Интерпретацией называется отображение h, которое для каждого набора аргументов формулы исчисления высказываний приписывает этой формуле значение 0 или 1, и которое обладает свойствами: $h(\neg A) = \neg h(A)$, $h(A \to B) = h(A) \to h(B)$.

Формула A называется *тавтологией*, если $h(A) \equiv 1$.

В дальнейшем будем интерпретировать знак $\neg$, как знак отрицания, а $\to$ - как импликацию и вычислять истинностные значения формул, используя традиционные таблицы значений отрицания и импликации, рассмотренные ранее в курсе дискретной математики.

Утверждение о тождественной истинности теорем исчисления *L*.

Каждая теорема исчисления L является тождественно-истинной формулой.

Покажем сначала, что каждая из трёх схем аксиом исчисления L является тавтологией.

Построим таблицу истинности первой схемы аксиом $A \to (B \to A)$:

A	$\to$	$(B$	$\to$	$A)$
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Видим, что столбец, задающий вектор значений булевой функции $A \to (B \to A)$, состоит из одних единиц. Значит, первая схема аксиом, а, следовательно и любая аксиома по первой схеме аксиом, является тавтологией.

Аналогичным образом строим таблицы истинности второй и третьей схем аксиом:

$(A$	$\to$	$(B$	$\to$	$C))$	$\to$	$((A$	$\to$	$B)$	$\to$	$(A$	$\to$	$C))$
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$(\neg B$	$\to$	$\neg A)$	$\to$	$((\neg B$	$\to$	$A)$	$\to$	$B)$
1	1	1	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1

Видим, что столбцы, задающие векторы значений булевых функций, соответствующих второй и третьей схемам аксиом, состоят из одних единиц. Значит, вторая и третья схемы аксиом, а, следовательно и любые аксиомы по второй и третьей схемам аксиом, являются тавтологиями.

Пусть $A(X_1, X_2, ..., X_n) \to B(X_1, X_2, ..., X_n) \equiv 1$, $A(X_1, X_2, ..., X_n) \equiv 1$.
Тогда для произвольного набора аргументов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ выполнено: $A(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$, $A(a_1, a_2, ..., a_n) \to B(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$, откуда, по определению импликации, следует, что и $B(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$.

Из произвольности взятого набора аргументов следует, что $B(X_1, X_2, ..., X_n) \equiv 1$.

Значит, применение правила *MP* к двум тавтологиям, также даёт тавтологию.

Пусть G - теорема, значит, существует последовательность $F_1, ..., F_n$ такая, что $F_n = G$, каждый член которой F_i $(i = 1, 2, ..., n)$ или является аксиомой, или получен по некоторому правилу вывода из некоторых предыдущих членов этой последовательности. Но выше было показано, что каждая аксиома исчисления L – тавтология, и применение правила MP к двум тавтологиям также даёт тавтологию, значит, каждый член последовательности $F_1, \ldots, F_n$, включая формулу $F_n = G$, является тавтологией. Теорема доказана.

Для доказательства обратного утверждения – что каждая тавтология является теоремой исчисления L, придётся предварительно доказать ряд вспомогательных теорем.

Некоторые теоремы исчисления *L*.

Докажем некоторые теоремы, которые будут использованы в дальнейшем.

Первая теорема двойного отрицания (1*ДО*): $\vdash \neg\neg A \to A$.

B_1: $(\neg A \to \neg\neg A) \to ((\neg A \to \neg A) \to A)$ - аксиома по 3 схеме аксиом $\begin{pmatrix} \neg A & A \\ A & B \end{pmatrix}$;

B_2: $\neg A \to \neg A$ - теорема;

B_3: $(\neg A \to \neg\neg A) \to A$ $(ПС$ к $B_1, B_3)$

B_4: $\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg A)$ - аксиома по 1 схеме аксиом $\begin{pmatrix} \neg\neg A & \neg A \\ A & B \end{pmatrix}$;

B_5: $\neg\neg A \to A$ $(ТИ$ к $B_4, B_3)$ ■

Вторая теорема двойного отрицания $\vdash$ (2*ДО*): $A \to \neg\neg A$.

B_1: $(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to ((\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A)$ - аксиома по 3 схеме аксиом $\begin{pmatrix} A & \neg\neg A \\ A & B \end{pmatrix}$;

$B_2: \quad \neg\neg\neg A \to \neg A$ - (1*ДО) $\begin{pmatrix} \neg A \\ A \end{pmatrix}$;

$B_3: \quad (\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A \quad$ (*MP* к B_1, B_2);

$B_4: \quad A \to (\neg\neg\neg A \to A)$ - аксиома по 1 схеме аксиом $\begin{pmatrix} A & \neg\neg\neg A \\ A & B \end{pmatrix}$; $B_5: \quad A \to \neg\neg A$ (*ТИ* к B_4, B_3)

■

Теорема выводимости импликации $\vdash$ (*ВИ*): $\neg A \to (A \to B)$.

$B_1: \quad \neg A$ - гипотеза;

$B_2: \quad A$ - гипотеза;

$B_3: \quad \neg A \to (\neg B \to \neg A)$ - аксиома по 1 схеме аксиом $\begin{pmatrix} \neg A & \neg B \\ A & B \end{pmatrix}$;

$B_4: \quad A \to (\neg B \to A)$ - аксиома по 1 схеме аксиом $\begin{pmatrix} A & \neg B \\ A & B \end{pmatrix}$;

$B_5: \quad \neg B \to \neg A$ - (*MP* к B_1, B_3)

$B_6: \quad \neg B \to A$ - (*MP* к B_2, B_4)

$B_7: \quad (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$ - 3 схема аксиом;

$B_8: \quad (\neg B \to A) \to B$ - (*MP* к B_5, B_7)

$B_9: \quad B$ - (*MP* к B_6, B_8)

Получили, что из гипотез $\neg A$, A выводима формула B.

Тогда, применив теорему дедукции, получим, что $\neg A \vdash A \to B$.

Применив ещё раз теорему дедукции, получим $\vdash \neg A \to (A \to B)$

Первая теорема контрапозиции $\vdash$ (1*КП*): $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

$B_1: \quad \neg B \to \neg A$ - гипотеза;

$B_2: \quad (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$ - 3 схема аксиом;

$B_3: \quad (\neg B \to A) \to B$ - ($МП$ к B_1, B_2)

$B_4: \quad A \to (\neg B \to A)$- аксиома по 1 схеме аксиом $\begin{pmatrix} A & \neg B \\ A & B \end{pmatrix}$;

$B_5: \quad A \to B$ ($ТИ$ B_4, B_3);

Получили, что из гипотезы $\neg B \to \neg A$ выводима формула $A \to B$. Применив теорему дедукции, получим, что $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

Вторая теорема контрапозиции $\vdash$ ($2КП$): $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

$B_1: \quad A \to B$ - гипотеза;

$B_2: \quad \neg\neg A \to A$ ($1ДО$);

$B_3: \quad \neg\neg A \to B$ ($ТИ$ к B_1, B_2);

$B_4: \quad B \to \neg\neg B$ ($2ДО$);

$B_5: \quad \neg\neg A \to \neg\neg B$ ($ТИ$ к B_3, B_4);

$B_6: \quad (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$ - ($1КП$) $\begin{pmatrix} \neg B & \neg A \\ A & B \end{pmatrix}$;

$B_7: \quad \neg B \to \neg A$ (MP B_5, B_6);

Получили, что из гипотезы $A \to B$ выводима формула $\neg B \to \neg A$. Применив теорему дедукции, получим, что $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

Отрицание импликации ($ОИ$): $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$.

$B_1: \quad A$- гипотеза;

$B_2: \quad A \to B$- гипотеза;

$B_3: \quad B$- (MP к B_1, B_2);

Получили, что из гипотез $A, A \to B$ выводима формула B.
Применим теорему дедукции, получим: $A \vdash (A \to B) \to B$.
Ещё раз применим теорему дедукции, получим:
$B_4 : A \to ((A \to B) \to B)$. $B_5 :\quad ((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$;
$(2КП)\quad \begin{pmatrix} A \to B & B \\ A & B \end{pmatrix}$

$B_6 :\quad A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$. ($ТИ$ к B_4, B_5) ■

Теорема разбора случаев (PC): $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$.

1) $A \to B$ - гипотеза;
2) $\neg A \to B$ - гипотеза;
3) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ (2КП);
4) $\neg B \to \neg A$ - (МР 1,3);
5) $(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg\neg A)$ (2КП) $\begin{pmatrix} \neg A & B \\ A & B \end{pmatrix}$;
6) $\neg B \to \neg\neg A$ (МР 5,2)
7) $(\neg B \to \neg\neg A) \to ((\neg B \to \neg A) \to B)$; аксиома по 3 схеме аксиом $\begin{pmatrix} \neg A & B \\ A & B \end{pmatrix}$
8) $(\neg B \to \neg A) \to B$; (МР 7,6)
9) B (МР 8,4)

Получили, что из гипотез $\neg A \to B, A \to B$ выводима формула B.
Применим теорему дедукции, получим: $A \to B \vdash (\neg A \to B) \to B$.
Ещё раз применим теорему дедукции, получим:
$\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$. ■