Тишин В.В.

В теории предикатов выделяется класс формул, в которых наряду с операциями квантификации используются лишь функции из набора $\{\neg, \vee, \wedge\}$.

Говорят, что предикатная формула находится в *приведённой форме*, если кроме операций квантификации используются лишь функции из набора $\{\neg, \vee, \wedge\}$, причём отрицание относится только к предикатным символам.

Теорема о приведённой форме.

Каждую предикатную формулу можно представить в приведённой форме.

Доказательство.

Возьмём произвольную предикатную формулу и, применяя при необходимости, формулы (11) - (16), перейдём к формуле, содержащей лишь символы $\exists, \forall, \neg, \cdot, \vee$. Затем, можем применить законы Моргана, двойного отрицания и теорему об отрицании кванторов. В результате получим представление предикатной формулы в приведённой форме. ■

Пример 4. Получить приведённую форму предикатной формулы

$$\forall_x \exists_y P(x,y,z) + \exists_x Q(x,t) \vee \overline{\forall_z \overline{T(y,z)}}.$$

Используем формулу (13), формулу двойного отрицания и теорему об отрицании кванторов:

$$\forall_x \exists_y P(x,y,z) + \exists_x Q(x,t) \vee \overline{\forall_z \overline{T(y,z)}} =$$

$$= \overline{\forall_x \exists_y P(x,y,z)} \cdot \exists_x Q(x,t) \vee \forall_x \exists_y P(x,y,z) \cdot \overline{\exists_x Q(x,t)} \vee \overline{\forall_z \overline{T(y,z)}} =$$

$$= \exists_x \overline{\exists_y P(x,y,z)} \cdot \exists_x Q(x,t) \vee \forall_x \exists_y P(x,y,z) \cdot \forall_x \overline{Q(x,t)} \vee \exists_z \overline{\overline{T(y,z)}} =$$

$$= \exists_x \forall_y \overline{P(x,y,z)} \cdot \exists_x Q(x,t) \vee \forall_x \exists_y P(x,y,z) \cdot \forall_x \overline{Q(x,t)} \vee \exists_z T(y,z).$$

Получена приведённая форма предикатной формулы.

Если имеется формула $\forall_x P(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ или $\exists_x P(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, то первое вхождение переменной x в данные формулы будем называть *вхождением непосредственно после квантора*, а про остальные вхождения будем говорить, что *переменная x находится в области действия квантора по данной переменной*.

Говорят, что *вхождение* переменной x в предикатную формулу *связано*, если x входит в формулу непосредственно после квантора или находится в области действия квантора по данной переменной; в противном случае вхождение переменной называется *свободным вхождением*.

Переменная x называется *свободной в данной формуле*, если хотя бы одно её вхождение в данную формулу свободно.

Переменная x называется *связанной в данной формуле*, если хотя бы одно её вхождение в данную формулу связано.

Предикатная формула называется *замкнутой*, если она не содержит свободных переменных.

Пример 5. В формуле $\exists_x \forall_y P(x, y, z) \vee \exists_y Q(x, y, z, t)$ первое и второе вхождения переменной x связаны, а третье вхождение – свободно, значит, переменная x является одновременно и свободной и связанной переменной в данной формуле.

Все четыре вхождения переменной y в данную формулу связаны, значит, y является связанной переменной в данной формуле.

Все вхождения переменных z и t являются свободными, значит переменные z и t являются свободными в данной формуле.

Заметим, что так как данная формула содержит свободные переменные, то она не является замкнутой.

Переход от предиката $P(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ к предикату $P(z, y_1, y_2, ..., y_n)$ называется *переименованием* переменной x в переменную z.

Теорема о переименовании связанных переменных.

Переменные, связанные в данной формуле, можно переименовывать, то есть справедливы формулы (17) и (18).

$$\forall_x P(x, y_1, y_2, ..., y_n) = \forall_z P(z, y_1, y_2, ..., y_n) \qquad \textbf{(17)}$$

$$\exists_x P(x, y_1, y_2, ..., y_n) = \exists_z P(z, y_1, y_2, ..., y_n) \qquad \textbf{(18)}$$

Доказательство.

а) Докажем формулу (17). Возьмём произвольный набор $(b_1, b_2, ..., b_n)$, на котором левая часть формулы (17) равна 1:

$\forall_x P(x, b_1, ..., b_n) = 1$. На основании определения навешивания квантора общности имеем, что это равносильно тождественной истинности предиката $P(x, b_1, ..., b_n)$ относительно переменной *x*: $P(x, b_1, ..., b_n) \equiv 1$. Значит, для любого a_0 выполнено равенство $P(a_0, b_1, ..., b_n) = 1$, а это, в свою очередь, равносильно тому, что $P(z, b_1, ..., b_n) \equiv 1$ относительно переменной *z*. Последнее равенство равносильно равенству $\forall_z P(z, b_1, ..., b_n) = 1$.

Таким образом, доказано, что множество единичных наборов правой и левой части формулы (17) совпадают, а, следовательно, формула (17) доказана. ■

а) Докажем формулу (18). Возьмём произвольный набор $(b_1, b_2, ..., b_n)$, на котором левая часть формулы (18) равна 0:

$\exists_x P(x, b_1, ..., b_n) = 0$. На основании определения навешивания квантора существования имеем, что это равносильно тождественной ложности предиката $P(x, b_1, ..., b_n)$ относительно переменной *x*: $P(x, b_1, ..., b_n) \equiv 0$. Значит, для любого a_0 выполнено равенство $P(a_0, b_1, ..., b_n) = 0$, а это, в свою очередь, равносильно тому, что $P(z, b_1, ..., b_n) \equiv 0$ относительно переменной *z*. Последнее равенство равносильно равенству $\exists_z P(z, b_1, ..., b_n) = 0$.

Таким образом, доказано, что множество нулевых наборов правой и левой части формулы (18) совпадают, формула (18) доказана, а, следовательно, теорема о переименовании связанных переменных доказана. ■

Покажем, что область действия квантора по некоторой переменной можно распространять на предикаты, не содержащие вхождений этой переменной.

Теорема о распространении области действия квантора.

Пусть даны предикаты $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ и $Q(y_1, \ldots, y_n)$. Тогда справедливы формулы (19) - (22):

$$\forall_x P(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ = \forall_x \left(P(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) \right) \qquad \textbf{(19)}$$

$$\forall_x P(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \vee Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ = \forall_x \left(P(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \vee Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) \right) \qquad \textbf{(20)}$$

$$\exists_x P(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ = \exists_x \left(P(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) \right) \qquad \textbf{(21)}$$

$$\exists_x P(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \vee Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ = \exists_x \left(P(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \vee Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) \right) \qquad \textbf{(22)}$$

Доказательство.

а) Докажем формулу (20)

Возьмём произвольный набор $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, на котором левая часть формулы (20) равна 0:

$\forall_x P(x, b_1, b_2, \ldots, b_n) \vee Q(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$. Запишем цепочку равносильных высказываний:

$$\forall_x P(x, b_1, b_2, \ldots, b_n) \vee Q(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0 \quad \overset{\text{по определению } \vee}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall_x P(x,b_1,b_2,...,b_n)=0 \\ Q(b_1,b_2,...,b_n)=0 \end{cases} \overset{\text{по определению } \forall}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(x,b_1,b_2,...,b_n) \text{ опровержим относительно } x \\ Q(b_1,b_2,...,b_n)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Найдётся } x_0 \text{, такое, что } P(x,b_1,b_2,...,b_n)=0 \\ Q(b_1,b_2,...,b_n)=0 \end{cases} \overset{\text{по определению } \vee}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow$ Найдётся x_0, такое, что $P(x_0,b_1,b_2,...,b_n) \vee Q(b_1,b_2,...,b_n)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Предикат $P(x,b_1,b_2,...,b_n) \vee Q(b_1,b_2,...,b_n)$ опровержим относительно переменной x $\overset{\text{по определению } \forall}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \forall_x \left(P(x,b_1,b_2,...,b_n) \vee Q(b_1,b_2,...,b_n)\right)=0.$$

Таким образом, доказано, что множество нулевых наборов правой и левой части формулы (20) совпадают, формула (20) доказана.

а) Докажем формулу (21)

Возьмём произвольный набор $(b_1,b_2,...,b_n)$, на котором левая часть формулы (21) равна 1:

$\exists_x P(x,b_1,b_2,...,b_n) \cdot Q(b_1,b_2,...,b_n)=1$. Запишем цепочку равносильных высказываний:

$$\exists_x P(x,b_1,b_2,...,b_n) \cdot Q(b_1,b_2,...,b_n)=1 \overset{\text{по определению } \wedge}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists_x P(x,b_1,b_2,...,b_n)=1 \\ Q(b_1,b_2,...,b_n)=1 \end{cases} \overset{\text{по определению } \exists}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(x,b_1,b_2,...,b_n) \text{ выполним относительно } x \\ Q(b_1,b_2,...,b_n)=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Найдётся } x_0, \text{ такое, что } P(x,b_1,b_2,...,b_n)=1 \\ Q(b_1,b_2,...,b_n)=1 \end{cases} \overset{\text{по определению } \wedge}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow$ Найдётся x_0, такое, что $P(x_0,b_1,b_2,...,b_n)\cdot Q(b_1,b_2,...,b_n)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Предикат $P(x,b_1,b_2,...,b_n)\cdot Q(b_1,b_2,...,b_n)$ выполним относительно переменной x $\overset{\text{по определению } \exists}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \exists_x \left(P(x,b_1,b_2,...,b_n)\cdot Q(b_1,b_2,...,b_n)\right)=1.$$

Таким образом, доказано, что множество единичных наборов правой и левой части формулы (21) совпадают, формула (21) доказана.

Аналогично доказываются формулы (19) и (22). ■

Рассмотрим вопрос о возможности представления предикатных формул в виде, когда все кванторы собраны в начале формулы.

Говорят, что предикатная формула находится в *предварённой нормальной форме*, если она имеет вид

$$D_{u_1}D_{u_2}...D_{u_k}(A), \qquad \textbf{(23)}$$

где D - либо квантор общности, либо квантор существования, u_i - символ переменной, а формула A находится в приведённой форме и не содержит кванторов.

Теорема о предварённой нормальной форме.

Каждую предикатную формулу можно представить в предварённой нормальной форме.

Доказательство.

Пусть дана некоторая предикатная формула. На первом этапе преобразуем её к приведённой форме. Затем, при необходимости, переименуем её связанные переменные, и перенесём все кванторы на начало формулы, что возможно, согласно теореме о распространении области действия кванторов. В результате получаем предварённую нормальную форму предикатной формулы.

Пример 6. Получить предварённую нормальную форму предикатной формулы $\left(\exists_x\exists_y P(x,y)\leftrightarrow\forall_x\overline{Q(x,t)}\right)\cdot\overline{\forall_y\overline{\overline{\exists_z T(y,z)}}}$.

$$\left(\exists_x\exists_y P(x,y)\leftrightarrow\forall_x\overline{Q(x,t)}\right)\cdot\overline{\forall_y\overline{\overline{\exists_z T(y,z)}}}=$$

$$=\left(\overline{\exists_x\exists_y P(x,y)}\cdot\forall_x\overline{\overline{Q(x,t)}}\vee\exists_x\exists_y P(x,y)\cdot\forall_x\overline{Q(x,t)}\right)\cdot\exists_y\overline{\overline{\overline{\exists_z T(y,z)}}}=$$

$$=\left(\forall_x\overline{\exists_y P(x,y)}\cdot\exists_x\overline{\overline{Q(x,t)}}\vee\exists_x\exists_y P(x,y)\cdot\forall_x\overline{Q(x,t)}\right)\cdot\exists_y\exists_z T(y,z)=$$

$$=\left(\forall_x\forall_y\overline{P(x,y)}\cdot\exists_{x_1}Q(x_1,t)\vee\exists_{x_2}\exists_{y_1}P(x_2,y_1)\cdot\forall_{x_3}\overline{Q(x_3,t)}\right)\cdot\exists_{y_2}\exists_z T(y_2,z)=.$$

$$=\forall_x\forall_y\exists_{x_1}\exists_{x_2}\exists_{y_1}\forall_{x_3}\exists_{y_2}\exists_z\left(\left(\overline{P(x,y)}\cdot Q(x_1,t)\vee P(x_2,y_1)\cdot\overline{Q(x_3,t)}\right)\cdot T(y_2,z)\right).$$

Предварённая нормальная форма предикатной формулы получена.

Вопросы для самопроверки.

1) От каких переменных зависит предикат $\forall_y\exists_x P(x,y)$?

2) Запишите с помощью кванторов определение того, число a является пределом числовой последовательности $\{a_n\}$. Взяв отрицание от этого определения, получите определение того, что число a не является пределом числовой последовательности $\{a_n\}$. Докажите на основании полученного определения, что число 1 не является пределом числовой последовательности с общим членом $a_n=(-1)^n$.

3) Обладает ли дистрибутивностью квантор общности относительно дизъюнкции?

4) Привести к приведённой форме предикат

$$\left(\exists_x\forall_y\overline{P(x,y,z)}\rightarrow\exists_y Q(x,y,z,t)\right)\downarrow T(x,y)$$

5) Докажите формулы (19) и (22)

6) Привести к предварённой форме предикат

$$\left(\exists_x\forall_y\overline{P(x,y,z)}\rightarrow\forall_y Q(x,y,z,t)\right)\mid T(x,y)$$

Ответы:

1. Ни от каких. Это – высказывание.
3. Нет

Формальные теории.

Формальные системы – это системы операций над объектами, понимаемыми, как последовательности символов некоторого алфавита; сами операции также являются операциями над символами. Термин «формальный» подчёркивает, что объекты и операции над ними рассматриваются чисто формально, без каких - либо содержательных интерпретаций символов. Предполагается, что между символами не существует никаких связей и отношений, кроме тех, что явно описаны средствами самой формальной системы.

Принципы построения формальных теорий.

Формальная теория строится следующим образом:

1. Задаётся *алфавит*, то есть набор символов, используемых в данной теории.

Алфавит может содержать буквы, заглавные или прописные, цифры, служебные символы, буквы могут быть снабжены индексами, таким образом, алфавит может быть конечным или бесконечным.

2. Определяется множество правильно построенных выражений – множество *формул*;

Множество формул задаётся конструктивным средствами, как правило, индуктивным определением.

3. Во множестве формул выделяется подмножество *аксиом*, то есть формул, объявленных аксиомами.

Множество аксиом может быть как конечным, так и бесконечным, в зависимости от каждой конкретной формальной теории.

4. Задаются правила вывода – правила построения новых формул из имеющихся. Точнее, *правилом вывода* называется $n+1$ – местное отношение $R(F_1,...,F_n,G)$ на множестве формул. Если формулы $F_1,...,F_n,G$ находятся в отношении R, то формула G называется *непосредственно выводимой* из $F_1,...,F_n$ по правилу R. Часто правило R записывается в виде $\dfrac{F_1,...,F_n}{G}R$. Формулы

$F_1, \dots, F_n$ называются *посылками* правила R, а G - его *следствием* или *заключением*.

Дадим определение теоремы, а также вывода из множества гипотез.

Формула G называется *теоремой*, если существует последовательность $F_1, \dots, F_n$ такая, что $F_n = G$, каждый член которой $F_i \ (i = 1, 2, \dots, n)$ или является аксиомой, или получен по некоторому правилу вывода из некоторых предыдущих членов этой последовательности. В таком случае пишут $\vdash G$, а последовательность $F_1, \dots, F_n$ называют *доказательством теоремы* G.

Пусть имеется некоторый список формул Γ.

Формула G называется *выводимой из множества гипотез* Γ, если существует последовательность $F_1, \dots, F_n$ такая, что $F_n = G$, каждый член которой $F_i \ (i = 1, 2, \dots, n)$ или является аксиомой, или формулой из списка Γ, или получен по некоторому правилу вывода из некоторых предыдущих членов этой последовательности. В таком случае формулы из списка Γ называют *гипотезами*, пишут $\Gamma \vdash G$, а последовательность $F_1, \dots, F_n$ называют *выводом* формулы G из списка гипотез Γ.

В дальнейшем будем использовать знак $\Rightarrow$, как знак импликации в «метаязыке», на котором производится изложение курса.

Некоторые свойства вывода из множества гипотез.

1. Выводимость гипотезы. $\Gamma, G \vdash G$.

В этом случае выводом из множества гипотез Γ, G будет являться последовательность, состоящая из единственной формулы G, входящей в список гипотез Γ, G.

2. Расширение списка гипотез. $\Gamma \vdash G \Rightarrow \Gamma, A \vdash G$.

В этом случае выводом формулы G из расширенного множества гипотез Γ, A будет та же самая последовательность, которая является выводом G из гипотез Γ.

3. Перестановка гипотез. $\Gamma, A, B \vdash G \Rightarrow \Gamma, B, A \vdash G$.

В этом случае выводом формулы G из множества гипотез Γ, B, A будет та же самая последовательность, которая является выводом G из гипотез Γ, B, A.

4. Удаление выводимой гипотезы.

$$\Gamma, A \vdash G, \quad \Gamma \vdash A \ \Rightarrow \ \Gamma \vdash G.$$

По условию, существует последовательность $F_1, ..., F_n$ такая, что $F_n = G$, каждый член которой F_i $(i = 1, 2, ..., n)$ или является аксиомой, или формулой из списка Γ, A, или получен по некоторому правилу вывода из некоторых предыдущих членов последовательности $F_1, ..., F_n$. Рассмотрим случаи:

а) Ни один член последовательности $F_1, ..., F_n$ не является формулой A. Тогда эта последовательность $F_1, ..., F_n$ и является выводом формулы G из множества гипотез Γ;

б) Для некоторого индекса i выполнено равенство $A = F_i$. По условию, $\Gamma \vdash A$, то есть, существует последовательность $A_1, ..., A_m$ такая, что $A_m = A$, каждый член которой или является аксиомой, или формулой из списка Γ, или получен по некоторому правилу вывода из некоторых предыдущих членов этой последовательности.

Тогда каждое вхождение $A = F_i$ заменим последовательностью $A_1, ..., A_m$. В результате получим последовательность

$F_1, ..., F_{i-1}, A_1, ..., A_{m-1}, A, F_{i+1}, ..., F_n$, являющуюся выводом формулы G из множества гипотез Γ.