#### 3.2 РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Если два шара, имеющие одинаковые импульсы и летящие абсолютно столкнуться навстречу друг другу, неупруго, движение "исчезнет". Опыт механическое показывает, ЧТО количество тепла, которое выделится при этом столкновении, не будет пропорционально импульсу шаров. Следовательно, должна быть иная мера механического движения, которая необходима там, где происходит превращение механического движения в другие виды движения материи. Такой мерой является энергия. Энергия – количественная мера движения материи во всех формах этого движения. С различными формами движения материи связывают различные энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. Так как в природе непрерывно происходят процессы, в которых осуществляется переход одной формы энергии в другую, то Р. Декарт И М.В. Ломоносов выдвигали "неуничтожимости" движения материи и следовательно энергии. Но только в 19 веке закон сохранения энергии был признан всеми учеными в качестве основного закона природы. Для того чтобы рассмотреть энергию механического движения, необходимо остановиться на такой важной физической величине, как работа. Работа служит мерой количества переданной энергии.

Пусть в направлении действия силы постоянной F тело получает перемещение  $\vec{s}$ . Как показывает опыт, pa6oma этой силы определяется по формуле:  $A = F \cdot s$ . В системе СИ единицей работы является  $\partial жoyль$ :  $1Дж = 1H\cdot 1$ м. В системе СГС единица работы называется эргом: 1эрг = 1дина $\cdot 1$ см. Таким образом,  $1Дж = 10^7$  эрг.

Пусть угол  $\alpha$  между векторами силы  $\overrightarrow{F}$  и перемещением  $\overrightarrow{s}$  постоянный, траектория линейная и сила  $\overrightarrow{F} = const$ . В этом случае работу определяют по формуле:  $A = F \cdot s \cos \alpha$ . Если угол  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , то

работа положительная (A>0), если угол  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ , то работа отрицательная (A<0). Понятие работы в механике отличается от обыденного понятия о мускульной работе организма. Например, если человек перенесет груз вдоль горизонтальной поверхности, то он затратит определенные усилия, преодолевая силу тяжести, но механическая работа при этом будет равна нулю, так как  $\cos \alpha = 0$ . Механическая работа идет на изменение энергии тела, а при горизонтальном перемещении механическая энергия тела не изменяется.

В более общем случае работа определяется в виде скалярного произведения векторов  $A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s}$ . Скалярным произведением двух векторов называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

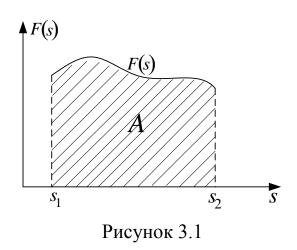
В общем случае при движении по произвольной траектории, когда сила и угол  $\alpha$  изменяются, находят элементарную работу dA на каждом участке ds, считая, что в пределах перемещения ds величины  $\overrightarrow{F}$  и  $\alpha$  являются постоянными:

$$dA = F \cdot ds \cos \alpha \tag{3.3}$$

Суммируя все эти работы, получают работу на всём участке траектории движения:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds \cos \alpha = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds,$$
 (3.4)

где  $F_s$  — проекция силы  $\vec{F}$  на направление перемещения  $d\vec{s}$ , Эта сумма бесконечно большого числа бесконечно малых величин называется интегралом. Величина  $F_s$  называется подынтегральной функцией, ds — дифференциалом,  $s_1$  и  $s_2$  — пределы интегрирования.



Для вычисления работы необходимо знать величину  $F_s$  вдоль всего пути. Графически, работа — это площадь под графиком функции  $F_s(s)$ . На рисунке 3.1 заштрихованная область численно равна работе силы F(s) на участке  $s_1 - s_2$ .

#### 3.3 КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Всякое движущееся тело имеет запас энергии, которую называют кинетической. Величину кинетической энергии тела можно определить по величине работы, которую необходимо совершить, чтобы вызвать данное движение тела. Пусть на тело массой m действует результирующая сила  $\vec{F}$  и изменяет скорость его движение от  $\vec{v}_0$  до  $\vec{v}$ .

По второму закону Ньютона

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

умножим обе части равенства на  $d\vec{s}$  – приращение пути пройденного телом:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{s} = \vec{F}d\vec{s} = dA. \tag{3.5}$$

Учтем, что  $\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}$  и перепишем уравнение (3.5) в виде:

$$\vec{mvdv} = \vec{F} d\vec{s} = dA. \tag{3.6}$$

Работа силы на всем пути, которое прошло тело за время возрастания скорости от  $\stackrel{\rightarrow}{v_0}$  до  $\stackrel{\rightarrow}{v}$  пошла на увеличение кинетической энергии

$$A = \Delta E_{\kappa} \,. \tag{3.7}$$

Учтем, что направления  $\overrightarrow{F}$  и  $d\overrightarrow{s}$  совпадают. После интегрирования получим:

$$A = \int dA = \int_{v_0}^{v} mv dv = m \int_{v_0}^{v} v dv = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

таким образом, для тела массой m, движущегося со скоростью  $\upsilon$  кинетическая энергия равна

$$E_{\rm k} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. (3.8)$$

Из равенства (3.6) следует, что работа результирующей всех сил, действующих на тело, идет на увеличение его кинетической энергии.

## 3.4 ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

В механике тела могут обладать запасом потенциальной энергии, связанной с взаимодействием тел между собой. Пусть в однородном поле тяготения на тело массой m действует сила тяжести mg, где  $g = 9.81 \text{ m/c}^2$  ускорение, приобретаемое в этом поле (рисунок 3.2).

Если переместить тело с высоты  $h_1$  до высоты  $h_2$  по траектории 1-a-2, то работа силы mg будет равна

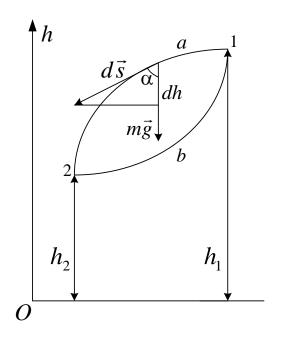


Рисунок 3.2

$$A = \int_{1}^{2} F \cos \alpha \cdot ds = -\int_{h_{1}}^{h_{2}} mgdh = mgh_{1} - mgh_{2},$$

где изменение высоты dh связано с перемещением ds по формуле  $dh = -ds\cos\alpha$ , знак минус учитывает, что проекция ds на h

отрицательная. В полученном выражении работа зависит только от начального и конечного положения тела и не зависит от траектории пути. Например, при перемещении частицы по траектории 1-b-2будет совершена такая же работа. Силы, обладающие таким свойством, называются консервативными, a поле ЭТИХ СИЛ потенциальным. Из независимости работы консервативных сил от пути следует, что работа по замкнутой траектории этих сил равна Действительно, совершив работу по замкнутому пути 1-a-2-b-1, получим, что работы на участках 1-a-2 и 2-b-1равны по величине и противоположны по знаку, следовательно, суммарная работа на этом замкнутом пути будет равна нулю.

В случае, когда работа сил поля не зависит от пути, а зависит только от начального и конечного положения частицы, каждой точке поля можно сопоставить значение некоторой функции U(x, y, z). Разность значений этой функции определяет работу сил при перемещении частицы из первой точки во вторую:

$$A = U_1 - U_2 = -\Delta U. (3.9)$$

Эта функция называется **потенциальной энергией** частицы в силовом поле. Например, работа по перемещению частицы в однородном поле тяготения равна  $A = mgh_1 - mgh_2$ , а потенциальная энергия этого силового поля U = mgh.

Рассмотрим работу по отклонению частицы в упругом силовом поле. Например, работу, совершаемую растянутой пружиной, действующей на частицу с силой F = -kx, где k -коэффициент упругости пружины, x -её удлинение, знак минус показывает, что направление удлинения и силы противоположны. Воспользовавшись формулой (3.4) для работы силы упругости при удлинении пружины от  $x_1$  до  $x_2$  получим:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}.$$
 (3.10)

Сравнивая полученное выражение с формулой (3.9), запишем для потенциальной энергии частицы в упругом силовом поле следующее

выражение:

$$U = \frac{kx^2}{2} \tag{3.11}$$

# 3.5 СВЯЗЬ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ С КОНСЕРВАТИВНОЙ СИЛОЙ

Рассмотрим элементарное перемещение частицы  $d\vec{s}$  в силовом поле. Работа поля по перемещению частицы равна  $dA = F_s \cdot ds$ , где  $F_s$  проекция силы  $\vec{F}$  на направление перемещения  $d\vec{s}$ . Согласно формуле (3.9) эта работа равна изменению потенциальной энергии, взятой с обратным знаком dA = -dU. Приравнивая правые части равенств, получим:  $dU = -F_s ds$  или

$$F_s = -\frac{dU}{ds}. ag{3.12}$$

Выражение  $\frac{dU}{ds}$  называют производной от U по направлению.

Рассмотрим вектор силы  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ , где проекции этой силы  $F_x, F_y, F_z$ , согласно соотношению (3.12) определяются по формулам:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Символ  $\frac{\partial}{\partial x}$  означает частную производную, т.е. производная по координате x вычисляется при постоянных y и z. Подставляя составляющие силы получим

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Введем векторный оператор  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ , который называется

оператором Гамильтона. Градиентом скалярной функции U(x,y,z) называется вектор с компонентами  $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ . Этот вектор

обозначается  $\overrightarrow{grad}\,U$  или  $\vec{\nabla} U$ . В связи с вышесказанным, сила будет равна градиенту потенциальной энергии частицы в данной точке, взятому со знаком "минус":

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad} U = -\vec{\nabla} U. \tag{3.13}$$

Данное соотношение позволяет определить силу  $\vec{F}$  по заданной потенциальной энергии U(x,y,z).

### 3.6 ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из n частиц, между которыми действуют только консервативные силы. Эти силы могут иметь гравитационную или электромагнитную природу. В подразделе 3.3 было показано, что работа силы, действующей на одну частицу со стороны другой, равна изменению ее кинетической энергии. Элементарная работа  $dA_i$  результирующей всех сил, действующих на каждую i-тую частицу, равна суммарной работе этих сил, а так же равна изменению кинетической энергии частицы  $dE_i$ , т.е.  $dA_i = dE_i$ , где i = 1,2,3...n. Складывая значения  $dA_i$  для всех частиц от i = 1 до i = n, получим

$$dA = dA_1 + dA_2 + ... + dA_n = dE_1 + dE_2 + ... + dE_n = dE_k$$

т.е работа всех внутренних сил dA равна изменению кинетической энергии системы  $dE_k$ :

$$dA = dE_k. (3.14)$$

С другой стороны, в подразделе 3.4 (формула 3.9) было показано, что элементарная работа консервативной силы над частицей равна убыли её потенциальной энергии в силовом поле взаимодействия с другими частицами, т.е.  $dA_i = -dU_i$ . Данное равенство можно

обобщить для работы dA, которую совершают внутренние (консервативные) силы системы над всеми её частицами, т.е.

$$dA = -dU, (3.15)$$

где dU – изменение потенциальной энергии всей замкнутой системы.

Из равенств (3.14) и (3.15) получаем  $dE_k = -dU$  или  $dE_k + dU = 0$ . Отсюда следует, что  $d(E_k + U) = 0$  и  $E_k + U = const$ . Сумму кинетической и потенциальной энергии системы называют полной механической энергией

$$E_k + U = const. (3.16)$$

Равенство (3.16) представляет собой закон сохранения механической энергии: полная механическая энергия замкнутой системы тел остается величиной постоянной, если силы, действующие в системе являются консервативными.

Следует заметить, замкнутой если В системе кроме консервативных сил действуют также неконсервативные например силы трения, то полная механическая энергия системы не сохраняется. Неконсервативные силы превращают механическую энергию в другие виды, например, сила трения – во внутреннюю энергию системы. Однако в целом энергия не исчезает, она переходит другую. При одной формы движения в ЭТОМ справедлив следующий закон сохранения, подтвержденный многовековым опытом человечества: энергия не уничтожается и не создается, она переходит из одной формы движения в другую.

# 3.7 ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ЯВЛЕНИЯ УДАРА

## 3.7.1 АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ УДАР

Ударом называют внезапное изменение состояния движения тел вследствие взаимодействия его с другим телом. Во время удара тела

деформируются. Кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию деформации. Это первая фаза соударения. Если деформация упругая, второй фазе соударения энергия упругой деформации перейдет обратно В кинетическую полностью взаимодействующих тел. Такой удар называется абсолютно упругим. Силы упругой деформации достигают больших значений и за короткий промежуток времени удара могут сильно импульсы соударяющихся тел, а иногда даже разрушить тела. В существует. абсолютно упругого удара не относительной кинетической энергии удара переходит в тепло и пластическую деформацию. Однако, многие соударения считать близкими к абсолютно упругому удару.

Рассмотрим прямой центральный удар двух упругих шаров с массами  $m_1$  и  $m_2$ , при котором скорости шаров  $\vec{\upsilon}_1$  и  $\vec{\upsilon}_2$  направлены вдоль прямой, проходящей через их центры. Силы деформации обычно во много раз превышают другие силы, действующие на шары, поэтому шары можно рассматривать как замкнутую систему и применить к ним законы сохранения энергии и импульса:

$$\begin{cases}
\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \\
m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2
\end{cases} ,$$
(3.17)

где  $u_1$  и  $u_2$  — скорости первого и второго шаров после удара. Решим систему и найдем скорости шаров после удара. Перенесем слагаемые с индексом 1 в левую часть, а с индексом 2 — в правую, получим:

$$\begin{cases}
 m_1 \left( \upsilon_1^2 - u_1^2 \right) = m_2 \left( \upsilon_2^2 - u_2^2 \right) \\
 m_1 \left( \vec{\upsilon}_1 - \vec{u}_1 \right) = m_2 \left( \vec{\upsilon}_2 - \vec{u}_2 \right)
\end{cases}$$
(3.18)

разделив равенства (3.18) друг на друга и учитывая что  $\upsilon^2 - u^2 = (\upsilon + u)(\upsilon - u)$  получим

$$\vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{v}_2 + \vec{u}_2. \tag{3.19}$$

Из уравнений (3.18) и (3.19) находим неизвестные  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ :

$$\vec{u}_{1} = \frac{2m_{2}\vec{v}_{2} + (m_{1} - m_{2})\vec{v}_{1}}{m_{1} + m_{2}}$$

$$\vec{u}_{2} = \frac{2m_{1}\vec{v}_{1} + (m_{2} - m_{1})\vec{v}_{2}}{m_{2} + m_{1}}.$$
(3.20)

Рассмотрим несколько частных случаев.

- 1. Пусть массы шаров равны:  $m_1 = m_2$  Из уравнений (3.20) в этом случае получаем  $\vec{u}_1 = \vec{v}_2$  и  $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$ , т.е. после удара шары обменялись скоростями, а значит и кинетическими энергиями. Полученный результат важен для понимания процесса энергиями молекул при тепловом движении.
- 2. Пусть  $m_1 << m_2$ , т.е. масса второго тела на много больше чем первого. Этот случай реализуется при соударении молекул с движущимся поршнем в различных тепловых двигателях. Из формул (3.20) с учетом того, что  $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$  поучим:  $\vec{u}_1 = 2\vec{\upsilon}_2 \vec{\upsilon}_1$  и  $\vec{u}_2 = \vec{\upsilon}_2$ , те.

Скорость движения поршня при соударении не изменится. Если поршень движется навстречу молекуле, то  $u_1 = -(2\upsilon_2 + \upsilon_1)$ , это значит, что скорость молекулы изменить направление на противоположное и увеличится на двойную скорость поршня. Следовательно, когда поршень сжимает газ, скорость ударяющихся о него молекул возрастает, увеличивается их кинетическая энергия и повышается температура газа. Наоборот, при расширении газа его температура понижается.

# 3.7.2 АБСОЛЮТНО НЕУПРУГИЙ УДАР

В отличие от упругого удара для некоторых соударений вся относительная энергия кинетическая уходит на преодоление Такой удар деформации. абсолютно сопротивления называют В неупругим. ЭТОМ случае процесс удара заканчивается взаимодействием тел и после удара оба тела будут двигаться с одинаковой скоростью  $\vec{u}$ . Пусть массы сталкивающихся шаров при прямом центральном неупругом ударе равны  $m_1$  и  $m_2$ , а их скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . По закону сохранения импульса  $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{u}$ . Отсюда

$$\vec{u} = \frac{\vec{m_1}\vec{v_1} + \vec{m_2}\vec{v_2}}{\vec{m_2} + \vec{m_1}}.$$
 (3.21)

Для неупругого удара закон сохранения механической энергии не выполняется, так как при этом ударе происходит работа деформации тел  $A_{\rm д}$ , за счет которой происходит переход относительной кинетической энергии во внутреннюю энергию, например в тепло. Работа деформации шаров будет равна разности кинетической энергии шаров до и после удара:

$$A_{\rm M} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}.$$
 (3.22)

Рассмотрим частные случаи.

1. Второе тело неподвижно:  $\upsilon_2 = 0$ . Подставив в формулу (3.22) выражение для u (3.21) получим:

$$A_{\rm m} = \frac{m_1 \nu_1^2}{2} \frac{1}{\left(m_1/m_2 + 1\right)}. (3.23)$$

2. Масса второго тела велика:  $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$ . Из (3.23) получим

 $A_{\rm д} = \frac{m_{\rm l} v_{\rm l}^2}{2}$ , т.е. вся кинетическая энергия удара идет на работу деформации тел. Этот результат важен для практических применений, например, при ковке необходимо, чтобы масса наковальни бала значительно больше массы молота.

3. Масса второго тела значительно меньше массы первого:  $\frac{m_1}{m_2} \approx \infty$ . Из равенства (3.23) получим  $A_{\rm д}=0$ . Это результат мы наблюдаем, например, при забивании гвоздей. Если масса молотка

значительно превышает массу гвоздя, то деформация шляпки гвоздя минимальна и вся энергия удара идет на полезную работу по вбиванию гвоздя. Наоборот, когда ставят заклепки, то выбирают молоток достаточно малой массы, чтобы увеличить работу по деформации головки.

#### 3.8 ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

В механической системе, кроме импульса и энергии, сохраняется ещё одна величина, называемая моментом импульса системы тел. Для материальной точки, моментом импульса относительно некоторой

точки О называется вектор L, равный векторному произведению радиуса-вектора материальной точки  $\vec{r}$ , проведенного от точки О до частицы (рисунок 3.3), на ее импульс  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Получим

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} \vec{r} & \vec{p} \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Рисунок 3.3

Вектор  $\vec{L}$  является аксиальным вектором, направление которого определяется по *правилу правого винта*: если вращать винт от направления вектора  $\vec{r}$  к направлению вектора  $\vec{p}$ , то направление поступательного движения винта совпадет с направлением вектора  $\vec{L}$ . Модуль вектора  $\vec{L}$  равен  $L=pr\sin\alpha$ , где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{r}$ .

Если дана механическая система из n частиц, то момент импульса системы  $\vec{L}$  равен векторной сумме моментов импульсов всех её частиц  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_n$ .

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из n частиц. Пусть на i-тую частицу системы действуют внутренние силы со стороны других частиц, равные  $\vec{F}_{i1}, \vec{F}_{i2}, ... \vec{F}_{in}$ . Применим к i-той частице

второй закон Ньютона, записанный в обобщенной форме:

$$\frac{dp_{i}}{dt} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{in}, \qquad (3.25)$$

где  $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$  – импульс i – той частицы. Умножая векторно обе части равенства (3.25) на радиус-вектор  $\vec{r}_i$ , проведенный к i – той частице из начала координат, получим:

$$\left[\vec{r}_{i} \frac{d\vec{p}_{i}}{dt}\right] = \left[\vec{r}_{i} \vec{F}_{i1}\right] + \left[\vec{r}_{i} \vec{F}_{i2}\right] + \dots + \left[\vec{r}_{i} \vec{F}_{in}\right].$$
(3.26)

Используя правило нахождения производных от векторного произведения, найдем  $\frac{d\vec{r}_i\vec{p}_i}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}\vec{p}_i\right] + \left[\vec{r}_i\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = \frac{d\vec{L}}{dt}$ . Слагаемое

$$\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}\stackrel{\rightarrow}{p}_i\right] = 0$$
, так как векторы  $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \stackrel{\rightarrow}{\upsilon}_i$  и  $\stackrel{\rightarrow}{p}_i$  параллельны и синус угла

между ними равен нулю. Учитывая это, запишем равенство (3.26) в виде

$$\left[\frac{d\vec{L}_i}{dt}\right] = \left[\vec{r}_i \vec{F}_{i1}\right] + \left[\vec{r}_i \vec{F}_{i2}\right] + \dots + \left[\vec{r}_i \vec{F}_{in}\right].$$
(3.27)

Запишем равенство (3.27) для каждой частицы системы и просуммируем полученные выражения. Тогда в правой части такой суммы по третьему закону Ньютона для каждой силы  $\vec{F}_{ik}$  найдется сила  $\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}$ . В этом случае, соответствующие величины сила  $\begin{bmatrix} \vec{r}_i \vec{F}_{ki} \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} \vec{r}_i \vec{F}_{ik} \end{bmatrix}$  попарно уничтожаются и вся сумма в правой части будет равна нулю. Следовательно, можно записать  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} + ... + \frac{d\vec{L}_n}{dt} = 0$ . Заменяя сумму производных

производной суммы, получим  $\frac{d(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_n)}{dt} = 0$  или

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_n = const$$
 (3.28)

Равенство (3.28) представляет собой закон сохранения момента

# импульса: **момент импульса замкнутой системы материальных** точек остается постоянным во времени.

Применим закон сохранения момента импульса для анализа движения комет. Траектория движения комет представляет собой сильно вытянутый эллипс, в одном из фокусов которого находится солнце. Для кометы модуль момента импульса равен  $L = m\upsilon r \sin \alpha = const$ , где m — масса кометы,  $\upsilon$  — её скорость, r — радиус-вектор, проведенный от солнца к комете,  $\alpha$  — угол между векторами  $\upsilon$  и r. Легко видеть, что чем ближе комета к солнцу, т.е. чем меньше r, тем больше её скорость. Поэтому, улетев от солнца, комета движется с достаточно малой скоростью и возвращается обратно через большой промежуток времени.

Заканчивая раздел 3 отметим, что для замкнутых систем имеют место три закона сохранения: закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса. Эти законы сохранения непосредственно связаны с основными свойствами пространства и времени. В основе закона сохранения энергии лежит однородность времени, т.е. равнозначность всех моментов времени. В основе закона сохранения импульса лежит однородность пространства, т.е. одинаковость свойств пространства во всех точках. Наконец, в основе закона сохранения момента импульса лежит изотропность пространства, т.е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям.