Билет 1

Мне лень писать законы де Моргана :(

Упорядоченная пара — это двухэлементное семейство, где множеством индексов является $\{1, 2\}$.

Декартовым или прямым произведением множест в X и У называется множество всех упорядоченных пар, таких что первый элемент пары принадлежит X, а второй — Y.

Билет 2

Аксиомы вещественных чисел:

1. ассоциативность сложения $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. коммутативность сложения $x + y = y + x$
3. существование нейтрального элемента $\exists 0 : x + 0 = 0 + x = x$
4. существование обратного элемента $\exists(-x) : x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. ассоциативность умножения $(xy)z = x(yz)$
6. коммутативность умножения $xy = yx$
7. существование нейтрального элемента $\exists 1 : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
8. существование обратного элемента $\exists x^{-1}, x \neq 0 : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$
9. дистрибутивность умножения относительно сложения $x(y + z) = xy + yz$

Так же есть аксиомы Архимеда и Кантора.

Билет 3

Определение матматической индукции и бинома Ньютона очевидны.

Индуктивное множество — $1 \in M$, $\forall x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$.

$\mathbb{N}$ — минимальное по включению индуктивное подмножество $\mathbb{R}$.

Билет 4

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху/снизу*, если $\exists M \in \mathbb{R} : x \leq M$ $(x \geq M)$, $x \in E$. Множество E ограниченное, если оно ограничено и сверху, и снизу.

M – максимум (минимум) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $M \in E$ и $M \geq x$ $(M \leq x)$, $x \in E$. Максимум E — $\max E$, минимум E — $\min E$.

4.1 **Теорема** (Существование максимума и минимума конечного множества). *Во всяком конечном подмножестве $\mathbb{R}$ есть наибольший и наименьний элемент.*

Доказательство по индукции. ■

4.2 **Следствия.** *Во всяком непустом ограниченном сверху (снизу) подмножестве $\mathbb{Z}$ есть наибольший (наименьший) элемент.*
В непустом подмножестве $\mathbb{N}$ есть наименьший элемент.

Билет 5

Наибольшее целое число не превосходящее $x \in \mathbb{R}$ называется целой частью числа x и обозначается $[x]$.

$[x] \leq x < [x] + 1$, $x - 1 < [x] \leq x$.

5.1 **Теорема** (Плотность множества рациональных чисел). *Во всяком интервале есть рациональное число.*

Для доказательства возьмём $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тогда $\frac{1}{b-a} > 0$ и по аксиоме Архимеда $\exists\ n \in \mathbb{N}: \ n > \frac{1}{b-a}$, то есть $\frac{1}{n} < b - a$. Возьмём $c = \frac{[na]+1}{n}$. Тогда $c \in \mathbb{Q}$ и

$$c \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b,$$
$$c > \frac{na - 1 + 1}{n} = a$$

■

5.2 **Следствия.** *Во всяком интервале бесконечно много рационаьных чисел.*

Извилистая дорога

Пусть $f : X \to Y$, $A \subset X$. Образ множества A при отображении f — это
$$f(A) = \{y \in Y : \ \exists x \in A\ f(x) = y\}.$$

Пусть $f : X \to Y$, $B \subset Y$. Прообраз множества B при отображении f — это
$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Пусть $f : X \to Y$. Если $f(X) = Y$, то f — сюрьекция. Другими словами, для любого Y есть решение в X.

Пусть $f : X \to Y$. Если для любых различных элементов из X их образы различны, то f — инъекция.

Биекция = инъекция + сюрьекция.

Пусть $f : X \to Y$ и f обратимо. Тогда обратное отображение к f — это отображение f^{-1}, которое каждому элементу y из $f(X)$ сопоставляет (единственное) значение x из X, для которого $f(x) = y$.

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, $f(X) \subset Y$. Тогда композиция $(g \circ f)(x)$ есть $h(x) = g(f(x))$, $x \in X$. g — внешнее отображение, f — внутреннее отображение. $f \circ g \neq g \circ f$.

Билет 6

Два множества эквивалентны, если между ними можно провести биекцию.

Множество называется счётным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

`6.1` **Теорема.** *Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество*

Пусть A — бесконечное множество. В нём есть a_1, $A \setminus \{a_1\}$ бесконечно, поэтому в нём есть a_2. $A \setminus \{a_1, a_2\}$ бесконечно, поэтому в нём есть a_3 т.д. Новое множество $B = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ будет счётным по построению. ■

`6.2` **Теорема.** *Всякое бесконечное подмножество счётного подмножества счётно: A счётно, $B \subset A$ и B бесконечно, то B — счётно.*

Расположим элементы A в виде последовательности

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Будем нумеровать элементы B в порядке их появления в этой последовательности . Тем самым каждый элемент B будет занумерован ровно один раз и, так как множество B бесконечно, для нумерации будет использован весь натуральный ряд . ■

Не более чем счётное множество — пустое, конечное или счётное множество.

Билет 7

`7.1` **Лемма.** *Пусть элементы множества A расположены в виде бесконечной в обоих направлениях матрице*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

тогда A счётно (для доказательства перечисляй элементы по дополнительным диагоналям).

По лемме $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — счётно.

$\boxed{\texttt{7.2}}$ **Теорема.** *Не более чем счётное объединение не более чем счётных множеств не более чем счётно.*

Пусть $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ *или* $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, A_k *не более чем счётно. Запишем элементы* $A_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i$ *в* k*-ю строку матрицы. Таким образом все клетки окажутся записаны в матрицу и по лемме выше мы получили, что* B *эквивалентно некоторому подмножеству* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

Билет 8

$\boxed{\texttt{8.1}}$ **Теорема.** *Множество рациональных чисел счётно.*

Обозначим

$$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$$

При всех $q \in \mathbb{N}$ *множество* $\mathbb{Q}_q = \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \dots\right\}$ *счётно. По теореме 7.2 и* $\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_p$ *счётно. Очевидно, что* $\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+$. *Снова по теореме 7.2 множество* $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \mathbb{Q}_+ \cup 0$ *счётно.* ■

Билет 9

$\boxed{\texttt{9.1}}$ **Теорема** (Несчётность отрезка)**.** *Отрезок* $[0, 1]$ *несчётен.*

Допустим противное: пусть отрезок $[0, 1]$ *счётен, тогда все числа в нём можно расположить в виде последовательности*

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

Разобъём отрезок $[0, 1]$ *на 3 равных отрезка* $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ *и* $[\frac{2}{3}, 1]$. *Обозначим через* $[a_1, b_1]$ *тот из них, который не содержит точки* x_1. *Далее разобъём* $[a_1, b_1]$ *на 3 отрезка по алгоритму выше и обозначим через* $[a_2, b_2]$ *тот, который не содержит* x_2. *Продолжим этот процесс неограниченно. В результате получим последовательность вложенных отрезков* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. *По аксиоме о вложенных отрезка существует точка* x^*, *принадлежащая всем отрезкам* $[a_n, b_n]$. *Также,* $x^* \in [0, 1]$. *Но тогда существует* $m : x^* = x_m$ *(по условию). По построению* $x_m \notin [a_m, b_m] \Rightarrow x^* \notin [a_m, b_m]$, *что противоречит принадлежности* x^* *всем отрезкам.* ■