ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. Высказывания и логические операции

Под *высказыванием* понимают повествовательное предложение, для которого имеет смысл говорить о его истинности или ложности. Этим высказывания отличаются, например, от повелительных или вопросительных предложений.

Например, «2x2 = 4», «Рим — столица Франции» суть высказывания, а предложения «Который час?», «Да здравствует мир на Земле!» или «Решить уравнение $x^2 + 3x - 2 = 0$» высказываниями не являются.

Под истинностным значением понимается абстрактный объект («истина» или «ложь»), сопоставляемый высказыванию в зависимости от того, является это высказывание истинным или ложным. Можно сказать, что «истина» («ложь») — это то общее, что присуще всем истинным (соответственно, ложным) высказываниям.

В математической логике для обозначения истинностных значений «истина» и «ложь» чаще всего используются числа 1 и 0 или буквы И и Л, T и F соответственно. Например, высказывание «2x2 = 4» имеет истинностное значение 1, а «Рим — столица Франции» — истинностное значение 0. Иногда говорят, что истинностные значения 0 и 1 двойственны друг другу.

Высказывания обозначают заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C,…

Из одних высказываний различными способами можно строить новые, более сложные высказывания. Различают элементарные и составные высказывания.

Элементарные высказывания не могут быть выражены через другие высказывания. *Составные* высказывания можно выразить с помощью элементарных высказываний.

Пример. “Число 22 четное” – элементарное высказывание. “Число 22 четное и делится на 11” – составное высказывание.

Логическая операция — это такой способ построения *сложного высказывания* из данных высказываний, при котором истинностное значение сложного высказывания полностью определяется истинностными значениями исходных высказываний.

Рассмотрим некоторые примеры логических операций.

Отрицание — логическая операция, в результате которой из данного высказывания A получается новое высказывание «Неверно, что A». Отрицание высказывания A будем обозначать $\neg A$

Конъюнкция — логическая операция, заключающаяся в соединении двух высказываний A и B в новое высказывание «A и B». Конъюнкцию высказываний A и B будем обозначать $A \wedge B$.

Дизъюнкция — логическая операция, заключающаяся в соединении двух высказываний A и B в новое высказывание «A или B». Дизъюнкцию высказываний A и B будем обозначать $A \vee B$.

Импликация — логическая операция, заключающаяся в соединении двух высказываний A и B в новое высказывание «Если A, то B». Импликацию высказываний A и B будем обозначать $A \to B$.

Эквиваленция — логическая операция, заключающаяся в соединении двух высказываний A и B в новое высказывание «A равносильно B». Эквиваленцию высказываний A и B будем обозначать $A \leftrightarrow B$.

Истинностные значения составных высказываний, полученных с помощью перечисленных операций определим с помощью таблицы истинности:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

В математической логике принято не различать логические операции с одинаковыми истинностными таблицами независимо от того, какое словесное оформление имеют эти логические операции.

Например, высказывание $A \rightarrow B$ может передаваться посредством выражений «Если *A*, то *B*», «*A* влечет *B*», «В случае *A* имеет место *B*», «Для *A* необходимо *B*», «*A*, только если *B*» и т.п.

Вот языковые эквиваленты для других логических операций.

$\neg A$ может читаться как «Не *A*», «*A* не имеет места», «*A* неверно». Выражение $A \wedge B$ может означать «*A* и *B*», «Не только *A*, но и *B*», «Как *A*, так и *B*». Выражение $A \vee B$ может читаться как «*A* или *B* или оба», «*A* или *B*», «*A*, если не *B*». Наконец, $A \leftrightarrow B$ может передаваться как «*A*, если и только если *B*», «Если *A*, то *B*, и обратно», «*A* эквивалентно *B*», «*A* равносильно *B*», «*A* тогда и только тогда, когда *B*».

А вот пример операции над высказываниями, которая не является логической операцией: по высказыванию *A* строим высказывание «Я знаю, что *A*». Очевидно, что истинность или ложность такого высказывания зависит не только от истинностного значения высказывания *A*, но и от осведомленности лица, произносящего это высказывание.

Логическая (или *булева*) *функция* f — это *n*-местная функция, определенная на множестве истинностных значений $\{0,\ 1\}$ и принимающая значения в этом же множестве: $f:\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$.

С каждой (*n*-местной) логической операцией φ естественным образом связана (*n*-местная же) логическая функция f_φ: если $x_1, x_2, \ldots x_n$ — некоторый набор истинностных значений, $x_i \in \{0,1\}$, то $f_\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ есть истинностное значение высказывания $\varphi(P_1, P_2, \ldots P_n)$, где $P_1, P_2, \ldots P_n$— такие высказывания, что истинностное значение высказывания P_i есть x_i, $i = 1, 2, \ldots n$.

Булевы (*логические*) *функции* были подробно рассмотрены в курсе дискретной математики.

2. Формулы. Классификация формул

Элементарные высказывания будем обозначать большими латинскими буквами и называть пропозициональными переменными.

Определение.

1) Всякая пропозициональная переменная есть формула.

2) Если F, G - формулы, то формулами являются также $\neg F$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$.

3) Никаких других формул нет

Например, $(\neg F \vee G)$, $((\neg F \vee G) \to (F \leftrightarrow G))$ -- формулы, но выражения $\neg F \vee G$, $\neg F \vee G \to F \leftrightarrow G$ формулами не являются.

Замечание. Поскольку большое количество скобок часто затрудняет восприятие формулы, договоримся о том, что внешние скобки формулы допустимо опускать, а порядок логических операций (при отсутствии скобок) выполняется в следующем порядке: $\neg$, $\wedge$, $\vee$; операции $\to$ и $\leftrightarrow$ выполняются в порядке следования.

Тогда выражение $\neg F \vee G \to F \leftrightarrow G$ можно считать формулой, причем порядок выполнения операций будет следующим $((\neg F \vee G) \to F) \leftrightarrow G$.

Часть формулы, которая сама является формулой, называется *подформулой* данной формулы.

Пусть формула F содержит n пропозициональных переменных $X_1, X_2, \dots X_n$. Если подставить вместо этих переменных истинностные значения (1 или 0), то по таблицам истинности логических операций можно вычислить истинностное значение формулы в целом.

Определение. Формула F называется *тождественно истинной*, или *тавтологией* (записывается $F \equiv 1$), если для всех наборов значений входящих в нее пропозициональных переменных она принимает значение 1 («истинно»).

Формула F называется *тождественно ложной*, или *противоречием* (записывается $F \equiv 0$), если для всех наборов значений входящих в нее переменных она принимает значение 0 («ложь»).

Заметим, что отрицание любой тавтологии есть противоречие: $\neg(F \equiv 1) = 0$.

Формула F называется *выполнимой*, если найдется такой набор значений входящих в нее пропозициональных переменных, на котором она принимает значение 1 («истинно»).

Формула F называется *опровержимой*, если найдется такой набор значений входящих в нее пропозициональных переменных, на котором она принимает значение 0 («ложь»).

Из курса дискретной математики известны основные логические эквивалентности (свойства логических операций), которые являются примерами тавтологий.

1. Коммутативность: $A \vee B = B \vee A,\ A \wedge B = B \wedge A$.
2. Ассоциативность: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$, $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$.
3. Дистрибутивность: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C),\ A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
4. Идемпотентность: $A \vee A = A,\ A \wedge A = A$.
5. Закон двойного отрицания: $\neg\neg A = A$.
6. Закон исключения третьего: $A \vee \neg A = 1$.
7. Закон противоречия: $A \wedge \neg A = 0$.
8. Законы де Моргана: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B,\ \neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$.
9. Свойства операций с логическими константами:

$$A \vee 1 = 1,\ A \vee 0 = A,\ A \wedge 1 = A,\ A \wedge 0 = 0.$$

Здесь A, B и C – произвольные формулы.

Докажем, что перечисленные формулы действительно являются тавтологиями.

1. Доказать, что формула $A \wedge B \to A$ является тавтологией.

Доказательство. Допустим, что при некоторых значениях букв (то есть в некоторой интерпретации)

$$|A \wedge B \to A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |A \wedge B| = 1, \\ |A| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| = 1, \\ |B| = 1, \\ |A| = 0. \end{cases}$$

Приходим к противоречию, которое доказывает, что исходная формула – тавтология.

2. Доказать, что формула $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ является тавтологией.

Доказательство. Эквиваленция истинна, если левая и правая части принимают одинаковые значения на некотором наборе значений букв.

Допустим, что при некоторых значениях букв

$$|(A \wedge B) \wedge C| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |A \wedge B| = 1, \\ |C| = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| = 1, \\ |B| = 1, \\ |C| = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| = 1, \\ |B \wedge C| = 1, \end{cases} \Leftrightarrow |A \wedge (B \wedge C)| = 1.$$

Следовательно, исходная формула – тавтология.

3. Доказать, что формула $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ является тавтологией.

Доказательство. Допустим, что при некоторых значениях букв

$$|(A \vee B) \vee C| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |A \vee B| = 0, \\ |C| = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| = 0, \\ |B| = 0, \\ |C| = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |A| = 0, \\ |B \vee C| = 0, \end{cases} \Leftrightarrow |A \vee (B \vee C)| = 0.$$

Следовательно, исходная формула – тавтология.

Таким образом, тождественную истинность импликации удобно доказывать от противного, а тождественную истинность эквиваленции установлением равенства значений левой и правой части.

Теорема. Пусть формулы A и $A \to B$ – тавтологии. Тогда формула B – тавтология.

Доказательство. Пусть P_1, P_2, …, P_k – буквы в формулах A и $A \to B$. В теории булевых функций было доказано, что все булевы функции, а, следовательно, и формулы, можно считать зависящими от одного и того же количества букв. Рассмотрим некоторый набор значений σ_1, σ_2, …, σ_k, где $\sigma_i \in \{0,1\}$, $i = 1,2,\dots,k$. Подставим данный набор значений в формулы A и $A \to B$ вместо соответствующих букв. Формулы являются тавтологиями по условию теоремы, следовательно, $A(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k) = 1$ и $A(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k) \to B(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k) = 1$. По таблице истинности импликации получаем, что $B(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k) = 1$. Поскольку набор значений σ_1, σ_2, …, σ_k был произволен, формула B – тавтология, что и требовалось доказать.

3. Отношения логической эквивалентности и логического следствия

Определение. Формулы A и B называются логически эквивалентными тогда и только тогда, когда формула $A \leftrightarrow B$ – тавтология.

Замечание. Формула $A \leftrightarrow B$ – тавтология, если таблицы истинности формул A и B совпадают.

Пример. По законам де Моргана, логически эквивалентны формулы $\neg(A \wedge B)$ и $\neg A \vee \neg B$, а также формулы $\neg(A \vee B)$ и $\neg A \wedge \neg B$.

Теорема. Отношение логической эквивалентности является отношением эквивалентности.

Рефлексивность, симметричность и транзитивность данного отношения следуют из замечания.
Справедливы правило подстановки и правило замены.

Пусть F и G – формулы, содержащие букву A, F_H^A и G_H^A – формулы, полученные из формул F и G соответственно подстановкой вместо буквы A формулы H.

Правило подстановки. Если формула F логически эквивалентна формуле G, то формула F_H^A логически эквивалентна формуле G_H^A.

Пусть F_G – формула, в которой выделена некоторая подформула G, F_H – формула, полученная из формулы F_G заменой G на некоторую формулу H.

Правило замены. Если формулы G и H логически эквивалентны, то логически эквивалентны и формулы F_G и F_H.

Доказательства правил подстановки и замены основано на сравнении таблиц истинности соответствующих формул.

Пример. Известна тавтология $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ (проверьте самостоятельно). По правилу подстановки, формула $(\neg A \to B)$ логически эквивалентна формуле $(\neg\neg A \vee B)$. По правилу замены, примененному к закону двойного отрицания, получаем, что формула $(\neg\neg A \vee B)$ логически эквивалентна формуле $(A \vee B)$. Следовательно, по свойству транзитивности, формулы $(\neg A \to B)$ и $(A \vee B)$ логически эквивалентны.

Определение. Говорят, что формула A логически влечет формулу B (из формулы A логически следует формула B), если формула $A \to B$ является тавтологией.

Теорема. Отношение логического следствия является отношением предпорядка, то есть рефлексивным и транзитивным отношением.

Пример. Формула $A \wedge B$ логически влечет формулу A. В самом деле, в примере 1 предыдущего пункта было доказано, что формула $A \wedge B \to A$ является тавтологией.

4. Решение логических задач с помощью алгебры высказываний

Условие логической задачи записываем в виде формулы алгебры высказываний, вводя соответствующие обозначения для простых высказываний, сформулированных в задаче. Далее с помощью равносильных преобразований упрощаем формулу (составное высказывание). В результате получаем более простую словесную формулировку упрощенной формулы, на основании которой даем ответ на вопрос задачи.

Пример 1. На вопрос: «Кто из трех студентов готовился к экзамену?» получен верный ответ — «Если готовился Иванов, то готовился и Сидоров, но неверно, что если готовился Петров, то готовился и Сидоров».
Кто готовился к экзамену?

Решение. Обозначим простые высказывания «готовился к экзаменуИванов» (Петров, Сидоров) соответственно буквами A,B,C. Тогда условие задачи можно записать в виде формулы: $(A \to C)\wedge\left(\overline{B \to C}\right)$, так как составные высказывания $(A \to C)$ и $\left(\overline{B \to C}\right)$ («Если готовился Иванов, то готовился и Сидоров» и «Неверно, что если готовился Петров, то готовился и Сидоров») выполняются одновременно и поэтому они должны быть соединены логической связкой $\wedge$(«*и*»). Выполняя равносильные преобразования, получим

$$(A \to C)\wedge\left(\overline{B \to C}\right)=\left(\overline{A}\vee C\right)\wedge\left(\overline{\overline{B}\vee C}\right)=\left(\overline{A}\vee C\right)\wedge\left(\overline{\overline{B}}\vee\overline{C}\right)=$$
$$=\left(\overline{A}\wedge B\wedge\overline{C}\right)\vee\left(B\wedge C\wedge\overline{C}\right)=\overline{A}\wedge B\wedge\overline{C}$$

Теперь читаем формулу: «Не готовился Иванов и не готовился Сидоров и готовился Петров к экзамену».

Ответ: К экзамену готовился Петров.

Пример 2. «Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.

- Говорит Мегрэ. Есть новости?

- Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жусье считает, что или Этьен убийца или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем по звонила ….

- Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все».

Какой вывод сделал Мегрэ?

Решение. Введем следующие элементарные высказывания:

A= {Франсуа был пьян},
B= {Этьен убийца},
C= {Франсуа лжет},
D= {Убийство произ ошло п осле полуночи}.

Инспектора комиссара Мергэ установили, что:

$$A \to (B \vee C) \equiv 1$$
$$B \vee \left(\overline{A}\wedge D\right) \equiv 1$$
$$D \to (B \vee C) \equiv 1$$

Рассмотрим конъюнкцию этих трех сложных высказываний и упростим ее:

$$\left(A \to (B\vee C)\right)\wedge\left(B\vee\left(\overline{A}\wedge D\right)\right)\wedge\left(D\to(B\vee C)\right)\equiv 1$$

Используя формулу $u \to v = \overline{u}\vee v$, освободимся от импликации:

$$\left(\overline{A}\vee B\vee C\right)\wedge\left(B\vee\left(\overline{A}\wedge D\right)\right)\wedge\left(\overline{D}\vee B\vee C\right)\equiv 1$$

Применим второй дистрибутивный закон к первому и третьему множителям.

$$\left(\left(\overline{A}\wedge\overline{D}\right)\vee B\vee C\right)\wedge\left(B\vee\left(\overline{A}\wedge D\right)\right)\equiv 1$$

Раскрывая скобки по первому дистрибутивному закону дважды и применяя закон поглощения $u\vee(u\wedge v)=u$, получим

$$B\vee\left(\overline{A}\wedge D\wedge C\right)\vee\left(\overline{A}\wedge D\wedge\overline{D}\right)\equiv 1$$

Так как $\left(\overline{A}\wedge D\wedge\overline{D}\right)\equiv 0$, то окончательно имеем:

$$B\vee\left(\overline{A}\wedge D\wedge C\right)\equiv 1.$$

Таким образом, из показаний инспекторов следовало лишь, что или Этьен убийца, или одновременно имели место три обстоятельства: Франсуа не был пьян, убийство произошло после полуночи, Франсуа лгал. Но комиссару Мергэ было известно, что трезвый Франсуа не лжет, т.е. что $\overline{A} \wedge \overline{C} = 1$ или $\overline{A} \wedge C = 0$, и , следовательно, результат, вытекающий из показаний инспекторов, $B \vee \left(\overline{A} \wedge D \wedge C\right) \equiv 1$, при этом условии дает $B \vee 0 = 1$, то есть $B \equiv 1$.

Ответ: Убийство совершил Этьен.