Автоматы Мура.

Конечные автоматы, рассматриваемые ранее, называются также *автоматами Мили*.

Автоматом Мура называется пятерка $S=(A,Q,V,\delta,\mu)$, где

$A=\{a_1,...,a_n\}$ - *входной алфавит*;

$Q=\{q_1,...,q_m\}$ - *множество внутренних состояний*;

$V=\{v_1,...,v_k\}$ - *выходной алфавит*;

$\delta: A\times Q\to Q$ - *функция переходов*;

$\mu: Q\to V$ - *функция отметок*.

Видим, что автомат Мура – это такой конечный автомат, функция выхода которого не зависит от входных сигналов. Тем не менее, для каждого автомата Мили существует эквивалентный ему автомат Мура. Покажем это на примере автомата (1).

A \ Q	1	2	3
a	3,0	3,0	3,1
b	2,0	2,1	1,0

(1)

По данному неинициальному автомату Мили S строим эквивалентный ему автомат Мура S' следующим образом:

автомат S' содержит $3\cdot 2+3=9$ состояний, каждое из которых мы будем помечать двумя символами. Состояния автомата S' обозначим так: $*1, *2, *3, a1, b1, a2, b2, a3, b3$.

Функция отметок μ на состояниях $*1$, $*2$, $*3$ не определена, а её значения на состояниях $a1, b1, a2, b2, a3, b3$ задаются с помощью функции выходов λ автомата S: $\mu(ui)=\lambda(u,i)$, где $1\le i\le 3$, $u\in\{a,b\}$.

То есть, $\mu(a1)=\lambda(a,1)=0,...,\mu(b3)=\lambda(b,3)=0$.

Функция переходов δ' на состояниях, содержащих в изображении символ *, определяется так: $\delta'(u,*i)=ui$, $u\in\{a,b\}$, $1\le i\le 3$.

В остальных случаях первый символ имени нового состояния совпадает со считываемым символом входного алфавита, а второй символ имени нового состояния определяется с помощью функции переходов δ автомата S: $\delta'(u,vi)=uj$, где $u,v\in\{a,b\}$, $j=\delta(v,i)$.

Получим: $\delta'(a,*1)=a1$, $\delta'(b,a1)=b2$, т.к. $\delta(a,1)=2$, и т.д.

Запишем таблицу состояний полученного автомата Мура:

μ	–	–	–	0	0	0	1	1	0
$A \backslash Q$	$*1$	$*2$	$*3$	$a1$	$b1$	$a2$	$b2$	$a3$	$b3$
a	$a1$	$a2$	$a3$	$a3$	$a2$	$a3$	$a2$	$a3$	$a1$
b	$b1$	$b2$	$b3$	$b3$	$b2$	$b3$	$b2$	$b3$	$b1$

Проверим работу исходного автомата над словом $bbaab$, запустив его из 2 состояния:

	b	b	a	a	b
2	2	2	3	3	1
	1	1	0	1	0

Построенный автомат Мура запускаем из состояния $*2$:

	b	b	a	a	b
$*2$	$b2$	$b2$	$a3$	$a3$	$b3$
	1	1	0	1	0

Как видим, результаты работы обоих автоматов совпали.

Автоматы без выхода.

Автоматом без выходов будем называть пятёрку объектов $S=(A,Q,\delta,q_1,F)$, где $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ – *входной алфавит*;

$Q=\{q_1,\dots,q_m\}$ – *множество внутренних состояний*;

$\delta: A\times Q\to Q$ - *функция переходов*;

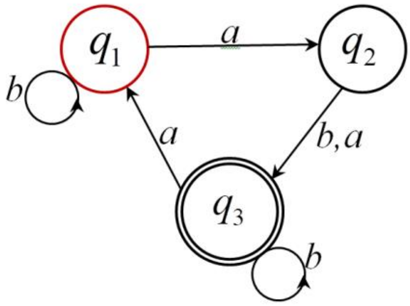
$q_1\in Q$ - *начальное состояние*;

$F\subseteq Q$, F - *множество заключительных состояний*.

Можно считать, что автомат без выходов – это инициальный автомат Мура с выходным алфавитом из двух символов, где одним символом помечены обычные состояния автомата, а другим - заключительные состояния.

При изображении автомата без выходов диаграммой состояний вершины, соответствующие обычным и заключительным состояниям, изображаем соответственно обычным и двойным кружком.

Пример 1:



Изобразим таблицу состояний автомата:

$A \backslash Q$	q_1	q_2	q_3
a	q_2	q_3	q_1
b	q_1	q_3	q_3

Событием E называется некоторое множество слов входного алфавита: $E \subseteq A^*$.

Говорят, что *событие* E *представимо в конечном автомате* S, если событие E состоит из тех и только тех слов α, для которых автомат S, считывающий слово α, попадает в одно из своих заключительных состояний.

Это определение можно записать формулой:

$$\alpha \in E \Leftrightarrow \delta(q_1, \alpha) \in F \qquad \textbf{(1)}$$

Если E – событие, представимое в автомате из примера 1, то $bbab \in E$, так как $\delta(q_1, bbab) = q_3 \in F$, а $bbbba \notin E$, так как $\delta(q_1, bbbba) = q_2 \notin F$,

Событие E может быть как конечным, так и бесконечным.

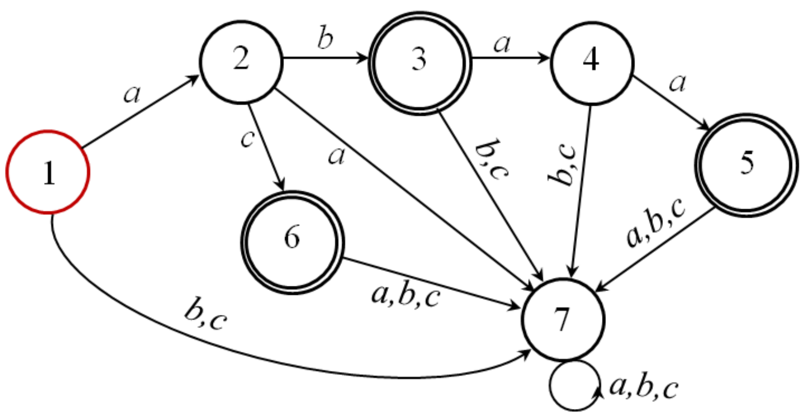
Любое конечное множество слов E представимо в некотором автомате без выходов.

Проиллюстрируем это утверждение примером.

Пример 2: Построить автомат без выходов, представляющий событие $E = \{ab, ac, abaa\}$.

Так как в событии E все слова имеют одинаковое начало – букву a, то начальные маршруты, соответствующие этим словам, будут общими.

Также заметим, что слово *ab* является началом слова *abaa*, значит, маршрут, соответствующий слову *ab*, будет началом маршрута, соответствующего слову *abaa*. Изобразим диаграмму автомата без выходов, представляющего событие $E = \{ab, ac, abaa\}$:



Изобразим таблицу состояний этого автомата:

$A \backslash Q$	1	2	3	4	5	6	7
a	2	7	4	5	7	7	7
b	7	3	7	7	7	7	7
c	7	6	7	7	7	7	7

Говорят, что автомат без выходов *распознаёт бесконечную последовательность* букв $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \ldots$, если он представляет множество $E = \{a_{i_1}, a_{i_1} a_{i_2}, a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}, \ldots\}$, состоящее из всех начальных отрезков последовательности α.

Не все события представимы в конечных автоматах без выходов.

Теорема о нераспознаваемости бесконечной непериодической последовательности.

Любая бесконечная непериодическая последовательность не распознаваема конечным автоматом без выходов.

Докажем теорему от противного.

Допустим, существует конечный автомат без выходов *S*, распознающий некоторую непериодическую последовательность

$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \dots$.

Обозначим $\delta(q_1, a_{i_1}) = q_{j_1}$, $\delta(q_1, a_{i_1} a_{i_2}) = q_{j_2}, \cdots$

Значит, при считывании слова α автомат проходит последовательность заключительных состояний $q_{j_1}, q_{j_2}, \dots$

Так как множество внутренних состояний автомата, а, значит и множество заключительных состояний, конечно, то в последовательности $q_{j_1}, q_{j_2}, \dots$ некоторое состояние встретится дважды:

$q_{j_i} = q_{j_{i+k}}$ и, следовательно, $\delta(a_{j_{i+1}} \dots a_{j_{i+k}}, q_{j_i}) = q_{j_i}$, причём все состояния, проходимые автоматом, заключительные.

Поэтому, если на вход подать слово $\alpha_1 = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_i} (a_{j_{i+1}} \dots a_{j_{i+k}})$, где в скобках – период бесконечной последовательности, то автомат, запущенной над словом α_1, будет проходить последовательность заключительных состояний, значит, автомат распознаёт слово α_1.

Следовательно, все начальные отрезки α_1 входят в событие, представимое автоматом, то есть автомат не отличает α_1 от α и, значит, не распознаёт α. ■

Регулярные события.

Пусть имеется некоторый алфавит *A*.

Элементарным событием называется слово, состоящее из одной буквы.

Введём на множестве слов операцию *конкатенация* (*присоединение*), которую будем обозначать символом $\circ$, и которая определяется следующим образом: $\alpha \circ \beta = \alpha\beta$.

Пример 3: Найти конкатенацию слов $abba$ и $bbbaa$.

$abba \circ bbbaa = abbabbbaa$, $bbbaa \circ abba = bbbaaabba$.

Из этого примера видно, что конкатенация не обладает свойством коммутативности.

Проверим выполнение ассоциативного закона. Пусть α, β и γ - произвольные слова в алфавите A. Тогда:

$\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = \alpha \circ (\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma = (\alpha\beta) \circ \gamma = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$, то есть для конкатенации справедлив ассоциативный закон

$$\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma. \qquad \textbf{(2)}$$

Введём *пустое слово e*: $\boldsymbol{e} \circ \alpha = \alpha \circ \boldsymbol{e} = \alpha$.

В дальнейшем будем считать, что для любого алфавита A множество его слов A^* содержит пустое слово e.

Пусть E, F – некоторые события в алфавите A, то есть $E \subseteq A^*$, $F \subseteq A^*$.

Рассмотрим три операции над событиями:

1) *Объединение событий*: $E \cup F$ – обычное объединение множеств;

2) *Конкатенация событий*: $E \circ F$ – множество слов, полученных конкатенацией слов из событий E и F (в соответствующем порядке), то есть

$$E \circ F = \{\alpha \circ \beta \mid \alpha \in E, \beta \in F\}. \qquad \textbf{(3)}$$

3) *Итерация событий*: $E^* = \{e \cup E \cup E \circ E \cup E \circ E \circ E \cup \ldots\}$.

Пример 4: Пусть $E = \{abc, b\}$, $F = \{ba\}$. Найти $E \cup F$, $E \circ F$, $F \circ E$, F^*.

$E \cup F = \{abc, b, ba\}$, $E \circ F = \{abcba, bba\}$,

$F \circ E = \{baabc, bab\}$, $F^* = \{e, ba, baba, bababa, \ldots\}$.

Операции объединения, конкатенации и итерации событий называются *регулярными операциями*.

Событие называется *регулярным*, если оно может быть получено из элементарных событий с помощью применения конечного числа раз регулярных операций.
Регулярным выражением называется формула, описывающая регулярное событие.
Замечание: аналогично тому, как в алгебре знак умножения $\cdot$ часто опускается, в регулярном выражении знак конкатенации $\circ$ также можно опускать.
Если в регулярном выражении скобки отсутствуют, то сначала выполняется итерация, затем конкатенация, и в последнюю очередь - объединение.

Некоторые свойства регулярных событий.

$$E \cup F = F \cup E \qquad \textbf{(4)}$$

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G) \qquad \textbf{(5)}$$

Свойства 4 и 5 – известные свойства объединения множеств.

$$(EF)G = E(FG) \qquad \textbf{(6)}$$

Пусть $\alpha \in E, \beta \in F, \gamma \in G.$ Тогда

$$(EF)G = \{(\alpha \circ \beta) \circ \gamma)\} = \{\alpha \circ (\beta \circ \gamma)\} = E(FG)$$

$$E(F \cup G) = EF \cup EG \qquad \textbf{(7)}$$

$$E(F \cup G) = \{\alpha \circ \{\beta, \gamma\}\} = \{\alpha \circ \beta, \alpha \circ \gamma\} = EF \cup EG$$

$$(F \cup G)E = FE \cup GE \qquad \textbf{(8)}$$

Формулы 7 и 8 показывают, что справедлив дистрибутивный закон конкатенации относительно объединения.