Тишин В.В.

Коммутативные свойства кванторов.

Рассмотрим вопрос: меняется ли предикат при перестановке местами кванторов? Ответ на этот вопрос зависит от того, одноимённые эти кванторы или разноимённые.

Теорема о перестановке одноимённых кванторов.

Пусть дан предикат $P(x, y, z_1, ..., z_n)$. Одноимённые кванторы можно переставлять местами, то есть справедливы формулы (3) и (4):

$$\forall_x \forall_y P(x, y, z_1, ..., z_n) = \forall_y \forall_x P(x, y, z_1, ..., z_n) \quad \textbf{(3)}$$

$$\exists_x \exists_y P(x, y, z_1, ..., z_n) = \exists_y \exists_x P(x, y, z_1, ..., z_n) \quad \textbf{(4)}$$

Доказательство.

Возьмём произвольный набор $(b_1, b_2, ..., b_n)$, на котором предикат $\forall_x \forall_y P(x, y, z_1, ..., z_n)$ принимает значение 1:

$\forall_x \forall_y P(x, y, b_1, ..., b_n) = 1$. По определению навешивания квантора общности, это равносильно тому, что $\forall_y P(x, y, b_1, ..., b_n) \equiv 1$ относительно переменной x, но на основании теоремы о тождественной истинности предиката, это равносильно тому, что $P(x, y, b_1, ..., b_n) \equiv 1$ относительно переменных x и y. На основании теоремы о тождественной истинности предиката, это равносильно тому, что $\forall_x P(x, y, b_1, ..., b_n) \equiv 1$ относительно переменной y. И, наконец, на основании определения навешивания квантора общности, это равносильно тому, что $\forall_y \forall_x P(x, y, b_1, ..., b_n) = 1$ Таким образом доказано, что множество единичных наборов левой и правой части соотношения (3) совпали, а, значит, и доказана формула (3).

Доказательство формулы (3) можно кратко представить в виде цепочки равносильностей:

$$\forall_x \forall_y P(x, y, b_1, ..., b_n) = 1 \Leftrightarrow \forall_y P(x, y, b_1, ..., b_n) \equiv 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ P(x,y,b_1,...,b_n)\equiv 1 \Leftrightarrow\ \forall_x P(x,y,b_1,...,b_n)\equiv 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall_y\forall_x P(x,y,b_1,...,b_n)=1.$$

Докажем формулу (4).

Возьмём произвольный набор $(c_1,c_2,...,c_n)$, на котором предикат $\exists_x\exists_y P(x,y,z_1,...,z_n)$ принимает значение 0:

$\exists_x\exists_y P(x,y,c_1,...,c_n)=0$. По определению навешивания квантора общности, это равносильно тому, что $\exists_y P(x,y,c_1,...,c_n)\equiv 0$ относительно переменной *x*, но на основании теоремы о тождественной ложности предиката, это равносильно тому, что $P(x,y,c_1,...,c_n)\equiv 0$ относительно переменных *x* и *y*. На основании теоремы о тождественной ложности предиката, это равносильно тому, что $\exists_x P(x,y,c_1,...,c_n)\equiv 0$ относительно переменной *y*. И, наконец, на основании определения навешивания квантора существования, это равносильно тому, что $\exists_y\exists_x P(x,y,c_1,...,c_n)=0$.

Доказательство формулы (4) можно кратко представить в виде цепочки равносильностей: $\exists_x\exists_y P(x,y,c_1,...,c_n)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \exists_y P(x,y,c_1,...,c_n)\equiv 0 \Leftrightarrow\ P(x,y,c_1,...,c_n)\equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \exists_x P(x,y,c_1,...,c_n)\equiv 0 \Leftrightarrow\ \exists_y\exists_x P(x,y,c_1,...,c_n)=0.$$

Таким образом доказано, что множество нулевых наборов левой и правой части соотношения (4) совпали, значит, доказана формула (4), а вместе с ней и вся теорема. ■

Замечание. Теорема справедлива для любого количества одноимённых кванторов.

Если для предикатов $P(x_1,x_2,...,x_n)$ и $Q(x_1,x_2,...,x_n)$ является тождественно-истинной импликация $P(x_1,x_2,...,x_n)\to Q(x_1,x_2,...,x_n)$, то будем говорить, что предикат $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ является *следствием* предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пример 2. Рассмотрим предикат $P(x, y, z) : (x + y = z)$, где $x, y, z -$ натуральные числа. Рассмотрим высказывание, полученное из предиката P с помощью операций квантификации:

$$\forall_x \forall_y \exists_z P(x, y, z) = \forall_x \forall_y \exists_z (x + y = z) = 1.$$

Действительно, это высказывание истинно, так как для любых двух натуральных чисел найдётся натуральное число, равное их сумме.

Переставим кванторы местами:

$$\exists_z \forall_x \forall_y P(x, y, z) = \exists_z \forall_x \forall_y (x + y = z) = 0.$$

Действительно, это высказывание ложно, так как не существует такого натурального числа, который являлся бы суммой для любых двух натуральных чисел.

Этот пример показывает, что в общем случае перестановка разноимённых кванторов даёт предикат, отличный от исходного. Но тем не менее связь между этими предикатами есть, что и является содержанием следующей теоремы.

Теорема о перестановке разноимённых кванторов.

Пусть дан предикат $P(x, y, z_1, ..., z_n)$. Следующая импликация является тождественно-истинной формулой:

$$\exists_x \forall_y P(x, y, z_1, ..., z_n) \to \forall_y \exists_x P(x, y, z_1, ..., z_n) \equiv 1 \qquad \textbf{(5)}$$

Другими словами, предикат $\forall_y \exists_x P(x, y, z_1, ..., z_n)$ является следствием предиката $\exists_x \forall_y P(x, y, z_1, ..., z_n)$.

Доказательство.

Докажем эту от противного: допустим, на некотором наборе $(b_1, b_2, ..., b_n)$ импликация оказывается неверной. Значит, на этом наборе посылка импликации истинна, а заключение – ложно, то есть имеет место система $\begin{cases} \exists_x \forall_y P(x,y,b_1,...,b_n)=1 \\ \forall_y \exists_x P(x,y,b_1,...,b_n)=0 \end{cases}$.

Запишем цепочку импликаций:

$$\begin{cases} \exists_x \forall_y P(x,y,b_1,...,b_n)=1 \\ \forall_y \exists_x P(x,y,b_1,...,b_n)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{найдётся } x_0, \text{ такой,что } \forall_y P(x_0,y,b_1,...,b_n)=1 \\ \text{найдётся } y_0, \text{ такой,что } \exists_x P(x,y_0,b_1,...,b_n)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{найдётся } x_0, \text{ такой,что } P(x_0,y,b_1,...,b_n)\equiv 1 \\ \text{найдётся } y_0, \text{ такой,что } P(x,y_0,b_1,...,b_n)\equiv 0 \end{cases}.$$

В равенстве $P(x_0,y,b_1,...,b_n)\equiv 1$ положим $y=y_0$, а в равенстве $P(x,y_0,b_1,...,b_n)\equiv 0$ положим $x=x_0$. Получим противоречивую систему $\begin{cases} P(x_0,y_0,b_1,...,b_n)=1 \\ P(x_0,y_0,b_1,...,b_n)=0 \end{cases}$. Источник противоречия в том, что мы допустили, что импликация (5) может быть нарушена. Значит, формула (5) верна, и теорема доказана. ■

Таким образом, если мы имеем два определения, отличающиеся только порядком разноимённых кванторов, то чем раньше стоит квантор существования, тем более «сильное» получаем свойство.

Пример 3.

Запишем с помощью кванторов определение функции $f(x)$, непрерывной на интервале $(a;b)$.

$$\forall_{x_0}\forall_{\varepsilon}\exists_{\delta}\forall_{x}((x_0\in(a;b))\to((\varepsilon>0)\to((\delta>0)\to((x\in(a;b))\to((0<|x-x_0|<\delta)\to(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon))))))$$

Переставим некоторые кванторы

$$\forall_{\varepsilon}\exists_{\delta}\forall_{x_0}\forall_{x}((x_0\in(a;b))\to((\varepsilon>0)\to((\delta>0)\to((x\in(a;b))\to((0<|x-x_0|<\delta)\to(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon))))))$$

Получено определение функции, равномерно непрерывной на интервале $(a;b)$. Свойство равномерной непрерывности на интервале является более сильным свойством, чем поточечная непрерывность на интервале.

Дистрибутивные свойства кванторов.

Пусть даны предикаты $P(x, y_1, ..., y_n)$ и $Q(x, y_1, ..., y_n)$.

Рассмотрим вопросы дистрибутивности кванторов общности и существования относительно конъюнкции и дизъюнкции, то есть, выясним, справедливы ли формулы вида

$$D_x\left(P(x, y_1, ..., y_n)\Theta Q(x, y_1, ..., y_n)\right) =$$

$$=\left(D_x P(x, y_1, ..., y_n)\right)\Theta\left(D_x Q(x, y_1, ..., y_n)\right), \qquad \textbf{(6)}$$

где D - квантор общности либо квантор существования, а Θ - либо конъюнкция, либо дизъюнкция.

Теорема о дистрибутивности квантора общности относительно конъюнкции.

Квантор общности обладает дистрибутивностью относительно конъюнкции, то есть справедлива формула (7)

$$\forall_x\left(P(x, y_1, ..., y_n)\cdot Q(x, y_1, ..., y_n)\right) =$$

$$=\left(\forall_x P(x, y_1, ..., y_n)\right)\cdot\left(\forall_x Q(x, y_1, ..., y_n)\right) \qquad \textbf{(7)}$$

Доказательство.

Возьмём произвольный набор $(b_1, b_2, ..., b_n)$, на котором предикат $\forall_x\left(P(x, y_1, ..., y_n)\cdot Q(x, y_1, ..., y_n)\right)$ принимает значение 1:

$$\forall_x\left(P(x,b_1,...,b_n)\cdot Q(x,b_1,...,b_n)\right)=1 \overset{\text{на основании определения } \forall}{\Longleftrightarrow} \Leftrightarrow$$

$\left(P(x,b_1,...,b_n)\cdot Q(x,b_1,...,b_n)\right)\equiv 1$ относительно переменной $x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ для произвольного x_0 $\left(P(x_0,b_1,...,b_n)\cdot Q(x_0,b_1,...,b_n)\right)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ по определению конъюнкции, для произвольного x_0

$P(x_0, b_1, ..., b_n) = 1$ и $Q(x_0, b_1, ..., b_n) = 1$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(x, b_1, ..., b_n) \equiv 1 \text{ и } Q(x, b_1, ..., b_n) \equiv 1 \quad \overset{\text{на основании определения } \forall}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \forall_x P(x, b_1, ..., b_n) = 1 \text{ и } \forall_x Q(x, b_1, ..., b_n) = 1 \quad \overset{\text{на основании определения } \wedge}{\Longleftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow \left(\forall_x P(x, b_1, ..., b_n)\right) \cdot \left(\forall_x Q(x, b_1, ..., b_n)\right) = 1$. Таким образом, доказано, что множество единичных наборов правой и левой части формулы (7) совпадают, а, следовательно, теорема о дистрибутивности квантора общности относительно конъюнкции доказана. ■

Сформулируем и докажем двойственную теорему.

Теорема о дистрибутивности квантора существования относительно дизъюнкции.

Квантор существования обладает дистрибутивностью относительно дизъюнкции, то есть справедлива формула (8)

$$\exists_x \left(P(x, y_1, ..., y_n) \vee Q(x, y_1, ..., y_n)\right) =$$
$$= \left(\exists_x P(x, y_1, ..., y_n)\right) \vee \left(\exists_x Q(x, y_1, ..., y_n)\right) \qquad \textbf{(8)}$$

Доказательство.

Возьмём произвольный набор $(b_1, b_2, ..., b_n)$, на котором предикат $\exists_x \left(P(x, y_1, ..., y_n) \vee Q(x, y_1, ..., y_n)\right)$ принимает значение 0:

$$\exists_x \left(P(x, b_1, ..., b_n) \vee Q(x, b_1, ..., b_n)\right) = 0 \quad \overset{\text{на основании определения } \exists}{\Longleftrightarrow} \quad \Leftrightarrow$$

$\left(P(x, b_1, ..., b_n) \vee Q(x, b_1, ..., b_n)\right) \equiv 0$ относительно переменной x $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ для произвольного x_0 $\left(P(x_0, b_1, ..., b_n) \vee Q(x_0, b_1, ..., b_n)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ по определению дизъюнкции, для произвольного x_0

$P(x_0,b_1,...,b_n)=0$ и $Q(x_0,b_1,...,b_n)=0$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(x,b_1,...,b_n)\equiv 0 \text{ и } Q(x,b_1,...,b_n)\equiv 0 \quad \overset{\text{на основании определения } \exists}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \exists_x P(x,b_1,...,b_n)=0 \text{ и } \exists_x Q(x,b_1,...,b_n)=0 \quad \overset{\text{на основании определения } \vee}{\Longleftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow \left(\exists_x P(x,b_1,...,b_n)\right)\vee\left(\exists_x Q(x,b_1,...,b_n)\right)=0$. Таким образом, доказано, что множество нулевых наборов правой и левой части формулы (8) совпадают, а, следовательно, теорема о дистрибутивности квантора существования относительно дизъюнкции доказана. ■

Разберёмся, при любых ли сочетаниях квантор-операция справедлива формула (6).

Пример 4. Пусть предикаты $P(x)$: «x – чётное число», $Q(x)$: «x – нечётное число», определены на множестве натуральных чисел N.

Тогда $\exists_x\left(P(x)\cdot Q(x)\right)=0$, так как не существует натурального числа, которое одновременно является чётным и нечётным, но $\left(\exists_x P(x)\right)\cdot\left(\exists_x Q(x)\right)=1$, так как существует чётное натуральное число, и существует нечётное натуральное число.

Значит, квантор существования относительно конъюнкции дистрибутивностью не обладает.

Далее, $\forall_x\left(P(x)\vee Q(x)\right)=1$, так как каждое натуральное число чётно или нечётно, но $\left(\forall_x P(x)\right)\vee\left(\forall_x Q(x)\right)=0$, так как неверно, что каждое натуральное число чётно, неверно, что каждое натуральное число нечётно, а, следовательно, ложна дизъюнкция этих высказываний.

Таким образом, квантор общности относительно дизъюнкции дистрибутивностью не обладает. Тем не менее имеет место так называемая полудистрибутивность.

Теорема о полудистрибутивности квантора существования относительно конъюнкции.

Квантор существования обладает полудистрибутивностью относительно конъюнкции, то есть справедлива формула (9)

$$\exists_x \left(P(x, y_1, ..., y_n) \cdot Q(x, y_1, ..., y_n) \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\exists_x P(x, y_1, ..., y_n) \right) \cdot \left(\exists_x Q(x, y_1, ..., y_n) \right) \equiv 1 \qquad \textbf{(9)}$$

Доказательство.

Возьмём произвольный набор $(b_1, b_2, ..., b_n)$, на котором посылка импликации (9) равна 1:

$\exists_x \left(P(x, b_1, ..., b_n) \cdot Q(x, b_1, ..., b_n) \right) = 1$ Отсюда на основании определения следует, что предикат $P(x, b_1, ..., b_n) \cdot Q(x, b_1, ..., b_n)$ выполним, то есть найдётся x_0 такой, что

$P(x_0, b_1, ..., b_n) \cdot Q(x_0, b_1, ..., b_n) = 1$. Значит, по определению конъюнкции, $P(x_0, b_1, ..., b_n) = 1$, $Q(x_0, b_1, ..., b_n) = 1$, следовательно, каждый из предикатов $P(x, b_1, ..., b_n)$ и $Q(x, b_1, ..., b_n)$ выполним, значит, по определению навешивания квантора существования, $\exists_x P(x, b_1, ..., b_n) = 1$, $\exists_x Q(x, b_1, ..., b_n) = 1$, а значит, и их конъюнкция равна 1, $\left(\exists_x P(x, b_1, ..., b_n) \right) \cdot \left(\exists_x Q(x, b_1, ..., b_n) \right) = 1$. Итак, если посылка импликации (9) на каком- то наборе равна единице, то единице равно и заключение импликации (9), то есть нарушиться эта импликация ни на каком наборе не может, и теорема доказана. ■

Рассмотрим теорему, двойственную к только что доказанной.

Теорема о полудистрибутивности квантора общности относительно дизъюнкции.

Квантор общности обладает полудистрибутивностью относительно дизъюнкции, то есть справедлива формула (10)

$$\left(\forall_x P(x, y_1, ..., y_n) \right) \vee \left(\forall_x Q(x, y_1, ..., y_n) \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \forall_x \left(P(x, y_1, ..., y_n) \vee Q(x, y_1, ..., y_n) \right) \equiv 1 \qquad \textbf{(10)}$$

Доказательство.

Возьмём произвольный набор $(b_1, b_2, ..., b_n)$, на котором посылка импликации (10) равна 1:

$\left(\forall_x P(x, b_1, ..., b_n)\right) \vee \left(\forall_x Q(x, b_1, ..., b_n)\right) = 1$. Отсюда, на основании определения дизъюнкции, следует, что хотя бы одно из высказываний $\left(\forall_x P(x, b_1, ..., b_n)\right) = 1$ или $\left(\forall_x Q(x, b_1, ..., b_n)\right) = 1$ истинно. Тогда, по определению навешивания квантора общности, хотя бы один из предикатов $P(x, b_1, ..., b_n)$ и $Q(x, b_1, ..., b_n)$ является тождественно-истинным. Но в этом случае тождественно-истинным будет также и предикат $P(x, b_1, ..., b_n) \vee Q(x, b_1, ..., b_n)$, а следовательно, на основании определения навешивания квантора общности, $\forall_x \left(P(x, b_1, ..., b_n) \vee Q(x, b_1, ..., b_n)\right) = 1$. Итак, если посылка импликации (10) на каком- то наборе равна единице, то единице равно и заключение импликации (10), то есть нарушиться эта импликация ни на каком наборе не может, и теорема доказана. ■

Предикатные формулы.

Дадим формальное определение предикатной формулы.

а) Символ предикатной буквы с набором аргументов объявляется *предикатной формулой*.

б) Если *P* и *Q* – предикатные формулы, а *u* – символ переменной, то

$\forall_u P,\ \exists_u Q,\ \overline{P},\ (P \cdot Q),\ (P \vee Q),\ (P + Q),\ (P \rightarrow Q),\ (P \leftrightarrow Q),$

$(P \downarrow Q),\ (P \mid Q),\ (P \not\rightarrow Q)$ - также *предикатные формулы*.

Для упрощения записи формул на практике введём договорённости:

а) внешние скобки предикатной формулы (если они присутствуют), опускаются;

б) если предикатная формула, кроме кванторов, содержит символы булевых функций, но не содержит скобок, то *порядок выполнения действий* такой: $\begin{matrix}\forall \\ \exists\end{matrix}, \neg, \wedge, +, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, При использовании других символов булевых функций для определения порядка выполнения действий применяют скобки.

В теории булевых функций популярно представление функций в базисе $\{\neg, \vee, \wedge\}$, и разработан обширный аппарат преобразования формул в этом базисе.

Вспомним формулы выражения основных булевых функций через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание:

$$x \to y = \overline{x} \vee y \qquad \textbf{(11)}$$

$$x \leftrightarrow y = \overline{x} \cdot \overline{y} \vee x \cdot y \qquad \textbf{(12)}$$

$$x + y = \overline{x} \cdot y \vee x \cdot \overline{y} \qquad \textbf{(13)}$$

$$x \not\to y = x \cdot \overline{y} \qquad \textbf{(14)}$$

$$x \mid y = \overline{x} \vee \overline{y} \qquad \textbf{(15)}$$

$$x \downarrow y = \overline{x} \cdot \overline{y} \qquad \textbf{(16)}$$