Обзор методов интегрирования основных видов интегралов.

№	Вид интеграла	Метод интегрирования
1	$\int F[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$.	Подстановка $\varphi(x)=t$.
2	$\int f(x)\varphi'(x)dx$.	Интегрирование по частям: $\int f(x)\varphi'(x)dx=\int f(x)d\varphi(x)=f(x)\varphi(x)-\int \varphi(x)f'(x)dx$. Метод интегрирования по частям применяется, например, к интегралам вида $\int p(x)f(x)dx$, где $p(x)$ - многочлен, а $f(x)$ - одна из следующих функций: $e^{\alpha x}$, $\cos\alpha x$, $\sin\alpha x$, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$ и т. д., а также к интегралам от произведений показательной функции на косинус или синус.
3	$\int f(x)\varphi^{(n)}(x)dx$.	Сводится к интегрированию произведения $f^{(n)}(x)\varphi(x)$ с помощью формул кратного интегрирования по частям: $\int f(x)\varphi^{(n)}(x)dx=f(x)\varphi^{(n-1)}(x)-f'(x)\varphi^{(n-2)}(x)+$ $+\ldots+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)\varphi(x)+(-1)^n\int f^{(n)}(x)\varphi(x)dx$.
4	$\int e^{\alpha x}p_n(x)dx$, где $p_n(x)$ - многочлен степени n.	Применяя формулу кратного интегрирования по частям (см. п. 3), получим: $\int e^{\alpha x}p_n(x)dx=e^{\alpha x}\left[\frac{p_n(x)}{\alpha}-\frac{p_n'(x)}{\alpha^2}+\ldots+(-1)^n\frac{p_n^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}}\right]$.
5	$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $p^2-4q<0$.	$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$. Подстановка $x+\frac{p}{2}=t$.
6	$I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$.	Применение рекуррентной формулы: $I_n=\frac{x}{(2n-2)a^2\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}$.
7	$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь; $Q(x)=(x-x_1)^l(x-x_2)^m\ldots\left(x^2+px+q\right)^k$	Подынтегральную дробь представляют в виде суммы простейших дробей: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_l}{(x-x_1)^l}+\frac{B_1}{x-x_2}+$ $\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_m}{(x-x_2)^m}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$ $\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}$.
8	$\int R\left(x,x^{m/n},\ldots,x^{r/s}\right)dx$, где R - рациональная функция своих аргументов.	Приводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $x=t^k$, где k - общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}$, …, $\frac{r}{s}$.
9	$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right)dx$, где R - рациональная функция своих аргументов.	Сводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$.

10	$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$	$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$. Подстановкой $x+\frac{b}{2a}=t$ интеграл сводится к сумме двух интегралов: $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=M_1\int \frac{tdt}{\sqrt{at^2+m}}+N_1\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}$. Первый интеграл сводится к интегралу от степенной функции, а второй – табличный.
11	$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где R - рациональная функция своих аргументов.	Приводится к интегралу от рациональной дроби подстановками Эйлера: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$, если $a>0$; $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$, если $c>0$; $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$, если $4ac-b^2>0$ и x_1 - один из корней квадратного трехчлена ax^2+bx+c.
12	$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n.	Записываем равенство $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+$ $+k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $Q_{n-1}(x)$ - многочлен степени $n-1$. Дифференцируя обе части этого равенства и умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получим тождество $P_n(x)\equiv Q'_{n-1}(x)\left(ax^2+bx+c\right)+\frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b)+k$, которое дает систему $n+1$ линейных уравнений для определения коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ и множителя k. Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ берется методом, указанном в п. 10.
13	$\int \frac{dx}{(x-x_1)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.	Этот интеграл приводится подстановкой $x-x_1=\frac{1}{t}$ к интегралу, рассмотренному выше.
14	$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$.	Интеграл от биномиального дифференциала выражается через элементарные функции только при выполнении одного из следующих условий: 1) если p - целое число; 2) если $\frac{m+1}{n}$ - целое число; 3) если $\frac{m+1}{n}+p$ - целое число. 1а) Если $p\in Z_+\equiv N$, то нужно раскрыть скобки по формуле бинома Ньютона и вычислить интеграл от суммы степенных функций. 1б) Если $p\in Z_-$, то подстановка $x=t^k$, где k - общий знаменатель дробей m и n, приводит к интегралу от рациональной дроби.

		2) Если $\frac{m+1}{n} \in Z$, то применяется подстановка $a+bx^n = t^k$, где k - знаменатель дроби p. 3) Если $\frac{m+1}{n} + p \in Z$, то применяется подстановка $a+bx^n = x^n t^k$, где k - знаменатель дроби p.
15	$\int R(\sin x, \cos x)dx$.	Универсальная тригонометрическая подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$. Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\sin x = t$. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$.
16	$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx$.	Подстановка $\operatorname{th}\frac{x}{2} = t$, при этом $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1-t^2}$.
17	$\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$	Необходимо преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму или разность, пользуясь одной из следующих формул: $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$, $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$, $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$.
18	$\int \sin^p x \cos^q x dx$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, p и q - рациональные числа.	Подстановкой $\sin x = t$ приводится к интегралу от биномиального дифференциала (см. п. 14).
19	$\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n -целые числа.	Если m - нечётное положительное, то подстановка $\cos x = t$. Если n - нечётное положительное, то подстановка $\sin x = t$. Если $m+n$ - чётное отрицательное, то подстановка $\tan x = t$. Если m и n - чётные неотрицательные, то применяются формулы понижения степени $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.
20	$\int R(e^{ax})dx$.	Подстановкой $e^{ax} = t$ преобразуется в интеграл от рациональной функции.

Таблица взята из книги П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова «Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть I». М.: Высшая школа, 1980.

1°. **Понятие неопределенного интеграла.** Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке (a, b) и $F(x)$ — ее первообразная, т. е. $F'(x) = f(x)$ при $a < x < b$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad a < x < b,$$

где C — произвольная постоянная.

2°. **Основные свойства неопределенного интеграла:**

а) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx$; б) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$;

в) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$ ($A = \text{const}$; $A \neq 0$);

г) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

3°. **Таблица простейших интегралов:**

I. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

III. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

IV. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$.

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

VI. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$.

VII. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$; $\int e^x dx = e^x + C$.

VIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$. IX. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

X. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XII. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$ XIII. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

4°. Основные методы интегрирования.

а) *Метод введения нового аргумента.* Если

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)\, du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

б) *Метод разложения.* Если

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то

$$\int f(x)\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx.$$

в) *Метод подстановки.* Если $f(x)$ — непрерывна, то, полагая

$$x = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$, получим

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

г) *Метод интегрирования по частям.* Если u и v — некоторые дифференцируемые функции от x, то

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

. . .

I. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$

II. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C \quad (a \neq 0).$

III. $\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C.$

IV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln | x + \sqrt{x^2 \pm a^2} | + C \quad (a > 0).$

VI. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0).$

VII. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} +$

$$+ \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

VIII. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm$

$$\pm \frac{a^2}{2} \ln | x + \sqrt{x^2 \pm a^2} | + C \quad (a > 0).$$