Блок №3

Матрицы

Линейное пространство матриц

Рассмотрим матрицы из n строк и m столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Множество таких матриц будем обозначать Mat(nxm, R)

Действия над матрицами

1) Умножение матрицы на число

2) Сложение матриц

Теорема. Множество матриц Mat(nxm, R) с введенными операциями сложения и умножения на число образуют линейное пространство.

Линейное пространство матриц

Теорема. Набор матриц

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots \qquad E_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

образует базис в линейном пространстве матриц Mat(nxm, R). Размерность этого пространства равна dim(Mat(nxm, R)=nm.

Вектора-строки и вектора-столбцы.

Линейное пространство матриц Mat(1xm, R) – это линейное пространство векторов-строк длины m: $a = (a_1, a_2, \ldots a_m) \in Mat(1 \times m, R)$

Линейное пространство матриц Mat(nx1, R) - это линейное пространство векторов-столбцов размера n:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in Mat(n \times 1, R)$$

Ранг матрицы.

Определение. ***Рангом*** матрицы называется ранг её системы столбцов, то есть максимальное количество линейно независимых векторов-столбцов в этой матрице.

Обозначение: rank(A).

Теоремы о вычислении ранга матрицы

Теорема 1. Ранг матрицы равен наибольшему порядку минора, отличного от нуля.

Теорема 2. Ранг системы столбцов в матрице равен рангу системы строк.

Следствие. Ранг матрицы меньше или равен минимуму числа строк и столбцов: $\mathrm{rank}(A) \leq \min\{n, m\}$.

Теоремы о вычислении ранга матрицы.

Теорема 3. Ранг матрицы не изменяется при выполнении элементарных преобразований:

1. Смена строк (столбцов) местами;
2. Умножение строки (столбца) на число, не равное нулю;
3. Прибавление к строке (столбцу) другой строки (столбца).

Умножение матриц.

Определение. Пусть матрица A имеет размер nxk, матрица B имеет размер kxm, тогда определим матрицу C размера nxm как:

C=AB: $$c_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{it} b_{tj}$$

Замечание. Умножение всегда можно определить в пространстве квадратных матриц.

Свойства умножения матриц

Свойство 1. Умножение матриц ассоциативно:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Свойство 2. Умножение матриц некоммутативно:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Свойство 3. В пространстве квадратных матриц nxn существует элемент E, нейтральный относительно умножения:

$$A \cdot E = E \cdot A = A, \ \forall A$$

где E - единичная матрица, E=diag(1,1…1).

Теоремы об умножении матриц.

Теорема 1. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей:

$$\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$$

$$A,B\in Mat(n\times n,R)$$

Теорема 2.

$$rank(A\cdot B)\le\min(rank\,A,rank\,B)$$

Обратная матрица.

В этом пункте будем рассматривать только квадратные матрицы Mat(nxn, R).

Определение. Матрица B называется обратной к матрице A, если AB=BA=E, где E - единичная матрица размера n.

Обозначение. $B=A^{-1}$

Замечание. Если det A=0, то матрица A не имеет обратной.

(по теореме левая часть det(AB)=detA det B=0 , но в правой части det E=1)

Вырожденные матрицы.

Определение. Если det A=0, то матрица A называется ***вырожденной***, если det A≠0, то матрица A называется ***невырожденной***.

По предыдущему замечанию, вырожденная матрица не имеет обратной.

Теорема. Если матрица A имеет обратную, то она единственна.

Вычисление обратной марицы

Теорема. Квадратная матрица A имеет обратную тогда и только тогда, когда det A≠0.

Доказательство.

1) Пусть матрица A имеет обратную матрицу B. Тогда AB=E, следовательно, detA detB=detE=1, следовательно, detA≠0.
2) Пусть detA≠0. Покажем, что матрица B:

(продолжение доказательства)

- 2) Пусть det A≠0. Покажем, что матрица B будет являться обратной к матрице A:

$$B = A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- где матрица $\tilde{A}$ - присоединенная матрица, матрица, состоящая из алгебраических дополнений к элементам матрицы A, записанных в столбцы.

(продолжение доказательства)

Проверим, что AB=BA=E:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(продолжение доказательства)

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \sum\limits_{t=1}^{n} a_{1t}A_{1t} & \sum\limits_{t=1}^{n} a_{1t}A_{2t} & \ldots \\ \sum\limits_{t=1}^{n} a_{2t}A_{1t} & \sum\limits_{t=1}^{n} a_{2t}A_{2t} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & \ldots \\ 0 & \det A & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = E$$

Формула для вычисления обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Правило для вычисления обратной матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

2-й способ нахождения обратной матрицы

Запишем матрицу размера nx2n. Элементарные преобразования будем производить только со строками:

$$(A|E) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (E|A^{-1})$$

Решение матричных уравнений

Рассмотрим уравнение $AX=B$ (1), где A, X и B - матрицы подходящего размера.

Пусть A и B – известные матрицы, матрицу X требуется найти.

Уравнение (1) умножим СЛЕВА на матрицу, обратную к A:

$A^{-1}AX=A^{-1}B$

$EX=A^{-1}B$, следовательно, $X=A^{-1}B$

Решение матричных уравнений.

Рассмотрим ещё одно уравнение: $XA=B$ (2)

Требуется найти матрицу X.

Умножим уравнение (2) СПРАВА на матрицу A^{-1}

$XAA^{-1}=BA^{-1}$

$XE=BA^{-1}$

Ответ: $X=BA^{-1}$

Решение систем линейных уравнений

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Решение систем линейных уравнений

Эта же система в матричном виде: $A \cdot X = B$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$Решение: \; X = A^{-1} \cdot B$$