Тишин В.В.

Введение в математику.

Некоторые обозначения.

Символ $\forall$ называется *квантором общности*, и запись $\forall x$ будем употреблять в формулах для обозначения словосочетания «для всех x», или «для любых x».

Символ $\exists$ называется *квантором существования*, и запись $\exists x$ будем употреблять в формулах для обозначения словосочетания «существует x», или «найдётся x».

Символ $\exists!$ называется *квантором существования и единственности,* и запись $\exists! x$ будем его употреблять в формулах для обозначения словосочетания «существует единственный x», или «найдётся единственный x».

Символы $\Rightarrow$ и $\rightarrow$ называются *знаками следствия*, и запись $A \Rightarrow B$ или $A \rightarrow B$ будем использовать в формулах для обозначения словосочетания «из A следует B», или «A влечёт B», или «A является достаточным условием для B», или «B является необходимым условием для A».

Символ $\Leftrightarrow$ называется *знаком равносильности*, и запись $A \Leftrightarrow B$ будем использовать в формулах для обозначения словосочетания «A равносильно B», или «A является необходимым и достаточным условием для B».

Множества.

Основные понятия.

Множество - неопределяемое понятие.

Георг Кантор говорил, что множество – совокупность различных объектов (*элементов*), воспринимаемых как единое целое.

Ясно, что данное предложение не может считаться строгим математическим определением.

Запись $x \in A$ означает, что *элемент* x *принадлежит* множеству A. Если x не является элементом множества A, то пишут $x \notin A$ или $\overline{x \in A}$.

Множество называется *пустым* и обозначается $\varnothing$, если оно не содержит элементов.

Как правило, множества будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита, а элементы - прописными буквами латинского алфавита.

Если x–элементы, а $P(x)$– условие, которому могут удовлетворять элементы x, то запись $\{x \mid P(x)\}$ обозначает множество элементов x, удовлетворяющих условию $P(x)$.

Следующие множества считаем известными, известными считаем и возможные действия над ними:

$N=\{1,2,3,..., n,...\}$ - *множество натуральных чисел*.

$N_0 = \{0,1,2,3,..., n,...\}$ - *расширенное множество натуральных чисел.*

$Z=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,..., n,-n,...\}$ - *множество целых чисел.*

$Q = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in Z,\, q \in N,\, \frac{p}{q} - \text{несократимая дробь} \right\}$ - *множество рациональных чисел.*

Из определения следует, например, что $\frac{6}{8}$ не является рациональным числом, а $\frac{3}{4}$ – является.

$R=(-\infty,+\infty)$ - *множество действительных чисел.*

Действительным числом называется число, представимое в виде десятичной дроби (возможно, бесконечной), не оканчивающейся периодом из одних девяток.

Требование отсутствия в записи действительного числа бесконечного периода из одних девяток связано с тем, что если такое требование не предъявлять, то одно и то же действительное число могло бы иметь два различных графических представления.

Например, $2,(9) = 3$. Действительно, если

$x = 2,999999...$, то

$10x = 29,999999...$ Вычитая из второго уравнения первое, получаем, что $9x = 27$ или $x = 3$.

$C = \{(a,b) \mid a \in R, b \in R\}$ - *множество комплексных чисел.*

Множество A называется *конечным*, если существует натуральное число n такое, что A содержит ровно n различных элементов. В этом случае пишут $|A| = n$ и число n называют *мощностью* конечного множества A.

Множество B называется *бесконечным*, если для любого натурального числа n можно указать n различных элементов множества B. Если множество бесконечно, будем писать $|B| = \infty$.

Способы задания множеств.

1) Прямое перечисление.

Этот способ применяется для задания конечных множеств. В этом случае внутри фигурных скобок через запятую перечисляем все элементы множества. Пример: $A = \{b, c, d, f\}$.

При этом не допускается наличие в списке элементов одинаковых символов, т.е., например, запись $\{d, c, d\}$ считается некорректной.

Множество $\{1, 2, 3, ..., 559, 560\}$ также можно считать заданным простым перечислением, где подразумеваемые элементы заменены многоточием.

Заметим, что многократное навешивание фигурных скобок меняет природу объекта. Например, множество $\{d, c\}$ имеет мощность 2 и его элементами являются символы d и c, а множество $\{\{d, c\}\}$ имеет мощность 1 и его элементом является множество $\{d, c\}$.

2) Порождающая процедура.

Порождающая процедура – это алгоритм, позволяющий указывать элементы множества A, используя множества, известные ранее, или элементы самого множества A, указанные ранее, т.е. в виде *рекуррентной процедуры*.

Пример: Множество $A_!$, составленное из чисел, являющимися факториалами натуральных чисел, можно задать в виде

$A_! = \{n! \mid n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n,\ n\in N\}$, считая множество натуральных чисел N известным, а можно задать в виде рекуррентной процедуры:

1. $a_1 = 1 \in A_!$
2. Если $a_n \in A_!$, то $a_{n+1} = a_n \cdot (n+1) \in A_!$

3) Распознающая процедура.

Распознающая процедура – это алгоритм, позволяющий для любых объектов a и A выяснять, является ли a элементом множества A или нет.

Пример. Пусть A_{2n} - множество чётных натуральных чисел, и a - некоторое натуральное число. Распознающей процедурой может являться процедура деления на 2. Если число a делится на 2 без остатка, то относим его ко множеству A_{2n}, в противном случае – не включаем его в A_{2n}.

Изложенный выше подход к теории множеств известен, как *наивная теория множеств*, и он чреват парадоксами. Рассмотрим пример одного из таких парадоксов.

Парадокс *Бертрана Рассела*:

Разобьём все множества на два класса:

Класс A – класс множеств, содержащих себя в качестве элемента, $A=\{X \mid X\in X\}$.

Примером множества из этого класса может служить множество всех множеств.

Класс B – все остальные множества, которые не содержат себя в качестве элемента, $B=\{X \mid X\notin X\}$. Большинство множеств, встречающихся в математической практике, относятся именно к классу B.

Очевидно, каждое множество попадает в один из этих классов. Распознающая процедура состоит в проверке, содержит ли рассматриваемое множество себя в качестве элемента или нет, и по результатам проверки выясняем, в какой класс его определить.

Теперь подумаем, в какой класс определить само множество B.

а) Если $B\in B$, то это означает, что B содержит себя в качестве элемента, и должно быть помещено не в B, а в A.

б) С другой стороны, если $B \notin B$, то B не содержит себя в качестве элемента, и поэтому должно быть помещено в B.
Видим, что попытка поместить множество B в класс A или в класс B приводит к противоречию.
Существует несколько подходов для разрешения парадокса Рассела, но, пожалуй, ни один из них нельзя признать полностью удовлетворительным.

Отношения между множествами.

Говорят, что множество A *включено* во множество B, и пишут $A \subseteq B$, если каждый элемент множества A является также и элементом множества B. Это определение можно записать в виде формулы:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall_x (x \in A \rightarrow x \in B) \qquad \textbf{(1)}$$

В этом случае также говорят, что A является *подмножеством* B, или B является *надмножеством* A.
Из определения включения следует, что любое множество включено само в себя, и что пустое множество включено в любое множество, т.е. справедливы формулы

$$\forall_A (A \subseteq A) \qquad \textbf{(2)}$$

$$\forall_A (\varnothing \subseteq A). \qquad \textbf{(3)}$$

Теорема о транзитивности включения множеств.

Включение множеств обладает свойством транзитивности, т.е. справедлива формула (4):

$$\forall_A \forall_B \forall_C (A \subseteq B, B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C) \qquad \textbf{(4)}$$

Доказательство.

Возьмём произвольный элемент $x \in A$. Из условия $A \subseteq B$ и определения включения следует, что $x \in B$. Но справедливо также $B \subseteq C$, применяя ещё раз определение включения, получим, что $x \in C$. Итак, при выполнении условий теоремы, произвольный элемент множества A принадлежит также и множеству C, что и доказывает теорему. ■

Доказательство теоремы можно представить формулой:

$$\left(\forall_x (x \in A, A \subseteq B \to x \in B, B \subseteq C \to x \in C)\right) \Rightarrow A \subseteq C.$$

Вопрос для самостоятельной работы:

Выяснить, справедлива ли формула

$\forall_A \forall_B \forall_C (A \in B, B \in C \to A \in C)$?

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, другими словами, выполняется формула:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A. \qquad \textbf{(5)}$$

Говорят, A *строго включено* в B, и пишут $A \subset B$, если $A -$ подмножество B и A не совпадает с B, т.е.

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B, A \neq B. \qquad \textbf{(6)}$$

Если $A \subset B$ и $A \neq \varnothing$, то A называется *собственным подмножеством* множества B.

Общее положение множеств.

Будем говорить, что множества A и B *находятся в общем положении*, и писать $A \circledcirc B$, если существуют такие элементы $a, b, c,$ что $a \in A$ и $a \notin B$, $b \in B$ и $b \notin A$, $c \in A$ и $c \in B$.