

Вопросы к зачету по алгебре и геометрии, 1 семестр, 2023 год.

Расчет времени – 10 минут на каждое задание + 10 минут в запасе. Работа по алгебре рассчитана на 60 минут, работа по геометрии пусть тоже на 60 минут. Все теоретические вопросы предполагают сжатый ответ, содержащий ПРИМЕРЫ, и НЕ содержащий доказательства теорем, выводы формул и т.д.

Работа выполнена на ЗАЧТЕНО по алгебре, если выполнено по крайней мере 3 задания, по геометрии набрано хотя бы три балла.

Структура работы по алгебре

1. Теоретический вопрос по алгебре
2. Теоретический вопрос по алгебре
3. Теоретический вопрос по алгебре или задача!
4. Задача по алгебре
5. Задача по алгебре

Структура работы по геометрии

1. Теоретический вопрос по геометрии и задача(2 балла)
2. Теоретический вопрос по геометрии и задача (2 балла)
3. Задача по геометрии (1 балл)
4. Задача по геометрии (1 балл)

Список вопросов по алгебре

1. Определение поля (аксиомы входят в определение). Примеры полей.
2. Определение линейного пространства над полем (аксиомы входят в определение).
Примеры линейных пространств.
3. Линейная комбинация векторов. Определение линейно зависимой системы векторов.
Определение линейно независимой системы векторов. Уметь приводить примеры ЛНЗ и ЛЗ систем векторов.
4. Алгебраические свойства систем векторов. Геометрические свойства систем векторов.
5. Определение базиса линейного пространства. Координаты вектора в базисе. Размерность линейного пространства. Примеры.
6. Определение перестановки, инверсия в перестановки, определение четности перестановки.
Свойства перестановок. Определение подстановки, четность подстановки.
7. Определение определителя n -ного порядка. Вычисление определителя третьего порядка – правило «звездочки», правило Саррюса. Вычисление треугольных определителей n -ного порядка.
8. Девять свойств определителя. К каждому свойству нужно привести пример.
9. Минор k -того порядка, дополнительный минор к нему, алгебраическое дополнение. Минор 1-го порядка, дополнительный минор к элементу a_{ij} , алгебраическое дополнение A_{ij} .
Привести примеры.
10. Три теоремы о вычислении определителя:
 - а. Случай, когда в строке (столбце) все элементы, кроме одного равны нулю

- b. Разложение определителя по строке или столбцу
- c. Сумма произведений элементов одной строки (столбца) на алгебраические дополнения к другой строке (столбцу).
- 11. Теорема Лапласа. Следствие из теоремы Лапласа. Примеры
- 12. Линейное пространство матриц $\text{Mat}(n,m)$. Сложение матриц. Умножение матриц на число. Базис в линейном пространстве матриц $\text{Mat}(n,m)$. Размерность этого пространства.
- 13. Ранг матрицы. Свойства ранга матрицы. Вычисление ранга матрицы.
- 14. Умножение матриц. Определение. Свойства умножения матриц. Теорема об определителе произведения матриц. Теорема о ранге произведения двух матриц.
- 15. Обратная матрица. Теорема об обратной матрице. Два способа нахождения обратной матрицы. Формула нахождения обратной матрицы.
- 16. Системы линейных уравнений, основные понятия (совместные, несовместные системы, определенные, неопределенные системы, однородные системы).
- 17. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий определенности системы линейных уравнений
- 18. Системы линейных однородных уравнений. Критерий определенности системы линейных однородных уравнений. Свойства решений системы линейных однородных уравнений.
- 19. ФСР. Определение. Теорема о количестве фундаментальных решений.
- 20. Неоднородные системы линейных уравнений. Свойства решений. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений (сформулировать теорему)

Список вопросов по геометрии.

1. Аффинная, декартова и полярная система координат. Связь декартовой и полярной системы координат. Привести примеры.
2. Определение скалярного произведения. Вычисление скалярного произведения в декартовой системе координат. Геометрические приложения скалярного произведения.
3. Определение векторного произведения. Вычисление векторного произведения в декартовой системе координат. Геометрические приложения векторного произведения. (чертежи!)
4. Определение смешанного произведения. Вычисление смешанного произведения в декартовой системе координат. Геометрические приложения смешанного произведения. (чертежи!)
5. Виды уравнений прямой на плоскости Векторно-параметрическое, параметрическое, каноническое, через две точки, с угловым коэффициентом, в отрезках на осях, общее, через точку и данный нормальный вектор. Нужны чертежи!
6. Виды уравнений прямой в пространстве. Векторно-параметрическое, параметрическое, каноническое, через две точки. Нужны чертежи!
7. Уравнение плоскости. Векторно-параметрическое, параметрическое, общее, через три точки, через точку и два направляющих вектора, через точку и данный нормальный вектор, в отрезках на осях. Нужны чертежи!
8. Определение эллипса. Каноническое уравнение, фокусы, директрисы, эксцентриситет. Чертеж обязательно!
9. Определение гиперболы. Каноническое уравнение, фокусы, директрисы, эксцентриситет. Чертеж обязательно!
10. Определение параболы. Каноническое уравнение, фокусы, директрисы, эксцентриситет. Чертеж обязательно!
11. Поверхности второго порядка. Канонические уравнения и чертежи.

Задачи по алгебре.

1. а). Проверить, будет ли система векторов линейно зависимой:
 $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$
 $\vec{a}_2 = (-1, 0, 2)$
 $\vec{a}_3 = (2, 0, 1)$
- б). Проверить, будет ли система векторов линейно зависимой:

$$\overline{a_1} = (4, -2, 6)$$

$$\overline{a_2} = (6, -3, 9)$$

2. а). Найти координаты вектора $\overline{x} = (-1, 0)$ в базисе $\overline{a_1} = (1, 2)$, $\overline{a_2} = (-2, 1)$
 б). Найти координаты вектора $\overline{x} = (6, 2, -7)$ в базисе $\overline{e_1} = (2, 1, -3)$, $\overline{e_2} = (3, 2, -5)$, $\overline{e_3} = (1, -1, 1)$
 (систему уравнений решать по правилу Крамера)
3. Методом Гаусса решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases}$$
4. Определить, с каким знаком элемент входит в определитель (и входит ли вообще) $a_{12}a_{34}a_{41}a_{23}$, $a_{12}a_{34}a_{42}a_{23}$ и т.д.
5. Вычислить определители:

а). по теореме Лапласа
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
 (определители третьего порядка сводить в вычислению определителей второго порядка)

б). разложив определитель по третьей строке
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$
 (определители третьего порядка

вычислять любым способом)

в). по свойствам определителя, свести к вычислению определителя 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

г)
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$
 (по формуле для вычисления треугольного определителя)

6. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы, методом Крамера или методом Гаусса (знать все методы, в билете будет указан только один – необходимо решить указанным методом!):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & -4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t + 5E_{13} - 6E$$

8. Выполнить действия:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

9. Найти матрицу, обратную к данной (двумя способами)

10. Исследовать систему на совместность (по теореме Кронекера-Капелли)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

11. Найти общее решение неоднородной системы, частное решение неоднородной системы, ФСР однородной системы и записать множество решений неоднородной системы в векторном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

12. Найти фундаментальную систему решений однородной системы

13. Найти фундаментальную систему решений и записать решение в векторном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

14. Записать решение неоднородной «системы» в векторном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

15.

Задачи по геометрии

1. В декартовой системе координат даны вектора $\vec{a} = \{1, 2, -1\}$, $\vec{b} = \{0, 1, -3\}$, $\vec{c} = \{-3, 1, 4\}$.

Вычислить:

- 1) скалярное произведение (\vec{a}, \vec{b}) , (\vec{a}, \vec{c}) , (\vec{b}, \vec{c}) , $(2\vec{a} + \vec{b}, \vec{c})$, $(2\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{a} - \vec{c})$;
- 2) векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{a}]$, $[\vec{a}, \vec{c}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[(2\vec{a} + \vec{b}, \vec{c})]$, $[2\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{a} - \vec{c}]$;
- 3) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Даны точки $A(1; 2; 4)$, $B(2; 1; 2)$, $C(-1; 1; 1)$, $D(2; 3; 5)$. Вычислить:

- 1) площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{AB} и \vec{AC} ;
- 2) площадь треугольника ABC;
- 3) высоту в треугольнике ABC от точки A до прямой BC;
- 4) объем пирамиды ABCD;
- 5) высоту пирамиды от точки D до грани ABC;
- 6) угол между ребрами AB и CD;

3. Дана точка $A(3; 1)$ и направляющий вектор $\vec{a} = \{1, 0\}$. Написать уравнения прямой в параметрическом, в каноническом, в общем виде, в виде отрезков на осях и с угловым

- коэффициентом. Найти координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора прямой. Изобразить прямую на чертеже.
4. Даны точки $A(6; -4)$, $B(-1; -3)$. Написать уравнения прямой в параметрическом, в каноническом, в общем виде, в виде отрезков на осях и с угловым коэффициентом. Найти координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора прямой. Изобразить прямую на чертеже.
 5. Через точку M провести прямую L_1 , параллельную прямой L , и прямую L_2 , перпендикулярную L , где:
 - 1) $M(2; 3)$ и $L: 4x - 7y + 6 = 0$;
 - 2) $M(-3; 5)$ и $L: 6x - 2y - 5 = 0$;
 6. Найти угол между прямыми:

$$L_1: 3x - 4y + 5 = 0 \quad L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1}$$
 - 1) $L_1: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad L_2: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{2}$
 7. Дана точка $A(0; 1; -2)$ и направляющий вектор $\vec{a} = \{1, 0, 2\}$. Написать уравнение прямой, проходящей через данную точку и с данным направляющим вектором. Записать уравнение прямой в векторном, в параметрическом и каноническом виде.
 8. Даны две точки $A(0; 1; -2)$ и $C(2; -1; -2)$. Написать уравнение прямой, проходящей через эти точки. Записать уравнение прямой в векторном, в параметрическом и каноническом виде. Найти направляющий вектор прямой.
 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $C(2; -1; -2)$ и компланарной векторам $\vec{a} = \{1, 5, 2\}$, $\vec{b} = \{3, 5, 5\}$. Записать уравнение этой плоскости в параметрическом, общем виде и в виде отрезков на осях. Найти нормальный вектор плоскости.
 10. Составить общее уравнение плоскости, проходящее через три точки $A(1; 2; 4)$, $B(2; 1; 2)$, $C(-1; 1; 1)$
 11. Проверить четыре точки на компланарность: $A(1, -1, 2)$ $B(3, 1, -2)$ $C(-3, 4, 2)$ $D(0, 1, -1)$
 12. Построить кривую второго порядка $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Найти фокусы, директрисы, асимптоты (если есть), вычислить эксцентриситет
 13. Построить кривую второго порядка $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Найти фокусы, директрисы, асимптоты (если есть), вычислить эксцентриситет
 14. Построить кривую второго порядка $y^2 = -4x$. Найти фокусы, директрисы, асимптоты (если есть), вычислить эксцентриситет

Примерный билет по алгебре.

1. Определение поля (аксиомы!), примеры полей
2. Определение определителя
3. Обратная матрица, теорема о нахождении обратной матрицы, формула обратной матрицы (без вывода)

4. Вычислить определитель, по свойствам, сведя ко второму порядку $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
5. Записать решение в виде линейной комбинации фундаментальных решений и частного решения неоднородной системы $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

Примерный билет по геометрии

- Определение эллипса. Каноническое уравнение, чертеж, фокусы, директрисы, эксцентриситет (чертеж нужен, вывод уравнения эллипса – нет!). Построить $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
- Определение векторного произведения векторов. Свойства, геометрические приложения (без вывода, но чертежи нужны!). Найти векторное произведение векторов $a = (1, 2, 3)$, $b = (4, 5, 6)$. (или, например, найти площадь треугольника, построенного на этих векторах).
- Даны точки $A(1; 2; 4)$, $B(2; 1; 2)$, $C(-1; 1; 1)$. Найти расстояние от C до AB .
- Найти угол между прямыми $L_1: 3x - 4y + 5 = 0$ $L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1}$

Оформление титульного листа:

Зачетная работа по алгебре.

Билет №

Группа №

Студент ФИО

1	2	3	4	5

Оценка:

