1 Линейные отображения.

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте.

<u>def</u> Линейное отображение A — функция A: $U \to V$, где U, V - линейные пространства над K. Со свойствами:

1. $\forall \lambda \in K \ \forall v, u \in U$
   $A(u + \lambda v) = A(u) + \lambda A(v)$

Замечания:

1. $A(u) = Au$ — синтаксис.
2. поточечно выполняются все свойства арифметических операций.

Примеры:

1. θ — нулевое линейное отображение
   $\forall u \in V \ \theta u = 0v$
2. ε — тождественное отображение
3. $U = V = P_n$ — многочлен степени $\leq n$. $A : U \to V$.
   $Ap = p'(t)$ — дифференциальный оператор
   $A(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2'$
4. $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$, $A = (a_{ij})$ $m \times n$.
   $A : x \in \mathbb{R}^n \to y = Ax \in \mathbb{R}^m$
   $x_1 + \lambda x_m \in \mathbb{R}^n$, $A(x_1 + \lambda x_2) = A(x_1) + \lambda A(x_2)$
5. Изоморфизм (взаимно однозначное соответствие)

<u>def</u> Умножение линейного отображения на скаляр.
$B = \lambda A$
$\forall u \in V \ B(u) = \lambda A(u)$
<u>def</u> Сумма линейных отображений
$C = A + B$
$\forall u \in V \ C(u) = A(u) + B(u)$
$-A$ — отображение противоположное A
<u>def</u> $A \in L(U, V)$

1. $Ker \ A = \{v \in V \mid Au = \theta\}$ — ядро линейного отображения
2. $Im \ A = \{v = Au \mid \forall u \in U\}$ — образ линейного отображения

Замечание:

1. $Ker\ A$ и $Im\ A$ - это линейные подпространства

def Если:

- $Ker\ A$ конечномерное, то
  $dim(Ker\ A) = def\ A$ — дефект A

- ImA конечномерное, то
  $dim(Im\ A) = rg\ A$ — ранг A

Утв: A изоморфизм U, $V \Leftrightarrow$

1. $A \in L(U, V)$

2. $Im\ A = V$

3. $Ker\ A = \{0_v\}$ тривиально

Док-во: A изоморфизм $\Leftrightarrow$ взаимно однозначное и линейное

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\ \text{из определения} \\ 2)\ \text{взаимнооднозначно} \\ 3)\ \text{взаимнооднозначный ноль} \end{array}\right.$$

$$\Leftarrow \left[\begin{array}{l} 1)\ Ker\ A = \{0\},\ \text{значит инъективно, так как } v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \\ v_1 = Au_1, v_2 = Au_2 \\ \underbrace{v_2 - v_2}_{0} = \underset{\text{т.к. ядро тривиально}}{Au_1 - Au_2} = \underbrace{A(u_1 - u_2)}_{0} \\ 2)\ Im\ A = V \Leftrightarrow \forall v \in V :\ \exists u \in U\ Av = U \text{ — сюръекция} \end{array}\right.$$

def : $A \in L(U, V)$

- инъективно, если $Ker\ A = 0$

- сюръективно, если $Im\ A = U$

- биективно, изоморфизм, если инъективно и сюръективно

- эндоморфизм, линейный оператор, если $U = V$
  $End(V) = L(V, V)$

- автоморфизм $(Aut(V))$, если эндоморфизм + изоморфизм

def : Произведение линейных отоюражений

$$U \underset{B}{\rightarrow} W \underset{A}{\rightarrow} V$$

$A \in L(W, V)$
$B \in L(U, W)$
$C = (A + B) \in L(V, U)$ — композиция функций A и B.
$A \cdot B = A \circ B$
$\forall u \in U \ (A \cdot B)(u) = A(B(u))$
Зам:

1. A, B изоморфизм, то $A \cdot B$ изоморфизм
2. $(A_1 + A_2)B = BA_1 + BA_2$
   $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$
3. $A(BC) = (AB)C$

Значит $End(U, V)$ — алгебра с единицей и ассоциативностью.
def : $A \in L(U, V)$ изоморфизм
$\forall u \in V \ \exists! \ u \in U : v = Au$
$A^{-1} : V \to U \ A^{-1}u = v$
A^{-1} линейное $A^{-1}A = \varepsilon u$, $AA^{-1} = \varepsilon v$.
A^{-1} изоморфизм.
Если A — оператор, то A^{-1} — обратный оператор.
def : $U_0 \in V \ A \in L(U, V)$
Сужение A на линейное подпространство $A|_{u_0} : U_0 \to V$
$\forall u \in U_0 : \ A|_u v = A$
Утв: A изоморфизм $\in L(U_1, V) \Rightarrow A|_{u_0}$ изоморфизм $\in L(U_0, Im\ A|_{u_0})$
Примеры:

1. $0 : V \to U$
   - не сюръекция
   - не инъекция
   - эндоморфизм
   - не автоморфизм
2. $\varepsilon : V \to V$ автоморфизм
3. $A = \frac{d}{dt} \ A : P_n \to P_n$
   - не сюръекция

– не инъекция
– эндоморфизм
– не автоморфизм

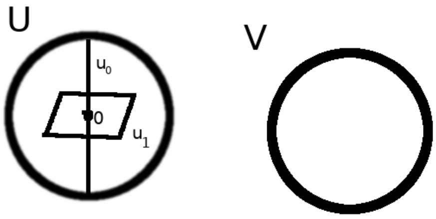
4. $x \underset{\in \mathbb{R}^n}{\to} y = Ax \in \mathbb{R}^n$

– Если $rgA = n \Leftrightarrow$ инъекция и сюръекция
– автоморфизм $\Leftrightarrow rgA = n$

Теорема. *(о ранге и дефекте отображений)*

$$A \in L(U, U)$$
$$rgA + defA = dimU$$

Док-во $\forall v \in U \ u = u_0 + v_1$ единственным образом



(a) $U_0 = k + vA$ (b) $U = U_0 \oplus U_1$ (c) $U_1 \cap U_1 = \{0\}$

$Au = A \underbrace{u_0}_{KerA} + Au_1 = Au_1$. Значит $Ima = AV_1$
$A_1 = A|_{u_1} : u_1 \to ImA$, A_1 - изоморфизм.
$U_1 \cong ImA \Leftrightarrow dim(U_1) = dim(Im\ a) \Leftrightarrow dim(KerA) \neq dim(Im\ a) = dim(U)$
Следствия:

1. $A \in L(U, V)$ эквивалентно:
   (a) A — изоморфизм
   (b) $dimV = dimU = rgA$
   (c) $dimU = dimV$, $KerA = \{0\}$
2. $A \in End(V)$ эквивалентно
   (a) A — изоморфизм
   (b) $dimV = rgA$
   (c) $KerA = \{0\}$

1.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$A \in L(U, V)$
$\xi_1, \dots, \xi_n$ — базис U
$\eta_1, \dots, \eta_m$ — базис V
$\forall u \in U \ u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \xi_i$
$v = Au = A(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i \xi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \underbrace{A\xi_i}_{\text{достаточно определить это}}$
$ImA = span(A\xi_1, \dots, A\xi_n)$
$A\xi_i \in V,\ A\xi_i = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \eta_i$
$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$, $A = (A_1, \dots, A_n)$ — матрица линейного отображения.

- Частный случай:

$$A \in End(V) : \underset{e_1,\dots,e_n}{V} \to \underset{e_1,\dots,e_n}{V}$$

матрица линейного оператора

Пример:

1. $\varepsilon : \underset{e_1,\dots,e_n}{V} \to \underset{e_1,\dots,e_n}{V}$

$$\varepsilon e_i = e_i \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2. $e : \underset{e'_1,\dots,e'_n}{V} \to \underset{e_1,\dots,e_n}{V}$

$$\xi e'_1 = e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j \Rightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

T — матрица перехода $= T_{e \to e'}$

3. Матрица поворота :(

4. $A : P_2 \to P_2$, базис - $1, t, t^2$
   $A = \frac{d^2}{dt}$, $End(V) \cong M_{n\times n}$

Изоморфизм ассоциативных, унитарных алгебр

$U\ \xi_1, \ldots, \xi_n\ \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$V\ \eta_1, \ldots, \eta_n\ \forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$A \in L(U, V) \underset{(z,\eta)}{\leftrightarrow} A$

$$\underset{\sum\limits_{j=1}^{m} v_j\eta_j,\ v_j \text{ - координаты}}{\overset{v}{\parallel}} = Au = \sum_{i=1}^{n} u_i A\xi_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_i = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{(\sum_{i=1}^{n} u_i a_{ji})}_{\text{координаты}}\eta_i$$

Значит $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}u_i \leftrightarrow V = Au, \mathcal{V} = \mathcal{AU}$

Примеры:

1. A поворот на угол α
   $(i, j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Теорема. *(о преобразовании матрицы линейного отображения при замене базиса)*
$A \in L(U, V)$
$U\ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ \xi' = (\xi'_1, \ldots, \xi'_n)\ A \underset{(\xi,\eta)}{\leftrightarrow} A$
$V\ \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n),\ \eta' = (\eta'_1, \ldots, \eta'_n)\ A \underset{(\xi',\eta')}{\leftrightarrow} A'$
$A' = T^{-1}_{\eta\to\eta'} A T_{\xi\to\xi'}$

Док-во:

$$\begin{array}{ccc} \underset{\xi_1,\ldots,\xi_n}{U} & \overset{\overset{\mathcal{A}}{\to}}{\underset{A}{\rightsquigarrow}} & \underset{\eta_1,\ldots,\eta_m}{V} \\ e_v \uparrow\uparrow T_{\xi\to\xi'} & & T^{-1}_{\eta\to\eta'} \downarrow\uparrow e_v \\ \underset{\xi'_1,\ldots,\xi'_n}{U} & \underset{\mathcal{A}}{\overset{A'}{\to}} & \underset{\eta'_n,\ldots,\eta'_m}{V} \end{array}$$

$\mathcal{A}^1 = \varepsilon_v^{-1}\mathcal{A}\varepsilon_v \leftrightarrow A^{-1} = T^{-1}_{\eta\to\eta'} A T_{\xi\to\xi'}$
Замечание: $V = Au \underset{(\xi,\eta)}{\leftrightarrow} v = Au$

$V = Au \underset{(\xi',\eta')}{\leftrightarrow} V' = A'u'$
$v = T_{\eta\to\eta'}v'$, $u = T_{\xi\to\xi'}u'$
$T_{\eta\to\eta'}V \;= AT_{\xi\to\xi'}u'$
$v' = \underbrace{T^{-1}_{\eta\to\eta'}AT_{\xi\to\xi'}}_{A'}u'$

1.3 Инварианты линейного отображения

def : Инвариант — свойство, которое сохраняется при определённых преобразованиях.
Форма записи $\mathcal{V} = \mathcal{A}u \leftrightarrow V = Au$ инвариант относительно замены базиса.
def : $A_{m\times n}$
$ImA = span(A_1, \dots, A_n) = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i A_i | \alpha_i \in K\} = \{\underset{Ax}{\underset{||}{Y}} \in \mathbb{R}^m | x \in \mathbb{R}^n\}$ 'newline
$rgA = dim(ImA)$
$KerA = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\} = \{$множество решений СЛОУ$\}$
$dim(KerA) = n - rgA = defA$
$rgA + defA = n$ — аналог теоремы о ранге и дефекте

Теорема. $\forall A \in L(U, V)$
$rg\mathcal{A} = rgA$
$def\mathcal{A} = defA$
rg, deg инварианты относительно выбора базиса

Док-во: $\mathcal{A} \underset{(\xi,\eta)}{\leftrightarrow} A$
$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — базис U
$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ — базис V
$In\mathcal{A} = span(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n})$
$\mathcal{A}_{\xi_i} \leftrightarrow A_i$ — координатный изоморфизм
$]rgA = k$, k столбцов линейно независимы. По свойствам изоморфизма среди $\mathcal{A}_{\xi_i}$ тоже k линейно независимых, а остальные — линейные комбинации $\Leftrightarrow dim(ImA) = k$
$\underset{n}{\underset{||}{dimU}} = \underset{k}{\underset{||}{rg\mathcal{A}}} + def\mathcal{A}$
$def\mathcal{A} = n - k = defA$
Следствия: $\mathcal{A}$ изоморфизм $\Leftrightarrow$ A невырождена ($\exists A^{-1}$), где A — матрица в некотором базисе.
Док-во: изоморфизм $\Leftrightarrow defA = 0 \Leftrightarrow rgA = n \Leftrightarrow A$ - невырожденная.

Определитель V $e_1, \dots, e_n$
D — n-форма, $D(e_1, \dots, e_n) = 1$
$\xi_1, \dots, \xi_n \in V$ $D(\xi_1, \dots, \xi_n) = det(\xi_1, \dots, \xi_n)$
$A \in End(V)$ — линейный оператор
def : $detA = det(\mathcal{A}e'_1, \dots, \mathcal{A}e'_n)$

Теорема. *$det\mathcal{A}$ не зависит от базиса e, $det\mathcal{A} = det\mathcal{A}'$.*

Док-во: V $e_1, \dots, e_n$
$det\mathcal{A} = det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$
$\mathcal{A}e_k = \sum\limits_{i_k=1}^{n} i_k k e_{i_k}$
$A_k = \begin{pmatrix} A_{1k} \\ \vdots \\ A_{nk} \end{pmatrix}$
$det\mathcal{A} = \sum\limits_{i_1=1}^{n} \sum\limits_{i_2=1}^{n} \dots \sum\limits_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \cdot \underbrace{det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})}_{n\text{-форма}} =$
$= \sum\limits_{\sigma=(i_1,\dots,i_n)} a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \cdot det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) =$
$= \sum\limits_{\sigma} a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \cdot det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \cdot (-1)^{\sigma} =$
$= \sum\limits_{\sigma} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} = detA$
Сменим базис, $e'_1, \dots, e'_n$ — базис V
$det\mathcal{A} = detT^{-1}\mathcal{A}T = det\mathcal{A}'$ (т.к. $T^{-1}T = E$).
def : Матрицы A, B называются подобными, если существует невырожденная C: $B = C^{-1}AC$.
Следствия: $\forall f$ — n-формы на V
$\forall \xi_i, \dots, \xi_n$ $\forall \mathcal{A} \in End(V)$
$f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = det\mathcal{A} \cdot f(\xi_1, \dots, \xi_n)$
Док-во: $f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = a(\xi_1, \dots, \xi_n) = det(\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot a(e_1, \dots, e_n) =$
$= det(\xi_1, \dots, \xi_n) f(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \left[\mathcal{A}e_k = \sum\limits_{i_k=1}^{n} a_{i_k k} e_{i_k}\right] =$
$= det(\xi_1, \dots, \xi_n) \sum\limits_{\delta} (-1)^{\varepsilon(\delta)} a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \cdot f(e_1, \dots, e_n) =$
$= det(\xi_1, \dots, \xi_n) f(e_1, \dots, e_n) det\mathcal{A} = det\mathcal{A} \cdot f(\xi_1, \dots, \xi_n)$
Замечание:
$AB = (AB_1, \dots, AB_n)$
$det(AB) = det(AB_1, \dots, AB_n) = det(A) \cdot det(B_1, \dots, B_n) = detA \cdot detB$.
Следствие 2: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$
$det(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = det\mathcal{A} \cdot det\mathcal{B}$
Следствие 3: $\mathcal{A} \in Ant(V) \Leftrightarrow det\mathcal{A} \neq 0$, $det\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{det\mathcal{A}}$

Утверждение: A, B подобные $\Rightarrow trA = trB$.
Док-во: A, B подобные $\Rightarrow$
$\exists C$: $C^{-1}AC = B$
$trB = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} C_{ij}^{-1}(AC)_{ji} =$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{-1}a_{jk}C_{ki} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\sum_{i=1}^{n} C_{ki}C_{ij}^{-1}}_{\delta_{ki}} =$$

$$= \left[\delta_{kj} = \begin{bmatrix} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{bmatrix}\right] = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = trA$$

def : $tr\mathcal{A} = trA$
trA не зависит от выбора базиса
def : $L \subset V$ L инвариантно относительно $End(V)$, если $\forall u \in L$ $\mathcal{A}u \subset L$.

Теорема. *$L \subset U$ $\mathcal{A} \subset End(U) \Rightarrow \exists$ базис U такой, что матрица A в этом базисе будет иметь вид*
$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$
$A_{k\times k}$, где $k = dimL$

Док-во: $L = span(e_1, \dots, e_n)$ дополним до V : $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$

$\mathcal{A}e_i \in L$, $\mathcal{A}e_i = \sum\limits_{m=1}^{k} a_{mi}e_m + \sum\limits_{m=k+1}^{n} 0e_m$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Следствия:

1. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантно по $\mathcal{A} \Rightarrow$
   $\exists$ базис пространства V, в котором матрица оператора имеет блочно-диагональный вид.
   Док-во: $L_i = span(e_i^1, \dots, e_i^{i_k})$
   т.к. $\oplus$, то базис V — объединение базисов L_i

Следствие 2:
$$\begin{matrix} V = \bigoplus L_i, L_i \text{ — инвариантно} \\ \mathcal{A} \in End(V) \end{matrix} \Rightarrow ImA = \bigoplus_{i=1}^{m} ImA|L_i$$

Док-во:
$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \Rightarrow \exists!$ представление $\forall \nu \subset U$ $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i \in L_i$

$\underset{\subset Im\mathcal{A}}{\nu} = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{m} \underset{\in ImA|L_i}{\mathcal{A}u_i} \Rightarrow Im\mathcal{A} \subset \sum\limits_{i=1}^{m} ImA|L_i \Rightarrow Im\mathcal{A} \subset \sum\limits_{i=1}^{m} ImA|L_i$

$]\nu_i \in ImA|L_i$ $\nu_i = \mathcal{A}u_i$, $u_i \in L_i$

$\sum\limits_{i=1}^{m} v_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} u_i\right) \in ImA$

$ImA = \sum\limits_{i=1}^{m} ImA|L_i$

$\nu_i \in ImA|L_i$ $\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i = 0$

$\nu_i = Au_i \Rightarrow Au_i \in L_i$ (L_i инв.) $\Rightarrow \nu_i \in L_i$ и ν_i дизъюнктны, значит все $\nu_i = 0$, значит $\mathcal{A} = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} ImA|L_i$

1.4 Собственные числа и вектора

$\mathcal{A} \in End(V)$

def : $\lambda \in K$ собственное число линейного оператора $\mathcal{A}$, если $\exists v \in V \neq 0$, который называется собственным вектором, что $\mathcal{A}v = \lambda v$.

$\exists v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)$.

def : $V_\lambda = Ker(A - \lambda\varepsilon) = \{$собственные вектора $V\}$ называется собственным подпространством.

$\gamma(\lambda) = dimU_\lambda$ геометрической кратностью собственного числа

$\gamma(\lambda)$ инвариантны относительно базиса (Ker — инвариант).

λ собственное число, v собственный вектор $\Leftrightarrow Ker(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) \Leftrightarrow det(\mathcal{A} - \lambda\varepsilon) = 0$

def : $\chi_A(t) = det(\mathcal{A} - t\varepsilon)$ — характеристический многочлен

V $e_1, \ldots, e_n$ базис $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(\mathcal{A} - t\varepsilon) = det(A - t\varepsilon)$

$$\chi_A(t) = det(A - t\varepsilon) = \begin{pmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & (a_{nn} - t) \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \ldots + a_{nn})}_{trA = tr\mathcal{A}} t^{n-1} + \ldots + detA$$

$det\mathcal{A} = \lambda_1 \ldots \lambda_n$, λ_i — корни $\chi_A(t)$

$\lambda \in K$ с.ч $\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0)$

$K = \mathbb{C} \Rightarrow$ п.с.ч

$K = \mathbb{R} \Rightarrow$ только вещественные корни будут собственными числами.

def : множество всех чисел с учётом алгебраической кратности называется спектром линейного оператора. Спектр простой, если все собственные числа попарно различны.
$det\mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda = 0$ с.ч.

Теорема. *λ с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$*

Док-во: $]\gamma(\lambda) = k = dimV_\lambda$
V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ базис: матрица будет иметь вид
$A = \begin{pmatrix} A_1 & | & A_2 \\ - & + & - \\ 0 & | & A_3 \end{pmatrix}$ базис $= \underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\text{собств. вектора}}, v_{k+1}, \dots, v_n$

$$\mathcal{A}_{v_i} \subset V_\lambda = \lambda v_i \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_\mathcal{A}(t) = det \begin{pmatrix} \lambda - t & \dots & 0 & | & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & & & \\ 0 & \dots & \lambda - t & | & A_2 & & \\ - & - & - & + & - & - & - \\ & & 0 & | & A_3 - tE & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda - t \end{vmatrix} |A_3 - tE| = (\lambda - t)^k \chi_{A_3}(t)$$

λ — корень $\chi_A(\varepsilon)$ ратности не меняется $\Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k \cdot \gamma(\lambda)$

Теорема. *$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A}$*
$v_i, \dots, v_m$ соответствующие им с.в. $\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ линейно независимы.

Док-во: индукция

1. база $m = 1$, (λ_1, v_1) лин. нез $V_1 \leq 0$
2. $]$ верно для $m - 1$
3. $]$ $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ попарно различные.

От противного, $\exists v_m = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i v_i$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i = \lambda_m v_m = \overleftarrow{\mathcal{A}}\overrightarrow{v_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A} v_i = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i$$

$\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_m)v_i = 0$, значит $\alpha_i = 0 \Rightarrow v_m = 0$, противоречие

Следствие: $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно парличные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_m}$ дизъюнктны

Док-во: $v_1 + \ldots + v_m = 0$, $v_i \in V_{\lambda_i}$

Если бы хотя бы одно из слагаемых $\neq 0$, то это слагаемое с.в. $\Rightarrow$ противоречие с лин. незав. с.в. отвевечающих различным с.и. $\Rightarrow u_i : v_i = 0 \Rightarrow$ дизъюнктны.

Теорема. *$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$, L_i инвариантно относительно $\mathcal{A}$*

$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} \cdot L_i \to\Rightarrow \chi_A(t) = \prod\limits_{i=1}^{m} \chi_{\mathcal{A}_i}(t)$

Док-во:

$A = \begin{pmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \end{pmatrix}$ — очевидно.

1.5 Операторы простой структуры. Проекторы. Спектральные разложения о.п.с. Функция от матрицы.

def : $A \in End(V)$

A называется оператором простой структуры, если $\exists$ базис пространства V, такой что матрица оператора имеет диагональный вид $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists$ базис V из собственных векторов $A \Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda\text{- с.ч. } A} V_\lambda$

λ_i собственное число

$Av_i = \lambda_i v_i$

$V = span(v_1, \ldots, v_n)$

Теорема. *$\sqsupset \sum\limits_{\lambda \text{ с.ч. } A} \alpha(\lambda) = n = dimV \Leftrightarrow$ все корни $\chi(t) \in K \Leftrightarrow$ все корни $\chi(t)$ являются с.ч. A.*

Док-во: A оператор простой структуры $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow n = dimV = \sum\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} \gamma(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda) \Rightarrow \forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$, $1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$.

Следствие 1: $\sum\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda) = n = dimV$

A о.п.с $\Leftarrow$ спектр простой (n попарно различных собственных чисел).
def : $A_{n\times n}$ называется диагонализируемой, если $\exists$ невырожденная $T_{n\times n}$: $T^{-1}AT = \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (A подобно диагональной матрице).
Следствие 2: Если матрица $A_{n\times n}$ — матрица некоторого о.п.с A, то она диагонализируема. И обратно, любая диагонализируемая матрица является матрицей о.п.с. в некотором базисе.
Док-во: $\underset{(e_1,\dots,e_n)\text{ базис } A}{A} \leftrightarrow A$ — о.п.с. $\Leftrightarrow \exists$ базис $v_1, \dots, v_n$ с.в., $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ с.ч. $\leftrightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$
$T = T_{e\to v}$ невырожденная
$\Lambda = T^{-1}AT$
$A = T\Lambda T^{-1}$ $\blacksquare$
A — диагонализ. $\Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \; \forall\lambda$ с.ч. $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$
def : $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \Leftrightarrow \forall v \in V \; \exists! : v = \sum\limits_{i=1}^{m} V_i \in L_i$
$\rho_i : V \to L_i \subset V$, $L_i \subset V$ линейное подпространство
$\forall v \in V \;\; \rho_i v := v_i$ — оператор проектирования, $i = 1 \dots m$.
$\rho_i \in End(V)$ (доказывается расписыванием $\rho_i(u + \lambda v)$)
Свойства проекторов:

1. $\forall i \neq j \;\; \rho_i\rho_j = 0$
2. $\forall i : {\rho_i}^2 = \rho_i$ ($\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \;\; {\rho_i}^k = \rho_i$)
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} = \varepsilon$
4. $Ker\rho_i = \sum\limits_{i\neq j} L_j$
   $Im \; \rho_i = L_i$

Док-во:

1. $\forall v \in V \;\; \rho_i\rho_j(v) = \rho_i \underset{\in L_j}{V_j} = 0$, т.к. L_i дизъюнктны
2. $\forall v \in V \;\; \rho_i\underbrace{\rho_i(v)}_{v_i \in L} = v_i = \rho_i v$, т.к. верно для $\forall v \in V$, то и для базиса $\Rightarrow$ оператор совпадает $\rho_i\rho_i = \rho_i$
3. $\forall v \in V \; \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i\right) v = \sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i = v = \varepsilon v \Rightarrow \dots \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i = \varepsilon$

4. $\rho_i(v_1+\ldots+v_{i-1}+v_{i+1}+\ldots+v_m)=0$
   $\sum\limits_{j\neq i} L_j \subset Ker\rho_i$, т.к. $V=\bigoplus\limits_{j\neq i} L_j \oplus L_i \Rightarrow Ker\rho_i = \bigoplus\limits_{j\neq i} L_j$
   $Im\ \rho_i = L_i$ по построению $\subset$
   верно $\supset \forall v_i \in L_i \rightsquigarrow \underset{\rho v_i = v_i}{\underset{||}{v_i}} \in V$

Утв: $\underset{i=1\ldots m}{\rho_i} : V \to V$ и выполн. свойства 1°, $3^\circ \Rightarrow V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} Im\ \rho_i$ (т.е. проекторы на $L_i = Im\ \rho_i$).
Док-во:

1. если выполнены 1°, 3°, то и выполнено 2°. $\rho_i\rho_i=\rho_i$?
   $\rho_i=\rho_i\varepsilon=\rho_i\sum\limits_{i=1}^{m}\rho_i=\sum\limits_{j=1}^{m}\rho_i\rho_j=\rho_i\rho_i$

2. $V_1+V_2+\ldots+V_m=0$
   $V_i\in Im\rho_i$ дизъюнктны
   $V_i=\rho_i w_i$, $W_i\in V$
   $V_i=\rho_i\varepsilon w_i=\rho_i\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\rho_j w_i\right)=\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\rho_j\rho_j\right)w_i$

Теорема. *о спектральном разложении о.п.с.* $V=\bigoplus\limits_{\lambda\ \text{с.ч.}} V_\lambda$, $\rho_\lambda : V\to V_\lambda$
A *о.п.с.* $\Leftrightarrow A=\sum\limits_{\lambda\ \text{с.ч.}}\lambda\rho_\lambda \leftarrow$ *спектральный проектор*

Док-во:

1° $\rho_\lambda\rho_\mu=0, \lambda\neq\mu$

2° $\rho_\lambda^2=\rho_\lambda$

3° $\sum\limits_{\lambda\ \text{с.ч.}}\rho_\lambda=\varepsilon$

$\forall v\in V$, $Av=A\left(\sum\limits_{\lambda}V_\lambda\right)=\sum\limits_{\lambda\ \text{с.ч.}}\underbrace{AV_i}_{\lambda V_\lambda}=\sum\limits_{\lambda\ \text{с.ч.}}\lambda V_\lambda=\sum\limits_{\lambda\ \text{с.ч.}}\lambda\rho_\lambda v$. Доказательство верно $\forall v\in V$, в частности, для базиса.
Следствие: $A_{n\times n}$ диагонал. $\Leftrightarrow \exists P_\lambda : 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$
$A=\sum\limits_{\lambda\ \text{с.ч.}}\lambda P_\lambda$
$\underset{\in Im\rho_1}{v_1}+\ldots+\underset{\in Im\rho_m}{v_m}=0\Rightarrow v_i=\rho_i w_i$

$$v_i = \rho_i w_i \overset{(1)}{=} \underbrace{\rho_i \left(\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\rho_j w_j}_{v_j} \right)}_{0} = 0$$

$(1) \sum\limits_{j=1}^{m} \underbrace{\rho_i(\rho_j}_{\neq 0} w_j) = \rho_i^2 w_i = \rho_i w_i$

def : $(A_k) = \left((a_{ij}^k)\right)_{k=1}^{\infty}$ посл. матрица

$\exists \lim\limits_{k\to\infty} A_k = A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \exists\ \forall (i,j) a_{ij} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^k$

$$\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m}_{\text{сумма}} = \exists \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{m=1}^{N} A_m}_{\text{частичная сумма}}$$

$f(x)$ аналитична в $|x| < R \Leftrightarrow f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m$, $C_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$

def : функция от матрицы $A_{n\times n}$

$f(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m a^m$, $C_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$

$f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m x^m$

$e^A = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$

Теорема. *f аналитична в $|x| < R$*
$A_{n\times n}$ все с.ч. $|\lambda| < R$
A диагонализируема $!\exists T : \Lambda = T^{-1}AT$, $\exists p_\lambda : A = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda$

1. $\exists f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$
2. $f(A) = \sum\limits_{\lambda \text{ с.ч.}} f(\lambda) p_\lambda$

Док-во:

1. $f(A) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m A^m$

$$A^m = (T\Lambda T^{-1})^m = T\Lambda \underbrace{T^{-1}T}_{E}\Lambda \dots \underbrace{T^{-1}T}_{E}\Lambda T^{-1} = T\Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m T \Lambda^m T^{-1} = T \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m \Lambda^m \right) T^{-1} =$$

$$= T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

2. $A^m = \left(\sum_{\lambda} \lambda P_\lambda \right)^m = \sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(\sum_{\lambda} \lambda^m P_\lambda \right) = \sum_{\lambda} \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda^m \right) P_\lambda = \sum_{\lambda} f(\lambda) P_\lambda$$