Основные эквивалентности.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \boxed{\sin x\sim x,\ x\to 0;\quad \sin x = x+\bar{o}(x),\ x\to 0}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left[\begin{array}{l} t=\arcsin x, \\ x=\sin t \end{array}\right]=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\arcsin x\sim x,\ x\to 0 \\ \arcsin x = x+\bar{o}(x),\ x\to 0\end{array}}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1 \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x\sim x,\ x\to 0;\quad \operatorname{tg} x = x+\bar{o}(x),\ x\to 0}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1 \Rightarrow \boxed{\operatorname{arctg} x\sim x,\ x\to 0;\quad \operatorname{arctg} x = x+\bar{o}(x),\ x\to 0}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1 \Rightarrow \boxed{1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ x\to 0}$

$1-\cos x=\frac{x^2}{2}+\bar{o}\left(\frac{x^2}{2}\right),\ x\to 0.$

$f(x)=\bar{o}\left(\frac{x^2}{2}\right),\ x\to 0 \Rightarrow f(x)=\underset{\text{б.м.},\ x\to 0}{\alpha(x)}\cdot\frac{x^2}{2}=\underbrace{\frac{1}{2}\alpha(x)}_{\text{б.м.},\ x\to 0}\cdot x^2 \Rightarrow f(x)=\bar{o}(x^2),\ x\to 0$

$$\boxed{\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\bar{o}(x),\ x\to 0}$$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1 \Rightarrow \boxed{\ln(x+1) \sim x,\ x\to 0}$

$$\boxed{\ln(x+1) = x + \bar{o}(x),\ x\to 0}$$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \left[\begin{array}{l} t = a^x - 1 \\ x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a} \end{array}\right] = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = 1 \Rightarrow \boxed{a^x - 1 \sim x\ln a,\ x\to 0}$

$$\boxed{a^x = 1 + x\ln a + \bar{o}(x),\ x\to 0}$$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow \boxed{e^x - 1 \sim x,\ x\to 0;\quad e^x = 1 + x + \bar{o}(x),\ x\to 0}$

9) $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0 \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\lambda - 1}{\lambda x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\lambda\ln(1+x)} - 1}{\lambda x} =$

$\lambda\ln(1+x) \to 0$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\lambda\ln(1+x)} - 1}{\lambda\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \boxed{(1+x)^\lambda - 1 \sim \lambda x,\ x\to 0}$

1   1

$$\boxed{(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \bar{o}(x),\ x\to 0.}$$

Теорема (о замене ф-ий на эквив-ые в произведении).

$$f(x)\sim g(x),\ x\to x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot h(x)$$

◀ $f(x) = \gamma(x)\cdot g(x)\ \forall x\in \mathring{U}(x_0),\ \lim_{x\to x_0}\gamma(x) = 1.$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot h(x) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\gamma(x)}_{1}\cdot g(x)\cdot h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)\, h(x)$$ ▶

Следствие (— II — в частном).

$$f(x)\sim g(x),\ x\to x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}$$

◀ $\dfrac{f(x)}{h(x)} = f(x)\cdot\dfrac{1}{h(x)}$ ▶

Замечание: при вычислении пределов заменять ф-ю на эквив-ую можно только в том случае, если эта ф-я явл-ся множителем ко всему выражению. Нельзя заменять на экв-ую ф-ю множитель в отдельном слагаемом, также нельзя заменять слагаемые в сумме на экв-ые ф-ии. Но всегда можно использовать точные рав-ва с $\bar{o}$.

<u>Пример:</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sin x\sim x,\ x\to 0\\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot\frac{x^2}{2}}{\cos x\cdot x^3}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

$$\cancel{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}=\left|\begin{array}{l}\sin x\sim x,\ x\to 0\\ \operatorname{tg}x\sim x,\ x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0}$$

Равенства, содержащие $\bar{o}$, $\underline{O}$ являются условными: $\bar{o}(g(x))$ означает не какую-то конкретную ф-ю, а любую ф-ю, пренебрежимую с $g(x)$.

16. Бесконечно малые и бесконечно большие функции (б.м., б.б.).

<u>Опр:</u> $\alpha(x)$ – б.м., $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. $\alpha(x) = \bar{o}(1)$, $x \to x_0$.

$A(x)$ – б.б., $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} A(x) = \infty$.

<u>Теорема 1</u> (о связи м/у б.м. и б.б. ф-ций). Пусть $\alpha, A : X \to \mathbb{R}$, $x = x_0$ – предель. т. X. Тогда:

1) если $A(x)$ – б.б., $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{A(x)}$ – б.м., $x \to x_0$;

2) если $\alpha(x)$ – б.м., $x \to x_0$, причём $\exists\, \mathring{U}(x_0)$: $\alpha(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathring{U}(x_0) \cap X$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – б.б., $x \to x_0$.

◀ 1) $A(x)$ – б.б., $x \to x_0$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow |A(x)| > \varepsilon$

Тогда $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \cap X$ $A(x) \neq 0$ и $\dfrac{1}{|A(x)|} < \dfrac{1}{\varepsilon}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{A(x)} = 0$

2) аналогично, сам-но. ▶

Теорема 2. $\alpha, \beta, \gamma : X \to \mathbb{R}$, $x = x_0$ - пред. т. X.

$\alpha(x) = \bar{o}(1)$, $x \to x_0$, $\beta(x) = \bar{o}(1)$, $x \to x_0$, $\gamma(x) = \underline{O}(1)$, $x \to x_0$.

Тогда $\alpha(x) \pm \beta(x) = \bar{o}(1)$, $x \to x_0$, $\alpha(x) \cdot \gamma(x) = \bar{o}(1)$, $x \to x_0$.

◀ $\gamma(x) = \underline{O}(1)$, $x \to x_0 \Rightarrow \exists C > 0$, $\exists \overset{\circ}{U}_1(x_0) : |\gamma(x)| \le C \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0) \cap X$

fix $\varepsilon > 0$. $\alpha(x) = \bar{o}(1)$, $x \to x_0 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_2(x_0) : |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C} \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_2(x_0) \cap X$

Пусть $\overset{\circ}{U}(x_0) \subset \overset{\circ}{U}_1(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_2(x_0)$

$\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ $\quad |\alpha(x) \cdot \gamma(x)| = |\alpha(x)| \, |\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon$ ▶

Сравнение б. м. ф-ий.

$\alpha(x)$, $\beta(x)$ - б.м., $x \to x_0$.

<u>опр.</u> $\alpha(x) = \bar{o}(\beta(x))$, $x \to x_0 \Rightarrow \alpha(x)$ в т. x_0 есть б.м. более высокого порядка, чем $\beta(x)$

$\underbrace{\alpha(x) = \varphi(x)}_{}$ $\cdot \beta(x)$

$\varphi(x)$ — б.м.

опр: $\alpha(x) = \underline{O}(\beta(x))$, $\beta(x) = \underline{O}(\alpha(x))$, $x \to x_0$ $\Rightarrow$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в т. x_0 явл-ся б. м. одного порядка.

$\left(\exists \overset{\circ}{U}(x_0), \exists C_1 > 0, C_2 > 0: \quad C_1 |\alpha(x)| \le |\beta(x)| \le C_2 |\alpha(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)\right)$

опр: если $\exists k > 0$: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} \begin{matrix} \ne 0 \\ \ne \infty \end{matrix}$, то $\alpha(x)$ – б. м. порядка k по сравнению с $\beta(x)$ в т. x_0.

Пример: $\alpha(x) = 1 - \cos x$ – б. м., $x \to 0$ $\quad \beta(x) = x$ – б. м., $x \to 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^{\boxed{2}}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha(x) = 1 - \cos x$ явл. б. м.

порядка $\boxed{2}$ по сравнению с $\beta(x) = x$ в точке $x = 0$.

$A(x)$, $B(x)$ – б. б., $x \to x_0$

если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \infty$, то $A(x)$ имеет в т. x_0 более высокий порядок роста, чем $B(x)$.

$A(x)$, $B(x)$ имеют одинаковый порядок роста в т. x_0, если $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ $\quad C_1|A(x)| \le |B(x)| \le C_2|A(x)|$, в частности, если $A(x) \sim B(x)$, $x \to x_0$.

Св-ва $\bar{o}$.

1°. $\bar{o}(g(x)) \pm \bar{o}(g(x)) = \bar{o}(g(x))$, $x \to x_0$.

◀ $f_1(x) = \bar{o}(g(x))$, $x \to x_0$; $\quad f_2(x) = \bar{o}(g(x))$, $x \to x_0$.
Н. док-ть, что $f_1(x) \pm f_2(x) = \bar{o}(g(x))$, $x \to x_0$.

$$f_1(x) = \underset{\text{б.м.}}{\alpha_1(x)} \cdot g(x), \qquad f_2(x) = \underset{\text{б.м.}}{\alpha_2(x)} \cdot g(x)$$

$$f_1(x) \pm f_2(x) = \underbrace{(\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x))}_{\text{б.м.}} \cdot g(x) \Rightarrow f_1 \pm f_2 = \bar{o}(g), \ x \to x_0 \ ▶$$

2°. $\forall c \ne 0$ $\quad c \cdot \bar{o}(g(x)) = \bar{o}(g(x))$, $x \to x_0$; $\quad \bar{o}(c \cdot g(x)) = \bar{o}(g(x))$, $x \to x_0$