Тишин В.В.

Общее положение множеств.

Будем говорить, что множества A и B *находятся в общем положении*, и писать $A \between B$, если существуют такие элементы $a, b, c,$ что $a \in A$ и $a \notin B$, $b \in B$ и $b \notin A$, $c \in A$ и $c \in B$.

Теорема о четырёх возможностях.

Для любых множеств A и B справедлива хотя бы одна из следующих четырёх возможностей:

1) $A \subseteq B$;

2) $B \subseteq A$;

3) A и B не имеют общих элементов;

4) $A \between B$.

Доказательство. Допустим противное, т.е. допустим, что для некоторых множеств A и B ни одна из четырёх возможностей не выполнена.

1) Если не выполнена первая возможность, найдётся элемент $a \in A$ и $a \notin B$;

2) Если не выполнена вторая возможность, найдётся элемент $b \in B$ и $b \notin A$;

3) Если не выполнена третья возможность, найдётся элемент $c \in A$ и $c \in B$.

Существование таких элементов означает, что $A \between B$.

4) Если не выполнена четвёртая возможность, получаем противоречие.

Значит, допущение о том, что теорема не может быть выполнена, неверно, и теорема доказана. ■

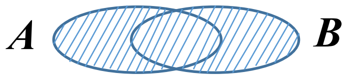
Операции между множествами.

1. *Объединение*.

Объединение обозначается символом $\cup$ и определяется для *двух множеств* так:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}. \qquad \textbf{(7)}$$

Объединению двух множеств A и B соответствует заштрихованная область на рисунке (1):



(рис.1)

Операцию *объединение* можно обобщить на случай *любого семейства множеств* так:

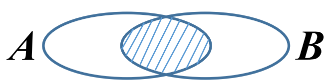
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists_i x \in A_i\}. \qquad \textbf{(8)}$$

2. *Пересечение*.

Пересечение обозначается символом $\cap$ и определяется для *двух множеств* так:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}. \qquad \textbf{(9)}$$

Пересечению двух множеств соответствует заштрихованная область на рисунке (2):



(рис.2)

Операцию *пересечение* можно обобщить на случай *любого семейства множеств* так:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall_i x \in A_i\}. \qquad \textbf{(10)}$$

Пример.

Пусть $A_n = \left[\frac{1}{n}; n+1\right)$. Тогда

$$\bigcup_{n\in N} A_n = [1;2) \cup \left[\frac{1}{2};3\right) \cup \left[\frac{1}{3};4\right) \cup \ldots = (0;+\infty),$$

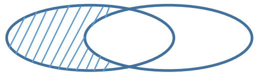
$$\bigcap_{n\in N} A_n = [1;2) \cap \left[\frac{1}{2};3\right) \cap \left[\frac{1}{3};4\right) \cap \ldots = [1;2).$$

3. *Разность*.

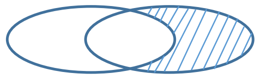
Разность обозначается символом \ и определяется для *двух множеств* так:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}. \qquad \textbf{(11)}$$

Разности $A \setminus B$ соответствует заштрихованная область на рисунке (3):

A  B **(рис.3)**

Разности $B \setminus A$ соответствует заштрихованная область на рисунке (4):

A  B **(рис.4)**

Как видим из рисунка, в общем случае $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Вопрос для самостоятельной работы:

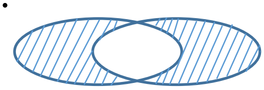
Выяснить, справедлива ли формула $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$?

4. *Симметрическая разность*.

Симметрическая разность обозначается символом $\boldsymbol{\Delta}$ и определяется для *двух множеств* так:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \qquad \textbf{(12)}$$

Симметрической разности $A \Delta B$ соответствует заштрихованная область на рисунке (4):

A  B **(рис.4)**

Теорема о двух представлениях симметрической разности.

Для симметрической разности справедливо равенство (13):

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \qquad \textbf{(13)}$$

Доказательство. Рассмотрим общий случай, т.е. случай, когда множества A и B находятся в общем положении. Можно записать: $A = \{1; 2\}$, $B = \{3; 2\}$, где 1,2,3 – попарно непересекающиеся списки элементов.

Тогда $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (\{1; 2\} \setminus \{3; 2\}) \cup (\{3; 2\} \setminus \{1; 2\}) = \{1\} \cup \{3\} = \{1; 3\}$,
$(A \cup B) \setminus (B \cap A) = (\{1; 2\} \cup \{3; 2\}) \setminus (\{1; 2\} \cap \{3; 2\}) = \{1; 2; 3\} \setminus \{2\} = \{1; 3\}$.

Видим, что множества, находящейся в левой и в правой части соотношения (13) равны, значит, равенство (13) доказано. ■

Нетрудно понять, что $A \Delta B = B \Delta A$.

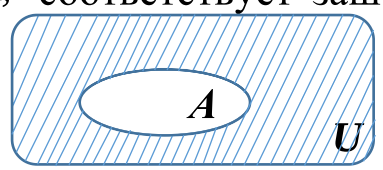
> *Вопрос для самостоятельной работы:*
> Выяснить, справедлива ли формула $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$?

5. *Дополнение*.

Множество U называется *универсальным множеством*, если все рассматриваемые в данном разделе множества являются его подмножествами.

Дополнение множества A обозначается $\overline{A}$, и определяется так: $\overline{A} = U \setminus A$.

Дополнению $\overline{A}$, соответствует заштрихованная область на рисунке (5):



(рис.5)

Пример. Пусть $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$.

Тогда $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{b\}$, $A \setminus B = \{a\}$, $B \setminus A = \{c, d\}$, $\overline{A} = \{c, d, e\}$, $\overline{B} = \{a, e\}$.

Векторы

Упорядоченный набор (вектор) размерности n - неопределяемое понятие. Изображается в виде $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots x_n$ называются *координатами* или *компонентами вектора*, а число n - *размерностью вектора*. Чаще всего слово координаты мы будем употреблять, если $x_1, x_2, \ldots x_n$ числа, а термин компоненты – в остальных случаях.

Векторы $\alpha = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ и $\beta = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ называются *равными*, если для любого номера i, где $i = 1, 2, \ldots, n$, выполнено равенство $x_i = y_i$.

Вектор размерности два будем называть *парой*, а вектор размерности три – *тройкой*.

Заметим, что понятие вектора можно было бы определить через понятие множества, что и сделал в прошлом веке польский математик Куратовский. Он определил пару следующим образом:

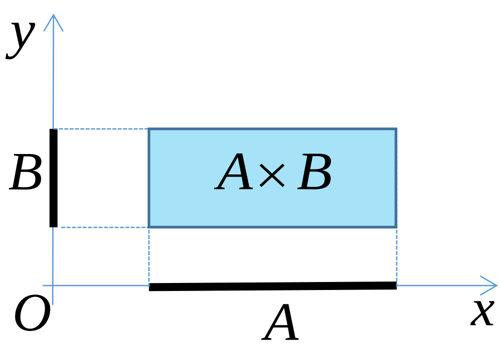
$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

> *Вопрос для самостоятельной работы:*
>
> Доказать, что при таким образом введённым определением пары сохраняется определение равенства пар:
> $\{\{x\},\{x, y\}\} = \{\{z\},\{z,t\}\} \Rightarrow x = z, y = t$.

Декартово произведение.

Декартово произведение двух множеств A и B обозначается $A \times B$ и определяется так: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$.

Если множества A и B изображать отрезками на оси Ox и Oy соответственно, то декартову произведению $A \times B$ будет соответствовать часть плоскости, ограниченная прямоугольником в декартовой системе координат (рис.6):



(рис.6)

Пример. Пусть $A = \{a, b\}$, $B = \{3\}$.

Тогда $A \times B = \{(a,3),(b,3)\}$, $B \times A = \{(3,a),(3,b)\}$.

Этот пример показывает, что в общем случае $A \times B \neq B \times A$.

> *Вопрос для самостоятельной работы:*
>
> Выяснить, справедлива ли формула
> $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$?

Понятие *декартова произведения* можно обобщить на случай *любого натурального числа* сомножителей так:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_n \in A_n\}. \qquad \textbf{(14)}$$

Теорема о мощности декартова произведения конечных множеств.

Мощность декартова произведения конечных множеств равна произведению мощностей этих множеств:

$$|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \ldots, |A_n| = m_n \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n. \qquad \textbf{(15)}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции, проведя индукцию по количеству сомножителей n.

1) Проверка справедливости формулы (15) при $n = 1$.

Действительно, при $n = 1$ формула (15) примет вид:

$|A_1| = m_1 \Rightarrow |A_1| = m_1$, что верно.

2) Допустим справедливость (15) при $n = k$, т.е. допустим справедливость равенства:

$$|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \ldots, |A_k| = m_k \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k.$$

3) Докажем справедливость формулы (15) при $n = k + 1$.

Пусть $A_{k+1} = \{b_1, b_2, \ldots, b_{m_{k+1}}\}$. Будем рассматривать всевозможные векторы декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times A_{k+1}$ с фиксированными последними координатами.

Количество различных векторов вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k, b_1)$ равно количеству различных векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, которое, по допущению индукции 2), равно $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$. Аналогично, этому же числу равно количество векторов вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k, b_2), \ldots, (x_1, x_2, \ldots, x_k, b_{m_{k+1}})$. Тогда общее число векторов множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times A_{k+1}$ равно

$$\underbrace{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k + \ldots + m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k}_{m_{k+1} \text{ слагаемых}} = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k \cdot m_{k+1}.$$

На основании метода математической индукции утверждаем, что формула (15) справедлива для всех натуральных n. ■

Если каждый из сомножителей в левой части формулы (14) равен некоторому множеству A, то мы получим определение n - *й декартовой степени множества* A:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ сомножителей}} \qquad \textbf{(16)}$$

Пусть $E = \{0;1\}$, тогда вектор $\alpha \in E^n$ назовём *двоичным* вектором размерности n.

Теорема о количестве различных двоичных наборов размерности n.

Количество различных двоичных векторов размерности n равно 2^n, то есть справедлива формула

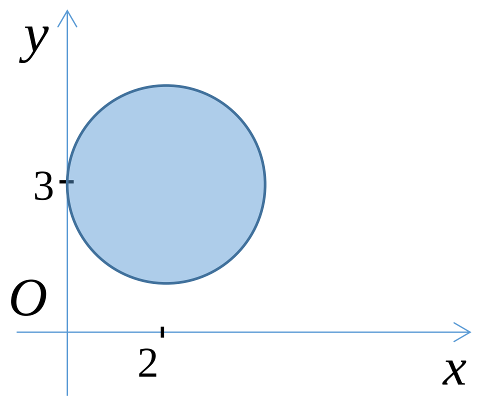
$$|E^n| = 2^n \qquad \textbf{(17)}$$

Доказательство. Эта теорема является непосредственным следствием из теоремы о мощности декартова произведения конечных множеств, в которой мощность каждого из n декартовых сомножителей равна 2. ■

Графики.

Графиком называется множество, элементами которого являются пары. Если график состоит из пар действительных чисел, каждому такому графику можно сопоставить некоторое множество точек на плоскости xOy.

Пример: графиком неравенства $(x-2)^2 + (y-3)^2 \le 2$ является множество точек координатной плоскости, расположенных на границе и внутри круга радиуса 2 с центром в точке (2;3) :



(рис.6)

Операции над графиками.

Кроме введённых ранее операций над множествами над графиками можно ввести ещё 2 операции.

1. *Инверсия*.

Инверсия графика P обозначается P^{-1} и определяется так:

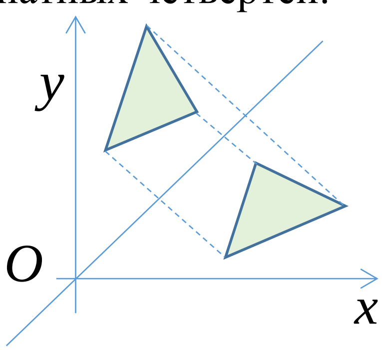
$$P^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in P\} \tag{18}$$

Пример. Пусть $P=\{(a,1),(a,3),(b,\$)\}$.

Тогда $P^{-1}=\{(1,a),(3,a),(\$,b)\}$.

В декартовой системе координат график P^{-1} будет состоять из точек, симметричных точкам графика P относительно биссектрисы 1 и 3 координатных четвертей:

Пример:



(рис.7)

2. *Композиция*.

Композиция графиков P и Q обозначается $P\circ Q$ и определяется так: $$P\circ Q=\{(x,y)\,|\,\exists_a((x,a)\in P,(a,y)\in Q)\}. \tag{19}$$

Пример. Пусть $P=\{(a,1),(a,3),(b,\$)\}$, $Q=\{(1,\delta),(1,\beta)\}$.

Тогда $P\circ Q=\{(a,\delta),(a,\beta)\}$.

Действительно, $(a,\delta)\in P\circ Q$, так как нашёлся элемент 1, такой, что $(a,1)\in P$ и $(1,\delta)\in Q$. Аналогично можно показать, что $(a,\beta)\in P\circ Q$.

Переставим композиционные «сомножители» местами.

Тогда $Q\circ P=\varnothing$, так как элементов, которые являлись бы второй компонентой некоторой пары графика Q и одновременно первой компонентой некоторой пары графика P, не найдётся.

Как видим из этого примера, в общем случае композиция не коммутативна, т.е. $P\circ Q\neq Q\circ P$.

Некоторые свойства операций над графиками.

Двойная инверсия: $(P^{-1})^{-1} = P$ **(20)**

Доказательство. Возьмём произвольную пару (x, y) и составим цепочку равносильных высказываний:

$$(x, y) \in (P^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in P^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in P.$$

Следовательно, каждая пара (x, y), принадлежащая левой части формулы (19), принадлежит также и правой части формулы (19) и обратно, каждая пара (x, y), принадлежащая правой части формулы (19), принадлежит также и левой части формулы (19). Значит, справедливость равенства (19) доказана. ■

Связь инверсии и композиции: $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$ **(21)**

Доказательство. Возьмём произвольную пару (x, y) и составим цепочку равносильных высказываний:

$$(x, y) \in (P \circ Q)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in P \circ Q \Leftrightarrow \exists_a \big((y, a) \in P, (a, x) \in Q\big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_a \big((a, x) \in Q, (y, a) \in P\big) \Leftrightarrow \exists_a \big((x, a) \in Q^{-1}, (a, y) \in P^{-1}\big) \Leftrightarrow (x, y) \in Q^{-1} \circ P^{-1}.$$

Значит, справедливость равенства (20) доказана. ■

Ассоциативность композиции: $(P \circ Q) \circ T = P \circ (Q \circ T)$ **(22)**

Доказательство. Возьмём произвольную пару (x, y) и составим цепочку равносильных высказываний:

$$(x, y) \in (P \circ Q) \circ T \Leftrightarrow \exists_a \big((x, a) \in P \circ Q, (a, y) \in T\big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_a \exists_b \big((x, b) \in P, (b, a) \in Q, (a, y) \in T\big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_b \big((x, b) \in P, (b, y) \in Q \circ T\big) \Leftrightarrow (x, y) \in P \circ (Q \circ T).$$

Справедливость равенства (21) доказана. ■