Пример: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, x_1 – произв., $x_1 > 0$

рекуррентное задание посл-ти.

$(x_n)\downarrow$, огр. сн.

$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) > 0$. Ан-но, $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_{n-1}}\right) \geqslant$$

$$\left\{ b > 0,\quad b + \frac{1}{b} \geqslant 2 \Leftrightarrow b^2 + 1 \geqslant 2b \Leftrightarrow (b-1)^2 \geqslant 0 \right\}$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot 2 = \sqrt{a}, \qquad x_n \geqslant \sqrt{a} \quad \forall n$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leq$$

$$x_n \geq \sqrt{a} \iff x_n^2 \geq a \iff \frac{1}{x_n^2} \leq \frac{1}{a}$$

$$\leq \frac{1}{2}(1+1) = 1, \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 \ \forall n \overset{x_n > 0}{\iff}$$

$$\iff x_{n+1} \leq x_n \ \forall n \Rightarrow (x_n)\downarrow$$

По т. Вейерштрасса (x_n) сх-ся, т.е. $\exists x \in \mathbb{R}$:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \overset{x \geq \sqrt{a}}{\iff} x = \sqrt{a}.$$