

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА”
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

А.В. ШАЦКИЙ, Л.А. ДОВБНЯ

КУРС ФИЗИКИ

Механика

Молекулярная физика

и термодинамика

САМАРА 2010

УДК 53 (075.8)

Составители: А.В. Шацкий, Л.А. Довбня

Курс физики: учеб.пособ. / Самар. гос. аэрокосм. ун-т.; Сост. А.В. Шацкий, Л.А. Довбня; Самара, 2010, 140 с.

Изложены физические основы механики, гидродинамика, колебания и волны, молекулярная физика и термодинамика. Соответствует программе курса физики для технических университетов.

Учебное пособие предназначено для студентов и преподавателей технических университетов.

Табл. 2. Ил. 71. Библиогр. 10 назв.

Печатается по решению редакционно -издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева

Рецензент: д.т.н., проф. А.Ю. Привалов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
Физические основы механики	
1. Кинематика поступательного и вращательного движения . . .	8
1.1 Кинематика поступательного движения материальной точки	8
1.2 Кинематика вращательного движения твердого тела . . .	12
2. Законы динамики материальной точки и твердого тела	14
2.1 Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета	14
2.2 Второй и третий законы Ньютона	16
3. Законы сохранения	18
3.1 Импульс. Закон сохранения импульса	18
3.2 Работа и энергия	20
3.3 Кинетическая энергия	22
3.4 Потенциальная энергия	23
3.5 Связь потенциальной энергии с консервативной силой .	25
3.6 Закон сохранения механической энергии	26
3.7 Применение законов сохранения для анализа явлений удара	27
3.7.1 Упругий удар	27
3.7.2 Неупругий удар	29
3.8 Закон сохранения момента импульса	31
4. Динамика твердого тела	33
4.1 Движение центра масс твердого тела	33
4.2 Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела. Момент инерции тела	35
4.3 Момент силы. Основное уравнение динамики вращательного движения	38
4.4 Момент импульса твердого тела. Гироскопический эффект	41
5. Гидродинамика	44
5.1 Линии и трубки тока	44

5.2 Уравнение Бернулли	44
5.3 Силы внутреннего трения	46
5.4 Ламинарное и турбулентное течения	47
5.5 Течение жидкости в круглой трубе	48
5.6 Движение тел в жидкостях и газах	50
6. Механические колебания	51
6.1 Гармонические колебания	51
6.2 Сложение гармонических колебаний, направленных вдоль одной прямой	52
6.3 Биения	54
6.4 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний	55
6.5 Пружинный маятник	56
6.6 Физический и математический маятники	58
6.7 Крутильный маятник	60
6.8 Энергия гармонического осциллятора	61
6.9 Затухающие колебания	62
6.10 Вынужденные колебания. Резонанс	65
7. Механические волны	70
7.1 Продольные и поперечные волны. Уравнение волны	70
7.2 Волновое уравнение. Скорость распространения волн	72
7.3 Интерференция волн	73
7.4 Стоячие волны	76
Молекулярная физика и термодинамика	
8. Молекулярная физика	79
8.1 Предмет и методы молекулярной физики Термодинамические параметры состояния	79
8.2 Основное уравнение кинетической теории газов	82
8.3 Барометрическая формула. Распределение Больцмана	83
8.4 Максвелловское распределение молекул по скоростям	85
8.5 Явления переноса. Длина свободного пробега молекул	88
8.6 Явление диффузии	89
8.7 Явление теплопроводности и вязкости	92

9. Термодинамика	93
9.1 Внутренняя энергия идеального газа	94
9.2 Работа и теплота. Первое начало термодинамики	96
9.3 Работа газовых изопроцессов	98
9.4 Молекулярно-кинетическая теория теплоемкостей	99
9.5 Адиабатический процесс	102
9.6 Круговые обратимые процессы. Цикл Карно	104
9.7 Понятие об энтропии. Энтропия идеального газа	106
9.8 Второе начало термодинамики	107
9.9 Статистическое толкование второго начала термодинамики	110
10. Реальные газы	111
10.1 Уравнение Ван-дер-Ваальса	111
10.2 Критическое состояние вещества	114
10.3 Эффект Джоуля-Томсона	115
11. Жидкое состояние	117
11.1 Поверхностное натяжение	118
11.2 Давление, вызванное кривизной поверхности жидкости	119
11.3 Явления на границе раздела жидкости и твердого тела	121
11.4 Капиллярные явления	122
12. Твердые тела	124
12.1 Строение кристаллов. Типы кристаллических решеток	124
12.2 Теплоемкость твердых тел	127
13. Фазовые равновесия и превращения	128
13.1 Уравнение Клапейрона-Клаузиуса	129
13.2 Тройная точка. Диаграмма состояния вещества	130
Основные формулы и законы	133
Библиографический список	139

ВВЕДЕНИЕ

В древности слово “физика” означало природоведение. С накоплением объема знаний природоведение расчленилось на ряд наук: физику, химию, астрономию, геологию, биологию и т.д.

Среди этих наук физика занимает особое положение, так как предметом ее изучения служат все *основные, наиболее общие, простейшие формы движения материи* (механические, тепловые, электромагнитные и т.д.). Изучаемые физикой формы движения присутствуют во всех высших и более сложных формах движения (в химических, биологических процессах и др.) и неотделимы от них, хотя никоим образом не исчерпывают их. Установленному физикой закону сохранения энергии подчиняются все процессы, независимо от того, носят ли они специфический химический, биологический или другой характер.

Процесс познания в физике, как и в любой другой науке, начинается либо с *наблюдения* явлений в естественных условиях, либо со специально поставленных опытов – *экспериментов*. На основе накопленного материала строится предварительное научное предположение о механизме и взаимосвязи явлений – создается *гипотеза*, которая требует проверки и доказательства.

Некоторые гипотезы, ряд следствий из которых противоречит опыту, оказываются ошибочными и отбрасываются при дальнейшем развитии науки (например, гипотезы флогистона, эфира и др.). Другие гипотезы, выдерживающие проверку на опыте и правильно предсказывающие ряд новых, ранее неизвестных явлений, входят в науку в качестве *физических теорий*. Хорошим примером этому является молекулярно-кинетическая теория.

Дальнейшее накопление знаний приводит к необходимости создания новых гипотез и развития новых теорий. Новая теория не

всегда отрицает старую, но чаще всего включает ее в себя как часть, т.е. является более широкой и всеохватывающей.

Развитие физики тесно связано с развитием техники. Крупные физические открытия рано или поздно приводят к техническим переворотам, созданию новых отраслей техники, тесно связанных с физикой. В свою очередь развитие техники дает физикам в руки новые, более совершенные, более мощные методы исследования. Развитие техники и промышленности требует разрешения ряда физических проблем, тесно связанных с дальнейшим техническим прогрессом.

Широкое знание физики является необходимым для специалиста, работающего в любой области науки и техники, желающего осмыслить основы своей области знания, стремящегося принять творческое участие в ее развитии. Задача курса физики, читаемого студентам высшего технического учебного заведения, и заключается в том, чтобы помочь учащимся понять физические основы техники.

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1.1 КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

Механика изучает механическую форму движения, т.е. перемещение тел или их частей друг относительно друга. Изучение других разделов физики невозможно без знания механики, так как перемещения имеют место во всех физических явлениях. Кинематика, являясь разделом механики, занимается описанием движения тел без анализа причин, вызывающих это движение. Физическая задача не может быть решена абсолютно точно, так как при ее решении приходится пренебрегать некоторыми, несущественными в данном случае, факторами. Например, при движении Земли вокруг Солнца можно пренебречь размерами Земли. Тело, размерами которого можно пренебречь, в условиях данной задачи, называют **материальной точкой**. Для описания движения материальной точки необходимо выбрать тело отсчета, относительно которого будем рассматривать его движение. Обычно с этим телом связывают какую-либо систему координат, например декартовую, которая дает возможность количественно описать движение. Положение материальной точки в процессе движения характеризуется радиус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, проведенным из начала координат к точке. Проецируя \vec{r} на координатные оси, получим $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Отсюда следует, что положение материальной точки в любой момент времени полностью задается тремя числами. Поэтому говорят, что материальная точка имеет три степени свободы. Используя правило сложения векторов можно уравнение движения записать в векторной форме: $\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$.

Линию, описываемую материальной точкой при движении, называют **траекторией**. Пусть материальная точка переместилась вдоль некоторой траектории из положения 1 в положение 2 (рисунок 1.1). Расстояние Δs между точками 1 и 2, отсчитанной вдоль траектории, называется **путем**, пройденным частицей. Прямолинейный отрезок $\Delta \vec{r}$, проведенный из точки 1 в точку 2, называется **перемещением** частицы. Перемещение является векторной величиной. Сумма нескольких перемещений находится по закону сложения векторов. Если при движении частица проходит за равные промежутки времени одинаковые пути, движение называют равномерным. Скорость такого движения можно вычислить, разделив путь s на время t , т.е. $v = \frac{s}{t}$.

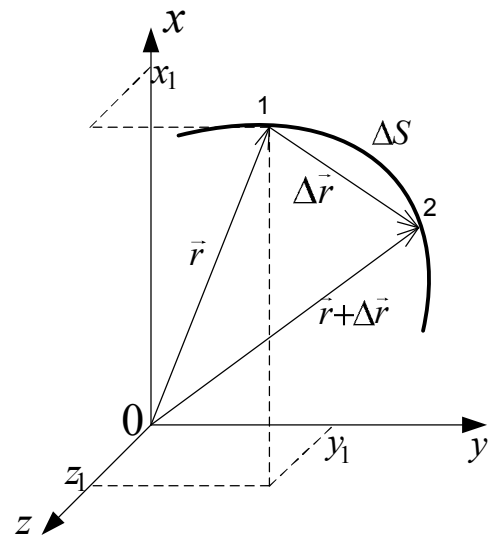


Рисунок 1.1

Перемещение является векторной величиной. Сумма нескольких перемещений находится по закону сложения векторов. Если при движении частица проходит за равные промежутки времени одинаковые пути, движение называют равномерным. Скорость такого движения можно вычислить, разделив путь s на время t , т.е. $v = \frac{s}{t}$. Размерность скорости $[v] = \text{м/с}$. В физике под скоростью понимают векторную величину, характеризующую не только быстроту перемещения частицы, но и направление, в котором движется эта частица.

Пусть за время Δt частица получила перемещение $\Delta \vec{r}$. Величину $\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ называют средней скоростью движения частицы. Если брать всё более малые промежутки времени Δt , то отношение $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ в пределе стремится к точному значению скорости \vec{v} в данной точке, которая называется мгновенной:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}},$$

где $\dot{\vec{r}}$ есть производная от радиус-вектора по времени.

В предельном случае при $\Delta t \rightarrow 0$ направление $\Delta \vec{r}$ совпадает с направлением касательной к траектории. Поэтому, в любой точке траектории, мгновенная скорость направлена по касательной к траектории. Модуль мгновенной скорости определяется по формуле

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ величина $|\Delta \vec{r}| \rightarrow \Delta s$, поэтому формулу можно записать в виде:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, модуль скорости равен производной от пути по времени.

Быстрота изменения вектора скорости определяется отношением изменения скорости $\Delta \vec{v}$ к соответствующему промежутку времени Δt и называется средним ускорением:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Размерность ускорения $[a] = \text{м/с}^2$. Соответственно мгновенное ускорения равно

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \quad (1.1)$$

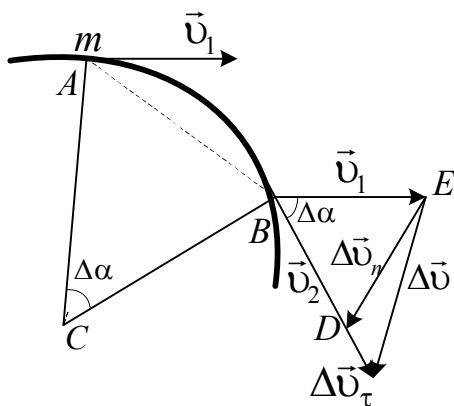


Рисунок 1.2

Пусть материальная точка М движется по криволинейной траектории и за время Δt переместится из точки А в точку В (рисунок 1.2). При этом вектор её скорости изменится от значения \vec{v}_1 до значения \vec{v}_2 . Для нахождения разности векторов перенесем вектор \vec{v}_1 параллельно его направлению так, чтобы его начало переместилось из точки А в точку В. Разность

векторов $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ есть вектор, проведенный из конца \vec{v}_1 к концу \vec{v}_2 . Отложим на векторе \vec{v}_2 точку D так, чтобы отрезок $BD = v_1$. Разложим вектор $\Delta \vec{v}$ на составляющие $\Delta \vec{v}_n$ и $\Delta \vec{v}_\tau$, так чтобы $\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_n + \Delta \vec{v}_\tau$. Ускорение точки M будет равно

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \quad (1.2)$$

Из выражения (1.2.) следует, что полное ускорение точки M равно векторной сумме ускорений \vec{a}_n и \vec{a}_τ . Ускорение \vec{a}_τ совпадает по направлению с вектором $\Delta \vec{v}_\tau$, т.е. при $\Delta t \rightarrow 0$ с направлением скорости в точке A. \vec{a}_τ называется **тангенциальным** или линейным ускорением, направлено по касательной к траектории и характеризует изменение скорости по величине. Модуль тангенциального ускорения равен $a_\tau = \frac{dv}{dt}$.

Ускорение \vec{a}_n совпадает по направлению с вектором $\Delta \vec{v}_n$, т.е. при $\Delta t \rightarrow 0$ направлено к центру, перпендикулярно скорости в точке A. Это ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению. Из рисунка 1.2 по определению радианной меры угла получим $\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{r}$, из подобия треугольников для малых $\Delta \varphi$ следует, что $\Delta \varphi \approx \frac{\Delta v_n}{v}$. Здесь r – радиус кривизны траектории в данной точке, Δs – путь пройденный точкой. Приравнивая правые части равенств, получим $\Delta v_n \approx \frac{\Delta s \cdot v}{r}$. Используя это выражение получим:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta s}{r \Delta t} = \frac{v}{r} \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{r} \quad (1.3)$$

Ускорение a_n называется **нормальным** или **центростремительным**

Так как векторы \vec{a}_n и \vec{a}_τ взаимно перпендикулярны, то модуль полного ускорения определяется по теореме Пифагора

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2.$$

Для равнопеременного движения, суммируя все $d\nu = a_\tau dt$ за промежуток времени от 0 до t , получим для модуля скорости ν :

$$\int_{\nu_0}^{\nu} d\nu = \int_0^t a_\tau dt, \text{ или } \nu = \nu_0 + a_\tau t \quad (1.4.)$$

Аналогично суммируя все ds за промежуток времени от 0 до t , используя выражение $ds = \nu dt$, получим формулу для пройденного пути:

$$s = \int ds = \int_0^t (\nu_0 + a_\tau t) dt = \nu_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2} \quad (1.5.)$$

1.2 КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

При вращательном движении твердого тела все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения. Как следует из рисунка 1.3, за некоторое время dt радиус вектор \vec{R}

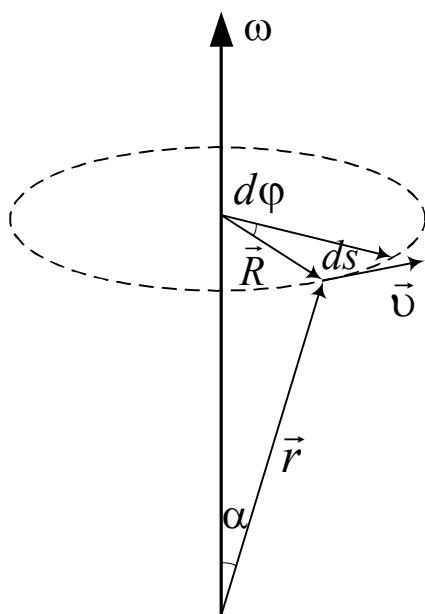


Рисунок 1.3

произвольной точки твердого тела повернется на один и тот же угол $d\phi$, а сама точка сместится на некоторое расстояние ds . Соответственно, при вращательном движении роль пройденного пути может играть угол поворота тела $d\phi$, а вместо линейной скорости вводят угловую скорость

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad (1.6)$$

Размерность угловой скорости $[\omega] = \text{рад/с}$.

По определению радианной меры

угла получим $d\varphi = \frac{ds}{R}$. Учитывая выражение (1.6) получим

$$\omega = \frac{ds}{Rdt} \text{ или } \omega = \frac{v}{R} \quad (1.7)$$

Как показывает опыт, результирующую угловой скорости можно найти по закону сложения векторов. Поэтому угловую скорость представляют в виде вектора, направление которого определяется по **правилу правого винта** (или **буравчика**): вектор $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения тела в сторону перемещения правого винта, головка которого вращается так же, как тело (рисунок 1.3). Вектор $\vec{\omega}$ является аксиальным, т.е. направленным по оси вращения. Этот вектор отличается от таких наглядных векторов, как скорость, перемещение, и его иногда называют псевдовектором.

Согласно рисунку 1.3, $R = r \sin \alpha$, где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из произвольной точки на оси вращения, α – угол между векторами $\vec{\omega}$ и \vec{r} . С учётом равенства (1.7) получим $v = \omega r \sin \alpha$. Если модули двух любых векторов, таких как $\vec{\omega}$ и \vec{r} , связаны подобным соотношением и оба эти вектора перпендикулярны к третьему вектору, как вектор \vec{v} , то эти три вектора записываются в виде векторного произведения $\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Направление вектора \vec{v} так же определяется по правилу буравчика: если буравчик вращать от направления вектора $\vec{\omega}$ к направлению вектора \vec{r} , то направление его поступательного движения совпадет с направлением вектора \vec{v} .

По аналогии с поступательным движением для описания вращательного вводится **вектор углового ускорения**

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad (1.8)$$

где $d\omega$ – изменение вектора угловой скорости за время dt . Размерность углового ускорения $[\varepsilon] = \text{рад/с}^2$. Как и вектор $\vec{\omega}$, вектор $\vec{\varepsilon}$ является псевдовектором и направлен по оси вращения. При равноускоренном вращении тела вокруг неподвижной оси

направление вектора $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ совпадают, при равнозамедленном вращении их направления противоположны.

Найдем связь между линейным и угловым ускорениями. Модуль тангенциально ускорения $a_\tau = \frac{dv}{dt}$. С учетом равенства (1.7) получим

$$a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R. \quad (1.9)$$

Аналогично формуле, связывающей угловую и линейную скорости, равенство (1.9) можно записать в виде векторного произведения $\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}]$.

При вращении тела вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением ε легко получить зависимости угла поворота φ и угловой скорости ω от времени. Подставляя в формулы (1.4) и (1.5) выражения $s = \varphi \cdot R$, $v = \omega \cdot R$, $a_\tau = \varepsilon \cdot R$, получим

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (1.10)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (1.11)$$

где s – расстояние, которое проходит точка, находящаяся на расстоянии R от оси вращения, при повороте тела на угол φ ; v – линейная скорость этой точки; a_τ – тангенциальное ускорение.

2. ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1 ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА.

Динамика – раздел механики, изучающий механическое движение совместно с причинами, вызывающими это движение. Законы динамики впервые были сформулированы Ньютоном.

Первый закон Ньютона постулирует существование систем отсчета, в которых *тело сохраняет состояние покоя или прямолинейного и равномерного движения, если другие тела на него не действуют или их воздействие скомпенсировано*. Такое движение называется свободным. Его называю так же движением по инерции, а систему отсчета, в которой оно так выглядит, называют **инерциальной**.

Подвижные инерциальные системы отсчета часто используются в технике. Например, имеются характеристики бортового оружия корабля. Как их использовать при стрельбе из движущегося корабля? Подобные задачи перехода из одной системы в другую часто возникают, например, при бомбометании, стыковке космических аппаратов и т.д.

Пусть система отсчета K' движется относительно инерциальной системы K с постоянной скоростью \vec{v}_0 (рис. 2.1) так, чтобы оси x и x' при движении совпадали, а оси y и y' , z и z' были параллельны друг другу, причем вектор соединяющий начала координат $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 t$, где t – время. Тогда радиус-вектора произвольной точки M в этих системах отсчета связаны соотношением

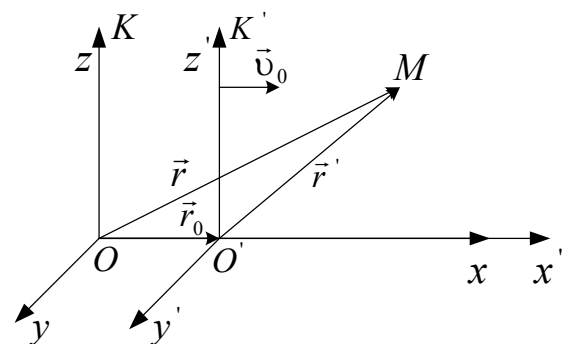


Рисунок 2.1

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t \quad (2.1)$$

Спроектировав (2.1) на оси координат, получим *преобразования Галилея*: $x = x' + v_0 t$, $y = y'$, $z = z'$.

Дифференцируя (2.1) по времени, получим *закон сложения скоростей* в классической механике:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \quad (2.2)$$

Скорость абсолютного движения \vec{v} равна векторной сумме скоростей относительного \vec{v}' и переносного \vec{v}_0 движения.

Пусть скорость точки М в системе отсчета К постоянна $\vec{v} = const$. Тогда из равенства (2.2) можно сделать следующий вывод: скорость точки М относительно движущейся системы отсчета К' является также постоянной, т.е. $\vec{v}' = const$. Следовательно, для этой точки выполняется первый закон Ньютона и движущаяся система отсчета К' также является инерциальной. Инерциальных систем отсчета существует бесконечное множество. Любая система отсчета, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно инерциальной, будет также инерциальной.

Дифференцируя равенство (1.2) по времени и учитывая, что величина \vec{v}_0 постоянна, получим $\vec{a} = \vec{a}'$, т.е. ускорение точки в обеих системах отсчета одинаково, а значит законы динамики одинаково справедливы для обеих систем. Исходя из этого, итальянский физик Галилей сформулировал следующий **принцип относительности**: *во всех инерциальных системах отсчета все законы механики одинаковы*. Никакими (механическими) опытами, проведенными в замкнутой инерциальной системе, нельзя обнаружить, покоится система или прямолинейно и равномерно движется.

2.2 ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Всякое тело противится попыткам изменить состояние его движения. Это свойство тел называю инертностью. Количественной мерой инертности является *масса*. Масса не зависит от ускорения тела и от взаимодействия с другими телами, а является свойством самого тела. Масса обозначается m . Величину массы определяют путем сравнения с массой какого-нибудь эталонного тела, принятого за единицу. Единицей массы в системе СИ является 1 кг.

Ускорение движущегося тела зависит от воздействия на него других тел. Мерой воздействия одного тела на другое является **сила**. Сила является векторной величиной и обозначается буквой \vec{F} .

Векторный характер силы проявляется в том, что при воздействии на тело нескольких сил, результирующая сила равна векторной сумме: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$. Векторная сумма находится путем геометрического сложения векторов.

Опытным путем было установлено, что ускорение тела \vec{a} пропорционально результирующей силе \vec{F} , действующей на тело, и обратно пропорционально массе тела m . Ньютон объединил эти результаты в виде следующего закона: $\vec{F} = km\vec{a}$. Величина коэффициента k зависит от выбора единиц измерения массы, ускорения и силы. В системе СИ $k = 1$, и закон принимает следующий вид:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) представляет математическую запись **второго закона Ньютона** (основного закона динамики): *результирующая всех внешних сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на его ускорение.*

Выражение (2.3) позволяет ввести единицу силы. В системе СИ основными единицами являются метр (м), секунда (с) и килограмм (кг), тогда единица силы называется *Ньютон* (Н). Согласно (2.3) 1Н это такая сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 . Т.о. получаем $1\text{Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2$.

В системе СГС основными единицами измерения являются сантиметр (см), секунда (с) и грамм (г). В этой системе единица силы называется *диной*. Запишем связь $1\text{Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2 = 1000\text{г} \cdot 100 \text{ м/с}^2 = 10^5 \text{ дин}$.

Взаимодействие двух тел описывается **третьим законом Ньютона**: *силы, с которыми два тела взаимодействуют друг с другом, равны по величине и противоположны по направлению:*

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (2.4)$$

Эти силы никогда не уравновешивают друг друга, так как приложены к разным телам.

Три закона Ньютона являются основой классической механики. Механика Ньютона имеет две границы применения:

1. очень малая масса частиц, их движение описывается квантовой механикой;
2. скорость движения частиц, сравнимая со скоростью света, для описания такого рода движения используется релятивистская механика.

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

3.1 ИМПУЛЬС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

В механической системе, состоящей из нескольких тел, существуют как силы взаимодействия между телами системы, которые называются *внутренними*, так и силы, действующие со стороны тел, не входящих в систему. Эти силы называются *внешними*. Если внешние силы отсутствуют, то механическая система называется *замкнутой*.

Для замкнутой механической системы существует несколько физических величин, которые остаются постоянными с течением времени. Одной из таких величин является импульс тела. Импульс тела это вектор, численно равный произведению массы тела на скорость: $\vec{p} = m\vec{v}$. Импульс механической системы равен векторной сумме импульсов составляющих её n тел: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$.

Воспользовавшись выражением для импульса и учитывая постоянство массы тела, представим второй закон Ньютона в следующем виде:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.1)$$

Запишем закон Ньютона для каждого из n тел замкнутой механической системы:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_1}{dt} &= f_{12} + f_{13} + \dots + f_{1n}; \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= f_{21} + f_{23} + \dots + f_{2n}; \\ &\dots\dots\dots; \\ \frac{d\vec{p}_n}{dt} &= f_{n1} + f_{n2} + \dots + f_{n(n-1)},\end{aligned}$$

где f_{ik} – сила действующая на i -ое тело со стороны k -го тела. Сложим почленно эти равенства. Так как по третьему закону Ньютона внутренние силы попарно равны и противоположны по знаку (например $f_{12} = -f_{21}$), то их сумма равна нулю. В результате получим:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \dots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n)}{dt} = 0,$$

отсюда следует

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = const. \quad (3.2)$$

Данное равенство представляет собой математическую запись **закона сохранения импульса**: *импульс замкнутой системы остается величиной постоянной*. Этот закон справедлив при любых процессах происходящих в системе.

В качестве примера, рассмотрим применение этого закона к реактивному движению. Пусть ракета массой M за время dt выбрасывает газы массой dm со скоростью \vec{v} . Импульс системы ракета-газы остается постоянной, а значит его изменение равно нулю: $d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 = 0$, где $d\vec{p}_1$ – изменение импульса ракеты за время dt , а $d\vec{p}_2 = d(m\vec{v})$ – импульс выброшенных газов. Отсюда $d\vec{p}_1 = -d(m\vec{v})$, а

согласно (3.1) реактивная сила $\vec{F} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\vec{v} \frac{dm}{dt}$. Из последнего

равенства следует, что реактивная сила противоположна направлению выбрасываемых газов и пропорциональна скорости их истечения и скорости расхода топлива. Наибольшим КПД будет

обладать ракета, у которой значение \vec{v} равно скорости света, например, фотонная ракета, испускающая вместо газа мощный луч света.

3.2 РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Если два шара, имеющие одинаковые импульсы и летящие навстречу друг другу, столкнуться абсолютно неупруго, то механическое движение “исчезнет”. Опыт показывает, что количество тепла, которое выделится при этом столкновении, не будет пропорционально импульсу шаров. Следовательно, должна быть иная мера механического движения, которая необходима там, где происходит превращение механического движения в другие виды движения материи. Такой мерой является **энергия**. *Энергия – количественная мера движения материи во всех формах этого движения.* С различными формами движения материи связывают различные энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. Так как в природе непрерывно происходят процессы, в которых осуществляется переход одной формы энергии в другую, то ещё Р. Декарт и М.В. Ломоносов выдвигали мысль о “неуничтожимости” движения материи и следовательно энергии. Но только в 19 веке закон сохранения энергии был признан всеми учеными в качестве *основного* закона природы. Для того чтобы рассмотреть энергию механического движения, необходимо остановиться на такой важной физической величине, как работа. Работа служит мерой количества переданной энергии.

Пусть в направлении действия силы постоянной \vec{F} тело получает перемещение \vec{s} . Как показывает опыт, *работа* этой силы определяется по формуле: $A = F \cdot s$. В системе СИ единицей работы является *джоуль*: $1\text{Дж} = 1\text{Н} \cdot 1\text{м}$. В системе СГС единица работы называется *эргом*: $1\text{эрг} = 1\text{дина} \cdot 1\text{см}$. Таким образом, $1\text{Дж} = 10^7\text{ эрг}$.

Пусть угол α между векторами силы \vec{F} и перемещением \vec{s} постоянный, траектория линейная и сила $\vec{F} = \text{const}$. В этом случае работу определяют по формуле: $A = F \cdot s \cos \alpha$. Если угол $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то работа положительная ($A > 0$), если угол $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то работа отрицательная ($A < 0$). Понятие работы в механике отличается от обыденного понятия о мускульной работе организма. Например, если человек перенесет груз вдоль горизонтальной поверхности, то он затратит определенные усилия, преодолевая силу тяжести, но механическая работа при этом будет равна нулю, так как $\cos \alpha = 0$. Механическая работа идет на изменение энергии тела, а при горизонтальном перемещении механическая энергия тела не изменяется.

В более общем случае работа определяется в виде скалярного произведения векторов $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Скалярным произведением двух векторов называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

В общем случае при движении по произвольной траектории, когда сила и угол α изменяются, находят элементарную работу dA на каждом участке ds , считая, что в пределах перемещения ds величины \vec{F} и α являются постоянными:

$$dA = F \cdot ds \cos \alpha \quad (3.3)$$

Суммируя все эти работы, получают работу на всём участке траектории движения:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds \cos \alpha = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds, \quad (3.4)$$

где F_s – проекция силы \vec{F} на направление перемещения $d\vec{s}$, Эта сумма бесконечно большого числа бесконечно малых величин называется интегралом. Величина F_s называется подынтегральной функцией, ds – дифференциалом, s_1 и s_2 – пределы интегрирования.

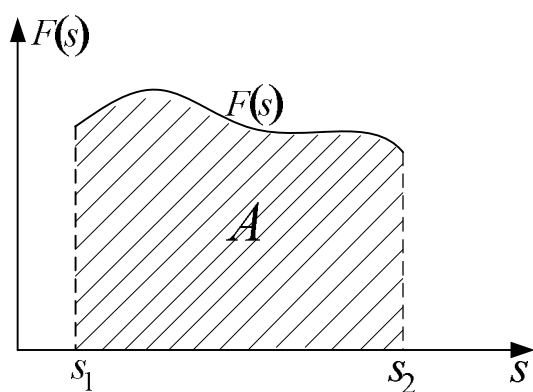


Рисунок 3.1

Для вычисления работы необходимо знать величину F_s вдоль всего пути. Графически, работа – это площадь под графиком функции $F_s(s)$. На рисунке 3.1 заштрихованная область численно равна работе силы $F(s)$ на участке $s_1 - s_2$.

3.3 КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Всякое движущееся тело имеет запас энергии, которую называют кинетической. Величину кинетической энергии тела можно определить по величине работы, которую необходимо совершить, чтобы вызвать данное движение тела. Пусть на тело массой m действует результирующая сила \vec{F} и изменяет скорость его движение от \vec{v}_0 до \vec{v} .

По второму закону Ньютона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

умножим обе части равенства на $d\vec{s}$ – приращение пути пройденного телом:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{s} = \vec{F} d\vec{s} = dA. \quad (3.5)$$

Учтем, что $\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}$ и перепишем уравнение (3.5) в виде:

$$m \vec{v} d\vec{v} = \vec{F} d\vec{s} = dA. \quad (3.6)$$

Работа силы на всем пути, которое прошло тело за время возрастания скорости от \vec{v}_0 до \vec{v} пошла на увеличение кинетической энергии

$$A = \Delta E_k. \quad (3.7)$$

Учтем, что направления \vec{F} и $d\vec{s}$ совпадают. После интегрирования получим:

$$A = \int dA = \int_{v_0}^v m v dv = m \int_{v_0}^v v dv = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

таким образом, для тела массой m , движущегося со скоростью v кинетическая энергия равна

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.8)$$

Из равенства (3.6) следует, что работа результирующей всех сил, действующих на тело, идет на увеличение его кинетической энергии.

3.4 ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

В механике тела могут обладать запасом потенциальной энергии, связанной с взаимодействием тел между собой. Пусть в однородном поле тяготения на тело массой m действует сила тяжести $m\vec{g}$, где $\vec{g} = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение, приобретаемое в этом поле (рисунок 3.2).

Если переместить тело с высоты h_1 до высоты h_2 по траектории 1–a–2, то работа силы $m\vec{g}$ будет равна

$$A = \int_1^2 F \cos \alpha \cdot ds = - \int_{h_1}^{h_2} mg dh = mgh_1 - mgh_2,$$

где изменение высоты dh связано с перемещением ds по формуле $dh = -ds \cos \alpha$, знак минус учитывает, что проекция ds на h

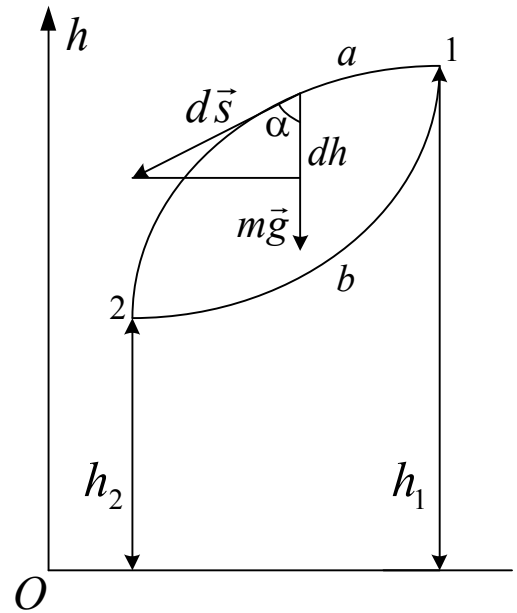


Рисунок 3.2

отрицательная. В полученном выражении работа зависит только от начального и конечного положения тела и не зависит от траектории пути. Например, при перемещении частицы по траектории $1-b-2$ будет совершена такая же работа. Силы, обладающие таким свойством, называются **консервативными**, а поле этих сил **потенциальным**. Из независимости работы консервативных сил от пути следует, что работа по замкнутой траектории этих сил равна нулю. Действительно, совершив работу по замкнутому пути $1-a-2-b-1$, получим, что работы на участках $1-a-2$ и $2-b-1$ равны по величине и противоположны по знаку, следовательно, суммарная работа на этом замкнутом пути будет равна нулю.

В случае, когда работа сил поля не зависит от пути, а зависит только от начального и конечного положения частицы, каждой точке поля можно сопоставить значение некоторой функции $U(x, y, z)$. Разность значений этой функции определяет работу сил при перемещении частицы из первой точки во вторую:

$$A = U_1 - U_2 = -\Delta U. \quad (3.9)$$

Эта функция называется **потенциальной энергией** частицы в силовом поле. Например, работа по перемещению частицы в однородном поле тяготения равна $A = mgh_1 - mgh_2$, а потенциальная энергия этого силового поля $U = mgh$.

Рассмотрим **работу по отклонению частицы в упругом силовом поле**. Например, работу, совершаемую растянутой пружиной, действующей на частицу с силой $F = -kx$, где k – коэффициент упругости пружины, x – её удлинение, знак минус показывает, что направление удлинения и силы противоположны. Воспользовавшись формулой (3.4) для работы силы упругости при удлинении пружины от x_1 до x_2 получим:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \quad (3.10)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой (3.9), запишем для потенциальной энергии частицы в упругом силовом поле следующее

выражение:

$$U = \frac{kx^2}{2} \quad (3.11)$$

3.5 СВЯЗЬ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ С КОНСЕРВАТИВНОЙ СИЛОЙ

Рассмотрим элементарное перемещение частицы $d\vec{s}$ в силовом поле. Работа поля по перемещению частицы равна $dA = F_s \cdot ds$, где F_s – проекция силы \vec{F} на направление перемещения $d\vec{s}$. Согласно формуле (3.9) эта работа равна изменению потенциальной энергии, взятой с обратным знаком $dA = -dU$. Приравнивая правые части равенств, получим: $dU = -F_s ds$ или

$$F_s = -\frac{dU}{ds}. \quad (3.12)$$

Выражение $\frac{dU}{ds}$ называют производной от U по направлению.

Рассмотрим вектор силы $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$, где проекции этой силы F_x, F_y, F_z , согласно соотношению (3.12) определяются по формулам:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Символ $\frac{\partial}{\partial x}$ означает частную производную, т.е. производная по координате x вычисляется при постоянных y и z . Подставляя составляющие силы получим

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}.$$

Введем векторный оператор $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$, который называется

оператором Гамильтона. Градиентом скалярной функции $U(x, y, z)$ называется вектор с компонентами $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$. Этот вектор обозначается $\overrightarrow{grad}U$ или $\vec{\nabla}U$. В связи с вышесказанным, сила будет равна градиенту потенциальной энергии частицы в данной точке, взятому со знаком “минус”:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U = -\vec{\nabla}U. \quad (3.13)$$

Данное соотношение позволяет определить силу \vec{F} по заданной потенциальной энергии $U(x, y, z)$.

3.6 ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из n частиц, между которыми действуют только консервативные силы. Эти силы могут иметь гравитационную или электромагнитную природу. В подразделе 3.3 было показано, что работа силы, действующей на одну частицу со стороны другой, равна изменению ее кинетической энергии. Элементарная работа dA_i результирующей всех сил, действующих на каждую i -тую частицу, равна суммарной работе этих сил, а так же равна изменению кинетической энергии частицы dE_i , т.е. $dA_i = dE_i$, где $i = 1, 2, 3 \dots n$. Складывая значения dA_i для всех частиц от $i = 1$ до $i = n$, получим

$$dA = dA_1 + dA_2 + \dots + dA_n = dE_1 + dE_2 + \dots + dE_n = dE_k,$$

т.е работа всех внутренних сил dA равна изменению кинетической энергии системы dE_k :

$$dA = dE_k. \quad (3.14)$$

С другой стороны, в подразделе 3.4 (формула 3.9) было показано, что элементарная работа консервативной силы над частицей равна убыли её потенциальной энергии в силовом поле взаимодействия с другими частицами, т.е. $dA_i = -dU_i$. Данное равенство можно

обобщить для работы dA , которую совершают внутренние (консервативные) силы системы над всеми её частицами, т.е.

$$dA = -dU, \quad (3.15)$$

где dU – изменение потенциальной энергии всей замкнутой системы.

Из равенств (3.14) и (3.15) получаем $dE_k = -dU$ или $dE_k + dU = 0$. Отсюда следует, что $d(E_k + U) = 0$ и $E_k + U = \text{const}$. Сумму кинетической и потенциальной энергии системы называют полной механической энергией

$$E_k + U = \text{const}. \quad (3.16)$$

Равенство (3.16) представляет собой **закон сохранения механической энергии**: *полная механическая энергия замкнутой системы тел остается величиной постоянной, если силы, действующие в системе являются консервативными.*

Следует заметить, если в замкнутой системе кроме консервативных сил действуют также неконсервативные силы, например силы трения, то полная механическая энергия системы не сохраняется. Неконсервативные силы превращают механическую энергию в другие виды, например, сила трения – во внутреннюю энергию системы. Однако в целом энергия не исчезает, она переходит из одной формы движения в другую. При этом справедлив следующий закон сохранения, подтвержденный многовековым опытом человечества: *энергия не уничтожается и не создается, она переходит из одной формы движения в другую.*

3.7 ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ЯВЛЕНИЯ УДАРА

3.7.1 АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ УДАР

Ударом называют внезапное изменение состояния движения тел вследствие взаимодействия его с другим телом. Во время удара тела

деформируются. Кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию деформации. Это первая фаза соударения. Если деформация упругая, то во второй фазе соударения энергия упругой деформации полностью перейдет обратно в кинетическую энергию взаимодействующих тел. Такой удар называется *абсолютно упругим*. Силы упругой деформации достигают больших значений и за короткий промежуток времени удара могут сильно изменить импульсы соударяющихся тел, а иногда даже разрушить тела. В природе абсолютно упругого удара не существует. Часть относительной кинетической энергии удара переходит в тепло и пластическую деформацию. Однако, многие соударения можно считать близкими к абсолютно упругому удару.

Рассмотрим прямой центральный удар двух упругих шаров с массами m_1 и m_2 , при котором скорости шаров \vec{v}_1 и \vec{v}_2 направлены вдоль прямой, проходящей через их центры. Силы деформации обычно во много раз превышают другие силы, действующие на шары, поэтому шары можно рассматривать как замкнутую систему и применить к ним законы сохранения энергии и импульса:

$$\begin{cases} \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \\ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \end{cases}, \quad (3.17)$$

где \vec{u}_1 и \vec{u}_2 – скорости первого и второго шаров после удара. Решим систему и найдем скорости шаров после удара. Перенесем слагаемые с индексом 1 в левую часть, а с индексом 2 – в правую, получим:

$$\begin{cases} m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2) \\ m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{v}_2 - \vec{u}_2) \end{cases} \quad (3.18)$$

разделив равенства (3.18) друг на друга и учитывая что $v^2 - u^2 = (v + u)(v - u)$ получим

$$\vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{v}_2 + \vec{u}_2. \quad (3.19)$$

Из уравнений (3.18) и (3.19) находим неизвестные \vec{u}_1 и \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{2m_2\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \\ \vec{u}_2 &= \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_2 + m_1}\end{aligned}\quad (3.20)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть массы шаров равны: $m_1 = m_2$. Из уравнений (3.20) в этом случае получаем $\vec{u}_1 = \vec{v}_2$ и $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$, т.е. после удара шары обменялись скоростями, а значит и кинетическими энергиями. Полученный результат важен для понимания процесса энергиями молекул при тепловом движении.

2. Пусть $m_1 \ll m_2$, т.е. масса второго тела на много больше чем первого. Этот случай реализуется при соударении молекул с движущимся поршнем в различных тепловых двигателях. Из формул (3.20) с учетом того, что $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$ получим: $\vec{u}_1 = 2\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ и $\vec{u}_2 = \vec{v}_2$, т.е.

Скорость движения поршня при соударении не изменится. Если поршень движется навстречу молекуле, то $u_1 = -(2v_2 + v_1)$, это значит, что скорость молекулы изменить направление на противоположное и увеличится на двойную скорость поршня. Следовательно, когда поршень сжимает газ, скорость ударяющихся о него молекул возрастает, увеличивается их кинетическая энергия и повышается температура газа. Наоборот, при расширении газа его температура понижается.

3.7.2 АБСОЛЮТНО НЕУПРУГИЙ УДАР

В отличие от упругого удара для некоторых соударений вся относительная кинетическая энергия уходит на преодоление сопротивления деформации. Такой удар называют *абсолютно неупругим*. В этом случае процесс удара заканчивается

взаимодействием тел и после удара оба тела будут двигаться с одинаковой скоростью \vec{u} . Пусть массы сталкивающихся шаров при прямом центральном неупругом ударе равны m_1 и m_2 , а их скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . По закону сохранения импульса $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$. Отсюда

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_2 + m_1}. \quad (3.21)$$

Для неупругого удара закон сохранения механической энергии не выполняется, так как при этом ударе происходит работа деформации тел A_d , за счет которой происходит переход относительной кинетической энергии во внутреннюю энергию, например в тепло. Работа деформации шаров будет равна разности кинетической энергии шаров до и после удара:

$$A_d = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \quad (3.22)$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Второе тело неподвижно: $v_2 = 0$. Подставив в формулу (3.22) выражение для u (3.21) получим:

$$A_d = \frac{m_1 v_1^2}{2} \frac{1}{(m_1/m_2 + 1)}. \quad (3.23)$$

2. Масса второго тела велика: $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$. Из (3.23) получим

$A_d = \frac{m_1 v_1^2}{2}$, т.е. вся кинетическая энергия удара идет на работу деформации тел. Этот результат важен для практических применений, например, при ковке необходимо, чтобы масса наковальни бала значительно больше массы молота.

3. Масса второго тела значительно меньше массы первого:

$\frac{m_1}{m_2} \approx \infty$. Из равенства (3.23) получим $A_d = 0$. Это результат мы наблюдаем, например, при забивании гвоздей. Если масса молотка

значительно превышает массу гвоздя, то деформация шляпки гвоздя минимальна и вся энергия удара идет на полезную работу по вбиванию гвоздя. Наоборот, когда ставят заклепки, то выбирают молоток достаточно малой массы, чтобы увеличить работу по деформации головки.

3.8 ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

В механической системе, кроме импульса и энергии, сохраняется ещё одна величина, называемая моментом импульса системы тел. Для материальной точки, **моментом импульса** относительно некоторой точки O называется вектор \vec{L} , равный векторному произведению радиуса-вектора материальной точки \vec{r} , проведенного от точки O до частицы (рисунок 3.3), на ее импульс $\vec{p} = m\vec{v}$. Получим

$$\vec{L} = [\vec{r} \ \vec{p}]. \quad (3.24)$$

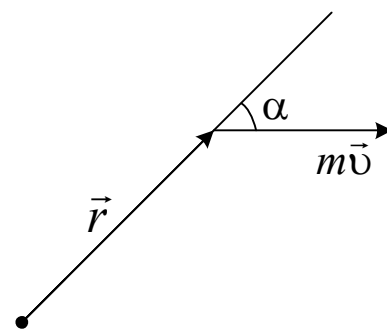


Рисунок 3.3

Вектор \vec{L} является аксиальным вектором, направление которого определяется по *правилу правого винта*: если вращать винт от направления вектора \vec{r} к направлению вектора \vec{p} , то направление поступательного движения винта совпадет с направлением вектора \vec{L} . Модуль вектора \vec{L} равен $L = pr \sin \alpha$, где α – угол между векторами \vec{p} и \vec{r} .

Если дана механическая система из n частиц, то момент импульса системы \vec{L} равен векторной сумме моментов импульсов всех её частиц $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n$.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из n частиц. Пусть на i – тую частицу системы действуют внутренние силы со стороны других частиц, равные $\vec{F}_{i1}, \vec{F}_{i2}, \dots, \vec{F}_{in}$. Применим к i – той частице

второй закон Ньютона, записанный в обобщенной форме:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{in}, \quad (3.25)$$

где $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$ – импульс i – той частицы. Умножая векторно обе части равенства (3.25) на радиус-вектор \vec{r}_i , проведенный к i – той частице из начала координат, получим:

$$\left[\vec{r}_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] = [\vec{r}_i \vec{F}_{i1}] + [\vec{r}_i \vec{F}_{i2}] + \dots + [\vec{r}_i \vec{F}_{in}]. \quad (3.26)$$

Используя правило нахождения производных от векторного произведения, найдем $\frac{d[\vec{r}_i \vec{p}_i]}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \vec{p}_i \right] + \left[\vec{r}_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] = \frac{d\vec{L}}{dt}$. Слагаемое

$\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \vec{p}_i \right] = 0$, так как векторы $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ и \vec{p}_i параллельны и синус угла

между ними равен нулю. Учитывая это, запишем равенство (3.26) в виде

$$\left[\frac{d\vec{L}_i}{dt} \right] = [\vec{r}_i \vec{F}_{i1}] + [\vec{r}_i \vec{F}_{i2}] + \dots + [\vec{r}_i \vec{F}_{in}]. \quad (3.27)$$

Запишем равенство (3.27) для каждой частицы системы и просуммируем полученные выражения. Тогда в правой части такой суммы по третьему закону Ньютона для каждой силы \vec{F}_{ik} найдется сила $\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}$. В этом случае, соответствующие величины сила $[\vec{r}_i \vec{F}_{ki}]$ и $[\vec{r}_i \vec{F}_{ik}]$ попарно уничтожаются и вся сумма в правой части будет равна нулю. Следовательно, можно записать

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} + \dots + \frac{d\vec{L}_n}{dt} = 0. \quad \text{Заменяя сумму производных}$$

производной суммы, получим $\frac{d(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n)}{dt} = 0$ или

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \text{const} \quad (3.28)$$

Равенство (3.28) представляет собой закон сохранения момента

импульса: момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным во времени.

Применим закон сохранения момента импульса для анализа движения комет. Траектория движения комет представляет собой сильно вытянутый эллипс, в одном из фокусов которого находится солнце. Для кометы модуль момента импульса равен $L = m\upsilon r \sin \alpha = \text{const}$, где m – масса кометы, υ – её скорость, r – радиус-вектор, проведенный от солнца к комете, α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и \vec{r} . Легко видеть, что чем ближе комета к солнцу, т.е. чем меньше r , тем больше её скорость. Поэтому, улетев от солнца, комета движется с достаточно малой скоростью и возвращается обратно через большой промежуток времени.

Заканчивая раздел 3 отметим, что для замкнутых систем имеют место три закона сохранения: закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса. Эти законы сохранения непосредственно связаны с основными свойствами пространства и времени. В основе закона сохранения энергии лежит *однородность времени*, т.е. равнозначность всех моментов времени. В основе закона сохранения импульса лежит *однородность пространства*, т.е. одинаковость свойств пространства во всех точках. Наконец, в основе закона сохранения момента импульса лежит *изотропность пространства*, т.е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям.

4. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1 ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА

Размеры и форма твердого тела значительно определяют характер его движения. Твердое тело может не только двигаться поступательно, но и вращаться. Для описания поступательного

движения вводят понятие центра масс твердого тела. В однородном поле тяготения центр масс совпадает с центром тяжести тела. Твердое тело, имеющее массу m мысленно разбивают на систему из n материальных точек с массами m_i , где $i = 1, 2, \dots, n$. В каждую точку из начала координат проводят радиус-вектор \vec{r}_i . *Центром масс* (или *центром инерции*) тела называют точку C , положение которой задается радиус-вектором \vec{r}_c , определяемым по формуле:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}. \quad (4.1)$$

Запишем для каждой материальной точки твердого тела второй закон Ньютона:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{f}_i + \vec{F}_i, \quad (4.2)$$

где \vec{a}_i – ускорение i – той материальной точки, \vec{f}_i – результирующая всех внутренних сил действующих на i – тую точку, \vec{F}_i – результирующая всех внешних сил, приложенных к данной материальной точке. Просуммировав уравнение (4.2) записанное для всех материальных точек, получим:

$$\sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{f}_i + \sum \vec{F}_i. \quad (4.3)$$

По третьему закону Ньютона каждой внутренней силе \vec{f}_i найдется равная ей по величине и противоположно направленная сила, так что, все внутренние силы попарно уничтожаются и $\sum \vec{f}_i = 0$. Уравнение (4.3) упрощается

$$\sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i. \quad (4.4)$$

Сумму, стоящую в левой части равенства, можно связать с центром масс тела. Для этого представим формулу (4.1) в виде $m \vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i$.

Продифференцируем это выражение дважды по времени и приняв во

внимание, что $\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{a}_i$ и $\frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \vec{a}_c$, получим:

$$m \vec{a}_c = \sum m_i \vec{a}_i. \quad (4.5)$$

Сравнивая формулы (4.4) и (4.5) приходим к уравнению

$$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) представляет собой **теорему о движении центра масс**: *центр масс твердого тела движется так же, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием тех же внешних сил.*

4.2 КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Рассмотрим произвольное твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси. Разобьем тело на n материальных точек с массами m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и проведем к ним радиус-векторы \vec{r}_i от оси вращения перпендикулярно этой оси (рисунок 4.1). Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела складывается из кинетических энергий каждой i -той материальной точки $\frac{m_i v_i^2}{2}$, где $v_i = \omega r_i$ – линейная скорость

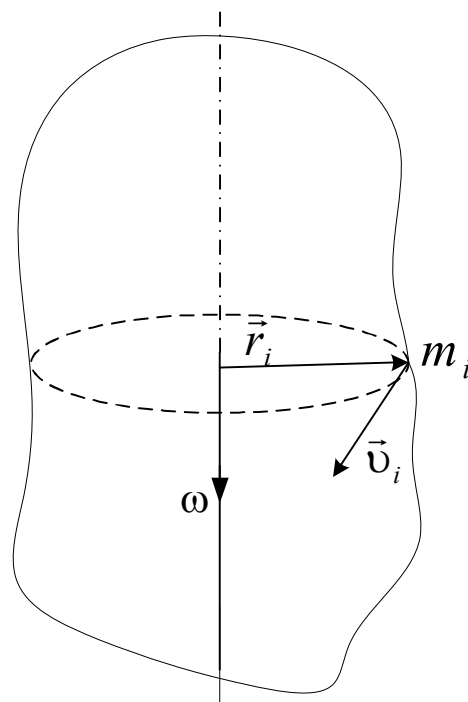


Рисунок 4.1

i -той материальной точки, ω – угловая скорость вращения тела. Полная **кинетическая энергия вращательного движения**

$$E_{\text{вр}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2.$$

Величину

$$J = \sum m_i r_i^2 \quad (4.7)$$

называют *моментом инерции тела* относительно данной оси

вращения. Сделав замены, для кинетической энергии вращения получим

$$E_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (4.8)$$

Если сравнить формулу (4.8) с формулой для кинетической энергии поступательного движения $\left(E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}\right)$, то заметим, что они похожи по написанию. В обеих формулах скорости имеют квадраты, а величина J эквивалентна массе тела и определяет инертность тела по отношению к вращательному движению.

Из формулы (4.7) видно, что момент инерции, есть величина аддитивная. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.

В общем случае масса i – той материальной точки твердого тела $m_i = \rho\Delta V_i$, где ΔV_i – объем материальной точки, ρ – плотность тела. Подставляя m_i в формулу (4.7), получим $J = \sum \rho r_i^2 \Delta V_i$. Устремляя ΔV_i к нулю в пределе получим

$$J = \int \rho r^2 dV. \quad (4.9)$$

Интеграл в уравнении (4.9) берется по всему объему тела.

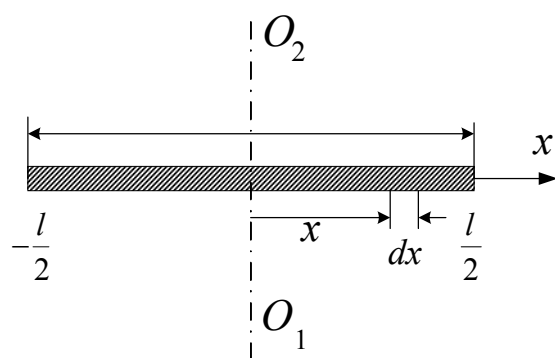


Рисунок 4.2

В качестве примера расчетов по формуле (4.9) найдем момент инерции *тонкого стержня* длиной l и массой m относительно оси вращения O_1O_2 , проходящей через его центр перпендикулярно к стержню (рисунок 4.2). Разобьем стержень на элементы длиной dx и

объемом $dV = Sdx$, где S – площадь поперечного сечения стержня. Вынося ρ из под знака интеграла (4.9) как постоянную величину и учитывая, что $m = \rho Sl$, а $r = x$, получим

$$J_0 = \rho S \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{1}{12} ml^2.$$

Аналогичный расчет можно сделать для тела другой формы. Приведем значения моментов инерции правильной формы **относительно оси вращения проходящей через центр масс** (табл.1)

Таблица 1

Обруч (тонкостенный цилиндр)	$J_0 = mR^2$	R – радиус обруча (цилиндра)
Диск (сплошной однородный цилиндр)	$J_0 = \frac{1}{2} mR^2$	R – радиус диска (цилиндра)
Шар	$J_0 = \frac{2}{5} mR^2$	R – радиус шара
Стержень	$J_0 = \frac{1}{12} ml^2$	l – длина стержня

Если ось вращения сместить параллельно ей на расстояние a от центра масс, то момент инерции возрастет на величину ma^2 и будет определяться по формуле

$$J = J_0 + ma^2. \quad (4.10)$$

Данное равенство представляет собой **теорему Штейнера**: *момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями*. Применив, например, эту теорему для нахождения момента инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярно к нему, получим:

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

4.3 МОМЕНТ СИЛЫ. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНО ДВИЖЕНИЯ

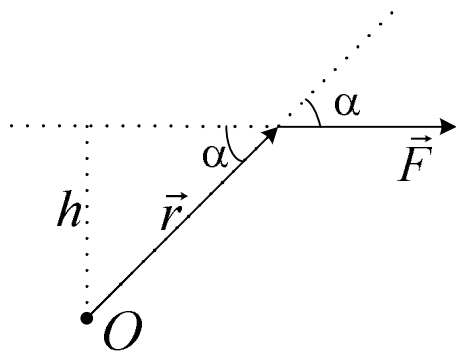


Рисунок 4.3

Вращательное действие силы определяется не только величиной силы, но и плечом h (рисунок 4.3). *Плечом силы* называется кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вынужденного вращения. *Произведение величины силы F на ее плечо называют моментом силы относительно точки*

или **вращательным моментом**: $M = Fh$. Проведем радиус-вектор \vec{r} от точки O до точки приложения силы. Учитывая, что $h = r \sin \alpha$, получим $M = Fr \sin \alpha$. В общем случае, момент силы относительно точки O представляет собой векторное произведение:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]. \quad (4.11)$$

Направление вектора \vec{M} определяется по правилу правого винта. Момент силы направлен вдоль оси вынужденного вращения, т.е. является аксиальным вектором. Если на тело действует n сил, то результирующий момент относительно точки O равен векторной сумме моментов каждой силы:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n.$$

Пусть результирующая всех внешних сил \vec{F} вызывает вращательное движение тела. Рассматривая тело, как систему материальных точек, на которые действуют внешние и внутренние силы, можно сказать, что работа всех внутренних сил равна нулю, так как по третьему закону Ньютона каждой силе найдется равная ей по величине и противоположная ей по направлению, работы, которых в сумме будут равны нулю. Элементарная работа силы \vec{F} равна $dA = Fds \cos \varphi$, где ds – модуль перемещения точки приложения силы (рисунок 4.4), φ – угол между векторами $d\vec{s}$ и \vec{F} . При малом угле

поворота $d\varphi$ из рисунка 4.4 следует, что $\cos \varphi = \sin \alpha$, а $ds = r d\varphi$, где α – угол между векторами \vec{F} и \vec{r} . Учитывая эти соотношения, получим $dA = Fr d\varphi \sin \alpha$, или

$$dA = M d\varphi. \quad (4.12)$$

Элементарная работа силы \vec{F} равна изменению кинетической энергии тела:

$$dA = dE = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right). \quad (4.13)$$

Приравнивая правые части равенств (4.12)

и (4.13), получим $M d\varphi = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega$.

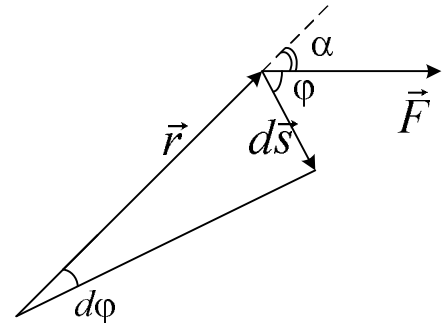


Рисунок 4.4

Подставляя в это равенство $d\varphi = \omega dt$, получим $M = \frac{Jd\omega}{dt} = J\varepsilon$, или в векторной форме

$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon}. \quad (4.14)$$

Формула (4.14) выражает **основной закон динамики вращательного движения твердого тела**: *произведение момента инерции твердого тела относительно оси вращения на вектор его углового ускорения равен векторной сумме моментов всех внешних сил относительно этой оси*. Этот закон аналогичен второму закону Ньютона в виде $\vec{F} = m\vec{a}$. При этом аналогом линейного ускорения служит угловое ускорение, аналогом сил – их моменты, а аналогом массы – момент инерции. Аналогия величин характеризующих динамику вращательного движения и динамику поступательного движения представлена в таблице 2.

Таблица 2

Поступательное движение	Вращательное движение
Основной закон динамики	
$F = ma$	$M = J \varepsilon$
$F\Delta t = m v_2 - m v_1$	$M\Delta t = J \omega_2 - J \omega_1$

Закон сохранения

импульса

$$\sum_{i=1}^n m_i v_i = \text{const}$$

момента импульса

$$\sum_{i=1}^n J_i \omega_i = \text{const}$$

Работа и мощность

$$dA = F ds$$

$$N = F v$$

$$dA = M d\varphi$$

$$N = M \omega$$

Кинетическая энергия

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$$

Пусть тело имеет закрепленную ось вращения z и на него действует равнодействующая всех внешних сил \vec{F} , создающая момент \vec{M}_F относительно некоторой точки оси вращения. Разложим силу \vec{F} на составляющие \vec{F}_τ , \vec{F}_r , \vec{F}_z (рисунок 4.5). Легко видеть, что составляющие \vec{F}_r и \vec{F}_z , которые направлены соответственно

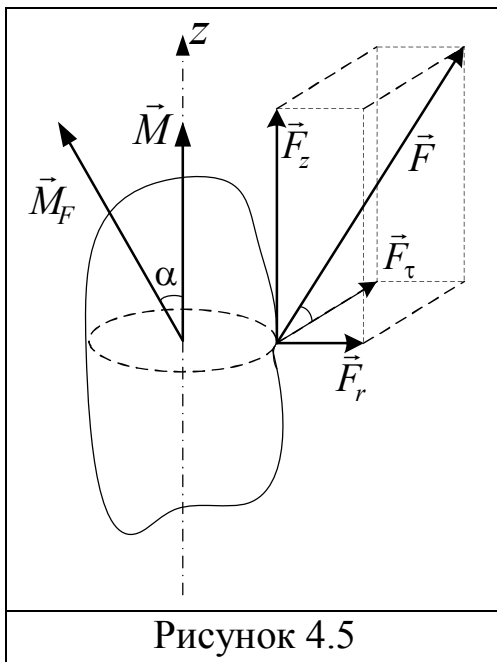


Рисунок 4.5

перпендикулярно и параллельно оси z не могут вызвать вращение тела. Вращающий момент создается силой \vec{F}_τ , направленной по касательной к траектории движения точки. Можно показать, что момент этой силы направлен по оси вращения и равен проекции момента \vec{M}_F на ось z , т.е. полагают, что его модуль $M = (M_F)_z = F_\tau h$, где h – плечо силы \vec{F}_τ .

4.4 МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

Во вращающемся твердом теле i – тая материальная точка имеет момент импульса, равный $L_i = m_i v_i r_i$, где $i = 1, 2, \dots, n$, n – число точек составляющих тело. Суммируя моменты импульса для всех точек, и учитывая соотношения $v_i = \omega r_i$, получим момент импульса твердого тела:

$$L = \sum m_i v_i r_i = \omega \sum m_i r_i^2 = J\omega, \quad (4.15)$$

где J – момент инерции тела, ω – угловая скорость вращения тела.

Момент импульса тела является векторной величиной, направленной по оси вращения, следовательно, выражение (4.15) можно записать в виде

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (4.16)$$

Воспользуемся основным законом динамики вращательного движения $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$. Выполним замену углового ускорения через производную угловой скорости $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, и полагая, что $J = const$ внесем его под знак дифференциала. В итоге получим обобщенную форму записи основного уравнения динамики вращательного движения

$$\vec{M} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (4.17)$$

Если $\vec{M} = 0$, то момент импульса тела $\vec{L} = J\vec{\omega} = const$. Таким образом получаем закон сохранения момента импульса тела, который является частным случаем закона сохранения момента импульса материальной системы.

Применим закон сохранения момента импульса для анализа движения спортсмена. Этот закон должен выполняться при вращении гимнаста, фигуриста и т.д. Если спортсмен группируется так, чтобы приблизить точки тела к оси вращения (гимнаст сгибается, фигурист сближает руки и ноги), то он уменьшает свой момент инерции

J (примерно в 3 – 4 раза) следовательно угловая скорость вращения ω возрастает. При возвращении спортсмена в начальное состояние его момент инерции увеличивается, и скорость вращения заметно уменьшается.

Закон сохранения момента импульса твердого тела широко используется в различных технических устройствах. Способность вращающихся тел сохранять постоянным момент импульса \vec{L} , а значит и положение оси вращения в пространстве, используется в **гироскопе**, который представляет собой *массивное тело, быстро вращающееся около оси вращения*. Ось вращения гироскопа может перемещаться относительно корпуса благодаря специальному подвесу, а корпус связан с движущимся объектом, например самолетом. При изменении положения корпуса в пространстве изменяется его положение относительно оси вращения гироскопа, при этом положение самой оси относительно поверхности земли должно оставаться постоянным. Это изменение преобразуют в сигнал, который корректирует полет самолета. Такое устройство называется автопилотом.

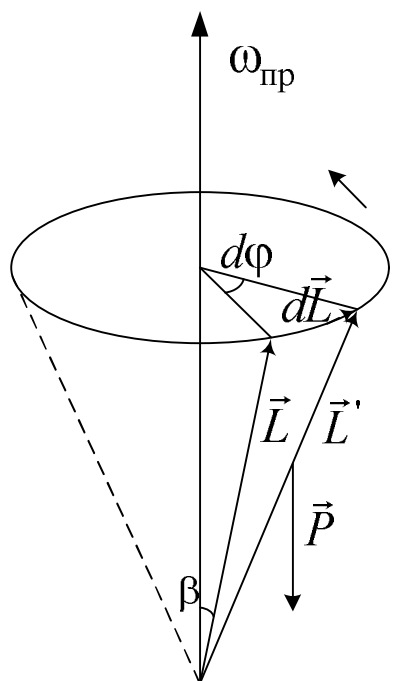


Рисунок 4.6

Важное значение в технике имеет **гироскопический эффект**, который объясняет поведение волчка (известной детской игрушки юлы) и других устройств. Если ось вращения волчка наклонена к вертикали, то под действием силы тяжести волчок не будет падать, а будет совершать дополнительное прецессионное вращение своей оси вокруг вертикального направления с угловой скоростью прецессии $\omega_{пр}$ (рисунок 4.6). Направление оси вращения волчка совпадает с направлением его момента импульса \vec{L} . Пусть \vec{P} – сила тяжести действующая на волчок, ω – угловая

скорость волчка. За время dt момент импульса волчка изменит свою величину на $d\vec{L} = \vec{M}dt$. Вектор момента силы тяжести \vec{M} должен быть перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы \vec{L} и $\omega_{\text{пр}}$. Направление вектора $d\vec{L}$ так же должно быть перпендикулярно к этой плоскости. Новое значение вектора момента импульса равно $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$. Ось вращения гироскопа будет иметь такое же направление, как вектор \vec{L}' . Угол наклона оси вращения β не изменится. Вертикальная плоскость, проходящая через ось вращения гироскопа, повернётся на угол $d\phi$. Отсюда скорость прецессионного движения $\omega_{\text{пр}} = \frac{d\phi}{dt}$. Как следует из рисунка 4.6, $d\phi = \frac{dL}{L \sin \beta}$, тогда с учетом равенства (4.17) получим

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{M}{L \sin \beta}. \quad (4.18)$$

Из полученной формулы следует, что чем быстрее вращается волчок, т.е. больше L , тем меньше скорость прецессии, что хорошо известно из опыта.

На гироскопическом эффекте основано действие гироскопического компаса, применяемого в морском транспорте. В этом приборе ось гироскопа может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Под влияние суточного вращения Земли ось гироскопа устанавливается точно на север.

В нарезном оружии пули и снаряды получают вращательное движение относительно своей оси. Момент сил сопротивления воздуха вызывает слабое прецессионное движение пули, и ось вращения пули практически совпадает с траекторией её движения.

5. ГИДРОДИНАМИКА

5.1 ЛИНИИ И ТРУБКИ ТОКА

Гидродинамика изучает движение жидкостей. Однако ее законы применимы и к движению газов. При стационарном течении жидкости скорость ее частиц в каждой точке пространства есть величина, независимая от времени, и являющаяся функцией координат. При стационарном течении траектории частиц жидкости образуют *линию тока*. Совокупность линий тока образует *трубку тока* (рисунок 5.1). Будем считать жидкость несжимаемой, тогда объем жидкости, протекающий через сечения S_1 и S_2 , будет

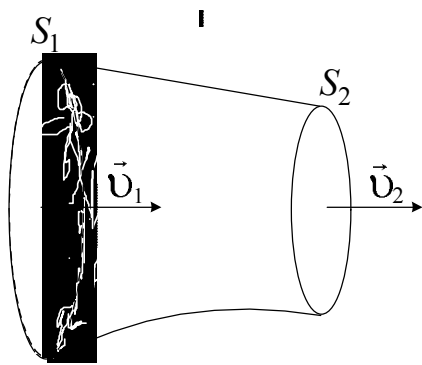


Рисунок 5.1

одинаков. За секунду через эти сечения пройдет объем жидкости, равный

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad (5.1)$$

где v_1 и v_2 – скорости жидкости в сечениях S_1 и S_2 . Уравнение (5.1) называют *уравнением неразрывности струи*. Из него следует, что скорость жидкости обратно пропорциональна сечению трубки тока.

5.2 УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Будем рассматривать идеальную несжимаемую жидкость, в которой внутреннее трение (вязкость) отсутствует. Выделим в стационарно текущей жидкости тонкую трубку тока (рисунок 5.2) с сечениями S_1 и S_2 , перпендикулярными к линиям тока. В сечении 1 за малое время t частицы сместятся на расстояние l_1 , а в сечении 2 – на расстояние l_2 . Через оба сечения за время t пройдут одинаковые малые объемы жидкости $V = V_1 = V_2$ и перенесут массу жидкости $m = \rho V$, где ρ – плотность жидкости.

В целом изменение механической энергии в трубке тока между сечениями S_1 и S_2 , произошедшее за время t , можно заменить изменением энергии объема V , произошедшим при его перемещении от сечения 1 до сечения 2. При таком движении изменится кинетическая и потенциальная энергия этого объема и полное изменение его энергии

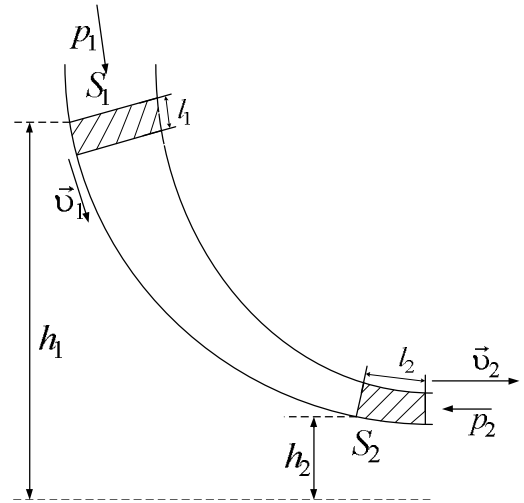


Рисунок 5.2

$$\Delta E = (\rho V v_2^2 / 2 + \rho V g h_2) - (\rho V v_1^2 / 2 + \rho V g h_1), \quad (5.2)$$

где v_1 и v_2 – скорости частичек жидкости в сечениях S_1 и S_2 соответственно, g – ускорение свободного падения, h_1 и h_2 – высоты центра сечений.

В идеальной жидкости потери на трение отсутствуют, поэтому приращение энергии ΔE должно быть равно работе, совершаемой силами давления над выделенным объемом. При отсутствии сил трения эта работа

$$A = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 = (p_1 - p_2) V. \quad (5.3)$$

Приравнивая правые части равенств (5.2) и (5.3) и перенося члены с одинаковыми индексами в одну часть равенства, получим:

$$\rho v_1^2 / 2 + \rho g h_1 + p_1 = \rho v_2^2 / 2 + \rho g h_2 + p_2. \quad (5.4)$$

Сечения трубки S_1 и S_2 были взяты произвольно, поэтому можно утверждать, что в любом сечении трубки тока справедливо выражение

$$\rho v^2 / 2 + \rho g h + p = \text{const}. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) называется уравнением Бернулли. Для горизонтальной линии тока $h = \text{const}$ и равенство (5.4) приобретает вид

$$\rho v_1^2 / 2 + p_1 = \rho v_2^2 / 2 + p_2, \quad (5.6)$$

т.е. давление оказывается меньшим в тех точках, где скорость больше.

5.3 СИЛЫ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

Реальной жидкости присуща вязкость, которая проявляется в том, что любое движение жидкости и газа самопроизвольно прекращается при отсутствии причин, вызвавших его. Рассмотрим опыт, в котором слой жидкости расположен над неподвижной поверхностью, а сверху его перемещается со скоростью \vec{v}_0 плавающая над ней пластина с поверхностью S . Опыт показывает, что для перемещения пластины с постоянной скоростью необходимо действовать на нее с силой \vec{F} . Так как пластина не получает ускорения, значит, действие этой силы уравнивается другой, равной ей по величине и противоположной по направлению силой, которая является силой трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Ньютон показал, что сила трения равна

$$F_{\text{тр}} = -\eta(v_0/d)S, \quad (5.7)$$

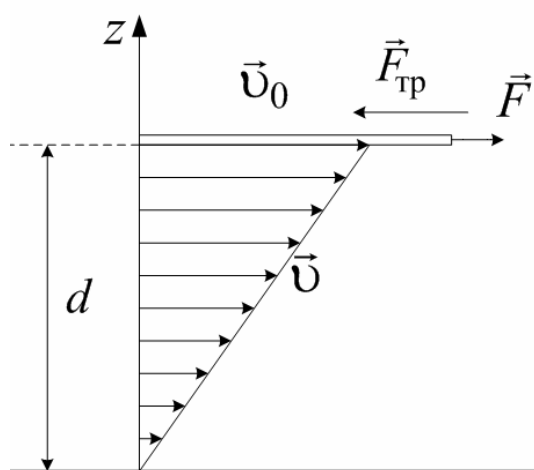


Рисунок 5.3

где d – толщина слоя жидкости, η – коэффициент вязкости или коэффициент трения жидкости, знак “–” учитывает различное направление векторов $\vec{F}_{\text{тр}}$ и \vec{v}_0 . Если исследовать скорость частиц жидкости в разных местах слоя, то оказывается, что она изменяется по линейному закону (рисунок 5.3): $v(z) = (v_0/d)z$.

Дифференцируя это равенство, получим $dv/dz = v_0/d$. С учетом этого равенства выражение (5.7) примет вид

$$F_{\text{тр}} = -\eta(dv/dz)S, \quad (5.8)$$

где η – коэффициент динамической вязкости. Величина dv/dz

называется градиентом скорости. Она показывает, как быстро изменяется скорость в направлении оси z . При $dv/dz = \text{const}$ градиент скорости численно равен изменению скорости v при изменении z на единицу. Положим численно в выражении (5.8) $dv/dz = -1$ и $S = 1$, получим $\eta = F_{\text{тр}}$. Отсюда следует *физический смысл η* : **коэффициент вязкости численно равен силе внутреннего трения, возникающей на единице площади соприкосновения двух слоев жидкости, движущихся друг относительно друга с градиентом скорости равном единице.** Единица измерения вязкости в системе СИ является $[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}$, в системе СГС $[\eta] = \text{П}$ (пуаз), причем $1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 10 \text{ П}$.

5.4 ЛАМИНАРНОЕ И ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЯ

При достаточно малой скорости движения жидкости наблюдается слоистое или **ламинарное** течение, когда слои жидкости скользят относительно друг друга не перемешиваясь. При ламинарном течении положение линий тока с течением времени не меняется, такое течение является стационарным. С увеличением скорости движения частиц течение жидкости становится нестационарным, наблюдаются завихрения, скорость течения в каждой точке пространства беспорядочно меняется. Такое течение называется **турбулентным**.

Английский ученый Рейнольдс установил, что характер течения зависит от значения безразмерной величины:

$$\text{Re} = \rho v l / \eta, \quad (5.9)$$

где ρ – плотность жидкости; v – средняя скорость потока; l – характерный для поперечного сечения размер, например, радиус при круглом сечении; η – коэффициент вязкости. Величина Re называется числом Рейнольдса. При малых значениях Re наблюдается ламинарное течение. Начиная с некоторого определенного значения этого числа, называемого критическим,

течение приобретает турбулентный характер. Отношение $\nu = \eta / \rho$ называется *кинематической вязкостью*. Используя ν , число Рейнольдса можно записать в следующем виде: $Re = \nu l / \nu$. Характер течения различных жидкостей в трубах различных сечений будет совершенно одинаков, если каждому течению соответствует одно и то же значение Re .

5.5 ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

При движении жидкости в круглой трубе ее скорость равна нулю у стенок трубы и максимальна на оси трубы. Полагая течение ламинарным, найдем, как меняется скорость в направлении радиуса трубы. Выделим в трубе воображаемый цилиндрический объем жидкости радиуса r и длины l , соосный с трубой (рисунок 5.4).

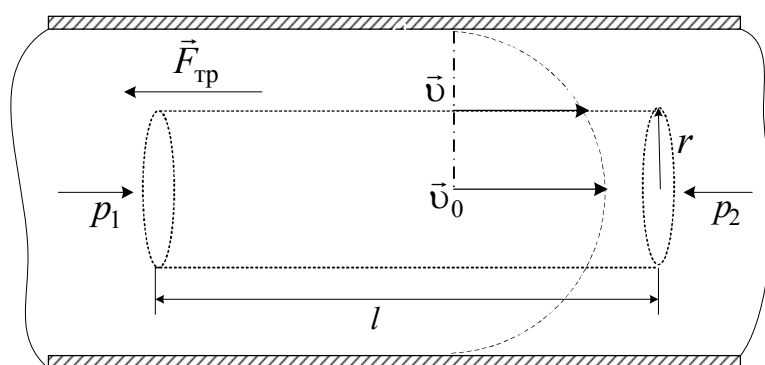


Рисунок 5.4

При стационарном течении сила трения $F_{тр}$ равна разности сил давления: $F_{тр} = (p_1 - p_2)\pi r^2 = \Delta p \pi r^2$, где p_1 и p_2 – давления жидкости в сечении 1 и 2, Δp – разность давлений на концах объема, πr^2 – площадь основания цилиндра. Подставляя сюда силу трения $F_{тр} = -\eta(dv/dr)2\pi rl$, получим $\Delta p \pi r^2 = -\eta(dv/dr)2\pi rl$, где dv/dr – градиент скорости, η – коэффициент вязкости жидкости, $2\pi rl$ –

площадь боковой поверхности цилиндра. Разделяя переменные r и v , получим $dv = -(\Delta p/2\eta l)rdr$. Суммируя все изменения dv от r до R , придем к определенному интегралу

$$\int_0^v dv = -(\Delta p/2\eta l) \int_r^R r dr,$$

в котором учтено, что на стенках трубы при $r = R$ скорость движения слоя $v = 0$. После интегрирования получим:

$$v = (\Delta p/4\eta l)(R^2 - r^2). \quad (5.10)$$

Выражение (5.10) показывает, что скорость частиц как функция расстояния от оси трубы изменяется по параболическому закону. Используя выражение (5.10), можно решить такую важную практическую задачу, как нахождение объема жидкости Q , протекающего через поперечное сечение трубы за единицу времени. Разобьем поперечное сечение трубы на кольца шириной dr (рисунок 5.5). Через кольцо радиусом r за секунду пройдет объем жидкости, равный произведению площади кольца $2\pi r dr$ на скорость течения в точках, находящихся на расстоянии r от оси трубы:

$$dQ = v 2\pi r dr. \quad (5.11)$$

Чтобы получить поток Q , нужно просуммировать все dQ при изменении r от 0 до R . Получим определенный интеграл, который с учетом выражения (5.10), будет иметь вид

$$Q = (\pi \Delta p / 2 \eta l) \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = (\pi \Delta p / 2 \eta l) \left(R^2 r^2 / 2 - r^4 / 4 \right) \Big|_0^R$$

или

$$Q = \pi \Delta p R^4 / 8 \eta l. \quad (5.12)$$

Это выражение называется **формулой Пуазейля**. Из формулы виден следующий практический вывод: для улучшения пропускной способности труб в первую очередь следует увеличить их радиус.

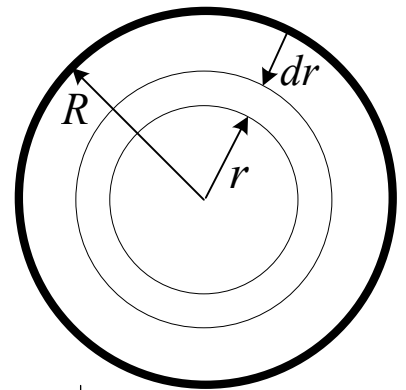


Рисунок 5.5

Например, при увеличении радиуса трубы в 2 раза, количество протекающей жидкости возрастет в 16 раз.

Формула (5.12) используется при определении вязкости жидкости. Измерив поток жидкости Q через капилляр известного радиуса и зная перепад давления, можно определить вязкость жидкости.

5.6 ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

При движении симметричных тел в жидкостях и газах возникает **сила лобового сопротивления**, направленная противоположно скорости движения тела. При ламинарном обтекании шара линии тока расположены симметрично относительно плоскости, проходящей через его центр и перпендикулярной к его скорости. Следовательно, согласно уравнению Бернулли, и давление жидкости будет симметричным относительно этой плоскости. Силы давления с обеих сторон шара будут уравниваться, и сила сопротивления должна быть равна нулю – *парадокс Даламбера*. Однако это справедливо лишь при отсутствии сил вязкости в жидкости. При ламинарном обтекании тела жидкостью сила лобового сопротивления полностью зависит от сил вязкости. Стокс, проведя расчеты, получил формулу для силы сопротивления движению шара:

$$F = 6\pi\eta r v, \quad (5.13)$$

где r – радиус шара, v – ее скорость, η – коэффициент вязкости.

При возрастании скорости движения тела, начиная с некоторого значения числа Рейнольдса, обтекание тела становится турбулентным: в поверхностном слое поток отрывается от поверхности тела, в результате чего позади тела возникают вихри. Давление в образующейся за телом вихревой области, согласно уравнению Бернулли, оказывается пониженным, поэтому

результатирующая сила будет отлична от нуля и лобовое сопротивление увеличится.

При обтекании несимметричных тел кроме силы лобового сопротивления возникает **подъемная сила**. Например, для крыла самолета скорость обтекания его верхней части существенно больше, чем нижней. Согласно уравнению Бернулли, давление воздуха в нижней части крыла будет больше чем сверху. В результате возникает подъемная сила крыла самолета.

6. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

6.1 ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ

Процесс, отличающийся той или иной степенью повторяемости, называют колебанием. Среди разнообразных колебаний, встречающихся в природе, важную роль играют **гармонические колебания**, представляющие собой *процесс, в котором изменение колеблющейся величины происходит по закону синуса или косинуса*.

Гармонические колебания совершают многие тела, например, маятники. Рассмотрим кинематику гармонического колебания. Пусть точка М движется по окружности, ее радиус-вектор \vec{a} равномерно вращается с угловой скоростью ω (рисунок 6.1). Проекция вектора \vec{a} на ось

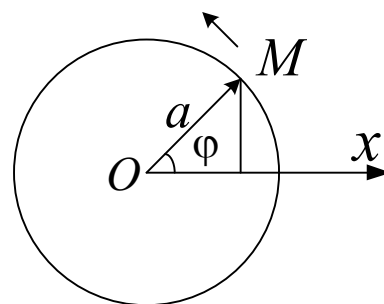


Рисунок 6.1

x равна $x = a \cos \varphi$. При равномерном вращении величина угла φ между вектором \vec{a} и осью x изменяется по закону $\varphi = \omega t + \varphi_0$, где t – время, φ_0 – угол φ при $t = 0$, подставляя φ , получим

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6.1)$$

т.е. проекция точки, вращающейся по окружности, совершает простое гармоническое колебание, где x – смещение точки от положения

равновесия, величина $(\omega t + \varphi_0)$ есть фаза колебания, φ_0 – начальная фаза, ω – круговая частота, a – амплитуда колебания. Если положить в формуле (6.1) $\varphi_0 = -\pi/2 + \varphi_1$, получим $x = a \sin(\omega t + \varphi_1)$. Следовательно, синус и косинус отличаются лишь начальной фазой колебаний и представляют собой единую функцию, называемую *гармонической*. Время T , в течение которого совершается одно полное колебание, называется **периодом**. Единицей измерения периода в СИ является секунда: $[T] = 1 \text{ с}$. **Частота** колебаний f равна числу колебаний, совершенных системой за единицу времени, т.е. $f = 1/T$. Единицей измерения частоты в СИ является герц: $[f] = 1 \text{ Гц} = \text{с}^{-1}$. В течение периода вектор \vec{a} повернется на угол 2π , причем $2\pi = \omega T$. Отсюда круговая частота колебаний.

6.2 СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ, НАПРАВЛЕННЫХ ВДОЛЬ ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Тело может участвовать одновременно в нескольких колебаниях сразу. Например, кузов автомобиля участвует одновременно в колебании двух упругих элементов — рессор и шин. Причем эти колебания могут происходить независимо друг от друга. В таких случаях результирующее смещение тела x равно сумме смещений тела x_1 и x_2 в каждом из колебаний в отдельности:

$$x = x_1 + x_2. \quad (6.2)$$

Пусть некоторое тело участвует одновременно в двух колебаниях, которые происходят в одном и том же направлении и с одинаковой частотой ω , но с различными начальными фазами φ_1 и φ_2 , с различными амплитудами a_1 и a_2 и описываются уравнениями:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (6.3)$$

Для нахождения x удобно представить эти колебания с помощью векторной диаграммы, на которой векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_2 изображены в

момент времени $t = 0$. В любой момент времени угол между осью x и векторами \vec{a}_1 и \vec{a}_2 равен фазе этих колебаний, определяемых выражениями (6.3). Разность фаз этих колебаний $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$, т.е. угол между векторами \vec{a}_1 и \vec{a}_2 остается постоянным с течением времени. Все векторы вращаются с течением времени с угловой скоростью ω и треугольник OBC остается жестким. Из рисунка 6.2 следует, что проекции векторов связаны отношением (6.2): $x = x_1 + x_2$ это означает, что проекция вектора \vec{a} описывает результирующее гармоническое колебание с круговой частотой ω . Амплитуду этого колебания a найдем из рисунка 6.2 по теореме косинусов:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \Delta\varphi. \quad (6.4).$$

Начальная фаза результирующего колебания согласно рисунку 6.2 равна:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

Если колебания синфазны ($\Delta\varphi = 0$ или $\Delta\varphi = 2\pi m$, где $(m = 0, 1, 2, \dots)$), то согласно (6.4) получим $a = a_1 + a_2$, т.е. *амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых синфазных колебаний.*

Если колебания происходят в противофазе, то $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$ и, согласно (6.4), получим $a = |a_1 - a_2|$. *Результирующая амплитуда складываемых противофазных колебаний равна разности их амплитуд.* Полученный результат имеет большое значение при объяснении явления интерференции волн, когда две волны, возбуждающие колебания в пространстве, могут усиливать или ослаблять колебания точек среды в зависимости от разности фаз между ними.

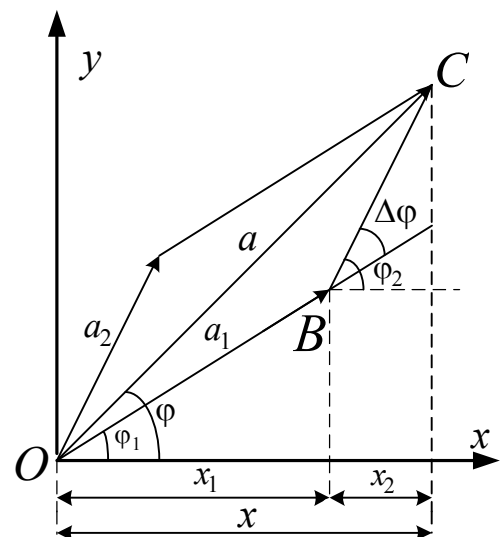


Рисунок 6.2

6.3 БИЕНИЯ

Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. Пусть амплитуды колебаний одинаковы и равны a . Частота одного колебания равна ω , а другого — $\omega + \Delta\omega$. По условию $\omega \gg \Delta\omega$. Уравнения колебаний будут иметь вид $x_1 = \sin \omega t$ и $x_2 = \sin(\omega + \Delta\omega)t$. Складывая эти выражения и применяя формулу для суммы синусов, получаем:

$$x = x_1 + x_2 = 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin \omega t \quad (6.5)$$

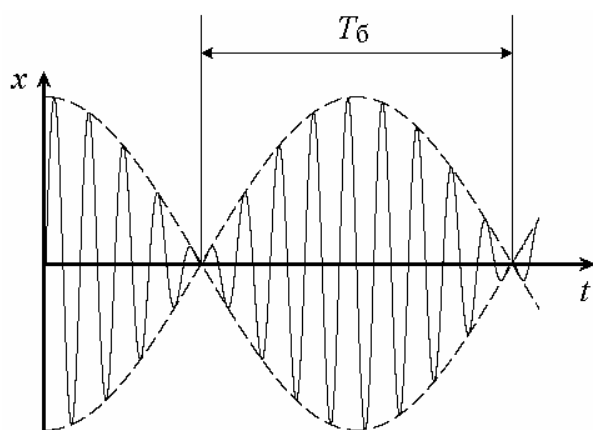


Рисунок 6.3

(в аргументе синуса пренебрегли членом $\Delta\omega/2$ по сравнению с ω). График функции (6.5) изображен на рисунке 6.3. Множитель $2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ меняется с течением времени значительно медленнее по сравнению с величиной $\sin \omega t$.

Этот множитель можно считать амплитудой гармонического колебания, происходящего с частотой ω . Эта амплитуда медленно изменяется в зависимости от времени по гармоническому закону. Такое колебание называют **биением**, а частоту пульсаций амплитуды — частотой биения. Период биений $T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$. Явление биений используется при настройке музыкальных инструментов (гитара и т.д.). Например, при настройке фортепиано добиваются того, чтобы высокие гармоники двух струн давали заданную частоту биений.

6.4 СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Больше практическое значение имеет колебательный процесс, при котором материальная точка может совершать одновременно два независимых колебания во взаимно перпендикулярных направлениях. Например, груз, подвешенный на нити. Может совершать независимые колебания одновременно вдоль осей x и y (рисунок 6.4). Оба этих колебания имеют одинаковую частоту. Пусть амплитуды этих колебаний равны a и b , а разность фаз равна φ . Уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$x = a \sin \omega t, \quad y = b \sin(\omega t + \varphi). \quad (6.6).$$

Выражение (6.6) представляет собой заданной в пространственной форме уравнение траектории движения тела. Исключая из системы уравнений (6.6) время t , получим следующее выражение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{2xy}{ab} \right) \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (6.7).$$

Это равенство представляет собой уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей. Определим форму траектории для некоторых частных случаев.

1. Разность фаз колебаний $\varphi = 0$. Уравнение (6.7) принимает вид $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0$. Эллипс вырождается в прямую, описываемую уравнением $y = \left(\frac{a}{b} \right) x$. Тело движется по прямой 1 на рисунке 6.4.

2. Разность фаз колебаний $\varphi = \pi$. Уравнение 6.7 принимает вид $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = 0$. Получаем уравнение прямой $y = -\left(\frac{a}{b} \right) x$. Тело движется по прямой 2 на рисунке 6.4.

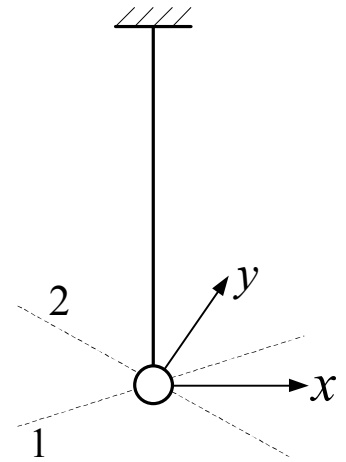


Рисунок 6.4

3. Разность фаз колебаний $\varphi = \pm\pi/2$. Уравнение 6.7 принимает вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Получаем уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. Такое движение по эллипсу легко получить, если в данный момент максимального отклонения маятника при линейных колебаниях ему ударом сообщить импульс в перпендикулярном направлении.

Если частоты ω_x и ω_y взаимно перпендикулярных колебаний по осям x и y не одинаковы, а отношение их равно отношению целых чисел m и n ($\omega_x / \omega_y = m / n$), то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых *фигурами Лиссажу*. Такие фигуры удобно наблюдать на экране осциллографа, когда горизонтальная и вертикальная разверстки управляются гармоническим электрическим сигналом с частотами ω_x и ω_y . Фигуры Лиссажу часто используются в измерительной технике для проверки точности эталонных частот, при акустических измерениях и т.д.

6.5 ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК

Рассмотрим колебания груза, прикрепленного к пружине с коэффициентом жесткости k (рисунок 6.5). При смещении груза от положения равновесия на расстояние x возникает результирующая сила, возвращающая груз к положению равновесия и равная

$$F_{\text{в}} = -kx. \quad (6.8)$$

Знак минус показывает, что направления силы и смещения противоположны. Для выяснения характера движения груза под действием силы $F_{\text{в}}$ применим к нему второй закон Ньютона

$$F_{\epsilon} = ma = m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = m\ddot{x}, \quad (6.9)$$

где m – масса груза, a – ускорение груза, $d^2 x / dt^2$ – вторая производная от x по времени, которую для простоты записи будем изображать в виде \ddot{x} . Приравнивая части формул (6.8) и (6.9) и преобразуя равенство, получим

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} \right) x = 0. \quad (6.10)$$

Запишем (6.10) в общем виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.11)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (6.12)$$

В итоге, решение физической задачи привело к выражению (6.11), которое представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка для x как для функции от времени. Как будет показано в дальнейшем, в общем случае дифференциальное уравнение второго порядка может содержать \ddot{x} , \dot{x} , x и произвольную функцию $F(t)$, где \dot{x} – первая производная от x по времени. Решением дифференциального уравнения второго порядка будет являться любая функция $x = f(t)$, если при подстановке ее вместо x , а $f''(t)$ и $f'(t)$ соответственно, вместо \ddot{x} и \dot{x} , дифференциальное уравнение обращается в тождество.

Решением дифференциального уравнения (6.11) должна быть такая функция $f(t)$, которая после двойного дифференцирования должна с точностью до постоянного множителя иметь прежний вид, чтобы при подстановке ее и второй производной в дифференциальное уравнение оно не зависело от времени. Такой функцией является гармоническая функция, которую запишем в виде

$$x = a \sin(\omega t + \varphi), \quad (6.13)$$

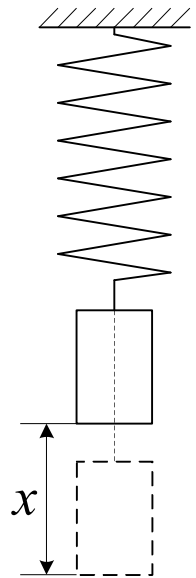


Рисунок 6.5

где a – амплитуда колебаний, ω – круговая частота, φ – начальная фаза, x – смещение груза. Легко видеть, что $\ddot{x} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$. Подставляя выражение для \ddot{x} в уравнение (6.11), получим $-\omega^2 x + \omega_0^2 x = 0$ или $\omega = \omega_0$. Итак, дифуравнение (6.11) превращается в тождество при $\omega = \omega_0$. Это означает, что решением дифуравнения (6.11) является гармоническая функция, определяемая выражением (6.13), тело будет совершать гармоническое колебание и частота этих колебаний определяется по формуле (6.12). Период колебаний груза на пружине найдем по формуле $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, или с учетом (6.12)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6.14)$$

Дифуравнение (6.11) может определять колебание различной природы. Любая физическая величина, удовлетворяющая этому дифуравнению, описывает простое гармоническое колебание. Уравнение такого типа носит название *дифференциального уравнения гармонических колебаний*.

6.6 ФИЗИЧЕСКИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

1. Произвольное тело, способное совершать колебания вокруг своей оси, не проходящей через центр масс, называют **физическим маятником**. Таким маятником, например, являются обыкновенные качели. Рассмотрим колеблющееся тело массой m , центр масс которого C находится на расстоянии a от оси вращения O (рисунок 6.6). На маятник будет действовать момент силы тяжести, равный $M = mgh = -mgl \sin \varphi$, где φ – угол отклонения маятника от положения равновесия, h – плечо силы mg . Рассмотрим колебания малой амплитуды, для которых можно считать, что $\sin \varphi \approx \varphi$.

С учетом этого запишем: $M = -mga\varphi$, где знак минус введен, чтобы учесть. Что момент отклонения сил стремится повернуть маятник в сторону, противоположную углу отклонения. Для анализа колебаний маятника применим основное уравнение динамики вращательного движения:

$M = J\varepsilon = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = J\ddot{\varphi}$, где ε – угловое ускорения маятника, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – вторая производная от угла поворота по времени. Условно обозначаемая, как $\ddot{\varphi}$. Подставляя выведенное ранее выражение для момента сил, получим $J\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0$ или

$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{J}\varphi = 0$. Это дифуравнение гармонических колебаний для φ , как функции от времени, подобное дифуравнению (6.11). Из сравнения дифуравнений имеем $\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$ или для периода колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (6.15)$$

Рассмотрим физический маятник в виде тонкого стержня, подвешенного за его конец. Подставляя его момент инерции, равный $J = \frac{1}{3}ml^2$, в формулу (6.15), получим $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}}$. Полученное выражение показывает. Что период колебаний не зависит от массы маятника.

2. Частным случаем физического маятника является **математический маятник**, который *представляет собой материальную точку, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити*. Если все материальные точки физического маятника собрать в центре его масс, то физический маятник превратится в математический. Подставляя момент инерции математического

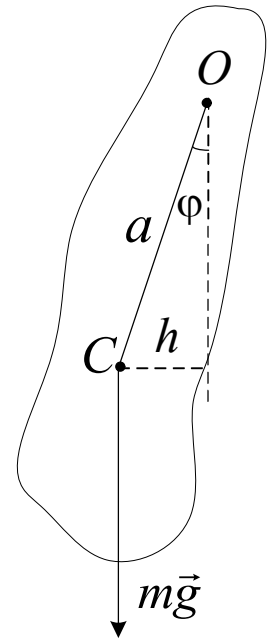


Рисунок 6.6

маятника, равный $J = ml^2$, в формулу (6.15), где l – длина нити, получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6.16)$$

Сравнивая формулы (6.15) и (6.16), можно ввести вспомогательную величину $L = \frac{J}{m}$ – *приведенную длину физического маятника*. Она равна длине нити такого математического маятника, период которого совпадает с периодом данного физического маятника.

6.7 КРУТИЛЬНЫЙ МАЯТНИК

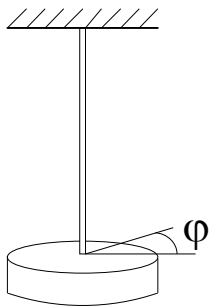


Рисунок 6.7

Рассмотрим груз, подвешенный на упругом стержне (проволоке) и имеющий возможность совершать крутильные колебания относительно вертикальной оси (рисунок 6.7). При повороте груза на некоторый угол φ от положения равновесия на него со стороны стержня действует возвращающий вращательный момент $M = -k\varphi$, где k – коэффициент жесткости стержня на кручение; знак минус учитывает, что момент M стремится повернуть груз в сторону, противоположную углу отклонения φ . Движение груза описывается основным уравнением

динамики вращательного движения $M = J\varepsilon = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = J\ddot{\varphi}$, где ε –

угловое ускорение маятника; $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – вторая производная от угла

поворота по времени, обозначаемая, как $\ddot{\varphi}$, J – момент инерции груза.

Подставляя выведенное ранее выражение для момента сил, получим $J\ddot{\varphi} + k\varphi = 0$ или $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Это дифференциальное уравнение гармонических колебаний для

φ как функции от времени, подобную дифуравнению (6.11). Из сравнения дифуравнений для круговой частоты крутильных колебаний ω_0 имеем $\omega_0^2 = \frac{k}{J}$ или для периода этих колебаний $T = 2\pi\sqrt{J/k}$.

6.8 ЭНЕРГИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Тело, совершающее гармонические колебания, называется *гармоническим осциллятором*. Силы, воздействующие на тело при гармонических колебаниях, являются консервативными, т.е. зависят только от координат, и для колеблющегося тела справедлив закон сохранения энергии: сумма потенциальной E_n и кинетической E_k энергий колеблющегося тела есть величина постоянная $E = E_n + E_k = const$, где E – полная энергия колеблющегося тела. При прохождении положения равновесия $E_n = 0$ и полная энергия

$E = E_k = \frac{m v_m^2}{2}$, где v_m – скорость тела при прохождении положения равновесия. Для нахождения значения скорости воспользуемся формулой $v = \frac{dx}{dt}$. Полагая в формуле (6.13) значение $\varphi = 0$, получим

после ее дифференцирования $v = -a\omega \cos \omega t$. Из этих формул видно, что при $t = 0$ смещения $x = 0$, а скорость v имеет максимальное значение $v_m = a\omega$. Подставляя выражение v_m в формулу для полной

энергии. Получим $E = \frac{ma^2\omega^2}{2}$. При максимальном смещении тела скорость его движения $v = 0$, кинетическая энергия $E_k = 0$, $x = a$ и полная энергия колеблющегося тела $E = \frac{ka^2}{2}$.

6.9 ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Реально любой свободный колебательный процесс является затухающим, так как всегда существуют потери колебательной энергии, например, из-за наличия сил сопротивления. Рассмотрим груз массой m , подвешенный на пружине с коэффициентом жесткости k . При движении груза в воздухе на него действует сила сопротивления, равная $F_c = -r\upsilon = -r\dot{x}$, где υ – скорость груза, \dot{x} – первая производная от смещения x по времени t , r – коэффициент сопротивления, знак минус учитывает, что сила и скорость имеют противоположные направления. Учитывая также возвращающую силу $F_g = -kx$, применим к маятнику второй закон Ньютона: $F_c + F_g = m\ddot{x}$ или

$$-kx - r\dot{x} = m\ddot{x}, \quad (6.17)$$

где \ddot{x} – вторая производная от смещения по времени, равная ускорению движения тела. Введем обозначения $2\beta = r/m$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, где β – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота колебаний системы, при условии отсутствия затухания. Используя β и ω_0 , преобразуем (6.17) к виду

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.18)$$

Выражение (6.18) представляет собой *однородное дифференциальное уравнение затухающих колебаний* и в такой обобщенной форме применимо для разнообразных затухающих процессов. Если какая-нибудь физическая величина удовлетворяет дифуравнению типа (6.18), то она описывается уравнением затухающих колебаний.

Решением дифуравнения (6.18) должна быть такая функция, которая отличается от ее 1-ой и 2-ой производных лишь постоянным множителем. Такой функцией является лишь экспоненциальная функция, и решения дифуравнения (6.18) будем искать в виде

$$x = y \exp(-\beta t), \quad (6.19)$$

где сомножитель $y = y(t)$ в общем случае является функцией от времени. Взяв производные, найдем \ddot{x} и \dot{x} : $\dot{x} = (\dot{y} - \beta y) \exp(-\beta t)$, $\ddot{x} = (\ddot{y} - 2\beta\dot{y} + \beta^2 y) \exp(-\beta t)$. Подставив \ddot{x} , \dot{x} , x в дифуравнение (6.18) и разделив его на $\exp(-\beta t)$, получим

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0. \quad (6.20)$$

Выражение (6.20) представляет собой дифуравнение гармонических колебаний для y как функции времени, а величина

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (6.21)$$

есть частота затухающих колебаний. Решение уравнения (6.20) имеет вид

$$x = a_0 \exp(-\beta t) \sin \omega t. \quad (6.22)$$

Это решение представляет собой уравнение затухающих колебаний. Величину

$$a = a_0 \exp(-\beta t) \quad (6.23)$$

называют амплитудой затухающих колебаний, a_0 — начальная амплитуда колебаний, соответствующая моменту времени $t = 0$. График затухающих колебаний показан на рисунке 6.8. Пунктирными линиями показаны пределы, в которых изменяется смещение колеблющейся точки x .

Скорость затухания колебаний определяется величиной $\beta = \frac{r}{2m}$, называемой **коэффициентом затухания**. Видим, что чем больше коэффициент сопротивления, тем больше коэффициент затухания. Найдем время t_e , в течение которого

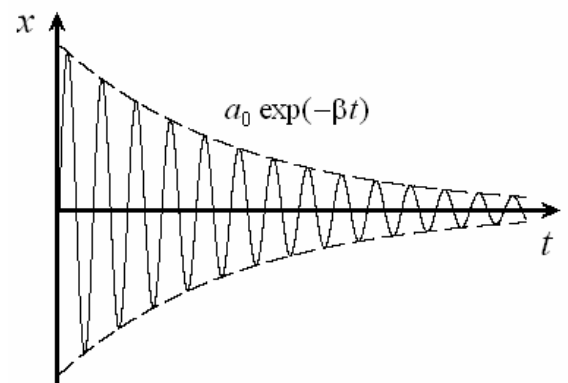


Рисунок 6.8

амплитуда колебаний уменьшится в e раз. Из выражения (6.23)

получим $\beta = \frac{\ln\left(\frac{a_0}{a}\right)}{t_e}$. Так как $\ln\left(\frac{a_0}{a}\right) = 1$, то $\beta = \frac{1}{t_e}$. Отсюда следует

физический смысл β : коэффициент затухания – есть величина обратная времени, в течение которого амплитуда колебаний убывает в e раз. Более общей величиной, характеризующей форму кривой спада колебаний, является логарифмический декремент затухания, который равен логарифму отношения соседних амплитуд:

$\chi = \ln\left\{\frac{a(t)}{a(t+T)}\right\}$. Подставляя сюда значения амплитуд из (6.23),

получим $\chi = \ln\left\{\frac{[a_0 \exp(-\beta t)]}{[a_0 \exp(-\beta tT)]}\right\} = \ln\{\exp(\beta T)\}$ или

$$\chi = \beta T. \quad (6.24)$$

За время t_e , в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз, система успевает совершить N_e колебаний.

Учитывая, что $\beta = \frac{1}{t_e}$, из (6.24) получим $\chi = \frac{T}{t_e} = \frac{1}{N_e}$. Отсюда следует

физический смысл χ : логарифмический декремент затухания – есть величина обратная числу колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в e раз.

Для характеристики колебательной системы часто употребляется величина $Q = \frac{\pi}{\chi} = \pi N_e$, называемая добротностью колебательной системы. Как видно из ее определения. Добротность пропорциональна числу колебаний N_e , в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Как следует из выражения (6.21), частота затухающих колебаний всегда меньше, чем ω_0 , т.е. трение замедляет движение. С увеличением коэффициента затухания β частота затухающих колебаний ω уменьшается. Когда $\beta \rightarrow \omega$, частота затухающих

колебаний $\omega \rightarrow 0$, а период колебаний стремится к бесконечности, т.е. движение перестает быть периодическим. Колебание, соответствующее значению $\beta = \omega_0$, называют **апериодическим**.

При апериодическом движении система медленно возвращается к положению равновесия, не совершая колебаний. В зависимости от начального состояния движения тела процесс (рисунок 6.9) идет либо по линии 1,

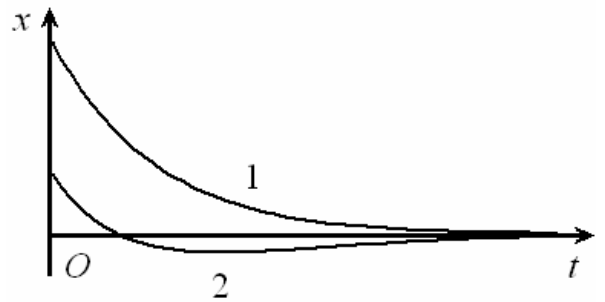


Рисунок 6.9

либо 2. В стрелочных приборах конструкторы стремятся специально обеспечить апериодический процесс колебания стрелки при измерениях. Апериодический процесс определяет частотную границу между периодическим движением и непериодическим.

6.10 ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Мы рассмотрели случай собственных колебаний тела. Однако важное практическое значение имеют колебания тела под действием внешней сил с частотой, отличной от частоты собственных колебаний системы ω_0 . Пусть на свободно колеблющееся тело с массой m действует внешняя сила $F = F_0 \sin \omega t$, где F_0 - амплитуда внешней силы, ω - ее частота. Кроме этой силы на тело действует упругая возвращающая сила $F_e = -kx$ и сила сопротивления $F_c = -r\dot{x}$, где k - коэффициент жесткости, r - коэффициент сопротивления движению, \dot{x} - первая производная от смещения x по времени, равная скорости движения тела. Для анализа характера движения тела применим второй закон Ньютона: $F + F_e + F_c = m\ddot{x}$, где \ddot{x} - вторая производная от смещения по времени, равная ускорению движения тела. Подставляя в последнее равенство выражения для сил, представим его в следующем виде: $-kx - r\dot{x} + F_0 \sin \omega t = m\ddot{x}$ или

$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$. Введем обозначения $2\beta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$,

$f_0 = \frac{F_0}{m}$, где β – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота

колебаний системы, при условии отсутствия затухания, f_0 – амплитуда внешней силы, приходящаяся на единицу массы. Вводя эти значения в дифференциальное уравнение, получим:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t. \quad (6.25)$$

Данное выражение представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение, которое в отличие от однородного дифуравнения (6.18) имеет в правой части равенства член, в котором отсутствуют x и его производные. Как известно из теории дифуравнений, общее решение неоднородного дифуравнения (6.25) складывается из решения однородного дифуравнения (6.18) и частного решения неоднородного уравнения (6.25).

Через некоторый промежуток времени после начала действия силы установятся колебания груза с частотой вынуждающей силы ω , и решением уравнения (6.25) будет гармоническая функция

$$x = A \sin(\omega t - \varphi), \quad (6.26)$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний, φ – сдвиг фаз между колебаниями вынуждающей силы и колебаниями тела. Выражение (6.26) будет представлять собой частное решение дифуравнения уравнения (6.25), с помощью которого его и можно обратить в тождество. Найдем производные $\dot{x} = A\omega \cos(\omega t - \varphi)$,

$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t - \varphi)$ и подставим их и x из (6.26) в дифуравнение (6.25).

Получим:

$$-A\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + 2\beta A \cos(\omega t - \varphi) + A\omega_0^2 \sin(\omega t - \varphi) = f_0 \sin \omega t \quad (6.27)$$

Данное выражение должно быть тождеством в любой момент времени и, следовательно, в моменты времени, соответствующие равенствам $(\omega t - \varphi) = 0$ и $(\omega t - \varphi) = \pi/2$. Подставляя каждое из этих

равенств в выражение (6.27), получим два уравнения с двумя неизвестными A и φ :

$$2\beta A\omega = f_0 \sin \varphi, \quad (6.28)$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) = f_0 \cos \varphi. \quad (6.29)$$

Разделив равенство (6.28) на (6.29), получим выражение для φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6.30)$$

Возведя равенства (6.28) и (6.29) в квадрат и складывая, получим выражение для A : $4\beta^2 A^2 \omega^2 + A^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = f_0^2$. Отсюда

$$A = \frac{f_0}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right]^{0,5}}. \quad (6.31)$$

Полученная зависимость A от ω показана на рисунке 6.10 при различных значениях β . Полученные кривые имеют максимум при некотором значении частоты $\omega = \omega_{\text{рез}}$.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты, возбуждающей силы к резонансной частоте называют **резонансом**. Это значение резонансной частоты можно получить, найдя экстремальные точки выражения (6.31). Для этого

приравняем производную от подкоренного выражения нулю. Получим $-4(\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2) + 8\beta^2 \omega = 0$ или

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (6.22)$$

Полученная формула показывает, что резонансная частота при $\beta^2 \ll \omega_0^2$ близка к собственной частоте колебаний и уменьшается с

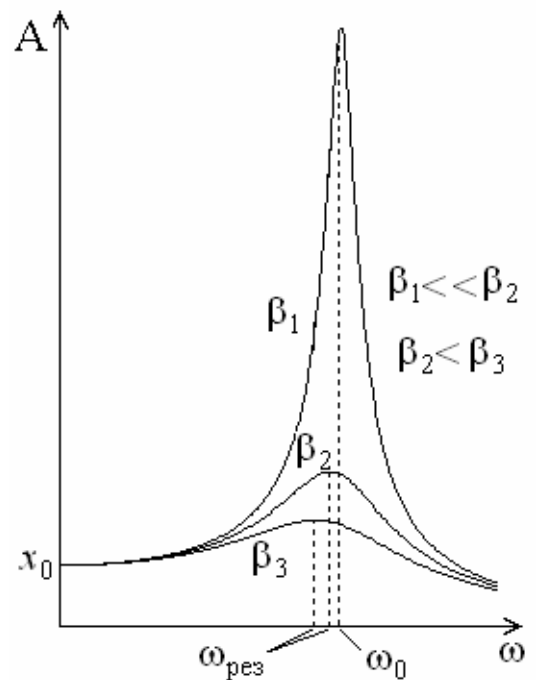


Рисунок 6.10

увеличением затухания, т.е. потери на трение замедляют движение. Резонансные частоты с увеличением β смещаются в сторону меньших значений (рисунок 6.10).

При $\omega = 0$ из (6.31) получим $A = \frac{f_0}{\omega_0^2} = f_0 \frac{m}{k} = \frac{F_0}{k} = x_0$, где x_0 – смещение груза, которое он бы имел под действием постоянной силы, равной амплитуде вынуждающей силы F_0 .

При $\omega \gg \omega_{рез}$ из (6.31) получаем $A \approx 0$, т.е. на очень высоких частотах внешняя сила не может вызвать заметных колебаний системы.

Подставляя выражение $\omega_{рез}$ из равенства (6.32) в выражение (6.31) и считая $\beta \ll \omega_0$, с учетом (6.12) и (6.24) получим значение резонансной амплитуды:

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta(\beta^2 + \omega_{рез}^2)^{0,5}} \approx \frac{f_0}{\beta\omega_0} \approx \frac{F_0\omega_0}{2\beta k} = \frac{x_0\omega_0}{2\beta}$$

или $\frac{A_{рез}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\chi} = Q$, где x_0 – амплитуда смещения на очень низких частотах, Q – добротность колебаний. Отсюда следует, что *добротность колебаний показывает, во сколько раз резонансная амплитуда превышает смещение x_0 системы под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуда вынуждающей силы.* Колеблющиеся механические системы обычно имеют добротность колебаний от 10^3 до 10^6 , следовательно, амплитуда резонансных колебаний может в пределах от 10^3 до 10^6 раз превышать x_0 .

Явление резонанса приходится учитывать в технике. Например, если частота оборотов двигателя самолета совпадает с частотой резонансных колебаний крыльев, то крылья могут раскачаться до таких больших значений амплитуд, что будет превышен предел их прочности, и это в начальный период развития авиации часто

служило причиной аварий. При создании механических конструкций всегда стремятся, чтобы все их резонансные частоты значительно отличались от рабочей частоты двигателя.

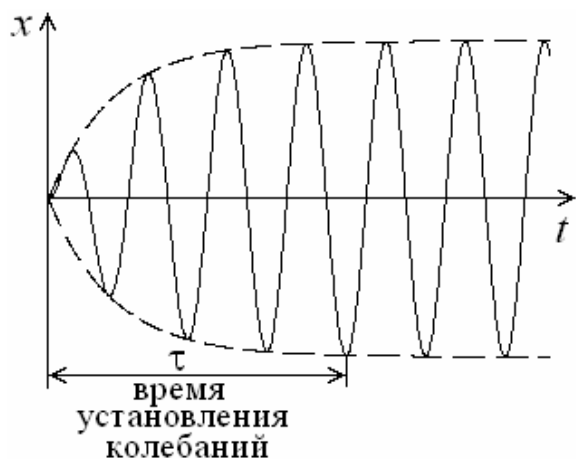


Рисунок 6.11

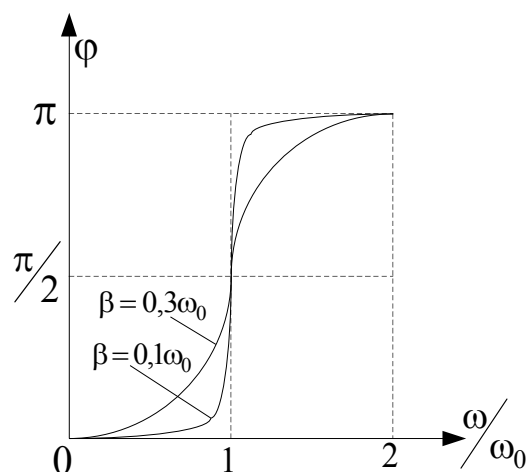


Рисунок 6.12

Рассмотрим *физическую сущность явления резонанса*. Для вынужденных колебаний общее решение складывается из решения однородного дифуравнения (6.18) и частного решения неоднородного дифуравнения (6.25). На резонансной частоте их сумма приводит к следующему виду зависимости смещения x от времени t (рисунок 6.11). На резонансной частоте при очень малом затухании механических колебаний время установлений колебаний τ велико. Число переходов колебаний N , в течение которых амплитуда колебаний на резонансной частоте возрастает до 96% от максимального ее значения, равно добротности колебаний и достигает величины 10^6 . В процессе возбуждения колебаний в течение каждого периода вынуждающая сила сообщает колеблющейся системе в среднем значение энергии E_T . Энергия колеблющейся системы ввиду слабого затухания накапливается и может достичь больших значений $E_{\max} = \frac{E_T N}{\pi}$ (при $N = 10^6$ отношение $\frac{E_{\max}}{E_T} \approx 3 \cdot 10^5$). Это накопление происходит до тех пор,

пока поступление энергии не будет скомпенсировано возрастающими при больших амплитудах потерями на затухание.

Выражение (6.30) описывает зависимость сдвига фаз φ между колебаниями вынуждающей силы и установившимися колебаниями (рисунок 6.12). На низких частотах ($\omega \ll \omega_0$) колебания синфазны. На высоких частотах ($\omega \gg \omega_0$) колебания противофазны. На резонансных частотах ($\omega \approx \omega_0$) сдвиг фаз $\varphi = \pi/2$, т.е. колебания вынуждающей силы опережают на 90 градусов колебания самой системы.

Явление резонанса играет важную роль в современной технике. Например, с помощью механического резонанса пьезоэлементов удастся стабилизировать частоту колебаний электрических генераторов с точностью порядка 10^{-10} , что является важным для уверенного приема и передачи электромагнитных волн, для нужд измерительной техники и т.д.

7. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

7.1 ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ. УРАВНЕНИЕ ВОЛНЫ

Если в каком-нибудь месте упругой среды возбуждать колебания, то вследствие сил взаимодействия между частицами среды это колебание начнет распространяться в ней со скоростью v . *Процесс распространения колебаний в пространстве называется **волной***. При распространении волны частицы среды не переносятся волной, а совершают колебания около своих положений равновесия, например, пловец на морских волнах.

Если частицы среды колеблются перпендикулярно направлению распространения волны, то волна называется **поперечной**. Такие волны могут распространяться в твердом теле и на границе двух сред. В сплошной среде распространение поперечных волн связано с

деформацией сдвига, поэтому сдвиговые волны практически невозможны в газах и жидкостях.

Если частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны, то волна называется **продольной**. Продольные волны могут распространяться в твердых, жидких и газообразных средах. Примером продольных волн являются звуковые волны в воздухе.

Длина волны λ равна расстоянию, на которое распространяется волна за период T . Отсюда следует соотношение $\lambda = vT$. Учитывая, что $T = \frac{1}{f}$, где f - частота колебаний, получим

$$v = f\lambda. \quad (7.1)$$

Геометрическое место точек, до которых колебания доходят к моменту времени t , называются **волновым фронтом**. Если фронт плоский, то волна называется *плоской*. Например, катер при движении возбуждает на поверхности воды плоскости волны. Если фронт волны – сфера, то волна называется *сферической*. Звуки голосов людей в открытом пространстве практически распространяются как сферические волны.

Пусть источник волн находится в точке O (рисунок 7.1) и создает смещения частиц по закону $\xi = a \sin \omega t$, где a - амплитуда смещений, $\omega = 2\pi f$ есть круговая частота, t

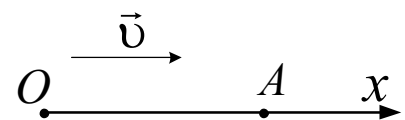


Рисунок 7.1

- время. За время τ фронт волны достигает точки A , находящейся на расстоянии x от точки O , причем $\tau = \frac{x}{v}$. Колебания в точке A будут отставать от колебаний в точке O по времени на τ , и уравнение колебаний в точке A будет иметь вид: $\xi(x, t) = a \sin \omega(t - \tau)$. Подставляя выражение для τ , получим:

$$\xi(x, t) = a \sin \omega(t - \frac{x}{v}). \quad (7.2)$$

Полученное выражение называют **уравнением волны**. Это уравнение имеет две независимые переменные t и x . Зафиксируем фазу волны, положив $t - \frac{x}{v} = \text{const}$. Продифференцировав равенство.

Получим $dt^2 \frac{dx}{v} = 0$ или $v = \frac{dx}{dt}$. Данное равенство показывает. Что величина v есть скорость распространения фазы волны, называемая **фазовой скоростью**.

Введем волновое число

$$k = \frac{\omega}{v} = 2\pi \frac{f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (7.3)$$

и представим выражение (7.2) в виде

$$\xi(x, t) = a \sin(\omega t - kx). \quad (7.4)$$

Уравнение волны в форме (7.4) является симметричным относительно переменных t и x . Волновое число k характеризует частоту повторения фазы волны в пространстве.

7.2 ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН.

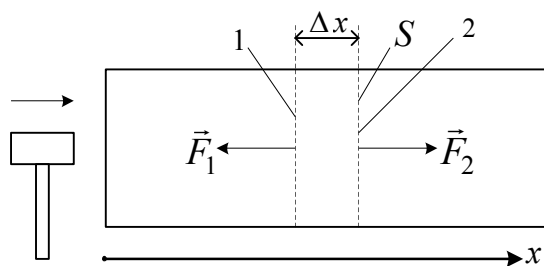


Рисунок 7.2

Рассмотрим упругий стержень, в котором с помощью удара возбуждается упругая волна сжатия (рисунок 7.2). Рассмотрим элемент объема шириной Δx , на который действуют силы F_1 и F_2 , вызванные упругими напряжениями в волне.

Применим к этому элементу второй закон Ньютона

$$F_1 - F_2 = \Delta m \ddot{\xi}. \quad (7.5)$$

где $\Delta m = \rho S \Delta x$ есть масса элемента стержня, ρ – плотность стержня, S – поперечное сечение стержня, Δx – длина элемента стержня, $\ddot{\xi}$ –

вторая производная от смещения по времени, равная ускорению частиц среды. Силы можно определить, воспользовавшись **законом Гука**: например, для сечения 1 сила

$$F_1 = ES\varepsilon_1, \quad (7.6)$$

где E – модуль Юнга, ε_1 – относительная деформация стержня в сечении 1, показывающая, на какую долю изменился элемент длины стержня под действием силы. В общем случае относительная деформация $\varepsilon \approx \frac{\Delta\xi}{\Delta x}$, где $\Delta\xi$ – абсолютное удлинение стержня длиной Δx . Точное значение ε получается при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (7.7)$$

(Знак частной производной использован потому, что ξ зависит от двух переменных: x и t). Записав выражение для F_2 , аналогичное (7.6), и подставляя оба выражения в равенство (7.5), получим после упрощений с учетом (7.7):

$$E(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = E\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right) = \rho \Delta x \ddot{\xi}. \quad (7.8)$$

Изменение ξ на длине Δx равно: $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Delta x$. Учитывая (7.7), получим $\frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x$. Подставляя это равенство в (7.8), получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \ddot{\xi}, \quad (7.9)$$

где

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7.10)$$

есть скорость распространения волны. Формула (7.10) хорошо описывает экспериментальные данные. Измерив скорость распространения волн, и зная плотность, легко определить модуль Юнга.

Выражение (7.9) называют **волновым уравнением**. Его решением является уравнение волны: $\xi(x, t) = a \sin(\omega t - kx)$, в чем легко убедиться, если дважды продифференцировать это выражение как по x , так и по t , и результаты подставить в (7.9). Если какая-нибудь физическая величина удовлетворяет уравнению (7.9), то она описывает волновой процесс. Показав, что электромагнитное поле удовлетворяет волновому уравнению, английский физик Максвелл предсказал электромагнитные волны.

Если скорость волн зависит от их частоты, т.е. наблюдается *дисперсия* скорости, то распространение волнового импульса будет происходить со скоростью, отличной от фазовой и называемой **групповой скоростью волн**: $v_{гр}$. Фазовая скорость определяется

выражением $v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$, а групповая скорость – выражением $v_{гр} = \frac{d\omega}{dk}$.

Зная зависимость v_{ϕ} , рассчитывают групповую скорость. При распространении волнового импульса (рисунок 7.3) его несущая, связанная с высокочастотными колебаниями, распространяется с фазовой скоростью, а огибающая группы волн распространяется с групповой скоростью. Если фазовая скорость растет с повышением

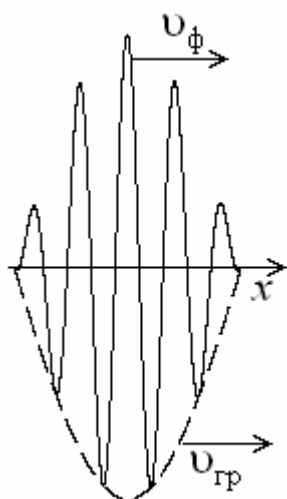


Рисунок 7.3

частоты, то огибающая волн будет отставать от высокочастотной составляющей и наоборот. Это явление можно наблюдать, бросив камень на спокойную поверхность воды. «Горбы» и «впадины» будут перемещаться быстрее волнового пакета, уменьшаясь по амплитуде и исчезая у начала волнового фронта, зато сзади волнового пакета образуются новые «горбы» и «впадины».

Перенос энергии в волне связан с групповой скоростью.

7.3 ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то частицы среды участвуют в колебаниях, возбуждаемых этими волнами, и результирующее смещение частиц среды будет равно геометрической сумме смещений, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности (*принцип суперпозиции* или наложения волн). Рассмотрим волны, возбуждаемые двумя источниками 1 и 2 (рисунок 7.4), имеющими одинаковые круговые частоты ω и волновые числа $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

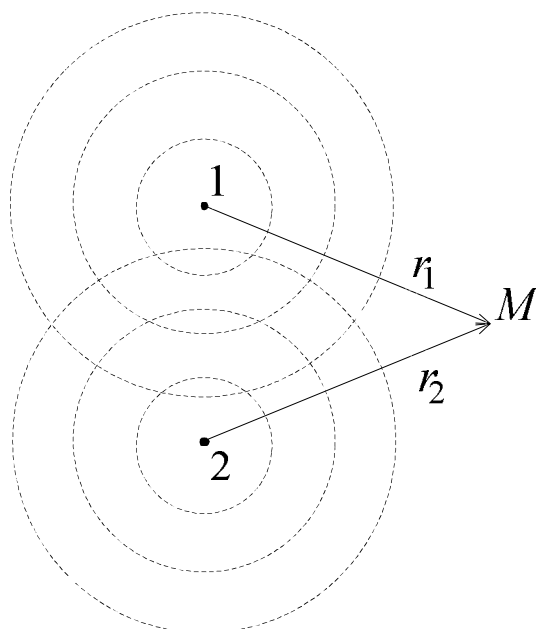


Рисунок 7.4

Тогда в произвольной точке среды M волны создают колебания, происходящие по закону:

$\xi_1 = a_1 \sin(\omega t - kr_1)$ и $\xi_2 = a_2 \sin(\omega t - kr_2)$, где ξ_1 и ξ_2 - смещения частиц в каждой из волн, a_1 и a_2 - амплитуды волн, r_1 и r_2 - расстояние от источников волн до точки M . Пусть смещения частиц в каждой из волн происходят в одном направлении, как, например, для волн на поверхности жидкости. Амплитуда результирующего колебания в таком случае, согласно подразделу 6.2, определится по формуле

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \Delta\varphi, \quad (7.11)$$

где $\Delta\varphi$ - разность фаз колебаний точек. Подставляя фазы колебаний, получим

$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1), \quad (7.12)$$

где величину $(r_2 - r_1)$ называют разностью хода лучей 1 и 2. Для каждой точки среды $\Delta\varphi$ не зависит от времени и является константой. Источники таких волн называются *когерентными*. Для

когерентных волн наблюдается явление **интерференции** волн, заключающееся в том, что в одних точках среды волны усиливают колебания частиц, и они происходят с суммарной амплитудой, в других – ослабляют до минимально возможных значений.

Рассмотрим точки, в которых величина

$$\Delta\varphi = 2\pi n, \quad (7.13)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При этом значении $\Delta\varphi$ согласно выражению (7.11) получим $a = a_1 + a_2$. В этих точках среды амплитуды колебаний складываются. Приравнявая правые части (7.12) и (7.13), получим $r_2 - r_1 = \lambda n = \frac{\lambda}{2} 2n$. Отсюда следует вывод: *максимум интерференции* наблюдается в тех точках среды, для которых разность хода лучей равна целому числу длин волн или четному числу длин полуволн.

Рассмотрим точки, в которых величина

$$\Delta\varphi = \pi(2n + 1), \quad (7.14)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При этом значении $\Delta\varphi$ согласно выражению (7.11) получим $a = |a_1 - a_2|$. В этих точках среды амплитуды колебаний вычитаются. Приравнявая правые части (7.12) и (7.14), получим $(r_2 - r_1) = \frac{\lambda}{2}(2n + 1)$. Отсюда следует вывод: *минимум интерференции* наблюдается в тех точках среды, для которых разность хода лучей равна нечетному числу длин полуволн. Если амплитуды волн одинаковы, то в этих точках среды колебаний ее частиц нет.

7.4 СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Одним из важнейших случаев интерференции являются стоячие волны, которые получаются при наложении двух встречных плоских волн одинаковой частоты ω и амплитуды a . Обычно так получается при отражении плоской волны от плоской твердой границы. Рассмотрим уравнения двух встречных плоских волн,

распространяющихся в направлении оси x : $\xi_1 = a \sin(\omega t - kx)$ и $\xi_2 = a \sin(\omega t + kx)$, где ξ_1 и ξ_2 - смещения частиц в падающей и отраженной волнах, k - волновое число, t - время. Знак плюс в аргументе второго неравенства показывает, что волна распространяется в противоположном направлении.

Согласно принципу суперпозиции результирующее смещение $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Подставляя ξ_1 и ξ_2 и используя формулу для суммы синусов, получим: $\xi = 2a \cos kx \sin \omega t$. Полученное выражение представляет собой колебательный процесс точек среды с частотой ω , однако амплитуда колебаний $2a \cos kx$ изменяется вдоль оси x по гармоническому закону. На рисунке 7.5 изображены смещения частиц для поперечной волны в зависимости от расстояния x :

1) сплошная линия на графике в момент времени $t = \frac{T}{4}$ (амплитудное значение смещения), где T - период колебаний;
2) штриховая линия в момент времени $t = \frac{3T}{4}$; 3) $\xi = 0$ в момент

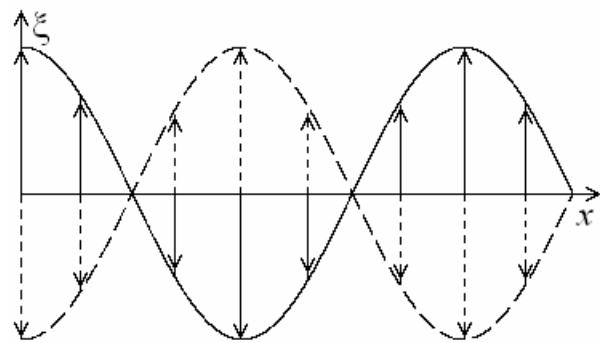


Рисунок 7.5

времени $t = 0$ и $t = \frac{T}{2}$. Точки среды, в которых амплитуда колебаний максимальна, называются *пучностями* стоячей волны. Их положение определяется условием $\cos kx = 1$, откуда $kx_n = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, т.е. соседние пучности отстоят друг от друга на полдлины волны. Между пучностями колебаний находятся точки, в которых $\cos kx = 0$ и амплитуда колебаний равна нулю. Такие точки называются *узлами*.

Положение узлов определяется равенством $x_{уз} = \frac{\lambda}{2}n + \frac{\lambda}{4}$.

1. Стоячие волны наблюдаются в струнах музыкальных инструментов. Колебания струн происходят в соответствии с рисунком 7.5. На концах струны, где она закреплена, находятся

узловые точки. Потому при возбуждении струны на ее длине l должно укладываться целое число длин полуволен $l = \frac{\lambda}{2}n$, где n - целое число. Отсюда частоты колебаний струны определяются по формуле $f_n = \frac{v}{2l}n$, где v - скорость распространения волны вдоль струны. Колебание, соответствующее $n = 1$, называют *основным тоном*, а колебания соответствующие $n > 1$, называют *обертонами*. В целом, музыкальный сигнал характеризуется спектром простых звуков и его окраска определяется соотношением амплитуд обертонов.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

8. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

8.1 ПРЕДМЕТ И МЕТОДЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ СОСТОЯНИЯ.

Молекулярная физика изучает строение и свойства вещества, исходя из молекулярно-кинетических представлений. Молекулярно-кинетическая теория ставит целью истолковать те свойства тел, которые непосредственно наблюдаются на опыте, например, давление, температуру и другие параметры, как суммарный результат действия молекул. Для этого она пользуется **статистическим методом**, т.е. вычисляет средние величины, которые характеризуют движение огромной совокупности частиц.

Другим методом изучения различных свойств вещества является **термодинамический метод**, который в отличие от статистического не интересуется микроскопической картиной. В основе термодинамического метода лежат несколько фундаментальных законов, установленных на основании огромного числа опытных фактов, например, законы сохранения и перехода энергии. Статистический и термодинамический методы дополняют друг друга, образуя единое целое.

Для описания поведения термодинамических систем (газы, жидкости и т.д.) используют следующие величины: давление p , объем V и абсолютную температуру T , которые называются *термодинамическими параметрами*. Первые два параметра достаточно хорошо известны, поэтому рассмотрим подробнее температуру.

Эмпирической температурой t называют меру отклонения тела от теплового равновесия с тающим льдом. Для измерения температуры берут термометрическое тело (термометр), имеющий как можно более линейно изменяющийся температурный признак (объем, длину, электрическое сопротивление и т.д.). При измерении температуры в *градусах Цельсия* за 100 градусов принимается температура кипения воды. Для очень низких температур используется газовый термометр, основанный на законе Шарля: $p = p_0(1 + \alpha t)$, где p – давление газа при температуре t , p_0 –

давление при $t = 0$, $\alpha = 1/273,15^\circ$ – газовая постоянная. Этот закон можно представить в следующем виде:

$$p = p_0 \alpha (273,15 + t) = p_0 \alpha T. \quad (8.1)$$

Давление $p = 0$ при $t = -273,15^\circ \text{C}$. Давление газа не может быть отрицательным, поэтому существует предел для низких температур, названный абсолютным нулем. В физике более удобна новая температурная шкала, называемая **термодинамической шкалой температур**, которая начинается с абсолютного нуля и определяется по формуле $T = 273,15^\circ + t$. Единицу абсолютной температуры называют кельвином (обозначается К).

Существует бесчисленное множество газовых процессов, среди которых важное практическое значение имеют изопроцессы, при протекании которых один из термодинамических параметров является постоянным. Процесс, описываемый законом Шарля, происходит при постоянном объеме и его называют **изохорным**. Процесс, происходящий при постоянном давлении, называют **изобарным**. Процесс, происходящий при постоянной температуре, называют **изотермическим**. Все эти процессы можно изобразить на диаграмме $p - V$ (рисунок 8.1).

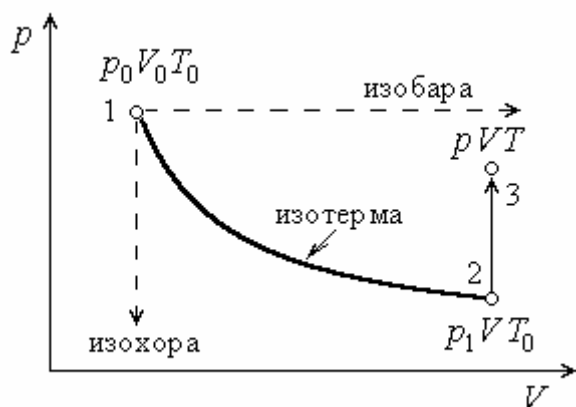


Рисунок 8.1

Пусть по линии 1–2 проходит изотермический процесс, для которого, согласно закону Бойля-Мариотта, имеем

$$p_0 V_0 = p_1 V. \quad (8.2)$$

Затем проведем изохорный процесс по линии 2–3. Согласно (8.1), получим

$$p_1/T_0 = p/T. \quad (8.3)$$

Перемножая правые и левые части равенств (8.2) и (8.3), получим выражение

$$pV/T = p_0 V_0/T_0, \quad (8.4)$$

которое называют **объединенным газовым законом**. Введем *нормальные условия*, при которых $p_0 = 1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и $T_0 = 273,15 \text{ К}$. Согласно закону Авогадро, при нормальных условиях один моль любого газа занимает объем $V_{0\mu} = 0,0224 \text{ м}^3/\text{моль}$. Величину $R = p_0 V_{0\mu}/T_0 = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ называют универсальной

газовой постоянной. Учитывая ее, перепишем выражение (8.4) в следующем виде:

$$pV_\mu = RT, \quad (8.5)$$

где V_μ – объем моля газа. Для произвольной массы газа m справедлива пропорция $V/V_\mu = m/\mu$, где μ – молярная масса газа, V – объем занимаемый массой газа m . Перемножая правые и левые части последнего равенства и равенства (8.5), получим выражение

$$pV = (m/\mu)RT, \quad (8.6)$$

которое называют **уравнением Менделеева-Клапейрона** или уравнением состояния идеального газа.

Введем важную для молекулярной физики величину $k = R/N_A$, где $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ есть число молекул в моле газа, называемое числом Авогадро. Величина k называется постоянной Больцмана. Подстановка числовых значений R и N_A дает $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Умножим и разделим правую часть равенства (8.6) на N_A и перепишем это равенство в виде $pV = \nu N_A kT = NkT$, где $\nu = m/\mu$ – количество вещества (число молей газа, которое содержит масса m), N – число молекул в массе m . Учитывая, что число молекул в единице объема газа (концентрация) $n = N/V$, получим

$$p = nkT. \quad (8.7)$$

Уравнение (8.7) представляет собой иную форму записи уравнения состояния идеального газа.

Из уравнения (8.7) видно, что давление газа зависит только от числа молекул в единице объема и не зависит от других параметров молекул. Если взять смесь из M газов, то величина n для смеси будет равна $n = n_1 + n_2 + \dots + n_M$. Подставляя это равенство в (8.7), получим $p = (n_1 + n_2 + \dots + n_M)kT = p_1 + p_2 + \dots + p_M$. Это выражение представляет собой **закон Дальтона**: *давление смеси газов равно сумме давлений его компонентов*. Величины p_1, p_2, \dots, p_M есть парциальные давления, т.е. давления, которые бы оказывал каждый газ, находясь в этом объеме в отдельности.

8.2 ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

Если в предыдущем разделе применялся термодинамический метод исследования, то в этом разделе будет использован статистический метод исследования молекулярных процессов. На основании исследования совокупного действия молекул будут получены такие термодинамические параметры, как давление и температура.

Для расчетов воспользуемся *моделью идеального газа* с точки зрения молекулярно-кинетической теории: 1) молекулы газа непрерывно и хаотично движутся; 2) молекулы взаимодействуют только во время удара; 3) удары молекул абсолютно упругие; 4) размеры молекул малы по сравнению с расстояниями между ними.

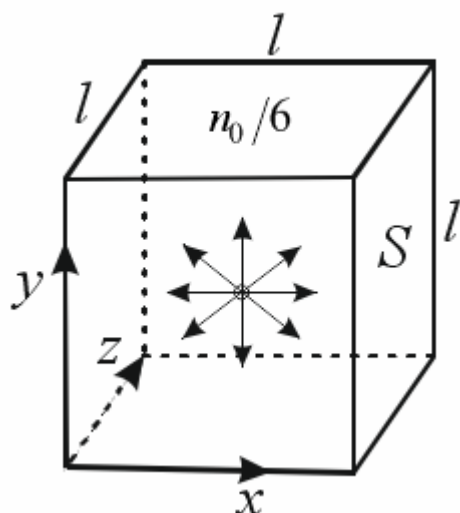


Рисунок 8.2

Пусть в сосуде кубической формы объемом $V = l^3$, где l – длина ребра (рисунок 8.2), число молекул равно n_0 . Молекулы движутся хаотично и, соударяясь со стенкой площадью $S = l^2$, оказывают на нее давление. Результаты расчета давления на стенку не изменятся, если хаотическое движение молекул заменить направленным движением их вдоль осей x , y и z . Тогда со стенкой, площадью S , будет соударяться третья часть от всех молекул, равная

$$n = n_0 l^3 / 3. \quad (8.8)$$

При каждом соударении со стенкой молекула передает ей импульс, равный $m v_1 - (-m v_1) = 2m v_1$, где m – масса молекулы, v_1 – ее скорость. За время Δt молекула соударится со стенкой число раз, равное $v_1 \Delta t / 2l$, и передаст стенке импульс $\Delta P_1 = m v_1^2 \Delta t / l$. Просуммируем импульс, переданный стенке всеми n молекулами: $\Delta P = (m \Delta t / l) (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)$. В данном выражении находится сумма квадратов скоростей. Статистическое усреднение будет заключаться в том, что мы введем новую среднюю величину – среднеквадратичную скорость – по формуле $v_{\text{кв}}^2 = (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) / n$. Следует заметить, что $v_{\text{кв}}^2$ приблизительно на 10% больше, чем

средняя скорость молекулы, которая определяется по формуле: $v_{\text{ср}} = (v_1 + v_2 + \dots + v_n)/n$. Используя выражение для $v_{\text{кв}}^2$, получим $\Delta P = m v_{\text{кв}}^2 \Delta t n / l$. По второму закону Ньютона на стенку будет действовать сила $F = \Delta P / \Delta t = m v_{\text{кв}}^2 n / l$. Давление газа на стенку найдем по формуле $p = F / S = F / l^2$ или $p = m v_{\text{кв}}^2 n / l^3$. Используя формулу (8.8), получим окончательно:

$$p = \frac{1}{3} n_0 m v_{\text{кв}}^2 = \frac{2}{3} n_0 \left(m v_{\text{кв}}^2 / 2 \right). \quad (8.9)$$

Мы получили **основное уравнение кинетической теории газов**, которое связывает макроскопический параметр – давление газа – с микроскопическими параметрами молекул. Величина $n_0 (m v_{\text{кв}}^2 / 2)$ есть кинетическая энергия молекул, заключенная в единице объема. Отсюда можно сказать, что *давление есть мера плотности кинетической энергии молекул*.

Сравнивая формулы (8.9) и (8.7), получим выражение для средней кинетической энергии молекулы:

$$m v_{\text{кв}}^2 / 2 = (3/2) k T. \quad (8.10)$$

Итак, мы пришли к важному выводу: кинетическая энергия молекул зависит только от абсолютной температуры. Отсюда следует **физический смысл температуры**: *абсолютная температура есть мера средней энергии поступательного движения молекул*. Из формулы (8.10) можно найти среднеквадратичную скорость движения молекул: $v_{\text{кв}}^2 = 3 k T / m = 3 R T / \mu$. Для кислорода при комнатной температуре $v_{\text{кв}} \approx 480$ м/с и сравнима со скоростью пули.

8.3 БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Давно известно, что давление газа над поверхностью Земли уменьшается с высотой. Атмосферное давление на некоторой высоте h обусловлено весом вышележащих слоев воздуха. Пусть на высоте h давление равно p . Тогда на высоте $h + dh$ давление будет равно $p + dp$ (рисунок 8.3). Разность давлений $dp = dF / S$, где $dF = \rho S g dh$ есть вес столба воздуха в объеме $S dh$, S – площадь основания цилиндра, ρ – плотность воздуха, g – ускорение свободного

падения. Отсюда получим

$$dp = -\rho g dh \quad (8.11)$$

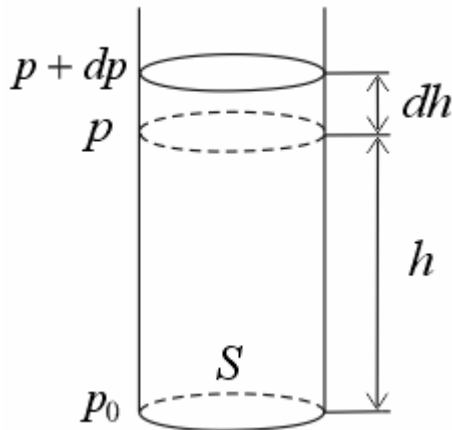


Рисунок 8.3

Знак “–” показывает, что давление убывает с высотой. В этом выражении кроме p и h есть еще одна переменная $\rho = m \cdot n$, где m – масса одной молекулы, n – концентрация молекул. Подставляя сюда выражение для n из формулы (8.7), получим $\rho = mp/(kT)$. Подставляя это выражение в формулу (8.11), получим

$$dp/p = -mg dh/(kT). \quad (8.12)$$

Получили дифференциальное уравнение для p как функции от h . Положим $T = \text{const}$. Суммируя все dp/p в пределах от p_0 до p , при соответствующем суммировании правой части, когда высота изменяется от 0 до h , приходим к определенным интегралам:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^h \frac{mg dh}{kT}.$$

После интегрирования получим $\ln(p/p_0) = -mgh/(kT)$. Потенцируя, получим

$$p = p_0 \exp[-mgh/(kT)]. \quad \dots(8.13)$$

Это формула характеризует зависимость давления от высоты, и поэтому называется **барометрической**. Приборы, принцип действия которых основан на этой формуле, позволяют измерять высоту по давлению, которое существует на данной высоте. Эти приборы называются альтиметрами. Их применяют, например, в авиации.

В показатель экспоненты (8.13) входит масса молекулы. Следовательно, концентрация более тяжелых молекул будет с высотой убывать быстрее. Поэтому на больших высотах уменьшается процентное содержание кислорода по сравнению с азотом. Летчики, летающие на очень больших высотах, часто пользуются кислородными масками. Спад концентрации молекул с высотой зависит также от g (от массы планеты). Чем меньше g , тем дальше от планеты уходит газ и в конце концов ее покидает. Поэтому на малых планетах, например на Луне, атмосферы нет. На планетах с большим g , например на Юпитере, где температура атмосферы

близка к абсолютному нулю, молекулы атмосферы расположены практически слоем, напоминающим земной океан.

Барометрическая формула является частным случаем распределения Больцмана. Согласно формуле (8.7) давление пропорционально концентрации молекул n . Поэтому формулу (8.13) можно представить в следующем виде

$$n = n_0 \exp[-mgh/(kT)], \quad (8.14)$$

где n_0 – концентрация молекул при $h = 0$. На разной высоте молекула обладает различным запасом потенциальной энергии $E_{\text{г}} = mgh$.

Вводя $E_{\text{г}}$ в формулу (8.14), получим

$$n = n_0 \exp[-E_{\text{г}}/kT]. \quad (8.15)$$

Больцман показал, что распределение (8.15) справедливо не только в поле земного тяготения, но и в любом потенциальном поле любых сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в тепловом движении. В соответствии с этим распределение (8.15) называют **распределением Больцмана** (по имени выдающегося австрийского физика, получившего ее в 1896 г.). Центробежное потенциальное поле сил, намного превышающих силы земного притяжения, возникает в центрифугах. Распределение (8.15) позволяет рассчитать распределение частиц в этом поле и затем провести оптимально разделение по слоям изотопов различных элементов, мельчайших шлифпорошков и т.д.

8.4 МАКСВЕЛЛОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛЕКУЛ ПО СКОРОСТЯМ

В результате столкновений молекулы обмениваются скоростями, а в случае тройных и более сложных столкновений молекула может иметь временно очень большие и очень малые скорости. Хаотичное движение приводит к хаотичному распределению молекул по скоростям. Это распределение можно получить, обобщив закон Больцмана. Пусть в элементе объема $\Delta x \Delta y \Delta z$ находится число молекул $\Delta N = n \Delta x \Delta y \Delta z$, где n – концентрация молекул. Подставляя n из формулы (8.15), получим $\Delta N = n_0 \exp[-E_{\text{г}}/(kT)] \Delta x \Delta y \Delta z$. Как доказывается в статистической физике, распределение Больцмана можно обобщить, построив подобно обычному пространству дополнительное пространство скоростей молекул и рассмотрев его

элемент $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$. Получим

$$\Delta N = A \exp[-E/(kT)] \Delta x \Delta y \Delta z \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z, \quad (8.16)$$

где $E = mv^2/2 + mgh$ есть полная энергия молекулы, A – постоянная величина, ΔN – число молекул, находящихся в объеме $\Delta x \Delta y \Delta z$, скорости которых попадают в интервал $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$. Считая, что в малом объеме $\Delta x \Delta y \Delta z$ энергия mgh постоянна и вводя $\Delta n = \Delta N/(\Delta x \Delta y \Delta z)$, запишем (8.16) в следующем виде

$$\Delta n = B \exp[-mv^2/(2kT)] \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z, \quad (8.17)$$

где B – постоянная величина, Δn – число молекул в единице объема, скорости которых попадают в интервал скоростей $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$. Для нахождения интервала скоростей построим воображаемое пространство скоростей (v_x, v_y, v_z) и отложим там значения компонентов скоростей v_x , v_y и v_z отдельных молекул. Тогда молекуле будет соответствовать точка в этом пространстве (рисунок 8.4). Расположение точек относительно начала координат вследствие равноправности всех направлений движения будет сферически симметричным. Выберем элемент объема скоростей лежащим между двумя сферическими поверхностями с радиусами v и $(v + \Delta v)$, получим его равным $4\pi v^2 \Delta v$. Тогда, подставляя $4\pi v^2 \Delta v$ вместо $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$, запишем (8.17) в виде

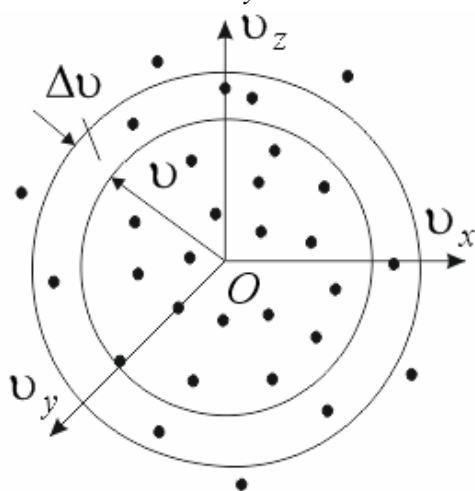


Рисунок 8.4

$$\Delta n = B \exp[-mv^2/(2kT)] 4\pi v^2 \Delta v. \quad (8.18)$$

Максвелл ввел специальную функцию распределения молекул по скоростям $f(v) = \Delta n/(n \Delta v)$, которая показывает, какое относительное число молекул имеет скорости в интервале от v до $v + \Delta v$. Легко видеть, что $\sum f(v) \Delta v_i \approx \sum \Delta n_i / n = 1$. Переходя к пределу, получим

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1. \quad (8.19)$$

Данное выражение называют условием нормировки функции распределения. С учетом (8.18) функцию распределения можно записать в виде $f(v) = C \exp[-mv^2/(2kT)] mv^2/(2kT)$, где C –

постоянная величина. Введем величину

$$u^2 = mv^2/(2kT) \quad (8.20)$$

и запишем функцию распределения в виде

$$f(v) = C \exp(-u^2) u^2. \quad (8.21)$$

Приравняв производную от выражения (8.21) по u нулю, получим экстремальные значения u , равные $u=0$, $u=1$, $u=\infty$. Зависимость $f(v)$ для различных температур T_1 и T_2 показана на рисунке 8.5. Кривая имеет максимум, соответствующий величине $u=1$. Скорость, соответствующая максимуму кривой, называется **наиболее вероятной** и обозначается символом $v_{\text{вер}}$. По определению $f(v)$ показывает, какая часть молекул имеет скорости в единичном интервале скоростей ($\Delta v = 1$). Если взять скорость молекулы в какой-либо момент времени, то наиболее вероятным значением скорости будет $v_{\text{вер}}$, так как функция $f(v)$ для этого значения скорости имеет максимальное значение. Приравняв выражение (8.20) единице, получим $mv_{\text{вер}}^2/(2kT) = 1$ или

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (8.22)$$

Отсюда видим, что с повышением температуры наиболее вероятная скорость возрастает. Кривая 2 на рисунке 8.5, соответствующая более высокой температуре, смещена вправо по сравнению с кривой 1. Это означает, что с повышением температуры скорости всех молекул возрастают, но характер распределения

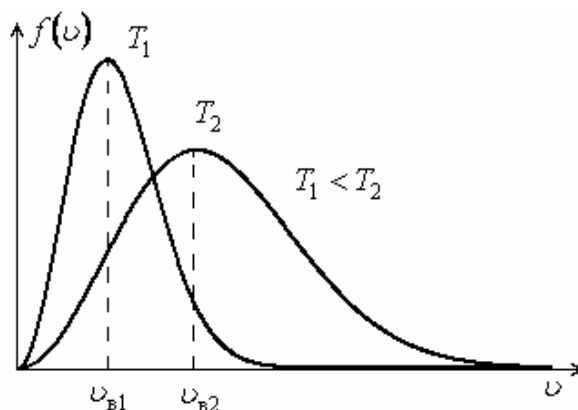


Рисунок 8.5

остается. Площадь, ограниченная каждой из кривых, в соответствии с условием (8.19) равна единице. Из анализа кривых на рисунке 8.5 видно, что относительное число молекул, скорости которых малы, невелико. Относительное число молекул, скорости которых намного больше $v_{\text{вер}}$, мало. Однако всегда существует небольшое число молекул с очень большими скоростями движения. Исходя из этого, легко понять сущность процесса испарения, при котором наиболее

быстрые (“горячие”) молекулы покидают жидкость, и из-за этого в целом температура ее при испарении понижается.

Постоянную C в выражении (8.21) определяют, используя условие нормировки (8.19). Подставляя формулу (8.21) в выражение (8.19), получим $C = 4/(\sqrt{\pi}v_{\text{вер}})$.

С помощью Максвелловского распределения по скоростям можно рассчитать среднюю скорость молекул по формуле

$$v_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} v f(v) dv. \text{ Подставляя сюда (8.21), получим } v_{\text{ср}} = \sqrt{4/\pi} \cdot v_{\text{вер}}$$

или с учетом (8.22)

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}. \quad (8.23)$$

Аналогично рассчитывается средняя квадратичная скорость

$$v_{\text{кв}}^2 = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = 3kT/m.$$

Видим, что наибольшее значение имеет средняя квадратичная скорость молекул. Примерно на 10% меньше, чем $v_{\text{кв}}$, средняя скорость и на 20% меньше, чем $v_{\text{кв}}$, наиболее вероятная скорость.

8.5 ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА. ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРОБЕГА МОЛЕКУЛ

В предыдущих разделах мы рассматривали свойства тел, находящихся в тепловом равновесии. Данный раздел посвящен процессам, с помощью которых происходит установление состояния теплового равновесия. Такие процессы называются кинетическими и являются необратимыми. К ним относятся явления диффузии, вязкости и теплопроводности.

Большое значение при анализе этих процессов имеет свободный пробег молекул. Среднее расстояние, которое проходит молекула между двумя последовательными соударениями, называют **средней длиной свободного пробега молекул** или просто длиной свободного пробега, которую обозначают символом λ . При соударении молекулы сближаются. Минимальное расстояние, на которое сближаются центры двух молекул при соударении, называется *эффективным диаметром молекулы* d . За секунду молекула

проходит в среднем путь, равный средней скорости молекул $v_{\text{ср}}$. Если за секунду молекула претерпевает ν соударений, то длина свободного пробега будет равна

$$\lambda = v_{\text{ср}} / \nu. \quad (8.24)$$

Для расчета числа соударений предположим вначале, что все молекулы покоятся, а одна движется и соударяется с ними (рисунок 8.6). Молекула будет сталкиваться с другими молекулами, если их центры будут лежать внутри ломаного цилиндра, имеющий диаметр, равный d . За секунду молекула проходит путь, равный $v_{\text{ср}}$, и объем ломаного цилиндра, пройденного молекулой, равен $\pi d^2 v_{\text{ср}}$. Умножив этот объем на число молекул в единице объема n , получим среднее число соударений молекулы за секунду: $\pi d^2 v_{\text{ср}} n$. Так как остальные молекулы также движутся, то, как показывают расчеты, соударения происходят в $\sqrt{2}$ раз чаще. Следовательно, истинное среднее число соударений молекулы за секунду равно

$$\nu = \sqrt{2} \pi d^2 v_{\text{ср}} n. \quad (8.25)$$

Подставив это значение ν в (8.24), получим для средней длины свободного пробега молекул следующую формулу:

$$\lambda = 1 / (\sqrt{2} \pi d^2 n). \quad (8.26)$$

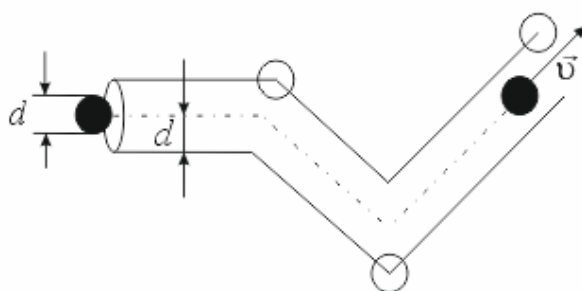


Рисунок 8.6

При постоянной температуре n пропорционально давлению. Следовательно, средняя длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна давлению. При нормальных условиях расчет по формуле (8.26) для молекул воздуха дает $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ м. Длина свободного пробега получается в 1000 раз больше эффективного диаметра $d = 2 \cdot 10^{-10}$ м. С уменьшением давления длина свободного пробега растет и может стать сравнимой с размерами сосуда. Такое состояние газа называют *вакуумом*.

8.6 ЯВЛЕНИЕ ДИФФУЗИИ

Диффузией называют процесс взаимного проникновения молекул соприкасающихся веществ, обусловленный тепловым движением.

Этот процесс наблюдается в газах, жидкостях и твердых телах. Например, распространение запаха в неподвижном воздухе можно объяснить явлением диффузии.

Для описания процесса диффузии необходимо ввести понятие **парциальной плотности** вещества ρ_i , которая равна массе i – того диффундирующего вещества, находящейся в единице объема смеси. Пусть диффузия происходит в направлении оси z и является *стационарной*, т.е. величина ρ_i в точках среды остается постоянной с течением времени. Закон диффузии экспериментально установил ученый Фик: масса вещества ΔM , проходящая за время Δt через площадку S , перпендикулярную к направлению диффузии, равна

$$\Delta M = -D \frac{d\rho_i}{dz} S \Delta t, \quad (8.27)$$

где $d\rho_i$ – изменение парциальной плотности вещества вдоль расстояния dz ; знак минус показывает, что диффузия направлена в сторону убывания ρ_i ; D – коэффициент диффузии. Величину $d\rho_i/dz$ называют *градиентом* парциальной плотности (понятие градиента подробно рассмотрено в подразделе 3.5). Этот градиент показывает скорость уменьшения парциальной плотности вещества вдоль направления диффузии. Если численно положить $d\rho_i/dz = -1$, $S = 1$, $\Delta t = 1$, то получим из (8.27) $\Delta M = D$. Отсюда следует *физический смысл D* : **коэффициент диффузии** численно равен массе вещества, перенесенной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению диффузии, если модуль градиента парциальной плотности равен единице. Размерность коэффициента диффузии в системе СИ $[D] = \text{м}^2 \text{с}^{-1}$.

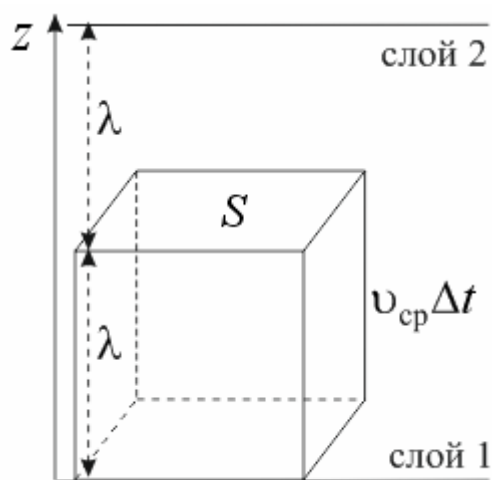


Рисунок 8.7

Рассмотрим вывод этого закона для газов, исходя из молекулярно-кинетических представлений. Для упрощения расчетов будем считать, что молекулы обеих компонент смеси газов имеют практически одинаковые массы и размеры. Результат расчета не изменится, если хаотическое движение молекул заменить их упорядоченным движением вдоль осей x , y и z . Рассмотрим рисунок 8.7. Через площадку S в направлении оси z за

время Δt пролетит лишь $1/6$ часть тех молекул, которые находятся в объеме $V = Sv_{\text{ср}}\Delta t$, где $v_{\text{ср}}$ – средняя скорость молекул. Число таких молекул равно $n_1 Sv_{\text{ср}} \Delta t/6$, где n_1 – число молекул диффундирующего газа в единице объема для слоя 1. Аналогично сверху вниз через площадку S из слоя 2 пролетит число молекул, равное $n_2 Sv_{\text{ср}} \Delta t/6$, где n_2 – число молекул диффундирующего газа в единице объема для слоя 2. Разность этих чисел даст число молекул, пролетевших через площадку S в направлении оси z : $\Delta N = (n_1 - n_2) Sv_{\text{ср}} \Delta t/6$. Эти пролетевшие молекулы перенесут через площадку S массу вещества $\Delta M = m\Delta N$ или $\Delta M = (n_1 - n_2) Sv_{\text{ср}} \Delta t/6$, где m – масса молекулы. Подставляя парциальные плотности вещества $\rho_{i1} = m n_1$ и $\rho_{i2} = m n_2$, получим

$$\Delta M = (\rho_{i1} - \rho_{i2}) Sv_{\text{ср}} \Delta t/6. \quad (8.28)$$

Свободно пролетать площадку S могут лишь те молекулы, которые находятся от нее на расстоянии, не превышающем среднюю длину свободного пробега молекул λ . Следовательно, слои 1 и 2 должны находиться на расстоянии друг от друга равном 2λ , и в согласии с определением градиента должно выполняться соотношение $(\rho_{i1} - \rho_{i2})/2\lambda = d\rho_i/dz$. Учитывая это равенство, преобразуем выражение (8.28) к виду

$$\Delta M = -\frac{1}{3} v_{\text{ср}} \lambda \frac{d\rho_i}{dz} S \Delta t. \quad (8.29)$$

Мы получили закон диффузии, исходя из молекулярно-кинетических представлений. Сравнивая равенства (8.29) и (8.27), получим теоретическое выражение для коэффициента диффузии

$$D = \frac{1}{3} v_{\text{ср}} \lambda. \quad (8.30)$$

Так как $\lambda \sim 1/p$, то D уменьшается при увеличении давления. Зависимость коэффициента диффузии от $v_{\text{ср}}$, а следовательно, и от массы молекул, позволяет использовать явление диффузии для разделения изотопов при многократном прохождении газа через пористые перегородки.

Поток паров от кипящей ртути, направленный вдоль специальной трубы, позволяет на ее концах создать разность давлений откачиваемого газа от 1 мм.рт.ст. до 10^{-7} мм.рт.ст., достаточную для получения высокого вакуума. Для откачиваемого газа только одна из

10^{20} молекул способна пробиться через поток паров ртути за счет диффузии. Устройство, основанное на этом принципе получения вакуума, называют *диффузионным насосом*. Предварительную откачку газа до 1 мм.рт.ст. производят другими насосами.

8.7 ЯВЛЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ВЯЗКОСТИ

Явление теплопроводности вещества определяет многие очень важные технические процессы и широко применяется в разнообразных расчетах. Эмпирическое уравнение теплопроводности было получено французским ученым Фурье: количество тепла ΔQ , проходящее за время Δt через площадку S , перпендикулярную к направлению переноса тепла, равно

$$\Delta Q = -\chi(dT/dz)S\Delta t, \quad (8.31)$$

где dT/dz – градиент температуры, dT – изменение температуры на расстоянии dz вдоль направления потока тепла, χ – коэффициент теплопроводности вещества. Градиент температуры показывает скорость изменения температуры вдоль потока тепла. Если численно положить $(dT/dz) = -1$, $S = 1$, $\Delta t = 1$, то согласно (8.31) получим $\Delta Q = \chi$. Отсюда следует *физический смысл коэффициента χ* : коэффициент теплопроводности численно равен количеству тепла, проходящего за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к потоку тепла, при градиенте температуры, равном единице. Размерность коэффициента теплопроводности $[\chi] = \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$.

Мы рассмотрели два явления переноса: **диффузию** и **теплопроводность**. В явлении диффузии наблюдается перенос молекул из одного места пространства в другое, вызванный тепловым движением. В явлении теплопроводности тепловое движение молекул переносит энергию от молекул с большей кинетической энергией в места с меньшей энергией молекул. За счет этого происходит поток тепла.

Существует еще одно явление переноса, называемое **явлением вязкости** и связанное с переносом импульса, которым обладает слой частиц. Это явление было подробно рассмотрено в подразделе 5.3. Для газов вязкость объясняется тем, что при тепловом движении молекулы, перелетая из слоя в слой, переносят импульс слоя.

Попадая в слой, движущийся с большей скоростью из более медленного слоя, молекулы замедляют его движение, и наоборот, попадая в слой, движущийся с меньшей скоростью из слоя с более высокой скоростью, молекулы ускоряют его движение. Возникает выравнивание скоростей слоев и, следовательно, сила вязкости. Уравнение вязкости определяется соотношением (5.8). Это уравнение и уравнение теплопроводности (8.31) можно получить, исходя из молекулярно-кинетических представлений. При этом, как и для явления диффузии, применительно к газам получаются следующие теоретические выражения для коэффициентов вязкости и теплопроводности:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho v_{\text{ср}} \lambda \quad \text{и} \quad \chi = \frac{1}{3} \rho c_V v_{\text{ср}} \lambda, \quad (8.32)$$

где ρ — плотность газа, c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме (будет рассмотрена в подразделе 9.4). Произведение $\rho \lambda$ не зависит от давления. Следовательно, из формул (8.32) следует, что коэффициенты η и χ не зависят от давления, что подтверждается опытом.

Однако в области вакуума рассмотренный механизм явления не применим и $\chi \sim p$, с уменьшением давления коэффициент теплопроводности уменьшается. В термосах и сосудах Дьюара делают двойные зеркальные стенки и из пространства между ними откачивают воздух до глубокого вакуума. При этом разреженный воздух становится хорошим теплоизолятором.

9. ТЕРМОДИНАМИКА

Термодинамика изучает физические явления с точки зрения тех превращений энергии, которыми эти явления сопровождаются. Первоначально термодинамика возникла как наука о взаимном превращении теплоты в работу. Однако законы, лежащие в основе термодинамики, имеют настолько общий характер, что с большим успехом применяются для исследования различных физических и химических процессов. Термодинамика не вдается в рассмотрение микроскопической картины явлений. Она рассматривает явления,

опираясь на основные законы, которые являются обобщением огромного количества опытных данных.

Основу термодинамики образуют ее начала. Первое начало устанавливает количественные соотношения, имеющие место при превращениях энергии из одних видов в другие. Второе начало определяет условия, при которых возможны эти превращения, т.е. определяет возможные направления процессов.

9.1 ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Важной величиной в термодинамике является внутренняя энергия тела. Любое тело кроме механической энергии может обладать запасом внутренней энергии, которая связана с механическим движением атомов или молекул, составляющих тело, а также с их взаимодействием. Для идеального газа его внутренняя энергия является энергией молекулярно-кинетического движения атомов или молекул этого газа. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы согласно равенству (8.10) зависит только от температуры и равна $E = 3kT/2$. Скорость молекул связана со своими составляющими по осям x , y и z соотношением $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Умножая это равенство на $m/2$, получим $mv^2/2 = mv_x^2/2 + mv_y^2/2 + mv_z^2/2$. Из последнего равенства следует, что кинетическая энергия поступательного движения молекул складывается из трех независимых составляющих, связанных с осями координат. Поэтому говорят, что молекула имеет три степени свободы движения.

Числом степеней свободы механической системы называется количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы. Для одноатомного газа, например гелия, каждый атом однозначно определяется заданием трех координат. Поэтому для одноатомного газа число степеней свободы $i = 3$.

Энергией вращательного движения одноатомная молекула практически не обладает, так как ее масса сосредоточена в ядре. В силу хаотичности движения атомов средние значения энергии, приходящиеся на каждую степень свободы движения, будут одинаковыми и равными третьей части от энергии поступательного движения, т.е. равными $kT/2$. Полная средняя энергия поступательного движения молекулы может быть представлена в виде $\varepsilon_{\text{пост}} = i kT/2$.

Если молекула газа состоит из трех или более атомов, то при хаотических соударениях молекул энергия поступательного движения молекул будет переходить в энергию вращательного движения молекул и наоборот. В результате этого получается, что средние энергии поступательного и вращательного движения многоатомных молекул одинаковы. Вращение многоатомной молекулы может происходить относительно трех независимых осей и его можно описать с помощью трех угловых величин. Поэтому вращательное движение имеет также три степени свободы движения. Полное число степеней свободы движения молекул многоатомного газа $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} = 3 + 3 = 6$. Причем полную кинетическую энергию многоатомной молекулы можно записать в виде

$$\varepsilon = i kT/2. \quad (9.1)$$

Полученный результат Максвелл обобщил в принципе равного распределения энергии: в системе, состоящей из большого числа частиц, механическая энергия распределяется поровну между их степенями свободы движения.

Эксперимент подтверждает этот принцип. Например, двухатомная молекула в среднем обладает энергией вращательного движения относительно лишь двух осей вращения y и z (рисунок 9.1), и поэтому обладает двумя степенями свободы вращательного движения. Общее число степеней свободы движения двухатомной

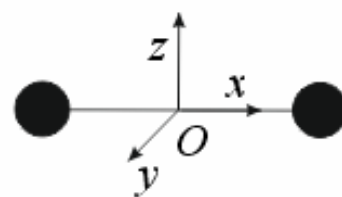


Рисунок 9.1

молекулы $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} = 3 + 2 = 5$.

Для одного моля идеального газа, содержащего N_A число молекул, внутренняя энергия в соответствии с выражением (9.1) определяется соотношением $U_\mu = N_A i k T / 2$ или

$$U_\mu = i R T / 2, \quad (9.2)$$

где R – универсальная газовая постоянная. Выражение (9.2) показывает, что внутренняя энергия одного моля газа является лишь функцией его температуры. Для произвольной массы газа m получим $U = i(m/\mu)RT/2$, где μ – молярная масса газа.

В реальном газе между молекулами действуют силы притяжения, которые при расширении газа будут совершать работу. Поэтому его внутренняя энергия будет зависеть не только от температуры, но и от объема. Для реального газа внутренняя энергия будет являться функцией температуры и объема: $U = f(T, V)$. Если реальный газ вернется в некоторое прежнее состояние, то его внутренняя энергия будет иметь прежнее значение.

9.2 РАБОТА И ТЕПЛОТА. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Внутренняя энергия газа (и любой другой термодинамической системы) может изменяться в основном за счет двух процессов: совершения над газом работы A и сообщения ему количества теплоты Q . Также как состояние газа может одинаково изменяться от совершенной над ним работы A и сообщенного ему количества теплоты Q , то работа и теплота являются эквивалентными формами передачи энергии. **Теплота** – это форма передачи энергии на уровне микроскопических процессов, когда, например, молекулы газа, соударяясь с разогретыми стенками (молекулами) сосуда, получают от них дополнительную кинетическую энергию. **Работа** над газом –

это передача энергии в форме макропроцессов. Когда поршень, перемещаясь в некотором цилиндре, сжимает газ, то молекулам газа за счет движения поршня передается дополнительная энергия и газ нагревается.

Исторически развитие термодинамики было связано с необходимостью теоретического объяснения работы теплового двигателя. При сжигании топлива выделялось определенное количество теплоты, и некоторая его часть dQ (рисунок 9.2) передавалась рабочему телу (обычно газу). Газ нагревался, и его внутренняя энергия увеличивалась на величину dU . Расширяясь, газ совершал работу dA . Отсюда принято считать $dQ > 0$, когда термодинамическая система получает количество теплоты, и $dA > 0$, когда эта система совершает работу.

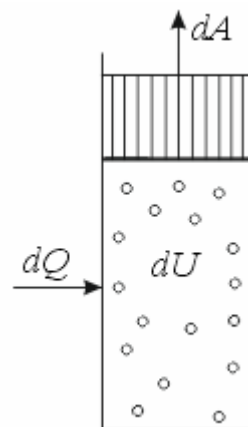


Рисунок 9.2

Огромная совокупность опытных фактов с учетом законов сохранения показывала, что в термодинамической системе, в которой протекают тепловые и механические процессы, всегда должно выполняться равенство

$$dQ = dU + dA. \quad (9.3)$$

Уравнение (9.3) представляет собой содержание **первого начала(закона) термодинамики**. Словами его можно выразить следующим образом: *количество теплоты dQ , сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы dU и на совершение системой работы dA над внешними силами.*

Следует отметить, что в равенстве (9.3) величина U является функцией состояния и однозначно определяется термодинамическими параметрами состояния, поэтому ее приращение является полным дифференциалом и обозначается как dU . Величины Q и A не являются функциями состояния. Они зависят не только от начального и конечного состояния системы, но и от пути изменения ее состояния, поэтому их приращения являются не

полным дифференциалом и обозначаются как δQ и δA соответственно. Таким образом, более корректная запись выражения (9.3) примет вид: $\delta Q = dU + \delta A$.

Из равенства (9.3) следует, что единицей измерения количества теплоты служит джоуль.

9.3 РАБОТА ГАЗОВЫХ ИЗОПРОЦЕССОВ

Пусть газ заключен в цилиндрический сосуд, закрытый плотно прилегающим и легко скользящим поршнем (рисунок 9.3). При расширении газ будет совершать работу $\Delta A = F\Delta h$, где F – сила, с которой газ действует на площадь поршня S , Δh – перемещение поршня при расширении газа. Приращение объема газа $\Delta V = S\Delta h$. Подставляя силу $F = pS$ и ΔV в выражение для работы, получим $\Delta A = p\Delta V$.

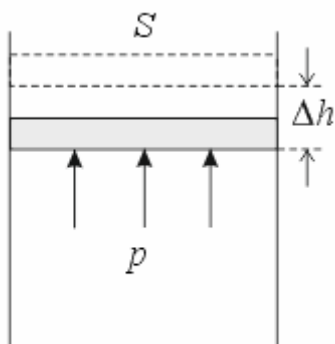


Рисунок 9.3

При расширении газа работа будет положительной, при сжатии – отрицательной. Если давление газа при совершении работы изменяется, то находят работу при каждом элементарном изменении объема

$$dA = pdV \quad (9.4)$$

и затем суммируют все элементарные работы для этого газового процесса. Полная работа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV, \quad (9.5)$$

где V_1 – начальный объем газа, V_2 – его конечный объем. Применим формулу (9.5) для расчета работы изопроцессов.

1. Рассмотрим *изохорный* процесс. Для этого процесса объем газа $V = const$, тогда $dV = 0$ и $A = 0$. Газ не совершает работу. Первое

начало термодинамики (9.3) будет иметь вид $dQ = dU$, т.е. все количество теплоты, сообщенное газу, пойдет на его нагревание.

2. Рассмотрим *изобарный* процесс. Так как давление не изменяется, то его как постоянную величину можно вынести из под знака интеграла (9.5). Получим $A = p(V_2 - V_1)$ или с учетом уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = (m/\mu)RT$, записанного для начального и конечного состояний, получим выражение для работы изобарического процесса

$$A = (m/\mu)R(T_2 - T_1). \quad (9.6)$$

3. Рассмотрим *изотермический* процесс. Так как температура постоянна, то внутренняя энергия идеального газа не изменяется: $dU = 0$. Первое начало термодинамики (9.3) будет иметь вид: $dQ = dA$, т.е. все количество теплоты, сообщенное системе, будет затрачено на совершение ею работы. Используя уравнение состояния идеального газа (8.6) и учтя, что $T = const$, запишем выражение (9.5) для работы изотермического процесса в виде

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = (m/\mu)RT \int_{V_1}^{V_2} dV/V = (m/\mu)RT \ln(V_2/V_1). \quad (9.7)$$

9.4 МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕПЛОЕМКОСТЕЙ

Теплоемкостью тела C , называют физическую величину, численно равную количеству теплоты, которое необходимо сообщить телу для нагревания его на один градус. Если сообщить телу количество теплоты dQ , то температура тела повысится на dT градусов и его теплоемкость определится по формуле:

$$C = dQ/dT. \quad (9.8)$$

Размерность теплоемкости равна $[C] = \text{Дж/К}$.

Теплоемкость моля вещества называется молярной и обозначается символом C_μ . Теплоемкость единицы массы называется удельной и обозначается $c_{уд}$ или c , причем легко видеть, что $C_\mu = \mu c_{уд}$. Теплоемкость произвольной массы m равна $C = m c_{уд}$. Отсюда следует, что достаточно знать теплоемкость одного моля, чтобы рассчитать теплоемкость тела произвольной массы.

Согласно первому началу термодинамики $dQ = dU + dA$. Отсюда следует, что количество теплоты dQ , сообщенное телу при повышении его температуры на dT , будет затрачено не только на изменение его внутренней энергии dU , но и на работу dA , которую газ при этом совершит. Так как процесс расширения газа на диаграмме $p - V$ можно провести бесчисленным количеством способов, то теплоемкость газа может иметь такое же число значений. Для практических целей наиболее важными являются теплоемкость при постоянном давлении C_p и постоянном объеме C_V .

Рассчитаем **теплоемкость** одного моля газа **при постоянном объеме** C_V . Первое начало термодинамики для изохорного процесса имеет вид $dQ = dU_\mu$. Выражение (9.8) запишем в виде

$$C_V = dU_\mu / dT. \quad (9.9)$$

Учитывая выражение (9.2), получим

$$C_V = i R / 2, \quad (9.10)$$

где i – число степеней свободы движения молекул газа, R – универсальная газовая постоянная. Из выражения (9.10) следует, что теплоемкость C_V моля произвольного газа является постоянной величиной и зависит лишь от числа степеней свободы движения молекул. Следует однако заметить, что выражение (9.10) для воздуха не является справедливым для низких и высоких температур (рисунок 9.4). При высоких температурах у молекул возбуждается колебательное движение и часть энергии теплового движения

передается колебаниям атомов в молекуле. Число колебательных степеней свободы движения равно 2.

При низких температурах, наоборот, наблюдается “замораживание” вращательных степеней свободы движения, объясняемое квантовой механикой. Поэтому зависимость теплоемкости от температуры имеет сложный вид.

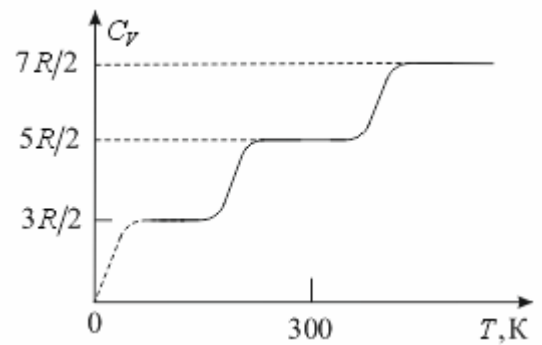


Рисунок 9.4

Рассмотрим **теплоемкость при постоянном давлении** для одного моля газа. Согласно первому началу термодинамики

$$C_p = dQ/dT = dU_\mu/dT + dA_\mu/dT, \quad (9.11)$$

где $dA_\mu = pdV_\mu$ – работа одного моля газа при изменении его объема на dV_μ , p – давление газа. Учитывая, что уравнение состояния идеального газа для одного моля имеет вид $pV_\mu = RT$, получим $dA_\mu = RdT$. Если численно положить $dT = 1$, то $dA_\mu = R$. Отсюда следует, что *универсальная газовая постоянная численно равна работе изобарического расширения газа при его нагревании на один градус*. С помощью формулы (9.9) и выражения для dA_μ представим равенство (9.11) в виде

$$C_p = C_V + R. \quad (9.12)$$

Выражение (9.12) называется **уравнением Майера** (в честь выдающегося немецкого ученого Юлиуса Роберта фон Майера) и показывает что теплоемкость моля газа нагреваемого при постоянном давлении всегда больше теплоемкости при постоянном объеме на величину универсальной газовой постоянной.

Величина $\gamma = C_p/C_V$ представляет характерную для каждого газа величину, часто применяющуюся при расчетах. Используя уравнения (9.10) и (9.12), получим

$$\gamma = (i + 2)/i. \quad (9.13)$$

Отсюда для газа состоящего из одноатомных молекул ($i = 3$) получим $\gamma = 1,67$; для двухатомного газа ($i = 5$) – $\gamma = 1,4$; для многоатомного газа ($i = 6$) – $\gamma = 1,33$.

9.5 АДИАБАТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

Наряду с изопроцессами существует адиабатический процесс, широко распространенный в природе. **Адиабатическим процессом** называют *процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой*. Это означает, что газ при адиабатическом процессе не получает энергию извне, т.е. $dQ = 0$. Тогда, первое начало термодинамики для моля газа при адиабатическом процессе примет вид $dU_\mu = -dA$. С учетом выражений (9.4) и (9.9) запишем это равенство в виде

$$C_V dT = -pdV. \quad (9.14)$$

Если при адиабатическом процессе газ расширяется, то $dA > 0$, $dU < 0$, $dT < 0$, т.е. внутренняя энергия газа уменьшается, температура также уменьшается и газ при адиабатическом расширении охлаждается. При адиабатическом сжатии газа его температура увеличивается, так как $dA < 0$, $dU > 0$ и $dT > 0$. Молекулярно-кинетическое объяснение этого явления дано в подразделе 3.7.1.

Примером адиабатического процесса является распространение звуковых колебаний в воздухе. Сжатия и разрежения происходят так часто, что тепло не успевает переходить от слоев, имеющих большую температуру, к слоям с меньшей температурой. Следовательно, процессы, происходящие достаточно быстро, близки к адиабатическим.

Большое значение адиабатический процесс имеет в объяснении атмосферных явлений. Слои воздуха, поднимающиеся вверх, расширяются, так как атмосферное давление уменьшается с высотой.

За счет расширения газ адиабатически охлаждается, поэтому с увеличением высоты температура газа уменьшается. Это объясняет и тот факт, что ветер, дующий с гор, всегда кажется теплым, так как воздух, перемещаясь, сжимается, а ветер, дующий с моря, кажется прохладным.

Для описания адиабатического процесса, воспользуемся уравнением состояния идеального газа (Менделеева-Клапейрона), записанное для одного моля вещества $pV = RT$. Наличие дополнительного условия (9.14) позволяет уменьшить в этом уравнении число параметров состояния. Для этого выразим p из уравнения Клапейрона и подставим его в формулу (9.14): $C_V dT = -RT dV/V$. Разделяя переменные, получим $dT/T + (R/C_V)dV/V = 0$. Взяв неопределенный интеграл, получим $\ln T + (R/C_V)\ln V = \text{const}$. Согласно выражениям (9.10) и (9.13) получим $R/C_V = 2/i = \gamma - 1$ и следовательно $\ln T + (\gamma - 1)\ln V = \text{const}$. Потенцируя это равенство, приходим к уравнению

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (9.15)$$

Полученное соотношение представляет собой уравнение адиабаты в переменных T и V . Чтобы от этого уравнения перейти к уравнению с переменными p и V , выразим из уравнения Менделеева-Клапейрона температуру $T = mpV/(R\mu)$ и ее в выражение (9.15). Получим

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (9.16)$$

Соотношение (9.16) называют **уравнением Пуассона**, а параметр γ – коэффициентом Пуассона или показателем адиабаты. По форме это уравнение похоже на уравнение изотермы. Однако, при увеличении объема, для адиабатического процесса давление падает быстрее, чем для изотермического процесса (рисунок 9.5).

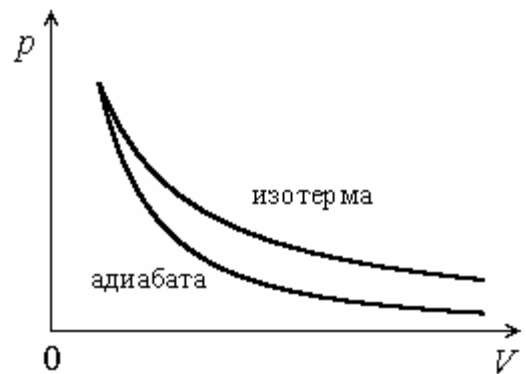


Рисунок 9.5

Согласно выражению (9.14) **работа для адиабатического процесса** для одного моля газа определится по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{T_1}^{T_2} C_V dT = C_V (T_2 - T_1).$$

С учетом выражения (9.10) получим

$$A = (i/2)R(T_2 - T_1) = (i/2)(p_1V_1 - p_2V_2).$$

Для произвольной массы газа m получим $A = (i/2)(m/\mu)(p_1V_1 - p_2V_2)$.

9.6 КРУГОВЫЕ ОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ. ЦИКЛ КАРНО

Механические процессы обладают замечательным свойством – обратимостью. Например, брошенный камень, описав некоторую траекторию, упал на землю. Если его бросить обратно с той же скоростью, то он опишет ту же траекторию, только в обратном направлении (трением пренебрегаем). Совершенно иная ситуация имеет место в области тепловых явлений. Тепловой процесс, при котором проходятся те же тепловые состояния, но только в обратном порядке, как правило, невозможен. Например, необратимыми являются: теплообмен при конечной разности температур между телами, процесс расширения газа в пустоту, а также выделение тепла при трении. Если произвольный тепловой процесс сопровождается перечисленными явлениями, то он необратим.

Однако в некоторых случаях процессы можно считать с достаточной степенью точности обратимыми, например, процессы изотермического и адиабатического расширения газа могут быть проведены в обратном направлении.

Важной задачей человечества было получение механической энергии за счет тепловой. **Машина**, превращающая тепловую энергию в механическую, называется **тепловой**. Обычно работа тепловой машины связана с работой расширения газа. Однако, чтобы получать работу непрерывно, необходимо газ возвращать в исходное

состояние. Для этого его необходимо сжимать при более низкой температуре. В общем случае на диаграмме $p-V$ некоторый газовый процесс изобразится в виде цикла (рисунок 9.6). В результате процесса $1-a-2$ газ получил некоторое количество теплоты Q_1 и совершил работу A_{12} . В процессе сжатия по линии $2-b-1$ над газом совершается работа A_{21} и газ при этом отдает холодильнику количество теплоты Q_2 . Обычно роль холодильника играет атмосферный воздух. Полная работа газового цикла $A = A_{12} + A_{21}$ и равна его площади на диаграмме $p-V$. Так как внутренняя энергия газа не изменилась, то по первому началу термодинамики $A = Q_1 - Q_2$. Коэффициент полезного действия тепловой машины (КПД)

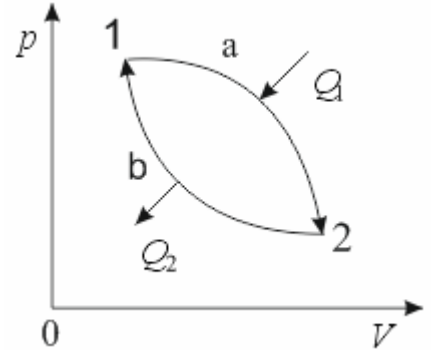


Рисунок 9.6

$$\eta = A/Q_1 = (Q_1 - Q_2)/Q_1. \quad (9.17)$$

Для получения максимального КПД тепловой машины необходимо рассмотреть цикл состоящий из обратимых процессов. Такой цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, рассмотрел французский инженер Сади Карно (рисунок 9.7). На участке цикла $1-2$ газ получает от нагревателя количество теплоты Q_1 и, расширяясь изотермически от объема V_1 до V_2 при температуре T_1 , совершает работу для моля газа

$$A_{12} = Q_1 = RT_1 \ln(V_2/V_1). \quad (9.18)$$

На участках $2-3$ и $4-1$ газ расширяется и сжимается адиабатически, не получая и не отдавая тепла. На участке $3-4$ газ сжимают изотермически от объема V_3 до V_4 при температуре T_2 , отнимая тепло Q_2 . Работа, затрачиваемая на сжатие газа равна

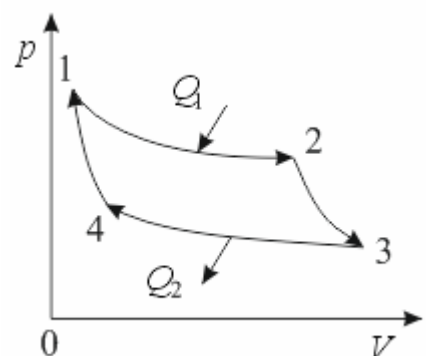


Рисунок 9.7

$$A_{34} = Q_2 = RT_2 \ln(V_3/V_4). \quad (9.19)$$

Используя уравнение (9.15) для процессов 2–3 и 4–1, можно показать, что

$$V_2/V_1 = V_3/V_4. \quad (9.20)$$

Подставляя выражение (9.18) и (9.19) в равенство (9.17) с учетом равенства (9.20), получим

$$\eta = (T_1 - T_2)/T_1. \quad (9.21)$$

Видим, что КПД цикла Карно определяется только температурами нагревателя и холодильника. Например, для паровой машины, имеющей $T_1 = 400\text{ К}$ и $T_2 = 300\text{ К}$, по формуле (9.21) получаем $\eta = 0,25$. Реальный КПД паровых двигателей вдвое меньше из-за потерь на трение и т.д. Как показывается в курсах термодинамики, КПД любого теплового двигателя не может превосходить КПД цикла Карно, работающего в тех же интервалах температур, т.е. $\eta_{\text{реал}} \leq (T_1 - T_2)/T_1$. Из формулы (9.21) следует, что для увеличения КПД теплового двигателя необходимо увеличить температуру нагревателя. Именно поэтому КПД двигателей внутреннего сгорания значительно выше, чем паровых.

9.7 ПОНЯТИЕ ОБ ЭНТРОПИИ. ЭНТРОПИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Для цикла Карно из формул (9.17) и (9.21) легко получить соотношение

$$Q_1/T_1 - Q_2/T_2 = 0. \quad (9.22)$$

Величину Q/T называют приведенной теплотой, Q – количество теплоты, переданное телу при температуре T . Из соотношения (9.22) следует, что для цикла Карно, являющегося обратимым, алгебраическая сумма приведенных теплот равна нулю. Понятие приведенных теплот можно применить для анализа произвольных тепловых процессов. Так как температура тел T изменяется во время процессов, то рассматривают малое количество передаваемой

теплоты dQ и вводят новую величину S называемую **энтропией**, элементарное изменение которой равно

$$dS = dQ/T. \quad (9.23)$$

При переходе системы из состояния 1 в состояние 2 полное изменение энтропии будет равно

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 dQ/T. \quad (9.24)$$

Рассчитаем изменение энтропии для идеального газа массой m . По первому началу термодинамики $dQ = dU + dA$. Подставляя dQ в (9.23) и учитывая, что согласно (9.9) $dU = (m/\mu)C_V dT$ и $dA = p dV$, получим

$$dS = (m/\mu)C_V dT/T + p dV/T. \quad (9.25)$$

Выразив p из уравнения Менделеева-Клапейрона (8.6) и подставляя его в (9.25), а затем полученное равенство в (9.24), придем к выражению

$$S_2 - S_1 = (m/\mu)C_V \int_{T_1}^{T_2} dT/T + (m/\mu)R \int_{V_1}^{V_2} dV/V$$

или после интегрирования

$$S_2 - S_1 = (m/\mu)C_V \ln(T_2/T_1) + (m/\mu)R \ln(V_2/V_1). \quad (9.26)$$

Из выражения (9.26) следует, что энтропия зависит лишь от параметров V и T , т.е. является функцией состояния системы. Это означает, что если система совершит некоторые процессы и вернется в итоге к тем же параметрам V и T , то и энтропия ее примет прежнее значение.

9.8 ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Понятие энтропии помогло строго математически сформулировать закономерности, позволяющие определить направление тепловых процессов. Огромная совокупность опытных

фактов показывает, что для замкнутых систем возможны только такие процессы, при которых энтропия системы возрастает или остается постоянной. Это утверждение носит название *второго закона (начала) термодинамики*. Математическая запись второго начала имеет вид

$$dS \geq 0, \quad (9.27)$$

где S – энтропия замкнутой системы.

Применим второе начало термодинамики для выяснения направления некоторых тепловых процессов.

1. Рассмотрим *расширение идеального газа в пустоту*. Пусть газ первоначально находится в сосуде 1 (рисунок 9.8). Затем открывается заслонка 3, и молекулы из сосуда 1 могут перемещаться в сосуд 2.

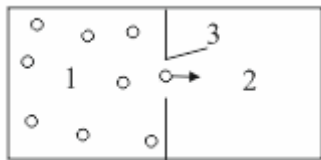


Рисунок 9.8

Так как в системе нет движущихся частей, то скорость молекул не изменяется и процесс расширения газа в пустоту будет изотермическим ($T_1 = T_2$). Применяя второе начало термодинамики и учитывая равенство (9.27), получим $(m/\mu)R \ln(V_2/V_1) \geq 0$. Отсюда следует, что $\ln V_2 \geq \ln V_1$ или $V_2 \geq V_1$. Применив второе начало термодинамики к газу, мы получили, что газ, предоставленный самому себе, может только расширяться. Второе начало термодинамики показывает, что невозможен процесс, в результате которого газ соберется в какой-то определенной части объема, хотя из чисто механических представлений обратный процесс расширения газа в пустоту кажется возможным.

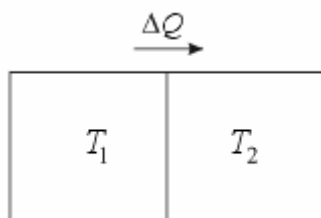


Рисунок 9.9

2. Рассмотрим *процесс теплообмена при конечной разности температур*. Пусть тело с температурой T_1 передает количество теплоты ΔQ телу с температурой T_2 (рисунок 9.9). Полное изменение энтропии системы тел равно $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$, где $\Delta S_1 = -\Delta Q/T_1$ есть уменьшение энтропии первого тела, $\Delta S_2 = \Delta Q/T_2$ есть увеличение

энтропии второго тела. По второму началу термодинамики полное изменение энтропии системы $\Delta S = \Delta Q(T_1 - T_2)/(T_1 T_2) \geq 0$. Отсюда получаем $T_1 \geq T_2$. Итак, из второго начала термодинамики следует, что тепло должно передаваться от более нагретого тела к менее нагретому, т.е. второе начало термодинамики определяет направление передачи тепла. Клаузиус предложил записать второе начало термодинамики как утверждение: **невозможен самопроизвольный переход тепла от менее нагретого тела к более нагретому**.

3. Рассмотрим работу *тепловой машины*. Нагреватель отдает рабочему телу в течении рабочего цикла количество теплоты ΔQ_1 при температуре T_1 (рисунок 9.10), его энтропия изменяется (уменьшается) на величину $\Delta S_1 = -\Delta Q_1/T_1$. Рабочее тело отдает количество теплоты ΔQ_2 при температуре T_2 холодильнику, энтропия которого



Рисунок 9.10

увеличивается на величину $\Delta S_2 = \Delta Q_2/T_2$. Энтропия рабочего тела не меняется, так как через цикл оно имеет прежние параметры состояния. Согласно второму началу термодинамики $\Delta S_1 + \Delta S_2 \geq 0$. Знак равенства соответствует выражению (9.22) для цикла Карно. Итак, полученное из второго начала термодинамики неравенство будет выполняться, когда часть полученного рабочим телом количества теплоты ΔQ_2 будет неизбежно передано холодильнику. В противном случае энтропия системы возрастет. Это указывает на обесцененность тепловой энергии по сравнению с другими видами энергии. Несмотря на огромные запасы тепловой энергии, ее использование возможно лишь при разности температур между телами системы. При тепловом равновесии системы превращение ее тепловой энергии в механическую невозможно. Кельвин предложил записать проведенное рассуждение как следующую формулировку второго начала термодинамики: **невозможен процесс,**

единственным результатом которого явилось бы отнятие от какого либо тела определенного количества теплоты и превращения его полностью в работу. Иными словами, невозможен вечный двигатель второго рода, единственным результатом которого было бы производство работы за счет тепла некоего резервуара.

9.9 СТАТИСТИЧЕСКОЕ ТОЛКОВАНИЕ ВТОРОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ

Состояние макроскопического тела (т.е. тела, образованного огромным числом молекул) может быть задано с помощью объема, давления и температуры. Данное макроскопическое состояние газа с определенными средними значениями параметров представляет собой непрерывную смену близких микроскопических состояний, отличающихся друг от друга распределением одних и тех же молекул в разных частях объема и распределением импульса между различными молекулами. Для примера рассмотрим распределение только четырех молекул по двум половинкам объема (рисунок 9.11).

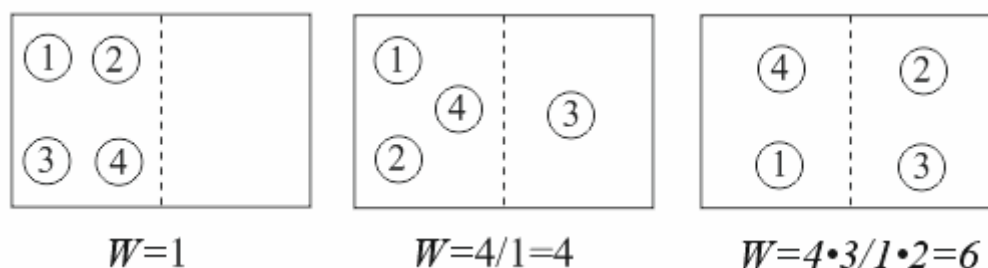


Рисунок 9.11

Первое макросостояние, при котором в левой части объема находятся все молекулы, реализуется одним микросостоянием. **Термодинамической вероятностью** или статистическим весом W называют *число микросостояний, с помощью которого реализуется данное макросостояние*. Первое макросостояние имеет вероятность $W=1$. Второе макросостояние, при котором в левой части объема

находятся три молекулы, а в правой – одна, реализуется четырьмя способами (в правой части можно по очереди разместить четыре различных молекулы), и его термодинамическая вероятность $W = 4$. Третье макросостояние, при котором молекулы поровну распределены по половинкам объема, имеет термодинамическую вероятность $W = 6$. Точное определение того, что подразумевается под “числом микроскопических способов осуществления” теплового состояния тела, дается в курсе статистической физики.

Так как система стремится к равномерному распределению молекул по объему, то согласно рассмотренному примеру, она должна стремиться к максимуму термодинамической вероятности. С другой стороны, энтропия системы тоже стремится к максимальному значению. Следовательно, существует связь между энтропией и термодинамической вероятностью, теоретически полученная Больцманом:

$$S = k \ln W, \quad (9.28)$$

где k – постоянная Больцмана. Второе начало термодинамики приобретает следующий *статистический смысл*: **изолированная система самопроизвольно может переходить только от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным.**

10. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

10.1 УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Поведение реальных газов при малых плотностях хорошо описывается уравнением Менделеева-Клапейрона

$$p'V'_\mu = RT, \quad (10.1)$$

где V'_μ – объем моля газа, p' – давление идеального газа, T – температура. Однако при давлениях порядка 200 атм. отклонение от уравнения (10.1) составляет около 5%. Это отклонение вызвано

влиянием сил притяжения между молекулами и наличием собственного объема молекул. Для учета собственного объема молекул нидерландский физик Ван-дер-Ваальс ввел поправку b и представил объем, свободный для движения, в виде $V'_\mu = V_\mu - b$.

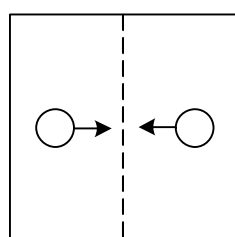
Уравнение (10.1) запишется в виде

$$p'(V_\mu - b) = RT, \quad (10.2)$$

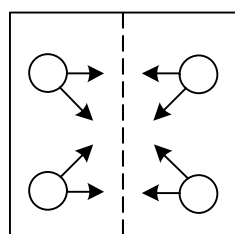
где V_μ – объем моля реального газа.

Силы притяжения со стороны других молекул вызывают уменьшение скорости молекулы, соударяющейся со стенкой, поэтому силы взаимодействия молекул уменьшают давление газа на стенки сосуда на величину p_i . Давление реального газа запишется в виде $p = p' - p_i$ и формула (10.2) примет вид

$$(p + p_i)(V_\mu - b) = RT. \quad (10.3)$$



$$n = 1 \\ f = f_1$$



$$n = 2 \\ f = 4f_1$$

Рисунок 10.1

Величина p_i зависит от объема газа. Если рассмотреть две половинки малого объема газа, то при увеличении количества молекул в них в n раз сила их взаимодействия f увеличится в n^2 раз (рисунок 10.1). Следовательно, величина $p_i \sim \rho^2$, где ρ – плотность газа. Учитывая, что при неизменной массе газа величина ρ обратно пропорциональна объему V , получим

$p_i = a/V_\mu^2$. Выражение (10.3) запишется в виде

$$(p + a/V_\mu^2)(V_\mu - b) = RT, \quad (10.4)$$

где a – поправка Ван-дер-Ваальса, учитывающая притяжение молекул. Выражение (10.4) называют **уравнением Ван-дер-Ваальса**. Это уравнение гораздо лучше согласуется с экспериментом, чем уравнение Менделеева-Клапейрона. Изотерма Ван-дер-Ваальса представлена на рисунке 10.2. Она отличается от изотермы идеального газа наличием S -образного участка 2–3–4–5, который

обычно не реализуется на опыте. Если взять некоторый газ, состояние которого соответствует точке 1, и изотермически сжимать его, то уравнение Ван-дер-Ваальса на участке 1–2 будет хорошо описывать опытную кривую. При дальнейшем сжатии газа экспериментальная кривая пройдет по штриховой линии 2–5. В точке 2 газ становится насыщенным паром, и при дальнейшем уменьшении объема часть пара конденсируется. Система распадается на две фазы: жидкую и газообразную. Давление насыщенного пара является постоянным и линия 2–5 параллельна оси абсцисс. При уменьшении объема системы по линии 2–5 растет количество жидкой фазы, и в точке 5 насыщенный пар полностью конденсируется в жидкость. Жидкость является мало-сжимаемой, поэтому при дальнейшем уменьшении объема давление быстро возрастает. Участок 5–6 изотермы Ван-дер-Ваальса полностью совпадает с опытной кривой.

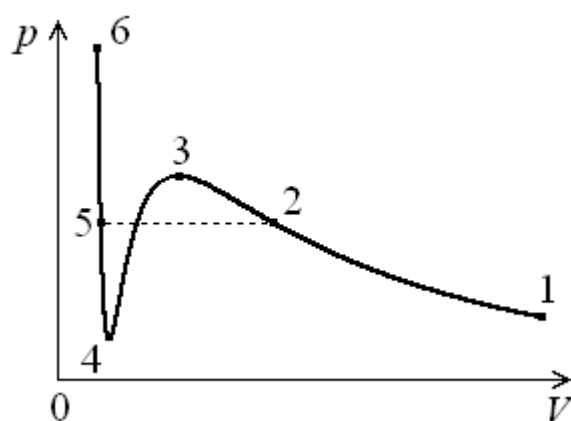


Рисунок 10.2

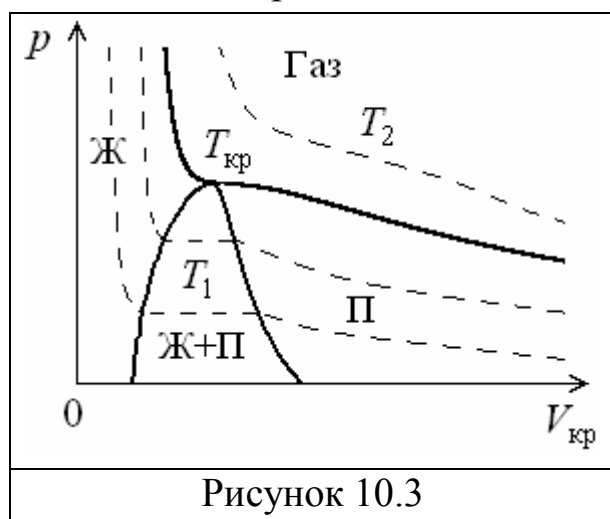
S-образный участок изотермы представляет собой область неустойчивых состояний, который на опыте обычно не реализуется. Участок 3–4 представляет область совершенно неустойчивых состояний, который экспериментально невозможно реализовать. При некоторых условиях, например, отсутствии центров конденсации или кипения, можно реализовать участки 2–3 и 4–5. Участок 2–3 соответствует *перегретому пару*, а участок 4–5 – *переохлажденной* или *растянутой жидкости*. Эти вполне устойчивые состояния называются метастабильными, и если искусственно ввести в метастабильную систему центры конденсации, то система скачком перейдет в двухфазное состояние. Воду можно перегреть на несколько десятков градусов, и если насыпать в нее немного мелкого песка, то происходит вскипание со взрывом. При перегонке многих жидкостей с целью очистки во избежание перегрева необходимо

вводить специальные предметы в качестве центров конденсации. Метастабильные состояния жидкости и пара широко используются при регистрации элементарных частиц.

Итак, уравнение Ван-дер-Ваальса позволило предсказать наличие неустойчивых состояний и неплохо количественно описать переход вещества из газообразного состояния в жидкое.

10.2 КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ВЕЩЕСТВА

Большое значение уравнения Ван-дер-Ваальса заключается в том, что оно предсказывает особое состояние вещества – критическое. Если рассчитать изотермы Ван-дер-Ваальса для различных температур, то получим, что с повышением температуры кривые будут смещаться вверх, а длина S -образного участка будет уменьшаться и при некоторой температуре станет равной нулю, т.е. участок стянется в точку. Эта точка называется **критической точкой**, а параметры состояния $p_{кр}$, $V_{кр}$ и $T_{кр}$, соответствующие ей, называются критическими.



Рассмотрим семейство опытных изотерм на диаграмме $p-V$ (рисунок 10.3), для которых S -образный участок изотермы (10.4) представляет собой прямую линию. Изотерма, проходящая через критическую точку, называется критической. Концы прямолинейных участков семейства

изотерм образуют колоколообразную кривую. Колоколообразная кривая и критическая изотерма делят диаграмму $p-V$ на четыре области: жидкость, газ, пар и двухфазную область – жидкость и насыщенный пар (рисунок 10.3).

Если изотермически сжимать газ при температуре, меньшей $T_{кр}$ (изотерма для $T = T_1$), то газ перейдет в двухфазное состояние и затем в жидкое. Газообразное состояние при $T < T_{кр}$ часто называют паром. Легко видеть, что, если $T > T_{кр}$, то, сжимая газ изотермически, его не возможно превратить в жидкость (изотерма для $T = T_2$). Это обстоятельство позволило понять, что любой газ можно превратить в жидкость, лишь охладив его до температуры ниже критической и сжимая его. Это предположение впервые высказал Д.И.Менделеев и он же впервые ввел понятие критической температуры, проводя исследования коэффициента поверхностного натяжения. Учитывая вышесказанное, ученым удалось сжидить все известные газы.

При критическом состоянии различие в плотности жидкости и насыщенного пара пропадает. Критическое состояние представляет собой смесь частичек жидкости и пара, которые непрерывно распадаются, превращаясь друг в друга. Вещество при подходе к критической точке мутнеет, так как свет сильно рассеивается на этих неоднородностях среды.

10.3 ЭФФЕКТ ДЖОУЛЯ-ТОМСОНА

В реальном газе между молекулами действуют силы притяжения и отталкивания. Силы притяжения обусловлены дипольным взаимодействием молекул. Некоторые молекулы могут представлять постоянные диполи. Для неполярных молекул основой притяжения является взаимодействие мгновенных осциллирующих диполей.

Силы отталкивания обусловлены взаимодействием электронных оболочек молекул. Они проявляются в основном при сближении молекул и быстро убывают с увеличением расстояния между молекулами. Силы же притяжения наоборот преобладают при большом расстоянии между молекулами. Результирующая сила взаимодействия двух молекул равна сумме этих сил и имеет вид,

изображенный на рисунке 10.4. При расстоянии между молекулами $r = r_0$ сила отталкивания равна силе притяжения и результирующая

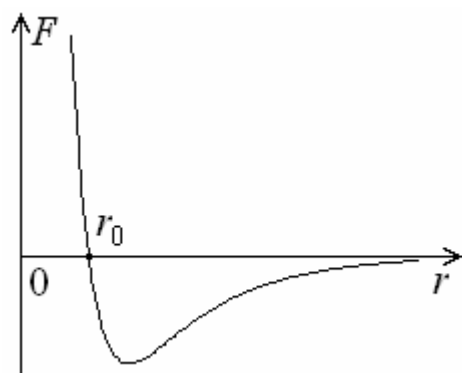


Рисунок 10.4

сила $F = 0$. При расстоянии между молекулами $r < r_0$ преобладает сила отталкивания, при расстоянии $r > r_0$ преобладает сила притяжения. Наличие этих сил проявляется в эффекте дросселирования газа, схема которого представлена на рисунке 10.5. Газ из сосуда A с высоким давлением

перетекает в сосуд B с низким давлением через патрубок с пористой перегородкой 1. В патрубке помещены термометры, измеряющие температуры T_1 и T_2 газа до и после пористой перегородки. При таком расширении газ работу не совершает, тепло газу не передается

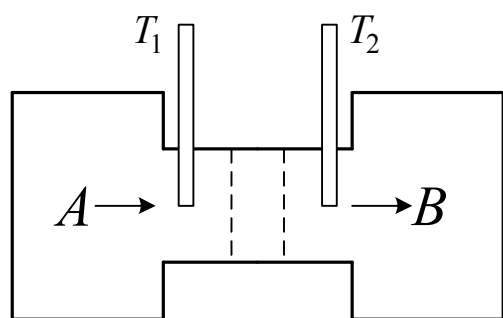


Рисунок 10.5

и в согласии с первым началом термодинамики изменение внутренней энергии газа $\Delta U = 0$. Следовательно, при дросселировании идеального газа его температура не должна изменяться, т.е. $T_1 = T_2$. Внутренняя энергия ΔU реального газа складывается из

кинетической энергии молекул U_k и потенциальной энергии их взаимодействия $U_{\text{п}}$, т.е. $U = U_k + U_{\text{п}}$. При расширении газа межмолекулярные расстояния увеличиваются и взаимная потенциальная энергия молекул изменяется. Следовательно, должны изменяться их кинетическая энергия ΔU_k и температура газа, причем $\Delta U_k = -\Delta U_{\text{п}}$. Если при дросселировании газа преобладают силы притяжения между молекулами ($r > r_0$), то при этом будет совершаться работа против сил притяжения и потенциальная энергия молекул при увеличении объема газа увеличится. При этом кинетическая энергия молекул и температура газа уменьшаются.

Такой эффект Джоуля-Томсона называют *положительным*. Если между молекулами газа преобладают силы отталкивания, то газ при дросселировании нагревается. Эффект называется *отрицательным*.

Устройства, использующие положительный эффект Джоуля-Томсона, позволили впервые получить сжиженные газы.

11. ЖИДКОЕ СОСТОЯНИЕ

Жидкости занимают промежуточное положение между газами и кристаллами и сочетают в себе некоторые черты обоих этих состояний. Например, для жидкости в отличие от газов характерно наличие определенного объема, с другой стороны, в отличие от твердых тел жидкость принимает форму того сосуда, в котором она находится. Далее для кристаллического состояния характерно упорядоченное расположение частиц (атомов), наблюдается *дальний порядок*; в газах в этом смысле наблюдается полный хаос. Исследования показывают, что в расположении частиц жидкости наблюдается так называемый *ближний порядок*, т.е. расположение ближайших соседей по отношению к частице жидкости является упорядоченным. Отсюда структуру жидкостей называют *квазикристаллической*. Основные свойства жидкостей можно объяснить, если представить ее мгновенную картину как сочетание субмикроскопических кристалликов, размытых на гранях их соприкосновения, находясь между которыми отдельные молекулы могут хаотично двигаться. Кристаллики непрерывно распадаются и образуются вновь в соседних местах. Находясь в этих кристалликах, молекулы совершают колебательное движение. При распаде кристаллика молекула совершает, как и в газе, беспорядочное тепловое движение. Кристаллики могут перемещаться друг относительно друга, что объясняет текучесть жидкостей. С повышением температуры размеры кристалликов уменьшаются, и свойства жидкостей начинают быть сходными со свойствами газов. С

понижением температуры размеры и объем кристалликов растут, и свойства жидкостей становятся больше похожими на свойства твердых тел.

11.1 ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

Силы взаимодействия молекул в жидкости имеют значительную величину. Это взаимодействие молекул эквивалентно очень большому внешнему давлению, которое можно оценить, рассчитав по уравнению Ван-дер-Ваальса величину $p_i = a/V_\mu^2$. Для воды расчет дает величину $p_i = 1,7 \cdot 10^4$ атм. Отсюда легко понять малую сжимаемость воды, так как ее молекулы уже сжаты давлением p_i .

Силы взаимодействия молекул проявляются в особом состоянии поверхностного слоя, толщина которого равна радиусу действия молекулярных сил (порядка 10^{-9} м). Для перемещения молекулы из объема жидкости на поверхность (рисунок 11.1) необходимо

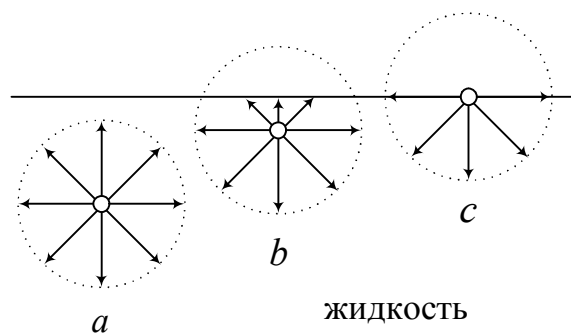


Рисунок 11.1

совершить работу против сил межмолекулярного притяжения. Эта работа равна половине работы, которую необходимо совершить, чтобы оторвать эту молекулу от поверхности жидкости. Отсюда следует, что всякое увеличение поверхности жидкости требует

совершения определенной работы, которая идет на увеличение поверхностной энергии жидкости. Обладая запасом этой потенциальной энергии, жидкость стремится сократить свою поверхность, так как потенциальная энергия ее всегда стремится к минимуму. Этим объясняется тот факт, что капли дождя, ртути, мыльные пузыри и т.д. стремятся приобрести сферическую форму. Пусть для образования новой поверхности жидкости dS затрачена

работа dA . Величину

$$\sigma = dA/dS \quad (11.1)$$

называют коэффициентом поверхностного натяжения. Величина σ численно равна работе, которую необходимо совершить, чтобы увеличить поверхность жидкости на единицу. Единица измерения σ равна $[\sigma] = \text{Дж}/\text{м}^2 = \text{Н}/\text{м}$.

Поверхностный слой напоминает по своим свойствам упругую растянутую пленку. Возьмем проволочный каркас с подвижным ребром, изображенный на рисунок 11.2, и окунем его в мыльную пленку. При извлечении каркаса из раствора на нем останется слой тончайшей мыльной пленки. Эта пленка находится в напряженном состоянии и, чтобы переместить на некоторое расстояние dx , необходимо приложить некоторую силу \vec{F} . Полная поверхность жидкой пленки (с обеих сторон каркаса) увеличится на величину $dS = 2ldx$. При этом сила совершит работу $dA = \sigma dS = 2\sigma ldx$. С другой стороны, $dA = Fdx$. Из сравнения данных выражений получим $\sigma = F/2l$. Сила F называется *силой поверхностного натяжения*. Коэффициент σ численно равен силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины контура поверхности.

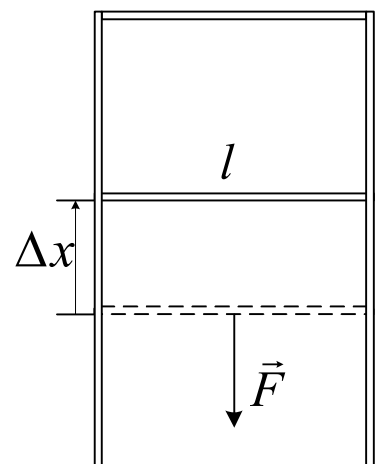


Рисунок 11.2

11.2 ДАВЛЕНИЕ ПОД ИСКРИВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЖИДКОСТИ

Поверхностное натяжение является причиной возникновения давления внутри жидкости. Это связано с тем, что поверхностный слой жидкости, находясь в натянутом состоянии, вызывает добавочное давление в жидкости. Вычислим добавочное давление

для сферической капли. Для этого мысленно расsection сферическую каплю жидкости диаметральной плоскостью на два полушария (рисунок 11.3). Из-за поверхностного натяжения оба полушария притягиваются друг к другу с силой, равной $F = 2\pi R\sigma$. Эта сила прижимает друг к другу оба полушария по поверхности $S = \pi R^2$. При этом возникает дополнительное давление

$$\Delta p = F/S = 2\pi R\sigma/(\pi R^2) = 2\sigma/R. \quad (11.2)$$

Из выражения (11.2) следует, что давление тем больше, чем больше кривизна поверхности жидкости. Для пузырька воздуха в воде радиусом $R = 0,1\text{мм}$ давление, вызванное кривизной поверхности, равно 0,1атм. Это является одной из причин перегрева жидкостей до температур выше температуры кипения. Мелкие предметы, имеющие большую кривизну поверхности (острые углы), облегчают процесс кипения.

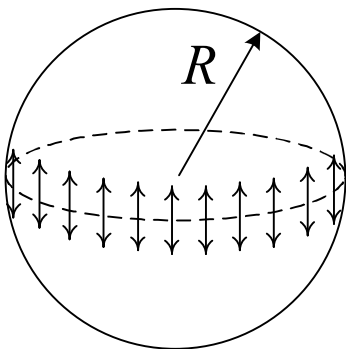


Рисунок 11.3

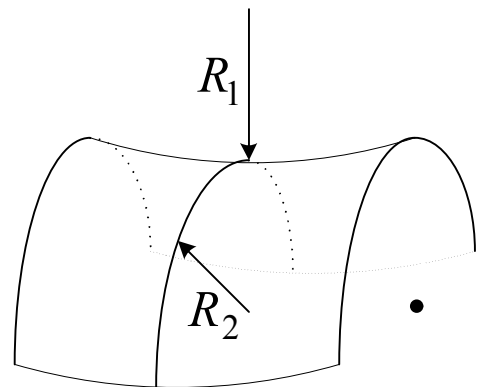


Рисунок 11.4

Если поверхность не сферическая, то кривизну поверхности сферы $1/R$ нужно заменить кривизной данной поверхности, которая определяется как $(1/R_1 + 1/R_2)/2$, где R_1 и R_2 – радиусы двух нормальных к поверхности и взаимно перпендикулярных сечений (рисунок 11.4). Для произвольной кривой поверхности выражение (11.2) запишется в виде

$$\Delta p = \sigma(1/R_1 + 1/R_2). \quad (11.3)$$

Выражение (11.3) называют **формулой Лапласа**. Если поверхность

жидкости вогнутая, то радиус считается отрицательным. В качестве примера рассмотрим две плоские прямоугольные пластинки, между которыми находится слой тонкий жидкости. Эти пластинки трудно оторвать друг от друга, так как при этом по краям пластин образуется вогнутый мениск и в жидкости возникает отрицательное лапласовское давление. Пусть толщина слоя воды равна 0,01мм, $\sigma = 0,074 \text{ Н/м}$, а площадь пластин $S = 100 \text{ см}^2$. Тогда $R_1 = 0,005 \text{ мм}$, $R_2 = \infty$ и по формуле (11.3) получим $\Delta p = 14800 \text{ Н/м}^2$. Для отрыва пластин друг от друга необходимо приложить силу $F = \Delta p S = 148 \text{ Н}$.

11.3 ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

На поверхности твердого тела, также как и в жидкости, существует поверхностное натяжение. Это можно увидеть при его контакте с жидкостью. Рассмотрим каплю жидкости на горизонтальной поверхности твердого тела (рисунок 11.5). Жидкость смачивает твердое тело и **краевой угол** θ (угол между касательными к твердому телу и к поверхности жидкости) является острым. При нанесении капли жидкости, она растекается по твердому телу, и равновесие наступает тогда, когда сумма всех сил поверхностного натяжения на краю капли равна нулю. В проекциях на горизонтальное направление условие равновесия запишется следующим образом:

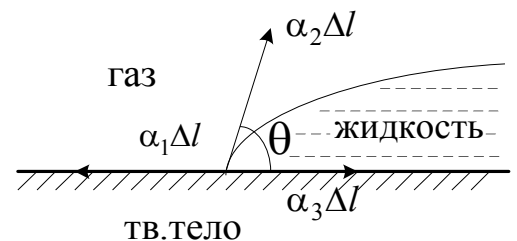


Рисунок 11.5

$$\Delta l \sigma_1 = \Delta l \sigma_2 \cos \theta + \Delta l \sigma_3, \quad (11.4)$$

где Δl – элемент границы жидкость – твердое тело; σ_1 , σ_2 и σ_3 – коэффициенты поверхностного натяжения на границах: “твердое тело – газ”, “жидкость – газ” и “твердое тело – жидкость” соответственно.

Из выражения (11.4) получаем

$$\cos \theta = (\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_2. \quad (11.5)$$

Если $(\sigma_1 - \sigma_3) > \sigma_2$, то условие (11.5) не выполняется. Жидкость неограниченно растекается по поверхности твердого тела. Наблюдается полное смачивание.

Если $(\sigma_3 - \sigma_1) > \sigma_2$, то поверхность жидкости, которая контактирует с твердым телом, стягивается в точку. Наблюдается полное несмачивание.

Если при выполнении условия (11.5) угол θ является острым, то имеет место частичное смачивание (рис. 11.5). Если угол θ является тупым (рисунок 11.6), то имеет место частичное несмачивание.

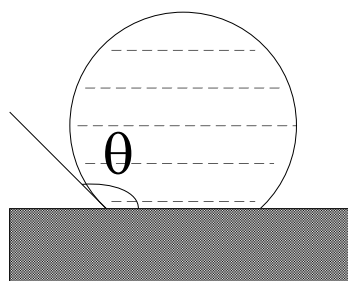


Рисунок 11.6

Несмачивание может привести к интересным явлениям. Например, смазанная жиром иголка и бритвенное лезвие могут держаться на поверхности воды. Это объясняется тем, что поверхность жидкости прогибается под действием веса этих тел, и силы поверхностного натяжения уравнивают вес этих тел. По этой же причине некоторые насекомые могут свободно перемещаться по поверхности воды. Если вода не смачивает мелкое сито, то вода может удерживаться в сите, не проливаясь.

11.4 КАПИЛЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Существование краевого угла приводит к тому, что вблизи стенок наблюдается искривление поверхности жидкости, т.е. мениск. В узкой трубке (капилляре) или узком зазоре между двумя стенками поверхность жидкости также оказывается искривленной. Если жидкость смачивает тело, то мениск имеет вогнутую форму (рисунок 11.7). Если жидкость не смачивает стенки, то мениск имеет выпуклую форму.

Если капилляр погрузить одним концом в жидкость (рисунок 11.7), то под искривленной поверхностью жидкости давление будет меньше, чем давление под плоской поверхностью жидкости, на величину, определяемую выражением (11.2): $\Delta p = 2\sigma/R$, где R – радиус кривизны мениска, σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Это приводит к тому, что жидкость в капилляре поднимется на высоту h . Подъем жидкости будет происходить до тех пор, пока гидростатическое давление ρgh не будет равно давлению Δp , т.е.

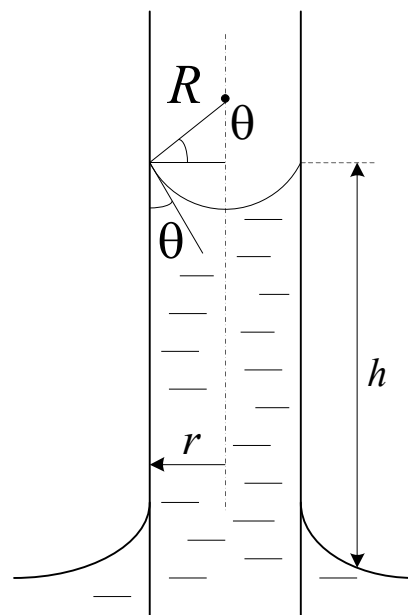


Рисунок 11.7

$$\rho gh = 2\sigma/R, \quad (11.6)$$

где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. Из рис 11.7 видно, что $R = r/\cos\theta$, где θ – краевой угол. Подставив это значение R в (11.6) и выразив h , получим

$$h = 2\sigma \cos\theta / \rho gr. \quad (11.7)$$

Если угол θ острый, то согласно выражению (11.7) имеем $h > 0$, т.е. жидкость, смачивающая твердое тело, поднимется по капилляру. Если жидкость не смачивает твердое тело (угол θ тупой), то столбик жидкости в капилляре опустится ниже уровня остальной части жидкости.

Из выражения (11.7) следует, что, чем меньше радиус, тем выше жидкость поднимется по капилляру. При обычных условиях в капилляре диаметром $d = 10^{-6}$ м уровень воды поднимется на высоту $h \approx 30$ м. Капиллярные явления в значительной степени определяют максимально возможную высоту деревьев, а также перемещение жидкости внутри растений. Капиллярные явления имеют большое значение в природе, технике, сельском хозяйстве.

12. ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

Тела, обладающие упругостью формы, называются твердыми. Твердые тела делятся на **кристаллические** и **аморфные**. Основной особенностью *кристаллических* тел является их **анизотропия**, т.е. зависимость их физических свойств (теплопроводность, электропроводность, упругость и т.д.) от направления. *Аморфные* тела изотропны. Молекулярная структура аморфных тел сходна с молекулярной структурой жидкостей. Однако некоторые аморфные тела, например стекло, имеют столь высокую вязкость, что потеряли способность течь. Аморфное тело не имеет определенной температуры плавления.

На практике большинство твердых материалов представляет собой *поликристаллы*, т.е. множество маленьких кристаллов, соединенных вместе. Чистые кристаллы, называемые монокристаллами, отличаются наличием правильной формы. Например, кристалл поваренной соли имеет форму куба. Углы между гранями кристалла имеют постоянную для данного кристалла величину. Рост кристалла определяется минимумом свободной поверхностной энергии.

12.1 СТРОЕНИЕ КРИСТАЛЛОВ. ТИПЫ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

В идеальном кристалле частицы (атомы, молекулы) расположены упорядоченно. Они колеблются около некоторого положения равновесия. Эти положения центров равновесия частиц называют *узлами* кристаллической решетки. Если через любые два узла решетки провести линию, то на этой линии на одинаковом расстоянии друг от друга будут находиться множество других узлов. Поэтому говорят, что кристаллы имеют *дальний порядок* в расположении частиц.

Существует много видов кристаллических решеток. Для построения многих решеток характерен принцип *плотной упаковки шаров*. Расположим шары (например, бильярдные) в один слой. На рисунке 12.1 этот слой изображен штриховыми линиями. Второй слой шаров (сплошные линии) разместится над ямками первого слоя шаров. Третий слой шаров можно разместить над шарами первого слоя (точка 1 на рисунке 12.1). Следующие слои размещаются аналогично. Если обозначить первый слой буквой *A*, а второй буквой *B*, то последовательность слоев будет иметь вид *ABABAB...*. Получается **гексагональная плотная упаковка**. Если третий слой разместить над ямками первого слоя (точка 2 на рисунке 12.1), обозначим его буквой *C*, а четвертый слой разместить над первым, то получится трехслойная последовательность в виде *ABCABC...*. Это **кубическая гранецентрированная упаковка**. Можно создать четырехслойные (*ABCBA...*, например), пятислойные и т.д. упаковки, что приводит к большому разнообразию кристаллических решеток. В расположении узлов кристаллической решетки можно выделить некоторые элементарные ячейки, из которых, как из кирпичиков, можно сложить весь кристалл, перемещая ячейки параллельно их граням. На рисунке 12.2.a) изображена ячейка гексагональной плотной упаковки, в которой узлы 1,2,3,4 нижнего слоя образуют ромб, а узел 5 второго слоя находится между узлами первого и третьего слоев. На рис.12.2.b) изображена ячейка кубической гранецентрированной упаковки, в которой в центре каждой грани находится узел.

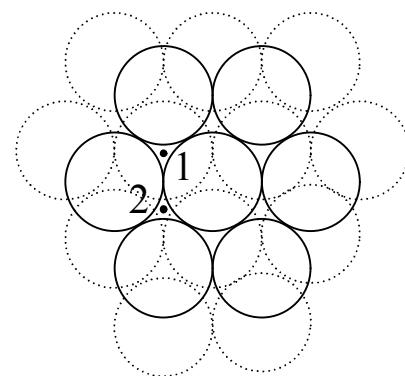


Рисунок 12.1

Из огромного разнообразия кристаллических решеток можно отметить кубическую и кубическую объемно центрированную решетки. Последняя не является плотноупакованной.

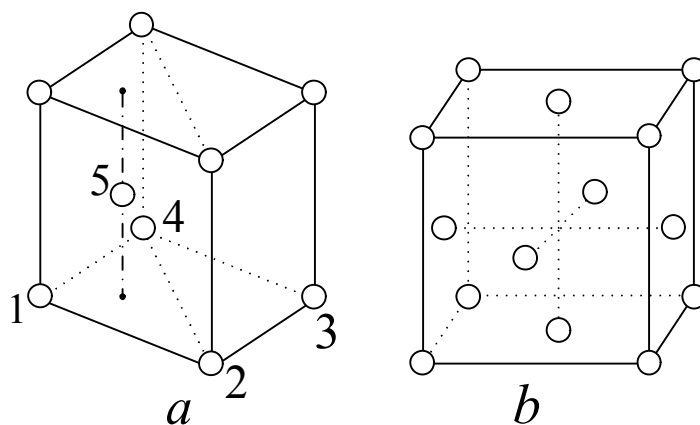


Рисунок 12.2

В зависимости от природы частиц, находящихся в узлах кристаллической решетки, и от характера сил взаимодействия между частицами различают следующие типы кристаллов: ионные, атомные, металлические и молекулярные.

1. *Ионные* кристаллы. В узлах кристаллической решетки помещаются ионы различных знаков. Силы взаимодействия частиц являются в основном электростатическими. Такая связь называется ионной или гетерополярной. Примером такой решетки является решетка поваренной соли.

2. *Атомные* кристаллы. Связь нейтральных атомов, находящихся в узлах кристаллической решетки, называется гомеополярной (или ковалентной). Эта связь осуществляется электронными парами и является очень прочной. Алмаз представляет собой атомы углерода, соединенные такой связью, и является одним из самых твердых материалов.

3. *Металлические* кристаллы. В узлах кристаллической решетки расположены ионы металла, между которыми, подобно молекулам газа, беспорядочно движутся электроны. Электрическое притяжение между ионами и электронами обеспечивает достаточно прочную связь в металлах. Этим объясняются многие полезные свойства металлов.

4. *Молекулярные* кристаллы. В узлах кристаллической решетки находятся ориентированные молекулы, между которыми действуют

силы Ван-дер-Ваальса. Это самая слабая связь в кристаллах. Обычный сухой лед (твердая углекислота) представляет собой молекулярные кристаллы.

Покажем на простом примере, что упорядоченное расположение частиц в кристалле приводит к анизотропии его упругих свойств. Рассмотрим кристалл поваренной соли. На рисунке 12.3 показано сечение кристалла, где кружочки с плюсом соответствуют узлам ионов натрия, а с минусом – узлам ионов хлора. Для некоторой плоскости $a-a$ вблизи каждой ее стороны

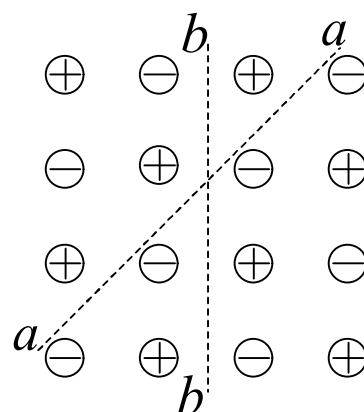


Рисунок 12.3

находятся заряды одного знака, поэтому разорвать кристалл по этой плоскости значительно сложнее, чем по другим. Для плоскости $b-b$ вблизи каждой ее стороны находится одинаковое количество разноименных зарядов, и взаимодействие этих зарядов значительно слабее, чем для плоскости $a-a$. Разорвать кристалл по плоскости $b-b$ существенно легче. Следовательно, механические свойства кристалла должны быть анизотропными.

12.2 ТЕПЛОЕМКОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В твердых телах частицы совершают хаотическое колебательное движение. Каждая частица способна совершать колебания в трех взаимно перпендикулярных направлениях. При каждом таком колебании частица обладает как кинетической, так и потенциальной энергией. Следовательно, каждое такое колебание обладает двумя степенями свободы движения, а полное число степеней свободы движения частицы твердого тела равно 6. При равномерном распределении энергии частиц по степеням свободы движения часть внутренней энергии твердого тела, зависящая от температуры,

согласно (9.2) для одного моля вещества равна $U_\mu = iRT/2$. Отсюда теплоемкость моля равна $C_V = dU_\mu/dT$ или $C_V = iR/2 = 3R$. При нагревании твердых тел расширение их незначительно, поэтому теплоемкость при постоянном объеме незначительно отличается от теплоемкости при постоянном давлении и можно просто говорить о теплоемкости твердого тела

$$C = 3R. \quad (12.1)$$

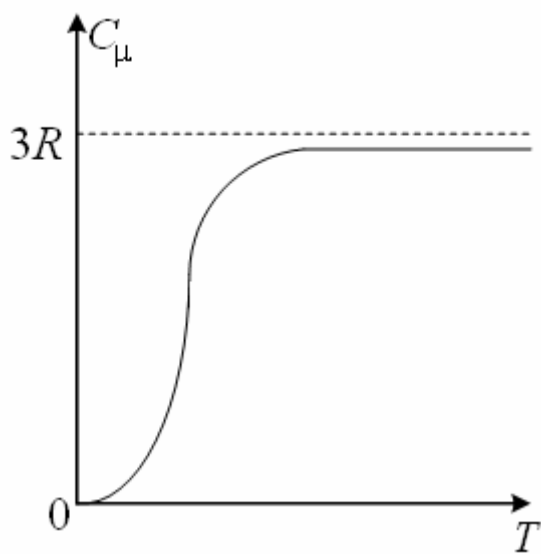


Рисунок 12.4

Полученное соотношение называют **законом Дюлонга – Пти**. Из формулы (12.1) следует, что теплоемкость одного моля любого твердого вещества одинакова и равна $3R$. Этот закон выполняется с довольно хорошим приближением для многих веществ при комнатной температуре. При уменьшении температуры до абсолютного нуля теплоемкость также уменьшается до нуля (рисунок 12.4). Это связано с квантованием энергии колебательного движения и объясняется квантовой теорией.

13. ФАЗОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ И ПРЕВРАЩЕНИЯ

Уравнение Ван-дер-Ваальса позволило описать переход вещества из газообразной фазы в жидкую и наоборот. Такие переходы вещества из одной фазы в другую называют *фазовыми*, например переход из жидкого состояния в твердое.

При переходе вещества из жидкого состояния в газообразное, например при испарении, поверхность жидкости могут покинуть лишь наиболее быстрые молекулы и жидкость при испарении охлаждается. Количество теплоты, которое необходимо сообщить

единице массы вещества, для того чтобы превратить ее в пар, называют **удельной теплотой парообразования**.

Переход вещества из кристаллического состояния в жидкое происходит при строго определенной температуре и также требует затраты тепла, называемого **теплотой плавления**. Это связано с тем, что упорядоченное расположение атомов в кристалле соответствует минимуму потенциальной энергии всех частиц, составляющих кристалл, и минимуму энтропии вещества. Для нарушения порядка в расположении частиц и соответствующего возрастания энтропии необходимо сообщить веществу дополнительное количество теплоты.

13.1 УРАВНЕНИЕ КЛАПЕЙРОНА-КЛАУЗИУСА

Как показывает опыт, температуры кипения и кристаллизации вещества, зависят только от давления. Эту зависимость можно получить в общем виде, воспользовавшись циклом Карно для двухфазной системы. Этот цикл на диаграмме $p-V$ имеет вид, показанный на рисунке 13.1. Изотермический процесс $A-B$ сопровождается фазовым превращением некоторой массы вещества m , например, превращением жидкости в насыщенный пар (давление насыщенного пара $p = \text{const}$). При этом веществу необходимо сообщить количество теплоты $Q = q_{12}m$, где q_{12} – удельная теплота фазового перехода. На участке $B-C$ расширение происходит адиабатически, и температура системы уменьшается на величину ΔT . Процесс $C-D$ есть изотермическое сжатие, а процесс $D-A$ есть адиабатическое сжатие.

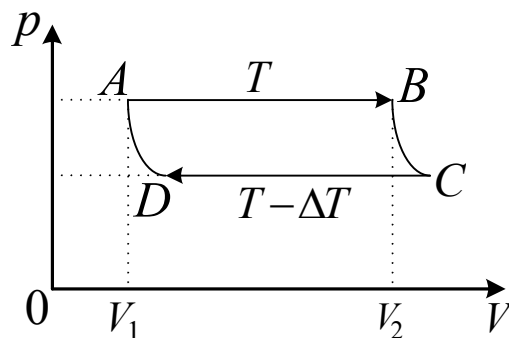


Рисунок 13.1

Работа этого цикла равна его площади, т.е.

$$A \approx \Delta p(V_2 - V_1) = \Delta p m(v_2 - v_1),$$

где v_2 и v_1 – удельные объемы первой и второй фаз, Δp – изменение давления в цикле. Коэффициент полезного действия данного цикла $\eta = A/Q \approx \Delta p(v_2 - v_1)/q_{12}$. С другой стороны, для цикла Карно, согласно (9.21), имеем $\eta = \Delta T/T$. Приравнявая правые части равенств, получим $\Delta p/\Delta T \approx q_{12}/(v_2 - v_1)T$. Совершив предельный переход при $\Delta T \rightarrow 0$, получим строгое равенство

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{(v_2 - v_1)T}. \quad (13.1)$$

Полученное соотношение называют уравнением **Клапейрона-Клаузиуса**. Оно позволяет определить, как изменяется температура фазового перехода в зависимости от давления. Например, при кипении удельный объем возрастает $(v_2 - v_1) > 0$, следовательно, согласно (13.1) $dp/dT > 0$. Это означает, что при увеличении давления температура кипения увеличивается. Проверая степень чистоты жидкости по температуре ее кипения, необходимо учитывать поправку на величину атмосферного давления.

При плавлении льда его удельный объем наоборот уменьшается, следовательно, с увеличением давления температура плавления будет уменьшаться. Это является одной из причин хорошего скольжения конькобежцев по льду, так как при давлении коньков на лед происходит его местное плавление и, следовательно, возникает хорошая водяная смазка.

13.2 ТРОЙНАЯ ТОЧКА. ДИАГРАММА СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

Запах некоторых твердых тел обусловлен их испарением. Испарение твердого вещества носит название **сублимации**. Теплота сублимации соответствует сумме теплоты плавления и теплоты парообразования. Существует обратный процесс конденсации пара в твердое состояние. Многие вещества, например йод, при нормальных

условиях не могут находиться в жидком состоянии и при нагревании сублимируют. Если такое вещество поместить в изолированный вакуумный объем, то возникнет равновесие между насыщенным паром и твердым состоянием вещества. При нагревании вещества сублимация усилится, плотность насыщенного пара и его давление возрастут. На диаграмме $p-T$ точки, изображающей состояние вещества, будут перемещаться по кривой $0-Tr$, называемой кривой *сублимации* (рисунок 13.2). В точке Tr вещество начинает плавиться и при значениях $T = T_{Tr}$ и давлении $p = p_{Tr}$ вещество может находиться одновременно в трех фазах: твердой, жидкой и газообразной. Эта точка называется **тройной точкой**. Она является единственной такой точкой. Например, тройная точка воды считается эталонной и с ее помощью точно определяют значение температуры $T_{Tr} = 0,0075^\circ C$, необходимое для градуировки термометров.

При дальнейшем нагревании вещество будет находиться в жидкой и газообразной фазах. Давление насыщенного пара в зависимости от температуры на рисунке 13.2 изобразится кривой $Tr-K$. Точка K является критической точкой. Кривая $Tr-K$ называется кривой *испарения*. Для подавляющего большинства веществ температура плавления увеличивается с ростом давления. Связь между давлением и температурой плавления изобразится на рисунке 13.2 кривой *плавления* $Tr-P$, начинающейся в тройной точке.

Кривые плавления, испарения и сублимации (рисунке 13.2) разбивают координатную плоскость на три области: твердое тело, жидкость и газ. Каждая точка, лежащая на диаграмме, изображает

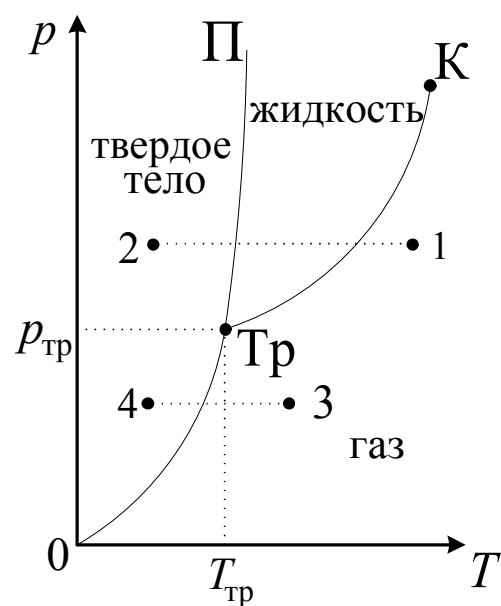


Рисунок 13.2

определенное состояние вещества, поэтому ее называют **диаграммой состояний**. Пусть вещество находится в точке диаграммы 1 и является газом. Если вещество изобарически охлаждать, то процесс изобразится прямой 1–2. Причем вещество пройдет следующую последовательность состояний: газ, жидкость и твердое тело. Если же вещество взять в точке 3 на диаграмме состояний, когда давление $p < p_{\text{Тр}}$, и изобарически охлаждать, то процесс изобразится прямой 3–4, причем последовательность состояний будет иной: газ непосредственно превратится в твердое вещество, минуя жидкую фазу. Отсюда следует важный вывод: *сублимация возможна лишь тогда, когда давление в системе меньше давления тройной точки*. Например, для углекислоты давление тройной точки около 5 атм, поэтому при обычных условиях углекислота не может находиться в жидком состоянии и твердую углекислоту называют сухим льдом.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ЗАКОНЫ

1	$v = \frac{ds}{dt}$	Мгновенная скорость прямолинейного движения
2	$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	Средняя скорость
3	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$	Мгновенное ускорение
4	$V = \frac{s}{t} = const$	Скорость при равномерном движении
5	$v = v_0 \pm at$ $a = const$	Скорость и ускорение при равнопеременном движении
6	$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$ $s = \frac{v^2 - v_0^2}{\pm 2a}$	Пройденный путь при равнопеременном движении
7	$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$	Полное ускорение при криволинейном движении
8	$a_\tau = \frac{dV}{dt}, a_n = \frac{V^2}{R}$	a_τ – тангенциальное ускорение a_n – нормальное ускорение R – радиус кривизны траектории в данной точке
9	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	Угловая скорость при вращательном движении
10	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$	Угловое ускорение
11	$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$	Угловая скорость при равномерном вращательном движении
12	$v = \omega R$ $a_\tau = \varepsilon R, a_n = \omega^2 R$	Связь линейных и угловых величин
13	$p = mv$	Импульс тела

14	$F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt}$	Основной закон динамики (второй закон Ньютона)
15	$A = \int_s F_s ds$	Работа силы F при перемещении s
16	$A = Fs \cos \alpha$	Работа для случая постоянной силы
17	$N = \frac{dA}{dt}$	Мощность
18	$N = \frac{A}{t},$ $N = Fv \cos \alpha$	Постоянная мощность
19	$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$	Закон сохранения импульса для абсолютно упругого удара
20	$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$	Закон сохранения импульса для абсолютно неупругого удара
21	$E_k = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия тела
22	$E_{\text{п}} = mgh$	Потенциальная энергия тела поднятого над Землей
23	$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}$	Потенциальная энергия упруго деформированной пружины
24	$F = -kx$	Закон Гука
25	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$	Закон всемирного тяготения
26	$M = Fl$	Момент силы, l – расстояние от оси вращения до прямой, вдоль которой действует сила
27	$J = mr^2$	Момент инерции материальной точки
28	$J = \int r^2 dm$	Момент инерции твердого тела
29	$J = \frac{1}{2} mR^2$	Момент инерции сплошного однородного цилиндра (диска) относительно оси цилиндра
30	$J = mR^2$	Момент инерции тонкостенного полого цилиндра (обруча) относительно оси обруча

31	$J = \frac{2}{5}mR^2$	Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр
32	$J = \frac{1}{12}ml^2$	Момент инерции однородного стержня длиной l относительно оси, проходящей через центр
33	$J = J_0 + ma^2$	Теорема Штейнера
34	$L = J\omega$	Момент импульса
35	$M = \frac{d(J\omega)}{dt} = J\varepsilon$	Основной закон динамики вращательного движения
36	$E_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}$	Кинетическая энергия вращающегося тела
37	$L_{\text{пр}} = \frac{J}{ma}$	Приведенная длина физического маятника, a – расстояние от центра масс до оси вращения
38	$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$	Период малых колебаний физического маятника
39	$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$	x – смещение точки A – амплитуда ω – циклическая частота φ_0 – начальная фаза
40	$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$	Циклическая частота
41	$F = ma = m\omega^2 x = -kx$	Сила, под действием которой точка совершает гармонические колебания (k – коэффициент возвращающей силы)
42	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Период колебания пружинного маятника (k – жесткость пружины)
43	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	Период колебания математического маятника (l – длина маятника)

44	$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$	Результирующая амплитуда двух одинаково направленных гармонических колебаний ($\Delta\varphi$ – разность фаз)
45	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$	Начальная фаза результирующего колебания
46	$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi$	Уравнение траектории двух взаимно перпендикулярных колебаний
47	$x = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$	Уравнение затухающего колебательного движения
48	$\beta = \frac{r}{2m}$	Коэффициент затухания (r – коэффициент сопротивления)
49	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$	Угловая частота затухающих колебаний
50	$\theta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$	Логарифмический декремент затухания
51	$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$	Резонансная частота вынужденных колебаний
52	$S = A \cos[\omega(t - x/v) + \varphi_0]$	Уравнение плоской волны
53	$\lambda = VT = \frac{V}{\nu}$	Длина волны
54	$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$	Разность фаз колебаний двух точек среды, расстояние между которыми Δx
55	$pV = \frac{m}{\mu} RT$	Уравнение Менделеева-Клапейрона
56	$p = \frac{1}{3} m_0 n \bar{V}_{\text{кв}}^2 = nkT = \frac{2}{3} n \bar{E}_0$	Основное уравнение МКТ
57	$\bar{E}_0 = \frac{i}{2} kT$	Средняя кинетическая энергия движения молекул (i – число степеней свободы)
58	$\bar{V}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$	Средняя квадратичная скорость молекул
59	$C = \mu c$	Связь между молярной C и удельной c теплоемкостями

60	$C_V = \frac{i}{2} R$	Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме
61	$C_p = C_V + R$	Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении
62	$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$	Количество вещества
63	$\bar{\lambda} = \frac{\bar{V}}{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2}$	Средняя длина свободного пробега молекул
64	$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{V} \bar{\lambda}$	Динамическая вязкость
65	$K = \frac{1}{3} C_V \rho \bar{V} \bar{\lambda} = \frac{1}{6} k n \bar{V} \bar{\lambda}$	Коэффициент теплопроводности
66	$D = \frac{1}{3} \bar{V} \bar{\lambda}$	Коэффициент диффузии
67	$\delta Q = dU + \delta A$	Первое начало термодинамики
68	$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT$	Внутренняя энергия идеального газа
69	$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$	Работа газа (общая формула)
70	$A = p(V_2 - V_1)$	Работа газа при изобарном процессе
71	$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$	Работа газа при изотермическом процессе
72	$A = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2);$ $A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]$	Работа газа при адиабатическом процессе
73	$pV^\gamma = const;$ $TV^{\gamma - 1} = const;$ $T^\gamma p^{\gamma - 1} = const$	Уравнения адиабаты (уравнения Пуассона)

74	$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$	Показатель адиабаты (коэффициент Пуассона)
75	$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$	Термический КПД цикла
76	$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$	КПД идеального цикла (цикла Карно)
77	$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}$	Изменение энтропии (A и B – пределы интегрирования, соответствующие начальному и конечному состоянию системы)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Детлаф А.А. Курс физики: Учеб.пособие/ А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – 4-е изд.,испр.– М.: Academia, 2003. 720 с. – ISBN 5-7695-1040-4
2. Савельев И.В. Курс общей физики: [Учеб.пособие]:В 5 кн.– М.: Астрель:АСТ. Кн.1: Механика.- 2005.- 336 с. – ISBN 5-17-002963-2
3. Савельев И.В. Курс общей физики: [Учеб.пособие]:В 5 кн.– М.: Астрель:АСТ Кн.3: Молекулярная физика и термодинамика. 2005 – 208 с. – ISBN 5-17-004585-9
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики: Учеб.пособие.– 4-е изд.,стер.– М.: Физматлит; МФТИ. Т.1: Механика. 2002– 560 с. – ISBN 5-9221-0225-7
5. Сивухин Д.В. Общий курс физики: Учеб.пособие. – 4-е изд., стер.– М.: Физматлит;МФТИ. Т.2: Термодинамика и молекулярная физика. 2003– 575 с.– ISBN 5-9221-0226-5
6. Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб.пособие.– 11-е изд.,стер.– М.: Academia, 2006 – 558 с. – ISBN 5-7695-2629-7
7. Стрелков С.П. Механика. – 4-е изд., С-Петербург, Лань, 2005–560с.– ISBN 5-8114-0622-3
8. Киттель Ч. Найт У. Рудерман М. Берклевский курс физики. Том 1. Механика. С-Петербург, Лань, 2005–480с.–ISBN 5-8114-0644-4
9. Ландау Л.Д., А.И.Ахиезер, Е.М.Лифшиц. - Курс общей физики. Том 1. Механика и молекулярная физика. М.: Наука, 1969 – 400с.
10. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики. Том 1. Механика. Теплота. Молекулярная физика М.:Физматлит. 2010-612с. ISBN: 978-5-9221-1256-7

Учебное издание

Составители

ШАЦКИЙ Александр Владимирович

ДОВБНЯ Людмила Александровна

Курс физики. Механика. Молекулярная физика и термодинамика

Учебное пособие

Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
«Самарский государственный аэрокосмический
университет им. С.П. Королева»
443086 г. Самара, ул. Московское шоссе, 34.