Рекуррентные соотношения.

Пусть дана числовая последовательность

$$f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots . \qquad \textbf{(18)}$$

Рекуррентным соотношением k-го порядка называется формула, позволяющая вычислять члены последовательности (18), начиная с k+1- го, через k предыдущих членов этой последовательности.

Набор значений первых k членов последовательности (18) называется *начальными условиями* рекуррентного соотношения.

Пример: $f(n+3) = 5 \cdot \ln(f^2(n+2)) - n \cdot f(n+1) + \sqrt{f(n)} + n^2$ - рекуррентное соотношение третьего порядка.

Решением рекуррентного соотношения k-го порядка называется последовательность, все члены которой, начиная с k+1-го, выражаются через k предыдущих членов этой последовательности с помощью данного рекуррентного соотношения.

Пример: Проверить, что последовательность $f(n) = 2^n$ является решением рекуррентного соотношения второго порядка

$$f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n). \qquad \textbf{(19)}$$

$f(n+2) = 2^{n+2}$,

$3f(n+1) - 2f(n) = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$.

Видим, что равенство (19) выполнено.

Общим решением рекуррентного соотношения k-го порядка называется решение, содержащее k произвольных постоянных, такое, что для любых чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ путём подбора этих постоянных можно получить, что $f(0) = a_1, f(1) = a_2, \dots, f(k-1) = a_k$.

Линейным однородным рекуррентным соотношением 2-го порядка с постоянными коэффициентами называется соотношение вида

$$f(n+2) = pf(n+1) + qf(n) \qquad \textbf{(20)}$$

Очевидно, что последовательность из одних нулей является решением любого соотношения вида (20), так что в дальнейшем будем искать решение соотношения (20) только в виде $f(n)=x^n$, где $x \neq 0$. Тогда соотношение (20) примет вид

$$x^{n+2} = px^{n+1} + qx^n.$$

Поделив обе части этого равенства на $x^n \neq 0$, получим уравнение

$$x^2 = px + q. \qquad \textbf{(21)}$$

которое называется *характеристическим уравнением соотношения* **(20).**

Лемма о линейной комбинации решений линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами.

Линейная комбинация решений линейного однородного соотношения с постоянными коэффициентами также является решением этого соотношения.

Доказательство леммы проведём для линейного рекуррентного соотношения 2 порядка с постоянными коэффициентами.

$$f(n+2) = p \cdot f(n+1) + q \cdot f(n). \qquad \textbf{(22)}$$

Пусть $f(n)$, $g(n)$ - решения соотношения (22), а $h(n) = Af(n) + Bg(n)$ - их произвольная линейная комбинация. Покажем, что $h(n)$ также является решением соотношения (22).

Из условия следует, что кроме соотношения (22) верно соотношение

$$g(n+2) = p \cdot g(n+1) + q \cdot g(n). \qquad \textbf{(23)}$$

Умножим обе части равенства (22) на A, а обе части равенства (23) на B, и сложим. Получим:

$$Af(n+2) + Bg(n+2) = h(n+2) =$$

$$= Ap \cdot f(n+1) + Aq \cdot f(n) + Bp \cdot g(n+1) + Bq \cdot g(n) =$$

$$= p \cdot (Af(n+1) + Bg(n+1)) + q \cdot (Af(n) + Bg(n)) = p \cdot h(n+1) + q \cdot h(n).$$

Таким образом, $h(n+2)=p\cdot h(n+1)+q\cdot h(n)$, то есть $h(n)$ также является решением соотношения (22). ■

Теорема о виде общего решения линейного однородного рекуррентного соотношения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть дано соотношение (22) *с характеристическим уравнением*

$$x^2 = p\cdot x+q. \qquad \textbf{(24)}$$

1. *Если уравнение* (24) *имеет два различных действительных корня* x_1 *и* x_2, *то общее решение соотношения* (22) *имеет вид*

$$f(n)=C_1x_1^n+C_2x_2^n \qquad \textbf{(25)}$$

2. *Если уравнение* (24) *имеет два совпадающих действительных корня* $x_1=x_2$, *то общее решение соотношения* (22) *имеет вид*

$$f(n)=x_1^n(C_1+nC_2) \qquad \textbf{(26)}$$

3. *Если уравнение* (24) *имеет два комплексных корня* $x_{1,2}=r(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$, *то общее решение соотношения* (22) *имеет вид*

$$f(n)=r^n(C_1\cos\varphi+C_2\sin\varphi) \qquad \textbf{(27)}$$

1 случай. Уравнение (24) имеет два различных действительных корня x_1 и x_2, значит, последовательности x_1^n и x_2^n являются решениями соотношения (22). Но тогда по лемме о линейной комбинации решений линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами имеем, что $f(n)=C_1x_1^n+C_2x_2^n$ также является решением соотношения (22).

Покажем, что это – общее решение, то есть покажем, что для любых чисел A и B можно подобрать константы C_1 и C_2 так, что $f(0)=A$, $f(1)=B$.

Пусть A и B - произвольные числа. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} C_1 x_1^0 + C_2 x_2^0 = A; \\ C_1 x_1^1 + C_2 x_2^1 = B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = A; \\ C_1 x_1 + C_2 x_2 = B. \end{cases}$$ Определитель этой системы линейных уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2 имеет вид: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 \neq 0$, так как x_1 и x_2 - различные действительные корни. Значит, эта система имеет решение.

2 случай. Уравнение (24) имеет два совпадающих действительных корня $x_1 = x_2$. По теореме Виета, характеристическое уравнение примет вид $x^2 = 2x_1 \cdot x - x_1^2$, а рекуррентное соотношение будет выглядеть так:

$$f(n+2) = 2x_1 \cdot f(n+1) - x_1^2 \cdot f(n). \qquad \textbf{(28)}$$

Подстановкой проверим, что $f(n) = x_1^n (C_1 + nC_2)$ является решением этого рекуррентного соотношения.

$$f(n+2) = x_1^{n+2}(C_1 + (n+2)C_2);$$

$$2x_1 \cdot f(n+1) - x_1^2 \cdot f(n) = 2x_1 \cdot (x_1^{n+1}(C_1 + (n+1)C_2)) - x_1^2 \cdot (x_1^n (C_1 + nC_2)) =$$
$$= x_1^{n+2}(2C_1 + 2(n+1)C_2) - C_1 - nC_2) = x_1^{n+2}(C_1 + (n+2)C_2).$$

Итак, мы убедились, что $f(n) = x_1^n (C_1 + nC_2)$ является решением соотношения (28).

Покажем, что это – общее решение, то есть покажем, что для любых чисел A и B можно подобрать константы C_1 и C_2 так, что $f(0) = A$, $f(1) = B$.

Пусть A и B - произвольные числа. Рассмотрим систему

$\begin{cases} x_1^0(C_1+0\cdot C_2)=A; \\ x_1^1(C_1+1\cdot C_2)=B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=A; \\ x_1 C_1 + x_1 \cdot C_2 = B. \end{cases}$ Определитель этой системы линейных уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2 имеет вид: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 \neq 0\cdot$

Значит, эта система имеет решение.

<u>3 случай.</u> Уравнение (24) имеет два комплексно-сопряжённых корня $x_{1,2}=r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$. Тогда решениями рекуррентного соотношения (22) будут последовательности $x_1^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ и $x_2^n = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$.

По лемме о линейной комбинации решений линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами имеем, что $\dfrac{x_1^n+x_2^n}{2}=r^n\cos n\varphi$, $\dfrac{x_1^n-x_2^n}{2i}=r^n\sin n\varphi$, $f(n)=C_1r^n\cos n\varphi + C_2r^n\sin n\varphi = r^n(C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi)$, также являются решением соотношения (22).

Покажем, что это – общее решение, то есть покажем, что для любых чисел A и B можно подобрать константы C_1 и C_2 так, что $f(0)=A$, $f(1)=B$.

Пусть A и B - произвольные числа. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} r^0(C_1\cos(0\cdot\varphi)+C_2\sin(0\cdot\varphi))=A; \\ r^1(C_1\cos(1\cdot\varphi)+C_2\sin(1\cdot\varphi))=B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=A; \\ rC_1\cos\varphi + rC_2\sin\varphi = B. \end{cases}$$

Определитель этой системы линейных уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2 имеет вид:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi \end{vmatrix} = r\sin\varphi$. Здесь $r \neq 0$, так как корни характеристического уравнения ненулевые, $\sin\varphi \neq 0$, так как корни характеристического уравнения не действительные.

Значит, система относительно неизвестных C_1 и C_2 имеет решение. ■

Пример. Задача Фибоначчи о кроликах.

Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причём новорождённые крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. В начале года имеется разнополая пара новорождённых кроликов. Вывести формулу, указывающую количество пар кроликов на начало n – го месяца наблюдений при условии, что к началу n – го месяца никто из кроликов не погиб и не потерял способности производить ежемесячно потомство.

Решение. Обозначим через $f(n)$ количество пар кроликов на начало n – го месяца. Чисто формально можно считать, что $f(0)=0$. По условию, $f(1)=f(2)=1$. К началу 3го месяца появится приплод, поэтому $f(3)=2$. К началу 4 месяца первоначальная пара кроликов снова даст приплод, а новорождённые кролики приплода пока не дадут, поэтому $f(4)=3$. В начале же 5-го месяца приплод дадут и первоначальная пара, и пара, родившаяся в конце второго месяца, получится 5 пар кроликов, то есть $f(5)=f(4)+f(3)=3+2=5$. Получили рекуррентную последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5.

Рассуждая по аналогии, получаем рекуррентное соотношение $f(n+2)=f(n+1)+f(n)$. **(29)**

Найдём сначала общее решение этого соотношения.

Характеристическое уравнение соотношения (29) имеет вид:

$x^2 = x+1$, решая которое, получим $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Согласно теореме о виде общего решения линейного однородного рекуррентного соотношения 2-го порядка с постоянными коэффициентами, $f(n)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Найдём решение, удовлетворяющее начальным условиям $f(0)=0$, $f(1)=1$.

Получаем систему $\begin{cases} C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0=0; \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1=1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} C_1+C_2=0; \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=-C_1; \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2=-C_1; \\ C_1\sqrt{5}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\frac{1}{\sqrt{5}}; \\ C_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Получаем ответ: $f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Линейным однородным рекуррентным соотношением k-го порядка с постоянными коэффициентами называется соотношение вида

$$f(n+k)=a_1f(n+k-1)+a_2f(n+k-2)+\ldots+a_kf(n). \qquad \textbf{(30)}$$

Очевидно, что последовательность из одних нулей является решением любого соотношения вида (30), так что в дальнейшем будем искать решение соотношения (30) только в виде $f(n)=x^n$, где $x\neq 0$. Тогда соотношение (30) примет вид $x^{n+k}=a_1x^{n+k-1}+a_2x^{n+k-2}+\ldots+a_kx^n$.

Поделив обе части этого равенства на $x^n\neq 0$, получим уравнение

$$x^k=a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\ldots+a_k, \qquad \textbf{(31)}$$

которое называется *характеристическим уравнением соотношения* **(30).**

Теорема о виде общего решения линейного однородного рекуррентного соотношения *k*-го порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть дано соотношение (30) *с характеристическим уравнением* (31). *Тогда общее решение соотношения* (30) *представляет сумму, в которой каждому действительному корню* x_i *кратности* m *характеристического уравнения* (31) *соответствует группа слагаемых*

$x_i^n(C_1^{(i)}+nC_2^{(i)}+n^2C_3^{(i)}+\ldots+n^{m-1}C_m^{(i)})$, *а каждой паре комплексно сопряжённых корней* $x_{k_{1,2}}=r_k(\cos\varphi_k\pm i\sin\varphi_k)$ *кратности* m *характеристического уравнения* (31) *соответствует группа слагаемых* $r_k^n((D_1^{(k)}+nD_2^{(k)}+n^2D_3^{(k)}+\ldots+n^{m-1}D_m^{(k)})\cos n\varphi+$
$+(E_1^{(k)}+nE_2^{(k)}+n^2E_3^{(k)}+\ldots+n^{m-1}E_m^{(k)})\sin n\varphi)$,

где $C_p^{(i)}$, $D_p^{(i)}, E_p^{(i)}$- *произвольные постоянные*, *а* $1\le p\le m$.

Без доказательства.

Пример. Найти общее решение рекуррентного соотношения

$$f(n+6)=5f(n+5)-7f(n+4)+f(n+3)+2f(n+2)-4f(n+1)+8f(n).$$

Запишем характеристическое уравнение

$$x^6-5x^5+7x^4-x^3-2x^2+4x-8=0$$

Будем подбирать корни уравнения, и понижать его степень с помощью схемы Горнера:

		1	-5	7	-1	-2	4	-8
$x_1=-1$	-1	1	-6	13	-14	12	-8	0
$x_2=2$	2	1	-4	5	-4	4	0	
$x_3=2$	2	1	-2	1	-2	0		
$x_4=2$	2	1	0	1	0			

После четырёхкратного понижения степени получили квадратное уравнение $x^2+1=0$, корнями которого являются комплексные числа $x_{5,6}=\pm i$ или $\cos\frac{\pi}{2}\pm i\sin\frac{\pi}{2}$. Итак, решениями характеристического уравнения являются:

действительный корень первой кратности -1;

действительный корень третьей кратности 2;

пара комплексно сопряжённых чисел первой кратности $\cos\frac{\pi}{2}\pm i\sin\frac{\pi}{2}$.

Согласно теореме о виде общего решения линейного однородного рекуррентного соотношения *k*-го порядка с постоянными коэффициентами, общее решение нашего рекуррентного соотношения будет иметь вид:

$$f(n)=C_1(-1)^n+2^n(C_2+nC_3+n^2C_4)+C_5\cos\frac{n\pi}{2}+C_6\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Линейным неоднородным рекуррентным соотношением k-го порядка с постоянными коэффициентами называется соотношение вида

$$f(n+k)=a_1 f(n+k-1)+a_2 f(n+k-2)+...+a_k f(n)+g(n). \qquad \textbf{(32)}$$

Теорема о виде общего решения линейного неоднородного рекуррентного соотношения *k*-го порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами представляется в виде суммы частного решения неоднородного соотношения и общего решения соответствующего однородного соотношения.

Пусть $f(n,C_1,C_2,...,C_k)$ - общее решение соотношения (32), а $f_1(n)$ - частное решение соотношения (32). Возьмём произвольные начальные условия $(b_0,b_1,...,b_{k-1})$.

Так как $f(n, C_1, C_2, ..., C_k)$ - общее решение соотношения (32), то найдётся набор значений констант $(C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, ..., C_k^{(0)})$ такой, что равенство (32) выполнится при данном наборе констант, причём $f(0) = b_0$, $f(1) = b_1, ..., f(k-1) = b_{k-1}$.

Так как $f_1(n)$ - частное решение соотношения (32), то верно равенство

$$f_1(n+k) = a_1 f_1(n+k-1) + a_2 f_1(n+k-2) + ... + a_k f_1(n) + g(n), \qquad \textbf{(33)}$$

причём $\quad f_1(0) = d_0,\ f_1(1) = d_1, ..., f_1(k-1) = d_{k-1}$.

Вычтем из равенства (32) равенство (33). Получим:

$$f(n+k) - f_1(n+k) = a_1(f(n+k-1) - f_1(n+k-1)) + ... + a_k(f(n) - f_1(n)).$$

Обозначим $h(n) = f(n) - f_1(n)$. Видим, что $h(n)$ является частным решением однородного соотношения (30), причём $h(0) = b_0 - d_0, h(1) = b_1 - d_1, ..., h(k-1) = b_{k-1} - d_{k-1}$, и $h(n)$ входит в общее решение соотношения (30). Ввиду произвольности выбора набора $(b_0, b_1, ..., b_{k-1})$, имеем доказанной теорему. ■

Итак, для нахождения общего решения неоднородного рекуррентного соотношения находим общее решение соответствующего однородного соотношения, подбираем какое-либо решение неоднородного соотношения и находим их сумму. Укажем частные случаи вида функции $g(n)$, для которых можно отыскать частное решение неоднородного соотношения.

Теорема о виде частного решения линейного неоднородного рекуррентного соотношения *k*-го порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть дано соотношение (33).

1) *Если* $g(n) = P_m(n) b^n$, *где* $P_m(n)$ - *некоторый многочлен степени m, а b - действительный корень кратности s ха-*

рактеристического уравнения (31), где $s \geq 0$*, то частное решение неоднородного соотношения (33) ищем в виде*

$\tilde{f}(n) = n^s Q_m(n) b^n$, *где* $Q_m(n)$*– многочлен степени m с неопределёнными коэффициентами.*

2) *Если* $g(n) = r^n (P_m(n)\cos n\varphi + T_m(n)\sin n\varphi)$, *где* $P_m(n)$ *и* $T_m(n)$*- некоторые многочлены степени m, а* $x_{1,2} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ *- пара комплексно сопряжённых корней кратности s характеристического уравнения (31), где* $s \geq 0$*, то частное решение неоднородного соотношения (33) ищем в виде*

$\tilde{f}(n) = n^s r^n (Q_m(n)\cos n\varphi + R_m(n)\sin n\varphi)$, *где* $Q_m(n)$ *и* $R_m(n)$ *- многочлены степени m с неопределёнными коэффициентами.*

Без доказательства. ◼

Пояснение: $s = 0$ означает, что в случае 1) b, а в случае 2) $x_{1,2} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ не являются корнями характеристического уравнения.

Теорема о сумме частных решений линейных неоднородных рекуррентных соотношений.

Пусть $f_1(n)$ *- решение соотношения*

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + ... + a_k f(n) + g_1(n), \qquad \textbf{(34)}$$

а $f_2(n)$ *- решение соотношения*

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + ... + a_k f(n) + g_2(n). \qquad \textbf{(35)}$$

Тогда $f_3(n) = f_1(n) \pm f_2(n)$*– решение соотношения*

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + ... + a_k f(n) + g_1(n) \pm g_2(n) \qquad \textbf{(36)}$$

Так как $f_1(n)$ - решение соотношения (34), то справедливо равенство

$$f_1(n+k)=a_1 f_1(n+k-1)+a_2 f_1(n+k-2)+\ldots+a_k f_1(n)+g_1(n). \qquad \textbf{(37)}$$

Так как $f_2(n)$ - решение соотношения (35), то справедливо равенство

$$f_2(n+k)=a_1 f_2(n+k-1)+a_2 f_2(n+k-2)+\ldots+a_k f_2(n)+g_2(n). \qquad \textbf{(38)}$$

Складывая (вычитая) левые и правые части формул (37) и (38), получим соотношение (36). ■

Найти общее решение линейного неоднородного рекуррентного соотношения:

Пример 1.

$$f(n+5)=8f(n+4)-12f(n+3)-2f(n+2)+13f(n+1)-6f(n)+778\cdot 5^n$$

Найдём решение характеристического уравнения соответствующего однородного соотношения:

$x^5=8x^4-12x^3-2x^2+13x-6$ или $x^5-8x^4+12x^3+2x^2-13x+6=0.$

Будем подбирать корни уравнения, и понижать его степень с помощью схемы Горнера:

		1	-8	12	2	-13	6
$x_1=1$	1	1	-7	5	7	-6	0
$x_2=1$	1	1	-6	-1	6	0	
$x_3=1$	1	1	-5	-6	0		

После трёхкратного понижения степени получили квадратное уравнение $x^2-5x+6=0$, имеющее корни $x_4=2$ и $x_5=3$. Итак, решениями характеристического уравнения являются:

действительный корень третьей кратности 1;

действительные корни первой кратности 2 и 3.

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$f(n)=C_1+nC_2+n^2C_3+C_4 2^n+C_5 3^n$$

Так число 5 не является корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{f}(n) = C \cdot 5^n$. Получим:

$$C \cdot 5^{n+5} = 8C \cdot 5^{n+4} - 12C \cdot 5^{n+3} - 2C \cdot 5^{n+2} + 13C \cdot 5^{n+1} - C \cdot 5^n + 778 \cdot 5^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C \cdot 5^5 = 8C \cdot 5^4 - 12C \cdot 5^3 - 2C \cdot 5^2 + 13C \cdot 5^1 - C \cdot 5^n + 778 \cdot 5^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3125C - 8C \cdot 625 + 12C \cdot 125 + 2C \cdot 25 - 13C \cdot 5 + C = 778 \cdot 5^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -389C = 778 \Rightarrow C = -2,$$ то есть $\tilde{f}(n) = -2 \cdot 5^n$.

Получено общее решение неоднородного уравнения:

$$f(n) + \tilde{f}(n) = C_1 + nC_2 + n^2C_3 + C_4 2^n + C_5 3^n - 2 \cdot 5^n.$$

Ответ: $C_1 + nC_2 + n^2C_3 + C_4 2^n + C_5 3^n - 2 \cdot 5^n$.

Пример 2. $f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n) + 2n - 1$

Найдём решение характеристического уравнения соответствующего однородного соотношения:

$x^2 - 3x + 2 = 0$. $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$f(n) = C_1 2^n + C_2 1^n = C_1 2^n + C_2$$

Так число 1 является корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{f}(n) = n(An + B) = An^2 + Bn$. Получим:

$$A(n+2)^2 + B(n+2) = 3(A(n+1)^2 + B(n+1)) - 2(An^2 + Bn) + 2n - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n^2(A - 3A + 2A) + n(4A + B - 6A - 3B + 2B) + 4A + 2B - 3A - 3B = 2n - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n(-2A) + A - B = 2n - 1 \Rightarrow A = -1; \quad B = 0 \Rightarrow \tilde{f}(n) = -n^2.$$

Получено общее решение неоднородного уравнения:

$$f(n) + \tilde{f}(n) = C_1 2^n + C_2 - n^2.$$

Ответ: $C_1 2^n + C_2 - n^2$.

Пример 3. $f(n+2)-3f(n+1)+2f(n)=(3-3\sqrt{2})\cos\frac{\pi n}{4}+\sin\frac{\pi n}{4}$

Соответствующее однородное соотношение имеет общее решение $f(n)=C_1 2^n+C_2$, (смотри пример 2).

Так характеристическое уравнение не имеет комплексных корней, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{f}(n)=A\cos\frac{\pi n}{4}+B\sin\frac{\pi n}{4}$. Обозначим $\frac{\pi n}{4}=\alpha$

Получим:

$$A\cos\left(\alpha+\tfrac{\pi}{2}\right)+B\sin\left(\alpha+\tfrac{\pi}{2}\right)-3A\cos\left(\alpha+\tfrac{\pi}{4}\right)-3B\sin\left(\alpha+\tfrac{\pi}{4}\right)+$$

$$+2A\cos\alpha+2B\sin\alpha=(3-3\sqrt{2})\cos\alpha+\sin\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -A\sin\alpha+B\cos\alpha-\tfrac{3}{\sqrt{2}}(A\cos\alpha-A\sin\alpha+B\sin\alpha+B\cos\alpha)+$$

$$+2A\cos\alpha+2B\sin\alpha=(3-3\sqrt{2})\cos\alpha+\sin\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha(-A+\tfrac{3}{\sqrt{2}}A+2B-\tfrac{3}{\sqrt{2}}B)+\cos\alpha(2A-\tfrac{3}{\sqrt{2}}A+B-\tfrac{3}{\sqrt{2}}B)=$$

$$=(3-3\sqrt{2})\cos\alpha+\sin\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha(-A\sqrt{2}+3A+2\sqrt{2}B-3B)+\cos\alpha(2\sqrt{2}A-3A+\sqrt{2}B-3B)=$$

$$=(3\sqrt{2}-6)\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha.$$

Приравнивая множители при $\sin\alpha$ и при $\cos\alpha$, получим систему: $\begin{cases} A(3-\sqrt{2})+B(2\sqrt{2}-3)=\sqrt{2}; \\ A(2\sqrt{2}-3)+B(\sqrt{2}-3)=3\sqrt{2}-6. \end{cases}$

Решая систему, получим $A=B=1$.

Значит, $\tilde{f}(n)=\cos\frac{\pi n}{4}+\sin\frac{\pi n}{4}$.

Таким образом, получено общее решение неоднородного уравнения: $f(n)+\tilde{f}(n)=C_1 2^n+C_2+\cos\frac{\pi n}{4}+\sin\frac{\pi n}{4}$.

Ответ: $C_1 2^n+C_2+\cos\frac{\pi n}{4}+\sin\frac{\pi n}{4}$.

Пример 4. $f(n+3)-f(n+2)-8f(n+1)+12f(n)=1+(-1)^n$

Найдём решение характеристического уравнения соответствующего однородного соотношения: $x^3-x^2-8x+12=0.$

Подберём корень уравнения, и понизим его степень с помощью схемы Горнера:

		1	-1	-8	12
$x_1=2$	2	1	1	-6	0

После понижения степени получили квадратное уравнение $x^2+x-6=0$, имеющее корни $x_2=2$ и $x_3=-3$. Итак, решениями характеристического уравнения являются:

действительный корень второй кратности 2;

действительный корень первой кратности -3.

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$f(n)=(C_1+nC_2)2^n+C_3(-3)^n$$

Найдём частное решение соотношения

$$f(n+3)-f(n+2)-8f(n+1)+12f(n)=1.$$

Так число 1 не является корнем характеристического уравнения, частное решение этого неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{f}_1(n)=A\cdot 1^n=A$. Получим:

$$A-A-8A+12A=1\Rightarrow 4A=1\Rightarrow A=\frac{1}{4}\cdot\ \tilde{f}_1(n)=A\cdot 1^n=\frac{1}{4}\cdot$$

Найдём частное решение соотношения

$$f(n+3)-f(n+2)-8f(n+1)+12f(n)=(-1)^n.$$

Так число -1 не является корнем характеристического уравнения, частное решение последнего неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{f}_2(n)=B\cdot(-1)^n$. Получим:

$$B(-1)^{n+3} - B(-1)^{n+2} - 8B(-1)^{n+1} + 12B(-1)^n = (-1)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(-1)^3 - B(-1)^2 - 8B(-1)^1 + 12B = 1 \Rightarrow -B - B + 8B + 12B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{18}.$$

$$\tilde{f}_2(n) = B \cdot (-1)^n = \frac{(-1)^n}{18}.$$

Получено общее решение исходного неоднородного уравнения: $f(n) + \tilde{f}_1(n) + \tilde{f}_2(n) = (C_1 + nC_2)2^n + C_3(-3)^n + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{18}.$

<u>Ответ:</u> $(C_1 + nC_2)2^n + C_3(-3)^n + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{18}.$