Вопросы к ЭКЗАМЕНУ по алгебре и геометрии для ФИИТ 2024 г.

Входной контроль знаний

1. Определение поля (аксиомы входят в определение).
2. Определение линейного пространства над полем (аксиомы входят в определение).
3. Определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.
4. Базис и размерность линейного пространства, координаты вектора в базисе.
5. Определение матрицы перехода.
6. Определение подпространства линейного пространства.
7. Определение суммы и пересечения, прямой суммы двух подпространств.
8. Теорема о размерности суммы двух подпространств.
9. Определение линейного оператора.
10. Определение ядра и образа линейного оператора.
11. Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного оператора.
12. Определение матрицы линейного оператора.
13. Формула связи между матрицами линейного оператора в разных базисах.
14. Подобные матрицы.
15. Определение собственных векторов и собственных значений линейного оператора.
16. Алгоритм поиска собственных векторов и собственных значений.
17. Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов.
18. Определение евклидова пространства (аксиомы!).
19. Определение нормы. Неравенство Коши-Буняковского
20. Свойства нормы и скалярного произведения.
21. Определение ортогональной системы векторов и ортонормированной системы векторов.
22. Определение комплексно-сопряженных чисел. Свойства комплексного сопряжения.
23. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа.
24. Формула Муавра возведения комплексного числа в n-ную степень.
25. Извлечение корня n-ной степени из комплексного числа.
26. Определение унитарного пространства(аксиомы!).
27. Определение ортогонального дополнения. Теорема о разложении в прямую сумму.
28. Ортогональные матрицы, равносильные определения.
29. Сопряженная матрица, эрмитова (самосопряженная) матрица.
30. Унитарные матрицы. Определение, равносильные определения.
31. Матрица Грама (определение).
32. Определение квадратичной и билинейной форм.
33. Изменение матрицы квадратичной формы при замене базиса.
34. Ранг квадратичной формы. Канонический вид.
35. Нормальный вид квадратичной формы над полем комплексных и вещественных чисел. Ранг квадратичной формы, положительный и отрицательный индексы инерции.
36. Теорема Якоби о приведении квадратичной формы к каноническому виду.
37. Классификация квадратичных форм (положительные, отрицательные, квазиположительные, квазиотрицательные, знакочередующиеся)

38. Критерий Сильвестра (положительной и отрицательной определенности квадратичной формы).

Список теоретических вопросов (задания 1-2)

1. Определение поля (аксиомы входят в определение).
2. Определение линейного пространства над полем (аксиомы входят в определение).
3. Определение линейно зависимой системы векторов, определение линейно независимой системы векторов, привести примеры.
4. Определение базиса линейного пространства, определение размерности линейного пространства, определение координат вектора в базисе.
5. Матрица перехода. Определение, вывод формул, связывающих координаты вектора в старом базисе с его координатами в новом базисе.
6. Определение изоморфных линейных пространств. Привести примеры.Свойства изоморфизма (рефлексивность, симметричность, транзитивность). Доказательство.
7. Определение изоморфных линейных пространств.Доказать теорему о том, что любое пространство размерности n изоморфно n-мерному координатному пространству.
8. Определение подпространства линейного пространства. Эквивалентное определение.
9. Доказательство утверждения, что подмножество является подпространством тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно операций сложения и умножения на число.
10. Привести несколько примеров линейного пространства и его подпространства. Обосновать.
11. Определение суммы и пересечения двух подпространств.
12. Определение прямой суммы подпространств. Привести несколько примеров.
13. Доказать утверждение, что пространство раскладывается в прямую сумму тогда и только тогда, когда ноль раскладывается единственным образом.
14. Теорема о размерности суммы двух подпространств.
15. Определение линейного оператора. Примеры ЛО.
16. Определение ядра и образа линейного оператора. Примеры.
17. Теорема о связи размерностей ядра и образа. Доказательство.
18. Определение матрицы линейного оператора. Действие линейного оператора на вектор (вывод формулы).
19. Формула связи между матрицами линейного оператора в разных базисах. (с выводом)
20. Подобные матрицы. Свойства подобия. Доказательство.
21. Действия над линейными операторами. Матрицы суммы, умножения на число, умножения операторов, обратного оператора.
22. Определение собственных векторов и собственных значений линейного оператора. Привести примеры.
23. Характеристическая матрица и характеристический многочлен. Характеристический многочлен для n=2 и для n=3.

24. Алгоритм поиска собственных векторов и собственных значений.
25. Теорема о приведении линейного оператора к диагональному виду. Доказательство.
26. Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Доказательство для общего случая и доказательство для частного случая.
27. Определение евклидова пространства (аксиомы!). Примеры евклидовых пространств.
28. Определение нормы. Неравенство Коши-Буняковского (с доказательством)
29. Свойства нормы и скалярного произведения. (с доказательством)
30. Определение ортогональной системы векторов и ортонормированной системы векторов. Привести примеры.
31. Построение по данной ортогональной системе векторов ортонормированной системы векторов. Пример.
32. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. (с выводом)
33. Определение комплексно-сопряженных чисел. Свойства комплексного сопряжения.
34. Определение унитарного пространства(аксиомы!). Примеры унитарных пространств.
35. Определение ортогонального дополнения. Теорема о разложении в прямую сумму. Привести примеры.
36. Ортогональные матрицы. Определение. Равносильные определение, примеры.
37. Вывод утверждения о том, что строки и столбцы ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис (для матриц второго порядка), вывод утверждения, что матрица, обратная ортогональной, равна транспонированной матрице.
38. Сопряженная матрица, её свойства, примеры сопряженных матриц.
39. Эрмитова (самосопряженная) матрица. Определение, свойства, примеры
40. Унитарные матрицы. Определение, равносильные определения, примеры.
41. Вывод утверждения о том, что строки и столбцы унитарной матрицы образуют ортонормированный базис (для матриц второго порядка), вывод утверждения, что матрица, обратная унитарной, равна сопряженной матрице.
42. Матрица Грама (определение), свойства матрицы Грама.
43. Нахождение скалярного произведения с помощью матрицы Грама (вывод формулы для случая трехмерного евклидова пространства)
44. Нахождение скалярного произведения с помощью матрицы Грама (вывод формулы для случая трехмерного унитарного пространства)
45. Определение линейной формы (линейного функционала). Привести примеры.
46. Определение квадратичной и билинейной форм.
47. Определение симметрической и кососимметрической билинейных форм.
48. Примеры билинейной, квадратичной, симметрической и кососимметрической форм.
49. Матрица билинейной формы и матрица квадратичной формы, вывод формулы.
50. Изменение матрицы квадратичной формы при замене базиса, вывод формулы.
51. Замена переменных в квадратичной форме, вывод формулы.
52. Ранг квадратичной формы. Канонический вид.
53. Нормальный вид квадратичной формы над полем комплексных и вещественных чисел. Ранг квадратичной формы, положительный и отрицательный индексы инерции.

54. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Теорема Лагранжа. Теорема Якоби.
55. Классификация квадратичных форм. Привести примеры.
56. Критерий Сильвестра.

Список задач.

Блок №0.

Задача на комплексные числа

a. Вычислить: $\frac{1-2i}{3+4i}$

b. Найти тригонометрическую форму $-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

c. Вычислить $\left|-1+i\sqrt{3}\right|$

d. Вычислить $\arg(-1-i\sqrt{3})$

e. Вычислить $\left(-2+i2\sqrt{3}\right)^{100}$

f. Вычислить $\sqrt[3]{1}$

Задачи из прошлого семестра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
2. Выполнить действия: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t + 5E_{13} - 6E$
3. Найти обратную матрицу к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *или* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. Построить кривую второго порядка $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $y^2=2px$
5. Построить поверхность – эллипсоид, двуполостный гиперболоид, однополостный гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, конические и цилиндрические поверхности.

Блок №1.

1. Определить, является ли W линейным подпространством пространства V, и если является, найти его базис и размерность.
   a. $V=R^3$, $W=\{x=(x_1,x_2,x_3) \mid 2x_1+x_2-x_3=0\}$;
   b. $V=R^4$, $W=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1+x_2+x_3=1\}$.
2. Пусть $a_1, a_2, a_3, \bar{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что система векторов a_1, a_2, a_3 образует базис, найти матрицу перехода к этому

базису, найти координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе (с помощью матрицы перехода): $\overline{a}_1 = (2,1,-3), \overline{a}_2 = (3,2,-5), \overline{a}_3 = (1,-1,1)$ $\overline{x} = (6,2,-7)$.

3. Первый базис $a_1(1,2)$ $a_2(3,4)$. Второй базис $b_1(-2,3)$ $b_2(5,1)$. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму (или найти матрицу перехода от второго базиса к первому).
4. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов: $S = \langle (1,2,0,1), (2,3,1,1), (3,5,1,2) \rangle$, $L = \langle (4,6,2,2), (1,3,0,1), (5,9,2,3) \rangle$.

Блок №2.

1. Оператор $\varphi : R^3 \to R^3$ задан следующим образом:

а) $\varphi(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ (x_2)^2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ б) $\varphi(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}$

Проверить, является ли оператор линейным. Для линейного оператора найти ядро, образ и матрицу в стандартном базисе. (2 балла)

2. Преобразование φ в базисе $a_1 = (1,1)$ $a_2 = (3,4)$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, преобразование ψ в базисе $b_1 = (3,2)$ $b_2 = (2,1)$ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования $\varphi + 3\psi$ в базисе b_1, b_2. Найти матрицу преобразования $2\varphi - \psi$ в базисе $e_1=(1,0)$,$e_2=(0,1)$. Найти матрицу преобразования $\dfrac{\varphi + \psi}{3}$ в базисе a_1, a_2.

3. Найдите собственные вектора и собственные значения. В случае диагонализируемого оператора выпишите преобразование, приводящее матрицу оператора к диагональному виду.

а) $A = \begin{pmatrix} -12 & 10 & -30 \\ -4 & 2 & -12 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -18 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

в) $A = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ г) $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Блок №3.

1. Задача на проверку аксиом евклидова или унитарного пространства:

   a. Проверить аксиомы евклидова пространства в пространстве R^2 со скалярным произведением $(x, y) := x_1 y_1 + x_2 y_2$.

b. Проверить аксиомы унитарного пространства в пространстве C^2 со скалярным произведением $(x, y) := x_1 \overline{y}_2 + x_2 \overline{y_1}$?

2. Легкая задача на скалярное произведение
   a. Найдите угол между векторами x=(1,2,3) и y=(4,5,6) в пространстве R^3 со стандартным скалярным произведением.
   b. Найдите норму вектора x=(1+2i,3i,-5) в пространстве C^3 со стандартным скалярным произведением.
   c. Найдите скалярное произведение векторов x=(1+2i,3i,-5) и y=(2-5i,2+3i,5i) в пространстве C^3 со стандартным скалярным произведением.
   d. Найдите скалярное произведение f(x)=sin x и g(x)=cos x в пространстве C[-π, π]
   e. Найдите норму $f(x)=x^2$ в пространстве C[-1,3].

3. Задача на процесс ортогонализации Грама-Шмидта: С помощью процесса ортогонализации построить ортонормированный базис линейной оболочки системы:
   a. a_1=(-2,3,1,2); a_2=(4,-1,3,-5); a_3=(27,-5,-5,19) (в пространстве R^4 со стандартным скалярным произведением);

   b. a_1=(2,1, -i); a_2=(3+i,0,-2) (в пространстве C3 со стандартным скалярным произведением).

4. Задача на вид матрицы:
   a. Найдите матрицу, сопряженную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 3 & 4-8i \\ 4 & 2 & 7-8i \\ -3+2i & 2 & 4+5i \end{pmatrix}$.
   b. Будет ли матрица $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 3 & 4-8i \\ 4 & 2 & 7-8i \\ -3+2i & 2 & 4+5i \end{pmatrix}$ эрмитовой?
   c. Будет ли матрица $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 3 & 4-8i \\ 4 & 2 & 7-8i \\ -3+2i & 2 & 4+5i \end{pmatrix}$ унитарной?
   d. Будет ли матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ортогональной?

Блок №4.

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа, указать невырожденную замену переменных
   a. $x_1x_2 - 3x_1^2 + 2x_2^2$
   b. $x_1x_2 - x_2x_3$

c. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$

2. При каком значении λ квадратичная форма будет положительно(отрицательно) определенной

   d. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$

   e. $\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$

3. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Якоби и методом ортогональных преобразований $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$

СТРУКТУРА И ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ЭКЗАМЕНА

В связи с плохой успеваемостью и посещаемостью всего потока, экзамен начнется с входного контроля.

На входном контроле раздам билеты с вопросами по списку из входного контроля + задачи.

Пример билета из входного контроля

Входной контроль
1. Определение линейного оператора.
2. Пример подпространства в пространстве R3 (трехмерных векторов над полем вещественных чисел)
3. Определение нормы ,неравенство Коши-Буняковского
4. Классификация квадратичных форм.
5. Найти собственные значения $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

ТО есть, во входном контроле будут три теоретических вопроса, один вопрос – привести пример (линоператора, квадратичной формы, евклидова пространства, лин пространства и тд – по всем понятиям, которые были в этом семестре) и еще одна очень простая и быстро решаемая задача.

На входной контроль дадим 30 минут – по 6 минут на задание!

После этого проверим входной контроль. Набравшие меньше трех баллов на входном контроле – это два за экзамен.

После входного контроля раздаем билеты.

В билетах будут два теоретических вопроса и одно практическое задание. Вопросы и задание из основного списка вопросов.