САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Теория вероятностей и случайных процессов

Лекция 1-2

Пространство элементарных событий. Случайные события и операции над ними. Классическое, геометрическое, статистическое и аксиоматическое определения вероятности. Свойства вероятности

Зайчиковой Надежды Анатольевны
к.ф.-м. н., доцента кафедры ПМиФ
zajna@yandex.ru

Самара, 2024


Ставки
сделаны,
господа!

Что могло бы быть эпиграфом

- «Кто ничем не рискует, тот ничего не имеет»
- «Нет дела без риска»
- «В жизни нет гарантий, существуют одни вероятности». Том Клэнси
- «Жизнь состоит из вероятностей». Из сериала «Готэм»
- «Вероятное нам всегда кажется невероятным». Эрих Мария Ремарк, из книги «Возлюби ближнего своего»
- «Возможность» — ещё не значит «вероятность». Возможно, что завтра солнце взойдёт на западе, но это не значит — вероятно. Рик Янси, из книги «Ученик монстролога»
- «Низкая вероятность не означает нулевую». Из «Один на вылет»
- «Оптимизм, вероятно, лучшее оружие, каким располагает человечество. Без него мы бы никогда не решились совершать невозможное, которое — вопреки всем вероятностям — оказывается возможным». Брайан Герберт, Кевин Дж, из книги «Андерсон. Песчаные черви Дюны»

Что могло бы быть эпиграфом

- Экклезиаст, 9.11 ". . . не проворным достается успешный бег, не храбрым - победа, не мудрым - хлеб, и не у разумных богатство, и не искусным - благорасположение, но время и случай для всех их".
- Т. Гоббс (1588 - 1679 гг.) "Все случайные явления имеют свои необходимые причины, но называются случайными по отношению к другим событиям, от которых они не зависят".
- Д. Юм (1711 - 1776 гг.) "Случайность сама по себе не есть нечто реальное, а является лишь отрицанием причины. Случайность существует лишь только в суждении, но не в самих вещах."
- К.А. Гельвеций (1715 - 1771 гг.) ". . . случай, т.е. бесконечное множество событий, причину и сцепление которых мы не можем указать вследствие незнания их".
- И. Кант (1724 - 1804 гг.) Случайное в единичном, тем не менее, подчинено правилу в общем.

Литература

Основная:

1. *Коломиец, Э. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Конспект лекций [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие : [по направлению 010400.62]. - Самара, 2011. - on-line*
2. *Коломиец, Э. И. Сборник задач по теории вероятностей [Электронный ресурс] : [учеб. пособие для вузов по специальности и направлению "Прикладная математика и информатика. - Самара.: Изд-во СГАУ, 2006. - on-line*
3. *Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособие для втузов. - М.: Высш. шк., 2007. - 479 с.*
4. *Храмов, А. Г. Теория случайных процессов. Конспект лекций [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие. - Самара, 2011. - on-line*

Литература

Дополнительная:

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учеб. пособие для бакалавров : электрон. копия. - М..: Юрайт, 2014. - on-line

2. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей [Текст] : [учеб. пособие для втузов]. - М..: КНОРУС, 2010. - 493 с.

3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей [Текст] : учеб. для вузов. - М..: Высш. шк., 1999. - 575 с.

4. Прохоров, С. А. Аппроксимативный анализ случайных процессов [Электронный ресурс]. - [Уральск].: СГАУ, 2001. - on-line

Литература

5. Ширяев, А. Н. Вероятность-1: Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы : учебник : в 2 книгах / А. Н. Ширяев. – Изд. 4-е, перераб. и доп. – Москва : МЦНМО, 2007. – 552 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63256 – ISBN 978-5-94057-105-6. – Текст : электронный. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=63256

6. Боровков, А. А. Теория вероятностей [Текст] : [учеб. пособие для вузов]. - М..: URSS : Либроком, 2017. - 652 с.
7. Боровков, А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез : [учеб. пособие для мат. и физ. спец. вузов]. - М..: Наука, 1984. - 472с.
8. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций : учеб. пособие для вузов. - СПб..: Лань, 2008. - 445 с.

Литература

Дополнительная:

9. Севастьянов, Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики [Текст] : [для специальностей "Математика" и "Механика"]. - М..: Наука, 1982. - 255 с.
10. Ширяев, А. Н. Вероятность : [учеб. пособие для вузов]. - М..: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 640 с.
11. Б.В.Гнеденко. Курс теории вероятностей. Изд. 6-е, перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.

14. Ширяев А.Н. Вероятность: в 2-х кн. М. : МЦНМО, 2007.

15. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов: Учебн. Пособие. М.: Изд-во МГУ, 1992. 400 с.

16. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. М., 2021. 766 с.

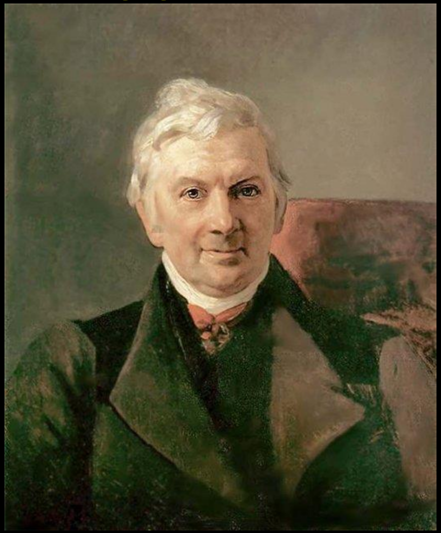
17. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов. - М.: Высш. шк., 2001.

18. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие. - М.: Высш. образование, 2007.

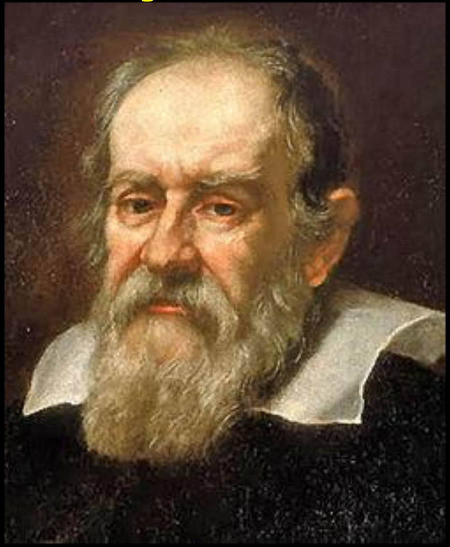
Информационное обеспечение дисциплины

- Электронно-библиотечная система http://lib.ssau.ru/els;
- **Открытая электронная библиотека «Киберленинка» http://cyberleninka.ru**
- **Электронная библиотека РФФИ http://www.rfbr.ru/rffi/ru/**
- Архив научных журналов на платформе НЭИКОН https://archive.neicon.ru/xmlui/
- http://www.intuit.ru;
- https://urait.ru

Зарождение науки о случайных событиях



Джироламо Кардано,



Галилео Галилей,

XVI- XVII вв.

Блез Паскаль,

Христиан Гюйгенс

«Рецепты теории азартных игр»

Смена парадигмы мышления

До эпохи Реформации (лат. *reformatio* «исправление; преобразование; реформирование» — широкое религиозное и общественно-политическое движение в Западной и Центральной Европе XVI - начала XVII века, направленное на реформирование католической церкви)

люди в большинстве своем верили, что любое событие предопределено волей Бога или, если не им, то какой-либо другой сверхъестественной силой.

Математическая теория вероятностей основана на противоположном утверждении, что события могут быть случайными

Подходы к изучению явлений и процессов

? ?

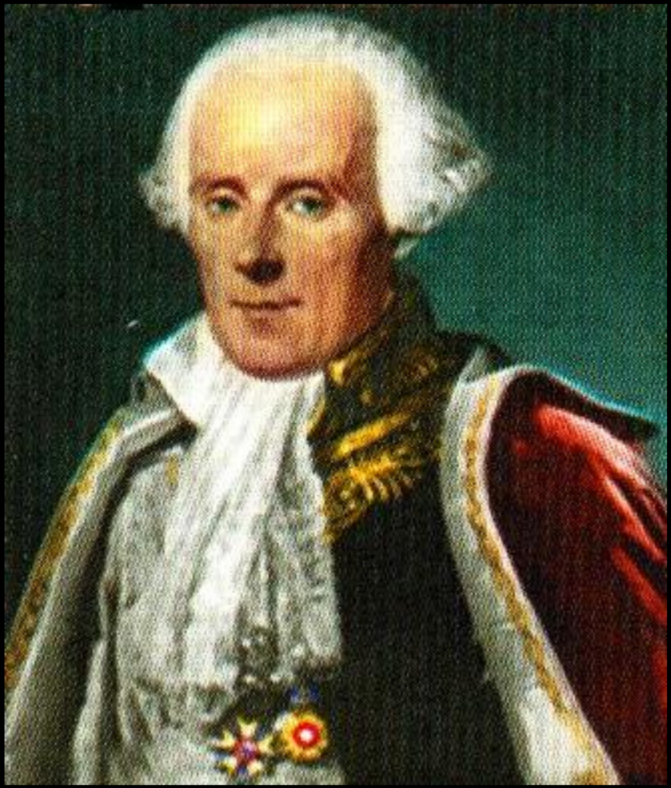
Определение науки

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений

Математическая статистика – раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей

Теория случайных процессов – раздел ТВ, изучающий закономерности случайных процессов

История

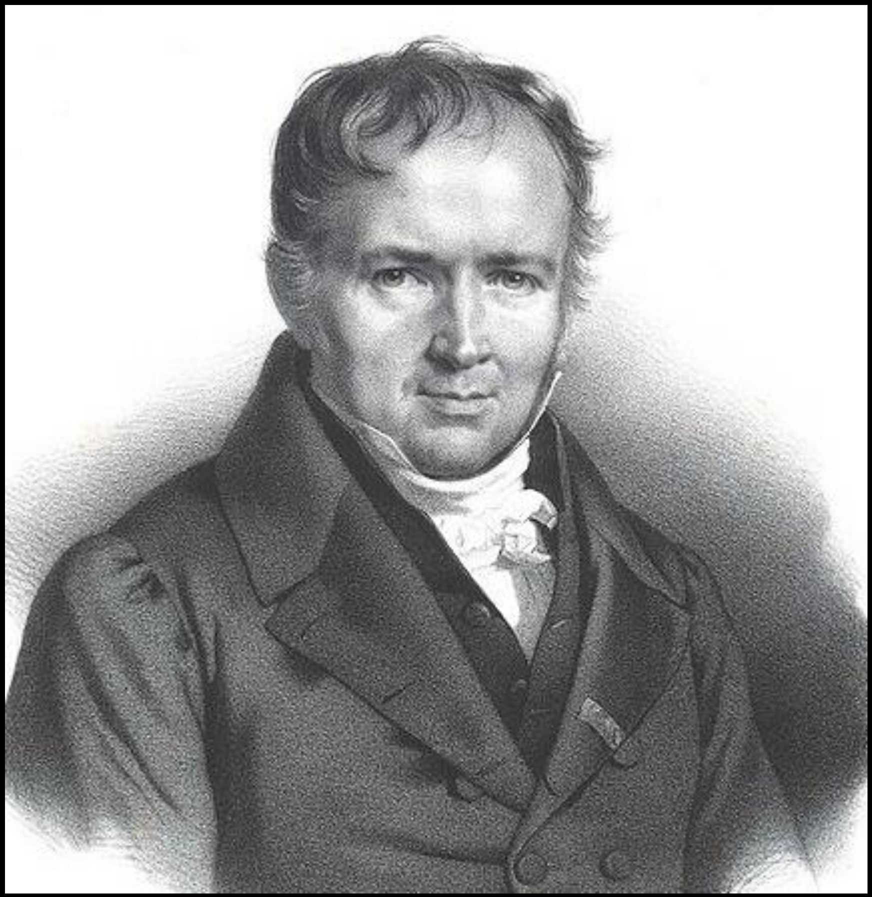
  

Якоб Бернулли Абрахам де Муавр Пьер-Симон Лаплас

(«Закон больших чисел», интегральные теоремы)

XVII-XIX вв.

История



Карл Фридрих Гаусс Симеон Дени Пуассон

(законы распределения случайных величин)

XVII-XIX вв.

История

Александр Михайлович Ляпунов

(Центральная предельная теорема)

Андрей Андреевич Марков

(цепи Маркова)

XIX - начало XX в.

История

Андрей Николаевич Колмогоров

(Аксиоматика Колмогорова)

XX в.

Рональд Фишер

(распределение Фишера)

Пакеты прикладных программ/ языки программирования для обработки статистических данных

- Python, Julia
- Gretl
- R-project
- Mathematica
- Statistica
- SPSS
- SYSTAT

Предмет ТВ

- Предметом изучения теории вероятностей являются количественные закономерности однородных случайных явлений массового характера.
- Объект – математические модели случайных явлений
- Цель – осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на их ход, их контроль, ограничение сферы действия случайностей.

«Три кита» теории вероятностей

- Случайные события
- Случайные величины
- Случайные процессы

Основные понятия теории вероятностей

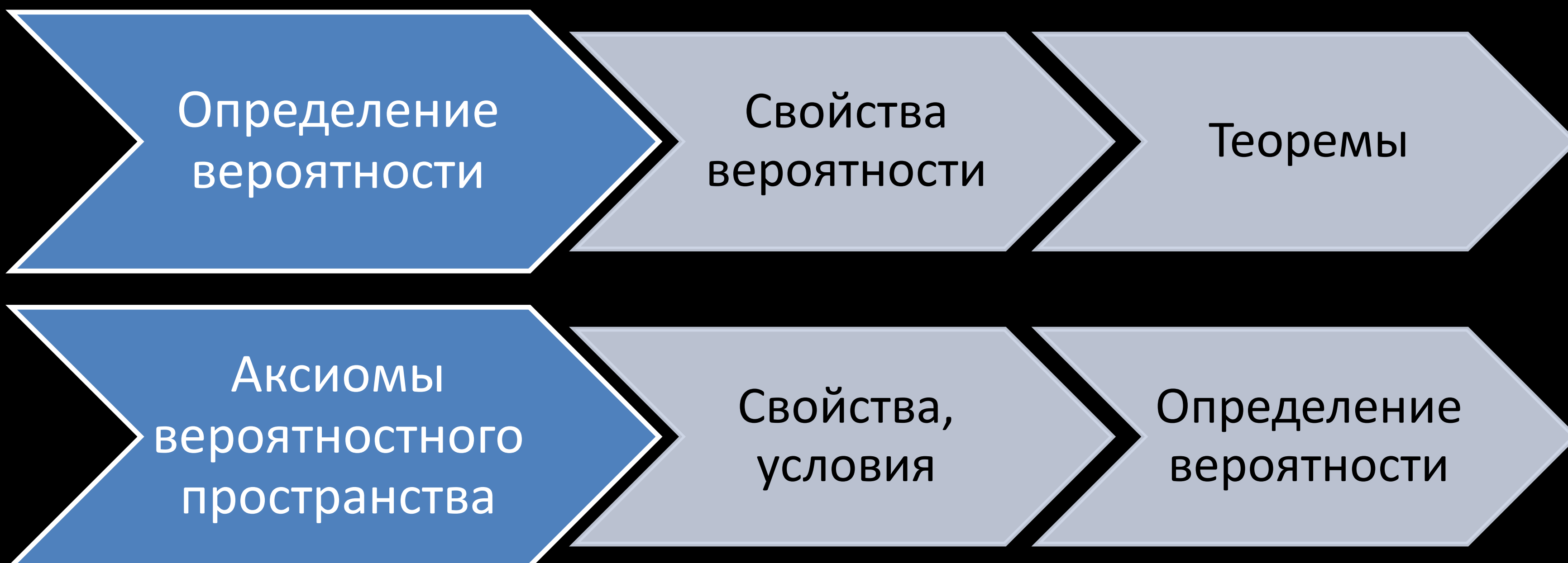
События

A, B, C, D, …

Вероятность событий

p(A), p(B), p(C),…

Способы введения понятия «вероятность»



Пространство элементарных событий (ПЭС) Ω

- Испытание (опыт, эксперимент) – выполнение определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен неограниченное число раз
- Исходы- результаты эксперимента
- События – результаты идеализированного опыта

События

Простые (элементарные, неделимые)

$\omega 1, \omega 2, \ldots, \omega n$

Сложные, составные (состоят из элементарных)

A, B, C, D, …

Примеры событий и ПЭС

Описать ПЭС и событие: при игре с двумя костями сумма очков равна 7.

Примеры событий и ПЭС

- Распределение дней рождения. Событие: у двух студентов д/р в один день
- Трехкратное подбрасывание монеты. Событие: выпало не менее двух гербов
- Возраст супругов. События: муж старше жены и муж старше 40.

Случайные события и их виды

- Случайное событие (СС) – событие, которое может произойти или не произойти, при соблюдении данного комплекса условий.

События

Случайные

Неслучайные

Достоверное

Невозможное

«Мы живем в мире вероятностей, а не достоверностей, поэтому прекрасные восхитительные случаи должны иногда происходить»
Аласдер Грей, из книги «Ланарк: Жизнь в четырех книгах»

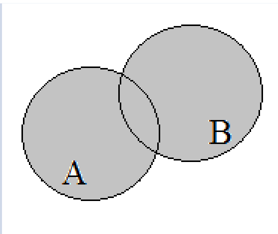
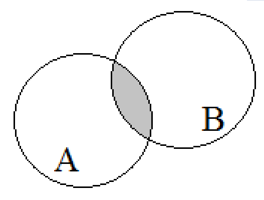
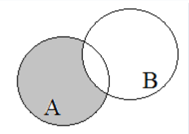
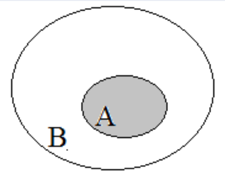
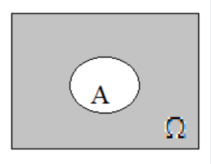
Обозначения

$\omega \in \Omega$	эл. соб. из ПЭС
$A \in \Omega$	соб. А из ПЭС
$\omega \in A$	эл. соб. благоприятно для А
$\omega \notin A$	эл. соб. не благоприятно для А
$\varnothing \subset \Omega$	невозможное событие из ПЭС

Виды событий

Совместные	Зависимые	Единственно возможные	Равновозможные	Равносильные
Несовместные	Независимые	Не единственно возможные	Не равновозможные	Не равносильные

Действия над событиями

п/п	Название	Теоретико-множеств. обознач.	Алгебр. обозн.	Определение	Диаграмма Эйлера-Венна
1.	Объединение событий А и В	$A \bigcup B$	А+В	Событие, которое состоит в наступлении хотя бы одного из событий А или В.	
2.	Пересечение событий А и В	$A \bigcap B$	АВ	Событие, состоящее в наступлении обоих событий и А, и В	
3.	Разность А и В	A/B	А-В	Событие, состоящее в наступлении с. А, но не В	
4.	Включение	$A \subset B$	-	Событие, при котором из наступления с. А следует наступление с. В (if A then B)	
5.	Дополнение (противоположное соб.)	$\overline{A}$, $C_{\Omega} A$	-	Событие, при котором А не произойдет (не А)	

Свойства операций над событиями

$1^\circ.\ A+B=B+A\ ,\ AB=BA$ - коммутативность.

$2^\circ.\ (A+B)+C=A+(B+C);\ \ A(BC)=(AB)C$ - ассоциативность.

$3^\circ.\ (A+B)C=AC+BC$ - дистрибутивность.

$4^\circ.\ A+\Omega=\Omega,\ \ A\Omega=A.$

$5^\circ.\ A+\varnothing=A,\ \ A\varnothing=\varnothing.$

$6^\circ.\ A+A=A,\ \ AA=A.$

$7^\circ.\ A+\overline{A}=\Omega,\ \ A\overline{A}=\varnothing.$

$8^\circ.\ \overline{\Omega}=\varnothing;\ \ \overline{\varnothing}=\Omega.$

$$\left.\begin{array}{l} 9^\circ.\ \overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B} \\ 10^\circ.\ \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B} \end{array}\right\}$$ - свойства двойственности или законы Де Моргана.

$11^\circ.\ A\subseteq B\Rightarrow\ \ A+B=B,\ AB=A.$

$12^\circ.\ AB\subseteq A\subseteq A+B.$

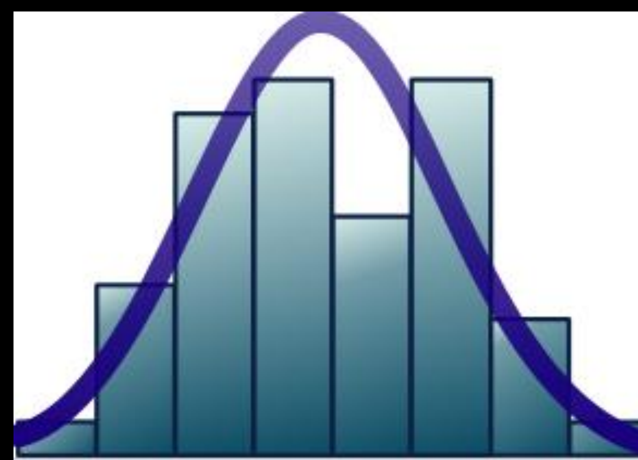
$13^\circ.\ A-B=A\overline{B}.$

Вероятность события

Аксиоматическое определение

Классическая

Статистическая



Геометрическая

$p(A)=\frac{meg\ g}{meg\ G}$

$p(A)=M/N$ ~

$p(A)=w(A)=m/n$

Классическое определение вероятности и полная группа событий

Качественное определение:

вероятность события – численная мера степени объективной возможности наступления события.

- Полную группу событий, ПГС, образуем из единственно возможных, несовместных исходов.

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$$

Классическая модель

- Если события образуют ПГС , конечных и равновозможных, элементарных, то такую группу называют классической моделью.

Опр.: Вероятность, p(A), события A равна отношению конечного числа исходов классической модели, благоприятствующих ему (M), к общему числу исходов (N), то есть $$p(A)=M/N=|A|/|\Omega| \qquad (1).$$

Свойства вероятности событий

1°. $\mathrm{P}(A) \geq 0$ для любого события A (так как M>0).

2°. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$. ▲$P(\Omega) = \dfrac{N}{N} = 1$ ■

3°. Если события A и B <u>несовместны</u> $(AB = \varnothing)$, то

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

▲ Пусть событию A благоприятствует m' исходов, а событию B - m'' исходов. Поскольку события A и B являются несовместными (т.е. не имеют общих исходов), то сумме $A+B$ благоприятствует $m'+m''$ исходов. Поэтому

$$\mathrm{P}(A+B) = \frac{m'+m''}{n} = \frac{m'}{n} + \frac{m''}{n} = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B). \blacksquare$$

Свойства вероятности событий

4°. $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

▲ Поскольку события A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий ($A + \overline{A} = \Omega$, $A\overline{A} = \varnothing$), то из свойств 2° и 3° $\mathrm{P}(A + \overline{A}) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$.■

5°. $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.

▲ Следует из свойств 2° и 4°, поскольку события $\varnothing = \overline{\Omega}$.■

6°. Если $A \subseteq B$, то $\mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(B)$.

▲ Представим событие B в виде: $B = \Omega B = (A + \overline{A})B = AB + \overline{A}B = A + \overline{A}B$. Поскольку события A и $\overline{A}B$ являются несовместными, то из свойств 1° и 3° имеем: $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A + \overline{A}B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}B) \ge \mathrm{P}(A)$.■

7°. $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$.

▲ Следует из свойств 2°, 5° и 6°, так как $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$, так как 0<M<N.■

Примеры вероятности событий

- Вероятность появления «Орла» или «Решки» при подбрасывании монеты равна ½.
- Вероятность случайно взять короля из шахматного набора 2/32=1/16, а ладью - 4/32=1/8.
- Вероятность появления красной карты равна ½, а появления туза в колоде из 36 карт равна 4/36=1/9


Примеры вероятности событий

Вероятность получить 7 очков при играх с двумя костями

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Элементы комбинаторики

- К.- раздел математики, изучающий методы решения комбинаторных задач – задач на подсчет числа различных комбинаций
- **«Золотое правило комбинаторики»:**
-] нужно выполнить к-действий. Причем 1-ое действие n_1 способами, 2-ое действие n_2 способами, …, к-ое действие $n_к$ способами. Тогда общее кол-во способов выполнения к-действий подряд определяется по формуле: $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$.

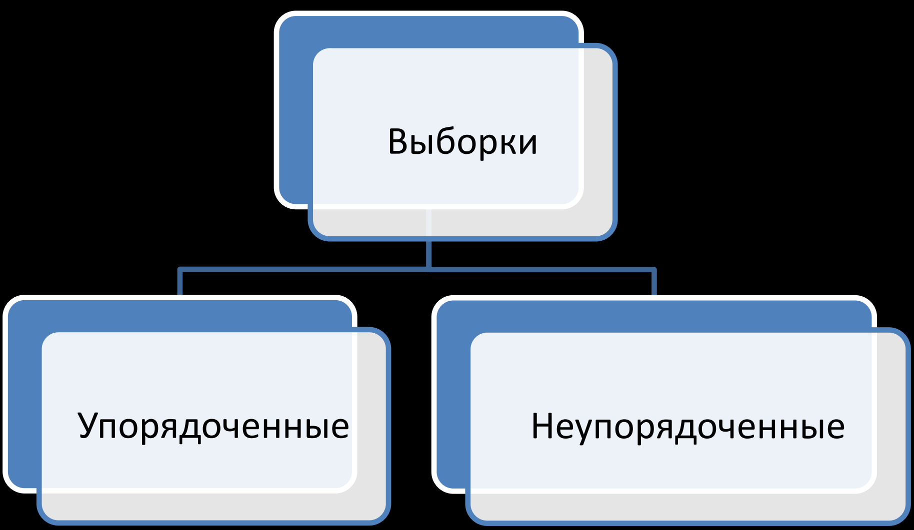
Элементы комбинаторики

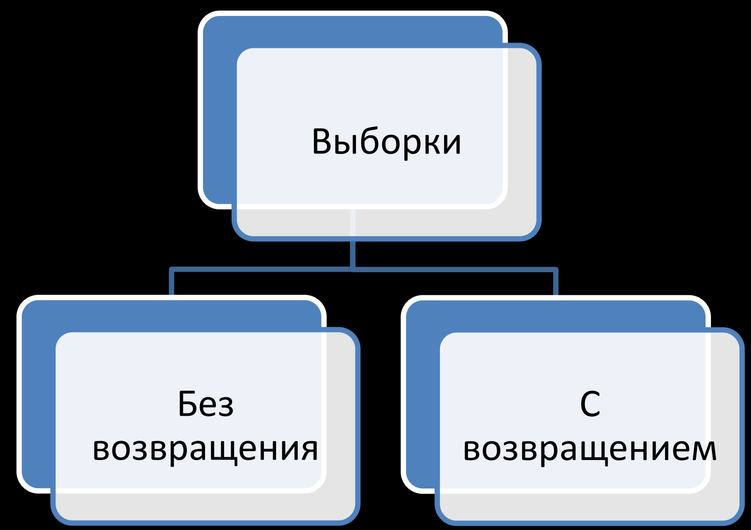
- Другой вариант «*Золотого правила»:* дано n_1 элементов: $n_1=(a_1, a_2, \ldots, a_{n1})$; n_2 элементов: $n_2=(b_1, b_2, \ldots, b_{n2})$, …, n_k элементов: $n_k=(c_1, c_2, \ldots, c_{nk})$. Тогда общее кол-во таких наборов : $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$.
- Правило сложения в комбинаторике:
-] эл-т A м. выбрать n способами, а эл-т B – m способами, то выбрать эл-т A или B можно m+n способами.

Выборка

- Возьмем некоторое множество:

$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ Образуем на нем набор или соединение $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}$ наз. *выборкой объема k*.





Основные формулы комбинаторики. Соединения и их количества

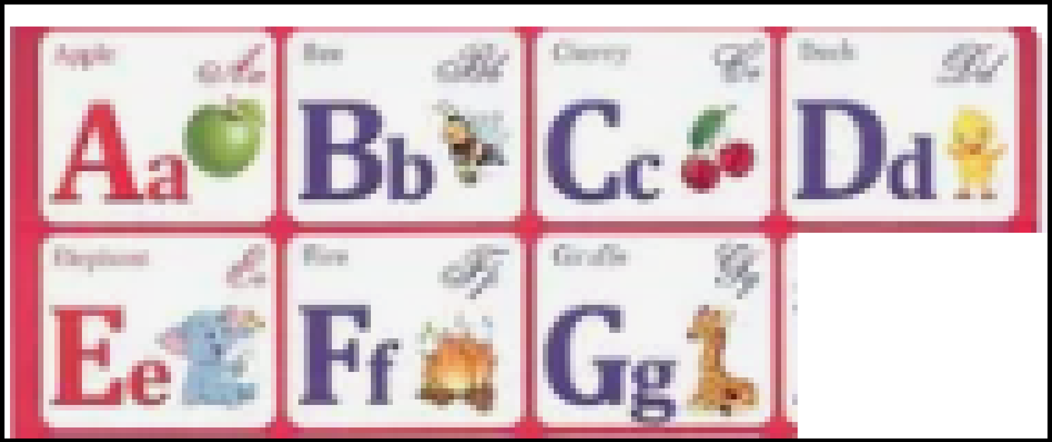
Виды	Упорядоченные	Неупорядоченные
	Размещения	Сочетания
Без повторения (без возвращения)	I. $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ (при m=n: перестановки $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)	II. $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
С повторением (с возвращением)	III. $\tilde{A}_n^m = n^m$	IV. $\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

I. Упорядоченные выборки без возвращения

-]|E|=n, m- мощность выборки
- **Ω={(**$e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}$), $e_{i_1} \neq e_{i_2} \neq \ldots \neq e_{i_m}$ **},**
- Число размещений A_n^m=|Ω|=n*(n-1)*(n-2)* … *(n-m+1) = $\frac{n!}{(n-m)!}$
- **n** ∈ $\mathbb{N}$, 0≤ $m \leq n$, альтерн. обозн. $(n)_m$
- If m=n A_n^n=P_n=n! – кол-во перестановок эл-тов множества объема n
- If m=1 A_n^1=n – общее кол-во выборок из множества по 1 элементу

Пример

- Найти количество различных комбинаций из 4 карточек при выкладывании карточек с буквами {A, B, C, D, E, F, G} на стол.



II. Неупорядоченные выборки без возвращения

-]|E|=n, m- мощность выборки
- **Ω={(**ei1, ei2, …, eim), ei1 ≠ ei2 ≠ … ≠ eim **},**
- Число сочетаний $C_n^m=|\Omega|=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$
- **n** $\in \mathbb{N}$, 0$\leq m \leq n$, альтернативное обозначение $\binom{n}{m}$

Треугольник Паскаля

- - бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1

Некоторые важные свойства

- 1) $C_n^0 = 1$
- 2) $C_n^1 = \mathrm{n}$
- 3) $C_n^m = C_n^{n-m}$
- 4) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$
- 5) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ - общее число подмножеств множества объема n (включая само множество и пустое)

Пример

- В коробке 10 различных конфет. Определить сколькими способами можно поровну раздать конфеты 5 девочкам.

III. Размещения с повторениями Выборки с возвращением

-]|E|=n, m- объем выборки
- Ω**={(**ei1, ei2, …, eim), eik ∈ **E},**
- $|\Omega|$= n*n*…*n=n^m, **n** ∈ $\mathbb{N}$, **m** ∈ $\mathbb{N}$

Пример

-] есть 5 карточек с русскими буквами {а, б, в, г, м}. Определить вероятность того, что ребенок, случайным образом вытаскивая 4 карточки, выписывая буквы на доске, и возвращая их обратно, получит слово «мама».

IV. Неупорядоченные выборки с возвращением

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$$

-] |E|=n, m- объем выборки
- **Ω={(**$e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}$), $e_{i_k} \in$ **E},**
- $|\Omega| = \tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$, **n** $\in \mathbb{N}$, **m** $\in \mathbb{N}$

Количество неупорядоченных выборок с возвращением

- Док-во.] |E|=n, m- объем выборки, n $\geq$1, m $\geq$1. Рассмотрим вектор с n+m-1 координатой из 0 и 1, в котором n-1 нулей, и m – единиц.
- Нули будем считать разделителями, которые делят вектор на n частей.
- Число единиц в i-й части – число элементов ei в сочетании с повторением, которое соответствует этому вектору.

Количество неупорядоченных выборок с возвращением

- Например, для $n=3$, $m=3$: (1,1,0,0,1) – соответствует выборке из E (a_1, a_1,a_3); (1,0,1,0,1) – (a_1, a_2,a_3);
- (1,0,0,1,1) – (a_1, a_3,a_3).
- Каждому сочетанию с повторением из n по m соответствует вектор из 0 и 1, и наоборот.
- $\rightarrow \exists$ биекция $\rightarrow$ кол-во элементов в этих множествах совпадает.

Количество неупорядоченных выборок с возвращением

- Количество таких векторов равно количеству сочетаний из $n+m-1$ по m, в которых будут стоять единицы, а на остальных местах нули. Следовательно,

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m,$$

Что и требовалось доказать.

Пример

- В журнале список из 15 студентов. Найти количество способов случайным образом выбрать 2-х студентов путем попадания в журнал.

Геометрическое определение вероятности

-] $\Omega \in \boldsymbol{R}^n$, на Ω задана мера: Ω измеримо по Лебегу, μ(Ω)< ∞, μ(Ω) ≠0. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- $\mathcal{F}$- σ-алгебра, $\mathcal{F}$={A⊂ Ω, **A** – измеримо по Лебегу}. Т.е. выполняется:
- исходы эксперимента можно изобразить точками некоторой области $\Omega \in \boldsymbol{R}^n$, μ(Ω)< ∞;
- попадание точки в любые области A⊂ Ω, имеющие одинаковую конечную меру μ, равновозможно и не зависит от формы и расположения A внутри Ω . Точка равномерно распределена в области Ω или бросается в область Ω наудачу.

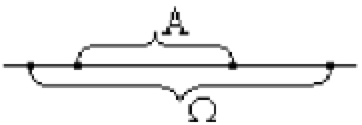
Геометрические вероятности

-] в область, соответствующую достоверному событию Ω, наугад бросается точка ω. Тогда определим вероятность случайного события A=$\{\omega \in \mathbf{A}\}$, состоящего в том, что точка попадет в область **A**:
  - $\mathbb{P}(A)=\frac{\mu(\mathrm{A})}{\mu(\Omega)}$ (2)
- Вероятность, определенная по формуле (2) называется *геометрической вероятностью*

Геометрические вероятности

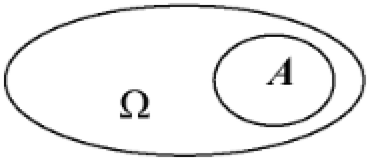
при $n=1$ под мерой $\mu(\cdot)$ понимается длина $l(\cdot)$ подмножества на числовой прямой $\mathbb{R}$ и

$$P(A)=\frac{l(A)}{l(\Omega)};$$



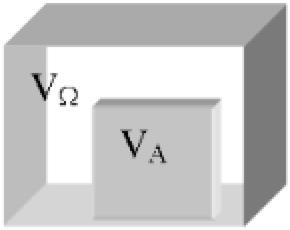
при $n=2$ под мерой $\mu(\cdot)$ понимается площадь $S(\cdot)$ подмножества на плоскости $\mathbb{R}^2$ и

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)};$$



при $n=3$ под мерой $\mu(\cdot)$ понимается объем $V(\cdot)$ подмножества в пространстве $\mathbb{R}^3$ и

$$P(A)=\frac{V(A)}{V(\Omega)}.$$



Пример

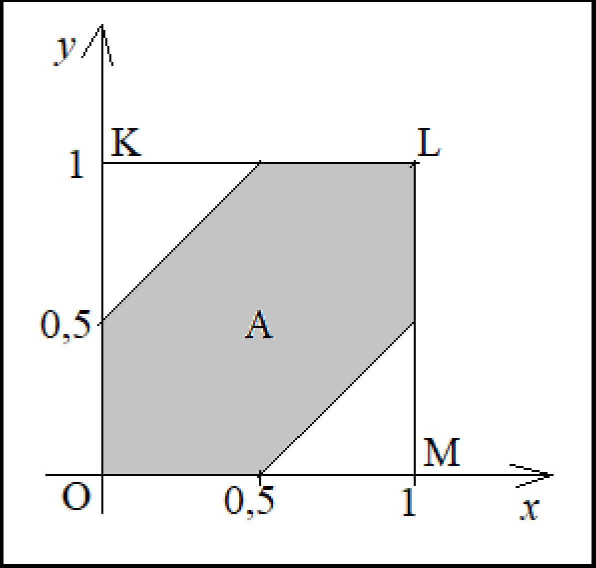
- Юноша и девушка условились встретиться в определенном месте, так, что каждый является туда в любой момент времени между 11 и 12 часами и ждет в течение 30 минут. Если один из них еще не пришел или уже успел покинуть установленное место, встреча не состоится. Найти вероятность того, что встреча состоится.

Пример

- *Решение*. Обозначим моменты прихода в определенное место лиц А и В соответственно через x и y. Пусть в прямоугольной системе координат Oxy начало отсчета – 11 часов, а единица масштаба – 1 час. По условию 0$\le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Этим неравенствам удовлетворяют координаты любой точки квадрата OKLM, со стороной равной 1.

Пример

- Событие А – встреча произойдет, если разность между x и y: $|x\text{-}y| \leq 0{,}5$, решение которого есть полоса $x - 0{,}5 \leq y \leq x + 0{,}5$.
- Тогда по формуле (2):
- $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = 1 - \dfrac{1-2*(\frac{1}{2})*0{,}5^2}{1} = 0{,}75$



Статистическое определение вероятности

- Пусть при осуществлении комплекса условий C n раз событие A произошло n_A раз $0 \le n_A \le n$.
- Тогда отношение $\frac{n_A}{n}$ называется *частотой события A (или относительной частотой события A).*

Статистические вероятности

- При небольшом n частота события А носит случайный характер и может заметно отличаться в разных группах опытов.
- Если же случайное событие А обладает свойством статистической устойчивости, то при увеличении числа опытов относительная частота события все более теряет свой случайный характер, приближаясь к некоторой постоянной величине:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=\hat{P}(A)=const \quad (3)$$

Определение статистической вероятности

Величина $\hat{P}(A)$ называется статистической вероятностью события А при выполнении условия (3):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=\hat{P}(A)=const \quad (3)$$

Сходимость частоты к $\hat{P}(A)$ отличается от сходимости числовых последовательностей к пределу, которая рассматривается в математическом анализе. Здесь учитывается случайность $\hat{P}(A)$ (сходимость по вероятности).

Вычисление статистических вероятностей основано лишь на экспериментальных наблюдениях и свойстве статистической устойчивости случайных событий, которое должно быть экспериментально проверено. События должны быть исходами только тех испытаний, которые могут быть воспроизведены неограниченное число раз при одном и том же комплексе условий.

Пример

- Выпадение герба при бросании монеты
  $\hat{P}(A)$=0,5

	число бросаний	частота выпадений герба
Ж. Бюффон (18 век)	4040	0.507
К. Пирсон (конец 19 века)	12000	0.5016
	24000	0.5005
Романовский (20 век)	80640	0.4923

Благодарю за внимание!