

## 6. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### 6.1 ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ

Процесс, отличающийся той или иной степенью повторяемости, называют колебанием. Среди разнообразных колебаний, встречающихся в природе, важную роль играют **гармонические колебания**, представляющие собой *процесс, в котором изменение колеблющейся величины происходит по закону синуса или косинуса*.

Гармонические колебания совершают многие тела, например, маятники. Рассмотрим кинематику гармонического колебания. Пусть точка  $M$  движется по окружности, ее радиус-вектор  $\vec{a}$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  (рисунок 6.1). Проекция вектора  $\vec{a}$  на ось  $x$  равна  $x = a \cos \varphi$ . При равномерном вращении величина угла  $\varphi$  между вектором  $\vec{a}$  и осью  $x$  изменяется по закону  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , где  $t$  – время,  $\varphi_0$  – угол  $\varphi$  при  $t = 0$ , подставляя  $\varphi$ , получим

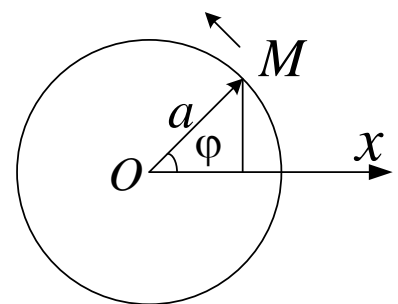


Рисунок 6.1

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6.1)$$

т.е. проекция точки, вращающейся по окружности, совершает простое гармоническое колебание, где  $x$  – смещение точки от положения

равновесия, величина  $(\omega t + \varphi_0)$  есть фаза колебания,  $\varphi_0$  – начальная фаза,  $\omega$  – круговая частота,  $a$  – амплитуда колебания. Если положить в формуле (6.1)  $\varphi_0 = -\pi/2 + \varphi_1$ , получим  $x = a \sin(\omega t + \varphi_1)$ . Следовательно, синус и косинус отличаются лишь начальной фазой колебаний и представляют собой единую функцию, называемую *гармонической*. Время  $T$ , в течение которого совершается одно полное колебание, называется **периодом**. Единицей измерения периода в СИ является секунда:  $[T] = 1 \text{ с}$ . **Частота** колебаний  $f$  равна числу колебаний, совершенных системой за единицу времени, т.е.  $f = 1/T$ . Единицей измерения частоты в СИ является герц:  $[f] = 1 \text{ Гц} = \text{с}^{-1}$ . В течение периода вектор  $\vec{a}$  повернется на угол  $2\pi$ , причем  $2\pi = \omega T$ . Отсюда круговая частота колебаний.

## 6.2 СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ, НАПРАВЛЕННЫХ ВДОЛЬ ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Тело может участвовать одновременно в нескольких колебаниях сразу. Например, кузов автомобиля участвует одновременно в колебании двух упругих элементов — рессор и шин. Причем эти колебания могут происходить независимо друг от друга. В таких случаях результирующее смещение тела  $x$  равно сумме смещений тела  $x_1$  и  $x_2$  в каждом из колебаний в отдельности:

$$x = x_1 + x_2. \quad (6.2)$$

Пусть некоторое тело участвует одновременно в двух колебаниях, которые происходят в одном и том же направлении и с одинаковой частотой  $\omega$ , но с различными начальными фазами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , с различными амплитудами  $a_1$  и  $a_2$  и описываются уравнениями:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (6.3)$$

Для нахождения  $x$  удобно представить эти колебания с помощью векторной диаграммы, на которой векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  изображены в

момент времени  $t = 0$ . В любой момент времени угол между осью  $x$  и векторами  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  равен фазе этих колебаний, определяемых выражениями (6.3). Разность фаз этих колебаний  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$ , т.е. угол между векторами  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  остается постоянным с течением времени. Все векторы вращаются с течением времени с угловой скоростью  $\omega$  и треугольник  $OBC$  остается жестким. Из рисунка 6.2 следует, что проекции векторов связаны отношением (6.2):  $x = x_1 + x_2$  это означает, что проекция вектора  $\vec{a}$  описывает результирующее гармоническое колебание с круговой частотой  $\omega$ . Амплитуду этого колебания  $a$  найдем из рисунка 6.2 по теореме косинусов:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \Delta\varphi. \quad (6.4).$$

Начальная фаза результирующего колебания согласно рисунку 6.2 равна:

$$\text{tg}\varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

Если колебания синфазны ( $\Delta\varphi = 0$  или  $\Delta\varphi = 2\pi m$ , где  $(m = 0, 1, 2, \dots)$ ), то согласно (6.4) получим  $a = a_1 + a_2$ , т.е. амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых синфазных колебаний.

Если колебания происходят в противофазе, то  $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$  и, согласно (6.4), получим  $a = |a_1 - a_2|$ . Результирующая амплитуда складываемых противофазных колебаний равна разности их амплитуд. Полученный результат имеет большое значение при объяснении явления интерференции волн, когда две волны, возбуждающие колебания в пространстве, могут усиливать или ослаблять колебания точек среды в зависимости от разности фаз между ними.

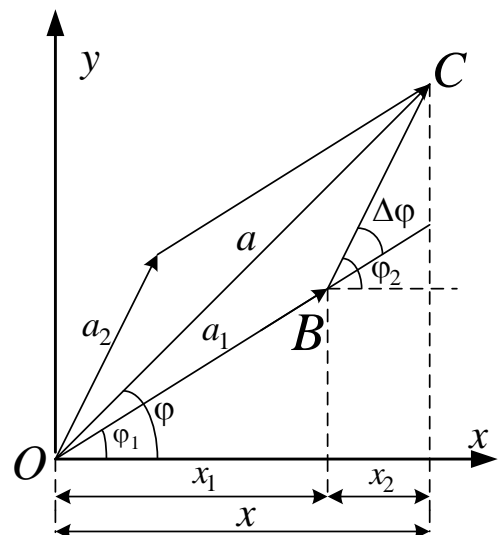


Рисунок 6.2

### 6.3 БИЕНИЯ

Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. Пусть амплитуды колебаний одинаковы и равны  $a$ . Частота одного колебания равна  $\omega$ , а другого —  $\omega + \Delta\omega$ . По условию  $\omega \gg \Delta\omega$ . Уравнения колебаний будут иметь вид  $x_1 = \sin \omega t$  и  $x_2 = \sin(\omega + \Delta\omega)t$ . Складывая эти выражения и применяя формулу для суммы синусов, получаем:

$$x = x_1 + x_2 = 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin \omega t \quad (6.5)$$

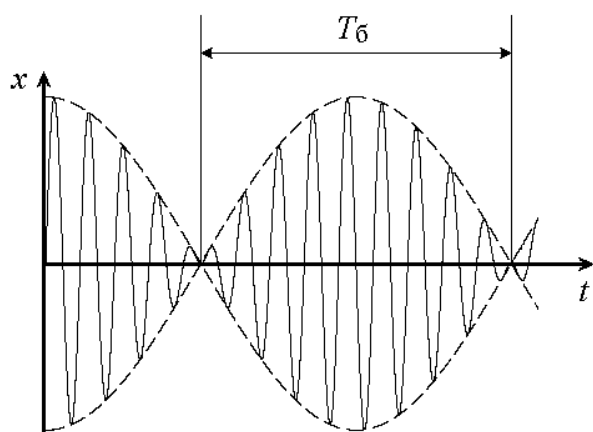


Рисунок 6.3

(в аргументе синуса пренебрегли членом  $\Delta\omega/2$  по сравнению с  $\omega$ ). График функции (6.5) изображен на рисунке 6.3. Множитель  $2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$  меняется с течением времени значительно медленнее по сравнению с величиной  $\sin \omega t$ .

Этот множитель можно считать амплитудой гармонического колебания, происходящего с частотой  $\omega$ . Эта амплитуда медленно изменяется в зависимости от времени по гармоническому закону. Такое колебание называют **биением**, а частоту пульсаций амплитуды — частотой биения. Период биений  $T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ . Явление биений используется при настройке музыкальных инструментов (гитара и т.д.). Например, при настройке фортепиано добиваются того, чтобы высокие гармоники двух струн давали заданную частоту биений.

## 6.4 СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Больше практическое значение имеет колебательный процесс, при котором материальная точка может совершать одновременно два независимых колебания во взаимно перпендикулярных направлениях. Например, груз, подвешенный на нити. Может совершать независимые колебания одновременно вдоль осей  $x$  и  $y$  (рисунок 6.4). Оба этих колебания имеют одинаковую частоту. Пусть амплитуды этих колебаний равны  $a$  и  $b$ , а разность фаз равна  $\varphi$ . Уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$x = a \sin \omega t, \quad y = b \sin(\omega t + \varphi). \quad (6.6).$$

Выражение (6.6) представляет собой заданной в пространственной форме уравнение траектории движения тела. Исключая из системы уравнений (6.6) время  $t$ , получим следующее выражение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left( \frac{2xy}{ab} \right) \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (6.7).$$

Это равенство представляет собой уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей. Определим форму траектории для некоторых частных случаев.

1. Разность фаз колебаний  $\varphi = 0$ . Уравнение (6.7) принимает вид  $\left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0$ . Эллипс вырождается в прямую, описываемую уравнением  $y = \left( \frac{a}{b} \right) x$ . Тело движется по прямой 1 на рисунке 6.4.

2. Разность фаз колебаний  $\varphi = \pi$ . Уравнение 6.7 принимает вид  $\left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = 0$ . Получаем уравнение прямой  $y = -\left( \frac{a}{b} \right) x$ . Тело движется по прямой 2 на рисунке 6.4.

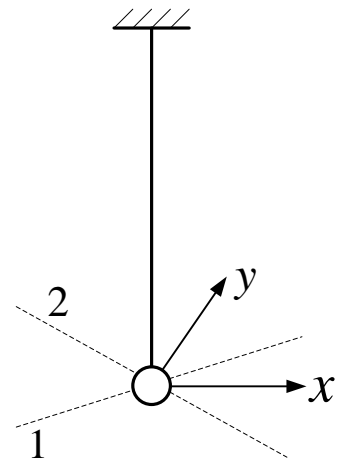


Рисунок 6.4

3. Разность фаз колебаний  $\varphi = \pm\pi/2$ . Уравнение 6.7 принимает вид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Получаем уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. Такое движение по эллипсу легко получить, если в данный момент максимального отклонения маятника при линейных колебаниях ему ударом сообщить импульс в перпендикулярном направлении.

Если частоты  $\omega_x$  и  $\omega_y$  взаимно перпендикулярных колебаний по осям  $x$  и  $y$  не одинаковы, а отношение их равно отношению целых чисел  $m$  и  $n$  ( $\omega_x/\omega_y = m/n$ ), то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых *фигурами Лиссажу*. Такие фигуры удобно наблюдать на экране осциллографа, когда горизонтальная и вертикальная разверстки управляются гармоническим электрическим сигналом с частотами  $\omega_x$  и  $\omega_y$ . Фигуры Лиссажу часто используются в измерительной технике для проверки точности эталонных частот, при акустических измерениях и т.д.

## 6.5 ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК

Рассмотрим колебания груза, прикрепленного к пружине с коэффициентом жесткости  $k$  (рисунок 6.5). При смещении груза от положения равновесия на расстояние  $x$  возникает результирующая сила, возвращающая груз к положению равновесия и равная

$$F_{\text{в}} = -kx. \quad (6.8)$$

Знак минус показывает, что направления силы и смещения противоположны. Для выяснения характера движения груза под действием силы  $F_{\text{в}}$  применим к нему второй закон Ньютона

$$F_{\text{г}} = ma = m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = m\ddot{x}, \quad (6.9)$$

где  $m$  – масса груза,  $a$  – ускорение груза,  $d^2 x / dt^2$  – вторая производная от  $x$  по времени, которую для простоты записи будем изображать в виде  $\ddot{x}$ . Приравнивая части формул (6.8) и (6.9) и преобразуя равенство, получим

$$\ddot{x} + \left( \frac{k}{m} \right) x = 0. \quad (6.10)$$

Запишем (6.10) в общем виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.11)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (6.12)$$

В итоге, решение физической задачи привело к выражению (6.11), которое представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка для  $x$  как для функции от времени. Как будет показано в дальнейшем, в общем случае дифференциальное уравнение второго порядка может содержать  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$ ,  $x$  и произвольную функцию  $F(t)$ , где  $\dot{x}$  – первая производная от  $x$  по времени. Решением дифференциального уравнения второго порядка будет являться любая функция  $x = f(t)$ , если при подстановке ее вместо  $x$ , а  $f''(t)$  и  $f'(t)$  соответственно, вместо  $\ddot{x}$  и  $\dot{x}$ , дифференциальное уравнение обращается в тождество.

Решением дифференциального уравнения (6.11) должна быть такая функция  $f(t)$ , которая после двойного дифференцирования должна с точностью до постоянного множителя иметь прежний вид, чтобы при подстановке ее и второй производной в дифференциальное уравнение оно не зависело от времени. Такой функцией является гармоническая функция, которую запишем в виде

$$x = a \sin(\omega t + \varphi), \quad (6.13)$$

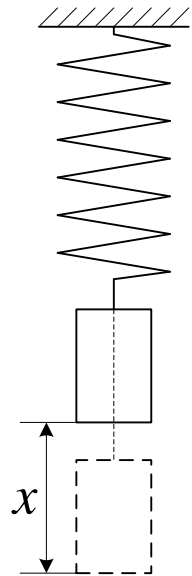


Рисунок 6.5

где  $a$  – амплитуда колебаний,  $\omega$  – круговая частота,  $\varphi$  – начальная фаза,  $x$  – смещение груза. Легко видеть, что  $\ddot{x} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$ . Подставляя выражение для  $\ddot{x}$  в уравнение (6.11), получим  $-\omega^2 x + \omega_0^2 x = 0$  или  $\omega = \omega_0$ . Итак, дифуравнение (6.11) превращается в тождество при  $\omega = \omega_0$ . Это означает, что решением дифуравнения (6.11) является гармоническая функция, определяемая выражением (6.13), тело будет совершать гармоническое колебание и частота этих колебаний определяется по формуле (6.12). Период колебаний груза на пружине найдем по формуле  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , или с учетом (6.12)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6.14)$$

Дифуравнение (6.11) может определять колебание различной природы. Любая физическая величина, удовлетворяющая этому дифуравнению, описывает простое гармоническое колебание. Уравнение такого типа носит название *дифференциального уравнения гармонических колебаний*.

## 6.6 ФИЗИЧЕСКИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

1. Произвольное тело, способное совершать колебания вокруг своей оси, не проходящей через центр масс, называют **физическим маятником**. Таким маятником, например, являются обыкновенные качели. Рассмотрим колеблющееся тело массой  $m$ , центр масс которого  $C$  находится на расстоянии  $a$  от оси вращения  $O$  (рисунок 6.6). На маятник будет действовать момент силы тяжести, равный  $M = mgh = -mgl \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – угол отклонения маятника от положения равновесия,  $h$  – плечо силы  $mg$ . Рассмотрим колебания малой амплитуды, для которых можно считать, что  $\sin \varphi \approx \varphi$ .



С учетом этого запишем:  $M = -mga\varphi$ , где знак минус введен, чтобы учесть. Что момент отклонения сил стремится повернуть маятник в сторону, противоположную углу отклонения. Для анализа колебаний маятника применим основное уравнение динамики вращательного движения:

$M = J\varepsilon = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = J\ddot{\varphi}$ , где  $\varepsilon$  – угловое ускорения маятника,  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  – вторая производная от угла поворота по времени. Условно обозначаемая, как  $\ddot{\varphi}$ . Подставляя выведенное ранее выражение для момента сил, получим  $J\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0$  или

$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{J}\varphi = 0$ . Это дифуравнение гармонических колебаний для  $\varphi$ , как функции от времени, подобное дифуравнению (6.11). Из сравнения дифуравнений имеем  $\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$  или для периода колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (6.15)$$

Рассмотрим физический маятник в виде тонкого стержня, подвешенного за его конец. Подставляя его момент инерции, равный  $J = \frac{1}{3}ml^2$ , в формулу (6.15), получим  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}}$ . Полученное выражение показывает. Что период колебаний не зависит от массы маятника.

2. Частным случаем физического маятника является **математический маятник**, который *представляет собой материальную точку, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити*. Если все материальные точки физического маятника собрать в центре его масс, то физический маятник превратится в математический. Подставляя момент инерции математического

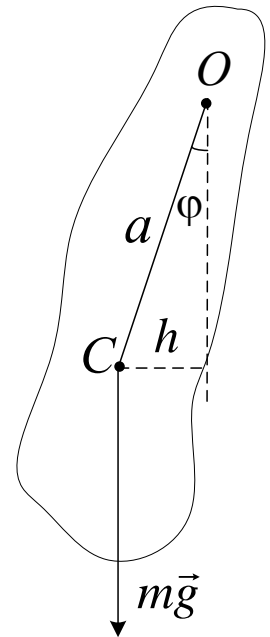


Рисунок 6.6

маятника, равный  $J = ml^2$ , в формулу (6.15), где  $l$  – длина нити, получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6.16)$$

Сравнивая формулы (6.15) и (6.16), можно ввести вспомогательную величину  $L = \frac{J}{ma}$  – *приведенную длину физического маятника*. Она равна длине нити такого математического маятника, период которого совпадает с периодом данного физического маятника.

## 6.7 КРУТИЛЬНЫЙ МАЯТНИК

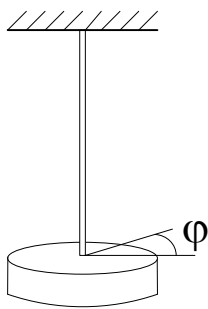


Рисунок 6.7

Рассмотрим груз, подвешенный на упругом стержне (проволоке) и имеющий возможность совершать крутильные колебания относительно вертикальной оси (рисунок 6.7). При повороте груза на некоторый угол  $\varphi$  от положения равновесия на него со стороны стержня действует возвращающий вращательный момент  $M = -k\varphi$ , где  $k$  – коэффициент жесткости стержня на кручение; знак минус учитывает, что момент  $M$  стремится повернуть груз в сторону, противоположную углу отклонения  $\varphi$ . Движение груза описывается основным уравнением динамики вращательного движения  $M = J\varepsilon = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = J\ddot{\varphi}$ , где  $\varepsilon$  –

угловое ускорение маятника;  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  – вторая производная от угла поворота по времени, обозначаемая, как  $\ddot{\varphi}$ ,  $J$  – момент инерции груза. Подставляя выведенное ранее выражение для момента сил, получим  $J\ddot{\varphi} + k\varphi = 0$  или  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ . Это дифференциальное уравнение гармонических колебаний для

$\varphi$  как функции от времени, подобную дифуравнению (6.11). Из сравнения дифуравнений для круговой частоты крутильных колебаний  $\omega_0$  имеем  $\omega_0^2 = \frac{k}{J}$  или для периода этих колебаний  $T = 2\pi\sqrt{J/k}$ .

## 6.8 ЭНЕРГИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Тело, совершающее гармонические колебания, называется *гармоническим осциллятором*. Силы, воздействующие на тело при гармонических колебаниях, являются консервативными, т.е. зависят только от координат, и для колеблющегося тела справедлив закон сохранения энергии: сумма потенциальной  $E_n$  и кинетической  $E_k$  энергий колеблющегося тела есть величина постоянная  $E = E_n + E_k = const$ , где  $E$  – полная энергия колеблющегося тела. При прохождении положения равновесия  $E_n = 0$  и полная энергия

$E = E_k = \frac{m v_m^2}{2}$ , где  $v_m$  – скорость тела при прохождении положения равновесия. Для нахождения значения скорости воспользуемся формулой  $v = \frac{dx}{dt}$ . Полагая в формуле (6.13) значение  $\varphi = 0$ , получим

после ее дифференцирования  $v = -a\omega \cos \omega t$ . Из этих формул видно, что при  $t = 0$  смещения  $x = 0$ , а скорость  $v$  имеет максимальное значение  $v_m = a\omega$ . Подставляя выражение  $v_m$  в формулу для полной

энергии. Получим  $E = \frac{ma^2\omega^2}{2}$ . При максимальном смещении тела скорость его движения  $v = 0$ , кинетическая энергия  $E_k = 0$ ,  $x = a$  и полная энергия колеблющегося тела  $E = \frac{ka^2}{2}$ .