Calcul Numeric –Laborator #7

Ex. 1 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Să se afle valorile proprii ale matricei A rezolvând ecuaţia caracteristică $det(A - \lambda I_3) = 0$.

Răspuns: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

(b) Să se afle mulţimea vectorilor proprii asociaţi fiecărei valori proprii.

Indicaţie: Se rezolvă pentru fiecare valoare proprie sistemul compatibil nedeterminat $Av = \lambda v$.

Răspuns: Pentru $\lambda_1 = 0$ se obţine $V_{\lambda_1} = \{b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / b \in \mathbb{R}\}$.

Pentru $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ se obţine $V_{\lambda_2} = \{b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / b, c \in \mathbb{R}\}$.

(c) Să se afle forma diagonală a matricei A, i.e. să se afle T o matrice ortogonală şi D o matrice diagonală astfel încât $D = T^T A T$.

Indicaţie: Matricea D este formată din valorile proprii dispuse pe diagonală, iar matricea T este formată din vectori proprii care formează o bază ortonormată.

Răspuns: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex. 2 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & 3\sqrt{3} \\ -2 & 8 & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Folosind metoda Jacobi, să se determine valorile proprii ale matricei A. Mai mult, să se afle vectorii proprii ortonormaţi asociaţi valorilor proprii.

Indicaţie: Vezi rezolvarea în Curs#7. Matricea ortogonală T este produsul matricelor de rotaţie Givens.

Răspuns: $\lambda_1 = 20,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 12$. Matricea $T = R^{(13)}\left(\frac{\pi}{6}\right) R^{(23)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}$.

Vectorii proprii reprezintă coloanele matricei T. Metoda Jacobi de determinare a valorilor proprii aduce matricea A la forma diagonală $D = T^T A T$, cu $D = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Ex. 3 Să se implementeze în Python metoda Jacobi pentru determinarea valorilor proprii. Procedura **MetJacobi**(A, eps, tol) returnează atât valorile proprii, cât şi vectorii proprii asociaţi valorilor proprii. Condiţia $a_{pp} = a_{qq}$ va fi înlocuită numeric cu $|a_{pp} - a_{qq}| \leq tol$.

Ex. 4 Să se aplice procedura definită anterior pentru rezolvarea **Ex. 1** şi **Ex. 2**. Pentru fiecare exerciţiu se vor returna atât matricea D formată din valorile proprii, cât şi matricea T, coloanele căreia reprezintând vectorii proprii. Se vor considera $eps = 10^{-6}$ şi $tol = 10^{-10}$. Ce se întâmplă cu rezultatul de la **Ex. 2** dacă se alege $tol = 0$? Justificaţi răspunsul.