Тишин В.В.

Нормальные алгоритмы.

Числовая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *вычислимой по Маркову*, если существует нормальный алгоритм, который каждое изображение набора аргументов преобразует в значение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на этом наборе.

Другими словами, числовая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *вычислимой по Маркову*, если существует нормальный алгоритм, применимый ко всем словам вида $1^{x_1+1} * 1^{x_2+1} * \ldots * 1^{x_n+1}$, преобразующий их в слово $1^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+1}$.

Примеры.

1) Доказать вычислимость по Маркову функции $f(x, y) = 3x + y$.

Вначале мы имеем запись изображения набора аргументов $1^{x+1} * 1^{y+1}$.

С помощью подстановки $1* \to *111$ утроим количество единиц в изображении первого аргумента. Применив эту формулу подстановки $x+1$ раз, получим слово $*1^{3x+y+4}$. Сотрём звёздочку и лишние 3 единицы с помощью заключительной формулы подстановки $*111 \to .$ Запишем нормальную схему подстановок: $\begin{cases} 1* \to *111 \\ *111 \to . \end{cases}$

Проверим работу алгоритма над изображением набора переменных $(0,1)$, т.е. над словом $1*11$:

$\underline{1*}11$, $\underline{*111}1$, 11.

Так, осталось две единицы, которые являются изображением числа 1, что и ожидалось, т.к. $f(0,1) = 3 \cdot 0 + 1 = 1$.

2) Какую функцию $f(x,y,z)$ вычисляет нормальный алгоритм, заданный схемой подстановок $\begin{cases} 1*1 \to 1* \\ 1** \to \alpha \\ \alpha 1 \to 11\alpha \\ \alpha \to . \end{cases}$?

Вначале мы имеем запись изображения набора аргументов $1^{x+1}*1^{y+1}*1^{z+1}$.

Применяя, пока возможно, первую формулу подстановки $1*1 \to 1*$, сотрём изображение второго аргумента, получим слово $1^{x+1}**1^{z+1}$.

Далее применится формула подстановки $1** \to \alpha$, получим слово $1^{x}\alpha 1^{z+1}$.

Далее будет применяться формула подстановки $\alpha 1 \to 11\alpha$, в результате чего перейдём к слову $1^{x+2z+2}\alpha$.

И, наконец, применяя заключительную формулу подстановки $\alpha \to .$ получаем слово 1^{x+2z+2}, которое является изображением числа $x+2z+1$. Значит, данный нормальный алгоритм вычисляет функцию $f(x,y,z)=x+2z+1$.

Проверим работу нормального алгоритма над изображением набора аргументов (0;2;1).

$\underline{1*1}11*11, \underline{1*1}1*11, \underline{1*1}*11, \underline{1**}11, \underline{\alpha 1}1, 11\underline{\alpha 1}, 1111\underline{\alpha}, 1111.$

Получено изображение числа 3. И действительно, $f(0,2,1)=3$.

Проверка закончена.

Вопросы для самопроверки.

1) Является ли словом в алфавите {1,a,b} запись $\begin{matrix} bbb1a \\ b\quad a \end{matrix}$?

2) Единственным ли образом в общем случае слово P входит в слово Q ?

3) Применим ли нормальный алгоритм, заданный в алфавите $\{a,b\}$, схемой подстановок $\{a \to a$ к слову $abba$?

4) Что является результатом работы нормального алгоритма, задаваемого в алфавите $\{a,b\}$ схемой подстановок $\begin{cases} a \to \\ b \to \end{cases}$ над произвольным словом в алфавите $\{a,b\}$?

5) Является ли вычислимой по Маркову функция $f(x,y,z)=3$?

6) Какую функцию $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ вычисляет нормальный алгоритм, заданный схемой подстановок $\{*1 \to$?

Ответы:

1. Нет, так как запись не представляет из себя горизонтальную последовательность символов.
2. Нет, пример представлен в тексте лекции.
3. Нет, так без ограничений будет использоваться подстановка $a \to a$
4. Пустое слово.
5. Да, примером нормального алгоритма, вычисляющего эту функцию, может служить алгоритм, заданный системой подстановок $\begin{cases} 1 \to \\ * \to \\ \to 1111. \end{cases}$
6. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

Рекурсивные функции.

Как и в случае машин Тьюринга, а также функций, вычислимых по Маркову, будем рассматривать *числовые* функции, то есть функции вида $f: N_0^n \to N_0$, функции многих переменных, где каждая переменная может принимать значения во множестве целых неотрицательных чисел, и своей областью прибытия функция также имеет множество неотрицательных целых чисел.

В дальнейшем будем рассматривать числовые функции, не обязательно всюду определённые. Рассмотрим несколько операций над ними.

Операция суперпозиции.

Пусть заданы n – местная частичная функция g и частичные функции $f_1, f_2, ..., f_n$. Будем считать, что функции $f_1, f_2, ..., f_n$ зависят от одних и тех же аргументов $x_1, x_2, ..., x_m$ (этого можно достигнуть, добавив при необходимости к аргументам некоторых функций фиктивные аргументы).

Суперпозицией функций g *и* $f_1, f_2, ..., f_n$ назовём частичную функцию $h(x_1, x_2, ..., x_m) = g(f_1(x_1, x_2, ..., x_m), ..., f_n(x_1, x_2, ..., x_m))$, значения которой на наборе $(a_1, a_2, ..., a_m)$ задаются указанной формулой, если определены значения $z_1 = f_1(a_1, a_2, ..., a_m), ..., z_n = f_n(a_1, a_2, ..., a_m)$ и значение $g(z_1, z_2, ..., z_n)$. В противном случае величина $h(a_1, a_2, ..., a_m)$ считается неопределённой.

Пример. Пусть, например, $f_1(x, y) = x - y$, $f_2(x, z) = x^2 + z$, $g(x, y) = \frac{x}{y}$.

Рассмотрим суперпозицию $h(x, y, z) = g(f_1(x, y), f_2(x, z)) = \frac{x-y}{x^2+z}$.

Вычисление некоторых значений можно проиллюстрировать таблицей:

x	y	z	$x-y$	x^2+z	$\frac{x-y}{x^2+z}$
1	2	5	-	6	-
4	1	0	3	16	-
2	2	1	0	5	0

Операция примитивной рекурсии.

Пусть даны функции $g(x_1,x_2,...,x_{n-1})$, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ и $h(x_1,x_2,...,x_{n+1})$.

Будем говорить, что функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ получена из функций $g(x_1,x_2,...,x_{n-1})$ и $h(x_1,x_2,...,x_{n+1})$ по *схеме примитивной рекурсии*, если выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} f(x_1,x_2,...,x_{n-1},0)=g(x_1,x_2,...,x_{n-1}); \\ f(x_1,x_2,...,x_{n-1},y+1)=h(x_1,x_2,...,x_{n-1},y,f(x_1,x_2,...,x_n,y)) \end{cases} . \quad \textbf{(1)}$$

Если n = 1, то соотношения примут вид:

$$\begin{cases} f(0)=C; \\ f(y+1)=h(y,f(y)) \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

Примеры.

1) Пусть, например, $C=1$, $h(x_1,x_2)=(x_1+1)\cdot x_2$.

Тогда $f(0)=1;$

$f(1)=h(0,f(0))=1\cdot 1=1;$

$f(2)=h(1,f(1))=2\cdot 1;$

$f(3)=h(2,f(2))=3\cdot 2;$

$f(4)=h(3,f(3))=4\cdot 3\cdot 2;$

Нетрудно доказать, что $f(x_1)=x_1!$

2) Найти функцию $f(x_1,x_2)$, полученную из функций $g(x_1)=0$ и $h(x_1,x_2,x_3)=x_2+x_3$ по схеме примитивной рекурсии

Найдём несколько значений функции f:

$f(x_1,0)=g(x_1)=0;$

$f(x_1,1)=h(x_1,0,f(x_1,0))=h(x_1,0,0)=0+0=0;$

$f(x_1,2)=h(x_1,1,f(x_1,1))=h(x_1,1,0)=1+0=1;$

$f(x_1,3)=h(x_1,2,f(x_1,2))=h(x_1,2,1)=2+1.$

Возникает предположение, что $f(x_1,x_2)=1+2+...+(x_2\text{-}1)=\dfrac{x_2\cdot(x_2\text{-}1)}{2}$; **(3)**

Докажем формулу (3) методом математической индукции, проведя индукцию по x_2:

1) Проверка при $x_2 = 0$.

$f(x_1, 0) = 0 = \frac{0 \cdot (-1)}{2}$. Да, при $x_2 = 0$ формула (3) верна.

2) Допустим, что предложение (3) верно при $x_2 = n$, т.е. допустим, что верна формула $f(x_1, n) = \frac{n(n-1)}{2}$; **(4)**

3) Докажем, что предложение (3) верно при $x_2 = n+1$, т.е. докажем справедливость формулы $f(x_1, n+1) = \frac{(n+1)n}{2}$ **(5)**

Выразим $f(x_1, n+1)$ с помощью схемы примитивной рекурсии:

$$f(x_1, n+1) = h(x_1, n, f(x_1, n)) = h\left(x_1, n, \frac{n(n-1)}{2}\right) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

Итак, в предположении справедливости формулы (4) доказана формула (5).

На основании метода математической индукции утверждаем, что предложение (3) справедливо для всех $x_2 \in N_0$. Ответ: $f(x_1, x_2) = \frac{x_2 \cdot (x_2\text{-}1)}{2}$.

Исходными функциями называются числовые функции следующих видов: 1) $o(x) \equiv 0$ - *нулевая* функция;

2) $s(x) \equiv x+1$ - функция *следования*;

3) $I_k^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_k$ - функция *выбора аргумента*.

Числовая функция называется *примитивно-рекурсивной*, если она может быть получена из исходных за конечное число шагов с помощью операций суперпозиции и примитивной рекурсии.

Докажем примитивную рекурсивность некоторых функций.

1) Константа $f(x_1) \equiv C$.

Константа может быть получена из нулевой и функции следования только лишь с помощью суперпозиций: $\underbrace{s(s(\ldots s}_{C\text{ раз}}(o(x_1)\ldots)) \equiv C$.

2) Сложение $f_+(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

$f_+(x_1, 0) = x_1 + 0 = x_1 = I_1^1(x_1)$, т.е. $g(x_1) = I_1^1(x_1)$.

$f_+(x_1, y+1) = x_1 + y + 1 = f_+(x_1, y) + 1$.

В качестве $h(x_1, x_2, x_3)$ можно взять $h(x_1, x_2, x_3) = s(I_1^3(x_1, x_2, x_3))$.

Тогда

$$h(x_1, y, f_+(x_1, y)) = s(I_3^3(x_1, y, f_+(x_1, y)) = f_+(x_1, y) + 1 = f_+(x_1, y) + 1 =$$
$$= x_1 + y + 1 = f_+(x_1, y+1)$$

3) Умножение $f_\times(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.

$f_\times(x_1, 0) = x_1 \cdot 0 = 0 = o(x_1)$, т.е. $g(x_1) = o(x_1)$.

$f_\times(x_1, y+1) = x_1(y+1) = x_1 y + x_1 = f_\times(x_1, y) + x_1$.

В качестве $h(x_1, x_2, x_3)$ можно взять $h(x_1, x_2, x_3) = I_3^3(x_1, x_2, x_3) + I_1^3(x_1, x_2, x_3)$.

Тогда $h(x_1, y, f_\times(x_1, y)) = I_3^3(x_1, y, f_\times(x_1, y)) + I_1^3(x_1, y, f_\times(x_1, y)) =$

$$= f_\times(x_1, y) + x_1 = x_1 y + x_1 = x_1(y+1) = f_\times(x_1, y+1).$$

4) Экспонента $f_{\exp}(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$.

$f_{exp}(x_1, 0) = x_1^0 = 1 = s(o(x_1)),$, т.е. $g(x_1) = s(o(x_1))$.

$f_{\exp}(x_1, y+1) = x_1^{y+1} = x_1^y \cdot x_1 = f_{\exp}(x_1, y) \cdot x_1$.

В качестве $h(x_1, x_2, x_3)$ можно взять $h(x_1, x_2, x_3) = I_3^3(x_1, x_2, x_3) \cdot I_1^3(x_1, x_2, x_3)$.

Тогда $h(x_1, y, f_{\exp}(x_1, y)) = I_3^3(x_1, y, f_{\exp}(x_1, y)) \cdot I_1^3(x_1, y, f_{\exp}(x_1, y)) =$

$$= f_{\exp}(x_1, y) \cdot x_1 = x_1^y \cdot x_1 = x_1^{y+1} = f_{\exp}(x_1, y+1).$$

5) Усечённая разность.

а) Сначала докажем примитивную рекурсивность функции

$$f_1(x_1) = x_1 \dot{-} 1 = \begin{cases} x_1 - 1, \text{ если } x_1 \neq 0; \\ 0, \quad \text{если } x_1 = 0. \end{cases}$$

$$f_1(0) = 0 = C; \quad f_1(y+1) = y = h(y; f_1(y)).$$

В качестве $h(x_1,x_2)$ можно взять $h(x_1,x_2) = I_1^2(x_1,x_2)$.

Тогда $h(y,f_1(y)) = I_1^2(y, f_1(y)) = y = f_1(y+1)$.

б) Докажем примитивную рекурсивность функции *усечённая разность*. $f_-(x_1,x_2) = x_1 \dot{-} x_2 = \begin{cases} x_1 - x_2, \text{ если } x_1 > x_2, \\ 0, \quad \text{если } x_1 \le x_2. \end{cases}$ 1

$$f_-(x_1,0) = x_1 - 0 = x_1 = I_1^1(x_1); \text{ т.е. } g(x_1) = I_1^1(x_1).$$

$$f_-(x_1, y+1) = x_1 \dot{-} (y+1) = (x_1 \dot{-} y) \dot{-} 1 = f_-(x_1, y) \dot{-} 1.$$

В качестве $h(x_1,x_2,x_3)$ можно взять $h(x_1,x_2,x_3) = I_3^3(x_1,x_2,x_3) \dot{-} 1$

Тогда $h(x_1, y, f_-(x_1,y)) = I_3^3(x_1, y, f_-(x_1,y)) \dot{-} 1 = f_-(x_1,y) \dot{-} 1.$

6) Модуль разности $f(x_1,x_2) = |x_1 - x_2| = (x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1)$

Докажем последнее равенство.

а) $x_1 > x_2$. $(x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1) = (x_1 - x_2) + 0 = |x_1 - x_2|$

б) $x_1 \le x_2$. $(x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1) = 0 + (x_2 - x_1) = |x_1 - x_2|$.