

**ВВЕДЕНИЕ.**

1. Множество. Операции над множествами.
2. Аксиоматическое определение множества вещественных чисел.
3. Модуль числа, его свойства, неравенство треугольника, обратное неравенство треугольника.
4. Определения ограниченного, ограниченного сверху/снизу множества, наибольшего/наименьшего элемента множества, точной верхней/нижней грани множества. Теорема о существовании точных верхней и нижней граней ограниченного множества (с доказательством).
5. Определение функции (отображения), образа и прообраза элемента/множества при отображении. Инъекция, сюръекция, биекция. Композиция отображений.
6. Принцип вложенных отрезков (лемма Коши-Кантора) (с доказательством).
7. Формула бинома Ньютона (с доказательством).

**ТЕМА 1. Предел последовательности.**

8. Определения последовательности, ограниченной, ограниченной сверху/снизу последовательности, бесконечно малой/большой последовательности. Теоремы о сумме бесконечно малых последовательностей, о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную, об ограниченности бесконечно малой последовательности, о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями (все теоремы с доказательством).
9. Определение предела последовательности. Теорема о единственности предела последовательности (с док-м). Теорема об ограниченности сходящейся последовательности (с док-м). Теоремы об арифметических свойствах предела последовательности (с док-м). Теорема о предельном переходе в неравенствах для последовательностей (с док-м). Принцип двусторонней ограниченности (теорема о пределе «зажатой» последовательности) (с док-м).
10. Определение монотонной последовательности. Теорема Вейерштрасса о существовании предела монотонной ограниченной последовательности (с док-м).
11. Число  $\varepsilon$  (с док-м).
12. Определение подпоследовательности. Теорема о пределе подпоследовательности последовательности, имеющей конечный предел (с док-м). Теорема о пределе последовательности, все подпоследовательности которой сходятся к одному и тому же числу (с док-м). Два определения предельной точки (частичного предела) последовательности и их эквивалентность. Определение верхнего/нижнего предела последовательности. Теорема о существовании конечных верхнего и нижнего пределов ограниченной последовательности (с док-м). Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности (с док-м).
13. Критерий Коши сходимости последовательности (с док-м).

**ТЕМА 2. Предел функции.**

14. Определения предела функции по Гейне и Коши, их эквивалентность. Односторонние пределы, критерий существования предела функции в точке через односторонние пределы (с док-м). Предел функции на бесконечности, бесконечные пределы. Универсальное определение предела функции в терминах окрестностей.
15. Критерий Коши существования конечного предела функции (с док-м).
16. Теорема об арифметических свойствах предела функции в точке (с док-м). Теорема о пределе сложной функции (с док-м). Теорема о предельном переходе в неравенствах для функций (с док-м). Теорема о пределе «зажатой» функции (с док-м). Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел (с док-м).
17. Первый замечательный предел и его следствия (с док-м).
18. Второй замечательный предел и его следствия (с док-м).
19. Определения бесконечно малой/большой функции. Определения о-малого, о-большого, эквивалентных функций. Основные эквивалентности. Асимптотическое сравнение бесконечно малых/больших функций. Теорема о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями (с док-м).
20. Теорема о пределе монотонной функции (с док-м).

### ТЕМА 3. Непрерывность функции.

21. Определения непрерывной в точке функции. Критерий непрерывности функции в точке через односторонние пределы (с док-м).
22. Теорема об арифметических свойствах непрерывных функций (с док-м). Теорема о непрерывности сложной функции (с док-м). Теорема о локальной ограниченности непрерывной в точке функции (с док-м). Теорема о сохранении знака непрерывной в точке функции (с док-м).
23. Точки разрыва функции, их классификация.
24. Первая теорема Больцано-Коши (об обращении в ноль непрерывной на отрезке функции) (с док-м).
25. Вторая теорема Больцано-Коши (о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции) (с док-м).
26. Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной на отрезке функции) (с док-м).
27. Вторая теорема Вейерштрасса (о достижимости непрерывной на отрезке функцией своих точных граней) (с док-м).
28. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции (с док-м).
29. Непрерывность основных элементарных функций.
30. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности непрерывной на отрезке функции (с док-м).

### ТЕМА 4. Производная и дифференциал.

31. Определения производной функции в точке, левой/правой производных. Критерий существования производной в точке через односторонние производные (с док-м).
32. Механический смысл производной.
33. Геометрический смысл производной. Касательная. (вывод уравнения касательной)
34. Определение дифференцируемой в точке функции. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке (с док-м). Связь между дифференцируемостью и непрерывностью (с док-м).
35. Производная обратной функции, производная сложной функции, производная неявной функции, производная параметрически заданной функции (с док-м).
36. Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями (с док-м).
37. Производные основных элементарных функций (с док-м).
38. Определение дифференциала функции в точке, его геометрический смысл. Правила вычисления дифференциалов, связанные с арифметическими действиями над функциями. Инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных (с док-м).
39. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница (с док-м).
40. Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа (о конечных приращениях), Коши (о конечных приращениях), следствие из теоремы Лагранжа (о точках разрыва производной дифференцируемой функции) (все теоремы с док-м).
41. Правила Лопиталя (только формулировки теорем, без доказательства).
42. Формулы Тейлора и Маклорена: с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха-Роша), в форме Лагранжа, в форме Коши, в форме Пеано (без вывода). Разложения по формуле Тейлора для некоторых элементарных функций (с выводом). Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора.

### ТЕМА 5. Исследование функций с помощью производных.

43. Признаки постоянства и монотонности функции: необходимое и достаточное условие постоянства функции на промежутке, необходимое и достаточное условие нестрогой монотонности функции, необходимое и достаточное условие строгой монотонности функции (все теоремы с доказательством).
44. Теория экстремальных значений функции: определения локального/глобального экстремума (строгого и нестрогого), необходимое условие экстремума, достаточное условие экстремума с использованием первой производной, достаточное условие экстремума с использованием второй

производной, достаточное условие экстремума с использованием высших производных (все теоремы с доказательством).

45. Характер выпуклости: определение выпуклой вверх/вниз кривой, достаточное условие выпуклости вверх/вниз графика дважды дифференцируемой функции. Достаточное условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции, достаточное условие перегиба с использованием третьей производной, достаточное условие перегиба с использованием высших производных (все теоремы с доказательством).
46. Асимптоты (вывод уравнения наклонной асимптоты).
47. Полное исследование функций с помощью производных и построение графиков.
48. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции.

### Список литературы для подготовки к экзамену.

1. Аксенов, А. П. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 т: учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — Москва: Издательство Юрайт, 2016. — 626 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-5876-8. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/386470>
2. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности: учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовнича, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова, В. А. Ильин; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 109 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08472-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/473242>
3. Садовнича, И. В. Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной: учебное пособие для вузов / И. В. Садовнича, Т. Н. Фоменко; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 115 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08473-3. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/473169>
4. Садовнича, И. В. Математический анализ. Дифференцирование функций одной переменной: учебное пособие для вузов / И. В. Садовнича, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 156 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-06595-4. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/473168>

### Задачи для подготовки к экзамену.

1. Задачи из ИДЗ «Предел и непрерывность», «Производная», «Полное исследование функций и построение графиков».
2. Примеры решения задач из пособий Аксенова, Садовничей (см. выше).
3. Сборник задач под редакцией Кудрявцева:

Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.  
**Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость:** Учеб. пособие / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с. — ISBN 5-9221-0306-7.

§8. №№ 1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 42, 116, 123, 141, 162, 164.

§9. №№ 46-49, 52, 57.

§10. №№ 17-20, 56-63.

§13. №№ 173, 174, 176-179, 191-193, 197, 198, 201, 202, 207, 208, 213-215, 217, 218.

§14. №№ 1-3, 7, 10-12.

§15. №№ 11-29.

§18. №№ 1-16, 41.

§19. №№ 1-18.

§22. №№ 1-48.