20. Монотонные функции: предел, непрерывность, обратная функция.

<u>опр:</u> $f: X \to \mathbb{R}$, $A \subseteq X$. f возрастающая (убывающая) на $A \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. $\left(f(x_1) \geq f(x_2) \right)$

<u>Обозн:</u> $f \uparrow x \in A$, $f \downarrow x \in A$, монотонные ф-ии.

<u>опр:</u> f строго возр. (строго убыв.) на $A \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2) \right)$

<u>Обозн:</u> $f \uparrow\uparrow x \in A$, $f \downarrow\downarrow x \in A$. строго монот. ф-ии.

<u>Теорема 1</u> (о сущ-ии предела монот. ф-ии). Если $f \uparrow x \in (a, b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, то в точках a и b у ф-ии f $\exists$ одност. пределы (конеч. или ∞), причём $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \sup\limits_{(a,b)} f$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \inf\limits_{(a,b)} f$

Если же $f \downarrow x \in (a, b)$, то $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \inf\limits_{(a,b)} f$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \sup\limits_{(a,b)} f$

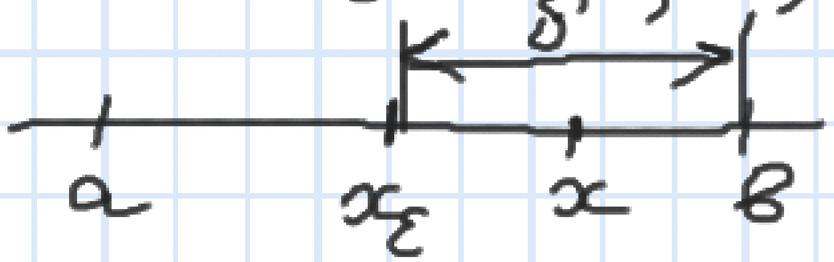
<u>Док-во</u>: $\sup\limits_{(a,b)} f = \sup\{f(x) : x \in (a,b)\}$

$\inf\limits_{(a,b)} f = \inf\{f(x) ; x \in (a,b)\}$

Пусть $f \uparrow x \in (a,b)$, $A = \sup\limits_{(a,b)} f$

а) $A \neq +\infty$, т.е. f огр. св. fix $\varepsilon > 0$.

$\exists\ x_\varepsilon \in (a,b) :$ $A - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq A$



$\delta := b - x_\varepsilon > 0$

$f \uparrow \Rightarrow \forall x > x_\varepsilon$ $f(x) \geqslant f(x_\varepsilon)$; $f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) > A - \varepsilon$

Т.о. если $b - \delta < x < b$, то $A - \varepsilon < f(x) \leq A < A + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = A = \sup\limits_{(a,b)} f$

б) $A=+\infty$, $\sup\limits_{(a,b)} f=+\infty \Rightarrow f$ не огр. св. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall E>0 \quad \exists\, x_E \in (a,b):\quad f(x_E)>E$.

$\delta := b - x_E \qquad \forall x > x_E \quad f(x) \geqslant f(x_E) > E$

Значит, $b-\delta<x<b \Rightarrow f(x)>E \Rightarrow \lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty=\sup\limits_{(a,b)} f$ ▶