ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

1. Понятие предиката

В исчислении высказываний нет предметных переменных, то есть переменных, которые могут принимать нелогические значения, например, числовые. Для того чтобы в логические исчисления могли быть включены нелогические константы и переменные, вводится понятие предиката.

Определение. *n-местным предикатом* на множестве X называется n-местная функция из множества X^n во множество $\{0,1\}$.

Примеры.

1. Предикат $A(x) = "x \le 2"$ на множестве $X = R$ – одноместный.
2. Предикат $B(x, y) = "xy > 0"$ на множестве $X = R^2$ – двуместный.

Если $X = \{0,1\}$, то n-местный предикат представляет собой n-местную булеву функцию.

Нульместный предикат представляет собой высказывание.

Для каждого предиката A областью истинности называется множество $Y = \{x \in X \,|\, A(x) = 1\}$, на котором предикат принимает значение 1.

Примеры.

1. Для предиката $A(x) = "x \le 2"$ на множестве $X = R$ область истинности $Y = \{x \in R \,|\, x \le 2\}$.
2. Для предиката $B(x, y) = "xy > 0"$ на множестве $X = R^2$ область истинности $Y = \{(x, y) \in R^2 \,|\, xy > 0\}$.

Поскольку множество значений любого предиката лежит во множестве $\{0,1\}$, то с предикатами можно производить все операции алгебры логики, и все известные свойства логических операций обобщаются для предикатов. Рассмотрим эти свойства (для удобства в свойствах записываются одноместные предикаты):

1. Коммутативность:
$$P(x) \vee Q(x) = Q(x) \vee P(x),\ P(x) \wedge Q(x) = Q(x) \wedge P(x).$$
2. Ассоциативность:
$$P(x) \vee (Q(x) \vee R(x)) = (P(x) \vee Q(x)) \vee R(x),$$
$$P(x) \wedge (Q(x) \wedge R(x)) = (P(x) \wedge Q(x)) \wedge R(x).$$
3. Дистрибутивность:
$$P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x)) = (P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee R(x)),$$
$$P(x) \wedge (Q(x) \vee R(x)) = (P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge R(x)).$$
4. Идемпотентность: $P(x) \vee P(x) = P(x),\ P(x) \wedge P(x) = P(x)$.
5. Закон двойного отрицания: $\neg\neg P(x) = P(x)$.
6. Закон исключения третьего: $P(x) \vee \neg P(x) = 1$.
7. Закон противоречия: $P(x) \wedge \neg P(x) = 0$.
8. Законы де Моргана:
$$\neg(P(x) \vee Q(x)) = \neg P(x) \wedge \neg Q(x),$$
$$\neg(P(x) \wedge Q(x)) = \neg P(x) \vee \neg Q(x).$$
9. Свойства операций с логическими константами:
$$P(x) \vee 1 = 1,\ P(x) \vee 0 = P(x),\ P(x) \wedge 1 = P(x),\ P(x) \wedge 0 = 0.$$

Здесь $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ – любые предикаты.

2. Операции квантификации

В то же время, для предикатов определены операции специального вида, которые называются *кванторами*.

Пусть дан n-местный предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множестве X, означающий, что для набора $(x_1, x_2, ..., x_n)$ выполнено свойство A, и пусть x_i – одна из переменных. Тогда запись $\forall x_i A(x_1, x_2, ..., x_n)$ означает, что для всех значений переменной x_i свойство A выполнено. Символ $\forall$ называется *квантором всеобщности* (*общности*). Предикат $\forall x_i A(x_1, x_2, ..., x_n)$ является $(n-1)$-местным. Он зависит от переменных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$. Если дан одноместный предикат $P(x)$, то утверждение $\forall x P(x)$ представляет собой нульместный предикат, то есть истинное или ложное высказывание.

Пример. На множестве $X = R$ дан предикат $A(x) = "x \le 2"$. Высказывание $\forall x(x \le 2)$ ложно.

Пусть дан n-местный предикат $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множестве X, означающий, что для набора $(x_1, x_2, ..., x_n)$ выполнено свойство A, и пусть x_i – одна из переменных. Тогда запись $\exists x_i A(x_1, x_2, ..., x_n)$ означает, что существует значение переменной x_i, такое, что выполняется свойство A. Символ $\exists$ называется *квантором существования*. Предикат $\exists x_i A(x_1, x_2, ..., x_n)$ является $(n-1)$-местным. Если дан одноместный предикат $P(x)$, то утверждение $\exists x P(x)$ представляет собой нульместный предикат, то есть истинное или ложное высказывание.

Пример. На множестве $X = R$ дан предикат $A(x) = "x \le 2"$. Высказывание $\exists x(x \le 2)$ истинно.

Отметим, что запись $\forall x A$ ($\exists x A$) не подразумевает, что в формуле A есть переменная x.

Пусть дана запись $\forall x A$ (или $\exists x A$). Переменная x называется *переменной в кванторе*, а A – *областью действия квантора*.

Имеют место эквивалентности:

$\exists x_i A = \neg \forall x_i \neg A$. $\quad \forall x_i A = \neg \exists x_i \neg A$.

$\neg \exists x_i A = \forall x_i \neg A$. $\quad \neg \forall x_i A = \exists x_i \neg A$.

Отметим, что список переменных в предикате A мы будем указывать не всегда.

3. Классификация предикатов

Предикат называется *тождественно истинным* (*тождественно ложным*), если при всех возможных значениях переменных он принимает значение 1(0).

Теорема. Пусть $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ – n-местный предикат, x_i – переменная в предикате. Тогда предикат $\forall x_i A(x_1, x_2, ..., x_n) \to A(x_1, x_2, ..., x_n)$ является тождественно истинным.

Доказательство. Возьмем произвольный набор значений $(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)$ переменных $(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$. Подставим этот набор в предикат $\forall x_i A(x_1, x_2, ..., x_n) \to A(x_1, x_2, ..., x_n)$. Получим высказывание:

$\forall x_i A(x_1^0, x_2^0, ..., x_i, ..., x_n^0) \to A(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0) = B_0$.

Покажем, что это высказывание истинно. Возможны два случая.

1. $\forall x_i A(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i, \ldots, x_n^0) = 0$, следовательно $B_0 = 1$.
2. $\forall x_i A(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i, \ldots, x_n^0) = 1$.

Соотношение выполнено при любых значениях x_i, следовательно, и при значении $x_i = x_i^0$. При подстановке этого значения получаем:

$A(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0) = 1$.

Следовательно, по свойству импликации получаем, что $B_0 = 1$, что и требовалось доказать.

Теорема. Пусть $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – n-местный предикат, x_i – переменная в предикате. Тогда предикат $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \exists x_i A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является тождественно истинным.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Предикат называется *выполнимым* (*опровержимым*), если при некоторых значениях переменных он принимает значение 1 (0).

Пример. Найти значение высказывания $\exists x \forall y \exists z (xz = y^3)$. Предикат $xz = y^3$ определен на множестве $X = N$.

Решение. Пусть $\exists x \forall y \exists z (xz = y^3) = 1$.Эквивалентность имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого x_0, $\forall y \exists z (x_0 z = y^3) = 1$.

Это означает, что для некоторого x_0 предикат $\exists z (x_0 z = y^3)$ является тождественно истинным относительно y, то есть для некоторого x_0 и для произвольного y_0 $\exists z (x_0 z = {y_0}^3) = 1$. Последнее равносильно тому, что предикат $(x_0 z = {y_0}^3)$ выполним.

Предикат действительно является выполнимым, поскольку он определен на множестве натуральных чисел. Таким образом, поскольку все переходы были равносильными, исходное высказывание истинно.

4. Основные эквивалентности

Предикаты могут быть выражены с помощью, так называемых предикатных формул. Нужно учитывать, что формула становится предикатом, когда все переменные определены на некотором множестве, и определены все предикаты, входящие в формулу.

Справедливы эквивалентности:

$\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$, $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$.

Разноименные кванторы можно переставлять только следующим образом:

$\exists x \forall y P(x, y) \to \forall y \exists x P(x, y)$, $\exists y \forall x P(x, y) \to \forall x \exists y P(x, y)$.

Обратные формулы неверны.

Пример. Очевидно, что высказывание $\forall x \exists y (x + y = 0)$ ($X = R$) истинно. Поменяем кванторы местами. Получим высказывание $\exists y \forall x (x + y = 0)$, которое является ложным.

Выражения с кванторами можно преобразовывать следующим образом:

$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$, $\exists x (P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$.

Докажем первую эквивалентность. Пусть предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ одновременно тождественно истинны. Тогда тождественно истинным будет и предикат $P(x) \wedge Q(x)$, следовательно, истинными будут высказывания $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$, $\forall xP(x)$, $\forall xQ(x)$, а также $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$.

Пусть теперь хотя бы один из предикатов (например, $P(x)$) не является тождественно истинным. Тогда (по свойствам конъюнкции) тождественно истинным не будет и предикат $P(x)\wedge Q(x)$, следовательно, ложным будет высказывание $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$. Высказывания $\forall xP(x)$ и $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$ также будут ложными.

Таким образом, обе части эквивалентности одновременно истинны или ложны, и эквивалентность доказана.

Замечание. Формула $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ не эквивалентна формуле $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$.

Доказательство. Рассмотрим обе формулы на множестве R. Пусть предикат $P(x)="x<0"$, а предикат $Q(x)="x\geq 0"$. Оба предиката не являются тождественно истинными. Предикат $P(x)\vee Q(x)="x\in R"$ – тождественно истинный, и высказывание $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ истинно. Высказывания $\forall xP(x)$ и $\forall xQ(x)$ ложны, следовательно, ложно и высказывание $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$. Таким образом, построен пример, когда формулы $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ и $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$ принимают различные значения.

Тем не менее, справедливы эквивалентности:
$\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)=\forall xP(x)\vee\forall yQ(y)=\forall x(P(x)\vee\forall yQ(y))==\forall x\forall y(P(x)\vee Q(y))$.

Аналогично, формулы $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ и $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$ не эквивалентны. Но справедливы эквивалентности:
$\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)=\exists xP(x)\wedge\exists yQ(y)=\exists x(P(x)\wedge\exists yQ(y))==\exists x\exists y(P(x)\wedge Q(y))$.

Имеют место формулы:
$\forall x(P(x)\wedge C)=\forall xP(x)\wedge C$, $\exists x(P(x)\vee C)=\exists xP(x)\vee C$,
$\forall x(P(x)\vee C)=\forall xP(x)\vee C$, $\exists x(P(x)\wedge C)=\exists xP(x)\wedge C$.

Здесь C не содержит переменной x.

5. Приведенная и предваренная нормальные формы

Определение. Предикатная формула находится в приведенной форме, если в ней использованы только кванторные операции, а также операции инверсии, конъюнкции, дизъюнкции, причем инверсия относится только к предикатным буквам.

Определение. Предикатная формула находится в *предваренной форме* (*предваренной нормальной форме*), если она имеет вид $Q_1x_1Q_2x_2...Q_kx_kA$, где $Q_1,Q_2,...,Q_k$ - кванторы всеобщности или существования, а формула A находится в приведенной форме и не содержит кванторов.

Пример. Записать формулу $A=\exists x\forall yP(x,y)\to\forall x\exists yQ(x,y)\vee R(x)$ в предваренной нормальной форме.

Решение. $A=\exists x\forall yP(x,y)\to\forall x\exists yQ(x,y)\vee R(x)=$

$=\neg\exists x\forall yP(x,y)\vee\forall x\exists yQ(x,y)\vee R(x)=$

$=\forall x\neg\forall yP(x,y)\vee\forall x\exists yQ(x,y)\vee R(x)=$

$=\forall x\exists y\neg P(x,y)\vee\forall x\exists yQ(x,y)\vee R(x)$.

Полученная формула записана в приведенной форме. Для того чтобы квантор всеобщности можно было вынести за скобки, переобозначим переменные и выполним преобразования:

$$A = \forall t \exists y \neg P(t,y) \vee \forall z \exists y Q(z,y) \vee R(x) =$$
$$= \forall t \big(\exists y \neg P(t,y) \vee \forall z \exists y Q(z,y) \vee R(x) \big) =$$
$$= \forall t \forall z \big(\exists y \neg P(t,y) \vee \exists y Q(z,y) \vee R(x) \big) =$$
$$= \forall t \forall z \exists y \big(\neg P(t,y) \vee Q(z,y) \vee R(x) \big).$$

Рассмотрим предикат $P(x)$, определенный на конечном множестве $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Если предикат $P(x)$ является тождественно истинным, то истинными будут высказывания $P(a_1)$, $P(a_2)$, …, $P(a_n)$. При этом истинными будут высказывания $\forall x P(x)$ и конъюнкция $P(a_1)\ P(a_2) \ldots\ P(a_n)$.

Если же хотя бы для одного элемента $a_k \in M$ $P(a_k)$ будет ложно, то ложными будут высказывания $\forall x P(x)$ и $P(a_1)\ P(a_2) \ldots\ P(a_n)$.

Таким образом, имеет место эквивалентность $\forall x P(x) = P(a_1)\ P(a_2) \ldots\ P(a_n)$.

Справедлива и аналогичная эквивалентность

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n).$$

Пример. Найти предикат, логически эквивалентный предикату $\exists z \forall y A(y,z) \vee \forall x B(x,y)$, но не содержащий кванторов. Предикаты A и B определены на множестве $\{a,b,c\}$.

Решение. $\exists z \forall y A(y,z) \vee \forall x B(x,y) =$

$$= \big(\forall y A(y,a) \vee \forall y A(y,b) \vee \forall y A(y,c) \big) \vee B(a,y) B(b,y) B(c,y) =$$
$$= A(a,a) A(b,a) A(c,a) \vee A(a,b) A(b,b) A(c,b) \vee A(a,c) A(b,c) A(c,c) \vee$$
$$\vee B(a,y) B(b,y) B(c,y).$$

С помощью предикатов можно записывать различные математические утверждения.

Пример. Покажем, как можно записать утверждение: “числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом число a ($\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$)”.

Решение. Запишем данное утверждение с помощью кванторов и обозначим его A:

$$A = \forall \varepsilon \exists N \forall n \big(\varepsilon > 0 \to \big(n > N \to |x_n - a| < \varepsilon \big) \big).$$

Запишем инверсию данного высказывания:

$$\neg A = \neg \forall \varepsilon \exists N \forall n \big(\varepsilon > 0 \to \big(n > N \to |x_n - a| < \varepsilon \big) \big) = = \exists \varepsilon \neg \exists N \forall n \big(\varepsilon > 0 \to \big(n > N \to |x_n - a| < \varepsilon \big) \big) =$$
$$= \exists \varepsilon \forall N \neg \forall n \big(\varepsilon > 0 \to \big(n > N \to |x_n - a| < \varepsilon \big) \big) =$$
$$= \exists \varepsilon \forall N \exists n \neg \big(\varepsilon > 0 \to \big(n > N \to |x_n - a| < \varepsilon \big) \big).$$

По известным формулам, инверсия импликации преобразуется следующим образом:

$$\neg(K \to M) = \neg(\neg K \vee M) = \neg\neg K \wedge \neg M = K \wedge \neg M .$$

Отсюда получаем:

$$\neg A = \exists\varepsilon\forall N\exists n\big((\varepsilon > 0) \wedge \neg(n > N \to |x_n - a| < \varepsilon)\big) =$$

$$= \exists\varepsilon\forall N\exists n\big((\varepsilon > 0) \wedge (n > N) \wedge \neg(|x_n - a| < \varepsilon)\big) =$$

$$= \exists\varepsilon\forall N\exists n\big((\varepsilon > 0) \wedge (n > N) \wedge (|x_n - a| \geq \varepsilon)\big).$$

Утверждение $\neg A$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$, то есть число a не является пределом числовой последовательности $\{x_n\}$.