

4. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1 ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА

Размеры и форма твердого тела значительно определяют характер его движения. Твердое тело может не только двигаться поступательно, но и вращаться. Для описания поступательного движения вводят понятие центра масс твердого тела. В однородном поле тяготения центр масс совпадает с центром тяжести тела. Твердое тело, имеющее массу m мысленно разбивают на систему из n материальных точек с массами m_i , где $i = 1, 2, \dots, n$. В каждую точку из начала координат проводят радиус-вектор \vec{r}_i . *Центром масс* (или центром инерции) тела называют точку C , положение которой задается радиус-вектором \vec{r}_c , определяемым по формуле:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}. \quad (4.1)$$

Запишем для каждой материальной точки твердого тела второй закон Ньютона:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{f}_i + \vec{F}_i, \quad (4.2)$$

где \vec{a}_i – ускорение i – той материальной точки, \vec{f}_i – результирующая всех внутренних сил действующих на i – тую точку, \vec{F}_i – результирующая всех внешних сил, приложенных к данной материальной точке. Просуммировав уравнение (4.2) записанное для всех материальных точек, получим:

$$\sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{f}_i + \sum \vec{F}_i. \quad (4.3)$$

По третьему закону Ньютона каждой внутренней силе \vec{f}_i найдется равная ей по величине и противоположно направленная сила, так что, все внутренние силы попарно уничтожаются и $\sum \vec{f}_i = 0$. Уравнение (4.3) упрощается

$$\sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i. \quad (4.4)$$

Сумму, стоящую в левой части равенства, можно связать с центром масс тела. Для этого представим формулу (4.1) в виде $m\vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i$. Продифференцируем это выражение дважды по времени и приняв во внимание, что $\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{a}_i$ и $\frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \vec{a}_c$, получим:

$$m\vec{a}_c = \sum m_i \vec{a}_i. \quad (4.5)$$

Сравнивая формулы (4.4) и (4.5) приходим к уравнению

$$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) представляет собой **теорему о движении центра масс**: *центр масс твердого тела движется так же, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием тех же внешних сил.*

4.2 КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Рассмотрим произвольное твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси. Разобьем тело на n материальных точек с массами m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и проведем к ним радиус-векторы \vec{r}_i от оси вращения перпендикулярно этой оси (рисунок 4.1). Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела складывается из кинетических энергий каждой i -той материальной точки $\frac{m_i v_i^2}{2}$, где $v_i = \omega r_i$ – линейная скорость

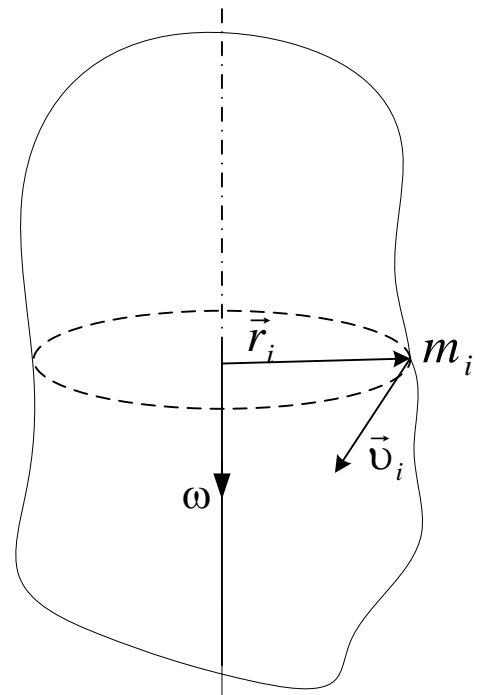


Рисунок 4.1

i -той материальной точки, ω – угловая скорость вращения тела.

Полная кинетическая энергия вращательного движения

$$E_{\text{вр}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2.$$

Величину

$$J = \sum m_i r_i^2 \quad (4.7)$$

называют *моментом инерции тела* относительно данной оси вращения. Сделав замены, для кинетической энергии вращения получим

$$E_{\text{вр}} = \frac{J \omega^2}{2}. \quad (4.8)$$

Если сравнить формулу (4.8) с формулой для кинетической энергии поступательного движения $\left(E_{\text{к}} = \frac{m v^2}{2} \right)$, то заметим, что они похожи по написанию. В обеих формулах скорости имеют квадраты, а величина J эквивалентна массе тела и определяет инертность тела по отношению к вращательному движению.

Из формулы (4.7) видно, что момент инерции, есть величина аддитивная. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.

В общем случае масса i -той материальной точки твердого тела $m_i = \rho \Delta V_i$, где ΔV_i – объем материальной точки, ρ – плотность тела. Подставляя m_i в формулу (4.7), получим $J = \sum \rho r_i^2 \Delta V_i$. Устремляя ΔV_i к нулю в пределе получим

$$J = \int \rho r^2 dV. \quad (4.9)$$

Интеграл в уравнении (4.9) берется по всему объему тела.

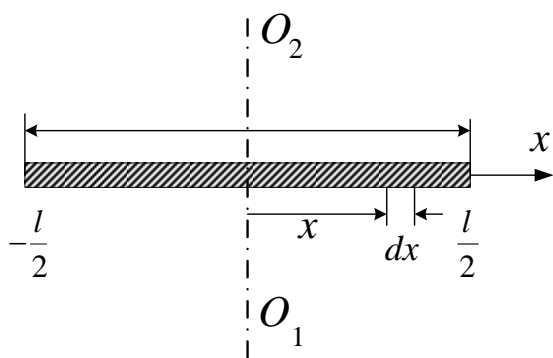


Рисунок 4.2

В качестве примера расчетов по формуле (4.9) найдем момент инерции *тонкого стержня* длиной l и массой m относительно оси вращения O_1O_2 , проходящей через его центр перпендикулярно к стержню (рисунок 4.2). Разобьем стержень на элементы длиной dx и

объемом $dV = Sdx$, где S – площадь поперечного сечения стержня. Вынося ρ из под знака интеграла (4.9) как постоянную величину и учитывая, что $m = \rho Sl$, а $r = x$, получим

$$J_0 = \rho S \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{12} ml^2.$$

Аналогичный расчет можно сделать для тела другой формы. Приведем значения моментов инерции правильной формы **относительно оси вращения проходящей через центр масс** (табл.1)

Таблица 1

Обруч (тонкостенный цилиндр)	$J_0 = mR^2$	R – радиус обруча (цилиндра)
Диск (сплошной однородный цилиндр)	$J_0 = \frac{1}{2} mR^2$	R – радиус диска (цилиндра)
Шар	$J_0 = \frac{2}{5} mR^2$	R – радиус шара
Стержень	$J_0 = \frac{1}{12} ml^2$	l – длина стержня

Если ось вращения сместить параллельно ей на расстояние a от центра масс, то момент инерции возрастет на величину ma^2 и будет определяться по формуле

$$J = J_0 + ma^2. \quad (4.10)$$

Данное равенство представляет собой **теорему Штейнера**: *момент*

инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями. Применяв, например, эту теорему для нахождения момента инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярно к нему, получим:

$$J = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

4.3 МОМЕНТ СИЛЫ. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНО ДВИЖЕНИЯ

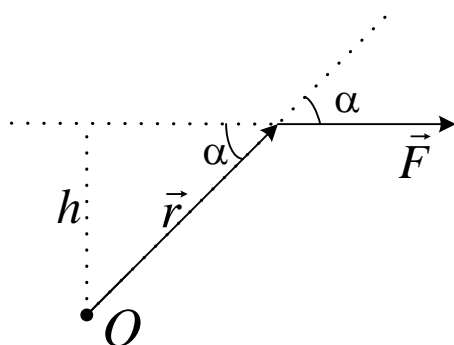


Рисунок 4.3

Вращательное действие силы определяется не только величиной силы, но и плечом h (рисунок 4.3). *Плечом силы* называется кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вынужденного вращения. *Произведение величины силы F на ее плечо называют моментом силы относительно точки*

или **вращательным моментом**: $M = Fh$. Проведем радиус-вектор \vec{r} от точки O до точки приложения силы. Учитывая, что $h = r \sin \alpha$, получим $M = Fr \sin \alpha$. В общем случае, момент силы относительно точки O представляет собой векторное произведение:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]. \quad (4.11)$$

Направление вектора \vec{M} определяется по правилу правого винта. Момент силы направлен вдоль оси вынужденного вращения, т.е. является аксиальным вектором. Если на тело действует n сил, то результирующий момент относительно точки O равен векторной сумме моментов каждой силы:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n.$$

Пусть результирующая всех внешних сил \vec{F} вызывает вращательное движение тела. Рассматривая тело, как систему материальных точек, на которые действуют внешние и внутренние силы, можно сказать, что работа всех внутренних сил равна нулю, так как по третьему закону Ньютона каждой силе найдется равная ей по величине и противоположная ей по направлению, работы, которых в сумме будут равны нулю. Элементарная работа силы \vec{F} равна $dA = Fds \cos \varphi$, где ds – модуль перемещения точки приложения силы (рисунок 4.4), φ – угол между векторами $d\vec{s}$ и \vec{F} . При малом угле поворота $d\varphi$ из рисунка 4.4 следует, что $\cos \varphi = \sin \alpha$, а $ds = r d\varphi$, где α – угол между векторами \vec{F} и \vec{r} . Учитывая эти соотношения, получим $dA = Fr d\varphi \sin \alpha$, или

$$dA = Md\varphi. \quad (4.12)$$

Элементарная работа силы \vec{F} равна изменению кинетической энергии тела:

$$dA = dE = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right). \quad (4.13)$$

Приравнивая правые части равенств (4.12)

и (4.13), получим $Md\varphi = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega$.

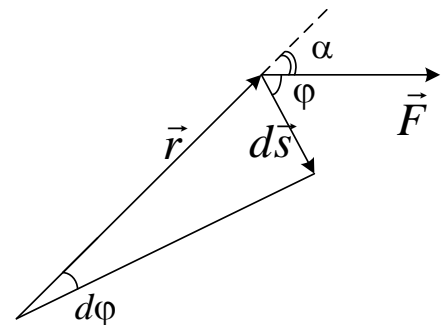


Рисунок 4.4

Подставляя в это равенство $d\varphi = \omega dt$, получим $M = \frac{Jd\omega}{dt} = J\varepsilon$, или в векторной форме

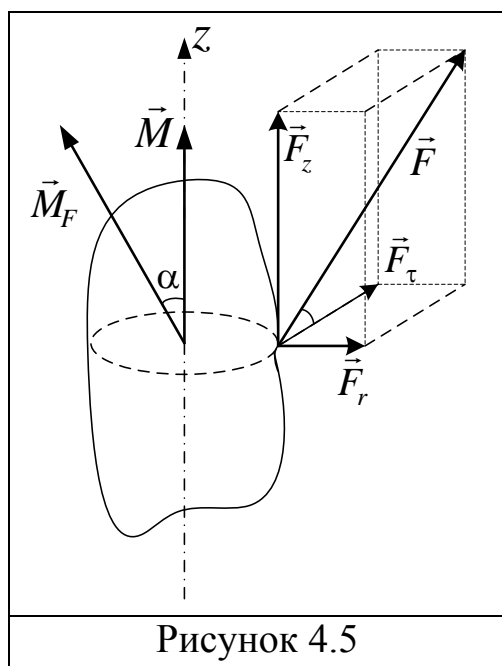
$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon}. \quad (4.14)$$

Формула (4.14) выражает **основной закон динамики вращательного движения твердого тела**: *произведение момента инерции твердого тела относительно оси вращения на вектор его углового ускорения равен векторной сумме моментов всех внешних сил относительно этой оси*. Этот закон аналогичен второму закону Ньютона в виде $\vec{F} = m\vec{a}$. При этом аналогом линейного ускорения

служит угловое ускорение, аналогом сил – их моменты, а аналогом массы – момент инерции. Аналогия величин характеризующих динамику вращательного движения и динамику поступательного движения представлена в таблице 2.

Таблица 2

Поступательное движение	Вращательное движение
Основной закон динамики	
$F = ma$	$M = J \varepsilon$
$F\Delta t = m v_2 - m v_1$	$M\Delta t = J \omega_2 - J \omega_1$
Закон сохранения	
импульса	момента импульса
$\sum_{i=1}^n m_i v_i = const$	$\sum_{i=1}^n J_i \omega_i = const$
Работа и мощность	
$dA = F ds$	$dA = M d\varphi$
$N = F v$	$N = M \omega$
Кинетическая энергия	
$E_k = \frac{mv^2}{2}$	$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$



Пусть тело имеет закрепленную ось вращения z и на него действует равнодействующая всех внешних сил \vec{F} , создающая момент \vec{M}_F относительно некоторой точки оси вращения. Разложим силу \vec{F} на составляющие $\vec{F}_\tau, \vec{F}_r, \vec{F}_z$ (рисунок 4.5). Легко видеть, что составляющие \vec{F}_r и \vec{F}_z , которые направлены соответственно перпендикулярно и параллельно оси z не могут вызвать вращение тела.

Вращающий момент создается силой \vec{F}_τ , направленной по касательной к траектории движения точки. Можно показать, что момент этой силы направлен по оси вращения и равен проекции момента \vec{M}_F на ось z , т.е. полагают, что его модуль $M = (M_F)_z = F_\tau h$, где h – плечо силы \vec{F}_τ .

4.4 МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

Во вращающемся твердом теле i – тая материальная точка имеет момент импульса, равный $L_i = m_i v_i r_i$, где $i = 1, 2, \dots, n$, n – число точек составляющих тело. Суммируя моменты импульса для всех точек, и учитывая соотношения $v_i = \omega r_i$, получим момент импульса твердого тела:

$$L = \sum m_i v_i r_i = \omega \sum m_i r_i^2 = J \omega, \quad (4.15)$$

где J – момент инерции тела, ω – угловая скорость вращения тела.

Момент импульса тела является векторной величиной, направленной по оси вращения, следовательно, выражение (4.15)

можно записать в виде

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (4.16)$$

Воспользуемся основным законом динамики вращательного движения $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$. Выполним замену углового ускорения через производную угловой скорости $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, и полагая, что $J = const$ внесем его под знак дифференциала. В итоге получим обобщенную форму записи основного уравнения динамики вращательного движения

$$\vec{M} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (4.17)$$

Если $\vec{M} = 0$, то момент импульса тела $\vec{L} = J\vec{\omega} = const$. Таким образом получаем закон сохранения момента импульса тела, который является частным случаем закона сохранения момента импульса материальной системы.

Применим закон сохранения момента импульса для анализа движения спортсмена. Этот закон должен выполняться при вращении гимнаста, фигуриста и т.д. Если спортсмен группируется так, чтобы приблизить точки тела к оси вращения (гимнаст сгибается, фигурист сближает руки и ноги), то он уменьшает свой момент инерции J (примерно в 3 – 4 раза) следовательно угловая скорость вращения ω возрастает. При возвращении спортсмена в начальное состояние его момент инерции увеличивается, и скорость вращения заметно уменьшается.

Закон сохранения момента импульса твердого тела широко используется в различных технических устройствах. Способность вращающихся тел сохранять постоянным момент импульса \vec{L} , а значит и положение оси вращения в пространстве, используется в **гироскопе**, который представляет собой *массивное тело, быстро вращающееся около оси вращения*. Ось вращения гироскопа может перемещаться относительно корпуса благодаря специальному подвесу, а корпус связан с движущимся объектом, например

самолетом. При изменении положения корпуса в пространстве изменяется его положение относительно оси вращения гироскопа, при этом положение самой оси относительно поверхности земли должно оставаться постоянным. Это изменение преобразуют в сигнал, который корректирует полет самолета. Такое устройство называется автопилотом.

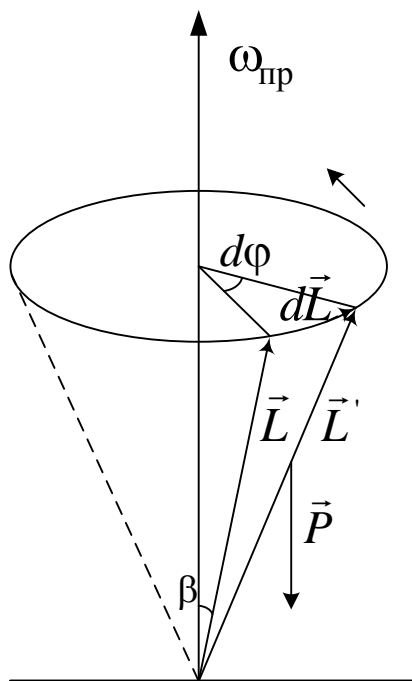


Рисунок 4.6

Важное значение в технике имеет **гироскопический эффект**, который объясняет поведение волчка (известной детской игрушки юлы) и других устройств. Если ось вращения волчка наклонена к вертикали, то под действием силы тяжести волчок не будет падать, а будет совершать дополнительное прецессионное вращение своей оси вокруг вертикального направления с угловой скоростью прецессии $\omega_{пр}$ (рисунок 4.6). Направление оси вращения волчка совпадает с направлением его момента импульса \vec{L} . Пусть \vec{P} – сила тяжести действующая на волчок, ω – угловая скорость волчка. За время dt момент импульса волчка изменит свою величину на $d\vec{L} = \vec{M}dt$. Вектор момента силы тяжести \vec{M} должен быть перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы \vec{L} и $\omega_{пр}$. Направление вектора $d\vec{L}$ так же должно быть перпендикулярно к этой плоскости. Новое значение вектора момента импульса равно $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$. Ось вращения гироскопа будет иметь такое же направление, как вектор \vec{L}' . Угол наклона оси вращения β не изменится. Вертикальная плоскость, проходящая через ось вращения гироскопа, повернётся на угол $d\phi$. Отсюда скорость прецессионного движения $\omega_{пр} = \frac{d\phi}{dt}$. Как следует из рисунка 4.6, $d\phi = \frac{dL}{L \sin \beta}$, тогда с

учетом равенства (4.17) получим

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{M}{L \sin \beta}. \quad (4.18)$$

Из полученной формулы следует, что чем быстрее вращается волчок, т.е. больше L , тем меньше скорость прецессии, что хорошо известно из опыта.

На гироскопическом эффекте основано действие гироскопического компаса, применяемого в морском транспорте. В этом приборе ось гироскопа может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Под влияние суточного вращения Земли ось гироскопа устанавливается точно на север.

В нарезном оружии пули и снаряды получают вращательное движение относительно своей оси. Момент сил сопротивления воздуха вызывает слабое прецессионное движение пули, и ось вращения пули практически совпадает с траекторией её движения.