

## Теоретические задания по теме 2 «Подпространства линейного пространства»

1. Опишите все линейные подпространства, которые встретились в курсе лекций (пространство векторов  $\mathbb{R}^n$ , пространство матриц  $\text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$  пространство многочленов степени, не выше  $n$   $\mathbb{R}^n[t]$ , пространство функций, непрерывных на отрезке  $C[a, b]$ ). У каждого из этих линейных пространств укажите по два нетривиальных линейных подпространства, кроме того, укажите по одному подмножеству, которое не является линейным подпространством.
2. Во множестве  $\mathbb{R}^+$  положительных действительных чисел определены следующие операции:  $x \oplus y = xy$ ,  $\alpha \otimes x = x^\alpha$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Проверить, что это множество является линейным пространством (то есть проверить 8 аксиом линейного пространства)
3. Доказать, что множество многочленов  $W = \{f(t) : f(1) = f'(1) = 0\}$  является подпространством в пространстве многочленов  $\mathbb{R}^3[t]$ . Найти базис этого подпространства.
4. Доказать, что множество симметрических матриц образует подпространство в  $M[n, \mathbb{R}]$ . Найти размерность и базис.
5. Доказать, что множество кососимметрических матриц образует подпространство в  $M[n, \mathbb{R}]$  Найти размерность и базис.
6. Установить изоморфизм между матрицами  $M[3, \mathbb{R}]$  и многочленами  $\mathbb{R}^8[x]$ .
7. Найти матрицу перехода от базиса  $1, x+1, x^2-3$  к базису  $3, x-2, x^2+1$  в  $\mathbb{R}^2[x]$ .
8. Будет ли линейно независимой система  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  в пространстве матриц  $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$ ?
9. Является ли система  $1, x+1, 3x^2-2$  ЛНЗ в пространстве многочленов?
10. Является ли система  $1, \sin x, \cos 2x$  ЛНЗ в пространстве  $C[0, 2\pi]$ ?
11. Как изменится матрица перехода от первого базиса ко второму, если в первом базисе поменять два вектора местами? Во втором базисе поменять два вектора местами?
12. Определить, является ли  $W$  линейным подпространством пространства  $V$ , и если является, найти его базис и размерность.
  - a.  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $W = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ ;
  - b.  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $W = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ .
13. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов:  $S = \langle (1, 2, 0, 1), (2, 3, 1, 1), (3, 5, 1, 2) \rangle$ ,  $L = \langle (4, 6, 2, 2), (1, 3, 0, 1), (5, 9, 2, 3) \rangle$ .