# Арифметический треугольник.

При отыскании биномиальных коэффициентов можно использовать формулу $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, и процесс отыскания коэффициентов можно оформить в виде таблицы

| $n \diagdown k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| … | … | … | … | … | … | … | … |

Эта таблица называется *арифметическим треугольником второго порядка.*

Обозначим биномиальный коэффициент $C_n^k$ как $C_2(n,k)$.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &C_2(1,k) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le k \le 1; \\ 0, & \text{если } k > 1. \end{cases} \\ &C_2(n,k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0; \\ C_2(n-1,k) + C_2(n-1,k-1), & \text{если } k \ge 1 \end{cases}, \; n > 1. \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{(10)}$$

Эти формулы можно обобщить на случай *арифметических коэффициентов порядка m:*

$$\left.\begin{array}{l} C_m(1,k)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\le k\le m-1;\\ 0, & \text{если } k>m-1.\end{cases} \\ C_m(n,k)=\begin{cases}C_m(n-1,k)+C_m(n-1,k-1)+\ldots+C_m(n-1,0), & \text{если } k\le m-1;\\ C_m(n-1,k)+C_m(n-1,k-1)+\ldots+C_m(n-1,k-m+1), & \text{если } k>m-1\end{cases},\ n>1.\end{array}\right\} \quad \textbf{(11)}$$

Следующая таблица, составленная из арифметических коэффициентов порядка *m*, называется *арифметическим треугольником m-го порядка:*

| $n \diagdown k$ | 0 | 1 | 2 | … | *m*-2 | *m*-1 | *m* | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | … | 1 | 1 | 0 | … |
| 2 | 1 | 2 | 3 | … | *m*-1 | *m* | *m*-1 | … |
| 3 | 1 | 3 | 6 | …. | … | $\frac{m(m+1)}{2}$ | … | … |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … |

Существует связь между арифметическими коэффициентами порядка $m$ и $m$ - ичной системой счисления.

**Теорема о связи арифметического треугольника порядка *m* и *m*-ичной системой счисления.**

Число $C_m(n,k)$ равно количеству $n$ - разрядных чисел в $m$ - ичной системе счисления, сумма цифр которых равна *k*, причём допускаются числа, начинающиеся с нулей.

Последнее допущение означает, что, например, число 007 считаем трёхразрядным.

Обозначим через $B_m(n,k)$ количество $n$ - разрядных чисел в $m$ - ичной системе счисления, сумма цифр которых равна *k*, при условии, что допускаются числа, начинающиеся с нулей.

Покажем, что $B_m(n,k)=C_m(n,k)$.

1) Рассмотрим одноразрядные числа в $m$ - ичной системе счисления.

а) Если $k$ не превышает максимальной цифры $m$-1 в $m$ - ичной системе счисления, то для каждого такого $k$ найдётся единственное одноразрядное число с суммой цифр, равной $k$, а именно - число, состоящее из единственной цифры $k$. Таким образом, $B_m(1,k)=1,$ если $0 \le k \le m-1\cdot$

б) Если же $k > m-1,$ то получить сумму $k$ с помощью одной цифры невозможно, Значит, $B_m(1,k)=0,$ если $k > m-1.$

Итак, $B_m(1,k)=\begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le k \le m-1; \\ 0, & \text{если } k > m-1. \end{cases}$

1) Рассмотрим $n$ – разрядные числа в $m$ - ичной системе счисления, если $n > 1.$

а) Пусть $k$ не превышает максимальной цифры $m$-1 в $m$ - ичной системе счисления.

Рассмотрим $n$ – разрядные числа, начинающиеся с 0. В этом случае сумму $k$ должны набрать остальные $n$ -1 разрядов, и они могут сделать это $B_m(n-1,k)$числом способов.

Рассмотрим $n$ – разрядные числа, начинающиеся с 1. В этом случае остальные $n$ -1 разрядов должны набрать сумму $k$-1, и они могут сделать это $B_m(n-1,k-1)$числом способов.

…

Рассмотрим $n$ – разрядные числа, начинающиеся с цифры $k$. В этом случае остальные $n$ -1 разрядов должны набрать сумму 0, и они могут сделать это $B_m(n-1,0)=1$ единственным числом способом, имея все цифры, равные 0. Итак,

$$B_m(m,k)=B_m(n-1,k)+B_m(n-1,k-1)+...+B_m(n-1,0), \text{ если } k \le m-1.$$

б) Пусть $k \ge m$-1.

Рассмотрим $n$ – разрядные числа, начинающиеся с 0. В этом случае сумму $k$ должны набрать остальные $n$ -1 разрядов, и они могут сделать это $B_m(n-1,k)$числом способов.

Рассмотрим $n$ – разрядные числа, начинающиеся с 1. В этом случае остальные $n$ -1 разрядов должны набрать сумму $k$-1, и они могут сделать это $B_m(n-1,k-1)$ числом способов.

…

Рассмотрим $n$ – разрядные числа, начинающиеся с цифры $m$-1. В этом случае остальные $n$ -1 разрядов должны набрать сумму $k$-$m$+1, и они могут сделать это $B_m(n-1,k-m+1)$ числом способом. Итак, общее количество $n$ - разрядных чисел в $m$ - ичной системе счисления, сумма цифр которых равна $k$, в случае $k \geq m$-1, выражается формулой $B_m(m,k)=B_m(n-1,k)+B_m(n-1,k-1)+\ldots+B_m(n-1,0)$, если $k \le m-1$.

Значит, при $n>1$имеем

$$B_m(n,k)=\begin{cases} B_m(n-1,k)+B_m(n-1,k-1)+\ldots+B_m(n-1,0), & \text{если } k \le m-1; \\ B_m(n-1,k)+B_m(n-1,k-1)+\ldots+B_m(n-1,k-m+1), & \text{если } k > m-1 \end{cases}$$

В общем итоге имеем набор формул для вычисления $B_m(n,k)$:

$$\left.\begin{aligned} & B_m(1,k)=\begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le k \le m-1; \\ 0, & \text{если } k > m-1. \end{cases} \\ & B_m(n,k)=\begin{cases} B_m(n-1,k)+B_m(n-1,k-1)+\ldots+B_m(n-1,0), & \text{если } k \le m-1; \\ B_m(n-1,k)+B_m(n-1,k-1)+\ldots+B_m(n-1,k-m+1), & \text{если } k > m-1 \end{cases}, n>1. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(12)}$$

Сравнивая формулы (11) и 12), видим, что закон построения чисел $B_m(n,k)$ совпадает с законом построения коэффициентов $C_m(n,k)$, а, следовательно, и результаты применения формул (11) и (12) будут одинаковыми, то есть $B_m(n,k)=C_m(n,k)$. ■

Пример. В некотором игорном заведении посетителям предлагалась игра: бросается три кости. Если сумма очков на трёх костях равна 11, то выигрывает заведение, если 12 – то посетитель, если другое количество очков – кости бросаются ещё раз, и так до появления суммы баллов 11 или 12. Хозяева игорного заведения убеждали посетителей, что шансы на выигрыш у обеих сторон равны, объясняя это следующим образом:

Число 11 можно представить в виде суммы трёх положительных слагаемых, не превосходящих 6, шестью способами:

1+4+6; 1+5+5; 2+3+6; 2+4+5; 3+3+5 и 3+4+4.

Для числа 12 таких сумм также шесть:

1+5+6; 2+5+5; 2+4+6; 3+3+6; 3+4+5 и 4+4+4.

Так что при длительной игре, по мнению хозяев заведения, примерно половину партий будет выигрывать заведение, а половину – клиент.

Но на практике при большом количестве партий оказывалось, что клиенты заведения остаются, как правило, в проигрыше.

Давайте выясним: действительно ли честной является эта игра.

Перейдём от стандартных костей, грани которых помечены цифрами от 1 до 6, к костям, грани которых помечены цифрами от 0 до 5. При таких костях «старым» суммам 11 и 12 будут соответствовать «новые» суммы 8 и 9. Тогда каждому броску трёх «старых» костей, при котором набиралась сумма в 11 баллов, соответствует трёхзначное число в 6-ичной системе счисления с суммой цифр 8, количество которых равно $C_6(3,8)$, а каждому броску трёх «старых» костей, при котором набиралась сумма в 12 баллов, соответствует трёхзначное число в 6-ичной системе счисления с суммой цифр 9, количество которых равно $C_6(3,9)$.

Для нахождения коэффициентов $C_6(3,8)$ и $C_6(3,9)$ изобразим арифметический треугольник 6 порядка:

| $k \backslash n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | … | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 25 | 27 | 27 | 25 |

Видим, что $C_6(3,8) = 27$, а $C_6(3,9) = 25$.

способов получения 11 баллов больше, чем число способов получения 12 баллов, значит, при длительной игре заведение будет в выигрыше в данной игре.

## Свойства арифметических коэффициентов.

1) $$C_2(n,k)=C_n^k. \qquad \textbf{(13)}$$

Это следует из формул (10).

2) Свойство симметричности.

$$C_m(n,k)=C_m(n,n(m-1)-k) \qquad \textbf{(14)}$$

Пусть $\overline{a_1a_2...a_n}$ - $n$-значное число в $m$-ичной системе счисления, такое, что $a_1+a_2+...+a_n=k$. Каждому слагаемому $a_i$ этой суммы поставим в соответствие число $\tilde{a}_i=m-1-a_i$.

Тогда каждой сумме $a_1+a_2+...+a_n=k$ будет соответствовать сумма $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+...+\tilde{a}_n=(m-1-a_1)+(m-1-a_2)+...+(m-1-a_n)=$ $=n(m-1)-(a_1+a_2+...+a_n)=n(m-1)-k$.

Так как построенное соответствие является биекцией, то количество упорядоченных сумм вида $a_1+a_2+...+a_n=k$ равно количеству упорядоченных сумм вида $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+...+\tilde{a}_n=n(m-1)-k$, что и доказывает формулу (14). ■

Пример.

Шестиразрядный автобусный билет назовём *счастливым*, если сумма первых трёх его цифр равна сумме его последних трёх цифр. Найдём вероятность того, что приобретённый случайный билет окажется счастливым.

Подсчитаем количество $S$ всевозможных счастливых билетов, в предположении, что возможны любые комбинации 6 цифр, кроме 000000.

Сумму $k$ можно набрать с помощью трёх цифр $C_{10}(3,k)$ числом способов. Значит, количество счастливых билетов, у которых сумма первых трёх и сумма последних трёх цифр равна $k$, выражается формулой $\left(C_{10}(3,k)\right)^2$. Просуммировав все возможные слагаемые такого вида, получим общее количество счастливых билетов $S=\sum_{k=0}^{27}\left(C_{10}(3,k)\right)^2$. Воспользовавшись свойством симметричности арифметических коэффициентов, это выражение можно представить как $S=2\sum_{k=0}^{13}\left(C_{10}(3,k)\right)^2$. Для отыскания арифметических коэффициентов построим арифметический треугольник 10-го порядка:

| $k \backslash n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 3 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 63 | 69 | 73 | 75 |

Вычислим $S$:

$$S=2(1^2+3^2+6^2+10^2+15^2+21^2+28^2+36^2+45^2+55^2+63^2+69^2+73^2+75^2)=55252.$$

В реальной жизни билета с номером 000000 не бывает, так что вероятность приобретения счастливого билета равна $\frac{55251}{1000000}=0{,}055251\approx\frac{1}{18}$.

## 2й **Способ** нахождения числа $S$.

Каждому счастливому билету вида $a_1a_2a_3b_1b_2b_3$, где $(a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3)$, единственным образом можно поставить в соответствие комбинацию $a_1a_2a_3\,9-b_1\,9-b_2\,9-b_3$, которое можно интерпретировать, как 6-разрядное число с суммой цифр, равной 27, так как $a_1+a_2+a_3+9-b_1+9-b_2+9-b_3=$

$$=27+a_1+a_2+a_3-b_1-b_2-b_3=27.$$

Количество таких чисел равно $S=C_{10}(6,27)=55252$.

Желающие могут проверить это составлением арифметического треугольника 10 порядка с 6 строками и 28 столбцами.

## 3й **Способ** нахождения числа $S$.

Любопытно, что число $S$ может быть вычислено по формуле: $S = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10x}{\sin x}\right)^6 dx$. Вывод этой неочевидной формулы можно найти в книге: Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика. 7т. «КомКнига», М., 2006г.

3) $C_m(n,0)+C_m(n,1)+...+C_m(n,n(m-1))=m^n$. **(15)**

В левой части равенства (15) – общее количество всех $n$ – разрядных чисел в $m$ – ичной системе счисления и оно равно $m^n$, так как в любой из $n$ позиций может стоять любая из цифр от 0 до $m$ -1.

## 4) Формула разложения по первым разрядам.

Докажем формулу:

$$C_m(n,k) = \sum_{s=0}^{i(m-1)} C_m(i,s)\cdot C_m(n-i,k-s) \qquad \textbf{(16)}$$

где $0 \le k \le n$.

Разобьём все $n$ – значные числа с суммой цифр, равной $k$, на классы. К $s$-тому классу, $0 \le s \le n$ отнесём числа, сумма первых $i$ цифр которых равна $s$. Тогда сумма последних $n$-$i$ цифр будет равна $k$-$s$. По правилу произведения получаем, что в $s$-тый класс входит $C_m(i,s)C_m(n-i,k-s)$ чисел. Так как общее количество $n$-значных чисел с суммой цифр $N$ равно $C_m(n,k)$, то по правилу суммы получаем соотношение (16).

## 5) Формула разложения по нулевым разрядам.

Докажем формулу: $C_m(n,k) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot C_{m-1}(n-i,k-n+i)$ **(17)**

Разобьём все $n$ – значные числа с суммой цифр, равной $k$, на классы. К $i$-тому классу, $0 \le i \le n$ отнесём числа, в $m$-ичной записи которых встречается ровно $i$ нулей. Выбрать места, на которых стоят нули, можно $C_n^i$ числом способов. После выбора этих мест вычеркнем все нули и уменьшим каждую оставшуюся цифру на 1. Мы получим $n$–$i$ – значное число в $m$-1 – ичной системе счисления, сумма цифр которых равна $k$-$n+i$. Количество таких чисел равно $C_{m-1}(n-i, k-n+i)$. Итого, в $i$-тый класс входят $C_n^i \cdot C_{m-1}(n-i, k-n+i)$ чисел. Суммируя все числа такого вида, получим формулу (17).

Пример: Выразить арифметические коэффициенты третьего порядка через биномиальные коэффициенты.

Применяя формулу (17), будем иметь:

$$C_3(n,k) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot C_2(n-i, k-n+i).$$

Так как $C_2(n-i, k-n+i) = C_{n-i}^{k-n+i}$, окончательно получим:

$$C_3(n,k) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot C_{n-i}^{k-n+i}.$$