Теорема 2 (первая т-ма Вейерштрасса об ограниченности непрер. на отрезке ф-ии).

$f \in C[a,b] \Rightarrow f$ огр.

Док-во: н. док-ть, что $\exists\, m, M \in \mathbb{R}: \quad m \le f(x) \le M \;\; \forall x \in [a,b]$.

Предположим, что f не огр. сверху, т. е. $\forall C \in \mathbb{R} \;\; \exists\, x_C \in [a,b]:$

$f(x_C) > C$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, x_n \in [a,b]: \;\; f(x_n) > n$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \; a \le x_n \le b \;\; \forall n \ge 1 \;\Rightarrow\; \exists\, \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}: \;\; x_{n_k} \to \xi$.

$a \le x_{n_k} \le b \;\; \forall k \ge 1 \;\Rightarrow\; \xi \in [a,b]$.

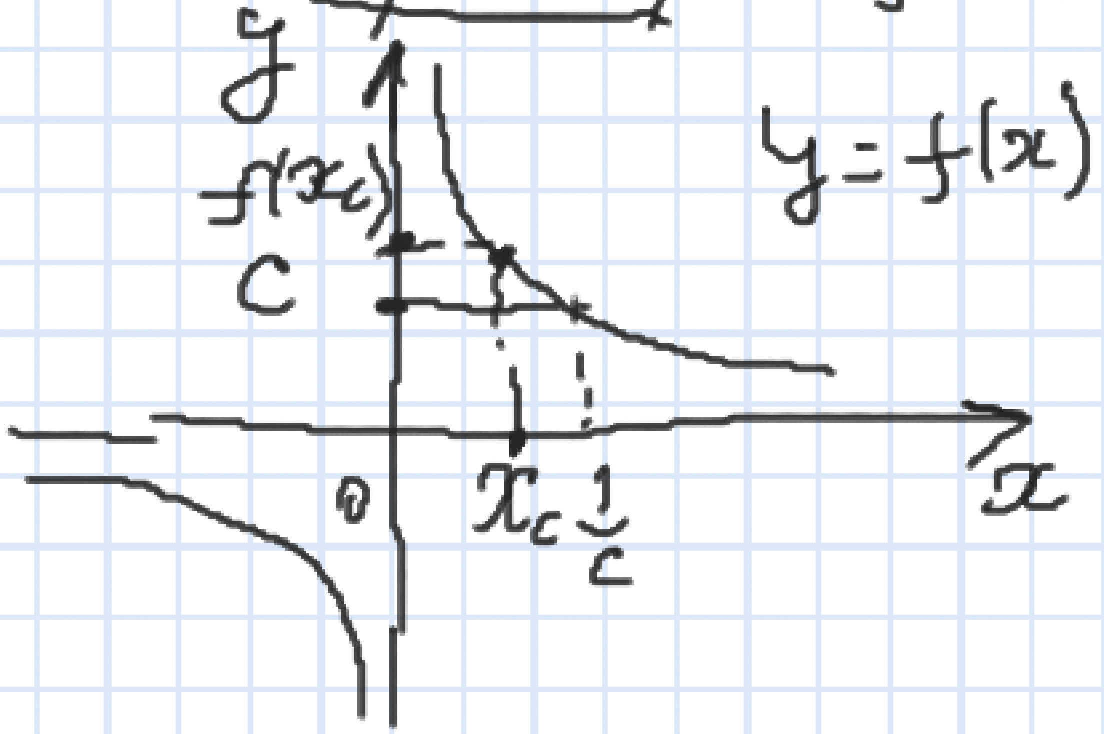
$f \in C[a,b] \Rightarrow f \in C(\xi) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi) \;\; (*)$

$f(x_{n_k}) > n_k \;\; \forall k \ge 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$ — $\Downarrow\!\!\Uparrow$ $\Rightarrow f$ огр. св.

Аналогично док-ся, что f огр. сн. ▶

Замечание: в случае интервала или полуинтервала утв-ие т-мы, вообще говоря, неверно.

Пример: $f(x)=\frac{1}{x}$, $f\in C(0,1)$, но f неогр.



опр: $M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$ – точная верхняя (нижняя) грань ф-ии $f(x)$ на мн-ве A, если:

1) $f(x) \leq M$ $\quad (f(x) \geqslant m)$ $\quad \forall x \in A$;

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in A$: $\quad f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$ $\quad (f(x_\varepsilon) < m + \varepsilon)$.

Теорема 3 (вторая т-ма Вейерштрасса о достижимости ф-ей своих точных граней).

Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда она достигает на $[a,b]$ своих точной верхней и точной нижней граней, т.е. $\exists\, \xi', \xi'' \in [a,b]$:

$$f(\xi') = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(\xi'') = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Док-во: $f \in C[a,b] \Rightarrow$ по т. 2 f огр. $\Rightarrow \exists\, M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$,

$m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $\quad M, m \in \mathbb{R}$.

Н. док-ть, что: $f(\xi') = M$, $f(\xi'') = m$, где $\xi', \xi'' \in [a,b]$,

$\forall x \in [a,b] \qquad m \le f(x) \le M$.

Допустим, что $\nexists\ \xi' \in [a,b] : f(\xi') = M \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad f(x) < M$. Рассм-м $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$,

$g \in C[a,b] \Rightarrow g$ - огр. $\Rightarrow \exists A > 0 : \ g(x) \le A \ \ \forall x \in [a,b]$

$\Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \quad \dfrac{1}{M - f(x)} \le A \Leftrightarrow M - f(x) \ge \dfrac{1}{A} \quad \forall x \in [a,b]$

$\Leftrightarrow f(x) \le M - \dfrac{1}{A} \quad \forall x \in [a,b]$.

$M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$; $\quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) < M$; $\quad \exists A > 0 :$

$f(x) \le M - \dfrac{1}{A} \quad \forall x \in [a,b]$ — ↯ $\Rightarrow \exists \xi' \in [a,b] :$

$f(\xi') = M$. $\blacktriangleright$