Тишин В.В.

Классическое исчисление высказываний L.

1. *Алфавит*.

Алфавит исчисления L состоит из *пропозициональных букв* (символов переменных) $A,B,C,\ldots,$ знаков *логических связок* $\neg$, $\rightarrow$ и скобок (,).

2. *Формулы*.

а) Каждый символ переменной есть *формула*.
б) Если A и B – *формулы*, то $\neg A$ и $(A \rightarrow B)$ - также *формулы*.
в) Других формул нет.

Для упрощения записи договариваются внешние скобки опускать.

Пример 1. Записи $\neg\big(A \rightarrow (A \rightarrow B)\big)$ и $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ являются формулами, а $\neg A \neg B$ и $B \rightarrow A \rightarrow C$ - нет.

3. *Аксиомы*.

Следующие формулы называются *схемами аксиом*:

$A1)$ $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ - *первая схема аксиом*;
$A2)$ $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$- *вторая схема аксиом*;
$A3)$ $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$ *третья схема аксиом*.

Аксиомой по данной схеме аксиом называется формула, полученная из данной схемы аксиом подстановкой вместо всех вхождений некоторой переменной другой формулы.

Пример 2. $A \rightarrow (\neg\neg\neg A \rightarrow A)$ - аксиома по 1 схеме аксиом $A1$, полученная в результате подстановки $\begin{pmatrix} A & \neg\neg\neg A \\ A & B \end{pmatrix}$;

Пример 3. $(\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B)$ - аксиома по 3 схеме аксиом $A3$, полученная в результате подстановки $\begin{pmatrix} \neg A & B \\ A & B \end{pmatrix}$;

4. *Правило вывода*.

Единственным *правилом вывода* в исчислении L является *правило отделения* или *Modus Ponens* (сокращённо MP): $\dfrac{A,\ A \rightarrow B}{B}{}_{MP}$

Пример 4. Применяя правило *MP* к формулам $\neg B \to \neg\neg A$ и $(\neg B \to \neg\neg A) \to ((\neg B \to \neg A) \to B)$, получим формулу $(\neg B \to \neg A) \to B$.

Пример 5. Рассмотрим пример доказательства теоремы.

$$\vdash \ A \to A.$$

F_1: $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ - это аксиома по 2 схеме аксиом $A2$, полученная в результате подстановки $\begin{pmatrix} A & A \to A & A \\ A & B & C \end{pmatrix}$;

F_2: $A \to ((A \to A) \to A)$ - это аксиома по 1 схеме аксиом $A1$, полученная в результате подстановки $\begin{pmatrix} A & A \to A \\ A & B \end{pmatrix}$;

F_3: $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ - это результат применения правила *MP* к формулам F_1 и F_2;

F_4: $A \to (A \to A)$ - это аксиома по 1 схеме аксиом $A1$, полученная в результате подстановки $\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$;

F_5: $A \to A$ - это результат применения правила *MP* к формулам F_4 и F_3.

Итак, построена последовательность F_1, F_2, F_3, F_4, $A \to A$, каждый член которой – или аксиома, либо формула, полученная по правилу вывода *MP* из некоторых предыдущих членов этой последовательности. Следовательно, построено доказательство теоремы $A \to A$.

Докажем важное утверждение – теорему дедукции.

Теорема дедукции.

Если из списка гипотез Г, А выводима В, то из списка Г выводима А→В.

Запишем теорему в виде формулы: $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B$

Доказательство.

Так как $\Gamma, A \vdash B$, то существует последовательность $B_1, \ldots, B_n$ такая, что $B_n = B$, каждый член которой B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ или является аксиомой, или формулой из списка Γ, A, или получен по некоторому правилу вывода из некоторых предыдущих членов последовательности $B_1, \ldots, B_n$.

Доказательство проведём методом математической индукции по n - длине вывода формулы B.

1. Проверим справедливость утверждения при $n=1$.

Рассмотрим случаи:

а) B_1 - аксиома или гипотеза из Γ. Рассмотрим последовательность $B_1, B_1 \to (A \to B_1), A \to B_1$. Второй член этой последовательности, формула $B_1 \to (A \to B_1)$, является аксиомой по 1 схеме аксиом $A1$, полученная в результате подстановки $\begin{pmatrix} A & B_1 \\ A & B \end{pmatrix}$, а третий член – формула $A \to B_1$ получена в результате применения правила MP к двум предыдущим формулам.

б) $B_1 = A$. В этом случае перед формулой $A \to A$ сделаем вставку в виде последовательности формул F_1, F_2, F_3, F_4, взятых из примера 5.

Итак, при $n=1$ возможность построения вывода формулы $A \to B_1$ доказана.

2. Допустим, что $\Gamma \vdash A \to B_n$ при $n \le k-1$.

3. Докажем, что $\Gamma \vdash A \to B_k$.

Рассмотрим случаи:

а) B_k - аксиома или гипотеза из Γ. Рассмотрим последовательность $B_k, B_k \to (A \to B_k), A \to B_k$. Второй член этой последовательности, формула $B_k \to (A \to B_k)$, является аксиомой по 1 схеме аксиом $A1$, полученная в результате подстановки $\begin{pmatrix} A & B_k \\ A & B \end{pmatrix}$, а третий член – формула $A \to B_k$ получена в результате применения правила MP к двум предыдущим формулам. По допущению, существует вывод формулы $A \to B_{k-1}$ из гипотез Γ. Записав формулы $B_k, B_k \to (A \to B_k), A \to B_k$ после этого вывода, получим вывод $A \to B_k$ из множества гипотез Γ.

б) $B_k = A$. В этом случае после вывода формулы $A \to B_{k-1}$ из гипотез Γ запишем последовательность формул F_1, F_2, F_3, F_4, $A \to A$, взятых из примера 5, получим вывод $A \to B_k$ из множества гипотез Γ.

в) Формула B_k получена в результате применения правила вывода MP к некоторым предыдущим членам последовательности $B_1, ..., B_{k-1}$. То есть, найдутся формулы B_i и $B_m = B_i \to B_k$ такие, что $i < k, m < k$.

Запишем формулу

$F_1 = (A \to (B_i \to B_k)) \to ((A \to B_i) \to (A \to B_k))$. Это - аксиома по второй схеме аксиом $A2$, полученная в результате подстановки $\begin{pmatrix} A & B_i & B_m \\ A & B & C \end{pmatrix}$,

По допущению, $\Gamma \vdash A \to B_m$, то есть $\Gamma \vdash A \to (B_i \to B_k)$ и $\Gamma \vdash A \to B_m$.

Применив к формулам $A \to (B_i \to B_k)$ и F_1 правило MP, получим формулу $F_2 = (A \to B_i) \to (A \to B_k)$.

Применив к формулам $A \to B_i$ и F_2 правило MP, получим формулу $A \to B_k$.

Итак, имея вывод $C_1, C_2, ..., A \to B_{k-1}$ формулы $A \to B_{k-1}$ из множества гипотез Γ и, добавив формулы $F_1, F_2, A \to B_k$, получим последовательность $C_1, C_2, ..., A \to B_{k-1}, F_1, F_2, A \to B_k$, которая является выводом $A \to B_k$ из множества гипотез Γ.

На основании метода математической индукции утверждаем, что теорема доказана для любой длины n последовательности $B_1, \ldots, B_n$.

Следствие. Обобщённая теорема дедукции.

Формула B выводима из списка гипотез Γ, A тогда и только тогда, когда из списка Γ выводима $A \to B$.

Запишем теорему в виде формулы: $\Gamma, A \vdash B \Leftrightarrow \Gamma \vdash A \to B$

Доказательство.

Необходимость. Доказательство необходимости является доказательством теоремы дедукции.

Достаточность. Так как $\Gamma \vdash A \to B$, то существует последовательность $B_1, \ldots, B_n$ такая, что $B_n = A \to B$, каждый член которой $B_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ или является аксиомой, или формулой из списка Γ, или получена из некоторых предыдущих членов этой последовательности с помощью правила *MP*. Формула A является одной из гипотез списка Γ, A. Запишем последовательность $B_1, \ldots, A \to B, A$. К двум последним членам этой последовательности применим правило вывода *MP*. В результате получим последовательность $B_1, \ldots, A \to B, A, B$ – вывод формулы B из списка гипотез Γ, A. Достаточность доказана, а вместе с ней и всё следствие.

В дальнейшем, при ссылке на теорему дедукции, будем использовать аббревиатуру *ТД*.

Рассмотрим примеры применения теоремы дедукции.

Утверждение о связи доказательства теорем с выводом из гипотез.

Формула B выводима из списка гипотез $A_1, A_2, ..., A_n$ *тогда и только тогда, когда формула* $A_1 \to (A_2 \to (...(A_{n-1} \to (A_n \to B))...)$ *является теоремой.*

То есть, $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B \Leftrightarrow \vdash A_1 \to (A_2 \to (...(A_{n-1} \to (A_n \to B))...)$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$. Тогда, по теореме дедукции, $A_1, A_2, ..., A_{n-1} \vdash A_n \to B$. Применив ещё раз теорему дедукции, получим, что $A_1, A_2, ..., A_{n-2} \vdash A_{n-1} \to (A_n \to B)$.

Продолжая, покуда возможно, применять теорему дедукции, получим, что $\vdash A_1 \to (A_2 \to (...(A_{n-1} \to (A_n \to B))...)$.

Достаточность. Пусть $\vdash A_1 \to (A_2 \to (...(A_{n-1} \to (A_n \to B))...)$.

По свойству расширения списка гипотез, имеем:

$A_1, A_2, ..., A_n \vdash A_1 \to (A_2 \to (...(A_{n-1} \to (A_n \to B))...)$.

Применив правило отделения Modus Ponens к паре формул

$A_1 \to (A_2 \to (...(A_{n-1} \to (A_n \to B))...)$, A_1, получим формулу

$A_2 \to (A_3 \to (... \to (A_{n-1} \to (A_n \to B))...)$.

Применив правило отделения Modus Ponens к паре формул

$A_2 \to (A_3 \to (... \to (A_{n-1} \to (A_n \to B))...)$, A_2, получим формулу

$A_3 \to (A_4 \to ...(A_{n-1} \to (A_n \to B))...)$.

Продолжая применять правило MP, придём к формуле B.

Итак, доказано, что, если $A_1 \to (A_2 \to (...(A_{n-1} \to (A_n \to B))...)$ - теорема, то $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$.

Доказана достаточность, а вместе с ней и вся теорема. ■

Докажем два правила, которые в дальнейшем будем использовать, как новые правили вывода.

1. Транзитивность импликации ($TИ$ **)**

Докажем, что из списка $A\to B, B\to C$ выводима формула $A\to C$, т.е. $A\to B, B\to C \vdash A\to C$.

Выпишем последовательность формул:

B_1: $A\to B$ (гипотеза);

B_2: $B\to C$ (гипотеза);

B_3: A (гипотеза);

B_4: B (результат применения правила *MP* к формулам B_1, B_3);

B_5: C (результат применения правила *MP* к формулам B_4, B_2).

Получили, что из гипотез $A\to B,\ B\to C,\ A$ выводима формула C.

Тогда, применив теорему дедукции, получим, что из списка гипотез $A\to B, B\to C$ выводима формула $A\to C$.

Транзитивность импликации можно считать ещё одним, новым правилом вывода *ТИ*:

$$\frac{A\to B, B\to C}{A\to C}\,TИ$$

2. Правило сечения $(ПС)$.

Докажем, что из списка $A\to(B\to C), B$ выводима формула, $A\to C$, т.е. $A\to(B\to C), B\vdash A\to C$.

Выпишем последовательность формул:

B_1: $A\to(B\to C)$ (гипотеза);

B_2: B (гипотеза);

B_3: A (гипотеза);

B_4: $B\to C$ (результат применения правила *MP* к формулам B_3, B_1);

B_5: C (результат применения правила *MP* к формулам B_2, B_4).

Получили, что из гипотез $A\to(B\to C), B, A$ выводима формула C.

Тогда, применив теорему дедукции, получим, что из списка гипотез $A\to(B\to C), B$ выводима формула $A\to C$.

Правило сечения можно считать ещё одним, новым правилом вывода $\mathit{ПС}$:

$$\frac{A \to (B \to C), B}{A \to C} \mathit{ПС}.$$