ВВЕДЕНИЕ.

Условные обозначения:

$\forall$ - любой, всякий, для любого, для всякого квантор общности

$\exists$ - существует, найдется хотя бы один (квантор существования)

$\exists!$ - существует единственный

$\Rightarrow$ - влечет, следует ($A \Rightarrow B$ - A влечёт B; из A следует B; если A, то B)

$\Leftrightarrow$ - равносильно ($A \Leftrightarrow B$ - A равносильно B; A тогда и только тогда, когда B)

§ 1. Множество. Операции над множествами.

См. лекцию по дискр. мат-ке

Мн-во нат. чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Мн-во целых чисел $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Мн-во рациональных чисел

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \text{НОД}(p, q) = 1\right\}$$

§ 2. Множество вещественных чисел.

Свойства вещ-х чисел, сформулированное в виде аксиом:

I Аксиомы сложения:

1) $a+b=b+a$

2) $a+(b+c)=(a+b)+c$

3) $\exists$ нейтральный по отношению к сложению элемент, называемый нулём и обозначаемый 0, такой, что $a+0=0+a=a$

4) $\forall a$ $\exists$ противоположный элемент, обозначаемый $-a$, такой, что $a+(-a)=0$

II Аксиомы умножения:

5) $a \cdot b = b \cdot a$

6) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

7) $\exists$ нейтральный по отношению к умножению элемент, называемый единицей и обозначаемый 1, такой, что $1 \cdot a = a$

8) $\forall a \neq 0$ $\exists$ обратный элемент, обозначаемый $\frac{1}{a}$, такой что $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

III Аксиомы связи между сложением и умножением:

9) $a \cdot (b + c) = ab + a \cdot c$

IV. Аксиомы порядка:

10) $a \le a$

11) $a \le b,\ b \le a \Rightarrow a = b$

12) $a \le b,\ b \le c \Rightarrow a \le c$

13) $\forall a, b \quad a \le b$ или $b \le a$

V Аксиома связи порядка со сложением:

14) $a \le b \Rightarrow \forall c \quad a + c \le b + c$

VI Аксиома связи порядка с умножением:

15) $0 \le a,\ 0 \le b \Rightarrow 0 \le a \cdot b$

VII Аксиома полноты (непрерывности)

16) $\forall A, B \neq \varnothing \quad \forall a \in A \ \forall b \in B \quad a \leq b \Rightarrow \exists c : a \leq c \leq b$

(Для любых непустых подмножеств чисел A и B, таких, что каждый элемент a множества A меньше либо равен любого элемента b множества B, существует вещ. число c, такое, что $a \leq c \leq b$).

Перечисленные св-ва полностью определяют мн-во вещ-х чисел в том смысле, что из этих св-в следуют все остальные известные св-ва вещ-х чисел.

Пример: доказать с помощью аксиом 1–16, что если $a \le b$, $c \le d$, то $a+c \le b+d$ (правило почленного сложения нерав-в)

$a \le b \Rightarrow a+c \le b+c$ (аксиома 14)

$c \le d \Rightarrow c+b \le d+b$ (акс. 14)

Т. к. $c+b=b+c$, $d+b=b+d$ (акс. 1), то нер-во $c+b \le d+b$ равносильно $b+c \le b+d$

Имеем: $a+c \le b+c$, $b+c \le b+d \Rightarrow$

$\Rightarrow a+c \le b+d$ (аксиома 12)

Поэтому можно дать аксиоматическое определение мн-ва вещ-х чисел след. образом:

<u>опр</u>: мн-во элементов <u>любой</u> природы, удовлетворяющих аксиомам 1–16, содержащее более одного элемента, называется множеством вещ-х чисел $\mathbb{R}$, а каждый его элемент – вещественным числом.

Самые известные модели или реализации мн-ва $\mathbb{R}$:

1) точки на числовой прямой;
2) мн-во бесконечных десятичных дробей;
3) мн-во сечений по Дедекинду.

Мы будем использовать первые 2 реализации.

∀ вещ. число a можно представить в виде бесконеч. десятич. дроби:

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots,$$

где из 2-х знаков „+" или „−" выбирается какой-то один, $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha_k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$, $k = 1,2,3,\ldots$

Любое неотриц. вещ. число a можно приблизить рацион. числами с произвольной точностью:

$$\underbrace{\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\text{приближение по недостатку}} \le a \le \underbrace{\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + \frac{1}{10^n}}_{\text{приближение по избытку}}$$

Аналогичные приближения имеют место и для $a<0$.

Абсолютная величина, или модуль, вещ. числа a обозначается $|a|$ и определяется след. образом:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Св-ва модуля (следуют непосредственно из опр-ия):

$|a| = |-a|$, $a \leq |a|$, $-a \leq |a|$, $|ab| = |a| \cdot |b|$,

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ при $b \neq 0$.

$$|a| \leq M \Leftrightarrow -M \leq a \leq M \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -M, \\ a \leq M. \end{cases}$$

$$|a| \geqslant M \iff \left[\begin{array}{l} a \geqslant M, \\ a \leqslant -M \end{array}\right.$$

(совокупность нерав-в)

Нерав-во треугольника: $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

Обратное нерав-во треуг-ка:

$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \big||a| - |b|\big| \leqslant |a-b|$

<u>Док-во:</u> $|a| = |(a-b)+b| \underset{\text{нер-во } \Delta}{\leqslant} |a-b| + |b| \Rightarrow$

$\Rightarrow |a-b| \geqslant |a| - |b|$

$|b| = |(b-a)+a| \leqslant |b-a| + |a| \Rightarrow |b-a| \geqslant |b| - |a|,$

$|a-b| \geqslant |b| - |a|$

Имеем: $|a-b| \geq |a|-|b|$, $|a-b| \geq |b|-|a| \Rightarrow$

$\Rightarrow |a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$