Тишин В.В.

Машина Тьюринга.

Пример. Написать программу машины Тьюринга, применимую ко всем словам вида $x_1x_2\ldots x_n$, где $x_i\in\{a;b\}$, $i=1,2,\ldots,n$, $n\geq 2$, так, чтобы в результате получилось бы слово b, если $x_1=a$, и слово $x_1x_2\ldots x_{n-1}$, если $x_1=b$.

Для упрощения записи внутренние состояния будем обозначать числами 1,2,…

Рассмотрим случаи:

1) $x_1=a$.

Первоначальная конфигурация будет иметь вид: $\underset{1}{a}x_2\ldots x_n$. В случае, когда первый символ слова – буква a, нужно заменить её на b, а остальные символы исходного слова стереть.

После замены a на b нужно перейти в новое состояние 2 и сдвинуться вправо. Опишем это с помощью команды $a1\to b\Pi 2$.

Получаем конфигурацию $b\underset{2}{x_2}\ldots x_n$. Затем стираем все оставшиеся символы с помощью команд $a2\to\lambda\Pi 2$, $b2\to\lambda\Pi 2$. Получим последовательность конфигураций $b\lambda\underset{2}{x_3}\ldots x_n$, $b\lambda\lambda\underset{2}{x_4}\ldots x_n,\ldots,$ $b\lambda\lambda\ldots\lambda\underset{2}{x_n}$, $b\lambda^{n-1}\underset{2}{\lambda}$. Все символы слова, кроме первого, стёрты, пора останавливать работу машины Тьюринга с помощью команды $\lambda 2\to\lambda H0$. Получаем заключительную конфигурацию $b\lambda^{n-1}\underset{0}{\lambda}$.

2) $x_1=b$.

Первоначальная конфигурация будет иметь вид: $\underset{1}{b}x_2\ldots x_n$. В случае, когда первый символ слова – буква b, перейдём в новое состояние 3 и сдвинемся вправо: $b1\to b\Pi 3$. Получаем конфигурацию $b\underset{3}{x_2}\ldots x_n$.

Теперь пройдём до конца слова, не меняя его, с помощью команд $a3\to a\Pi 3$, $b3\to b\Pi 3$. Получим последовательность конфигураций $b\,x_2\underset{3}{x_3}\ldots x_n$, $bx_2x_3\underset{3}{x_4}\ldots x_n,\ldots,bx_2\ldots x_n\underset{3}{\lambda}$. Слово пройдено до конца.

Делаем шаг влево: $\lambda 3 \to \lambda Л4$, получаем конфигурацию $b\,x_2 \dots \underset{4}{x_n}$.

Стираем x_n и заканчиваем работу с помощью команд $a4 \to \lambda H0$, $b4 \to \lambda H0$. Итоговая конфигурация: $b\,x_2 \dots \underset{0}{x_{n-1}}$.

Запишем программу машины Тьюринга в виде таблицы:

A\S	1	2	3	4
λ	-	$\lambda H0$	$\lambda Л4$	-
a	$bП2$	$\lambda П2$	$aП3$	$\lambda H0$
b	$bП3$	$\lambda П2$	$bП3$	$\lambda H0$

Проверим работу построенной машины Тьюринга над словами, начинающимися с разных букв. Запишем последовательности соответствующих конфигураций:

$\underset{1}{a}bba, b\underset{2}{b}ba, b\lambda \underset{2}{b}a\ \ b\lambda\lambda \underset{2}{a}\ , b\lambda\lambda\lambda \underset{2}{\lambda}\ \ b\lambda\lambda\lambda \underset{0}{\lambda}$.

$\underset{1}{b}aabab,\ b\underset{3}{a}abab,\ ba\underset{3}{a}bab,\ baa\underset{3}{b}ab,\ baab\underset{3}{a}b,\ baaba\underset{3}{b},\ baabab\underset{3}{\lambda},$
$baaba\underset{4}{b},\ baaba\underset{0}{\lambda}$.

Видим, что машина Тьюринга работает правильно.

В дальнейшем будем рассматривать функции многих переменных, каждый аргумент которых принимает значения из расширенного множества натуральных чисел $N_0 = \{0,1,2,\dots,n,\dots\}$, и сама функция принимает значения только из этого множества.

Числовой функцией называется функция вида $f: N_0^n \to N_0$.

Для изображения на ленте машины Тьюринга любого неотрицательного числа k будем использовать $k+1$ единицу. Эту договорённость мы принимаем для того, чтобы отличать изображение числа 0 от изображения пустой ячейки. Набор чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ будем изображать на ленте машины Тьюринга в виде слова $1^{a_1+1}\lambda 1^{a_2+1}\lambda \dots \lambda 1^{a_n+1}$.

Числовая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *вычислимой по Тьюрингу*, если существует машина Тьюринга, применимая ко всем словам вида $1^{x_1+1}\lambda 1^{x_2+1}\lambda \ldots \lambda 1^{x_n+1}$, результатом работы которой над таким словом будет слово $1^{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+1}$.

Другими словами, для функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, вычислимой по Тьюрингу, найдётся соответствующая машина Тьюринга, которая изображение $1^{x_1+1}\lambda 1^{x_2+1}\lambda \ldots \lambda 1^{x_n+1}$ произвольного набора аргументов $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ преобразует в изображение $1^{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+1}$ значения функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ на этом наборе.

Пример. Доказать вычислимость по Тьюрингу функции $f(x,y,z)=x+y+z$.

Напишем программу машины Тьюринга, которая любое слово вида $1^{x+1}\lambda 1^{y+1}\lambda 1^{z+1}$ преобразует в слово $1^{x+y+z+1}$.

Начальная конфигурация должна иметь вид $\underset{1}{1}^{x+1}\lambda 1^{y+1}\lambda 1^{z+1}$. Переместим считывающее устройство вправо с помощью команды $11\to 1П1$.

Получим последовательность конфигураций $\underset{1}{1}^{x+1}\lambda 1^{y+1}\lambda 1^{z+1}$, $1\underset{1}{1}^{x}\lambda 1^{y+1}\lambda 1^{z+1}$, $11\underset{1}{1}1^{x-1}\lambda 1^{y+1}\lambda 1^{z+1},\ldots,1^{x+1}\underset{1}{\lambda}1^{y+1}\lambda 1^{z+1}$.

Заменим разделяющий пустой символ единицей, перейдём в новое состояние 2, и продвинемся вправо до следующего разделяющего символа с помощью команд: $\lambda 1\to 1П2, 12\to 1П2$, получим последовательность конфигураций $1^{x+1}1\underset{2}{1}1^{y}\lambda 1^{z+1}, 1^{x+3}\underset{2}{1}1^{y-1}\lambda 1^{z+1},\ldots,$ $1^{x+y+3}\underset{2}{\lambda}1^{z+1}$.

Заменим последний разделяющий пустой символ единицей, перейдём в новое состояние 3, и продвинемся вправо до конца слова с помощью команд: $\lambda 1\to 1П3, 13\to 1П3$, получим последовательность конфигураций $1^{x+y+4}\underset{3}{1}1^{z},\ldots,1^{x+y+z+5}\underset{3}{\lambda}$. Для изображения числа $x+y+z$ требуется $x+y+z+1$ единица, поэтому нужно двигаться влево и стирать лишние 4 единицы. Это можно сделать с помощью команд: $\lambda 3\to \lambda Л4, 14\to \lambda Л5, 15\to \lambda Л6, 16\to \lambda Л7, 17\to \lambda Н0$.

Соответствующая последовательность конфигураций: $1^{x+y+z+4}\underset{4}{1}\lambda$, $1^{x+y+z+3}\underset{5}{1}\lambda, 1^{x+y+z+2}\underset{6}{1}\lambda, 1^{x+y+z+1}\underset{7}{1}\lambda, 1^{x+y+z+1}\underset{0}{\lambda}$. Получено изображение суммы $x+y+z$, работа машины Тьюринга закончена.

Запишем программу машины Тьюринга в виде таблицы:

A\S	1	2	3	4	5	6	7
λ	$1П2$	$1П3$	$\lambda Л4$	–	–	–	–
1	$1П1$	$1П2$	$1П3$	$\lambda Л5$	$\lambda Л6$	$\lambda Л7$	$\lambda H0$

Проверим работу машины Тьюринга над изображением набора аргументов (0,2,1), записываемом на ленте в виде слова $1\lambda111\lambda1$. Получим последовательность конфигураций:

$\underset{1}{1}\lambda111\lambda11$, $1\underset{1}{\lambda}111\lambda11$, $11\underset{2}{1}11\lambda11$, $111\underset{2}{1}1\lambda11$, $1111\underset{2}{1}\lambda11$, $1^5\underset{2}{\lambda}11$, $1^6\underset{3}{1}1$, $1^7\underset{3}{1}$, $1^8\underset{3}{\lambda}$, $1^7\underset{4}{1}\lambda$, $1^6\underset{5}{1}\lambda$, $1^5\underset{6}{1}\lambda$, $1^4\underset{7}{1}\lambda$, $1^4\underset{0}{\lambda}$.

Получено изображение числа 3.

С другой стороны, $f(0,2,1)=0+2+1=3$.

Видим, что изображение набора аргументов (0,2,1) построенная машина Тьюринга обработала правильно.

Пример. Написать формулу функции $f(x,y)$, вычисляемой с помощью машины Тьюринга, заданной программой

A\S	1	2	3	4
λ	$1П2$	$1Л3$	$1П4$	$1H0$
1	$1П1$	$1П2$	$1Л3$	$1П4$

Запишем последовательность конфигураций, возникающих при работе машины Тьюринга над словом $1^{x+1}\lambda1^{y+1}$:

$\underset{1}{1}1^x\lambda1^{y+1}$, $1\underset{1}{1}1^{x-1}\lambda1^{y+1}$, ..., $1^{x+1}\underset{1}{\lambda}1^{y+1}$, $1^{x+2}\underset{2}{1}1^y$, $1^{x+3}\underset{2}{1}1^{y-1}$, ..., $1^{x+y+3}\underset{2}{\lambda}$, $1^{x+y+2}\underset{3}{1}1$, $\underset{3}{\lambda}1^{x+y+4}, \underset{4}{1}11^{x+y+3}, 1^{x+y+5}\underset{4}{\lambda}, 1^{x+y+5}\underset{0}{1}$.

Получено слово, состоящее из $x+y+6$ единиц, которое является изображением числа $x+y+5$.

Проверим работу машины Тьюринга над изображением набора аргументов (0,1), записываемом на ленте в виде слова $1\lambda 11$. Получим последовательность конфигураций:

$\underset{1}{1}\lambda 11, 1\underset{1}{\lambda}11, 11\underset{2}{1}1, 111\underset{2}{1}, 1111\underset{2}{\lambda}, 111\underset{3}{1}1, 11\underset{3}{1}11, 1\underset{3}{1}111, \underset{3}{1}1111, \underset{3}{\lambda}11111, 1\underset{4}{1}1^4,$
$11\underset{4}{1}1^3, 1^3\underset{4}{1}1^2, 1^4\underset{4}{1}1, 1^5\underset{4}{1}, 1^6\underset{4}{\lambda}, 1^6\underset{0}{1}$. Получено слово, состоящее из 7 единиц, которое является изображением числа 6, которое является значением функции $x+y+5$ на наборе (0,1).

Кодировка машин Тьюринга.

Пусть дана машина Тьюринга $T=(A,S,\mu,\nu,\tau)$, где $A=\{\lambda,a_1,a_2,...,a_n\}$, $S=\{s_0,s_1,s_2,...,s_m\}$. Покажем один из возможных способов кодировки машины T в алфавите {*; 1}.

Закодируем символы входного алфавита, символы внутренних состояний и символы управления движением считывающего устройства.

Пусть $N(П)=1$, $N(Л)=11$, $N(Н)=1^3$,

$N(\lambda)=1^4$, $N(a_1)=1^5$, $N(a_2)=1^6$, …, $N(a_n)=1^{n+4}$,

$N(s_0)=1^{n+5}$, $N(s_1)=1^{n+6}$, …, $N(s_m)=1^{n+m+5}$.

Команде $a_p s_i \to a_j D s_r$ поставим в соответствие слово $C(a_p s_i)=N(a_p)*N(s_i)*N(a_j)*N(D)*N(s_r)$, называемое *кодом команды*.

Кодом машины T назовём слово

$$N(T)=C(\lambda s_1)**C(a_1 s_1)**C(a_n s_1)**C(\lambda s_2)**...**C(a_n s_m)$$

Для каждой машины Тьюринга можно построить соответствующий код и обратно, по каждому коду можно однозначно восстановить программу машины Тьюринга.

Машина Тьюринга называется *самоприменимой*, если она применима к собственному коду. В противном случае она называется *несамоприменимой*.

Алгоритмически неразрешимые проблемы.

Зададимся вопросом: существует ли алгоритм, который для любой машины Тьюринга выясняет: является машина самоприменимой или несамоприменимой? Так как в данном разделе под алгоритмом мы понимаем машину Тьюринга, то это приводит нас к постановке *проблемы самоприменимости*.

Проблема самоприменимости:

Существует ли машина Тьюринга *L*, применимая к коду *N*(*T*) произвольной машины Тьюринга *T*, такая, что в случае, если *T* – самоприменимая машина, то заключительная конфигурация машины *L* имеет вид $\underset{s_0}{1}$, а если *T* – несамоприменима, то заключительная конфигурация машины *L* имеет вид $\underset{s_0}{\lambda}$?

Теорема об алгоритмической неразрешимости проблемы самоприменимости.

Не существует машины Тьюринга *L*, решающей проблему самоприменимости.

Доказательство. Докажем теорему от противного.

Допустим, нашлась машина Тьюринга *L*, решающая проблему самоприменимости. Построим на базе этой машины новую машину Тьюринга L'следующим образом: все внутренние состояния и команды машины *L* объявляются также внутренними состояниями и командами L', но множество внутренних состояний L' дополнено состоянием $s_0^{'}$, которое объявляется заключительным состоянием машины L', а во множество команд машины L' добавляем ещё две команды: $1s_0 \to 1Hs_0$; $\lambda s_0 \to \lambda H s_0^{'}$.

Рассмотрим процесс работы машины L' над кодами самоприменимых и несамоприменимых машин.

Пусть машина *T* несамоприменима. Запускаем L' над словом *N*(*T*). Так как вначале исполняются все команды машины *L*, решающей проблему самоприменимости, мы приходим к конфигурации $\underset{s_0}{\lambda}$, а после применения команды $\lambda s_0 \to \lambda H s_0^{'}$ получаем конфигурацию

$\underset{s_0'}{\lambda}$. Машина перешла в своё заключительное состояние, значит она применима к коду $N(T)$ несамоприменимой машины T.

Пусть машина T самоприменима. Запускаем L' над словом $N(T)$. Исполняя команды машины L, мы приходим к конфигурации $\underset{s_0}{1}$, а после исполнения команды $1s_0 \to 1Hs_0$ получаем ту же конфигурацию $\underset{s_0}{1}$. Продолжая исполнять команду $1s_0 \to 1Hs_0$ мы будем получать одну и ту же конфигурацию $\underset{s_0}{1}$, и машина L' никогда не перейдёт в своё заключительное состояние s_0', значит L' неприменима к коду $N(T)$ самоприменимой машины T.

Итак, мы выяснили, что машина Тьюринга L' обладает свойствами:

1) L' применима к кодам несамоприменимых машин;
2) L' не применима к кодам самоприменимых машин.

Запустим машину L' над её собственным кодом $N(L')$.

Рассмотрим возможные результаты работы машины L' над своим кодом $N(L')$.

а) Машина L' не переходит в своё заключительное состояние s_0', значит, машина L' несамоприменима, значит, она не применима к коду несамоприменимой машины (L'), что противоречит свойству 1);

б) Машина L' переходит в своё заключительное состояние s_0', значит, машина L' самоприменима, значит, она применима к коду самоприменимой машины (L'), что противоречит свойству 2).

Каждая машина Тьюринга либо самоприменима, либо нет, и это определяется результатом работы машины над её собственным кодом. Но для машины L' и предположение о её самоприменимости, и предположение о ей несамоприменимости приводит к противоречию. Источник противоречия – предположение о существовании машины Тьюринга L, решающей проблему самоприменимости. Значит, такой машины L не существует, и теорема доказана. ◻