Элементы алгебры логики

Для описания логики функционирования аппаратных и программных средств компьютера используется алгебра логики или булева алгебра.

Дж. Буль – английский математик 19 века. Булева алгебра оперирует с логическими переменными, которые могут принимать только 2 значения: истина и ложь, обозначаемые соответственно 1 и 0.

• Совокупность значений логических переменных x_1, x_2,…, x_n называется ***набором переменных***. Набор логических переменных удобно изображать в виде n-разрядного двоичного числа, каждый разряд которого равен значению одной из переменных. Количество наборов логических переменных в n двоичных разрядах равно 2^n.

• ***Логической функцией*** от набора логических переменных f(x_1, x_2,…, x_n) называется функция, которая может также принимать только 2 значения: *истина* или *ложь*.

Любая логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности, в левой части которой записываются возможные наборы переменных, а в правой – соответствующие им значения функции.

В случае большого числа переменных, табличный способ становится громоздким. Поэтому, логические функции выражают через элементарные логические функции, которые легко задаются таблично. Как правило, это функции от одной или двух переменных.

Совокупность логических функций, с помощью которых можно выразить логическую функцию любой сложности, называются функционально полными системами логических функций.

Наиболее часто используемая система логических функций: инверсия (¬, отрицание, NOT), конъюнкция (∧, логическое умножение, AND, &), дизъюнкция (∨, логическое сложение, OR).

Инверсия (¬)	
x	¬ x
0	1
1	0

Конъюнкция (∧)		
x1	x2	x1∧x2
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция (∨)		
x1	x2	x1∨x2
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликация (→)		
x1	x2	x1→x2
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность (≡)		
x1	x2	x1≡ x2
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Исключающее ИЛИ (xor,⊕)		
x1	x2	x1⊕x2
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Логические переменные, объединенные знаками логических операций, составляют *логические выражения*. При вычислении логических выражений определено следующее старшинство выполнения логических операций: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция. Для изменения порядка используют скобки.

$f(x1, x2, x3) = (x1 \wedge x2 \overline{\vee x2} \vee x3) \wedge x1 \vee \overline{x}3;$

$f(0, 1, 1) = (0 \wedge 1 \overline{\vee 1} \vee 1) \wedge 0 \vee \overline{1} = 0;$

$f(1, 0, 1) = (1 \wedge \overline{0 \vee} 0 \wedge 1) \wedge 1 \vee \overline{1} = 1.$

В алгебре логики выполняются следующие основные законы, позволяющие производить тождественные преобразования логических выражений:

1. Закон двойного отрицания:
   $\overline{\overline{x}} = x$
2. Правила операций переменной с ее инверсией:
   $x \vee \overline{x} = 1$
   $x \wedge \overline{x} = 0$
3. Правила операций с константами:

   $\overline{x} \wedge 1 = x$
   $x \wedge 0 = 0$
   $x \vee 0 = x$
   $x \vee 1 = 1$
4. Правила де Моргана:
   $\overline{x1 \vee x2} = \overline{x}1 \wedge \overline{x}2$
   $\overline{x1 \wedge x2} = \overline{x}1 \vee \overline{x}2$

5. Коммуникативный закон (переместительный):
   $x1 \vee x2 = x2 \vee x1$
   $x1 \wedge x2 = x2 \wedge x1$
6. Ассоциативный закон (сочетательный):
   $x1 \vee (x2 \vee x3) = (x1 \vee x2) \vee x3$
   $x1 \wedge (x2 \wedge x3) = (x1 \wedge x2) \wedge x3$
7. Дистрибутивный закон (распределительный):
   $x1 \wedge (x2 \vee x3) = (x1 \wedge x2) \vee (x1 \wedge x3)$
   $x1 \vee (x2 \wedge x3) = (x1 \vee x2) \wedge (x1 \vee x3)$
8. Закон поглощения:
   $x1 \vee (x1 \wedge x2) = x1$
   $x1 \wedge (x1 \vee x2) = x1$
9. Закон идемпотентности:
   $x \vee x = x$
   $x \wedge x = x$

Схемные реализации операций, выполняемых элементарными логическими функциями, называются <u>логическими элементами</u>. С их помощью реализуются функции управления процессом обработки информации.