

1 Линейные отображения.

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте.

def Линейное отображение A — функция $A: U \rightarrow V$, где U, V — линейные пространства над K . Со свойствами:

1. $\forall \lambda \in K \forall v, u \in U$
 $A(u + \lambda v) = A(u) + \lambda A(v)$

Замечания:

1. $A(u) = Au$ — синтаксис.
2. поточечно выполняются все свойства арифметических операций.

Примеры:

1. θ — нулевое линейное отображение
 $\forall u \in V \theta u = 0v$
2. ε — тождественное отображение
3. $U = V = P_n$ — многочлен степени $\leq n$. $A: U \rightarrow V$.
 $Ap = p'(t)$ — дифференциальный оператор
 $A(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2'$
4. $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, A = (a_{ij}) m \times n$.
 $A: x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = Ax \in \mathbb{R}^m$
 $x_1 + \lambda x_m \in \mathbb{R}^n, A(x_1 + \lambda x_2) = A(x_1) + \lambda A(x_2)$
5. Изоморфизм (взаимно однозначное соответствие)

def Умножение линейного отображения на скаляр.

$$B = \lambda A$$

$$\forall u \in V B(u) = \lambda A(u)$$

def Сумма линейных отображений

$$C = A + B$$

$$\forall u \in V C(u) = A(u) + B(u)$$

$-A$ — отображение противоположное A

def $A \in L(U, V)$

1. $\text{Ker } A = \{v \in V \mid Av = \theta\}$ — ядро линейного отображения
2. $\text{Im } A = \{v = Au \mid \forall u \in U\}$ — образ линейного отображения

Замечание:

1. $\text{Ker } A$ и $\text{Im } A$ - это линейные подпространства

def Если:

- $\text{Ker } A$ конечномерное, то $\dim(\text{Ker } A) = \text{def } A$ — дефект A
- $\text{Im } A$ конечномерное, то $\dim(\text{Im } A) = \text{rg } A$ — ранг A

УТВ: A изоморфизм $U, V \Leftrightarrow$

1. $A \in L(U, V)$
2. $\text{Im } A = V$
3. $\text{Ker } A = \{0_v\}$ тривиально

Док-во: A изоморфизм \Leftrightarrow взаимно однозначное и линейное

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left[\begin{array}{l} 1) \text{ из определения} \\ 2) \text{ взаимнооднозначно} \\ 3) \text{ взаимнооднозначный ноль} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} 1) \text{ } \text{Ker } A = \{0\}, \text{ значит инъективно, так как } v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \\ v_1 = Au_1, v_2 = Au_2 \\ \underbrace{v_1 - v_2}_0 = \underbrace{Au_1 - Au_2}_{\text{т.к. ядро тривиально}} = \underbrace{A(u_1 - u_2)}_0 \\ 2) \text{ } \text{Im } A = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \text{ } Av = v \text{ — сюръекция} \end{array} \right. \end{aligned}$$

def : $A \in L(U, V)$

- инъективно, если $\text{Ker } A = 0$
- сюръективно, если $\text{Im } A = V$
- биективно, изоморфизм, если инъективно и сюръективно
- эндоморфизм, линейный оператор, если $U = V$
 $\text{End}(V) = L(V, V)$
- автоморфизм ($\text{Aut}(V)$), если эндоморфизм + изоморфизм

def : Произведение линейных отображений

$$U \xrightarrow{B} W \xrightarrow{A} V$$

$$A \in L(W, V)$$

$$B \in L(U, W)$$

$C = (A \circ B) \in L(U, V)$ — композиция функций A и B .

$$A \cdot B = A \circ B$$

$$\forall u \in U (A \cdot B)(u) = A(B(u))$$

Зам:

1. A, B изоморфизм, то $A \cdot B$ изоморфизм
2. $(A_1 + A_2)B = BA_1 + BA_2$
 $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$
3. $A(BC) = (AB)C$

Значит $End(U, V)$ — алгебра с единицей и ассоциативностью.

def : $A \in L(U, V)$ изоморфизм

$$\forall u \in V \exists! u \in U : v = Au$$

$$A^{-1} : V \rightarrow U \quad A^{-1}u = v$$

$$A^{-1} \text{ линейное } A^{-1}A = \varepsilon_U, \quad AA^{-1} = \varepsilon_V.$$

A^{-1} изоморфизм.

Если A — оператор, то A^{-1} — обратный оператор.

def : $U_0 \in V \quad A \in L(U, V)$

Сужение A на линейное подпространство $A|_{U_0} : U_0 \rightarrow V$

$$\forall u \in U_0 : A|_{U_0}u = Au$$

УТВ: A изоморфизм $\in L(U_1, V) \Rightarrow A|_{U_0}$ изоморфизм $\in L(U_0, Im A|_{U_0})$

Примеры:

1. $0 : V \rightarrow U$
 - не сюръекция
 - не инъекция
 - эндоморфизм
 - не автоморфизм
2. $\varepsilon : V \rightarrow V$ автоморфизм
3. $A = \frac{d}{dt} A : P_n \rightarrow P_n$
 - не сюръекция

- не инъекция
- эндоморфизм
- не автоморфизм

4. $x \xrightarrow{\in \mathbb{R}^n} y = Ax \in \mathbb{R}^n$

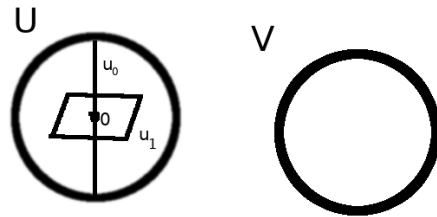
- Если $rgA = n \Leftrightarrow$ инъекция и сюръекция
- автоморфизм $\Leftrightarrow rgA = n$

Теорема. (о ранге и дефекте отображений)

$$A \in L(U, U)$$

$$rgA + def A = dim U$$

Док-во $\forall v \in U \ u = u_0 + v_1$ единственным образом



(a) $U_0 = k + vA$ (b) $U = U_0 \oplus U_1$ (c) $U_1 \cap U_1 = \{0\}$

$$Au = A \underbrace{u_0}_{Ker A} + Au_1 = Au_1. \text{ Значит } Im a = AV_1$$

$$A_1 = A|_{u_1} : u_1 \rightarrow Im A, A_1 - \text{изоморфизм.}$$

$$U_1 \cong Im A \Leftrightarrow dim(U_1) = dim(Im a) \Leftrightarrow dim(Ker A) \neq dim(Im a) = dim(U)$$

Следствия:

1. $A \in L(U, V)$ эквивалентно:

- (a) A — изоморфизм
- (b) $dim V = dim U = rgA$
- (c) $dim U = dim V, Ker A = \{0\}$

2. $A \in End(V)$ эквивалентно

- (a) A — изоморфизм
- (b) $dim V = rgA$
- (c) $Ker A = \{0\}$

1.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$$A \in L(U, V)$$

$$\xi_1, \dots, \xi_n - \text{базис } U$$

$$\eta_1, \dots, \eta_m - \text{базис } V$$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$v = Au = A\left(\sum_{i=1}^n u_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \underbrace{A\xi_i}_{\text{достаточно определить это}}$$

$$\text{Im} A = \text{span}(A\xi_1, \dots, A\xi_n)$$

$$A\xi_i \in V, \quad A\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \quad A = (A_1, \dots, A_n) - \text{матрица линейного отображения.}$$

• Частный случай:

$$A \in \text{End}(V) : \begin{matrix} V \\ e_1, \dots, e_n \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ e_1, \dots, e_n \end{matrix}$$

матрица линейного оператора

Пример:

$$1. \quad \varepsilon : \begin{matrix} V \\ e_1, \dots, e_n \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ e_1, \dots, e_n \end{matrix}$$

$$\varepsilon e_i = e_i \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad e : \begin{matrix} V \\ e'_1, \dots, e'_n \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ e_1, \dots, e_n \end{matrix}$$

$$\xi e'_i = e'_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} e_j \Rightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

T — матрица перехода = $T_{e \rightarrow e'}$

3. Матрица поворота : (

$$4. A : P_2 \rightarrow P_2, \text{ базис } - 1, t, t^2 \\ A = \frac{d^2}{dt^2}, \text{ End}(V) \cong M_{n \times n}$$

Изоморфизм ассоциативных, унитарных алгебр

$$U \quad \xi_1, \dots, \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\ V \quad \eta_1, \dots, \eta_n \quad \forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$A \in L(U, V) \underset{(z, \eta)}{\leftrightarrow} A$$

$$\underset{\sum_{j=1}^m v_j \eta_j, v_j - \text{координаты}}{\parallel} v = Au = \sum_{i=1}^n u_i A \xi_i = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n u_i a_{ji} \right)}_{\text{координаты}} \eta_j$$

$$\text{Значит } v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \leftrightarrow V = Au, \mathcal{V} = \mathcal{AU}$$

Примеры:

1. A поворот на угол α

$$(i, j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Теорема. (о преобразовании матрицы линейного отображения при замене базиса)

$$A \in L(U, V)$$

$$U \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n) \quad A \underset{(\xi, \eta)}{\leftrightarrow} A$$

$$V \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_m), \quad \eta' = (\eta'_1, \dots, \eta'_m) \quad A \underset{(\xi', \eta')}{\leftrightarrow} A'$$

$$A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

Док-во:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow[A]{A} & V \\ \xi_1, \dots, \xi_n & & \eta_1, \dots, \eta_m \\ e_v \uparrow \uparrow T_{\xi \rightarrow \xi'} & & T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \downarrow \uparrow e_v \\ U & \xrightarrow[A']{A'} & V \\ \xi'_1, \dots, \xi'_n & & \eta'_1, \dots, \eta'_m \end{array}$$

$$A^1 = \varepsilon_v^{-1} A \varepsilon_v \leftrightarrow A^{-1} = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

Замечание: $V = Au \underset{(\xi, \eta)}{\leftrightarrow} v = Au$

$$\begin{aligned}
V = Au &\xleftrightarrow{(\xi', \eta')} V' = A'u' \\
v = T_{\eta \rightarrow \eta'} v', \quad u = T_{\xi \rightarrow \xi'} u' \\
T_{\eta \rightarrow \eta'} V &= AT_{\xi \rightarrow \xi'} u' \\
v' &= \underbrace{T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} AT_{\xi \rightarrow \xi'} u'}_{A'}
\end{aligned}$$

1.3 Инварианты линейного отображения

def: Инвариант — свойство, которое сохраняется при определённых преобразованиях.

Форма записи $\mathcal{V} = \mathcal{A}u \leftrightarrow V = Au$ инвариант относительно замены базиса.

def: $A_{m \times n}$

$$ImA = span(A_1, \dots, A_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \mid \alpha_i \in K \right\} = \left\{ Y \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n \right\} \quad \begin{matrix} \parallel \\ Ax \end{matrix}$$

$$rgA = dim(ImA)$$

$$KerA = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = \{\text{множество решений СЛОУ}\}$$

$$dim(KerA) = n - rgA = defA$$

$$rgA + defA = n \text{ — аналог теоремы о ранге и дефекте}$$

Теорема. $\forall A \in L(U, V)$

$$rg\mathcal{A} = rgA$$

$$def\mathcal{A} = defA$$

rg, deg инварианты относительно выбора базиса

$$\underline{\text{Док-во:}} \quad \mathcal{A} \xleftrightarrow{(\xi, \eta)} A$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ — базис } U$$

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \text{ — базис } V$$

$$In\mathcal{A} = span(A_{\xi_1}, \dots, A_{\xi_n})$$

$$\mathcal{A}_{\xi_i} \leftrightarrow A_i \text{ — координатный изоморфизм}$$

$]rgA = k$, k столбцов линейно независимы. По свойствам изоморфизма среди \mathcal{A}_{ξ_i} тоже k линейно независимых, а остальные — линейные комбинации $\Leftrightarrow dim(ImA) = k$

$$dimU = rg\mathcal{A} + def\mathcal{A}$$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ n & k \end{matrix} \quad def\mathcal{A} = n - k = defA$$

Следствия: \mathcal{A} изоморфизм $\Leftrightarrow A$ невырождена $(\exists A^{-1})$, где A — матрица в некотором базисе.

Док-во: изоморфизм $\Leftrightarrow defA = 0 \Leftrightarrow rgA = n \Leftrightarrow A$ - невырожденная.

Определитель V e_1, \dots, e_n
 D — n -форма, $D(e_1, \dots, e_n) = 1$
 $\xi_1, \dots, \xi_n \in V$ $D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det(\xi_1, \dots, \xi_n)$
 $A \in \text{End}(V)$ — линейный оператор
def : $\det A = \det(\mathcal{A}e'_1, \dots, \mathcal{A}e'_n)$

Теорема. $\det \mathcal{A}$ не зависит от базиса e , $\det \mathcal{A} = \det \mathcal{A}'$.

Док-во: V e_1, \dots, e_n
 $\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$
 $\mathcal{A}e_k = \sum_{i_k=1}^n i_k k e_{i_k}$
 $A_k = \begin{pmatrix} A_{1k} \\ \vdots \\ A_{nk} \end{pmatrix}$
 $\det \mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \cdot \underbrace{\det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})}_{n\text{-форма}} =$
 $= \sum_{\sigma=(i_1, \dots, i_n)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) =$
 $= \sum_{\sigma} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \cdot (-1)^{\sigma} =$
 $= \sum_{\sigma} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} = \det A$

Сменим базис, e'_1, \dots, e'_n — базис V
 $\det \mathcal{A} = \det T^{-1} \mathcal{A} T = \det \mathcal{A}'$ (т.к. $T^{-1} T = E$).

def : Матрицы A, B называются подобными, если существует невырожденная C : $B = C^{-1} A C$.

Следствия: $\forall f$ — n -формы на V

$\forall \xi_i, \dots, \xi_n \forall A \in \text{End}(V)$

$$f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} \cdot f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Док-во: $f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = a(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det(\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot a(e_1, \dots, e_n) =$

$$= \det(\xi_1, \dots, \xi_n) f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \left[\mathcal{A}e_k = \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} \right] =$$

$$= \det(\xi_1, \dots, \xi_n) \sum_{\delta} (-1)^{\varepsilon(\delta)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1, \dots, e_n) =$$

$$= \det(\xi_1, \dots, \xi_n) f(e_1, \dots, e_n) \det \mathcal{A} = \det \mathcal{A} \cdot f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Замечание:

$$AB = (AB_1, \dots, AB_n)$$

$$\det(AB) = \det(AB_1, \dots, AB_n) = \det(A) \cdot \det(B_1, \dots, B_n) = \det A \cdot \det B.$$

Следствие 2: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V)$

$$\det(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

Следствие 3: $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \det \mathcal{A} \neq 0, \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$

Утверждение: A, B подобные $\Rightarrow tr A = tr B$.

Док-во: A, B подобные \Rightarrow

$\exists C: C^{-1}AC = B$

$$tr B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}^{-1} (AC)_{ji} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ij}^{-1} a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{jk} \sum_{i=1}^n C_{ki} C_{ij}^{-1}}_{\delta_{kj}} =$$

$$= \left[\delta_{kj} = \begin{bmatrix} 1, k=j \\ 0, k \neq j \end{bmatrix} \right] = \sum_{k=1}^n a_{kk} = tr A$$

def: $tr A = tr A$

$tr A$ не зависит от выбора базиса

def: $L \subset V$ L инвариантно относительно $End(V)$, если $\forall u \in L \mathcal{A}u \in L$.

Теорема. $L \subset U \mathcal{A} \subset End(U) \Rightarrow \exists$ базис U такой, что матрица A в этом базисе будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

$A_{k \times k}$, где $k = \dim L$

Док-во: $L = span(e_1, \dots, e_n)$ дополним до $V: e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$

$$\mathcal{A}e_i \in L, \mathcal{A}e_i = \sum_{m=1}^k a_{mi} e_m + \sum_{m=k+1}^n 0 e_m$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Следствия:

$$1. V = \bigoplus_{i=1}^m L_i, L_i \text{ инвариантно по } \mathcal{A} \Rightarrow$$

\exists базис пространства V , в котором матрица оператора имеет блочно-диагональный вид.

Док-во: $L_i = span(e'_i, \dots, e_i^{n_i})$

т.к. \bigoplus , то базис V — объединение базисов L_i

Следствие 2:

$$V = \bigoplus L_i, L_i \text{ — инвариантно} \Rightarrow Ima = \bigoplus_{i=1}^m Ima|_{L_i} \\ \mathcal{A} \in End(V)$$

Док-во:

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \Rightarrow \exists! \text{ представление } \forall v \in V \quad v = \sum_{i=1}^m \nu_i \in L_i$$

$$\nu \in \text{Im } \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i \Rightarrow \text{Im } \mathcal{A} \subset \sum_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|L_i \Rightarrow \text{Im } \mathcal{A} \subset \sum_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|L_i$$

$$] \nu_i \in \text{Im } \mathcal{A}|L_i \quad \nu_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$$

$$\sum_{i=1}^m \nu_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i = \mathcal{A} \left(\sum_{i=1}^m u_i \right) \in \text{Im } \mathcal{A}$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|L_i$$

$$\nu_i \in \text{Im } \mathcal{A}|L_i \quad \sum_{i=1}^m \nu_i = 0$$

$$\nu_i = \mathcal{A}u_i \Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \quad (L_i \text{ инв.}) \Rightarrow \nu_i \in L_i \text{ и } \nu_i \text{ дизъюнкты, значит все}$$

$$\nu_i = 0, \text{ значит } \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|L_i$$

1.4 Собственные числа и вектора

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

def : $\lambda \in K$ собственное число линейного оператора \mathcal{A} , если $\exists v \in V \neq 0$, который называется собственным вектором, что $\mathcal{A}v = \lambda v$.

$$\exists v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \varepsilon)v = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon).$$

def : $V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) = \{\text{собственные вектора } V\}$ называется собственным подпространством.

$$\gamma(\lambda) = \dim U_\lambda \text{ геометрической кратностью собственного числа}$$

$$\gamma(\lambda) \text{ инвариантны относительно базиса } (\text{Ker} - \text{инвариант}).$$

$$\lambda \text{ собственное число, } v \text{ собственный вектор} \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) \Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda \varepsilon) = 0$$

def : $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$ — характеристический многочлен

$$V \quad e_1, \dots, e_n \text{ базис } \mathcal{A} \leftrightarrow A$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\varepsilon) = \det(A - t\varepsilon)$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - t\varepsilon) = \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \dots + a_{nn})}_{\text{tr } A = \text{tr } \mathcal{A}} t^{n-1} + \dots + \det A$$

$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n, \lambda_i - \text{корни } \chi_{\mathcal{A}}(t)$$

$$\lambda \in K \text{ с.ч} \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$$

$$K = \mathbb{C} \Rightarrow \text{п.с.ч}$$

$$K = \mathbb{R} \Rightarrow \text{только вещественные корни будут собственными числами.}$$

def: множество всех чисел с учётом алгебраической кратности называется спектром линейного оператора. Спектр простой, если все собственные числа попарно различны.

$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda = 0 \text{ с.ч.}$$

Теорема. $\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A} \Rightarrow 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

Док-во: $\gamma(\lambda) = k = \dim V_\lambda$

V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ базис: матрица будет иметь вид

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline - & + \\ 0 & A_3 \end{array} \right) \text{ базис} = \underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\text{собств. вектора}}, v_{k+1}, \dots, v_n$$

$$\mathcal{A}_{v_i} \subset V_\lambda = \lambda v_i \Leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda - t & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & \lambda - t & & A_2 & \\ \hline - & - & - & + & - & - \\ & & 0 & | & A_3 - tE & \end{array} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda - t \end{vmatrix} |A_3 - tE| = (\lambda - t)^k \chi_{A_3}(t)$$

λ — корень $\chi_{\mathcal{A}}(\varepsilon)$ кратности не меняется $\Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k \cdot \gamma(\lambda)$

Теорема. $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ попарно различные с.ч. \mathcal{A}

v_i, \dots, v_m соответствующие им с.в. $\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ линейно независимы.

Док-во: индукция

1. база $m = 1$, (λ_1, v_1) лин. нез $V_1 \leq 0$

2.] верно для $m - 1$

3.] $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ попарно различные.

От противного, $\exists v_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i v_i$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i = \lambda_m v_m = \overset{\leftarrow}{\mathcal{A}} \overset{\rightarrow}{v_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A} v_i = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i$$

$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) v_i = 0$, значит $\alpha_i = 0 \Rightarrow v_m = 0$, противоречие

Следствие: $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_m}$ дизъюнкты

Док-во: $v_1 + \dots + v_m = 0, v_i \in V_{\lambda_i}$

Если бы хотя бы одно из слагаемых $\neq 0$, то это слагаемое с.в. \Rightarrow противоречие с лин. незав. с.в. отвечающих различным с.и. $\Rightarrow u_i : v_i = 0 \Rightarrow$ дизъюнкты.

Теорема. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i, L_i$ инвариантно относительно \mathcal{A}

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} \cdot L_i \rightarrow \chi_A(t) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t)$$

Док-во:

$$A = \begin{pmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \end{pmatrix} — очевидно.$$