29. Основные теоремы дифференциального исчисления.

<u>опр</u>: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ – т. лок. max (min) $\Leftrightarrow \exists\, U_\delta(x_0)\subset$
$\subset(a,b)$: $\forall x\in U_\delta(x_0)$ $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$.

max, min – экстремум.

<u>Теорема Ферма</u>. Пусть ф-я f диф-ма в т. $x_0\in(a,b)$, x_0 – т. экстремума. Тогда $f'(x_0)=0$.

<u>Док-во</u>: f диф. в т. x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists$ конеч. $f'(x_0)$ $\Leftrightarrow$ $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=$
$=f'(x_0)$

x_0 – т. max $\Rightarrow \exists\, U_\delta(x_0)$: $\underbrace{f(x)\le f(x_0)}$ $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

$$x_0<x<x_0+\delta \qquad \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}}\le 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'_+(x_0)\le 0 \Rightarrow f'(x_0)\le 0$$

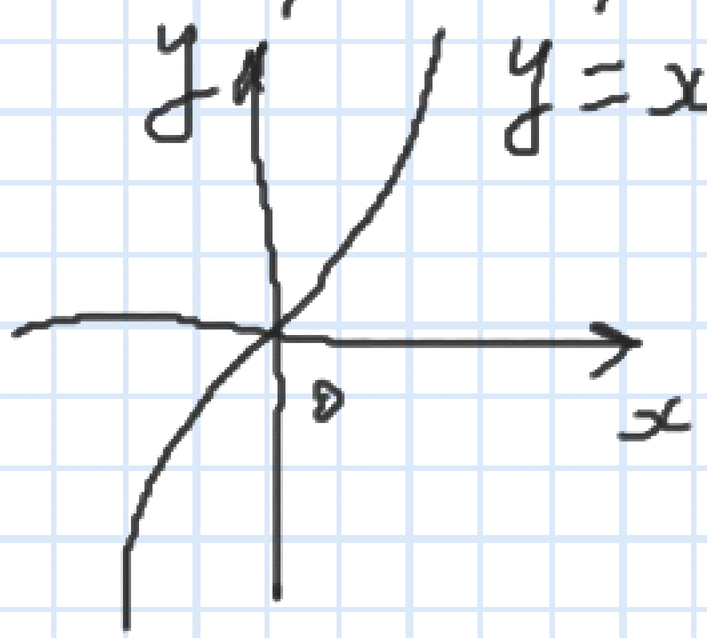
$x_0-\delta < x < x_0 \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

$$f'(x_0) \leq 0, \; f'(x_0) \geq 0 \iff f'(x_0) = 0.$$

<u>Замечания</u>: 1) геом. смысл: касат-я к гр-ку ф-ии $f(x)$ в т. экстремума, если она сущ-ет, $\parallel Ox$.

2) т-ма Ферма дает только необх-е усл-е экстремума, оно не явл-ся достаточ.

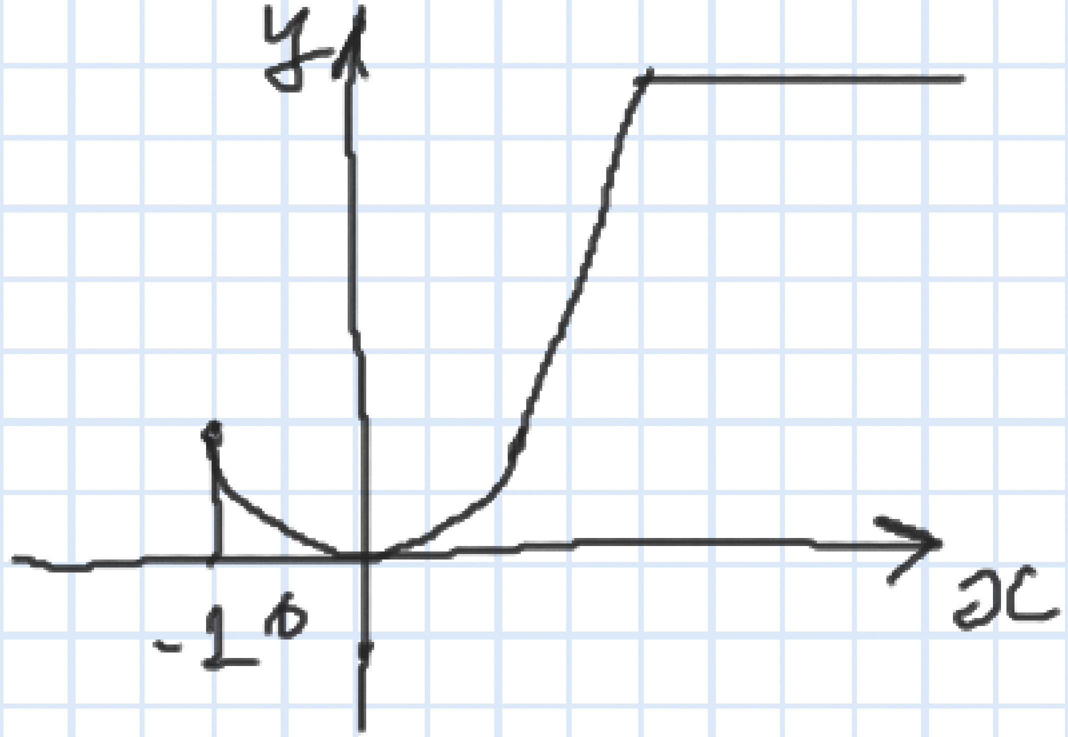
<u>Пример</u>:



$y' = 3x^2$, $y'(0) = 0$, $x = 0$ не явл. точкой лок. экстр.

3) т-ма Ферма даёт необх. усл-ие только для внутр. точки экстремума.

<u>Пример:</u>



$$y = \begin{cases} x^2, & -1 \le x \le 2, \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

$x = -1$ – т. лок. max, $y'(-1) \neq 0$

Теорема Ролля. Пусть $f(x)$ непр. на $[a,b]$, диф-ма на (a,b) и $f(a)=f(b)$. Тогда $\exists\, \gamma \in (a,b) : f'(\gamma) = 0$.

Док-во: $f \in C[a,b] \Rightarrow$ огр. (1-я т. Вейерштрасса), т.е.

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}, \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \in \mathbb{R}$$

$\exists\, x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = m, \ f(x_2) = M$ (2-я т. В.)

$m = M \Rightarrow f(x) = const \Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$

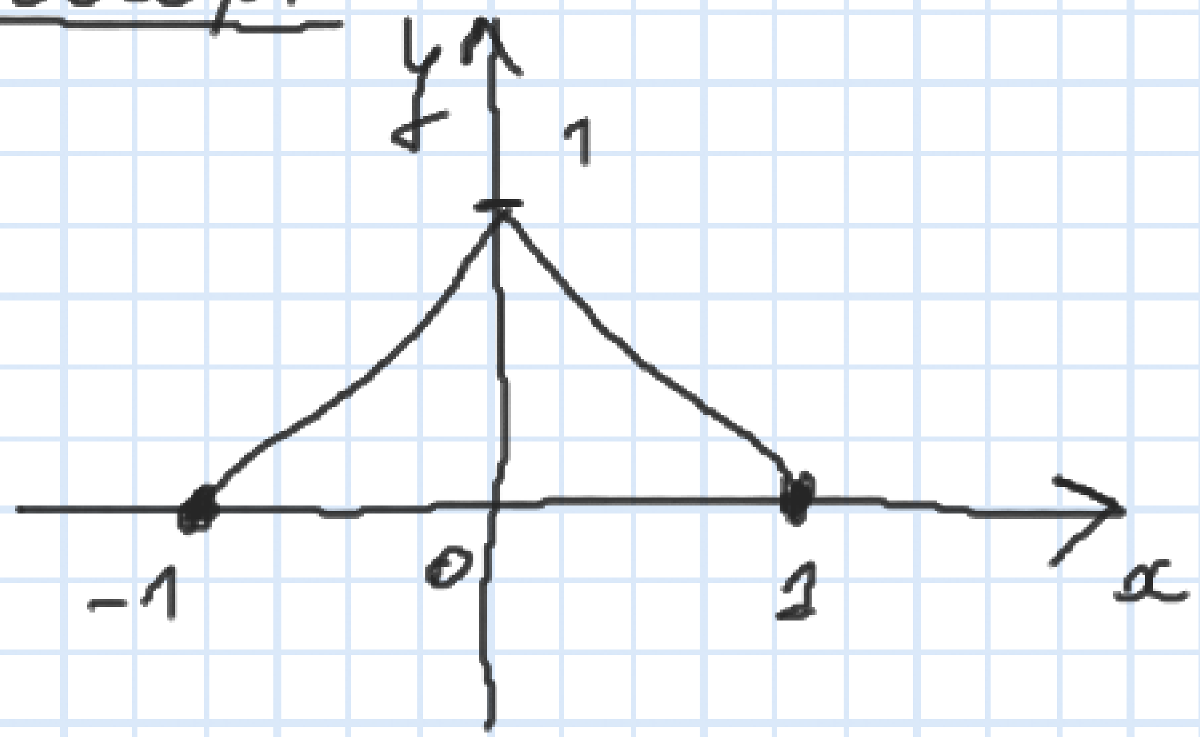
$m < M$, если $f(a) = m$ или $f(b) = m$, то $x_2 \in (a,b)$ (т.к. $f(a)=f(b)$) $\Rightarrow$ т. $x_2 \in (a,b)$ – т. лок max $\Rightarrow f'(x_2) = 0$ (т. Ферма)

Если $f(a) = M$ или $f(b) = M$, то $x_1 \in (a;b) \Rightarrow f'(x_1) = 0$.

Замечания: 1) геом. смысл: при выполнении всех усл-й т-мы на графике ф-ии $y=f(x)$, $x\in(a,b)$ найдется точка, касат-я в которой $\parallel Ox$.

2) если нарушается х.б. одно из 3-х условий теоремы, то утв-ие перестает быть верным.

Пример:



$y=1-|x|$, $x\in[-1;1]$

$\nexists\ c\in(-1;1):\ y'(c)=0$

Теорема Лагранжа (о конеч. приращениях). Если $f \in C[a;b]$, диф-ма на $(a;b)$, то $\exists\, \gamma \in (a;b)$:

$$f(b)-f(a)=f'(\gamma)(b-a).$$

Док-во: рассм. ф-ю $F(x)=f(x)-\lambda x$.

λ определим так, чтобы $F(a)=F(b) \Leftrightarrow f(a)-\lambda a = f(b)-\lambda b$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

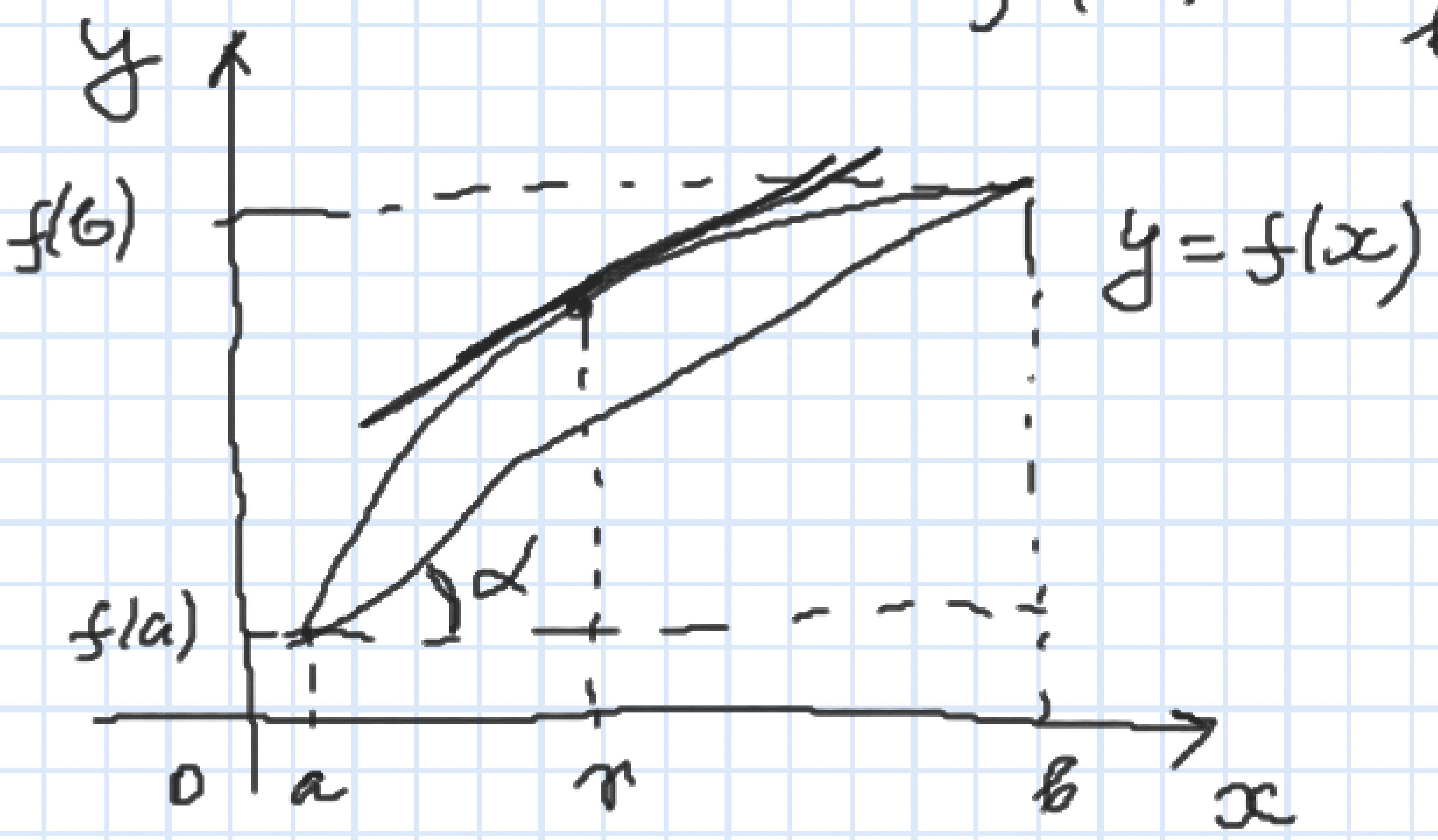
Для $F(x)$ выполнены все усл-я т. Ролля $\Rightarrow \exists\, \gamma \in (a;b)$:

$F'(\gamma)=0$,

$F'(\gamma)=f'(\gamma)-\lambda=0 \Leftrightarrow f'(\gamma)=\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ▶

Замечания: 1) геом. смысл

$$f'(\gamma) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



формула конечных приращений Лагранжа.

2) $\gamma \in (a;b) \Leftrightarrow \gamma = a + \theta(b-a), \quad 0<\theta<1$

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a)) \cdot (b-a), \quad 0<\theta<1$$

$a = x, \ b - a = \Delta x, \ b = x + \Delta x$

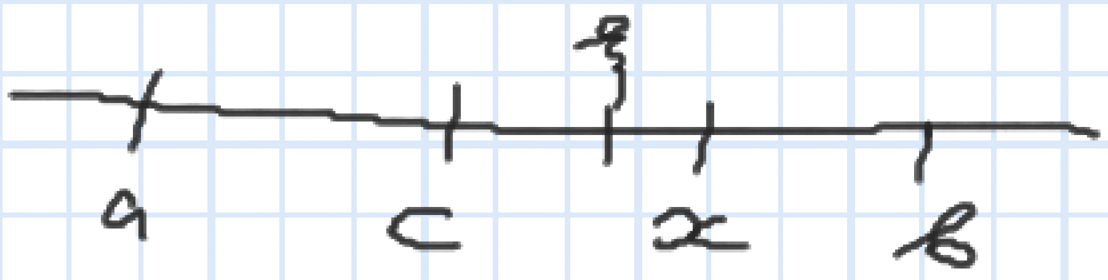
$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x$$

$0<\theta<1$

Следствие (о точках разрыва производной дифф-ой ф-ии).
Пусть $f(x)$ дифф-ма на $(a;b)$, тогда $f'(x)$ не может иметь на $(a;b)$ ни устранимых разрывов, ни разрывов первого рода.

Док-во: $c \in (a;b)$, $l_1 = \lim\limits_{x \to c-0} f'(x)$, $l_2 = \lim\limits_{x \to c+0} f'(x)$.

$\forall x \in (a,b)$, $x > c$



Т. Лагранжа на $[c,x]$:

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x-c), \text{ где } \xi \in (c,x)$$

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

Значит, $f'(c) = \lim\limits_{x \to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim\limits_{x \to c+0} f'(\xi) = l_2$

Аналогично $f'(c) = l_1$. $\Rightarrow f'(x)$ непр. в т. c ▶

Замечание: разрывы 2-го рода производная дифф-ой ф-ии иметь может.

Пример:
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$f\in C(-1;1)$, дифф-ма на $(-1,1)$

$f'(x)$ имеет разрыв 2-го рода в т. $x=0$.

$x\neq 0$; $\quad f'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}=0$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Теорема Коши (о конеч. приращениях). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непр. на $[a,b]$, дифф-мы на $(a;b)$, $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$, тогда $\exists\, \gamma \in (a;b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}.$$

Док-во: $g(b) \neq g(a)$.

Если $g(b) = g(a) \Rightarrow$ по т. Ролля $\exists\, c \in (a;b): g'(c) = 0$ — противоречие условию $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a;b)$.

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x), \qquad \lambda: F(a) = F(b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \Leftrightarrow \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

По т. Ролля $\exists\, \gamma \in (a;b): F'(\gamma) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x) \Rightarrow f'(\gamma) - \lambda g'(\gamma) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$ ▶

<u>Замечания:</u> 1) т. Лагранжа – част. случай т. Коши,
$g(x) = x$.

2) геом. смысл
$x = g(t)$, $y = f(x)$, $\quad \dfrac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} = y'_x\big|_{x=\gamma}$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = y'_x\big|_{x=\gamma}$$

30. Правила Лопиталя.

<u>Теорема 1</u>. Пусть $f(x)$, $g(x)$ диф-мы на $(a;b)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$. Тогда, если сущ-ет (конеч. или бесконеч.) предел $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то предел $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ также сущ-ет и он равен A.

<u>Док-во</u>: $x \in (a;b)$. $f(a) = g(a) = 0$,

$f(x)$, $g(x)$ непр. на $[a,x]$ и диф. на (a,x). По т. Коши $\exists\ \gamma \in (a,x)$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$$

$$\gamma \to a+0 \Rightarrow x \to a+0$$

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Замечание: т-ма верна при $x \to a-0$, $x \to a$.