

Билет 1

Мне лень писать законы де Моргана :(

Упорядоченная пара — это двухэлементное семейство, где множеством индексов является $\{1, 2\}$.

Декартовым или прямым произведением множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар, таких что первый элемент пары принадлежит X , а второй — Y .

Билет 2

Аксиомы вещественных чисел:

1. ассоциативность сложения $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. коммутативность сложения $x + y = y + x$
3. существование нейтрального элемента $\exists 0 : x + 0 = 0 + x = x$
4. существование обратного элемента $\exists(-x) : x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. ассоциативность умножения $(xy)z = x(yz)$
6. коммутативность умножения $xy = yx$
7. существование нейтрального элемента $\exists 1 : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
8. существование обратного элемента $\exists x^{-1}, x \neq 0 : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$
9. дистрибутивность умножения относительно сложения $x(y + z) = xy + xz$

Так же есть аксиомы Архимеда и Кантора.

Билет 3

Определение математической индукции и бинома Ньютона очевидны.

Индуктивное множество — $1 \in M, \forall x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$.

\mathbb{N} — минимальное по включению индуктивное подмножество \mathbb{R} .

Билет 4

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху/снизу*, если $\exists M \in \mathbb{R} : x \leq M$ ($x \geq M$), $x \in E$. Множество E ограниченное, если оно ограничено и сверху, и снизу.

M — максимум (минимум) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $M \in E$ и $M \geq x$ ($M \leq x$), $x \in E$. Максимум E — $\max E$, минимум E — $\min E$.

4.1 Теорема (Существование максимума и минимума конечного множества). *Во всяком конечном подмножестве \mathbb{R} есть наибольший и наименьший элемент.*

Доказательство по индукции. ■

4.2 Следствия. *Во всяком непустом ограниченном сверху (снизу) подмножестве \mathbb{Z} есть наибольший (наименьший) элемент. В непустом подмножестве \mathbb{N} есть наименьший элемент.*

Билет 5

Наибольшее целое число не превосходящее $x \in \mathbb{R}$ называется целой частью числа x и обозначается $[x]$.

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad x - 1 < [x] \leq x.$$

5.1 Теорема (Плотность множества рациональных чисел). *Во всяком интервале есть рациональное число.*

Для доказательства возьмём $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Тогда $\frac{1}{b-a} > 0$ и по аксиоме Архимеда $\exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$, то есть $\frac{1}{n} < b - a$. Возьмём $c = \frac{[na]+1}{n}$. Тогда $c \in \mathbb{Q}$ и

$$c \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b,$$

$$c > \frac{na-1+1}{n} = a$$

■

5.2 Следствия. *Во всяком интервале бесконечно много рациональных чисел.*

Извилистая дорога

Пусть $f : X \rightarrow Y, A \subset X$. Образ множества A при отображении f — это

$$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A \ f(x) = y\}.$$

Пусть $f : X \rightarrow Y, B \subset Y$. Прообраз множества B при отображении f — это

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Пусть $f : X \rightarrow Y$. Если $f(X) = Y$, то f — сюръекция. Другими словами, для любого y есть решение в X .

Пусть $f : X \rightarrow Y$. Если для любых различных элементов из X их образы различны, то f — инъекция.

Биекция = инъекция + сюръекция.

Пусть $f : X \rightarrow Y$ и f обратимо. Тогда обратное отображение к f — это отображение f^{-1} , которое каждому элементу y из $f(X)$ сопоставляет (единственное) значение x из X , для которого $f(x) = y$.

Пусть $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$, $f(X) \subset Y$. Тогда композиция $(g \circ f)(x)$ есть $h(x) = g(f(x))$, $x \in X$. g — внешнее отображение, f — внутреннее отображение. $f \circ g \neq g \circ f$.

Билет 6

Два множества эквивалентны, если между ними можно провести биекцию.

Множество называется счётным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

6.1 Теорема. *Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество*

Пусть A — бесконечное множество. В нём есть a_1 , $A \setminus \{a_1\}$ бесконечно, поэтому в нём есть a_2 . $A \setminus \{a_1, a_2\}$ бесконечно, поэтому в нём есть a_3 т.д. Новое множество $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ будет счётным по построению. ■

6.2 Теорема. *Всякое бесконечное подмножество счётного подмножества счётно: A счётно, $B \subset A$ и B бесконечно, то B — счётно.*

Расположим элементы A в виде последовательности

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Будем нумеровать элементы B в порядке их появления в этой последовательности. Тем самым каждый элемент B будет занумерован ровно один раз и, так как множество B бесконечно, для нумерации будет использован весь натуральный ряд. ■

Не более чем счётное множество — пустое, конечное или счётное множество.

Билет 7

7.1 Лемма. *Пусть элементы множества A расположены в виде бесконечной в обоих направлениях матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

тогда A счётно (для доказательства перечисляй элементы по дополнительным диагоналям).

По лемме $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — счётно.

7.2 Теорема. Не более чем счётное объединение не более чем счётных множеств не более чем счётно.

Пусть $B = \bigcup_{k=1}^n A_k$ или $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, A_k не более чем счётно. Запишем элементы $A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ в k -ю строку матрицы. Таким образом все клетки окажутся записаны в матрицу и по лемме выше мы получили, что B эквивалентно некоторому подмножеству $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

Билет 8

8.1 Теорема. Множество рациональных чисел счётно. Обозначим

$$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$$

При всех $q \in \mathbb{N}$ множество $\mathbb{Q}_q = \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \dots\right\}$ счётно. По теореме 7.2 и $\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathbb{Q}_q$ счётно. Очевидно, что $\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+$. Снова по теореме 7.2 множество $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \mathbb{Q}_+ \cup 0$ счётно. ■

Билет 9

9.1 Теорема (Несчётность отрезка). Отрезок $[0, 1]$ несчётен.

Допустим противное: пусть отрезок $[0, 1]$ счётен, тогда все числа в нём можно расположить в виде последовательности

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

Разобьём отрезок $[0, 1]$ на 3 равных отрезка $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$. Обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из них, который не содержит точки x_1 . Далее разобьём $[a_1, b_1]$ на 3 отрезка по алгоритму выше и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот, который не содержит x_2 . Продолжим этот процесс неограниченно. В результате получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. По аксиоме о вложенных отрезка существует точка x^* , принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Также, $x^* \in [0, 1]$. Но тогда существует $m : x^* = x_m$ (по условию). По построению $x_m \notin [a_m, b_m] \Rightarrow x^* \notin [a_m, b_m]$, что противоречит принадлежности x^* всем отрезкам. ■

Знак извилистой дороги

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел. Тогда $a \in \mathbb{R}$ — предел последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть $V_a(\varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ — ε -окрестность точки a . Тогда $a \in \mathbb{R}$ — предел последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > N \quad x_n \in V_a(\varepsilon)$$

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность в X . Точку $a \in X$ называют пределом последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

Если определения выше сильно меняются для функций и отображений, то пинганите или добавьте.

Функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется метрикой, если она удовлетворяет следующим условиям ($x, y, z \in X$):

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника)

Пара (X, ρ) — множество с метрикой в нём — называется метрическим пространством.

Пусть K — поле, X — множество, и над элементами X и K определены две операции: сложение $X \times X \xrightarrow{+} X$ и умножение $X \times X \xrightarrow{\cdot} X$, удовлетворяющие следующим свойствам ($x, y, z \in X, \gamma, \lambda \in K$):

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $x + y = y + x$
3. $\exists \theta \in X : 0 \cdot x = \theta$
4. $(\lambda + \gamma)x = \lambda x + \gamma x$
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
6. $(\lambda \gamma)x = \lambda(\gamma x)$

7. $1 \cdot x = x$

Тогда X — векторное пространство над полем K

Пусть X — векторное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} . Нормой в X называется функция $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Положительная определённость

$$\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

2. Положительная однородность

$$\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$$

3. Неравенство треугольника (полуаддитивность)

$$\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$$

Норма: $\rho(x) = \|x\|$. Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется нормированным пространством.

Билет 10

10.1 Теорема (Единственность предела последовательности). *Последовательность в метрическом пространстве не может иметь более одного предела: если $x_n \rightarrow a$, $x_n \rightarrow b$, то $a = b$.*

Предположим противное: пусть $a \neq b$. Тогда по первой аксиоме расстояния $\rho(a, b) > 0$. Возьмём $\varepsilon = \frac{\rho(a, b)}{2}$, по определению предела найдутся такие N_1 и N_2 , что $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ для всех $n > N_1$, а $\rho(x_n, b) < \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Тогда, если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то по аксиомам расстояния

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \rho(a, b), \text{ что противоречиво}$$

■

Теорема (Ограниченность сходящейся последовательности). *Сходящаяся последовательность ограничена*

Пусть $x_n \rightarrow a$. Взяв $\varepsilon = 1$, подберём такой номер N , что для всех номеров $n > N$ будет $\rho(x_n, a) < 1$. Положим

$$R = \max\{\rho(x_1, a), \dots, \rho(x_N, a), 1\}$$

Тогда $\rho(x_n, a) \leq R$ при всех $n \in \mathbb{N}$. ■

Билет 11

11.1 Теорема (Предельный переход в неравенстве). Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ — вещественные последовательности, $x_n \leq y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$. Тогда $a \leq b$.

Предположим противное: пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. По определению предела найдутся такие N_1 и N_2 , что $a - \varepsilon < x_n$ для всех $n > N_1$, а $y_n < b + \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Значит, если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то

$$y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < x_n, \text{ что противоречит условию}$$

■

11.2 Теорема (О сжатой последовательности). Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ и $\{z_n\}$ — вещественные последовательности, $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\lim x_n = \lim z_n = a$. Тогда $\lim y_n$ существует и равен a .

Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению предела найдутся такие N_1, N_2 , что $a - \varepsilon < x_n$ для всех $n > N_1$, а $z_n < a + \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для всех $n > N$

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

В силу произвольности ε предел $\{y_n\}$ существует и равен a . ■

Билет 12

Последовательность называется бесконечно малой, если она стремится к 0.

Теорема. (Арифметические действия над сходящимися последовательностями в

12.1 нормированном пространстве) Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, $\{x_n\}, \{y_n\}$ — последовательности в X , $\{\lambda_n\}$ — числовая последовательность, $x_0, y_0 \in X$, $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Тогда

$$1. x_n + y_n \rightarrow x_0 + y_0$$

$$2. \lambda_n y_n \rightarrow \lambda_0 y_0$$

$$3. x_n - y_n \rightarrow x_0 - y_0$$

$$4. \|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$$

1. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению предела найдутся такие N_1 и N_2 , что $\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N_1$ и $\|y_n - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n > N$ будет

$$\|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| < \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. По неравенству треугольника

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| &= \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n + \lambda_0(x_n - x_0)\| \leq \\ &\leq |\lambda_n - \lambda_0| \|x_n\| + |\lambda_0| \|x_n - x_0\| \end{aligned}$$

По условию последовательности $\{|\lambda_n - \lambda_0|\}$, $\{|x_n - x_0|\}$ бесконечно малые, а по теореме 10.2 последовательность $\{\|x_n\|\}$ ограничена, как и постоянная последовательность $\{|\lambda_0|\}$. Следовательно по лемме "Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая" оба слагаемых в правой части бесконечно малые, а тогда по утверждению 1 их сумма бесконечно малая. Наконец, $\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| \rightarrow 0$ по теореме 11.1.

3. Доказывается аналогично утверждению 1 или применением уже доказанных утверждений 1 и 2:

$$x_n - y_n = x_n + (-1)y_n \rightarrow x_0 + (-1)y_0 = x_0 - y_0$$

4. Утверждение следует из неравенства

$$|\|x_n\| - \|x_0\|| \leq \|x_n - x_0\|$$

(леммы про свойства полунорм) и теоремы 11.1.

■

Билет 13

Пусть X — векторное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} . Функция $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется скалярным произведением в X (обозначение: $\phi(x, y) = (x, y)$), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1. Линейность по первому аргументу

$$(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$$

2. Эрмитовская симметричность

$$(y, x) = \overline{(x, y)}$$

3. Положительная определённость

$$(x, y) \geq 0; (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

Свойства скалярного произведения:

1. $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$
2. $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$
3. $(\theta, y) = (x, \theta) = 0$

13.1 Теорема. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Пусть $(y, y) > 0$ (в противном случае $y = \theta$ и неравенство выполнено), положим

$$\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$$

Тогда в силу аксиом скалярного произведения и равенства $\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2$

$$\begin{aligned} (x + \lambda y, x + \lambda y) &= (x, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2(y, y) = \\ &= (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(x, x)(y, y) - |(x, y)|^2 = (y, y)(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$$

■

13.2 Лемма (Это не лемма, просто хз как обозвать). Функция $\rho(x) = \sqrt{(x, x)}$ — норма в X .

Положительная определённость ρ следует из положительной определённости скалярного произведения. Далее,

$$\rho(\lambda x) = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda}(x, x)} = |\lambda| \rho(x)$$

Докажем неравенство треугольника. Применяя 13.1, имеем

$$\begin{aligned} \rho^2(x + y) &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \\ &= (x, x) + 2\operatorname{Re}(x, y) + (y, y) \leq (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) \leq \\ &\leq \rho^2(x) + 2\rho(x)\rho(y) + \rho^2(y) = (\rho(x) + \rho(y))^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Билет 14

14.1 Следствия. (КБШ в \mathbb{R}^m и \mathbb{C}^m)

1. Скалярное произведение в \mathbb{R}^m :

$$(x, y) = \sum_{k=1}^m x_k y_k$$

2. Скалярное произведение в \mathbb{C}^m :

$$(z, w) = \sum_{k=1}^m z_k \overline{w_k}$$

■

Далее запись $x_i^{(j)}$ подразумевает, что i — номер координаты, j — номер последовательности.

Говорят, что последовательность $\{x^{(n)}\}$ точек \mathbb{R}^m сходится к пределу $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ покоординатно, если $x_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_j^{(0)}$, для всех $j \in [1 : m]$.

14.2 Лемма. В \mathbb{R}^m покоординатная сходимость и сходимость по Евклидовой норме равносильны.

Утверждение следует из неравенств

$$\begin{aligned} |x_j^{(n)} - x_j^{(0)}| &\leq |x^{(n)} - x^{(0)}| = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k^{(n)} - x_k^{(0)})^2} \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq k \leq m} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}| \end{aligned}$$

и теоремы 11.1. ■

Билет 15

Говорят, что вещественная последовательность $\{x_n\}$ стремится к:

1. плюс бесконечности, если

$$\forall E > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ x_n > E$$

2. минус бесконечности ($x_n < -E$)

3. бесконечности (бесконечности неопределённого знака) ($|x_n| > E$)

Последовательность, стремящаяся к бесконечности называется бесконечно большой.

15.1 Теорема (Арифметические действия над бесконечно большими). Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ — числовые последовательности

1. Если $x_n \rightarrow +\infty$, $\{y_n\}$ ограничена снизу, то $x_n + y_n \rightarrow +\infty$
2. Если $x_n \rightarrow -\infty$, $\{y_n\}$ ограничена сверху, то $x_n + y_n \rightarrow -\infty$
3. Если $x_n \rightarrow \infty$, $\{y_n\}$ ограничена, то $x_n + y_n \rightarrow \infty$
4. Если $x_n \rightarrow \pm\infty$, $y_n \geq b > 0$ для всех n (или $y_n \rightarrow b_1 > 0$), то $x_n y_n \rightarrow \pm\infty$
5. Если $x_n \rightarrow \pm\infty$, $y_n \leq b < 0$ для всех n (или $y_n \rightarrow b_1 < 0$), то $x_n y_n \rightarrow \mp\infty$
6. Если $x_n \rightarrow \infty$, $|y_n| \geq b > 0$ для всех n (или $y_n \rightarrow b_1 \neq 0$), то $x_n y_n \rightarrow \infty$
7. Если $x_n \rightarrow a \neq 0$, $y_n \rightarrow 0$, $y_n \neq 0$ при всех n , то $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$
8. Если $x_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$, $y_n \rightarrow \infty$, то $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$
9. Если $x_n \rightarrow \infty$, $y_n \rightarrow b \in \mathbb{C}$, $y_n \neq 0$ при всех n , то $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

Почти всё очевидно, докажем 8 пункт для наглядности.

По теореме о пределе произведения и лемме “Последовательность бесконечно большая, когда обратная ей бесконечно малая” получаем, что

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \rightarrow a \cdot 0 = 0 \blacksquare$$

Знак извилистой дороги

Точка a называется внутренней точкой множества D , если существует окрестность точки a , содержащаяся в D .

Множество D называется открытым, если все его точки внутренние.

Множество D называется замкнутым в X , если оно содержит все свои предельные точки.

Подмножество K метрического пространства X называется компактным, если из любого открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие:

$$\forall \{G_a\}_{a \in A} : K \subset \bigcup_{a \in A} G_a, G_a \text{ открыты в } X$$

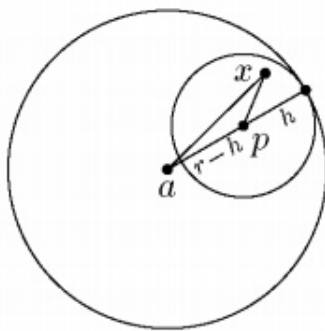
16.1 Теорема (Свойства открытых множеств).

1. Объединение любого семейства открытых множеств открыто.

Пусть задано семейство открытых множеств $\{G_a\}_{a \in A}$, $G = \bigcup_{a \in A} G_a$, $x \in G$. Докажем, что x — внутренняя точка G . В самом деле, по определению объединения найдётся такой индекс a , что $x \in G_a$. Так как G_a открыто, x — внутренняя точка этого шара, значит существует шар $B(x, r)$, содержащийся в G_a . Но тогда тем более $B(x, r) \subset G$.

2. Пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.

Пусть задано конечное семейство открытых множеств $\{G_k\}_{k=1}^n$, $G = \bigcap_{k=1}^n G_k$, $x \in G$. Тогда x принадлежит каждому из множеств, и в силу открытости G_k найдутся такие положительные числа r_1, \dots, r_n , что $B(x, r_k) \subset G_k$ при всех $k \in [1 : n]$. Обозначим $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$, тогда $B(x, r) \subset G_k$ для всех k . Следовательно по определению пересечения $B(x, r) \subset G$. ■

16.2 Лемма (Открытый шар открыт). Покажем, что шар $B(a, r)$ открыт. Пусть $p \in B(a, r)$, то есть $\rho(p, a) < r$.

Докажем, что p — внутренняя точка шара. Положим $h = r - \rho(p, a)$ ($h > 0$) и проверим, что $B(p, h) \subset B(a, r)$. Пусть $x \in B(p, h)$, то есть $\rho(x, p) < h$. Тогда

$$\rho(x, a) \leq \rho(x, p) + \rho(p, a) < h + r - h = r$$

То есть $x \in B(a, r)$. ■

Множество всех внутренних точек множества D называется внутренностью D и обозначается $\overset{\circ}{D}$ или $Int D$.

Билет 17

Точка a называется предельной точкой множества D , если в любой окрестности точки a найдётся точка D , отличная от a . Другими словами, если $\dot{V}_a \cap D \neq \emptyset$.

17.1 Теорема (Связь открытости и замкнутости). *Множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто*

Пусть D^c замкнуто. Возьмём точку $x \in D$ и докажем, что — внутренняя точка D ; в силу произвольности x это и будет означать, что D открыто. Поскольку $x \notin D^c$, а D^c замкнуто, x не является предельной точкой D^c , то есть существует такая окрестность V_x точки x , что $\dot{V}_x \cap D = \emptyset$. Тогда и $V_x \cap D^c = \emptyset$, так как $x \in D$. Но это означает, что $V_x \subset D$, то есть x — внутренняя точка D .

Пусть D открыто. Возьмём точку x , предельную для D^c , и докажем, что $x \in D^c$; в силу произвольности x это и будет означать, что D^c замкнуто. Поскольку в любой окрестности точки x найдётся точка D^c , x не является внутренней точкой D , а тогда, в силу открытости D , $x \notin D$, то есть $x \in D^c$. ■

17.2 Теорема (Свойства замкнутых множеств).

1. Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.
2. Объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.

Доказательство следует из 17.1 и этих формул.

$$\bigcap_{a \in A} F_a = \left(\bigcup_{a \in A} F_a^c \right)^c, \bigcup_{k=1}^n F_a = \left(\bigcap_{k=1}^n F_a^c \right)^c \quad \blacksquare$$

Замыкание D есть множество всех точек прикосновения. Обозначается \overline{D} или $Cl D$.