1 Линейные отображения.

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте.

def Линейное отображение A — функция A: $U \to V$, где U, V - линейные пространства над K. Со свойствами:

1. $\forall \lambda \in K\ \forall v, u \in U$
   $A(u + \lambda v) = A(u) + \lambda A(v)$

Замечания:

1. $A(u) = Au$ — синтаксис.
2. поточечно выполняются все свойства арифметических операций.

Примеры:

1. θ — нулевое линейное отображение
   $\forall u \in V\ \theta u = 0v$
2. ε — тождественное отображение
3. $U = V = P_n$ — многочлен степени $\leq n$. $A : U \to V$.
   $Ap = p'(t)$ — дифференциальный оператор
   $A(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2'$
4. $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$, $A = (a_{ij})\ m \times n$.
   $A : x \in \mathbb{R}^n \to y = Ax \in \mathbb{R}^m$
   $x_1 + \lambda x_m \in \mathbb{R}^n$, $A(x_1 + \lambda x_2) = A(x_1) + \lambda A(x_2)$
5. Изоморфизм (взаимно однозначное соответствие)

def Умножение линейного отображения на скаляр.
$B = \lambda A$
$\forall u \in V\ B(u) = \lambda A(u)$
def Сумма линейных отображений
$C = A + B$
$\forall u \in V\ C(u) = A(u) + B(u)$
$-A$ — отображение противоположное A
def $A \in L(U, V)$

1. $Ker\ A = \{v \in V \mid Au = \theta\}$ — ядро линейного отображения
2. $Im\ A = \{v = Au \mid \forall u \in U\}$ — образ линейного отображения

Замечание:

1. $Ker\ A$ и $Im\ A$ - это линейные подпространства

<u>**def**</u> Если:

- $Ker\ A$ конечномерное, то
  $dim(Ker\ A) = def\ A$ — дефект A
- ImA конечномерное, то
  $dim(Im\ A) = rg\ A$ — ранг A

<u>**Утв**</u>: A изоморфизм U, V $\Leftrightarrow$

1. $A \in L(U, V)$
2. $Im\ A = V$
3. $Ker\ A = \{0_v\}$ тривиально

<u>**Док-во**</u>: A изоморфизм $\Leftrightarrow$ взаимно однозначное и линейное

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{1) из определения} \\ \text{2) взаимнооднозначно} \\ \text{3) взаимнооднозначный ноль} \end{array}\right.$$

$$\Leftarrow \left[\begin{array}{l} \text{1) } Ker\ A = \{0\}, \text{ значит инъективно, так как } v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \\ v_1 = Au_1, v_2 = Au_2 \\ \underbrace{v_2 - v_2}_{0} = \underset{\text{т.к. ядро тривиально}}{Au_1 - Au_2} = \underbrace{A(u_1 - u_2)}_{0} \\ \text{2) } Im\ A = V \Leftrightarrow \forall v \in V :\ \exists u \in U\ Av = U \text{ — сюръекция} \end{array}\right.$$

<u>**def**</u> : $A \in L(U, V)$

- инъективно, если $Ker\ A = 0$
- сюръективно, если $Im\ A = U$
- биективно, изоморфизм, если инъективно и сюръективно
- эндоморфизм, линейный оператор, если $U = V$
  $End(V) = L(V, V)$
- автоморфизм ($Aut(V)$), если эндоморфизм + изоморфизм

def : Произведение линейных отоюражений

$$U \underset{B}{\to} W \underset{A}{\to} V$$

$A \in L(W, V)$
$B \in L(U, W)$
$C = (A + B) \in L(V, U)$ — композиция функций A и B.
$A \cdot B = A \circ B$
$\forall u \in U \ (A \cdot B)(u) = A(B(u))$
Зам:

1. A, B изоморфизм, то $A \cdot B$ изоморфизм
2. $(A_1 + A_2)B = BA_1 + BA_2$
   $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$
3. $A(BC) = (AB)C$

Значит $End(U, V)$ — алгебра с единицей и ассоциативностью.
def : $A \in L(U, V)$ изоморфизм
$\forall u \in V \ \exists! \ u \in U : v = Au$
$A^{-1} : V \to U \ A^{-1}u = v$
A^{-1} линейное $A^{-1}A = \varepsilon u$, $AA^{-1} = \varepsilon v$.
A^{-1} изоморфизм.
Если A — оператор, то A^{-1} — обратный оператор.
def : $U_0 \in V \ A \in L(U, V)$
Сужение A на линейное подпространство $A|_{u_0} : U_0 \to V$
$\forall u \in U_0 : \ A|_u v = A$
Утв: A изоморфизм $\in L(U_1, V) \Rightarrow A|_{u_0}$ изоморфизм $\in L(U_0, Im \ A|_{u_0})$
Примеры:

1. $0 : V \to U$
   - не сюръекция
   - не инъекция
   - эндоморфизм
   - не автоморфизм
2. $\varepsilon : V \to V$ автоморфизм
3. $A = \frac{d}{dt} \ A : P_n \to P_n$
   - не сюръекция

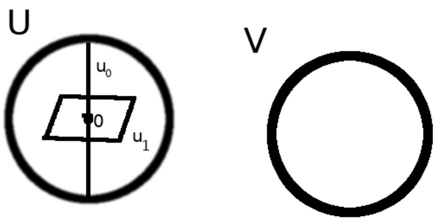
- не инъекция
- эндоморфизм
- не автоморфизм

4. $x \underset{\in \mathbb{R}^n}{\rightarrow} y = Ax \in \mathbb{R}^n$
   - Если $rgA = n \Leftrightarrow$ инъекция и сюръекция
   - автоморфизм $\Leftrightarrow rgA = n$

<u>**Теорема.**</u> *(о ранге и дефекте отображений)*

$$A \in L(U, U)$$
$$rgA + defA = dimU$$

<u>**Док-во**</u> $\forall v \in U \ u = u_0 + v_1$ единственным образом



(a) $U_0 = k + vA$ (b) $U = U_0 \oplus U_1$ (c) $U_1 \cap U_1 = \{0\}$

$Au = A \underbrace{u_0}_{KerA} + Au_1 = Au_1$. Значит $Ima = AV_1$
$A_1 = A|_{u_1} : u_1 \rightarrow ImA$, A_1 - изоморфизм.
$U_1 \cong ImA \Leftrightarrow dim(U_1) = dim(Im\ a) \Leftrightarrow dim(KerA) \neq dim(Im\ a) = dim(U)$
<u>**Следствия**</u>:

1. $A \in L(U, V)$ эквивалентно:
   (a) A — изоморфизм
   (b) $dimV = dimU = rgA$
   (c) $dimU = dimV$, $KerA = \{0\}$
2. $A \in End(V)$ эквивалентно
   (a) A — изоморфизм
   (b) $dimV = rgA$
   (c) $KerA = \{0\}$