МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам по курсу

«ИНФОРМАТИКА»

Часть IV

Лабораторная работа № 4 Рекурсивные функции

Рекурсия — есть метод определения множества объектов или процесса в терминах самого себя.

Любое рекурсивное определение содержит две части:

- базисную часть
- Рекурсивную часть.

Базисная часть (условие завершения (одно или несколько)) является **нерекурсивным** утверждением, которое может быть вычислено для определенных параметров. Таким образом, базисная часть может задавать один или более случаев остановки рекурсии.

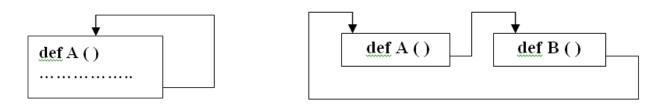
Рекурсивная часть определения записывается таким образом, чтобы при цепочке повторных применений утверждение из рекурсивной части приводилось бы к базисной части.

Рекурсивные алгоритмы реализуются через рекурсивные функции

Прямая (явная) рекурсия характеризуется наличием в теле процедуры оператора обращения к ней же самой.

В случае косвенной (неявной) рекурсии одна процедура обращается к другой, которая (возможно через цепочку вызовов других процедур) вновь обращается к первой.

Далее будем рассматривать только прямую рекурсию.

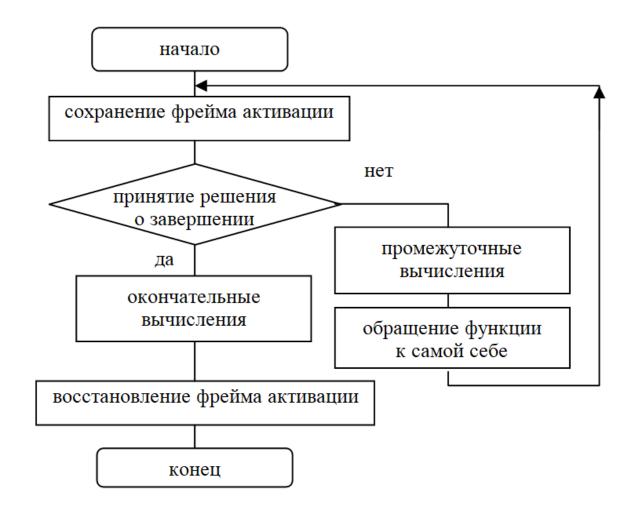


Прямая рекурсия

Косвенная рекурсия

Рекурсивная схема организации вычислительного процесса

```
\{\ 1\ \} - адрес возврата после завершения активации \{\ 2\ \} - завершение активации.
```



Глубина рекурсии

С каждым обращением к рекурсивной процедуре ассоциируется *номер уровня рекурсии* (номер фрейма активации). Считается, что при первоначальном вызове рекурсивной процедуры из основной программы номер уровня рекурсии равен единице.

Каждый следующий вход в процедуру имеет номер уровня на единицу больше, чем номер уровня процедуры, из которой производится это обращение.

Глубина рекурсии – максимальный уровень рекурсии в процессе вычисления при заданных аргументах.

В общем случае эта величина неочевидна, исключение составляют простые рекурсивные функции: например, при вычислении значения N! глубина рекурсии равна N.

Фрейм активации

Так как обращаться к рекурсивной процедуре можно как из нее самой, так и извне, каждое обращение к рекурсивной процедуре вызывает ее независимую активацию.

При каждой активации **образуются копии всех локальных переменных и** формальных параметров рекурсивной процедуры, в которых "оставляют следы" операторы текущей активации.

Таким образом, для рекурсивной процедуры может одновременно существовать несколько активаций.

Для обеспечения правильного функционирования рекурсивной процедуры необходимо сохранять адреса возврата в таком порядке, чтобы возврат после завершения каждой текущей активации выполнялся в точку, соответствующую оператору, непосредственно следующему за оператором рекурсивного вызова.

• Совокупность локальных переменных, значений фактических параметров, подставляемых на место формальных параметров рекурсивной процедуры, и адреса возврата однозначно характеризует текущую активацию и образует фрейм активации.

Фрейм активации необходимо сохранять при очередной активации и восстанавливать после завершения текущей активации. Так как при выходе из текущей активации самым первым должен быть восстановлен фрейм, который был позже всех сохранен, для хранения фреймов используется автоматическая память, т.е. область системного стека.

Примеры рекурсивных функций

1. С помощью рекурсивной функции определить, является ли число четным или нечетным.

```
def f(x):
    if x==0:
        print ("четное")
    elif x==1:
        print ("нечетное")
    elif x>0:
        f(x-2)
    elif x < 0:
        f(x+2)
n = int(input())
f(n)</pre>
```

2. С помощью рекурсивной функции вычислить п-степень положительного числа х

```
def f(x, n):
    if n==0:
        return 1
    elif n > 0:
        return f(x, n-1)*x
    elif n < 0:
        return f(x, n+1)/x

print("Введите число x: ")
x = int(input())
print("Введите число n:")
n = int(input())
print("Результат =", f(x, n)) f(n)</pre>
```

3. Исполнитель преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1

2. Умножить на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на 2. Программа для исполнителя — это последовательность команд. Сколько существует программ, для которых при исходном числе 1 результатом является число 20, и при этом траектория вычислений содержит число 10?

```
def f(x, y ):
    if x == y: return 1
    elif x > y : return 0
    elif if x < y:
        return f(x+1,y)+f(x*2,y)

print(f(1,10)*f(10,20))</pre>
```

4. Алгоритм вычисления функции F(n), где n — целое число, задан следующими соотношениями:

```
F(n) = 1, при n \le 1, F(n) = 3 + F(n / / 2 - 1), когда n > 1 и чётное, F(n) = n + F(n + 2), когда n > 1 и нечётное.
```

Напишите программу, которая вычисляет минимальное значение n, для которого F(n) = 19.

```
def F(n):
    if n <= 1:
        return 1
    elif n>1 and n % 2 == 0:
        return 2 + F(n // 2 - 1)
    elif n>1 and n % 2 != 0:
        return n + F(n - 2)
```

5. Рекурсивная функция вычисления суммы цифр числа

```
def f(x):
    if x<10:
        return x
    else:
        return f(x // 10) + x%10
print (f(123))</pre>
```

Лабораторная работа № 4

Требования к лабораторной работе:

- 1. В программе должны использоваться функции с параметрами:
- рекурсивная функция;
- вспомогательная функция (функции), возможно рекурсивная, для выполнения задания 2.

Задания к лабораторной работе № 4

| № | Задание |
|-----------------|--|
| вар 1 | Алгоритм вычисления функции $F(n)$, где n — целое число, задан следующими соотношениями: $F(n) = n, \text{ при } n < 2,$ $F(n) = F(n/2) + 1, \text{ когда } n \ge 2 \text{ и чётное},$ $F(n) = F(3n+1) + 1, \text{ когда } n \ge 2 \text{ и нечётное}.$ Напишите программу, которая вычисляет: $1. \text{ Количество значений } n \text{ на отрезке } [1;100], \text{ для которых } F(n) \text{ определено и больше } 100.$ $2. \text{ Разность между минимальной и максимальной цифрами результата вычисления } F(x), \text{ где } x - \text{ пределения } x - пределе$ |
| 2 | число, заданное пользователем |
| | F(n) = F(n-1) + n, когда n ≥ 2 и нечётное. Напишите программу, которая вычисляет: 1. Количество значений n на отрезке [1;100000], для которых F(n) равно 16. 2. Максимальную четную цифру результата вычисления F(x), где x – число, заданное пользователем. |
| 3 | Алгоритм вычисления функции $F(n)$, где n — натуральное число, задан следующими соотношениями: $F(n) = 1, \ \text{при } n < 2,$ $F(n) = F(n//2) + 1, \ \text{когда } n \geq 2 \ \text{и чётное},$ $F(n) = F(n-3) + 3 \ \text{, когда } n \geq 2 \ \text{и нечётное}.$ Напишите программу, которая вычисляет: $1. \ \text{Количество значений } n \ \text{на отрезке } [1;100000], \ \text{для которых } F(n) \ \text{равно } 12.$ $2. \ \text{Количество четных цифр результата вычисления } F(x), \ \text{где } x - \text{число, заданное пользователем}.$ |
| 4 | Алгоритм вычисления функции $F(n)$, где n — натуральное число, задан следующими соотношениями: $F(n) = 1, \ \text{при } n < 2,$ $F(n) = F(n//3) + 1, \ \text{когда } n \geq 2 \ \text{и делится на 3},$ $F(n) = F(n-2) + 5 \ \text{, когда } n \geq 2 \ \text{и не делится на 3}.$ Напишите программу, которая вычисляет: $1. \ \text{Количество значений } n \ \text{на отрезке } [1;100000], \ \text{для которых } F(n) \ \text{равно 55}.$ $2. \ \text{Количество нечетных цифр результата вычисления } F(x), \ \text{где } x \ \text{— число, заданное пользователем.}$ |

Алгоритм вычисления функции F(n), где n – натуральное число, задан следующими соотношениями: F(n) = 1, при n < 2, F(n) = F(n/3) - 1, когда $n \ge 2$ и делится на 3, F(n) = F(n-1) + 7, когда $n \ge 2$ и не делится на 3. Напишите программу, которая вычисляет: 1. Количество значений n на отрезке [1;100000], для которых F(n) равно 35. 2. Сумму четных цифр результата вычисления F(x), где x – число, заданное пользователем. 6 Алгоритм вычисления функции F(n), где n – натуральное число, задан следующими соотношениями: F(n) = 1, при n < 2, F(n) = F(n/3) - 1, когда $n \ge 2$ и делится на 3, F(n) = F(n-1) + 17, когда $n \ge 2$ и не делится на 3. Напишите программу, которая вычисляет: 1. Количество значений n на отрезке [1;100000], для которых F(n) равно 43. 2. Сумму нечетных цифр результата вычисления F(x), где x – число, заданное пользователем. 7 Алгоритм вычисления функции F(n), где n — натуральное число, задан следующими соотношениями: F(1) = 1, F(n) = F(n/2) + 1, когда $n \ge 2$ и чётное, F(n) = F(n-1) + n, когда $n \ge 2$ и нечётное. Напишите программу, которая вычисляет: 1. Минимальное значение n, для которого F(n) равно 19. 2. Количество кратных 3 цифр результата вычисления F(x), где x – число, заданное пользователем. 8 Алгоритм вычисления функции F(n), где n — натуральное число, задан следующими соотношениями: F(n) = 1, при n < 2, F(n) = F(n/2) + 1, когда $n \ge 2$ и чётное, F(n) = F(n-3) + 3, когда $n \ge 2$ и нечётное. Напишите программу, которая вычисляет: 1. Минимальное значение n, для которого F(n) равно 31. 2. Количество кратных 3 четных цифр результата вычисления F(x), где x – число, заданное пользователем. 9 Алгоритм вычисления функции F(n), где n — натуральное число, задан следующими соотношениями: F(n) = 1, при n < 2, F(n) = F(n/3) + 1, когда $n \ge 2$ и делится на 3, F(n) = F(n-2) + 5, когда $n \ge 2$ и не делится на 3. Напишите программу, которая вычисляет: 1. Минимальное значение n, для которого F(n) равно 73. 2. Количество нечетных цифр результата вычисления F(x), где x – число, заданное пользователем, кратных 3.

| 10 | Алгоритм вычисления функции $F(n)$, где n — натуральное число, задан следующими соотношениями: |
|----|---|
| | F(n)=1, при $n<2$, |
| | $F(n) = F(n//3) - 1$, когда $n \ge 2$ и делится на 3, |
| | $F(n) = F(n-1) + 7$, когда $n \ge 2$ и не делится на 3. |
| | Напишите программу, которая вычисляет: |
| | 1. Минимальное значение n , для которого $F(n)$ равно 111. |
| | 2. Максимальную цифру результата вычисления $F(x)$, где x – число, заданное пользователем. |
| 11 | Алгоритм вычисления функции $F(n)$, где n — натуральное число, задан следующими |
| | соотношениями: |
| | F(n) = 1, при $n < 2$, |
| | $F(n) = F(n // 3) - 1$, когда $n \ge 2$ и делится на 3, |
| | $F(n) = F(n-1) + 17$, когда $n \ge 2$ и не делится на 3. |
| | Напишите программу, которая вычисляет: |
| | 1. Минимальное значение n , для которого $F(n)$ равно 110. |
| | 2. Максимальную нечетную цифру результата вычисления $F(x)$, где x – число, заданное |
| | пользователем. |
| 12 | Алгоритм вычисления функции $F(n)$, где n — целое неотрицательное число, задан следующими |
| | соотношениями: |
| | F(n) = 0 при $n = 0$ |
| | F(n) = F(n // 2) - 1 при $n > 0$ для чётных n |
| | F(n) = 1 + F(n-1) при $n > 0$ для нечётных n |
| | Напишите программу, которая вычисляет: |
| | 1. Количество чисел n , меньших 1000, для которых значение $F(n)$ будет равно 0. |
| | 2. Минимальную четную цифру результата вычисления $F(x)$, где x — число, заданное |
| | пользователем. |
| 13 | Алгоритм вычисления функции $F(n)$, где n — целое неотрицательное число, задан следующими |
| | соотношениями: |
| | F(n) = 0 при $n = 0$ |
| | F(n) = F(n # 2) - 2 при $n > 0$ для чётных n |
| | F(n) = 2 + F(n-1) при $n > 0$ для нечётных n |
| | Напишите программу, которая вычисляет: |
| | 1. Количество чисел n , меньших 1000, для которых значение $F(n)$ будет равно -2 . |
| | 2. Минимальную нечетную цифру результата вычисления $F(x)$, где x – число, заданное |
| | пользователем |
| 14 | Алгоритм вычисления функции $F(n)$, где n — целое неотрицательное число, задан следующими |
| 14 | Алгоритм вычисления функции $F(n)$, где n — целое неотрицательное число, задан следующими соотношениями: |
| | F(n) = 0 при $n = 0$ |
| | * |
| | F(n) = F(n / / 2) - 1 при $n > 0$ для чётных n $F(n) = 2 + F(n - 1)$ при $n > 0$ для нечётных n |
| | |
| | Напишите программу, которая вычисляет: |
| | 1. Количество чисел n , меньших 1000, для которых значение $F(n)$ будет равно 3. |
| | 2. Количество значащих нулей результата вычисления $F(x)$, где x — число, заданное |
| | пользователем |
| 1 | |

$$F(n) = 2 \cdot n \cdot n \cdot n + 1$$
 при $n > 25$

$$F(n) = F(n+2) + 2 \cdot F(n+3)$$
, если $n \le 25$

Напишите программу, которая вычисляет:

- 1. Количество натуральных значений n из отрезка [1; 1000], при которых значение F(n) кратно 11.
- 2. Минимальную цифру результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем
- 16 Алгоритм вычисления функции F(n) задан следующими соотношениями:

$$F(n) = n \cdot n \cdot n + n$$
 при $n > 20$

$$F(n) = 3 \cdot F(n+1) + F(n+3)$$
, при чётных $n \le 20$

$$F(n) = F(n+2) + 2 \cdot F(n+3)$$
, при нечётных $n \le 20$

Напишите программу, которая вычисляет:

- 1. Количество натуральных значений n из отрезка [1; 1000], при которых значение F(n) не содержит цифру 1.
- 2. Максимальную цифру результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем
- 17 Алгоритм вычисления функции F(n) задан следующими соотношениями:

$$F(n) = n \cdot n + 2 \cdot n + 1$$
, при $n > 25$

$$F(n) = 2 \cdot F(n+1) + F(n+3)$$
, при чётных $n \le 25$

$$F(n) = F(n+2) + 3 \cdot F(n+5)$$
, при нечётных $n \le 25$

Напишите программу, которая вычисляет:

- 1. Количество натуральных значений n из отрезка [1; 1000], при которых значение F(n) не содержит цифру 0.
- 2. Минимальную четную цифру результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем.
- 18 Алгоритм вычисления функции F(n) задан следующими соотношениями:

$$F(n) = n \cdot n + 3 \cdot n + 5$$
, при $n > 30$

$$F(n) = 2 \cdot F(n+1) + F(n+4)$$
, при чётных $n \le 30$

$$F(n) = F(n+2) + 3 \cdot F(n+5)$$
, при нечётных $n \le 30$

Напишите программу, которая вычисляет:

- 1. Количество натуральных значений n из отрезка [1; 1000], при которых значение F(n) содержит не менее двух значащих цифр 0 (в любых разрядах).
- 2. Минимальную нечетную цифру результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем.
- 19 Алгоритм вычисления функции F(n) задан следующими соотношениями:

$$F(n) = n \cdot n + 5 \cdot n + 4$$
, при $n > 30$

$$F(n) = F(n+1) + 3 \cdot F(n+4)$$
, при чётных $n \le 30$

$$F(n) = 2 \cdot F(n+2) + F(n+5)$$
, при нечётных $n \le 30$

- 1. Количество натуральных значений n из отрезка [1; 1000], для которых сумма цифр значения F(n) равна 27.
- 2. Максимальную четную цифру результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем

20 Алгоритм вычисления функции F(n) задан следующими соотношениями:

$$F(n) = n \cdot n + 4 \cdot n + 3$$
, при $n > 25$

$$F(n) = F(n+1) + 2 \cdot F(n+4)$$
, при $n \le 25$, кратных 3

$$F(n) = F(n+2) + 3 \cdot F(n+5)$$
, при $n \le 25$, не кратных 3

Напишите программу, которая вычисляет:

- 1. Количество натуральных значений n из отрезка [1; 1000], для которых сумма цифр значения F(n) равна 24.
- 2. Максимальную четную цифру результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем
- 21 Алгоритм вычисления функции F(n) задан следующими соотношениями:

$$F(n) = n \cdot n + 3 \cdot n + 9$$
, при $n \le 15$

$$F(n) = F(n-1) + n - 2$$
, при $n > 15$, кратных 3

$$F(n) = F(n-2) + n + 2$$
, при $n > 15$, не кратных 3

Напишите программу, которая вычисляет:

- 1. Количество натуральных значений n из отрезка [1; 1000], для которых все цифры значения F(n) чётные.
- 2. Количество четных цифр результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем.
- 22 Алгоритм вычисления функции F(n) задан следующими соотношениями:

$$F(n) = 2 \cdot n \cdot n + 4 \cdot n + 3$$
, при $n \le 15$

$$F(n) = F(n-1) + n \cdot n + 3$$
, при $n > 15$, кратных 3

$$F(n) = F(n-2) + n - 6$$
, при $n > 15$, не кратных 3

Напишите программу, которая вычисляет:

- 1. Количество натуральных значений n из отрезка [1; 1000], для которых все цифры значения F(n) нечётные.
- 2. Количество нечетных цифр результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем.
- 23 Алгоритм вычисления функции F(n) задан следующими соотношениями:

$$F(n) = n \cdot n \cdot n + n \cdot n + 1$$
, при $n \le 13$

$$F(n) = F(n-1) + 2 \cdot n \cdot n - 3$$
, при $n > 13$, кратных 3

$$F(n) = F(n-2) + 3 \cdot n + 6$$
, при $n > 13$, не кратных 3

Напишите программу, которая вычисляет:

- 1. Количество натуральных значений n из отрезка [1; 1000], для которых все цифры значения F(n) нечётные.
- 2. Сумму цифр результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем.
- 24 Алгоритм вычисления функции F(n) задан следующими соотношениями:

$$F(n) = n + 3$$
, при $n \le 18$

$$F(n) = (n // 3) \cdot F(n // 3) + n - 12$$
, при $n > 18$, кратных 3

$$F(n) = F(n-1) + n \cdot n + 5$$
, при $n > 18$, не кратных 3

Здесь «//» обозначает деление нацело.

- 1. Количество натуральных значений n из отрезка [1; 800], для которых все цифры значения F(n) чётные.
- 2. Количество цифр результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем.

$$F(n) = n + 15$$
, при $n \le 5$

$$F(n) = F(n / / 2) + n \cdot n \cdot n - 1$$
, при чётных $n > 5$

$$F(n) = F(n-1) + 2 \cdot n \cdot n + 1$$
, при нечётных $n > 5$

Здесь «//» обозначает деление нацело.

Напишите программу, которая вычисляет:

- 1. Количество натуральных значений n из отрезка [1; 1000], для которых значения F(n) содержит не менее двух цифр 8.
- 2. Произведение цифр результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем.
- 26 Алгоритм вычисления функции F(n) задан следующими соотношениями:

$$F(n) = n \cdot n + 11$$
, при $n \le 15$

$$F(n) = F(n // 2) + n \cdot n \cdot n - 5 \cdot n$$
, при чётных $n > 15$

$$F(n) = F(n-1) + 2 \cdot n + 3$$
, при нечётных $n > 15$

Здесь «//» обозначает деление нацело. Напишите программу, которая вычисляет:

- 1. Количество натуральных значений n из отрезка [1; 1000], для которых значения F(n) содержит не менее трёх цифр 6
- 2. Сумму первой и последней цифр результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем.
- 27 Алгоритм вычисления функции F(n), где n натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(n) = n + 1$$
 при $n < 3$,

$$F(n) = n + 2*F(n+2)$$
, когда $n \ge 3$ и четно,

$$F(n) = F(n-2) + n - 2$$
, когда $n \ge 3$ и нечетно.

Напишите программу, которая вычисляет:

- 1. Количество чисел n, для которых значение F(n) определено и будет трехзначным.
- 2. Сумму двух младших цифр результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем.
- 28 Алгоритм вычисления функций F(n), где n натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(n) = n + 1$$
 при $n < 3$,

$$F(n) = F(n-2) + n - 2$$
, когда $n \ge 3$ и четно,

$$F(n) = F(n-2) + n + 2$$
, когда $n \ge 3$ и нечетно.

Напишите программу, которая вычисляет:

- 1. Количество чисел n, для которых значение F(n) определено и будет пятизначным.
- 2. Сумму старшей и младшей цифр результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем.
- 29 Алгоритм вычисления функции F(n), где n целое число, задан следующими соотношениями:

$$F(n) = n$$
, при $n \le 1$,

$$F(n) = 1 + F(n//2)$$
, когда $n > 1$ и чётное,

$$F(n) = 1 + F(n - 2)$$
, когда $n > 1$ и нечётное.

- 1. Минимальное значение n, для которого F(n) = 16.
- 2. Старшую цифру результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем.

30 Алгоритм вычисления функции F(n), где n — целое число, задан следующими соотношениями:

$$F(n) = 1$$
, при $n \le 1$,

$$F(n) = 3 + F(n//2 - 1)$$
, когда $n > 1$ и чётное,

$$F(n) = n + F(n - 2)$$
, когда $n > 1$ и нечётное.

- 1. Минимальное значение n, для которого F(n) = 19.
- 2. Сумму четных цифр результата вычисления F(x), где x число, заданное пользователем.