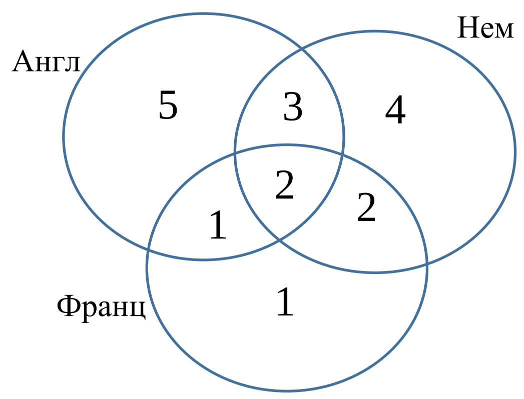
Формула включений и исключений.

Рассмотрим пример: Некоторое бюро переводов, в котором числится 25 человек, занимается переводами с трёх иностранных языков: английского, немецкого и французского. Среди сотрудников этого бюро английским и немецким языками занимается по 11 человек, французским – 6. Среди этих сотрудников английским и немецким владеют пятеро, английским и французским - трое, немецким и французским – четверо, а всеми тремя языками из перечисленных – двое. Остальные сотрудники этого бюро, не занимающиеся переводами с этих трёх языков – технические работники. Вопрос: какова численность технических работников данного бюро переводов?

Задачу можно решать следующим образом: Изобразим множества переводчиков в виде внутренностей трёх овалов, находящихся в общем положении. Так как всеми тремя языками владеют двое, в центральный криволинейный треугольник ставим цифру 2.



Немецким и французским владеют четверо, но двое из них знают ещё и английский, значит только немецким + французским владеют 2 человека. Аналогично рассуждая, получаем, что только немецким + английским владеют 3 человека, только английским + французским – 1 человек. Всего английским занимаются 11 человек, но 6 из них владеют и другими языками, значит, только английский знают 5 человек. Рассуждая сходным образом, получаем, что только французский знает 1 человек, а только немецкий – четверо. Проставим полученные числа в соответствующих областях на рисунке и сложим их. Получим 5+3+4+1+2+2+1=18 человек занимаются переводами с этих трёх языков. Значит, численность технических работников данного бюро переводов равна 25 – 18 = 7 человек.

Решим эту же задачу другим способом, используя так называемый «принцип включений и исключений».

Для подсчёта количества технических сотрудников, из общего числа сотрудников вычитаем количество переводчиков с английского, затем – с немецкого и потом – с французского: 25 – 11 – 11 – 6 = -3. Отрицательное число сотрудников получилось за счёт того, что людей, владеющих двумя языками, мы вычли дважды. Поэтому, чтобы исправить это, добавим количества людей, владеющих двумя видами языков: -3+5+3+4 = 9. Но полиглотов, знающих все три языка, мы три раза вычли, а затем три раза добавили. Так как их всё-таки нужно исключить, из полученной суммы вычитаем 2: 9 – 2 =7. Процесс решения этой задачи вторым способом можно описать формулой: 25-11-11-6+5+3+4-2=7. Результат совпал с результатом, добытым первым способом, с помощью изображения трёх множеств в общем положении.

Первый подход при решении задач подобного рода работает при количестве языков, не превышающих 4, так как уже пять множеств общего положения не удаётся изобразить на плоскости в виде непересекающихся областей.

Второй же подход к решению задачи применим к любому количеству языков, с которыми работают сотрудники данного бюро переводов.

Сформулируем принцип включения и исключения в общем виде.

Пусть имеется M предметов, каждый из которых может обладать некоторым набором свойствам из множества $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$. Обозначим через $M(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_k})$ количество предметов, обладающих свойствами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}$ (и, быть может, ещё некоторыми из других свойств). Если мы хотим отметить, что берутся предметы, не обладающие некоторым свойством, то это свойство пишем с чертой сверху. Например, через $M(\alpha_1\bar{\alpha}_3\alpha_7)$ будем обозначать количество предметов, обладающих свойствами α_1, α_7 и не обладающих свойством α_3.

Теорема включений и исключений.

В описанных выше обозначениях справедлива формула (10):

$$M(\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_n) = M - M(\alpha_1) - ... - M(\alpha_n) + M(\alpha_1\alpha_2) + M(\alpha_1\alpha_3) + ...$$
$$+M(\alpha_{n-1}\alpha_n) - M(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - M(\alpha_1\alpha_2\alpha_4) - ... - M(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) + ...$$
$$... + (-1)^n M(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n) \qquad \textbf{(10)}$$

Формула (10) называется *формулой включений и исключений*. Докажем её методом математической индукции, проведя индукцию по количеству свойств n.

1. Проверка справедливости (10) при $n = 1$.

В этом случае формула включений и исключений примет вид: $M(\bar{\alpha}_1) = M - M(\alpha_1)$. И действительно, чтобы найти количество предметов, не обладающих свойством α_1, нужно из общего количества предметов вычесть число предметов, этим свойством обладающих.

Итак, при $n = 1$ формула (10) верна.

2. Допустим, что формула (10) справедлива при $n = k - 1$:

$$M(\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_{k-1}) = M - M(\alpha_1) - ... - M(\alpha_{k-1}) + M(\alpha_1\alpha_2) + M(\alpha_1\alpha_3) + ...$$
$$... + (-1)^{k-1} M(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}) \qquad \textbf{(11)}$$

3. Докажем справедливость (10) при $n = k$.

Рассмотрим совокупность предметов, среди которых все обладают свойством α_k. Их будет $M(\alpha_k)$. Остальных свойств будет $k - 1$, для которых, по предположению, справедлива формула (11), принимающая в этом случае вид:

$$M(\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_{k-1}\alpha_k) = M(\alpha_k) - M(\alpha_1\alpha_k) - ... - M(\alpha_{k-1}\alpha_k) + M(\alpha_1\alpha_2\alpha_k) + M(\alpha_1\alpha_3\alpha_k) + ...$$

$$... + (-1)^{k-1} M(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}\alpha_k) \qquad \textbf{(12)}$$

Будем рассуждать аналогично тому, как мы это делали в пункте 1. Чтобы найти количество предметов, обладающих набором свойств $\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_{k-1}\bar{\alpha}_k$, нужно из общего числа предметов с набором $\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_{k-1}$ вычесть количество предметов с набором свойств $\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_{k-1}\alpha_k$.

Итак, умножим обе части равенства (12) на –1 и результат сложим с равенством (11). Получим:

$$M(\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_k) = M(\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_{k-1}) - M(\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_{k-1}\alpha_k) = M - M(\alpha_1) - ...$$
$$-M(\alpha_{k-1}) - M(\alpha_k) + M(\alpha_1\alpha_2) + ... + (-1)^k M(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}\alpha_k).$$

А это – не что иное, как формула (10), где $n = k$.

На основании метода математической индукции утверждаем, что формула включений и исключений (10) справедлива для всех натуральных n. ■

Смещения.

Рассмотрим n предметов, за которыми закреплены их некоторые первоначальные позиции. *Смещением* будем называть такую перестановку этих предметов, когда ни один предмет не стоит на своей первоначальной позиции. Количество смещений n предметов обозначается через D_n.

Теорема о смещениях.

Количество смещений n предметов выражается формулой (13):

$$D_n = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - ... + (-1)^n C_n^n \qquad \textbf{(13)}$$

При доказательстве теоремы воспользуемся принципом включений и исключений. Для вывода формулы количества смещений n предметов из общего числа перестановок n! вычтем перестановки, в которых один предмет сохранил своё первоначальное место. Этот предмет можно выбрать C_n^1 числом способов, а остальные $n - 1$ предметы могут быть переставлены $(n - 1)!$ числом способов. Далее, со знаком плюс в этой знакочередующейся последовательности пойдёт количество случаев, где два предмета сохраняют свою первоначальную позицию. Эти два предмета могут быть выбраны C_n^2 числом способов, а оставшиеся $n - 2$ предмета переставляются $(n - 2)!$ числом способов. Продолжая аналогично далее, получим:

$$D_n = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - ... + (-1)^n C_n^n$$ ■

Выведем формулу для приближённого вычисления D_n.

$$D_n = n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - \ldots + (-1)^n C_n^n =$$
$$= n! - \frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! + \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! - \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!(n-n)!} =$$
$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \approx \frac{n!}{e}.$$

Итак, $$D_n \approx \frac{n!}{e}. \qquad \textbf{(14)}$$

Пример. Две одинаковые карточные колоды тасуются, кладутся на стол рубашкой вверх. Затем на каждом шаге вскрывается верхняя карта каждой колоды и эти карты откладывают в сторону. Какова вероятность P того, что, перебрав все карты двух колод, ни на одном шаге мы не получим одновременное вскрытие одинаковых карт на различных колодах? Рассмотреть случаи колод в 32, 36 и 52 листа.

Пусть в каждой из колод по n карт. Можно считать, что положение карт второй колоды – некоторая перестановка карт колоды первой. Количество случаев, когда ни на одном шаге мы не получим одновременное вскрытие одинаковых карт на различных колодах, соответствует числу смещений D_n.

Общее число перестановок n карт равно $n!$, значит, искомая вероятность равна $P = \frac{D_n}{n!} \approx \frac{n!}{e \cdot n!} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368.$

Интересно заметить, что ответ практически не зависит от того, какую толщину из предложенных трёх имели колоды.

Опять рассмотрим n предметов, за которыми закреплены их некоторые первоначальные позиции. Обозначим через $D_{n,k}$ количество перестановок этих предметов, в которых ровно k сохраняют свои первоначальные позиции. Выведем формулу для вычисления $D_{n,k}$.

Выбрать из n предметов k предметов, сохраняющих свои первоначальные позиции, можно C_n^k числом способов, а оставшиеся $n - k$ должны стоять на новых для себя местах. Количество перестановок, при которых ни один из $n-k$ предметов не попадает на свои первоначальные места, равно D_{n-k} . Всего получаем комбинаций в количестве $C_n^k \cdot D_{n-k}$. Получена формула

$$D_{n,k} = C_n^k \cdot D_{n-k} \qquad \textbf{(15)}$$

Для получения приближённого значения D_{n-k} заменим D_{n-k} его приближённым значением по формуле (14), получим

$$D_{n,k} \approx C_n^k \cdot \frac{(n-k)!}{e} = \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!e} = \frac{n!}{k!e}.$$

Итак,
$$D_{n,k} \approx \frac{n!}{k!e} \qquad \textbf{(16)}$$

Пример. Двадцать интеллигентов в шляпах пришли в театр и сдали свои головные уборы в гардероб. После представления абсолютно неадекватный гардеробщик выдавал им шляпы случайным образом, не обращая внимания на номерки. Интеллигенты покорно брали, что дают, и молча уходили. Какова вероятность того, что ровно трое из них уйдут в своих родных шляпах?

Количество случаев, когда ровно трое из двадцати получат свои родные шляпы, равно $D_{20,3}$. Общее количество вариантов перестановки 20 шляп по 20 интеллигентным головам, равно 20!. Тогда вероятность P описанного события равна $\frac{D_{20,3}}{20!}$. Используя формулу (16), получим приближённое значение P. $P \approx \frac{20!}{20! \cdot 3!e} = \frac{1}{6e} \approx 0,0613$.