Тишин В.В.

Операция минимизации.

Пусть дана функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Операция минимизации по i-той переменной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ обозначается $\mu_y(f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) = x_i)$ и определяется так:

Рассмотрим соотношение $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) = x_i$, (*)

которое будем рассматривать, как уравнение относительно y.

Это уравнение будем решать подбором, подставляя вместо y последовательно числа 0,1,2, и т.д. Возможны случаи:

1) на некотором шаге левая часть соотношения (*) не определена. В этом случае считаем, что на наборе $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ операция минимизации не определена.

2) На каждом шаге левая часть соотношения (*) определена, но ни при каких y равенство не выполнится. В этом случае также считаем, что на наборе $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ операция минимизации не определена.

3) Левая часть соотношения (*) определена при $y = 0$, $y = 1, \dots,$ $y = z - 1$, $y = z$, но при $y < z$ равенство (*) не выполнялось, а при $y = z$ оно выполняется. В этом случае число z считается значением операции минимизации на наборе $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рассмотрим применение операции минимизации на некоторых примерах.

Пример 1. Провести минимизацию функции $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ по второй переменной.

Рассмотрим уравнение $x_1 + y = x_2$ **(6)**

и будем решать его перебором, подставляя вместо у последовательно числа 0; 1; и т.д.

Рассмотрим два случая:

а) $x_1 > x_2$. В этом случае ясно, что левая часть (6) всегда будет больше правой части, и равенство никогда не выполнится. Значит, операция минимизации на таком наборе не определена.

б) $x_1 \le x_2$. В этом случае при подстановке вместо y числа $x_2 - x_1$ равенство будет выполнено. Значит, $x_2 - x_1$ будет являться значением операции минимизации на таком наборе.

Итак, $\mu_y(x_1 + y = x_2) = \begin{cases} x_2 - x_1, & \text{если } x_2 \ge x_1; \\ \text{не определена}, & \text{если } x_2 < x_1. \end{cases}$

Пример 2. Провести минимизацию функции $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ по первой переменной.

Рассмотрим уравнение $y \cdot x_2 = x_1$ **(7)**

и будем решать его перебором, подставляя вместо y последовательно числа 0; 1; и т.д.

Рассмотрим случаи:

а) $x_1 = 0$. Подставляя $y = 0$, на самом первом шаге получаем верное равенство, значит, 0 является значением операции минимизации при $x_1 = 0$.

б) $x_1 \ne 0, x_2 = 0$. В этом случае уравнение (7) примет вид $y \cdot 0 = x_1$, и ни при каком y равенство не будет выполнено. Значит, операция минимизации на таком наборе не определена.

в) $x_1 \ne 0, x_2 \ne 0, \dfrac{x_1}{x_2} \notin N$. В этом случае равенство $y \cdot x_2 = x_1$ ни при каком y не будет выполнено. Значит, операция минимизации на таком наборе не определена.

г) $x_1 \ne 0, x_2 \ne 0, \dfrac{x_1}{x_2} \in N$. В этом случае первое (и единственное) значение y, при котором равенство выполняется, это $y = \dfrac{x_1}{x_2}$.

Значит, $\dfrac{x_1}{x_2}$ и будет являться значением операции минимизации на таком наборе.

Итак, $\mu_y(y \cdot x_2 = x_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = 0; \\ \dfrac{x_1}{x_2}, & \text{если } x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \dfrac{x_1}{x_2} \in N; \\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Пример 3. Провести минимизацию функции $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ по второй переменной.

Рассмотрим уравнение $x_1^y = x_2$ **(8)**

Рассмотрим случаи:

а) $x_1 = 0$. Подставляя $y = 0$, на самом первом шаге получаем неопределённое выражение 0^0, значит, операция минимизации при $x_1 = 0$ не определена.

б) $x_1 \neq 0, x_2 = 1$. В этом случае уравнение (8) примет вид $x_1^y = 1$, и при подстановке $y = 0$ равенство будет выполнено. Значит, 0 является результатом операции минимизации на таком наборе.

в) $x_1 = 1, x_2 \neq 1$. В этом случае равенство $1^y = x_2$ ни при каком y не будет выполнено. Значит, операция минимизации на таком наборе не определена.

г) $x_1 > 1, x_2 > 1, \log_{x_1} x_2 \in N$. В этом случае первое (и единственное) значение y, при котором равенство выполняется, это $y = \log_{x_1} x_2$. Значит, $\log_{x_1} x_2$ и будет являться значением операции минимизации на таком наборе.

д) $x_1 > 1, x_2 > 1, \log_{x_1} x_2 \notin N$. В этом случае равенство $x_1^y = x_2$ ни при каком y не будет выполнено. Значит, операция минимизации на таком наборе не определена.

Итак, $\mu_y(x_1^y = x_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 \neq 0\ x_2 = 1; \\ \log_{x_1} x_2, & \text{если } x_1 > 1, x_2 > 1, \log_{x_1} x_2 \in N; \\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Числовая функция называется *частично-рекурсивной*, если она может быть получена из исходных за конечное число шагов с помощью операций суперпозиции, примитивной рекурсии и операции минимизации.

Итак, в нашем курсе теории алгоритмов были рассмотрены три вида вычислимых функций: функции, вычислимые по Тьюрингу, функции, вычислимые по Маркову и частично-рекурсивные функции. Какая связь между этими понятиями?

Теорема о вычислимых функциях.

Множество функций, вычислимых по Тьюрингу, совпадает со множеством функций, вычислимых по Маркову и совпадает со множеством частично-рекурсивных функций.

(Без доказательства).

Вопросы для самопроверки.

1) Докажите в примере 1, что $f(x_1) = x_1!$
2) Всегда ли применение схемы примитивной рекурсии ко всюду определённым функциям даёт всюду определённую функцию?
3) Докажите справедливость равенств в примерах 7 и 8 для минимума и максимума.
4) Всегда ли применение операции минимизации ко всюду определённой функции даёт всюду определённую функцию?
5) Провести минимизацию функции $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ по первой переменной.
6) Минимизируйте функцию $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{x_2} - 0 \cdot x_3$ по каждой из её переменных

Ответы:

2. Да
4. Нет

Математическая логика.

Введём некоторые не вполне строго формализованные понятия.

Высказыванием называется предложение, выраженное в некотором языке, которому однозначно можно приписать значение «*истина*» или «*ложь*».

Например, предложение: «Все подобные треугольники равны» является ложным высказыванием.

Предложение «Множество пар простых чисел, отличающихся на 2, бесконечно» высказыванием, несомненно, является, но в настоящий момент времени неясно, истинно это высказывание или ложно.

Предложение «Да здравствует великий Вождь!», как и большинство лозунгов, высказыванием не является.

Предложение «Абхазия на момент начала апреля 2020 года – состоявшееся независимое государство» считают истинным высказыванием Венесуэла, Республика Науру и ещё несколько стран, большинство же стран мира считают это предложение ложным высказыванием, поэтому это предложение нельзя назвать высказыванием вообще.

Предложение «Фраза, которую я сейчас произношу, ложна» также не является высказыванием, так как попытка приписать ей значение «истина» или «ложь», приводит к противоречию.

Таким образом, отличать высказывания от не высказываний, также, как «ложь» от «истины» мы поручаем человеческой интуиции.

Значение истинности «ложь» будем связывать с константой 0, а «истина» с константой 1.

Булевой функцией называется функция $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, которая может принимать лишь значения 0, 1, и аргументы которой могут принимать лишь значения 0, 1.

Рассмотрим некоторые булевы функции:

$\bar{x}$ - *отрицание*. Произносится « не x »

Для отрицания употребляется также обозначение $\neg x$.

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Булевы функции от двух переменных:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0

$f_1(x,y) = x \cdot y$ - *конъюнкция*, употребляются также обозначения $x \wedge y$, xy и $x \& y$. Произносится « x и y »

$f_2(x,y) = x \vee y$ - *дизъюнкция*. Произносится « x или y »

$f_3(x,y) = x \to y$ - *импликация*, употребляется также обозначение $x \supset y$. Произносится « x влечёт y », «из x следует y », « x является достаточным условием для y », « y является необходимым условием для x ».

$f_4(x,y) = x + y$ - *сложение по модулю два*, употребляется также обозначение $x \oplus y$. Произносится « x плюс y ».

$f_5(x,y) = x \leftrightarrow y$ - *эквиваленция*, употребляется также обозначение $x \sim y$. Произносится « x эквивалентно y », « x равносильно y », « x является необходимым и достаточным условием для y ».

$f_6(x,y) = x \not\to y$ - *запрет*. Произносится « x запрещает y ».

$f_7(x,y) = x \mid y$ - *штрих Шеффера*.

$f_8(x,y) = x \downarrow y$ - *стрелка Пирса*.

Предикатом в логике называется предложение, зависящее от некоторых переменных, которое при фиксировании переменных превращается в истинное или ложное высказывание.

Изложим теорию предикатов в более формализованном виде.

Предикаты.

Предикатом называется функция $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ с областью прибытия {0;1}. В этом случае говорят, что предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ - *n – местный*, а число *n* называют *местностью* предиката.

Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *выполнимым*, если существует набор аргументов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ такой, что $P(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$.

Предикат $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *опровержимым*, если существует набор аргументов $(b_1, b_2, ..., b_n)$ такой, что $Q(b_1, b_2, ..., b_n) = 0$.

Предикат $T(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *тождественно истинным*, если $T(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 1$.

Предикат $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *тождественно ложным*, если $R(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0$.

Пример 1. Пусть $x \in Z, y \in Z$, $R(x, y): \quad (x - 3y > 0)$.

Предикат $R(x, y)$ является выполнимым, т.к.

$R(1, -3) = (1 + 9 > 0) = 1$.

Предикат $R(x, y)$ также является опровержимым, т.к.

$R(0, 5) = (0 - 15 > 0) = 0$.

Пример 2. Пусть $x \in R, y \in R$, $P(x, y): \quad (x^2 + 2y^4 + 1 > 0)$.

Предикат $P(x, y)$ является тождественно истинным, т.к.

$(x^2 + 2y^4 + 1 > 0) \equiv 1$.

Пример 3. Пусть $x \in N, y \in N$, $T(x, y): \quad (1 \vdots (x + y))$.

Предикат $T(x,y)$ является тождественно ложным, т.к. единица не кратна никакой сумме натуральных чисел.

Действия над предикатами.

Так как область прибытия предикатов совпадает с областью прибытия булевых функций, над предикатами возможны все булевы операции: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция, сложение по модулю два, запрет, штрих Шеффера и стрелка Пирса.

Отрицанием предиката $P(x_1,x_2,...,x_n)$ называется предикат $\overline{P(x_1,x_2,...,x_n)}$, который принимает значение 0 на тех и только тех наборах аргументов, на которых предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ принимает значение 1.

Конъюнкцией предикатов $P(x_1,x_2,...,x_n)$ и $Q(x_1,x_2,...,x_n)$ называется предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)\cdot Q(x_1,x_2,...,x_n)$, который принимает значение 1 на тех и только тех наборах аргументов, на которых оба предиката $P(x_1,x_2,...,x_n)$ и $Q(x_1,x_2,...,x_n)$ принимают значение 1.

Дизъюнкцией предикатов $P(x_1,x_2,...,x_n)$ и $Q(x_1,x_2,...,x_n)$ называется предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)\vee Q(x_1,x_2,...,x_n)$, который принимает значение 0 на тех и только тех наборах аргументов, на которых оба предиката $P(x_1,x_2,...,x_n)$ и $Q(x_1,x_2,...,x_n)$ принимают значение 0.

Импликацией предикатов $P(x_1,x_2,...,x_n)$ и $Q(x_1,x_2,...,x_n)$ называется предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)\to Q(x_1,x_2,...,x_n)$, который принимает значение 0 на тех и только тех наборах аргументов $(a_1,a_2,...,a_n)$, на которых $P(a_1,a_2,...,a_n)=1$ и $Q(a_1,a_2,...,a_n)=0$.

Эквиваленцией предикатов $P(x_1,x_2,...,x_n)$ и $Q(x_1,x_2,...,x_n)$ называется предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)\leftrightarrow Q(x_1,x_2,...,x_n)$, который принимает значение 0 на тех и только тех наборах аргументов, на которых

$P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ принимают противоположные значения.

Сложением по модулю два предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) + Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, который принимает значение 1 на тех и только тех наборах аргументов, на которых $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ принимают противоположные значения.

Запретом предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) \nrightarrow Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, который принимает значение 1 на тех и только тех наборах аргументов $(a_1, a_2, ..., a_n)$, на которых $P(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$ и $Q(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$.

Штрихом Шеффера предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) \mid Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, который принимает значение 0 на тех и только тех наборах аргументов, на которых оба предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ принимают значение 1.

Стрелкой Пирса предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) \downarrow Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, который принимает значение 1 на тех и только тех наборах аргументов, на которых оба предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ принимают значение 0.