Билет 1

Мне лень писать законы де Моргана :(

Упорядоченная пара — это двухэлементное семейство, где множеством индексов является $\{1, 2\}$.

Декартовым или прямым произведением множест в X и У называется множество всех упорядоченных пар, таких что первый элемент пары принадлежит X, а второй — Y.

Билет 2

Аксиомы вещественных чисел:

1. ассоциативность сложения $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. коммутативность сложения $x + y = y + x$
3. существование нейтрального элемента $\exists 0 : x + 0 = 0 + x = x$
4. существование обратного элемента $\exists(-x) : x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. ассоциативность умножения $(xy)z = x(yz)$
6. коммутативность умножения $xy = yx$
7. существование нейтрального элемента $\exists 1 : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
8. существование обратного элемента $\exists x^{-1}, x \neq 0 : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$
9. дистрибутивность умножения относительно сложения $x(y + z) = xy + yz$

Так же есть аксиомы Архимеда и Кантора.

Билет 3

Определение матматической индукции и бинома Ньютона очевидны.

Индуктивное множество — $1 \in M$, $\forall x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$.

$\mathbb{N}$ — минимальное по включению индуктивное подмножество $\mathbb{R}$.

Билет 4

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху/снизу*, если $\exists M \in \mathbb{R} : x \leq M$ $(x \geq M)$, $x \in E$. Множество E ограниченное, если оно ограничено и сверху, и снизу.

M – максимум (минимум) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $M \in E$ и $M \geq x$ $(M \leq x)$, $x \in E$. Максимум E — $\max E$, минимум E — $\min E$.

$\boxed{4.1}$ **Теорема** (Существование максимума и минимума конечного множества)**.** *Во всяком конечном подмножестве $\mathbb{R}$ есть наибольший и наименьний элемент.*

Доказательство по индукции. ■

$\boxed{4.2}$ **Следствия.** *Во всяком непустом ограниченном сверху (снизу) подмножестве $\mathbb{Z}$ есть наибольший (наименьший) элемент.*
В непустом подмножестве $\mathbb{N}$ есть наименьший элемент.

Билет 5

Наибольшее целое число не превосходящее $x \in \mathbb{R}$ называется целой частью числа x и обозначается $[x]$.

$[x] \leq x < [x] + 1$, $x - 1 < [x] \leq x$.

$\boxed{5.1}$ **Теорема** (Плотность множества рациональных чисел)**.** *Во всяком интервале есть рациональное число.*

Для доказательства возьмём $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тогда $\frac{1}{b-a} > 0$ и по аксиоме Архимеда $\exists\ n \in \mathbb{N} :\ \ n > \frac{1}{b-a}$, то есть $\frac{1}{n} < b - a$. Возьмём $c = \frac{[na]+1}{n}$. Тогда $c \in \mathbb{Q}$ и

$$c \leq \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b,$$

$$c > \frac{na - 1 + 1}{n} = a$$

■

$\boxed{5.2}$ **Следствия.** *Во всяком интервале бесконечно много рационаьных чисел.*

Извилистая дорога

Пусть $f : X \to Y$, $A \subset X$. Образ множества A при отображении f — это

$$f(A) = \{y \in Y :\ \exists x \in A\ f(x) = y\}.$$

Пусть $f : X \to Y$, $B \subset Y$. Прообраз множества B при отображении f — это

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Пусть $f : X \to Y$. Если $f(X) = Y$, то f — сюрьекция. Другими словами, для любого Y есть решение в X.

Пусть $f : X \to Y$. Если для любых различных элементов из X их образы различны, то f — инъекция.

Биекция = инъекция + сюрьекция.

Пусть $f : X \to Y$ и f обратимо. Тогда обратное отображение к f — это отображение f^{-1}, которое каждому элементу y из $f(X)$ сопоставляет (единственное) значение x из X, для которого $f(x) = y$.

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, $f(X) \subset Y$. Тогда композиция $(g \circ f)(x)$ есть $h(x) = g(f(x))$, $x \in X$. g — внешнее отображение, f — внутреннее отображение. $f \circ g \neq g \circ f$.

Билет 6

Два множества эквивалентны, если между ними можно провести биекцию.

Множество называется счётным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

6.1 **Теорема.** *Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество*

Пусть A — бесконечное множество. В нём есть a_1, $A \setminus \{a_1\}$ бесконечно, поэтому в нём есть a_2. $A \setminus \{a_1, a_2\}$ бесконечно, поэтому в нём есть a_3 т.д. Новое множество $B = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ будет счётным по построению. ■

6.2 **Теорема.** *Всякое бесконечное подмножество счётного подмножества счётно: A счётно, $B \subset A$ и B бесконечно, то B — счётно.*

Расположим элементы A в виде последовательности

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Будем нумеровать элементы B в порядке их появления в этой последовательности . Тем самым каждый элемент B будет занумерован ровно один раз и, так как множество B бесконечно, для нумерации будет использован весь натуральный ряд . ■

Не более чем счётное множество — пустое, конечное или счётное множество.

Билет 7

7.1 **Лемма.** *Пусть элементы множества A расположены в виде бесконечной в обоих направлениях матрице*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

тогда A счётно (для доказательства перечисляй элементы по дополнительным диагоналям).

По лемме $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — счётно.

$\boxed{\texttt{7.2}}$ **Теорема.** *Не более чем счётное объединение не более чем счётных множеств не более чем счётно.*

Пусть $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ *или* $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, A_k *не более чем счётно. Запишем элементы* $A_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i$ *в* k*-ю строку матрицы. Таким образом все клетки окажутся записаны в матрицу и по лемме выше мы получили, что* B *эквивалентно некоторому подмножеству* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

Билет 8

$\boxed{\texttt{8.1}}$ **Теорема.** *Множество рациональных чисел счётно.*

Обозначим

$$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$$

При всех $q \in \mathbb{N}$ *множество* $\mathbb{Q}_q = \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \ldots\right\}$ *счётно. По теореме 7.2 и* $\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_p$ *счётно. Очевидно, что* $\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+$*. Снова по теореме 7.2 множество* $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \mathbb{Q}_+ \cup 0$ *счётно.* ■

Билет 9

$\boxed{\texttt{9.1}}$ **Теорема** (Несчётность отрезка)**.** *Отрезок* $[0, 1]$ *несчётен.*

Допустим противное: пусть отрезок $[0, 1]$ *счётен, тогда все числа в нём можно расположить в виде последовательности*

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

Разобъём отрезок $[0, 1]$ *на 3 равных отрезка* $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ *и* $[\frac{2}{3}, 1]$*. Обозначим через* $[a_1, b_1]$ *тот из них, который не содержит точки* x_1*. Далее разобъём* $[a_1, b_1]$ *на 3 отрезка по алгоритму выше и обозначим через* $[a_2, b_2]$ *тот, который не содержит* x_2*. Продолжим этот процесс неограниченно. В результате получим последовательность вложенных отрезков* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$*. По аксиоме о вложенных отрезка существует точка* x^**, принадлежащая всем отрезкам* $[a_n, b_n]$*. Также,* $x^* \in [0, 1]$*. Но тогда существует* $m : x^* = x_m$ *(по условию). По построению* $x_m \notin [a_m, b_m] \Rightarrow x^* \notin [a_m, b_m]$*, что противоречит принадлежности* x^* *всем отрезкам.* ■

Знак извилистой дороги

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещёственных чисел. Тогда $a \in \mathbb{R}$ — предел последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть $V_a(\varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ — ε-окрестность точки a. Тогда $a \in \mathbb{R}$ — предел последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ x_n \in V_a(\varepsilon)$$

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность в X. Точку $a \in X$ называют пределом последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

Если определения выше сильно меняются для функций и отображений, то пинганите или добавьте.

Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется метрикой, если она удовлетворяет следующим условиям $(x, y, z \in X)$:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника)

Пара (X, ρ) — множество с метрикой в нём — называется метрическим пространстом.

Пусть K — поле, X — множество, и над элементами X и K определены две операции: сложение $X \times X \xrightarrow{+} X$ и умножение $X \times X \xrightarrow{\cdot} X$, удовлетворяющие следующим свойстам $(x, y, z \in X,\ \gamma, \lambda \in K)$:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $x + y = y + x$
3. $\exists \theta \in X : 0 \cdot x = \theta$
4. $(\lambda + \gamma)x = \lambda x + \gamma x$
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
6. $(\lambda\gamma)x = \lambda(\gamma x)$

7. $1 \cdot x = x$

Тогда X — векторное пространство над полем K

Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Нормой в X называется функция $\rho : X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Положительная определённость
$$\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$
2. Положительная однородность
$$\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$$
3. Неравенство треугольника (полуаддитивность)
$$\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$$

Норма: $\rho(x) = ||x||$. Пара $(X, ||\cdot||)$ называется нормированным пространством.

Билет 10

10.1 **Теорема** (Единственность предела последовательности)**.** *Последовательность в в метрическом пространстве не может иметь более одного предела: если $x_n \to a$, $x_n \to b$, то $a = b$.*

Предположим противное: пусть $a \neq b$. Тогда по первой аксиоме расстояния $\rho(a, b) > 0$. Возьмём $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}$, по определению предела найдутся такие N_1 и N_2, что $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ для всех $n > N_1$, а $\rho(x_n, b) < \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Тогда, если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то по аксиомам расстояния
$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \rho(a, b), \textit{что противоречиво}$$
■

Теорема (Ограниченность сходящейся последовательности)**.** *Сходящаяся последовательность ограничена*

Пусть $x_n \to a$. Взяв $\varepsilon = 1$, подберём такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет $\rho(x_n, a) < 1$. Положим
$$R = \max\{\rho(x_1, a), \dots, \rho(x_N, a), 1\}$$
Тогда $\rho(x_n, a) \leq R$ при всех $n \in \mathbb{N}$. ■

Билет 11

11.1 **Теорема** (Предельный переход в неравенстве). *Пусть* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *— вещественные последовательности,* $x_n \le y_n$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$, $y_n \to b$. *Тогда* $a \le b$.

Предположим противное: пусть $a > b$. *Тогда* $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. *По определению предела найдутся такие* N_1 *и* N_2, *что* $a - \varepsilon < x_n$ *для всех* $n > N_1$, *а* $y_n < b + \varepsilon$ *для всех* $n > N_2$. *Значит, если* $n > \max\{N_1, N_2\}$, *то*

$$y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < x_n, \text{ что противоречит условию}$$

■

11.2 **Теорема** (О сжатой последовательности). *Пусть* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *и* $\{z_n\}$ *— вещественные последовательности,* $x_n \le y_n \le z_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\lim x_n = \lim z_n = a$. *Тогда* $\lim y_n$ *существует и равен* a.

Возьмём $\varepsilon > 0$. *По определению предела найдутся такие* N_1, N_2, *что* $a - \varepsilon < x_n$ *для всех* $n > N_1$, *а* $z_n < a + \varepsilon$ *для всех* $n > N_2$. *Положим* $N = \max\{N_1, N_2\}$. *Тогда для всех* $n > N$

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$$

В силу произвольности ε *предел* $\{y_n\}$ *существует и равен* a. ■

Билет 12

Последовательность называется бесконечно малой, если они стремится к 0.

12.1 **Теорема.** *(Арифметические действия над сходящимися последовательностями в нормированном пространстве) Пусть* $(X, ||\cdot||)$ *— нормированное пространство,* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *— последовательности в* X, $\{\lambda_n\}$ *— числовая последовательность,* $x_0, y_0 \in X$, $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, $\lambda_n \to \lambda_0$. *Тогда*

1. $x_n + y_n \to x_0 + y_0$
2. $\lambda_n y_n \to \lambda_0 y_0$
3. $x_n - y_n \to x_0 - y_0$
4. $||x_n|| \to ||x_0||$

1. *Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению предела найдутся такие N_1 и N_2, что $||x_n - x_0|| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N_1$ и $||y_n - y_0|| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n > N$ будет*

$$||(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)|| < ||x_n - x_0|| + ||y_n - y_0|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. *По неравенству треугольника*

$$||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| = ||(\lambda_n - \lambda_0)x_n + \lambda_0(x_n - x_0)|| \leq$$

$$\leq |\lambda_n - \lambda_0|||x_n|| + |\lambda_0|||x_n - x_0||$$

По условию последовательности $\{|\lambda_n - \lambda_0|\}$, $\{|x_n - x_0|\}$ бесконечно малые, а по теореме 10.2 последовательность $\{||x_n||\}$ ограничена, как и постоянная последовательность $\{|\lambda_0|\}$. Следовательно по лемме "Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая"оба слагаемых в правой части бесконечно малые, а тогда по утверждению 1 их сумма бесконечно малая. Наконец, $||\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0|| \to 0$ по теореме 11.1.

3. *Доказывается аналогично утверждению 1 или применением уже доказанных утверждений 1 и 2:*

$$x_n - y_n = x_n + (-1)y_n \to x_0 + (-1)y_0 = x_0 - y_0$$

4. *Утверждение следует из неравенства*

$$\big|\|x_n\| - \|x_0\|\big| \leq \|x_n - x_0\|$$

(леммы про свойства полунорм) и теоремы 11.1.

■

Билет 13

Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Функция $\phi : X \times X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ называется скалярным произведением в X (обозначение: $\phi(x, y) = (x, y)$), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

1. Линейность по первому аргументу

$$(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$$

2. Эрмитовская симметричность

$$(y,x)=\overline{(x,y)}$$

3. Положительная определённость

$$(x,y)\geq 0;(x,x)=0\Leftrightarrow x=\theta$$

Свойства скалярного произведения:

1. $(x,y_1+y_2)=(x,y_1)+(x,y_2)$
2. $(x,\lambda y)=\overline{\lambda}(x,y)$
3. $(\theta,y)=(x,\theta)=0$

13.1 **Теорема.** *Неравенство Коши-Буняковского-Шварца*

$$|(x,y)|^2\leq(x,x)(y,y)$$

Пусть $(y,y)>0$ (в противном случае $y=\theta$ и неравенство выполнено), положим

$$\lambda=-\frac{(x,y)}{(y,y)}$$

Тогда в силу аксиом скалярного произведения и равенства $\lambda\overline{\lambda}=|\lambda|^2$

$$\begin{aligned}(x+\lambda y,x+\lambda y)&=(x,x)+\overline{\lambda}(x,y)+\lambda(y,x)+|\lambda|^2(y,y)=\\&=(x,x)-\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}-\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(x,x)(y,y)-|(x,y)|^2=(y,y)(x+\lambda y,x+\lambda y)\geq 0$$

■

13.2 **Лемма** (Это не лемма, просто хз как обозвать)**.** *Функция $\rho(x)=\sqrt{(x,x)}$ — норма в X.*

Положительная определённость ρ следует из положительной определённости скалярного произведения. Далее,

$$\rho(\lambda x)=\sqrt{(\lambda x,\lambda x)}=\sqrt{\lambda\overline{\lambda}(x,x)}=|\lambda|\rho(x)$$

Докажем неравенство треугольника. Применяя 13.1, имеем

$$\begin{aligned}\rho^2(x+y)=(x+y,x+y)&=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=\\&=(x,x)+2Re(x,y)+(y,y)\leq(x,x)+2|(x,y)|+(y,y)\leq\\&\leq\rho^2(x)+2\rho(x)\rho(y)+\rho^2(y)=(\rho(x)+\rho(y))^2\ \blacksquare\end{aligned}$$

Билет 14

14.1 **Следствия.** *(КБШ в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$)*

1. *Скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$:*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k$$

2. *Скалярное произведение в $\mathbb{C}^m$:*

$$(z, w) = \sum_{k=1}^{m} z_k \overline{w_k}$$

■

Далее запись $x_i^{(j)}$ подразумевает, что i — номер координаты, j — номер последовательности.

Говорят, что последовательность $\{x^{(n)}\}$ точек $\mathbb{R}^m$ сходится к пределу $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ покоординатно, если $x_j^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_j^{(0)}$, для всех $j \in [1 : m]$.

14.2 **Лемма.** *В $\mathbb{R}^m$ покоординатная сходимость и сходимость по Евклидовой норме равносильны.*

Утверждение следует из неравенств

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(0)}| \le |x^{(n)} - x^{(0)}| = \\ = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(x_k^{(n)} - x_k^{(0)}\right)^2} \le \sqrt{m} \max_{1\le k\le m} |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|$$

и теоремы 11.1. ■

Билет 15

Говорят, что вещественная последовательность $\{x_n\}$ стремится к:

1. плюс бесконечности, если

$$\forall E > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n > N\ x_n > E$$

2. минус бесконечности ($x_n < -E$)

3. бесконечности (бесконечности неопределённого знака) ($|x_n| > E$)

Последовательность, стремящаяся к бесконечности называется бесконечно большой.

15.1 **Теорема** (Арифметические действия над бесконечно большими)**.** *Пусть* $\{x_n\}$*,* $\{y_n\}$ *— числовые последовательности*

1. *Если* $x_n \to +\infty$*,* $\{y_n\}$ *ограничена снизу, то* $x_n + y_n \to +\infty$
2. *Если* $x_n \to -\infty$*,* $\{y_n\}$ *ограничена сверху, то* $x_n + y_n \to -\infty$
3. *Если* $x_n \to \infty$*,* $\{y_n\}$ *ограничена, то* $x_n + y_n \to \infty$
4. *Если* $x_n \to \pm\infty$*,* $y_n \geq b > 0$ *для всех* n *(или* $y_n \to b_1 > 0$*), то* $x_n y_n \to \pm\infty$
5. *Если* $x_n \to \pm\infty$*,* $y_n \leq b < 0$ *для всех* n *(или* $y_n \to b_1 < 0$*), то* $x_n y_n \to \mp\infty$
6. *Если* $x_n \to \infty$*,* $|y_n| \geq b > 0$ *для всех* n *(или* $y_n \to b_1 \neq 0$*), то* $x_n y_n \to \infty$
7. *Если* $x_n \to a \neq 0$*,* $y_n \to 0$*,* $y_n \neq 0$ *при всех* n*, то* $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$
8. *Если* $x_n \to a \in \mathbb{C}$*,* $y_n \to \infty$*, то* $\frac{x_n}{y_n} \to 0$
9. *Если* $x_n \to \infty$*,* $y_n \to b \in \mathbb{C}$*,* $y_n \neq 0$ *при всех* n*, то* $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$

Почти всё очевидно, докажем 8 пункт для наглядности.

По теореме о пределе произведения и лемме “Последовательность бесконечно большая, когда обратная ей бесконечно малая“ получаем, что

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to a \cdot 0 = 0 \blacksquare$$

Знак извилистой дороги

Точка a называется внутренней точкой множества D, если существует окрестность точки a, содержащаяся в D.

Множество D называется открытым, если все его точки внутренние.

Множество D называется замкнутым в X, если оно содержит все свои предельные точки.

Подмножество K метрического пространства X называется компактным, если из любого открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие:

$$\forall \{G_a\}_{a \in A} : K \subset \bigcup_{a \in A} G_a, G_a \text{ открыты в } X$$

Билет 16

$\boxed{16.1}$ **Теорема** (Свойства открытых множеств)**.**

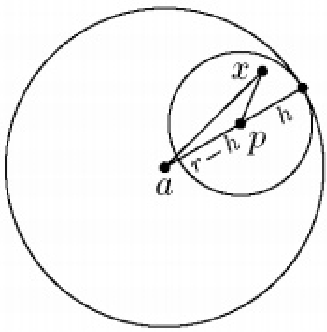
1. *Объединение любого семейства открытых множеств открыто.*

   Пусть задано семейство открытых множеств $\{G_a\}_{a\in A}$*,* $G = \bigcup\limits_{a\in A} G_a$*,* $x \in G$*. Докажем, что* x *— внутренняя точка* G*. В самом деле, по определению объединения найдётся такой индекс* a*, что* $x \in G_a$*. Так как* G_a *открыто,* x *— внутренняя точка этого шара, значит существует шар* $B(x, r)$*, содержащийся в* G_a*. Но тогда тем более* $B(x, r) \subset G$*.*

2. *Пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.*

   Пусть задано конечное семейство открытых множеств $\{G_k\}_{k=1}^n$*,* $G = \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$*,* $x \in G$*. Тогда* x *принадлежит каждому из множеств, и в силу открытости* G_k *найдутся такие положительные числа* $r_1, \ldots, r_n$*, что* $B(x, r_k) \in G_k$ *при всех* $k \in [1 : n]$*. Обозначим* $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$*, тогда* $B(x, r) \in G_k$ *для всех* k*. Следовательно по определению пересечения* $B(x, r) \in G$*.* ■

$\boxed{16.2}$ **Лемма** (Открытый шар открыт)**.** *Покажем, что шар* $B(a, r)$ *открыт. Пусть* $p \in B(a, r)$*, то есть* $\rho(p, a) < r$*.*



Докажем, что p *— внутренняя точка шара. Положим* $h = r - \rho(p, a)$ *(*$h > 0$*) и проверим, что* $B(p, h) \subset B(a, r)$*. Пусть* $x \in B(p, h)$*, то есть* $\rho(x, p) < h$*. Тогда*

$$\rho(x, a) \le \rho(x, p) + \rho(p, a) < h + r - h = r$$

То есть $x \in B(a, r)$*.* ■

Множество всех внутренних точек множества D называется внутренностью D и обозначается $\overset{\circ}{D}$ или $Int\ D$.

Билет 17

Точка a называется предельной точкой множества D, если в любой окрестности точки a найдётся точка D, отличная от a. Другими словами, если $\dot{V_a} \cap D \neq \emptyset$.

17.1 **Теорема** (Связь открытости и замкнутости). *Множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто*

Пусть D^c замкнуто. Возьмём точку $x \in D$ и докажем, что — внутренняя точка D; в силу произвольности x это и будет означать, что D открыто. Поскольку $x \notin D^c$, а D^c замкнуто, x не является предельной точкой D^c, то есть существует такая окрестность V_x точки , что $\dot{V_x} \cap D = \emptyset$. Тогда и $V_x \cap D^c = \emptyset$, так как $x \in D$. Но это означает, что $V_x \subset D$, то есть x — внутренняя точка D.

Пусть D открыто. Возьмём точку x, предельную для D^c, и докажем, что $x \in D^c$; в силу произвольности x это и будет означать, что D^c замкнуто. Поскольку в любой окрестности точки x найдётся точка D^c, x не является внутренней точкой D, а тогда, в силу открытости D, $x \notin D$, то есть $x \in D^C$. ■

17.2 **Теорема** (Свойства замкнутых множеств).

1. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.*
2. *Объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство следует из 17.1 и этих формул.

$$\bigcap_{a\in A} F_a = \left(\bigcup_{a\in A} F_a^c\right)^c, \bigcup_{k=1}^{n} F_a = \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_a^c\right)^c \blacksquare$$

Замыкание D есть множество всех точек прикосновения. Обозначается $\overline{D}$ или $Cl\ D$.

Билет 18

18.1 **Теорема** (Открытость и замкнутость в пространстве). *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $D \subset Y \subset X$.*

1. *D открыто в Y тогда и только тогда, когда существует такое множество G, открытое в X, что $D = G \cap Y$*

   Пусть $D = Y \cap G$, где G открыто в X. Возьмём точку $a \in D$. В силу открытости G в X существует окрестность V_a^X точки a в X: $V_a^X \subset G$. Тогда $V_a^Y = V_a^X \cap Y$ — окрестность a в Y и $V_a^Y \subset D$. Значит, a — внутренняя точка D. В силу произвольности a множество D открыто в Y.

   Обратно, пусть D открыто в Y. Тогда для каждой точки $a \in D$ найдётся её окрестность в Y, содержащаяся в D: $V_a^Y = B^Y(a, r_a) \subset D$. Обозначим $G = \bigcup\limits_{a\in D} B^X(a, r_a)$. Тогда G открыто в X как обхединения открытых в X множеств, и

   $$G \cap Y = \bigcup_{a\in D} (B^X(a, r_a) \cap Y = \bigcup_{a\in D} B^Y(a, r_a) = D$$

2. *D замкнуто в Y тогда и только тогда, когда существует такое множество F, замкнутое в X, что $D = F \cap Y$*

   По теореме 17.1 замкнутость D в Y равносильна открытости $Y \setminus D$ в Y. По доказанному последнее равносильно существованию такого открытого в X множества G, что $Y \setminus D = G \cap Y$. Осталось обозначить $F = G^c$ и учесть, что соотношения $D = F \cap Y$ и $Y \setminus D = G \cap Y$ равносильны. ■

Билет 19

19.1 **Лемма.** *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, Y — подпространство X, $K \subset Y$. Тогда свойства компактности K в X и Y равносильны*

Пусть K компактно в X. Возьмём покрытие K множествами V_a, открытыми в Y. По теореме 18.1 $V_a = G_a \cap Y$, где множества G_a открыты в X. Множества G_a образуют покрытие K:

$$K \subset \bigcup_{a\in A} V_a \subset \bigcup_{a\in A} G_a$$

Пользуясь компактностью K в X, извлечём покрытия $\{G_a\}_{a\in A}$ конечное подпокрытие: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} G_{a_i}$. Но, поскольку $K \subset Y$,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} (G_{a_i} \cap Y) = \bigcup_{i=1}^{N} V_{a_i}$$

Итак, из произвольного покрытия K множествами, открытыми в Y, можно извлечь конечное подпокрытие, что и означает компактность K в Y.

Пусть теперь K помпактно в Y. Возьмём покрытие K множествами G_a, открытыми в X. Положим $V_a = G_a \cap Y$; тогда множества V_a открыты в Y и образуют покрытие K. В силу компактности K в Y из него можно извлечь конечное подпокрытие $\{V_{a_i}\}_{i=1}^N$. Но тогда $\{G_{a_i}\}_{i=1}^N$ — тоже покрытие K, и компактность K в X доказана. ■

Билет 20

Теорема (Простейшие свойства компактов)**.** *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset X$.*

1. *Если K компактно, то K замкнуто и ограничено*

   Докажем, что K^c открыто. Возьмём точку $a \in K^c$ и покажем, что a — внутренняя точка K^c; в силу произвольности a это и будет означать, что K^c открыто. Для каждой точки $q \in K$ положим
   $$r_q = \frac{\rho(q,a)}{2}, V_q = B(a, r_q), W_q = B(q, r_q)$$
   Тогда $V_q \cap W_q = \emptyset$. Семейство $\{W_q\}_{q\in K}$ — открытое покрытие компакта K. Извелечём из него конечное подпокрытие $\{W_{q_i}\}_{i=1}^N$: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^N W_{q_i} = W$. Тогда $V = \bigcap\limits_{i=1}^N V_{q_i}$ — окрестность точки a, причём $V \cap W = \emptyset$. Тем более $V \cap K = \emptyset$, то есть $V \subset K^c$.

   Докажем, что K ограничено. Зафиксируем точку $a \in X$ и рассмотрим покрытие множества K открытыми шараиш $\{B(a, n)\}_{n=1}^\infty$. В силу компактности K покрывается конечным набором шаров $\{B(a, n_i)\}_{i=1}^N$ и, следовательно, содержится в шаре $B\left(a, \max\limits_{1\le i\le N} n_i\right)$

2. *Если X компактно, а K замкнуто, то K компактно*

   Пусть $\{G_a\}_{a\in A}$ — открытое покрытие K. Тогда, поскольку K замкнуто, $\{G_a\}_{a\in A} \cup \{K^c\}$ — открытое покрытие X. Пользуясь компактностью X, извлечём из него конечное подпокрытие X: $X = \bigcup\limits_{i=1}^N G_{a_i} \cup K^C$. Но тогда $\{G_{a_i}\}_{i=1}^N$ — покрытие K. ■