Тишин В.В.

## *Отношение эквивалентности*.

Отношение называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Примеры.

1. Пусть $A = R,\ x\varphi y \Leftrightarrow x = y.$

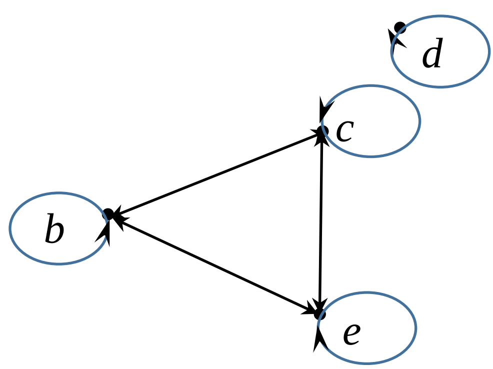
2. Пусть $A = N,\ x\varphi y \Leftrightarrow x \equiv y(\mathrm{mod}\,3),$ то есть $x$ и $y$ дают одинаковый остаток при деления на 3.

3. Пусть $A -$ множество ненулевых векторов на плоскости, $\bar{x}\varphi\bar{y} \Leftrightarrow \bar{x}$ коллинеарен $\bar{y}$, то есть $\bar{x} \parallel \bar{y}$.

4. Пусть $A -$ множество студентов вашего вуза, $x\varphi y \Leftrightarrow x$ учится на одном и том же курсе, что и $y$.

> *Вопрос для самостоятельной работы:*
> Проверить для каждого из перечисленных отношений выполнение рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Граф отношения эквивалентности транзитивен, содержит только обоюдоострые дуги и у каждой вершины имеет петлю:



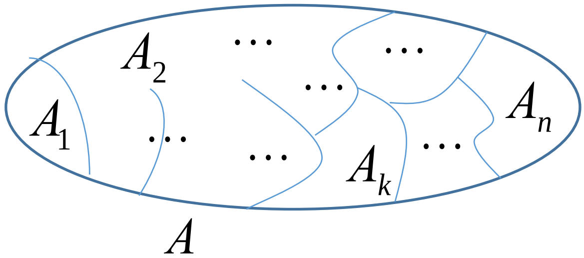

**(рис.30)**

*Разбиением множества* $A$ называется система $\mathbf{m}$ непустых, попарно непересекающихся множеств, в объединении дающих само множество $A$, то есть

$$\mathbf{m} = \{A_i \mid \forall_i (A_i \neq \varnothing), \forall_k \forall_n (k \neq n \to A_k \cap A_n = \varnothing), \bigcup_i A_i = A\}. \quad \textbf{(53)}$$

Мощность системы $\mathbf{m}$ называется *индексом разбиения*.

Пример разбиения множества $A$:




**(рис.30*)**

Пусть дано разбиение $\mathbf{m}$. *Отношение* $\Phi_{\mathbf{m}}$, *сопряжённое с разбиением* $\mathbf{m}$, определяется так:

$$x\varphi_{\mathbf{m}}y \Leftrightarrow \exists_i (x \in A_i, y \in A_i). \qquad \textbf{(54)}$$

**Теорема об отношении, сопряжённым с разбиением.**

Для любого разбиения отношение, сопряжённое с разбиением, является отношением эквивалентности.

*Доказательство*. Пусть $\mathbf{m}$ – разбиение множества $A$, а $\Phi_{\mathbf{m}}$ – отношение, сопряжённое с разбиением $\mathbf{m}$. Докажем, что $\Phi_{\mathbf{m}}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.

1. Возьмём произвольный элемент $x \in A$. Так как объединение множеств $A_n$ даёт всё множество $A$, то $x$ попадёт в некоторый класс $A_i$. Можно записать $\exists_i (x \in A_i, x \in A_i)$, а это и означает, что $x\varphi_{\mathbf{m}}x$. Значит, отношение $\Phi_{\mathbf{m}}$ рефлексивно.

3. Пусть $x\varphi_{\mathbf{m}}y$. Это значит, что найдётся множество $A_i$, вошедшее в разбиение $\mathbf{m}$, такое, что $x \in A_i, y \in A_i$. Это можно записать, как $\exists_i (y \in A_i, x \in A_i)$, а это означает, что $y\varphi_{\mathbf{m}}x$. Значит, отношение $\Phi_{\mathbf{m}}$ симметрично.

5. Пусть $x\varphi_{\mathbf{m}}y$, $y\varphi_{\mathbf{m}}z$. Из того, что $x\varphi_{\mathbf{m}}y$ следует, что найдётся множество $A_i$, вошедшее в разбиение $\mathbf{m}$, такое, что $x \in A_i, y \in A_i$. Но так как $y\varphi_{\mathbf{m}}z$, то $y$ и $z$ также принадлежат одному из множеств разбиения. Но классы, вошедшие в состав $\mathbf{m}$, не пересекаются, значит $y$ и $z$ принадлежат тому же классу $A_i$, которому

принадлежат $x$ и $y$. Таким образом, $\exists_i (x \in A_i, z \in A_i)$, а это означает, что $x\varphi_{\mathbf{m}} z$. Значит, отношение $\Phi_{\mathbf{m}}$ транзитивно.

Итак, доказано, что $\Phi_{\mathbf{m}}$ – отношение эквивалентности. ■

Пример. Пусть $A$ – множество студентов вашего вуза. Рассмотрим разбиение множества $A$ на факультеты. Тогда отношение, сопряжённое с этим разбиением таково, что учатся на одно и том же факультете. Из теоремы об отношении, сопряжённом с разбиением следует, что следует, что отношение «учиться на одном и том же факультете» является отношением эквивалентности.

**Теорема о порождении разбиения отношением эквивалентности.**

Для любого отношения эквивалентности $\Phi$, заданного на множестве $A$, существует разбиение $\mathbf{m}$ множества $A$, такое, что отношение $\Phi_{\mathbf{m}}$, сопряжённое с этим разбиением, совпадает с $\Phi$.

*Доказательство*. Пусть отношение эквивалентности $\Phi$ задано на множестве $A$. Возьмём произвольный элемент $a \in A$.

*Класс эквивалентности, порождённый элементом* $a$, обозначаемый, как $[a]$ – это множество всех тех элементов из $A$, которые вступают с $a$ в отношение $\Phi$:

$$[a] = \{x \mid x \in A, x\varphi a\}. \qquad \textbf{(55)}$$

Если во множестве $A$, остались элементы, не попавшие в $[a]$, то возьмём $b \in A, b \notin [a]$, рассмотрим $[b]$ и будем продолжать эту процедуру до тех пор, пока каждый элемент из $A$ попадёт в один из классов эквивалентности.

Рассмотрим множество $\mathbf{m}$ всех полученных классов эквивалентности, которое назовём *фактор-множеством*:

$$\mathbf{m} = \{[a] \mid a \in A, \bigcup [a] = A\}. \qquad \textbf{(56)}$$

Покажем, что $\mathbf{m}$ является разбиением множества $A$.

Действительно,

- каждый из классов $[b]$ не пуст, так как в нём, по крайней мере, есть элемент $b$;
- $\bigcup [a] = A$ по построению;

- Покажем, что различные классы эквивалентности не пересекаются. Допустим противное, что нашлись классы $[a]$ и $[b]$, причём $[a] \neq [b]$, то есть $\overline{a\varphi b}$, и в то же время их пересечение не пусто, то есть $\exists_{c \in A}(c \in [a], c \in [b])$. Тогда $c\varphi a, c\varphi b$. В силу симметричности имеем $a\varphi c, c\varphi b$, откуда из транзитивности следует $a\varphi b$, получено противоречие. Значит, построенные различные классы эквивалентности не могут иметь непустое пересечение.

Итак, доказано, что полученная система $\mathbf{m}$ – разбиение множества $A$. Из построения следует, что отношение $\Phi_{\mathbf{m}}$, сопряжённое с разбиением $\mathbf{m}$, совпадает с отношением $\Phi$. ■

Примеры.

1. Пусть $A = N$, $x\varphi y \Leftrightarrow x \equiv y (\mathrm{mod}\, 3)$.

Тогда, например, $[1]$ – это множество всех натуральных чисел, дающих остаток 1 при делении на 3, а фактор-множество будет состоять из трёх классов:
класс натуральных чисел, делящихся на 3 без остатка;
класс натуральных чисел, дающих остаток 1 при делении на 3;
класс натуральных чисел, дающих остаток 2 при делении на 3.
Индекс полученного разбиения равен 3.

2. Пусть $A$ – множество студентов вашего вуза,
$x\varphi y \Leftrightarrow x$ учится на одном и том же курсе, что и $y$.

Это отношение эквивалентности порождает разбиение множества всех студентов вуза на классы однокурсников, индекс полученного разбиения в нашем вузе равен 6.

## ***Отношения порядка***.

Отношение называется *отношением порядка*, если оно антисимметрично и транзитивно.

## ***Отношение частичного порядка***.

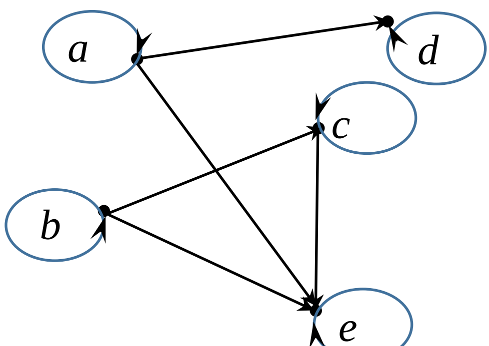
Отношение называется *отношением частичного порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
Если $x$ и $y$ вступают в отношение частичного порядка, то пишут $x \preccurlyeq y$ и говорят, что $x$ *предшествует* $y$, или $x$ *минорирует* $y$, или $y$ *мажорирует* $x$.

Примеры.

1. $A=N,\ x\preccurlyeq y \Leftrightarrow x\,\vdots\, y.$
2. $A=\{0;1\}^n,\ (a_1,a_2,...,a_n)\preccurlyeq(b_1,b_2,...,b_n)\Leftrightarrow \forall_i (a_i\le b_i).$
3. $A=U,\ X\preccurlyeq Y \Leftrightarrow X\subseteq Y.$
4. $A=R,\ x\preccurlyeq y \Leftrightarrow x\ge y.$
5. $A-$ множество жителей Самары, проснувшихся сегодня, $x\preccurlyeq y \Leftrightarrow x$ проснулся сегодня не позже $y$.

*Задание для самостоятельной работы:*
Проверить для каждого из перечисленных отношений выполнение рефлексивности, антисимметричности и транзитивности.

Граф отношения частичного порядка транзитивен, не содержит обоюдоострых дуг и у каждой вершины имеет петлю:




**(рис.31)**

Если на множестве $A$ задано отношение частичного порядка, то $A$ называется *частично упорядоченным множеством*.

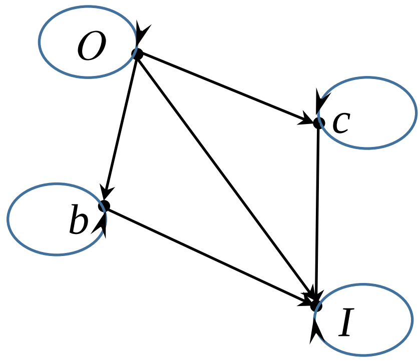
Элемент $I$ частично упорядоченного множества $A$ называется *наибольшим элементом* этого множества, если каждый элемент из $A$ ему предшествует, т.е.

$$I\in A,\ \forall_{x\in A}\,(x\preccurlyeq I) \qquad \textbf{(57)}$$

Элемент $O$ частично упорядоченного множества $A$ называется *наименьшим элементом* этого множества, если он предшествует любому элементу из $A$, т.е.

$$O\in A,\ \forall_{x\in A}\,(O\preccurlyeq x) \qquad \textbf{(58)}$$

На графе наибольшему элементу соответствует вершина, в которую заходят дуги из всех вершин графа, а наименьшему элементу соответствует вершина, из которой выходят дуги во все вершины графа:




**(рис.32)**

Примеры.

1. $A = N,\ x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \vdots y.$

Здесь $I = 1$, наименьшего элемента нет.

2. $A = \{0;1\}^n,\ (a_1, a_2, ..., a_n) \preccurlyeq (b_1, b_2, ..., b_n) \Leftrightarrow \forall_i (a_i \le b_i).$

Здесь $I = (1,1,...,1),\ O = (0,0,...,0).$

3. $A = U,\ X \preccurlyeq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y.$

Здесь $I = U,\ O = \varnothing.$

4. $A = R,\ x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \ge y.$

Здесь наибольшего и наименьшего элементов нет.

5. $A -$ множество жителей Самары, проснувшихся сегодня, $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x$ проснулся сегодня не позже $y$.

Здесь $I -$ житель Самары, проснувшийся сегодня позже всех, $O -$ житель Самары, проснувшийся сегодня раньше всех.

**Теорема о единственности наибольшего элемента.**

Частично упорядоченное множество может иметь не более одного наибольшего элемента.

*Доказательство*. Пусть $I$ и $I^* -$ наибольшие элементы частично упорядоченного множества $A$. Тогда $I \preccurlyeq I^*$, так как $I^* -$ набольший элемент множества $A$, а $I -$ элемент множества $A$.

С другой стороны, $I^* \preccurlyeq I$, так как $I -$ набольший элемент множества $A$, а $I^* -$ элемент множества $A$. Тогда, в силу антисимметричности, $I^* = I$. ■

Справедлива также двойственная теорема:

**Теорема о единственности наименьшего элемента.**

Частично упорядоченное множество может иметь не более одного наименьшего элемента.

*Задание для самостоятельной работы:*
Докажите теорему о единственности наименьшего элемента.

Элемент $M$ частично упорядоченного множества $A$ называется *максимальным элементом* этого множества, если он предшествует лишь сам себе, т.е.

$$M \in A,\ \exists_{x \in A} (M \preccurlyeq x \Rightarrow x = M). \qquad \textbf{(59)}$$

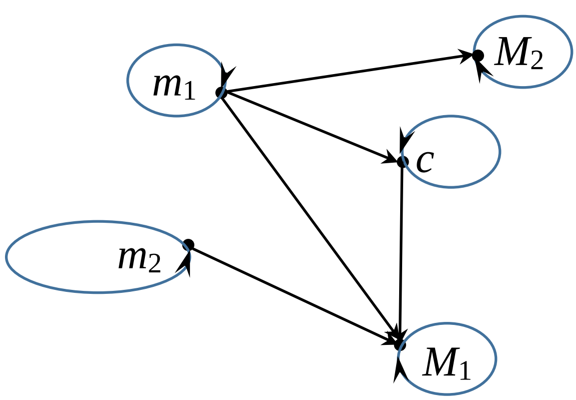
Элемент $m$ частично упорядоченного множества $A$ называется *минимальным элементом* этого множества, если ему предшествует лишь он сам, т.е.

$$m \in A,\ \exists_{x \in A} (x \preccurlyeq m \Rightarrow x = m). \qquad \textbf{(60)}$$

Каждый наибольший элемент является максимальным, также верно, что каждый наименьший элемент является минимальным. Обратное неверно, максимальный элемент не обязательно наибольший, а минимальный – не обязательно наименьший.

На графе максимальному элементу соответствует вершина, в которую дуги только заходят, а минимальному элементу соответствует вершина, из которой дуги только выходят:

Пример:




**(рис.33)**

Здесь минимальные элементы – $m_1$ и $m_2$, а максимальные элементы – $M_1$ и $M_2$.

Как видим, частично упорядоченное множество может иметь несколько минимальных или максимальных элементов.