Частичные булевы функции.

Булева функция называется *частичной*, если она не является всюду определённой.

При задании частичной функции на местах значений, на которых функция не определена, ставим прочерки.

Пример частичной функции f, заданной таблично и векторно: $f(x,y,z)=(-0-1--11)$.

xyz	f
000	-
001	0
010	-
011	1
100	-
101	-
110	1
111	1

Доопределением частичной функции f называется всюду определённая функция g, значения которой совпадают со значениями функции f на тех наборах, на которых f определена.

Если частичная функция не определена на k наборах, то она допускает 2^k различных доопределений.

Минимизация частичных функций.

Минимальной ДНФ частичной функции называется ДНФ наименьшей сложности из всех ДНФ, доопределяющих данную частичную функцию.

Импликантой частичной функции f называется элементарная конъюнкция E, для которой выполнены условия:

1) $\exists_{\alpha}(f(\alpha)=1, E(\alpha)=1);$

2) $\forall_{\beta}(f(\beta)=0 \Rightarrow E(\beta)=0).$ **(1)**

Простой импликантой частичной функции f называется такая её импликанта E, для которой при удалении любой буквы из E для полученной конъюнкции E' $\exists_{\gamma}(f(\gamma)=0, E'(\gamma)=1)$.

Сокращённой ДНФ частичной функции называется дизъюнкция всех её простых импликант.

Метод Квайна для частичных функций.

Метод Квайна для частичных функций, как и для всюду определённых, состоит из двух этапов.

1) На первом этапе на основании определения находим все простые импликанты и строим из них сокращённую ДНФ.

2) На втором этапе с помощью матрицы Квайна находим минимальную ДНФ.

Пример. Найти методом Квайна минимальную ДНФ частичной функции $f(x, y, z)$, заданной векторно: $f(x, y, z) = (-0-1-101)$.

Запишем таблицу функции $f(x, y, z)$.

x	y	z	f
0	0	0	-
0	0	1	0
0	1	0	-
0	1	1	1
1	0	0	-
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Выпишем нулевые и единичные наборы функции соответственно в таблицы M_0 и M_1.

M_0
001
110

M_1
011
101
111

Будем поочерёдно заменять прочерком в каждом единичном наборе по одной цифре и смотреть, есть ли среди нулевых наборов такие, что имеют полученную комбинацию цифр. Например, если заменить в наборе 011 первый символ прочерком, получим -11. Среди нулевых нет наборов, заканчивающимися комбинацией 11. Это означает, что конъюнкция yz является импликантой функции $f(x, y, z)$. Пометим в таблице комбинацию 011 крестиком, добавим в таблицу M_1 столбец справа, в которую впишем комбинацию -11. Если в наборе 011 заменить прочерком средний символ, то получим 0 -1, и заметим, что среди нулевых есть набор 001, в котором на первом и третьем местах стоят соответственно символы 0 и 1. Значит, конъюнкция $\overline{x}z$ не является импликантой функции $f(x, y, z)$, и мы переходим к следующему символу. Проделав эту процедуру для каждого из единичных наборов, получим следующий вид таблицы M_1:

M_1	
011+	-11
101+	01-
111+	1-1
	10-

Попытка удалять символы из наборов нового столбца показывает, что все полученные наборы, содержащие по два определённых символа, соответствуют простым импликантам. Крестик, стоящий у набора, показывает, что соответствующая импликанта не является простой.

Сокращённая ДНФ данной функции имеет вид:

$yz \vee \bar{x}z \vee xz \vee x\bar{y}$.

Запишем матрицу Квайна:

	yz 1	$\bar{x}z$ 2	xz 3	$x\bar{y}$ 4
011	1	1		
101			1	1
111	1		1	

Применим метод Магу. Составляем символическое выражение, аналогично тому, как мы это делали для случая всюду определённых функций.

$$(1 \vee 2)(3 \vee 4)(1 \vee 3) = 131 \vee 133 \vee 141 \vee 143 \vee 231 \vee 233 \vee 241 \vee 243 =$$

$$= 13 \vee 13 \vee 14 \vee 143 \vee 231 \vee 23 \vee 241 \vee 243 = 13 \vee 14 \vee 23.$$

Видим, что для покрытия всех единичных наборов функции можно взять любую из комбинаций импликант: 13, 14, 23, так как они имеют одинаковую сложность.

Итак, один из возможных ответов: $yz \vee xz$. ■

Метод Карнау для частичных функций.

Заполняя карту Карнау для частичных функций, будем ставить прочерки в клетках, соответствующих наборам, на которых функция не определена. Затем, отыскивая минимальную ДНФ или минимальную КНФ, будем доопределять нашу функцию так, чтобы соответствующая формула имела бы наименьшую сложность.

Пример. Найти методом Карнау минимальную ДНФ и минимальную КНФ частичной функции $f(x, y, z) = (-0-1-101)$.

$xy \backslash z$	0	1
00	-	0
01	-	1
11	0	1
10	-	1

При отыскании минимальной ДНФ для покрытия всех единиц карты Карнау требуется два прямоугольника 2x1. Соответствующая минимальная ДНФ: $yz \vee xz$.

Минимальная КНФ: $z(y \vee x)$.

$xy \backslash z$	0	1
00	-	0
01	-	1
11	0	1
10	-	1

Пример. Найти методом Карнау минимальную ДНФ и минимальную КНФ частичной функции

$$f(x,y,z,t) = (--01\ 1-1-\ --10\ -0--).$$

Минимальная ДНФ: $\bar{x}t \vee \bar{x}y \vee x\bar{t}$.

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00	-	-	1	0
01	1	-	-	1
11	-	0	-	-
10	-	-	0	1

$xy \backslash zt$	00	01	11	10
00	-	-	1	0
01	1	-	-	1
11	-	0	-	-
10	-	-	0	1

Минимальная КНФ: $(x \vee y \vee t)(\bar{x} \vee \bar{t})$.

Метод каскадов для частичных функций.

Метод каскадов для частичных функций, также, как и для всюду определённых функций, основан на последовательном применении формул дизъюнктивного разложения по одной переменной и, при необходимости, формулы вычёркивания.

Для отыскания оптимального порядка переменных разложения в методе каскадов для частичных функций поступают следующим образом: находят значения частных производных функции по всем переменным на наборах, где эти производные определены, и упорядочивают их по невозрастанию веса. Соответствующий порядок переменных и является оптимальным.

Пример. С помощью метода каскадов получить формулу в базисе $\{\wedge, \vee, \neg\}$ для частичной функции $f(x, y, z, t)$, заданной таблично.

$xy \backslash zw$	00	01	10	11
00	-	0	-	-
01	1	-	1	-
10	0	-	1	-
11	0	-	0	1

Найдём вес каждой частной производной: $|f_x^{'}| = 2$, $|f_y^{'}| = 1$, $|f_z^{'}| = 1$, $|f_t^{'}| = 1$.

Согласно правилу, разложение будем вести в следующем порядке: $xyzt$.

$$f(x, y, z, t) = \bar{x} \cdot f(0, y, z, t) \vee x \cdot f(1, y, z, t) =$$

$$= \bar{x} \cdot (-0--\ 1-1-) \vee x \cdot (0-1-\ 0-01) =$$

$$= \bar{x}(\bar{y}(-0--) \vee y(1-1-)) \vee x(\bar{y}(0-1-) \vee y(0-01)) =$$

$$= \bar{x}(\bar{y}(0) \vee y(1)) \vee x(\bar{y}\, z \vee yt) = \bar{x}y \vee x(\bar{y}\, z \vee yt).$$

Сложность полученной формулы равна 7.