§3. Точные грани числовых множеств.

Опр: $E \subset \mathbb{R}$ – ограниченное сверху, если $\exists M \in \mathbb{R}$:
$x \le M \quad \forall x \in E$. M – верхняя грань мн-ва E.

Опр: $E \subset \mathbb{R}$ – огр. снизу, если $\exists m \in \mathbb{R}$:
$x \geq m \quad \forall x \in E$. m – нижняя грань мн-ва E.

Опр: $E \subset \mathbb{R}$ – огр., если оно огр. св. и сн., т.е. $\exists m, M \in \mathbb{R}$: $m \le x \le M \quad \forall x \in E$.

Лемма: $E \subset \mathbb{R}$ – огр. $\Longleftrightarrow \exists A > 0 : \ |x| \le A \quad \forall x \in E$.

◄ 1) Док-ем, что E – огр $\Rightarrow \exists A>0 : \ |x| \le A \quad \forall x \in E$

E – огр. $\Rightarrow$ E – огр. св. и сн. $\Rightarrow \exists M, m \in \mathbb{R}$:
$m \le x \le M \quad \forall x \in E$

$A := \max\{|m|, |M|\}$. $\qquad m \le x \le M \Rightarrow |x| \le A$

2) Пусть $\exists A>0$: $|x| \le A$ $\forall x \in E$. Док-ем, что E – огр.

$|x| \le A \iff -A \le x \le A \Rightarrow E$ огр. св. и сн. $\Rightarrow$

$\Rightarrow E$ – огр. ▶

<u>опр:</u> $a \in E$ – наибольший (максимальный) элемент мн-ва E, если $a \ge x$ $\forall x \in E$

<u>Обозначение:</u> $\max E$; $a = \max E$.

<u>опр:</u> $b \in E$ – наименьший (минимальный) элемент мн-ва E, если $b \le x$ $\forall x \in E$.

$\min E$; $b = \min E$

Замечание: не у каждого мн-ва есть min, max элемент. Например,

$\min[0,1) = 0$, $\max[0,1)$ не сущ-ет.

Опр: $E \subset \mathbb{R}$ огр. св. Наименьшая среди всех его верхних границ назыв-ся точной верхней гранью. Обозн: $\sup E$ (супремум)

$$\beta = \sup E \iff 1)\ \forall x \in E \quad x \le \beta$$
$$2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in E : \quad x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$$

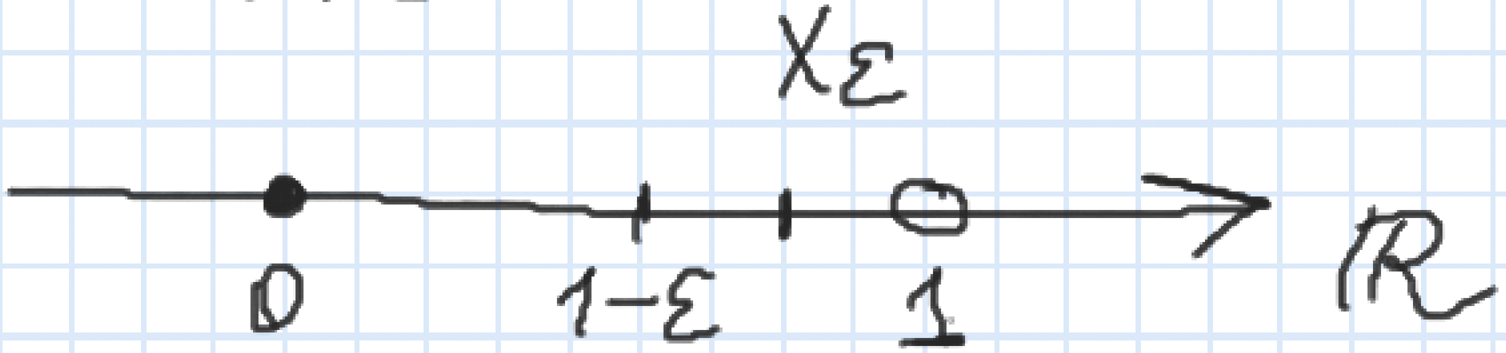
Усл-ие 1) означает, что β — верх. грань E; усл-ие 2) означает, что β — наимень. среди верх. граней.

<u>опр:</u> $E \subset \mathbb{R}$ огр. сн. Наибольш. среди всех нижних граней мн-ва E наз-ся его точной нижней гранью, или инфимумом.

<u>Обозн:</u> $\inf E$.

$\alpha = \inf E \iff$ 1) $x \geq \alpha \quad \forall x \in E$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E: \quad x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$.



<u>Пример:</u> $E = [0, 1)$.

$\forall x \in [0,1) \qquad x < 1 \Rightarrow 1$ – верх. грань E

Покажем, что это наим. среди верх. граней.

fix $\varepsilon > 0$; $\quad x_\varepsilon = \dfrac{1 + 1 - \varepsilon}{2} = 1 - \varepsilon/2$, $\quad 1 - \varepsilon < x_\varepsilon$

$\forall x \in [0,1)$ $\quad x \le 1$;

$\forall \varepsilon > 0$ $\quad \exists\, x_\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$: $\quad x_\varepsilon > 1 - \varepsilon$. Следов-но,

$\sup [0,1) = 1$. $\quad \inf [0,1) = 0$

<u>Замечание:</u> необязат-но $\sup E \in E$, $\inf E \in E$ в отличие от $\max$, $\min$. Но если $\exists \max E$, то $\max E = \sup E$, $\exists \min E = \inf E$.

<u>Теорема:</u> всякое огр. св. не $\varnothing$ числовое мн-во имеет точную верхнюю грань , а всякое огр. сн. не $\varnothing$ числ. мн-во имеет точную нижн. грань.

Док-во: $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, E – огр. св.

B – мн-во всех верхних граней мн-ва E, $B \neq \varnothing$

$\forall x \in E, \forall b \in B \Rightarrow x \leq b \Rightarrow$ по аксиоме непр-ти вещ-ых чисел $\exists \beta \in \mathbb{R}: x \leq \beta \leq b \ \forall x \in E, \forall b \in B.$

$x \leq \beta \Rightarrow \beta$ – верх. грань E, $\beta \in B$

$\beta \leq b \Rightarrow \beta = \min B \Rightarrow \beta = \sup E$ ■

Замечания: 1) $E \subset \mathbb{R}$ не огр. св. $\Rightarrow \sup E := +\infty$

$\sup E = +\infty \Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R} \ \exists x_C \in E: \ x_C > C$

$E \subset \mathbb{R}$ не огр. сн. $\Rightarrow \inf E := -\infty$

$\inf E = -\infty \Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R} \ \exists x_C \in E: \ x_C < C$

2) $\forall x \in E \quad x \leq a \Rightarrow \sup E \leq a$

$\forall x \in E \quad x \geq a \Rightarrow \inf E \geq a$

§4. Общее понятие функции (отображения).

$A, B \neq \varnothing$

<u>опр</u>: соответствие (правило), при котором $\forall x \in A$ ставится в соответствие 1! $y \in B$, называется ф-ей, заданной на мн-ве A со значениями в мн-ве B, или отображением мн-ва A в мн-во B.

Обозн: $f: A \to B$, $y = f(x), x \in A$

$x \in A$ – независимая переменная, аргумент

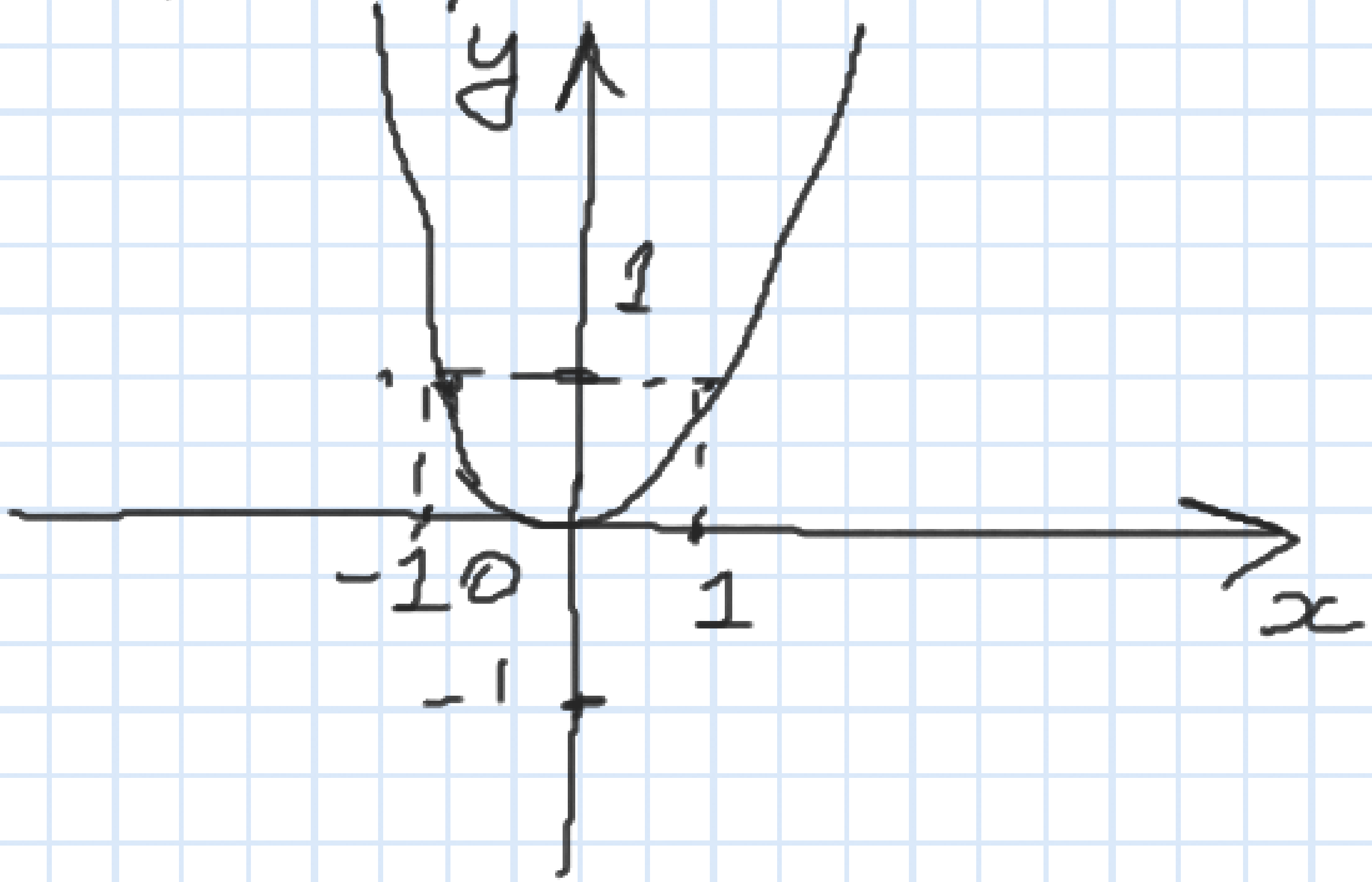
$y \in B$ – зависимая переменная

A – мн-во (область) опр-ия ф-ии

$y = f(x)$ – образ $x \in A$ при отображении f

x – прообраз $y \in B$

Пример: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



$y = -1$ – не имеет прообраза

$y = 1$ – 2 прообраза $x = 1, x = -1$

$f^{-1}(1) = \{1; -1\}$

$f^{-1}(-1) = \varnothing$

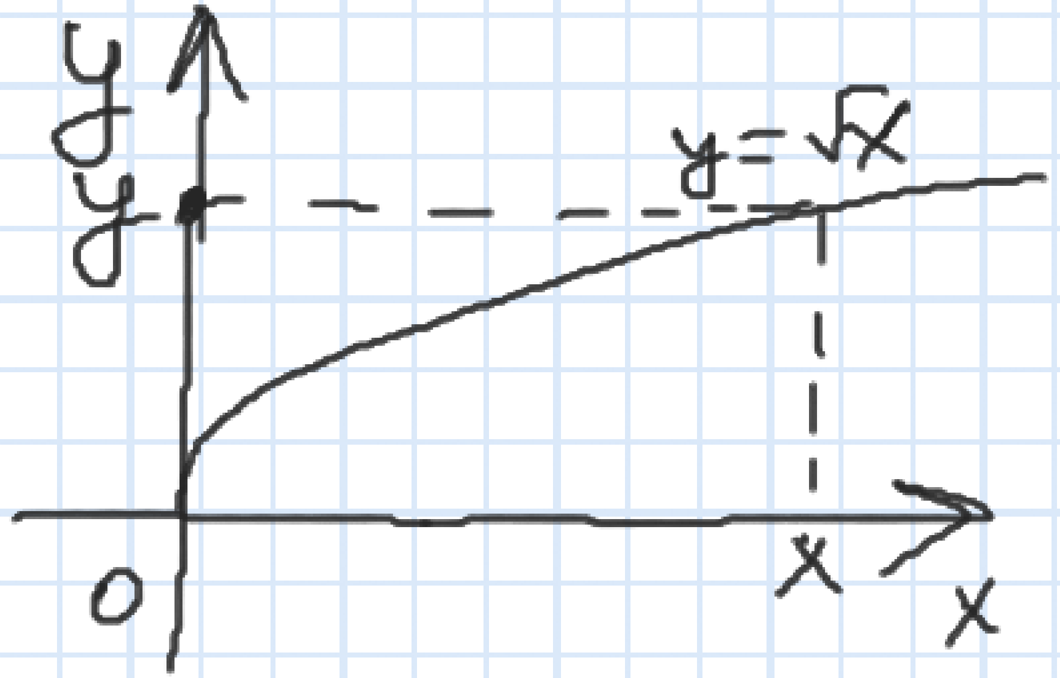
опр: $f: A \to B$ – сюръекция $\Leftrightarrow \forall y \in B\ \exists x \in A:$
$f(x) = y$,

опр: $f: A \to B$ – инъекция $\Leftrightarrow \forall x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$(\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\ )$

Опр: $f: A \to B$ – биекция (взаимно-однознач. отображение) $\Leftrightarrow$ f – сюръекция и инъекция.

Пример: $f: [0; +\infty) \to [0; +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$



$\forall y \in [0; +\infty)$ $\exists x \in [0; +\infty)$:

$y = f(x)$. $\quad x = y^2$

f – сюръекция

$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

$(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ – инъекция.

f – биекция.

опр: $f: A \to B$, $E \subset A$. Образ мн-ва E при отобр-ии f $f(E) := \{y \in B : \exists x \in E \text{ и } y = f(x)\}$

В частности,

$$f(A) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ и } y = f(x)\} -$$

— мн-во значений ф-ии f.

$$f(A) \subseteq B$$

опр: $f: A \to B$, $g: B \to C$, тогда функция $F: A \to C$, ставящая в соответствие $\forall x \in A$) элемент $F(x) = g(f(x))$, называется композицией ф-й f и g (суперпозицией, сложной ф-ей).

<u>Обозн.:</u> $F = g \circ f$

$\forall x \in A \quad (g \circ f)(x) := g(f(x))$