Билет 1

Мне лень писать законы де Моргана :(

Упорядоченная пара — это двухэлементное семейство, где множеством индексов является $\{1, 2\}$.

Декартовым или прямым произведением множест в X и У называется множество всех упорядоченных пар, таких что первый элемент пары принадлежит X, а второй — Y.

Билет 2

Аксиомы вещественных чисел:

1. ассоциативность сложения $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. коммутативность сложения $x + y = y + x$
3. существование нейтрального элемента $\exists 0 : x + 0 = 0 + x = x$
4. существование обратного элемента $\exists(-x) : x + (-x) = (-x) + x = 0$
5. ассоциативность умножения $(xy)z = x(yz)$
6. коммутативность умножения $xy = yx$
7. существование нейтрального элемента $\exists 1 : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
8. существование обратного элемента $\exists x^{-1}, x \neq 0 : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$
9. дистрибутивность умножения относительно сложения $x(y + z) = xy + yz$

Так же есть аксиомы Архимеда и Кантора.

Билет 3

Определение матматической индукции и бинома Ньютона очевидны.

Индуктивное множество — $1 \in M$, $\forall x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$.

$\mathbb{N}$ — минимальное по включению индуктивное подмножество $\mathbb{R}$.

Билет 4

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху/снизу*, если $\exists M \in \mathbb{R} : x \leq M$ $(x \geq M)$, $x \in E$. Множество $E$ ограниченное, если оно ограничено и сверху, и снизу.

$M$ – максимум (минимум) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $M \in E$ и $M \geq x$ $(M \leq x)$, $x \in E$. Максимум $E$ — $\max E$, минимум $E$ — $\min E$.

$\boxed{\texttt{4.1}}$ **Теорема** (Существование максимума и минимума конечного множества)**.** *Во всяком конечном подмножестве $\mathbb{R}$ есть наибольший и наименьний элемент.*

*Доказательство по индукции.* ■

$\boxed{\texttt{4.2}}$ **Следствия.** *Во всяком непустом ограниченном сверху (снизу) подмножестве $\mathbb{Z}$ есть наибольший (наименьший) элемент.*
*В непустом подмножестве $\mathbb{N}$ есть наименьший элемент.*

Билет 5

Наибольшее целое число не превосходящее $x \in \mathbb{R}$ называется целой частью числа $x$ и обозначается $[x]$.

$[x] \le x < [x] + 1$, $x - 1 < [x] \le x$.

$\boxed{\texttt{5.1}}$ **Теорема** (Плотность множества рациональных чисел)**.** *Во всяком интервале есть рациональное число.*

*Для доказательства возьмём $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тогда $\frac{1}{b-a} > 0$ и по аксиоме Архимеда $\exists\ n \in \mathbb{N}:\ \ n > \frac{1}{b-a}$, то есть $\frac{1}{n} < b - a$. Возьмём $c = \frac{[na]+1}{n}$. Тогда $c \in \mathbb{Q}$ и*

$$c \le \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b,$$
$$c > \frac{na - 1 + 1}{n} = a$$

■

$\boxed{\texttt{5.2}}$ **Следствия.** *Во всяком интервале бесконечно много рационаьных чисел.*

Извилистая дорога

Пусть $f : X \to Y$, $A \subset X$. Образ множества $A$ при отображении $f$ — это
$$f(A) = \{y \in Y :\ \exists x \in A\ f(x) = y\}.$$

Пусть $f : X \to Y$, $B \subset Y$. Прообраз множества $B$ при отображении $f$ — это
$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Пусть $f : X \to Y$. Если $f(X) = Y$, то $f$ — сюрьекция. Другими словами, для любого $Y$ есть решение в $X$.

Пусть $f : X \to Y$. Если для любых различных элементов из $X$ их образы различны, то $f$ — инъекция.

Биекция = инъекция + сюръекция.

Пусть $f : X \to Y$ и $f$ обратимо. Тогда обратное отображение к $f$ — это отображение $f^{-1}$, которое каждому элементу $y$ из $f(X)$ сопоставляет (единственное) значение $x$ из $X$, для которого $f(x) = y$.

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, $f(X) \subset Y$. Тогда композиция $(g \circ f)(x)$ есть $h(x) = g(f(x))$, $x \in X$. $g$ — внешнее отображение, $f$ — внутреннее отображение. $f \circ g \neq g \circ f$.

## Билет 6

Два множества эквивалентны, если между ними можно провести биекцию.

Множество называется счётным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

`6.1` **Теорема.** *Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество*

*Пусть $A$ — бесконечное множество. В нём есть $a_1$, $A \setminus \{a_1\}$ бесконечно, поэтому в нём есть $a_2$. $A \setminus \{a_1, a_2\}$ бесконечно, поэтому в нём есть $a_3$ т.д. Новое множество $B = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ будет счётным по построению.* ■

`6.2` **Теорема.** *Всякое бесконечное подмножество счётного подмножества счётно: $A$ счётно, $B \subset A$ и $B$ бесконечно, то $B$ — счётно.*

*Расположим элементы $A$ в виде последовательности*

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

*Будем нумеровать элементы $B$ в порядке их появления в этой последовательности . Тем самым каждый элемент $B$ будет занумерован ровно один раз и, так как множество $B$ бесконечно, для нумерации будет использован весь натуральный ряд .* ■

Не более чем счётное множество — пустое, конечное или счётное множество.

## Билет 7

`7.1` **Лемма.** *Пусть элементы множества $A$ расположены в виде бесконечной в обоих направлениях матрице*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

*тогда $A$ счётно (для доказательства перечисляй элементы по дополнительным диагоналям).*

По лемме $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — счётно.

$\boxed{7.2}$ **Теорема.** *Не более чем счётное объединение не более чем счётных множеств не более чем счётно.*

*Пусть $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ или $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k$ не более чем счётно. Запишем элементы $A_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i$ в $k$-ю строку матрицы. Таким образом все клетки окажутся записаны в матрицу и по лемме выше мы получили, что $B$ эквивалентно некоторому подмножеству $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.* ■

Билет 8

$\boxed{8.1}$ **Теорема.** *Множество рациональных чисел счётно.*

*Обозначим*

$$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$$

*При всех $q \in \mathbb{N}$ множество $\mathbb{Q}_q = \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \ldots\right\}$ счётно. По теореме 7.2 и $\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_p$ счётно. Очевидно, что $\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+$. Снова по теореме 7.2 множество $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \mathbb{Q}_+ \cup 0$ счётно.* ■

Билет 9

$\boxed{9.1}$ **Теорема** (Несчётность отрезка)**.** *Отрезок $[0,1]$ несчётен.*

*Допустим противное: пусть отрезок $[0,1]$ счётен, тогда все числа в нём можно расположить в виде последовательности*

$$[0,1] = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

*Разобъём отрезок $[0,1]$ на 3 равных отрезка $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$. Обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из них, который не содержит точки $x_1$. Далее разобъём $[a_1, b_1]$ на 3 отрезка по алгоритму выше и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот, который не содержит $x_2$. Продолжим этот процесс неограниченно. В результате получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. По аксиоме о вложенных отрезка существует точка $x^*$, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Также, $x^* \in [0,1]$. Но тогда существует $m : x^* = x_m$ (по условию). По построению $x_m \notin [a_m, b_m] \Rightarrow x^* \notin [a_m, b_m]$, что противоречит принадлежности $x^*$ всем отрезкам.* ■

Знак извилистой дороги

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещёственных чисел. Тогда $a \in \mathbb{R}$ — предел последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$$

Пусть $V_a(\varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ — $\varepsilon$-окрестность точки $a$. Тогда $a \in \mathbb{R}$ — предел последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ x_n \in V_a(\varepsilon)$$

Пусть $(X, \rho)$ — метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность в $X$. Точку $a \in X$ называют пределом последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n > N \ \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

Если определения выше сильно меняются для функций и отображений, то пинганите или добавьте.

Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется метрикой, если она удовлетворяет следующим условиям $(x, y, z \in X)$:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника)

Пара $(X, \rho)$ — множество с метрикой в нём — называется метрическим пространстом.

Пусть $K$ — поле, $X$ — множество, и над элементами $X$ и $K$ определены две операции: сложение $X \times X \xrightarrow{+} X$ и умножение $X \times X \xrightarrow{\cdot} X$, удовлетворяющие следующим свойстам $(x, y, z \in X,\ \gamma, \lambda \in K)$:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $x + y = y + x$
3. $\exists \theta \in X : 0 \cdot x = \theta$
4. $(\lambda + \gamma)x = \lambda x + \gamma x$
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
6. $(\lambda\gamma)x = \lambda(\gamma x)$

7. $1 \cdot x = x$

Тогда $X$ — векторное пространство над полем $K$

Пусть $X$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Нормой в $X$ называется функция $\rho : X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Положительная определённость
$$\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$
2. Положительная однородность
$$\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$$
3. Неравенство треугольника (полуаддитивность)
$$\rho(x + y) \le \rho(x) + \rho(y)$$

Норма: $\rho(x) = ||x||$. Пара $(X, ||\cdot||)$ называется нормированным пространстом.

Билет 10

10.1 **Теорема** (Единственность предела последовательности)**.** *Последовательность в в метрическом пространстве не можеть иметь более одного предела: если $x_n \to a$, $x_n \to b$, то $a = b$.*

*Предположим противное: пусть $a \ne b$. Тогда по первой аксиоме расстояния $\rho(a, b) > 0$. Возьмём $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}$, по определению предела найдутся такие $N_1$ и $N_2$, что $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ для всех $n > N_1$, а $\rho(x_n, b) < \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Тогда, если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то по аксиомам расстояния*

$$\rho(a, b) \le \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = \rho(a, b), \textit{что противоречиво}$$

■

Билет 11

11.1 **Теорема** (Предельный переход в неравенстве)**.** *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — вещественные последовательности, $x_n \le y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда $a \le b$.*

*Предположим противное: пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. По определению предела найдутся такие $N_1$ и $N_2$, что $a - \varepsilon < x_n$ для всех $n > N_1$, а $y_n < b + \varepsilon$ для всех $n > N_2$. Значит, если $n > \max\{N_1, N_2\}$, то*

$$y_n < b + \varepsilon = \frac{a + b}{2} = a - \varepsilon < x_n, \textit{ что противоречит условию}$$

■

11.2 **Теорема** (О сжатой последовательности)**.** *Пусть* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *и* $\{z_n\}$ *— вещественные последовательности,* $x_n \le y_n \le z_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\lim x_n = \lim z_n = a$. *Тогда* $\lim y_n$ *существует и равен* $a$.

*Возьмём* $\varepsilon > 0$. *По определению предела найдутся такие* $N_1, N_2$, *что* $a - \varepsilon < x_n$ *для всех* $n > N_1$, *а* $z_n < a + \varepsilon$ *для всех* $n > N_2$. *Положим* $N = \max\{N_1, N_2\}$. *Тогда для всех* $n > N$

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$$

*В силу произвольности* $\varepsilon$ *предел* $\{y_n\}$ *существует и равен* $a$. ■

## Билет 12

Последовательность называется бесконечно малой, если они стремится к 0.

**Теорема.** *(Арифметические действия над сходящимися последовательностями в*
12.1 *нормированном пространстве) Пусть* $(X, ||\cdot||)$ *— нормированное пространство,* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *— последовательности в* $X$, $\{\lambda_n\}$ *— числовая последовательность,* $x_0, y_0 \in X$, $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, $\lambda_n \to \lambda_0$. *Тогда*

1. $x_n + y_n \to x_0 + y_0$
2. $\lambda_n y_n \to \lambda_0 y_0$
3. $x_n - y_n \to x_0 - y_0$
4. $||x_n|| \to ||x_0||$

   *TODO: Доказательства*