<u>Теорема 2</u> (1-е правило Лопиталя, раскрытие неопр-ти вида $\frac{0}{0}$).

Пустъ 1) ф-ии $f(x)$ и $g(x)$ опр-ны и диф-мы в некот. проколотой окр-ти $\mathring{U}(a)$ т. $x=a$;

2) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathring{U}(a)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

4) $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (A \in R,\ A = \infty, \pm\infty)$

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. (б/д)

**Теорема 3** (2-е правило Лопиталя, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).

Пусть 1) —||—

2) —||—

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

4) —||—

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. (б/д)

**Замечание:** в правилах Лопиталя условие $x\to a$ м. заменить на $x\to\pm\infty$, $x\to\infty$.

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to+0}(-x) = 0;$

2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} =$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cancel{2x\sin\frac{1}{x}}^{\,0} - \cos\frac{1}{x}}{\cancel{\cos x}_{\,1}}$ не сущ-ет; правило Лопиталя применить нельзя.

$= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

# 31. Формула Тейлора.

Пусть ф-я $f(x)$ $n$ раз диф-ма в $U_\delta(a) \equiv (a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$.

$$T_n(f,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

— многочлен Тейлора степени $n$ ф-ии $f(x)$ в точке $a$.

$R_n(f,a) = f(x) - T_n(f,a)$ - остаточный член формулы Тейлора

$$f(x) = T_n(f,a) + R_n(f,a)$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

— формула Тейлора для ф-ии $f(x)$ в т. $a$.

Формы остаточного члена:

1) остаточный член в форме Пеано: $R_n(f,a) = \bar{o}((x-a)^n)$, $x \to a$

Формула Тейлора с ост. членом в форме Пеано — локальная формула Тейлора.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \bar{o}((x-a)^n),\ x \to a$$

2) остаточный член в общей форме или в форме Шлемильха-Роша:

$$R_n = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \quad , \text{ где}$$

$p > 0$ произвольно, $\xi$ - некот. точка, лежащая м/у $a$ и $x$.

3) остат. член в форме Лагранжа:

$p = n+1$ $$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \quad , \quad \xi = a + \theta(x-a),\ \theta \in (0,1)$$

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)), \quad \theta \in (0;1)$$

4) остат. член в форме Коши:

$p=1$; $$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)), \quad \theta \in (0;1)$$

Формула Тейлора с центром в т. $a=0$ – формула Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_n$$

1) $R_n = \bar{o}(x^n)$, $x \to 0$ – форма Пеано;

2) $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$, $\theta \in (0;1)$ – форма Лагранжа;

3) $R_n = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x)$, $\theta \in (0;1)$ – форма Коши.

Разложение по формуле Маклорена (Тейлора с центром в 0) некоторых элементарных ф-ций.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1},\quad \theta\in(0;1)$$

1) $f(x)=e^x$, $\quad f^{(n)}(x)=e^x \ \forall n\in\mathbb{N}$, $\quad f^{(n)}(0)=1 \ \forall n\in\mathbb{N}$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\theta x}}_{R_n},\quad 0<\theta<1$$

$$|x|<\delta,\ \delta>0 \Rightarrow |R_n|=\frac{|x|^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}\le\frac{\delta^{n+1}\cdot e^{\theta x}}{(n+1)!}<\frac{\delta^{n+1}\cdot e^{\delta}}{(n+1)!}$$

2) $f(x)=\sin x$, $\quad f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right) \ \forall n\in\mathbb{N}$,

$f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2}$; $\quad n=2k \quad \sin\frac{\pi n}{2}=\sin\pi k=0$

$n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N},\quad \sin\frac{\pi n}{2} = \sin\left(\pi k - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \pi k = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}\, x^{2k-1}}{(2k-1)!} + 0 \cdot x^{2k} + R_n$$

$$R_n = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin\left(\theta x + \pi k + \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 < \theta < 1$$

$$|x| < \delta \Rightarrow |R_n| \leq \frac{\delta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$f(x) = \cos x$, $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$ — см. пособие Садовничей.

Примеры:

1) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_n$

$|R_n| \le \frac{\delta^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |x| \le \delta.$

Пусть $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $n=5$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R$,

$|R| \le \frac{(\pi/4)^7}{7!} < 10^{-4}$

$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

2) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = (\cos^{-2} x)' = -2\cos^{-3} x \cdot$
$\cdot(-\sin x) = 2\cos^{-3} x \cdot \sin x$

$f''(0) = 0$

$f'''(0) = 2, \quad f^{IV}(0) = 0$

$tg\,x = x + \frac{x^3}{3} + 0 \cdot x^4 + \bar{o}(x^4), \quad x \to 0$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - tg\,x}{x^3} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \bar{o}(x^4) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \bar{o}(x^4)\right)}{x^3} =$

$\sin x \sim x, \quad \sin x = x + \bar{o}(x), \; x \to 0$

$tg\,x \sim x, \quad tg\,x = x + \bar{o}(x), \; x \to 0$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + x^4 \cdot \alpha_1(x) - x^4 \cdot \alpha_2(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2} + x \cdot \alpha(x)\right) = -\frac{1}{2}$