Теорема о континуальности множества действительных чисел.

Множество действительных чисел имеет мощность континуума.

$$R \sim (0;1) \qquad \textbf{(34)}$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $f(x) = ctg\pi x$. Эта функция каждому аргументу x из интервала $(0;1)$ ставит в соответствие единственное значение $f(x) = ctg\pi x$. И обратно, для каждого действительного числа $y \in R$ найдётся единственный прообраз $\dfrac{arcctg\, y}{\pi} \in (0;1)$ такой, что $f\left(\pi \cdot \dfrac{arcctg\, y}{\pi}\right) = ctg(arcctg\, y) = y$. Следовательно, $f(x)$ – биекция, и континуальность множества R доказана. ■

Булеаном множества A называется множество всех его подмножеств. Булеан множества A обозначается $P(A)$.

Теорема о мощности булеана конечного множества.

Если конечное множество A состоит из n элементов, то его булеан $P(A)$ содержит 2^n различных элементов,

$$|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n \qquad \textbf{(35)}$$

Доказательство.

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $A^* \subseteq A$, то есть $A^* \in P(A)$. .

Поставим в соответствие подмножеству A^* двоичный вектор $e^* = (e_1, e_2, ..., e_n)$ следующим образом: $e_i = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i \in A^*, \\ 0, \text{ если } a_i \notin A^*. \end{cases}$

Например, если $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A^* = \{b, c, f\}$, то $e^* = (0, 1, 1, 0, 0, 1)$.

Построенное соответствие является биекцией между множеством $P(A)$ и множеством $\{0,1\}^n$ двоичных векторов размерности n.

Но, по теореме о количестве различных двоичных наборов размерности n, $|\{0;1\}^n| = 2^n$. Применяя теорему о равномощных конечных множествах, имеем, что $|P(A)| = 2^n$. Теорема доказана. ■

Заметим, что для конечного множества выполнено неравенство $|A|<|P(A)|$, которое примет вид: $n<2^n$.

Вопрос для самостоятельной работы:

Доказать справедливость неравенства $n<2^n$.

Введём понятие сравнения мощностей бесконечных множеств следующим образом:

$$|A|<|B| \Leftrightarrow A \nsim B, \exists_{B^*}(B^* \subset B, A \sim B^*). \qquad \textbf{(36)}$$

Теорема о сравнении мощностей бесконечного множества и его булеана.

Мощность любого бесконечного множества меньше мощности его булеана.

$$|A|<|P(A)|. \qquad \textbf{(37)}$$

Доказательство. Пусть $A=\{a|a\in A\}$. Рассмотрим множество $B^*=\{\{a\}|a\in A\}$. Для каждого a навешивание фигурных скобок даёт единственный результат $\{a\}$, и обратно, для каждого множества $\{a\}$ отбрасывание фигурных скобок приводит к однозначному результату a, следовательно, таким образом устанавливается биекция между множествами A и B^*, причём $B^*\subset P(A)$.

Покажем, что между A и $P(A)$ невозможно установить биекцию. Допустим противное, то есть, такая биекция установлена. Будем элементы множества A обозначать прописными буквами, а соответствующие им при данной биекции подмножества - соответствующими заглавными буквами. Например, если $c\in A$, то соответствовать ему будет подмножество $C\in P(A)$, и будем писать $c\leftrightarrow C$.

Составим множество из всех элементов x множества A, не принадлежащих соответствующим при данной биекции подмножествам $X\in P(A)$, то есть $Y=\{x|x\notin X, x\leftrightarrow X\}$. Но само множество Y является элементом $P(A)$, значит найдётся его прообраз y при данной биекции.

Выясним, является ли y элементом множества Y.

1. Допустим, что $y \in Y$. Но y соответствует Y при данной биекции, значит, должно выполняться условие $y \notin Y$, которое верно для всех элементов из Y, то есть получено противоречие.
2. Допустим, что $y \notin Y$. Но y соответствует Y при данной биекции, значит, y должно быть элементом Y, так как выполняются условия, по которым сформировано множество Y. Противоречие.

   Видим, что в любом случае приходим к противоречию, значит, предположение, что между A и $P(A)$ можно установить биекцию, неверно. Итак, доказано, что $|A|<|P(A)|$. ◻

Отношения.

Отношением, или $n-$*местным отношением* на множестве называется пара $\Phi=(A,G)$, где $A-$*область задания* отношения, $G \subseteq A^n$, а n называется *местностью* отношения.

Если $(a_1, a_2, ..., a_n) \in G$, то говорят, что *элементы* $a_1, a_2, ..., a_n$ *вступают в отношение* Φ.

Если $n=1$, то отношение называется *свойством*.

Если $n=2$, то отношение называется *бинарным* отношением. Если $(x,y)\in G$, то чаще пишут $x\varphi y$.

Если элементы не вступают в отношение Φ, то будем писать $\overline{x\varphi y}$.

Дальше будем рассматривать только бинарные отношения, заданные на одной и той же области.

Операции над отношениями.

Операции над отношениями сводятся к операциям над их графиками:

Объединением отношений $\Phi=(A,G)$ и $\Psi=(A,F)$ будет являться отношение $\Phi\cup\Psi=(A,G\cup F)$, *пересечением* отношений

$\Phi=(A,G)$ и $\Psi=(A,F)$ будет являться отношение $\Phi\cap\Psi=(A,G\cap F)$, *дополнением* отношения $\Phi=(A,G)$ является отношение $\overline{\Phi}=(A,A^2\setminus G)$, и т.д.

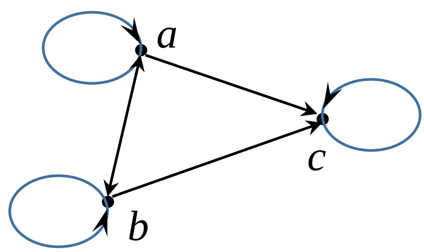
Основные свойства отношений.

1. *Рефлексивность*.

Отношение называется *рефлексивным*, если каждый элемент из области задания отношения вступает в него сам с собой:

$$\forall_{x\in A}(x\varphi x) \qquad \textbf{(38)}$$

Граф рефлексивного отношения при каждой вершине, соответствующей элементу области задания отношения, имеет петлю:



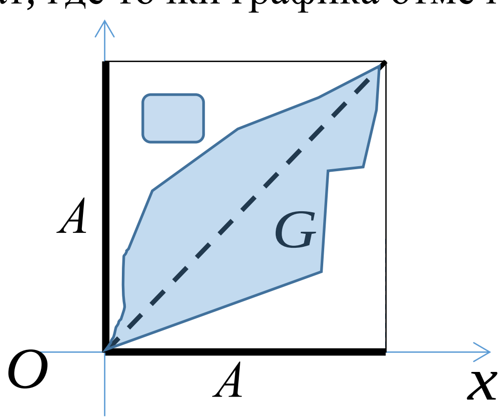
(рис.18)

Диагональю множества A^2 будем называть график Δ_{A^2}, с одинаковыми первыми и вторыми координатами, взятыми из множества A, то есть

$$\Delta_{A^2}=\{(x,x)\,|\,x\in A\}. \qquad \textbf{(39)}$$

Из определения следует, что для рефлексивного отношения выполнено включение $\Delta_{A^2}\subseteq G.$ **(40)**

Проиллюстрируем свойство рефлексивности в декартовой системе координат, где точки графика отмечены заливкой:



(рис.19)

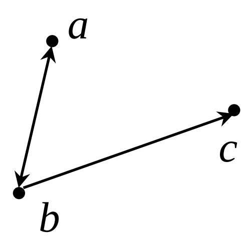
Примером рефлексивного отношения может служить отношение нестрогого включения множеств. Действительно, по формуле (2), $\forall_A (A \subseteq A)$.

2. *Антирефлексивность*.

Отношение называется *антирефлексивным*, если каждый элемент из области задания отношения не вступает в него сам с собой:

$$\forall_{x \in A} (\overline{x \varphi x}) \qquad \textbf{(41)}$$

Граф антирефлексивного отношения не имеет петель ни при какой вершине:

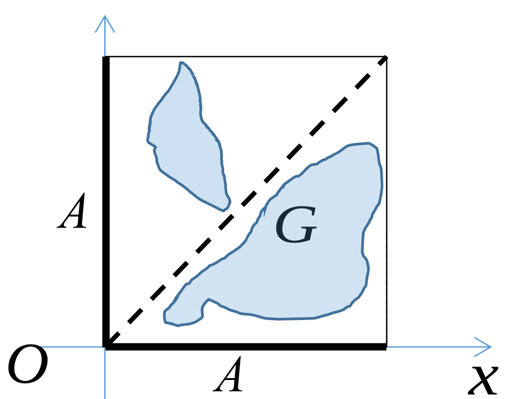


(рис.20)

Из определения следует, что для антирефлексивного отношения выполнено соотношение

$$\Delta_{A^2} \cap G = \varnothing. \qquad \textbf{(42)}$$

Проиллюстрируем свойство антирефлексивности в декартовой системе координат:



(рис.21)

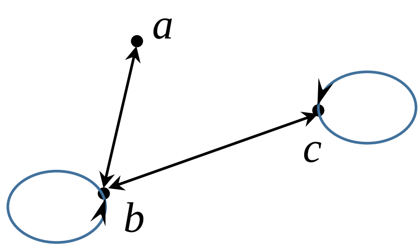
Примером антирефлексивного отношения может служить отношение «быть родным отцом» на множестве людей. Действительно, никакой человек не является родным отцом сам себе.

3. *Симметричность*.

Отношение называется *симметричным*, если выполнена следующая импликация:

$$\forall_{x\in A}\forall_{y\in A}(x\varphi y \to y\varphi x) \qquad \textbf{(43)}$$

В графе симметричного отношения только обоюдоострые стрелки соединяют различные точки:



(рис.22)

Из определения следует, что для симметричного отношения выполнено включение:

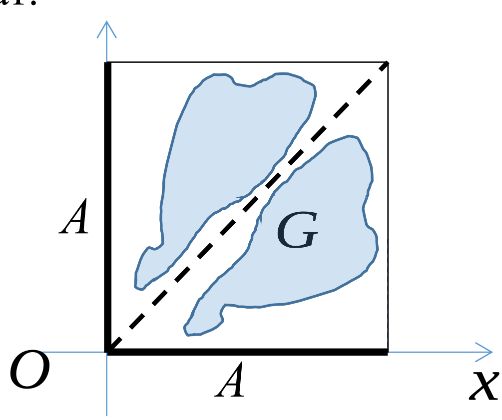
$$G \subseteq G^{-1}. \qquad \textbf{(44)}$$

Вопрос для самостоятельной работы:

Доказать, что для симметричного отношения справедливо не только включение (44), но и равенство (45):

$$G = G^{-1}. \qquad \textbf{(45)}$$

Проиллюстрируем свойство симметричности в декартовой системе координат:



(рис.23)

Примером симметричного отношения может служить отношение φ на множестве действительных чисел: $x\varphi y \Leftrightarrow x+y>2$. Действительно, для любых действительных чисел x и y, из того, что $x+y>2$ следует, что $y+x>2$.

4. *Антисимметричность*.

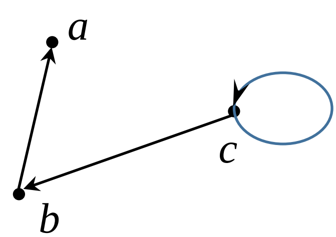
Отношение называется *антисимметричным*, если выполнена следующая импликация:

$$\forall_{x\in A}\forall_{y\in A}(x\varphi y,\ x\neq y \rightarrow \overline{y\varphi x}) \qquad \textbf{(46)}$$

Это определение можно записать в равносильной форме:

$$\forall_{x\in A}\forall_{y\in A}(x\varphi y,\ y\varphi x \rightarrow x=y) \qquad \textbf{(47)}$$

В графе антисимметричного отношения отсутствуют обоюдоострые стрелки:

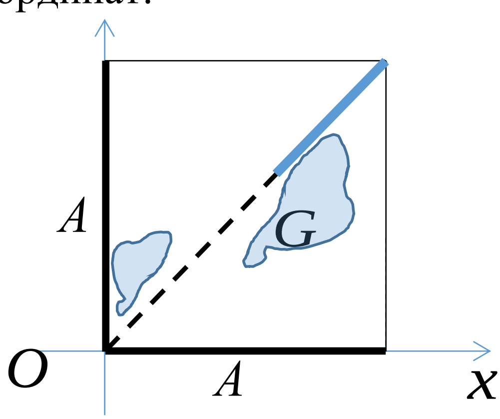


(рис.24)

Из определения (46) следует, что для антисимметричного отношения выполнено включение:

$$G\cap G^{-1}\subseteq \Delta_{A^2} \qquad \textbf{(48)}$$

Проиллюстрируем свойство антисимметричности в декартовой системе координат:



(рис.25)

Примером антисимметричного отношения может служить отношение «делиться без остатка» на множестве натуральных чисел: $x\varphi y \Leftrightarrow x \vdots y$. Действительно, для любых натуральных чисел x и y, из того, что $x \vdots y$ и $y \vdots x$ следует, что $x = y$.

Вопрос для самостоятельной работы:

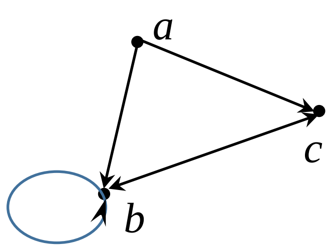
Привести пример отношения, являющегося одновременно симметричным и антисимметричным.

5. *Транзитивность*.

Отношение называется *транзитивным*, если выполнена следующая импликация:

$$\forall_{x\in A}\forall_{y\in A}\forall_{z\in A}(x\varphi y, y\varphi z \rightarrow x\varphi z) \qquad \textbf{(49)}$$

В графе транзитивного отношения вместе с цепочкой дуг ab и bc должна присутствовать и дуга ac:

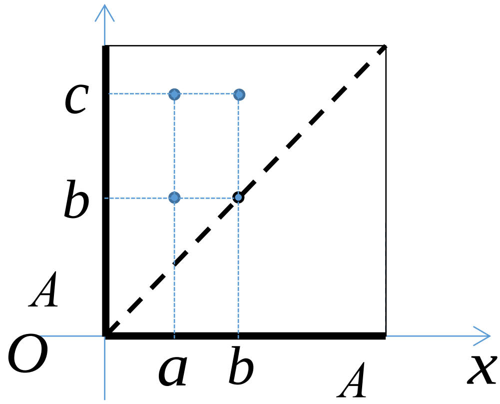


(рис.26)

Из определения следует, что для транзитивного отношения выполнено включение:

$$G \circ G \subseteq G. \qquad \textbf{(50)}$$

График транзитивного отношения в декартовой системе координат вместе с точками (a,b)и (b,c)должен содержать и точку (a,c), которая является четвёртой вершиной прямоугольника, в котором точкам (a,b) и (b,c) соответствуют противоположные вершины прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям, а третья вершина (b,b)лежит на диагонали квадрата:



(рис.27)

Примером транзитивного отношения может служить отношение $\leq$ на множестве целых чисел. Действительно, для любых целых чисел x, y и z из того, что $x \leq y$ и $y \leq z$ следует, что $x \leq z$.

Вопрос для самостоятельной работы:

Найти ошибку в доказательстве утверждения:

Из симметричности и транзитивности отношения вытекает его рефлексивность.

Доказательство.

$$\forall_x \forall_y (x\varphi y \xrightarrow{\text{симметричность}} x\varphi y, y\varphi x \xrightarrow{\text{транзитивность}} x\varphi x).$$

Рефлексивность «доказана». ■

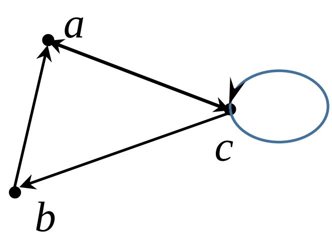
Привести пример симметричного, транзитивного, но не рефлексивного отношения.

6. *Связность*.

Отношение называется *связным*, если выполнена следующая импликация:

$$\forall_{x\in A} \forall_{y\in A} (x \neq y \rightarrow x\varphi y \vee y\varphi x) \quad \textbf{(51)}$$

В графе связного отношения любые две различные вершины соединены стрелкой.

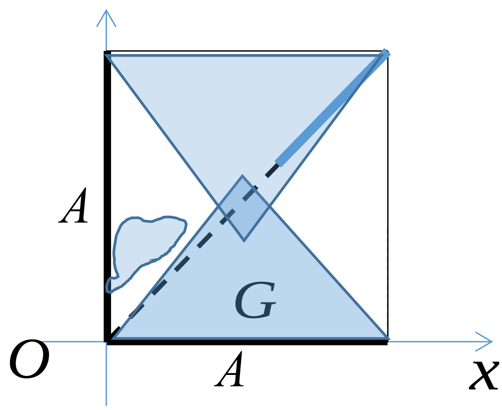


(рис.28)

Из определения (50) следует, что для связного отношения выполнено включение:

$$A^2 \setminus \Delta_{A^2} \subseteq G \cup G^{-1} \qquad \textbf{(52)}$$

Проиллюстрируем свойство связности в декартовой системе координат:



(рис.29)

Примером связного отношения может служить отношение «меньше» на множестве действительных чисел:
Действительно, для любых действительных чисел $x \neq y$ выполнено $x < y$ или $y < x$.

Пример. Пусть $A-$ множество жителей нашего города, для каждого из которых можно однозначно идентифицировать его пол. Рассмотрим на этом множестве отношение «быть тёщей».

Уточним: пусть $x \varphi y$ означает, что $x-$ женского пола, $y-$ мужского пола и y состоит в законном браке с родной дочерью x.

Выясним, какими из перечисленных выше шести основных свойств обладает данное отношение.

1. Отношение не является рефлексивным, так как неверно, что каждый житель нашего города является тёщей сам себе;

2. Отношение является антирефлексивным, так как каждый житель нашего города не является тёщей сам себе;

$\overline{3}$. Отношение не является симметричным, так как из того, что x—тёща для y не следует, что y – тёща для x.

4. Отношение является антисимметричным, так как если x— тёща для y и x, y – разные люди, то y не является тёщей для x;

5. Отношение является транзитивным, так не существует трёх жителей x, y, z таких, что x—тёща для y, y – тёща для z, но x не является тёщей для z;

$\overline{6}$. Отношение не является связным, так найдутся два таких различных жителя, что ни x не является тёщей для y, ни y не является тёщей для x.