ОТЧЁТ ПО ИДЗ №1 "ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТ
и проверка наличия рукописных конспектов лекций

гр. 6101 - 10.11.2022

гр. 6102 - 10.11.2022

гр. 6103 - 14.11.2022

гр. 6104 - 14.11.2022

Следствие 1. Монотонная на интервале ф-я имеет конеч. предел как справа, так и слева в каждой точке этого интервала.

Док-во: Пусть $f \downarrow$ $x \in (a, b)$. fix $x_0 \in (a, b)$.

Докажем, что $\exists$ конеч. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

$f \downarrow$ на (x_0, b) $\Rightarrow$ по т. 1 $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \sup\limits_{(x_0, b)} f$

$f \downarrow$ на (a, x_0) $\Rightarrow$ по т. 1 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \inf\limits_{(a, x_0)} f$

Докажем, что sup, inf конечны.

$\forall x \in (a, x_0)$ $f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow \{f(x) : x \in (a, x_0)\}$ огр. снизу числом $f(x_0) \Rightarrow \inf\limits_{(a, x_0)} f$ конечен

$\forall x \in (x_0, b)$ $f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow$ мн-во $\{f(x) : x \in (x_0, b)\}$ огр. сверху числом $f(x_0) \Rightarrow \sup\limits_{(x_0, b)} f$ конечен ▶

Следствие 2 (о точках разрыва монот. ф-ии). Монот. на отрезке ф-я может иметь на этом отрезке только точки разрыва 1го рода.

Теорема 2 (о сущ-ии и непр-ти обратной ф-ии). Пусть $f \in C[a,b]$, f строго монот. Тогда $\exists$ обратная ф-я $x = g(y)$, $y \in [p, q]$, где $p = \min\{f(a), f(b)\}$, $q = \max\{f(a), f(b)\}$, причем ф-я g имеет тот же характер монот-ти, что и ф-я f, и $g \in C[p, q]$.

Док-во: Пусть $f \uparrow\uparrow$ $x \in [a,b]$. $Y = \{f(x) : a \le x \le b\}$

1) $f : [a,b] \to Y$ — сюръекция, f строго монот. на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow f : [a,b] \to Y$ — инъекция $\Rightarrow$ f — биекция (вз.-однозн.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\exists$ обратное отображение $g : Y \to [a,b]$,

$\forall y \in Y \quad g(y) = x \iff y = f(x)$.

2) Покажем, что $Y = [p, q] = [f(a), f(b)]$

$\forall y_0 \in Y \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = y_0$

$a \le x_0 \le b \Rightarrow p = f(a) \le f(x_0) \le f(b) = q \Rightarrow f(x_0) \in [p, q]$,

$y_0 \in [p, q]$

$\forall y_0 \in Y \Rightarrow y_0 \in [p, q] \Rightarrow Y \subset [p, q]$

$\forall \tilde{y} \in [p, q] \equiv [f(a), f(b)] \Rightarrow \exists \tilde{x} \in [a, b] : \tilde{y} = f(\tilde{x})$ (по т. о промеж. значениях непр. на отрезке ф-ии) $\Rightarrow \tilde{y} \in Y$

$\forall \tilde{y} \in [p, q] \Rightarrow \tilde{y} \in Y \Rightarrow [p, q] \subset Y$

Т. о. $Y \subset [p, q]$, $[p, q] \subset Y \Rightarrow Y = [p, q]$

3) Док-ем, что $x = g(y) \uparrow\uparrow y \in [p, q]$.

Пусть $y_1, y_2 \in [p, q]$, $y_1 < y_2$, $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$

$x_1, x_2 \in [a, b]$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$

Если $x_1 = x_2$, то $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow y_1 = y_2$ – противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \neq x_2$.

Если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow y_1 > y_2$ – противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2) \Rightarrow g \uparrow\uparrow y \in [p, q]$.

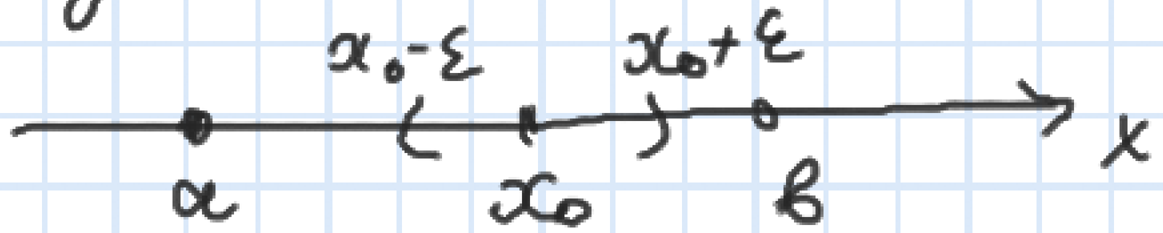
4) Док-ем, что $g \in C[p, q]$.

Док-ем, что $g \in C(y_0)$, $y_0 \in (p, q)$. Пусть $g(y_0) = x_0$

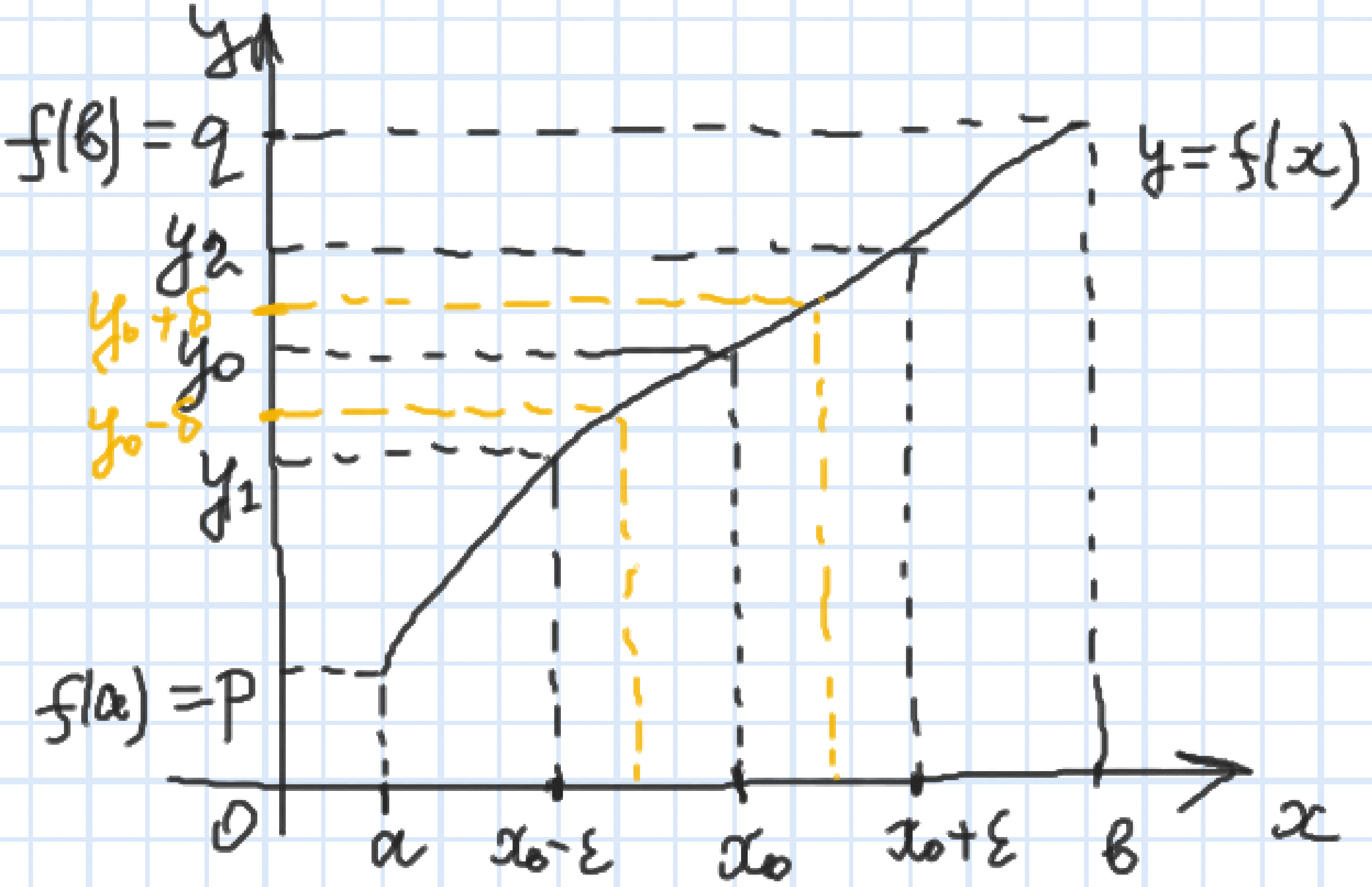
Нужно док-ть, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ при $|y - y_0| < \delta$,

или $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \ \forall y \in U_\delta(y_0)$.

Возьмём ε столь малым, что $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (a, b)$.



$\varepsilon \le \min\{b-x_0, x_0-a\}$



Пусть $f(x_0-\varepsilon)=y_1$, $f(x_0+\varepsilon)=y_2$

$f\uparrow\uparrow \Rightarrow y_1 < y_0 < y_2$

$g\uparrow\uparrow \Rightarrow \forall y \in (y_1, y_2) \quad g(y) \in$

$\in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

$\forall U_\delta(y_0) \subset (y_1, y_2)$, $\forall y \in U_\delta(y_0)$

$g(y) \in U_\varepsilon(x_0)$, т.е.

$$\forall y \in U_\delta(y_0) \quad |g(y) - \underset{\substack{\parallel \\ g(y_0)}}{x_0}| < \varepsilon.$$

$g \in C(p)$, $g \in C(q)$ – док-во аналогичное.

21. Непрерывность элементарных функций.

Основные элемент. ф-ции:

1) постоянная $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$;

2) степенная $f(x) = x^{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x > 0$;

($f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$; $f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$)

3) показательная $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$;

4) логарифмическая $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;

5) тригоном. $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \notin \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

$f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \notin \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$;

6) обратные тригоном. $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $x \in [-1; 1]$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

С помощью опр-ия непр-ти на языке „$\varepsilon-\delta$" можно док-ть непр-ть таких ф-ий, как $f(x)=c$, $f(x)=a^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$. Используя т-му о сущ-ии и непр-ти обрат. ф-ии, можно док-ть непр-ть $f(x)=\log_a x$, обратных тригоном. ф-ий. Непр-ть $f(x)=\operatorname{tg} x$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$ следует из теоремы о непр-ти частного. Непр-ть $f(x)=x^\lambda$ следует из т-мы о непр-ти слож. ф-ии; $x^\lambda=e^{\lambda\ln x}$.

Т.о. $\forall$ основ. элемент. ф-я непрер. на своей обл-ти опр-я.

Элементарной наз-ся ф-я, если она может быть получена из основ. элем. ф-ий путём применения арифметич. операций и операции композиции в конеч. числе.

$f: D \to \mathbb{R}$ — элементарная $\Rightarrow \forall x_0 \in D \;\; f \in C(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in D$.