Блок №2

Определители

Перестановки и подстановки

Пусть дан набор чисел (1,2,3…n)

Определение. Набор чисел ($a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$) называется ***перестановкой*** (1,2,3…n), если все числа a_i различны между собой и каждое число есть число от 1 до n.

Пример. (1,2,3) - (2,3,1) – (3,1,2)

Инверсии и четность

Определение. Перестановка обладает ***инверсией***, если для $i<j$ $a_i>a_j$.

Определение. Перестановка называется ***четной***, если она имеет четное количество инверсий, и ***нечетной***, если она имеет нечетное количество инверсий.

Транспозиции

Определение. ***Транспозиция*** – это преобразование при котором два числа меняются местами, а остальные остаются на месте.

Пример. (4,2,1,3) -> (4,3,1,2)

Свойства перестановок.

Теорема 1. Если в перестановке произвести одну транспозицию, то ее четность изменится на противоположную.

Теорема 2. Пусть даны две перестановки. От одной можно перейти к другой с помощью конечного числа транспозиций.

Теорема 3. Пусть $N>1$. Тогда четных перестановок столько же, сколько нечетных.

Подстановки

Определение. Подстановка – это взаимно однозначное соответствие между двумя перестановками.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Определение. Четность подстановки – это сумма четностей перестановок в первой и второй строке.

Определитель n-ного порядка

Определение. ***Определителем n-ного порядка*** называется сумма n! слагаемых, каждое из которых есть произведение n чисел, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Это произведение входит в сумму со знаком +, если подстановка четная, и со знаком -, если подстановка нечетная.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} (-1)^{\nu(\sigma)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$$

Свойства определителя.

1. Если в определителе одна строка или один столбец состоят целиком из нулей, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Свойства определителя

Определение. Пусть А квадратная матрица nxn. Матрица A^t называется транспонированной к матрице А, если она получена из матрицы А отражением элементов относительно главной диагонали (строки записываются в столбцы)

2. Определитель при транспонировании не изменяется.

$$\det A = \det A^t$$

- Замечание. Поскольку определитель при транспонировании не меняется то все действия со строками можно делать и со столбцами, то есть все свойства можно формулировать для строк и для столбцов.

Свойства определителя.

3. Если в определителе поменять местами две строки (два столбца), то определитель поменяет знак.

Свойства определителя

4. Если в определители две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то он равен нулю.

Свойства определителя.

5. Если в определителе элементы какой либо строки (столбца) умножить на число, то и весь определитель умножится на это число.

Свойства определителя.

6. Если в определителе есть две пропорциональные строки(столбца), то он равен нулю.

Свойства определителя.

7. Если в определителе элементы какой-либо строки (столбца) являются суммой двух слагаемых, то и определитель равен сумме двух определителей.

Свойства определителя.

8. Если в определителе одна из строк (столбцов) является линейной комбинацией двух других строк (столбцов), то определитель равен нулю.

Свойства определителя.

9. Если в определителе к какой-либо строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию других строк(столбцов), то он не изменится.

Минор и дополнительный минор

- Определение. Зафиксируем в матрице nxn k строк и k столбцов (k<=n)***. Минором k-того порядка*** называется определитель матрицы, образованной элементами на пересечении зафиксированных строк и столбцов (обозначим его M)
- Определение. Дополнительным минором называется определитель матрицы порядка n-k , который остается после вычеркивания k строк и k столбцов (обозначим его M’)

Алгебраическое дополнение

- Определение. ***Алгебраическое дополнение*** к минору М: $A_M = (-1)^S M'$, где S – это сумма строк и столбцов, в которых расположен минор М.

Пример.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

$$M_{23}^{34} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} \qquad M' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 14 \end{vmatrix}$$

$$A = (-1)^{2+3+3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 14 \end{vmatrix}$$

Если k=1

Зафиксисруем строку с номером i и столбец с номером j.

Минор первого порядка Mij=a_{ij}

Дополнительный минор M’ij – это определитель, который получен вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Алгебраическое дополнение: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M'_{ij}$

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = a_{23} = 7 - \textit{минор первого порядка}$$

$$M'_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} - \textit{дополнительный минор}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} - \textit{алгебраическое дополнение}$$

ТРИ ТЕОРЕМЫ О ВЫЧИСЛЕНИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ.

Три теоремы

Теорема 1. Пусть в i-той строке det A все элементы равны нулю, кроме элемента a_{ij}. Тогда:

detA=aijAij

Аналогичную теорему можно сформулировать для столбца:

Пусть в j-том стролбце det A все элементы равны нулю, кроме элемента a_{ij}. Тогда:

detA=aijAij

Три теоремы

Теорема 2. Зафиксируем в определителе строку с номером i. Тогда определитель равен сумме произведений элементов i-той строки на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(номер i зафиксирован)

Три теоремы.

Теорема 2 (для столбца) . Зафиксируем в определителе столбец с номером j. Тогда определитель равен сумме произведений элементов j-того стролбца на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(номер j зафиксирован)

Три теоремы.

Теорема 3. Сумма произведений элементов i-той строки на алгебраические дополнения k-той строки равна нулю (i≠k)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0 \quad (i \neq k)$$

Сумма произведений элементов j-того стролбца на алгебраические дополнения k-того стролбца равна нулю (j≠k)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0 \qquad (k \neq j)$$

Общая формула:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} \det A, \ \text{если} \ k = i \\ 0, \ \text{если} \ k \neq i \end{cases}$$

Теорема Лапласа

Теорема. Пусть в определителе порядка n выбрано произвольно k строк ($k<n$). Тогда определитель равен сумме произведений миноров порядка k, стоящих в этих строках, на их алгебраические дополнения.

Следствие из теоремы Лапласа.

(вычисление блочно-диагонального определителя)

$$\det A = \begin{vmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \det A_1 \cdot \det A_2$$

Определитель Вандермонда

Определитель вида

$$\Delta_n(x_1, x_2 \ldots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вандермонда в честь французского математика Александра Теофила Вандермонда

Определиитель Вандермонда второго порядка

$$\Delta_2(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$$

Определитель Вандермонда третьего порядка

$$\Delta_3(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2\\ 0 & x_3-x_2 & x_3^2-x_2^2\end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_2)\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 0 & 1 & x_2+x_1\\ 0 & 1 & x_3+x_2\end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_2)\begin{vmatrix}1 & x_2+x_1\\ 1 & x_3+x_2\end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)$$

Формула для n

$$\Delta_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_3)\ldots(x_n - x_1) =$$

$$= \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$