

1.3 БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Давно известно, что давление газа над поверхностью Земли уменьшается с высотой. Атмосферное давление на некоторой высоте h обусловлено весом вышележащих слоев воздуха. Пусть на высоте h давление равно p . Тогда на высоте $h + dh$ давление будет равно $p + dp$ (рисунок 1.3). Разность давлений $dp = dF/S$, где $dF = \rho S g dh$ есть вес столба воздуха в объеме $S dh$, S – площадь основания цилиндра, ρ – плотность воздуха, g – ускорение свободного падения. Отсюда получим

$$dp = -\rho g dh \quad (1.11)$$

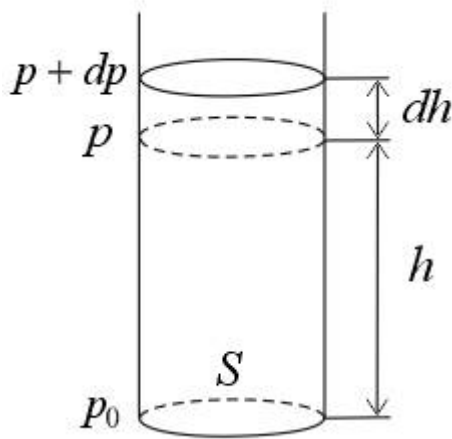


Рисунок 1.3

Знак “–” показывает, что давление убывает с высотой. В этом выражении кроме p и h есть еще одна переменная $\rho = m \cdot n$, где m – масса одной молекулы, n – концентрация молекул. Подставляя сюда выражение для n из формулы (1.7), получим $\rho = mp/(kT)$. Подставляя это выражение в формулу (1.11), получим

$$dp/p = -mg dh/(kT). \quad (1.12)$$

Получили дифференциальное уравнение для p как функции от h . Положим $T = \text{const}$. Суммируя все dp/p в пределах от p_0 до p , при соответствующем суммировании правой части, когда высота изменяется от 0 до h , приходим к определенным интегралам:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^h \frac{mg dh}{kT}.$$

После интегрирования получим $\ln(p/p_0) = -mgh/(kT)$. Потенцируя, получим

$$p = p_0 \exp[-mgh/(kT)]. \quad (1.13)$$

Эта формула характеризует зависимость давления от высоты, и поэтому называется **барометрической**. Приборы, принцип действия которых основан на этой формуле, позволяют измерять высоту по давлению, которое существует на данной высоте. Эти приборы называются альтиметрами. Их применяют, например, в авиации.

В показатель экспоненты (1.13) входит масса молекулы. Следовательно, концентрация более тяжелых молекул будет с высотой убывать быстрее. Поэтому на больших высотах уменьшается процентное содержание кислорода по сравнению с азотом. Летчики, летающие на очень больших высотах, часто пользуются кислородными масками. Спад концентрации молекул с высотой зависит также от g (от массы планеты). Чем меньше g , тем дальше от планеты уходит газ и в конце концов ее покидает. Поэтому на малых планетах, например на Луне, атмосферы нет. На планетах с большим g , например на Юпитере, где температура атмосферы близка к абсолютному нулю, молекулы атмосферы расположены практически слоем, напоминающим земной океан.

Барометрическая формула является частным случаем распределения Больцмана. Согласно формуле (1.7) давление пропорционально концентрации молекул n . Поэтому формулу (1.13) можно представить в следующем виде

$$n = n_0 \exp[- mgh/(kT)], \quad (1.14)$$

где n_0 – концентрация молекул при $h = 0$. На разной высоте молекула обладает различным запасом потенциальной энергии $E_{\text{г}} = mgh$. Вводя $E_{\text{г}}$ в формулу (1.14), получим

$$n = n_0 \exp[- E_{\text{г}} / kT]. \quad (1.15)$$

Больцман показал, что распределение (1.15) справедливо не только в поле земного тяготения, но и в любом потенциальном поле любых сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в тепловом движении. В соответствии с этим распределение (1.15) называют **распределением Больцмана** (по имени выдающегося австрийского физика, получившего ее в 1896 г.). Центробежное потенциальное поле сил, намного превышающих силы земного притяжения, возникает в центрифугах. Распределение (1.15) позволяет рассчитать распределение частиц в этом поле и затем провести оптимально разделение по слоям изотопов различных элементов, мельчайших шлифпорошков и т.д.