных множествах. Значит, допущение о том, что достаточность может быть нарушена, неверно, и теорема полностью доказана. ■

Теорема о счётности множества рациональных чисел.

Множество рациональных чисел счётно, т.е.

$$Q \sim N. \qquad \textbf{(32)}$$

Доказательство.

Высотой рационального числа $\frac{p}{q}$ назовём величину $|p|+q$. Высоту 1 имеет только дробь $\frac{0}{1}$, высоту 2 – дроби $-\frac{1}{1}$ и $\frac{1}{1}$, высоту 3 – дроби $-\frac{2}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}$ и т.д.

Будем перебирать различные высоты в порядке возрастания, и для каждой фиксированной высоты упорядочим рациональные числа в порядке возрастания. Перебирая рациональные числа, упорядоченные таким образом, будем присваивать дробям последовательные номера.

Таким образом, каждое рациональное число получит свой единственный номер, то есть построенное соответствие всюду определено и функционально. В процессе нумерации дробей будут использованы все номера, так как множество рациональных чисел бесконечно, причём из алгоритма нумерации видно, что каждый номер использовался ровно один раз, то есть соответствие сюръективно и инъективно. Итак, построенное соответствие – биекция, следовательно, счётность множества рациональных чисел доказана. ■

Теорема об объединении счётного класса счётных множеств.

Объединение счётного класса счётных множеств счётно.

$$\forall_{i\in N}(A_i \sim N) \Rightarrow (\bigcup_{i\in N} A_i) \sim N \qquad \textbf{(33)}$$

Доказательство.

Пусть $A_1 = \{a_1^1, a_2^1, ..., a_n^1, ...\}$, $A_2 = \{a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2, ...\}, ...$

Выпишем все элементы всех множеств в таблицу и обойдём таблицу по маршруту, помеченному стрелкой:

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_1^1 & \rightarrow & a_2^1 & & a_3^1 & \rightarrow & a_4^1 & \ldots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
a_1^2 & \leftarrow & a_2^2 & & a_3^2 & & a_4^2 & \ldots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
a_1^3 & \rightarrow & a_2^3 & \rightarrow & a_3^3 & & a_4^3 & \ldots \\
 & & & & & & \downarrow & \\
 & & \ldots & & & \leftarrow & &
\end{array}
$$

Проходя по указанному маршруту, будем последовательно навешивать номера на встречающиеся элементы, пропуская элементы, встретившиеся ранее. В результате будет установлена биекция между объединением счётного класса счётных множеств и множеством натуральных чисел, то есть доказана теорема. ■