Решение систем линейных уравнений

Блок №4

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

В системе (1) $(b_1, b_2, \ldots b_m)$ – *столбец свободных членов*

$x_1, x_2, \ldots x_n$ – *неизвестные*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} - \textit{основная матрица системы}$$

Основные определения

Если в системе (1) все свободные члены равны нулю, то она называется ***однородной***.

Если система (1) имеет хотя бы одно решение, то она называется ***совместной***.

Если система (1) не имеет решений, то она называется ***несовместной***.

Если система (1) имеет только одно решение она называется определенной. Если бесконечно много решений то она называется ***неопределенной***.

Историческая справка

Леопо́льд Кро́некер (1823, Лигниц, Германия, ныне Легница, Польша — 1891, Берлин, Германия) — немецкий математик. Брат известного физиолога Гуго Кронекера (1830—1914).

Альфре́до Капе́лли (1855, Милан — 1910, Неаполь) — итальянский математик, член Национальной академии деи Линчеи. Известен как человек, который открыл Тождество Капелли. (**Тождество Капелли** — аналог матричного соотношения $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ для дифференциальных операторов с некоммутирующими элементами, связанных с представлением алгебры Ли . Альфредо Капелли установил этот результат в 1887 году.)

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема. Система (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.

$$rank\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство

Дальнейшее исследование системы

Пусть система (1) совместна. Предположим, что ранг основной матрицы равен r. Можем считать, после перестановки строк и столбцов, что отличный от нуля минор порядка r, находится в левом верхнем углу.

Матрицу системы можем привести к ступенчатому виду:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} & b_r \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n
\end{pmatrix} \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{pmatrix}
a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Поскольку ранг системы равен r, то $a'_{11}a'_{22}\ldots a'_{rr}\neq 0$

Тогда первые r переменных мы можем выразить через остальные n-r неизвестных.

Переменные x_1, x_2,…x_r называются главными переменными, а переменные x_{r+1}, x_{r+2}…x_n свободными.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a'_{11}}(b'_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1n}x_n \\ x_2 = \dfrac{1}{a'_{22}}(b'_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{2n}x_n) \\ \ldots \\ x_r = \dfrac{1}{a'_{rr}}(b'_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{rn}x_n) \end{cases} \qquad (2)$$

Общее решение

Полученная система (2) называется общим решением неоднородной системы линейных уравнений.

Теорема (критерий определенности). Неоднородная система линейных уравнений определена тогда и только тогда, когда ранг системы равен количеству неизвестных r=n.

Однородные системы

Система (1) называется однородной, если свободные члены равны нулю.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Однородные системы

Заметим, что однородная система всегда совместна (она всегда имеет нулевое решение)

Теорема. Система линейных однородных уравнений определена тогда и только тогда, когда ранг системы равен числу неизвестных $r=n$.

Если $r<n$, то однородная система будет неопределенной.

Свойства однородных систем

1. Если $(x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)$ - решение системы (3) и $(y_1^0, y_2^0 \dots y_n^0)$ - решение системы (3), то их сумма $(x_1^0 + y_1^0, x_2^0 + y_2^0, \dots x_n^0 + y_n^0)$ тоже является решением системы (3).
2. Если $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ - решение системы (3), то умножение решения на число $(\alpha x_1^0, \alpha x_2^0, \dots \alpha x_n^0)$ тоже является решением системы.

Фундаментальные решения

Из свойств 1 и 2 следует, что линейная комбинация решений тоже является решением. Следовательно, все решения системы (3) образуют линейное пространство решений.

Определение. Базис линейного пространства решений однородной системы линейных уравнений называется ***фундаментальной системой решений (ФСР)***.

Количество фундаментальных решений.

Теорема. Пусть ранг системы (3) равен r. Тогда размерность пространства решений (количество фундаментальных решений) равно n-r.

Свойства неоднородных систем.

1. Если $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots \tilde{x}_n)$ и $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots \tilde{y}_n)$ решения системы (1) то $\tilde{x} - \tilde{y}$ решение однородной системы (3). (то есть разность решений неоднородной системы есть решение однородной системы)
2. Если $\tilde{x}$ решение неоднородной системы (1) и z^0 решение однородной системы (3), то их сумма $\tilde{x} + z^0$ решение неоднородной системы.

Основная теорема

Теорема. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений (1) есть линейная комбинация ФСР однородной системы (3) и частного решения неоднородной системы (1).

$$\bar{f} = \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 + \ldots + \alpha_{n-r} \bar{f}_{n-r} + \bar{f}_{част.}$$