Тишин В.В.

Рассмотрим некоторый аналог понятия возведения в степень, рассматриваемого ранее в курсе дискретной математики.

Введём обозначение: $A' = \begin{cases} A, \text{ если } h(A)=1; \\ \neg A, \text{ если } h(A)=0. \end{cases}$

Утверждение о выводимости степени формулы из набора степеней аргументов.

Доказательство.

Пусть дана $A(X_1, X_2, ..., X_n)$. Тогда $X_1', X_2', ..., X_n' \vdash A'$.

Поясним на примерах.

Пример 1. Пусть $A(X_1, X_2) = \neg X_1 \to X_2$.

а) Если $h(X_1)=1, h(X_2)=0$, то $h(A)=1$,

тогда $X_1' = X_1, X_2' = \neg X_2, A' = \neg X_1 \to X_2$ и утверждение примет вид:

$X_1, \neg X_2 \vdash \neg X_1 \to X_2$.

б) Если $h(X_1)=0, h(X_2)=0$, то $h(A)=0$,

тогда $X_1' = \neg X_1, X_2' = \neg X_2, A' = \neg(\neg X_1 \to X_2)$ и утверждение примет вид: $\neg X_1, \neg X_2 \vdash \neg(\neg X_1 \to X_2)$.

Докажем утверждение индукцией по k – количеству связок формулы A.

1. Проверка при $k=0$.

В этом случае A – символ переменной X_i, и утверждение примет вид:

$X_1', ..., X_i', ..., X_n' \vdash X_i'$.

Таким образом, доказательство утверждения сводится к доказательству выводимостей $X_1', ..., X_i, ..., X_n' \vdash X_i$ и $X_1', ..., \neg X_i, ..., X_n' \vdash \neg X_i$. В каждом из этих случаев вывод состоит из одной единственной формулы: X_i и $\neg X_i$ соответственно.

2. Допустим, утверждение $X_1', X_2', ..., X_n' \vdash A'$ верно при $k \le m$.

3. Докажем справедливость утверждения при $k = m+1$.

Случай 1. Формула A имеет вид отрицания: $A = \neg B$. Число вхождений логических связок в формулу B равно m.

Случай 1а. $h(B)=1$, тогда $B' = B$, $h(A)=h(\neg B)=0$, и $A' = \neg A = \neg\neg B$.

По допущению индукции, $X_1', X_2', ..., X_n' \vdash B$, то есть существует вывод $B_1, B_2, ..., B$ формулы B из гипотез $X_1', X_2', ..., X_n'$. Дополним эту последовательность формулами $B \to \neg\neg B$ - 2ДО и $\neg\neg B$ -получена по правилу МР из формул $B \to \neg\neg B$ и B. В результате получена последовательность

$B_1, B_2, ..., B, B \to \neg\neg B, \neg\neg B$ - вывод $\neg\neg B$ из $X_1', X_2', ..., X_n'$.

Случай 1б. $h(B)=0$, тогда $B' = \neg B$, $h(A)=h(\neg B)=1$, и $A' = A = \neg B$.

По допущению индукции, $X_1', X_2', ..., X_n' \vdash \neg B$, то есть существует вывод $B_1, B_2, ..., \neg B$ формулы $\neg B$ из гипотез $X_1', X_2', ..., X_n'$, что и требовалось получить, так как $A' = A = \neg B$.

Случай 2. Формула A имеет вид импликации: $A = B \to C$. Число вхождений логических связок в формулы B и C равно m.

Случай 2а. $h(B)=1$, тогда $B' = B$, $h(C)=0$, тогда $C' = \neg C$,

$h(A)=h(B \to C)=0$, и $A' = \neg A = \neg(B \to C)$.

По допущению индукции, $X_1', X_2', ..., X_n' \vdash B$, $X_1', X_2', ..., X_n' \vdash \neg C$, то есть существует вывод $B_1, B_2, ..., B$ формулы B из гипотез $X_1', X_2', ..., X_n'$, существует вывод $C_1, C_2, ..., \neg C$ формулы $\neg C$ из гипотез $X_1', X_2', ..., X_n'$. Составим последовательность $B_1, B_2, ..., B, C_1, C_2, ..., \neg C$ и дополним её формулами $B \to (\neg C \to \neg(B \to C))$ - *ОИ*, $\neg C \to \neg(B \to C)$ - получена по правилу *МР* из формул $B \to (\neg C \to \neg(B \to C))$ и B, $\neg(B \to C)$- получена по правилу *МР* из формул $\neg C \to \neg(B \to C)$ и $\neg C$. В результате получена последовательность

$B_1, B_2, ..., B, C_1, C_2, ..., \neg C, B \to (\neg C \to \neg(B \to C)), \neg C \to \neg(B \to C)$, $\neg(B \to C)$- вывод $\neg(B \to C)$ из $X_1', X_2', ..., X_n'$.

Случай 2б. $h(B) = 1$, тогда $B' = B$, $h(C) = 1$, тогда $C' = C$,

$h(A) = h(B \to C) = 1$, и $A' = A = B \to C$.

По допущению индукции, $X_1', X_2', ..., X_n' \vdash C$, то есть существует вывод $C_1, C_2, ..., C$ формулы C из гипотез $X_1', X_2', ..., X_n'$. Дополним последовательность $C_1, C_2, ..., C$ формулами $C \to (B \to C)$ - аксиома по 1 схеме аксиом, $B \to C$ - получена по правилу MP из формул $C \to (B \to C)$ и C. В результате получена последовательность

$C_1, C_2, ..., \neg C, C \to (B \to C), B \to C$- вывод $B \to C$ из $X_1', X_2', ..., X_n'$.

Случай 2в. $h(B) = 0$, тогда $B' = \neg B$,

$h(A) = h(B \to C) = 1$, и $A' = A = B \to C$.

По допущению индукции, $X_1', X_2', ..., X_n' \vdash \neg B$, то есть существует вывод $B_1, B_2, ..., \neg B$ формулы $\neg B$ из гипотез $X_1', X_2', ..., X_n'$. Дополним последовательность $B_1, B_2, ..., \neg B$ формулами $\neg B \to (B \to C)$ - $ВИ$, $B \to C$ - получена по правилу MP из формул $\neg B \to (B \to C)$ и $\neg B$. В результате получена последовательность $B_1, B_2, ..., \neg B$, $\neg B \to (B \to C), B \to C$- вывод $B \to C$ из $X_1', X_2', ..., X_n'$.

Все возможные случаи рассмотрены, поэтому на основании метода математической индукции заявляем, что утверждение о выводимости степени формулы из набора степеней аргументов доказано. ■

Полнота.

Рассмотрим важное понятие – понятие полноты формальной теории.

Формальная теория называется *полной*, если каждая тавтология является её теоремой.

Утверждение о полноте исчисления L.

Классическое исчисление высказываний L является полной теорией.

Доказательство.

Пусть $h(A(X_1,X_2,...,X_n))\equiv 1$. Тогда $A'=A$. По утверждению о выводимости степени формулы из набора степеней аргументов имеем, что $X_1',X_2',...,\neg X_n \vdash A$.

По теореме дедукции, $X_1',X_2',...,X_{n-1}' \vdash \neg X_n \to A$, и существует вывод $B_1, B_2,...,\neg X_n \to A$ из гипотез $X_1',X_2',...,X_{n-1}'$.

Аналогично, $X_1',X_2',...,X_n \vdash A$.

По теореме дедукции, $X_1',X_2',...,X_{n-1}' \vdash X_n \to A$, и существует вывод $C_1, C_2,...,X_n \to A$ из гипотез $X_1',X_2',...,X_{n-1}'$. Запишем последовательность формул: $B_1, B_2,...,\neg X_n \to A, C_1, C_2,...,X_n \to A$, $(X_n \to A)\to((\neg X_n \to A)\to A)$ - теорема PC, $(\neg X_n \to A)\to A$ - результат применения MP к $X_n \to A$ и $(X_n \to A)\to((\neg X_n \to A)\to A)$, A - результат применения MP к $\neg X_n \to A$ и $\neg X_n$.

В результате получена последовательность

$B_1, B_2,...,\neg X_n \to A, C_1, C_2,...,X_n \to A, (X_n \to A)\to((\neg X_n \to A)\to A)$, $(\neg X_n \to A)\to A$, A - вывод A из $X_1',X_2',...,X_{n-1}'$, то есть доказано, что $X_1',X_2',...,X_{n-1}' \vdash A$.

Повторив аналогичные рассуждения ещё n - 1 раз, получим, что $\vdash A$.

Мы доказали, что произвольная тавтология исчисления L является теоремой, значит, исчисление L является полной формальной теорией. ■

Итак, учитывая утверждение о полноте исчисления L и утверждение о тождественной истинности теорем исчисления L, получим критерий тождественной истинности формул исчисления L.

Критерий тождественной истинности формул исчисления L.

Формула исчисления L является тавтологией тогда и только тогда, когда она является его теоремой.

Непротиворечивость.

Формальная теория называется *противоречивой*, если для некоторой формулы B в этой теории одновременно выводимы B и $\neg B$.

Соответственно, формальная теория называется *непротиворечивой*, если ни для какой формулы B в этой теории не могут быть одновременно выводимы B и $\neg B$.

Утверждение о непротиворечивости исчисления L.

Исчисление L является непротиворечивым.

Доказательство.

Пусть формула B является теоремой исчисления L. тогда B – тавтология. Но тогда $\neg B$ не является тавтологией, а, следовательно, согласно критерию тождественной истинности формул теории L, $\neg B$ не является выводимой формулой, следовательно, исчисление L является непротиворечивым.

Формальная теория называется *полной в узком смысле*, если добавление любой невыводимой формулы в качестве схемы аксиом с сохранением правил вывода приводит к противоречивой теории.

Утверждение о полноте в узком смысле исчисления L.

Исчисление L является полным в узком смысле.

Доказательство.

Пусть $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ - произвольная невыводимая формула. Значит, согласно критерию тождественно истинной формулы, формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ не является тавтологией. Следовательно, найдётся набор $(a_1, a_2, ..., a_n)$, такой, что $F(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$.

Рассмотрим формулы $B_i = \begin{cases} A \to A, \text{если } a_i = 1; \\ \neg(A \to A), \text{если } a_i = 0. \end{cases}$

Тогда $F(B_1, B_2, ..., B_n)$ - тождественно – ложная формула.

Рассмотрим новое исчисление, которое обозначим, как исчисление F. В него включим схемы аксиом $A1$-$A3$ исчисления L, а также схему аксиом $F(B_1, B_2, ..., B_n)$, а в качестве правила вывода будем использовать *Modus Ponenes*. Тогда для произвольной формулы C формула $F(B_1, B_2, ..., B_n) \to C$ является тавтологией, значит, она выводима в исчислении L, а, следовательно и в исчислении F,

$$\vdash_F F(B_1, B_2, ..., B_n) \to C.$$

Последовательность $F(B_1, B_2, ..., B_n) \to C$, $F(B_1, B_2, ..., B_n)$, C является доказательством теоремы C в исчислении F.

Но, аналогично, также тавтологией является и формула $F(B_1, B_2, ..., B_n) \to \neg C$, а, значит, $\vdash_F F(B_1, B_2, ..., B_n) \to \neg C$.

Последовательность $F(B_1, B_2, ..., B_n) \to \neg C$, $F(B_1, B_2, ..., B_n)$, $\neg C$ является доказательством теоремы $\neg C$ в исчислении F.

Имеем, что в исчислении F выводимы как формула C, так и её отрицание $\neg C$.

Таким образом, полученное исчисление F является противоречивым, а, следовательно, исчисление L является полным в узком смысле. ■

Формальная теория называется *абсолютно непротиворечивой,* если не все её формулы выводимы.

Утверждение об абсолютной непротиворечивости исчисления L.

Исчисление L абсолютно непротиворечиво.

Доказательство. Формула $A \to C$ не является тавтологией, а, следовательно, не является теоремой исчисления L.

В исчислении L нашлась формула, не являющаяся тавтологией, а, следовательно, L абсолютно непротиворечиво. ■

Независимость.

Рассмотрим вопрос: нельзя ли в исчислении L уменьшить число схем аксиом хотя бы на одну, но чтобы новое исчисление обладало бы такими же свойствами, как и исчисление L? Это было бы возможно, если какая-нибудь схема аксиом выводилась из остальных схем аксиом.

Формула A называется *независимой от списка формул Γ*, если A невыводима из гипотез Γ.

Утверждение о независимости каждой из схем аксиом исчисления L от остальных двух аксиом L.

Каждая из трёх схем аксиом исчисления L является независимой от остальных двух схем аксиом L.

I. Независимость схемы аксиом $A3$ от аксиом $A1$, $A2$.

Докажем независимость схемы аксиом $A3$ от аксиом $A1$, $A2$.

Допустим противное, то есть допустим, что существует вывод третьей схемы аксиом из первых двух: $B_1, B_2, ..., B_n = A3$.

Рассмотрим операцию g над формулами исчисления L, заключающуюся в стирании всех символов отрицания.

Пример: $g((A \to \neg(B \to \neg C)) \to \neg A) = (A \to (B \to C)) \to A$.

Заметим, что так, как первая и вторая схемы аксиом не содержат символа отрицания, то операция g, применённая к аксиоме по первой или второй схемам аксиом, также будет являться аксиомой по соответствующей схеме аксиом.

Пример: $\neg(A \to \neg B) \to (C \to \neg(A \to \neg B))$ - аксиома по $A1$, полученная подстановкой $\begin{pmatrix} \neg(A \to \neg B) & C \\ A & B \end{pmatrix}$, и

$$g(\neg(A \to \neg B) \to (C \to \neg(A \to \neg B))) = ((A \to B) \to (C \to (A \to B)))$$

- аксиома по $A1$, полученная подстановкой $\begin{pmatrix} A \to B & C \\ A & B \end{pmatrix}$.

Применим к каждому члену последовательности $B_1, B_2, ..., B_n$ операцию g, тогда каждый член этой последовательности, включая последний, – аксиома, то есть тождественно истинная формула, или получена из тавтологий с помощью правила вывода MP, что, как было доказано ранее, также даёт тавтологию.

Рассмотрим применение операции g к последнему члену этой последовательности, схеме аксиом $A3$:

$$g((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)) = (B \to A) \to ((B \to A) \to B)$$

Но при $A = B = 0$ имеем

$$(0 \to 0) \to ((0 \to 0) \to 0) = 1 \to (1 \to 0) = 1 \to 0 = 0.$$

Видим, что $g(A3)$ не является тавтологией. Получено противоречие. Следовательно, допущение о том, что существует вывод третьей схемы аксиом из первых двух, неверно, утверждение о независимости $A3$ от $A1$ и $A2$ доказано. ■