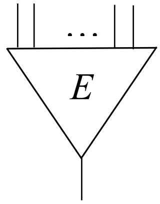
Представление булевых функций схемами.

Схемы из функциональных элементов.

Функциональным элементом называется устройство, изображаемого в виде треугольника и обладающего свойствами:

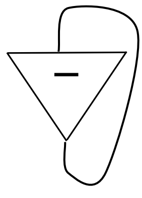


1) функциональный элемент имеет вверху n упорядоченных отрезков, называемых *входами*, и один отрезок внизу, называемый *выходом*;
2) на входы подаётся набор сигналов, каждый из которых принадлежит одному из двух типов;
3) одновременно с подачей набора входных сигналов на выходе возникает сигнал одного из этих типов;
4) значение выходного сигнала для каждого функционального элемента однозначно определяется набором входных сигналов.

С каждым функциональным элементом E можно связать некоторую булеву функцию $f_E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где каждому входу соответствует соответствующая переменная, сигналам двух типов соответствуют константы 0 и 1.

Функциональные элементы будем объединять в конструкции, соединяя выходы одних функциональных элементов со входами других. Но не каждое соединение можно считать корректным, если учитывать значения сигналов на входах и выходах функциональных элементов.

Например, если рассмотреть функциональный элемент, реализующий отрицание и соединить его выход с его же входом, то получится, что при подаче на вход сигнала 1, он мгновенно преобразуется в 0 и подаётся на вход. Таким образом, и значение входного, и значение

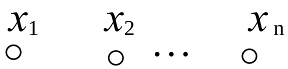


выходного сигналов становятся неопределёнными.

Чтобы избежать такой ситуации, которая называется наличием *обратной связи*, дадим определение правильно построенных конструкций, которые будем называть схемами из функциональных элементов.

Определение.

1. Конструкция следующего вида

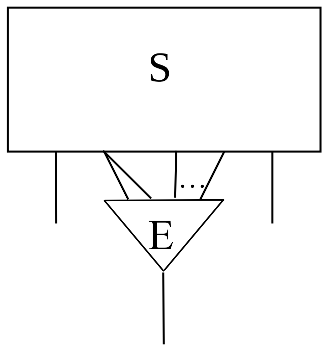


называется *схемой из функциональных элементов*;

Все кружки с приписанными к ним символами переменных называются *полюсами* или *входными полюсами* схемы из функциональных элементов;

Все полюсы объявляются *вершинами* схемы из функциональных элементов.

2. Если S – схема из функциональных элементов, а E - функциональный элемент, и все входы элемента E соединены с некоторыми вершинами схемы S (одна вершина схемы S может быть соединена с несколькими входами), то полученная конструкция также является *схемой из функциональных элементов*. Её *вершинами* объявляются все вершины схемы S, а также выход функционального элемента E.



Выходами схемы из функциональных элементов называются вершины, которые объявлены выходами.

Каждой вершине схемы может быть сопоставлена функция следующим образом:

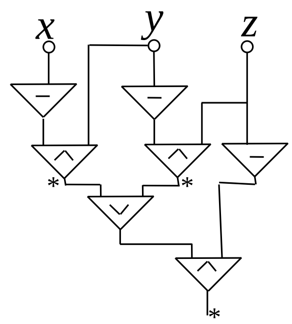
- входному полюсу приписывается функция, равная переменной, сопоставленной этому полюсу;

- если всем вершинам, к которым присоединены входы элемента E, уже приписаны функции, причём вершине, к которой подсоединён i – тый вход элемента E, приписана функция f_i, а $\varphi_E(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ является функцией элемента E, то выходу элемента E приписывается функция $\varphi_E(f_1, f_2, \ldots, f_s)$.

Говорят, что схема *реализует* систему булевых функций, приписанных её выходам.

Анализом схемы из функциональных элементов называется нахождение по данной схеме системы булевых функций, реализованных данной схемой.

Пример. Найти систему булевых функций, реализованную данной схемой из функциональных элементов, где выходы схемы помечены звёздочками.

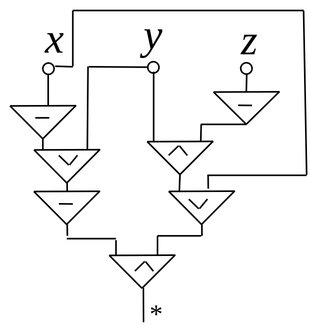


Данная схема реализует систему m булевых функций: $m=\{\bar{x}\cdot y;\ \bar{y}\cdot z;\ ((\bar{x}\cdot y)\vee(\bar{y}\cdot z))\cdot\bar{z}\}$.

Синтезом схемы из функциональных элементов называется нахождение по данной системе булевых функций схемы, реализующую данную систему функций.

Пример. Построить схему из функциональных элементов, реализующую булеву функцию $f(x.y.z)=\overline{\bar{x}\vee y}\cdot(x\vee y\bar{z})$.

Схема представлена на рисунке:



Контактные схемы.

Графом называется некоторая система точек (*вершин*) и линий (*рёбер*), соединяющих эти вершины.

Ребро, снабжённое стрелкой, называется *дугой*, а граф, все рёбра которого – дуги, называется *ориентированным графом*.

Ребро, не снабжённое стрелкой, называется *звеном*, а граф, все рёбра которого – звенья, называется *неориентированным графом*.

Ребро, соединяющее вершину саму с собой, называется *петлёй*.

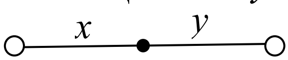
Рёбра называются *кратными*, если они соединяют одну и ту же пару вершин.

Ребро называется *замыкающим контактом*, если ему приписан символ переменной без отрицания или *размыкающим контактом*, если ему приписан символ переменной с отрицанием.

Контактной схемой называется неориентированный граф, все рёбра которого – контакты, без петель и кратных контактов, и в котором выделены две вершины, объявленные *полюсами*.

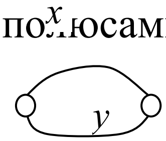
Сложностью контактной схемы называется число контактов в ней.

Будем интерпретировать наличие тока в контакте x со значением 1, принимаемым переменной x, а, соответственно, значение переменной x, равное 0, будет интерпретироваться отсутствием электрического тока в контакте x или его наличием в контакте $\bar{x}$.

Тогда последовательному соединению контактов x и y будет соответствовать конъюнкция $x \cdot y$. Действительно, ток между полюсами в схеме 

будет только при наличии его в каждом из контактов, что соответствует тому, что конъюнкция двух переменных равна 1 тогда и только тогда, когда каждая переменная равна 1.

Параллельному соединению контактов x и y будет соответствовать дизъюнкция $x \vee y$. Действительно, ток между полюсами в схеме



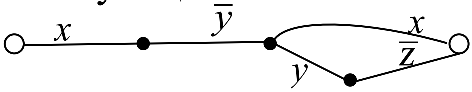
будет при наличии его хотя бы в одном из контактов, что соответствует тому, что дизъюнкция двух переменных равна 1 тогда, когда хотя бы одна переменная равна 1.

Так как любую булеву функцию можно представить в виде ДНФ, значит её можно реализовать контактной схемой. Количество контактов в схеме равно сложности соответствующей формулы.

Пример. Построить контактную схему, реализующую булеву функцию $f(x.y.z) = \overline{\bar{x} \vee y} \cdot (x \vee y\bar{z})$.

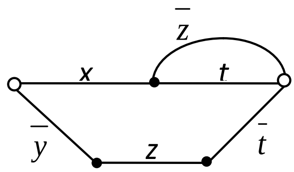
Для начала преобразуем формулу, чтобы отрицания относились только к символам переменных. Этого всегда можно добиться с помощью законов де Моргана: $\overline{\bar{x} \vee y} \cdot (x \vee y\bar{z}) = x \cdot \bar{y} \cdot (x \vee y\bar{z})$.

Соответствующая контактная схема будет иметь вид:



При решении задачи анализа контактной схемы будем рассматривать всевозможные маршруты между полюсами, тогда каждому маршруту будет соответствовать некоторая конъюнкция, а дизъюнкция всех таких конъюнкций даст формулу соответствующей булевой функции.

Пример. Найти булеву функцию, реализованную данной контактной схемой.



Имеем три различных маршрута между полюсами: $x\bar{z}$, xt, $\bar{y}z\bar{t}$.

ДНФ соответствующей булевой функции, имеет вид:

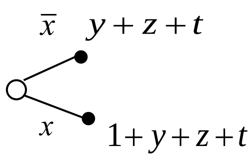
$x\bar{z} \vee xt \vee \bar{y}z\bar{t}$.

Заметим, что при решении задач синтеза и анализа схем мы не ставили вопрос о построении простейшей схемы или формулы.

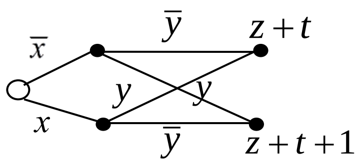
Пример. Построить методом каскадов контактную схему, реализующую функцию

$f(x, y, z, t) = x + y + z + t$.

1) Начинаем строить контактную схему:

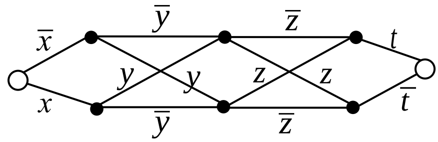


2) На втором этапе разложение ведём по переменной y.



$$y+z+t=\overline{y}\cdot(z+t)\vee y\cdot(1+z+t);$$
$$1+y+z+t=\overline{y}\cdot(1+z+t)\vee y\cdot(z+t).$$

На третьем этапе раскладываем каждую из двух полученных функций по переменной z.



$$z+t=\overline{z}\cdot t\vee z\cdot(t+1)=\overline{z}\cdot t\vee z\cdot\overline{t}$$
$$1+z+t=\overline{z}\cdot(1+t)\vee z\cdot t=\overline{z}\cdot\overline{t}\vee z\cdot t$$

Полученная контактная схема имеет сложность 12.

Тесты.

Пусть $G=\{g_i\}$ - множество попарно различных булевых функций.

Тестом относительно множества G будем называть множество наборов аргументов $T=\{e_i\}$ таких, что

$$\forall_k\forall_m(k\neq m)\Rightarrow\exists_i(e_i\in T, g_k(e_i)\neq g_m(e_i)).$$

Минимальным тестом называется тест наименьшей мощности.

Алгоритм нахождения минимального теста.

1. Для каждого сочетания индексов $k,m,\ k\neq m$ находим наборы аргументов $e_1^{km},e_2^{km},\dots,e_{p_{km}}^{km}$, на каждом из которых k - я функция отличается от m - той и составляем символическую дизъюнкцию $e_1^{km}\vee e_2^{km}\vee\dots\vee e_{p_{km}}^{km}$;

2. Строим из всех полученных дизъюнкций КНФ:

$$K=\bigwedge_{k\neq m}(e_1^{km}\vee e_2^{km}\vee\dots\vee e_{p_{km}}^{km}).$$

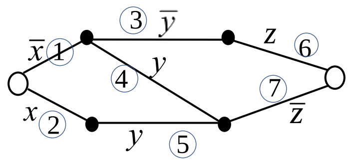
3. С помощью дистрибутивных законов, законов идемпотентности и законов поглощения преобразуем эту КНФ в ДНФ, и тогда каждой символической конъюнкции будет соответствовать тест, а конъюнкции наименьшей длины – минимальный тест. ■

Говорят, что данный контакт имеет *неисправность типа замыкания*, если независимо от значения соответствующей переменной он реализует значение 1 (наличие электрического тока в контакте).

Аналогично, будем говорить, что данный контакт имеет *неисправность типа размыкания*, если независимо от значения соответствующей переменной он реализует значение 0 (отсутствие электрического тока в контакте).

Пример. Для данной контактной схемы построить минимальный тест для нахождения неисправности типа замыкания ровно одного контакта.

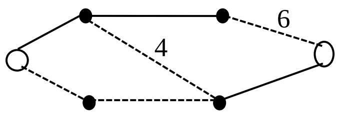
Пронумеруем все контакты.



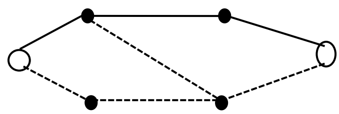
Для каждого набора аргументов изобразим схему.

Отметим на рисунках, соответствующим нулевым наборам реализуемой функции номера контактов, замыкание которых приводит к появлению цепи из сплошных линий, соединяющих полюсы.

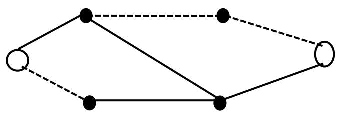
Разомкнутый контакт будем изображать пунктирной линией, а замкнутый - сплошной. Для каждого из единичных наборов функции на соответствующем изображении контактной схемы полюсы соединены цепью контактов из сплошных линий. На каждом же из нулевых наборов функции такой цепи не найдётся.



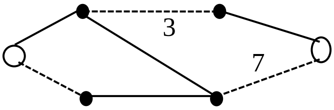
(0,0,0)



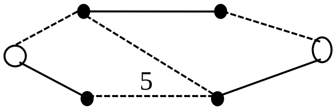
(0,0,1)



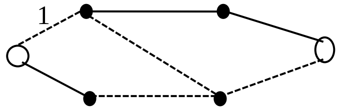
(0,1,0)



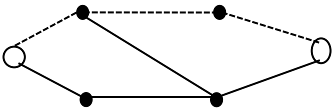
(0,1,1)



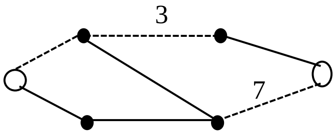
(1,0,0)



(1,0,1)



(1,1,0)



(1,1,1)

Пусть $f(x,y,z)=f_0(x,y,z)$ а при неисправности i - го контакта схема реализует функцию $f_i(x,y,z)$.

На наборе (0,0,0) между полюсами контактной схемы нет цепочки из замкнутых контактов. Значит, $f_0(0,0,0)=0$. Но при неисправности типа замыкания 4-го или 6-го контакта такая цепочка появляется. Значит, $f_4(0,0,0)=f_6(0,0,0)=1$. Перебирая все наборы аргументов, заполняем таблицу неисправностей.

Если f_0 на некотором наборе аргументов принимает значение 1, значит, на соответствующем изображении контактной схемы между полюсами есть цепь из сплошных линий. Ясно, что при наличии неисправности типа замыкания контакта на том же наборе аргументов полюсы контактной схемы тем более соединены цепью из сплошных линий. Значит, на всех единичных наборах функции $f(x,y,z)$ все функции $f_i(x,y,z)$, $i=1,2,...,7$ также принимают значение, равное 1.

При построении теста нас не интересуют наборы аргументов, на которых значения всех функций совпадают, поэтому напишем таблицу всех функций $f_i(x,y,z)$, $i=1,2,...,7$, вписывая в неё только те наборы аргументов, на которых исходная функция равна 0.

xyz	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
000	0	0	0	0	1	0	1	0
011	0	0	0	1	0	0	0	1
100	0	0	0	0	0	1	0	0
101	0	1	0	0	0	0	0	0
111	0	0	0	1	0	0	0	1

Видим, что некоторые столбцы таблицы совпадают. Это означает, что неисправности типа замыкания одного контакта неотличимы, например, в случае замкнутости 4 или 6 контактов.

Объединяем неотличимые неисправности в классы неисправностей.

Получим 5 классов:

$g_0 = \{f_0, f_2\}$, $g_1 = \{f_1\}$, $g_2 = \{f_3, f_7\}$, $g_3 = \{f_4, f_6\}$, $g_4 = \{f_5\}$.

Строим таблицу классов неисправностей, не содержащую одинаковых столбцов.

	xyz	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4
1	000	0	0	0	1	0
2	011	0	0	1	0	0
3	100	0	0	0	0	1
4	101	0	1	0	0	0
5	111	0	0	1	0	0

Выясним, какие из наборов 1-5 войдут в минимальный тест.

Для этого выпишем все сочетания индексов k, m и для каждого сочетания укажем номера наборов, на которых отличаются функции g_k и g_m.

Получим:

$$\frac{0,1}{4};\ \frac{0,2}{2\vee 5};\frac{0,3}{1};\frac{0,4}{3};\frac{1,2}{2\vee 5\vee 4};\frac{1,3}{1\vee 4};\frac{1,4}{3\vee 4};\frac{2,3}{1\vee 2\vee 5};\frac{2,4}{2\vee 3\vee 5};\frac{3,4}{1\vee 3}.$$

Теперь составим символическую КНФ из “знаменателей” полученных выражений. Будем иметь:

$$K = 4\cdot(2\vee 5)\cdot 1\cdot 3\cdot(2\vee 5\vee 4)(1\vee 4)(3\vee 4)\cdot(1\vee 2\vee 5)\cdot(2\vee 3\vee 5)\cdot(1\vee 3)$$

Упростим полученное выражение, применяя формулу поглощения. Получим: $K = 4\cdot 1\cdot 3\cdot (2\vee 5) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \vee 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5$.

Видим, что в качестве минимального теста можно взять наборы аргументов под номерами 1,2,3,4 или 1,2,3,5.

Ответ: $T_{\min} = \{(0,0,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ или

$T_{\min} = \{(0,0,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,1,1)\}$.

Реализация частичных функций схемами.

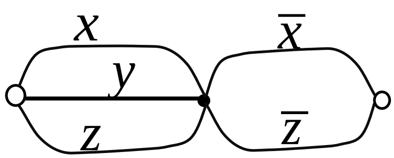
Будем говорить, что *схема реализует частичную функцию*, если она реализует её некоторое доопределение.

Пример. Частичную функцию $f(x,y,z) = (011-10-)$ реализовать контактной схемой и схемой из функциональных элементов.

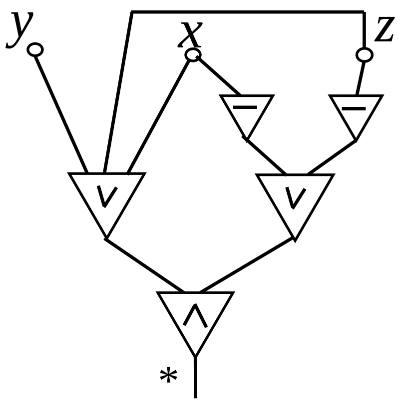
Найдём минимальную КНФ этой функции с помощью карты Карнау: $f(x,y,z) = (x\vee y\vee z)\cdot(\bar{x}\vee\bar{z})$.

$xy \backslash z$	0	1
00	$\boxed{0}$	1
01	1	-
11	-	-
10	1	0

Построим соответствующую контактную схему:



Построим соответствующую схему из функциональных элементов:



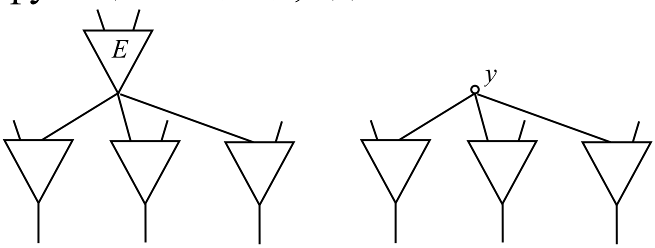
Рассмотрим представление частичных функций схемами из функциональных элементов.

Схемой без ветвлений называется схема, в которой выход каждого элемента используется не более одного раза.

Если выход некоторого элемента подаётся на входы нескольких элементов, то такая схема называется *схемой с ветвлениями*.

Схемы без ветвлений легко описываются формулами, но зато использование схем с ветвлениями позволяет, как правило, уменьшить сложность схемы.

Пусть в схеме для функции $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X)$ выход элемента E подаётся на входы нескольких элементов и на нём реализуется функция $h(X')$, где $X' \subseteq X$.



Удалим из схемы элемент E и введём новый полюс y, к которому подсоединим освободившиеся входы. Функцию, реализуемую на выходе полученной схемы, обозначим $g(X'', y)$, где $X'' \subseteq X$. Если на полюс y подать $h(X')$, то будет реализована функция $f(X)$, поэтому $f(X) = g(X'', h(X'))$. Это представление получено на основе схемы. Рассмотрим обратную задачу.

Для функции $f(X)$ нужно найти *декомпозицию* (разложение)

$$f(X) = g(X'', h(X')) \qquad \textbf{(1)}$$

и затем с её использованием построить схему.

Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X)$ - частичная функция, $X' \cup X'' = X$. Обозначим $U = X' \cap X'', V = X' \setminus X'', W = X'' \setminus X'$. Формулу (1) можно записать: $f(U, V, W) = g(U, W, h(U, V))$, где U, V, W попарно не пересекаются. Пусть $|U| = p, |V| = q, |W| = r,\ p + q + r = n.$

Рассмотрим двоичный вектор α размерности p. Обозначим $f(\alpha, V, W) = f_\alpha(V, W)$. Функцию $f_\alpha(V, W)$ будем задавать таблицей

$T_\alpha(V,W)$ с 2^q столбцами и 2^r строками. Её столбцы соответствуют двоичным наборам β длины q, а строки – двоичным наборам γ длины r.

	$(0,0,\ldots,0)$	$\ldots$	β	$\ldots$	$(1,1,\ldots,1)$
$(0,0,\ldots,0)$					
$\ldots$					
γ			$f_\alpha(\beta,\gamma)$		
$\ldots$					
$(1,1,\ldots,1)$					

2^r

2^q

Теорема о декомпозиции заданного вида.

Частичная функция $f(U,V,W)$ представима в виде

$$f(U,V,W) = g(U,W,h(U,V)) \qquad \mathbf{(2)}$$

при некоторых g и h тогда и только тогда, когда для каждого α таблица $T_\alpha(V,W)$ допускает доопределение, содержащее столбцы не более двух различных типов.

Необходимость. Пусть $\tilde{f}(U,V,W) = g(U,W,h(U,V))$ является доопределением частичной функции $f(U,V,W)$. Тогда при каждом α таблица $\tilde{T}_\alpha(V,W)$, соответствующая функции

$$\tilde{f}_\alpha(V,W) = \tilde{f}(\alpha,V,W) = g(\alpha,W,h(\alpha,V)) = g_\alpha(W,h_\alpha(V))$$

доопределяет таблицу $T_\alpha(V,W)$.

Рассмотрим столбцы таблицы $\tilde{T}_\alpha(V,W)$, соответствующие всем наборам β, для которых $h_\alpha(\beta)=0$, и в каждом из них рассмотрим клетку, соответствующую набору γ. В ней записано значение $g_\alpha(\gamma,h_\alpha(\beta)) = g_\alpha(\gamma,0)$, не зависящее от β. Следовательно, все столбцы, соответствующие наборам β с нулевым значением $h_\alpha(\beta)$, совпадают. Аналогично убеждаемся, что столбцы, соответствующие единичным значениям $h_\alpha(\beta)$, также совпадают. Это означает, что таблица $\tilde{T}_\alpha(V,W)$, являющаяся доопределением для $T_\alpha(V,W)$, имеет столбцы не более двух типов.

Достаточность. Пусть при каждом α существует доопределение $\tilde{T}_\alpha(V,W)$ таблицы $T_\alpha(V,W)$, содержащее столбцы не более двух типов.

Обозначим $h_\alpha(V)=\begin{cases}1, \text{ если } V \text{ соответствует столбец 1 типа;}\\ 0, \text{ если } V \text{ соответствует столбец 2 типа.}\end{cases}$

Пусть $\varphi_\alpha(W)$ - функция, соответствующая столбцам 1 типа,

$\psi_\alpha(W)$ - функция, соответствующая столбцам 2 типа.

Тогда $\tilde{f}_\alpha(\beta,W)=\begin{cases}\varphi_\alpha(W), \text{ если } h_\alpha(\beta)=1;\\ \psi_\alpha(W), \text{ если } h_\alpha(\beta)=0\end{cases}$ и может быть представлена в виде $\tilde{f}_\alpha(V,W)=h_\alpha(V)\varphi_\alpha(W)\vee\overline{h_\alpha}(V)\psi_\alpha(W)=g_\alpha(W,h_\alpha(V))$,

где $g_\alpha(W,y)=y\varphi_\alpha(W)\vee\bar{y}\psi_\alpha(W)$.

Введём функции $g(U,W,y)=\bigvee_\alpha K_\alpha(U)g_\alpha(W,y)$,

$h(U,V)=\bigvee_\alpha K_\alpha(U)h_\alpha(V)$, где $K_\alpha(U)$ - конъюнкция переменных

из множества U, взятых с показателями из набора α и положим $\tilde{f}(U,V,W)=g(U,W,h(U,V))$. Эта функция доопределяет $f(U,V,W)$, значит, исходная функция представима в виде (2). ■

Если $U=\varnothing$, декомпозиция называется *разделительной*.

Пример. Реализовать схемой с ветвлениями на основе разделительной декомпозиции, функцию

$f(x,y,z,t)=(-0--\ 1-1-\ 0-1-\ 0-01)$

$xy \backslash zt$	00	01	10	11
00	–	0	–	–
01	1	–	1	–
10	0	–	1	–
11	0	–	0	1

Видим, что таблица не доопределима ни до столбцов двух типов, ни до строк двух типов. Значит, разделительные декомпозиции вида

$f(x,y,z,t)=g(x,y,h(z,t))$ и $f(x,y,z,t)=g(z,t,h(x,y))$ невозможны.

Попытаемся найти декомпозицию вида $f(x,y,z,t) = g(x,z,h(y,t))$.

yt / xz	00	01	10	11
00	– 0	**0**	**1**	– 0
01	– 1	– 1	**1**	– 1
10	**0**	– 0	**0**	– 0
11	**1**	– 1	**0**	**1**
	I	I	II	I

Перепишем таблицу

Тогда $h(y,t) = (1101) = \overline{y} \vee t$,

$\varphi(x,z) = (0101) = z$ - столбцы I типа;

$\psi(x,z) = (1100) = \overline{x}$ - столбцы II типа.

Тогда $f(x,y,z,t) = (\overline{y} \vee t)z \vee \overline{(\overline{y} \vee t)}\,\overline{x}$.

Строим схему с ветвлениями: