CURS #4

CONȚINUTUL CURSULUI #4:

II. Metode numerice de rezolvare a sistemelor liniare.
- II.1. Metode directe de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare.
- II.1.7. Calculul rangului unei matrice cu ajutorul metodei Gauss cu pivotare parțială.
- II.1.8. Decompunerea LU.

II.1.7. Calculul rangului unei matrice cu ajutorul metodei Gauss cu pivotare parțială.

Definiția (II.3.)

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice nenulă. Spunem că matricea A are rangul r și notăm $rangA = r$, dacă A are un minor nenul de ordin r, iar toți minorii lui A de ordin mai mare decât r sunt nuli.

Fiind dat sistemul

$$Ax = b,$$

cu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $b, x \in \mathbb{R}^n$ se disting următoarele cazuri:

- Sisemul $Ax = b$ este compatibil determinat, i.e. admite o soluție unică dacă și numai dacă $rangA = rang\bar{A} = n$;
- Sistemul $Ax = b$ este compatibil nedeterminat, i.e. admite o infinitate de soluții dacă și numai dacă $rangA = rang\bar{A} < n$;
- Sistemul $Ax = b$ este incompatibil, i.e. nu admite soluții, dacă și numai dacă $rangA \neq rang\bar{A}$.

ALGORITM (Rangul unei matrice folosind metoda de eliminare Gauss cu pivotare parțială)

Date de intrare: $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, tol;

Date de ieșire: rang

STEP 1: Se iniţializează linia, coloana şi rangul:

$h = 1, k = 1, rang = 0;$

STEP 2: while $h \leq m$ and $k \leq n$ do

- Se caută pivotul a_{pk} :

  $|a_{pk}| = \max\limits_{j=h,m} |a_{jk}|;$

- if (maximul este mai mic egal decat tol) then

  Se trece la următoarea coloană: $k = k + 1;$

  Se trece la următorul pas al buclei while;

  endif

- if $p \neq h$ then

  $L_p \leftrightarrow L_h$ (Se intershimbă liniile);

  endif

- Se elimină elementele sub pivot:

  for $l = h + 1 : m$

  $m_{lk} = \frac{a_{lk}}{a_{hk}};$

  $L_l \leftarrow L_l - m_{lk} L_h$

  endfor

- Se avansează pe linie

  $h = h + 1;$

- Se avansează pe coloană

  $k = k + 1;$

- Se creşte rangul

  $rang = rang + 1;$

endwhile

Exemplul # 1

Să se afle rangul matricei A folosind metoda GPP

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Răspuns: Indicație: Se transformă matricea A conform algoritmului de mai sus și se calculează rangul fie numărând liniile nenule, fie conform definiției rangului.

$$A \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Am găsit un minor $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, de ordinul 3 nenul, iar unicul minor de ordinul 4, $|A|$, este zero. Concludem că $rang = 3$.

II.1.8. Decompunerea LU.

Am văzut, în secțiunea precedentă, că mai multe sisteme cu aceeași matrice pot fi tratate simultan aplicând metode de tip Gauss. În multe situații nu toți termenii din membrul drept sunt disponibili de la început. Putem dori, de exemplu, să rezolvăm sistemele de ecuații

$$Ax^{(1)} = b^{(1)}, Ax^{(2)} = b^{(2)}, ..., Ax^{(n)} = b^{(n)}$$

unde $b^{(2)}$ este o funcție de $x^{(1)}$, $b^{(3)}$ este o funcție de $x^{(2)}$ ș.a.m.d. Prin urmare, rezolvarea lor simultană numai este posibilă, urmând ca algoritmii Gauss sa fie aplicați pentru fiecare sistem în parte, mărindu-se considerabil numărul de iterații. În asemenea situații ne vin în ajutor metode de factorizare.

Definiția (II.4.)

Se numește descompunere (sau factorizarea) LU a unei matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, scrierea matricei A ca produs de două matrice, una inferior triunghiulară, notată cu L și alta superior triunghiulară, notată cu U, i.e.

$$A = LU \tag{1}$$

Propoziție (II.1.)

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice care admite descompunerea LU cu $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inferior triunghiulară, $\ell_{kk} = 1$, $k = \overline{1,n}$ și $U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară. Atunci descompunerea este unică.

Odată calculate matricele L, U, sistemul $Ax = b$ se rezolvă imediat și anume:

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ux =: y \\ Ly = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = SubsDesc(U, y) \\ y = SubsAsc(L, b) \end{cases} \tag{2}$$

Teorema (II.1.)

Matricile se obțin prin metodele de eliminare Gauss și anume:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{3}$$

unde:

$$m_{\ell k} = \frac{a_{\ell k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, k = \overline{1, n-1}, l = \overline{k+1, n}$$

$$u_{kj} = a_{kj}^{(k)}, k = \overline{1, n-1}, j = \overline{k, n}, \;\; u_{n,n} = a_{n,n}^{(n-1)}$$

Notăm că $a_{kj}^{(k)}$ reprezintă componenta cu indici kj a matricei A la etapa k, conform algoritmului de eliminare Gauss.

Aplicând metoda Gauss cu sau fără pivotare, liniile vor fi permutate. Prin acest proces de schimbare a liniilor se obțin L și U astfel încât $A' = LU$, unde A' va fi matricea A cu liniile permutate.

Fie vectorul w vectorul cu pozițiile inițiale ale liniilor matricei A, i.e. $w = (1, 2, ..., n)$. În procesul de schimbare a liniilor vom reține aceste interschimbări în vectorul w. Mai exact, la interschimbarea a două linii $L_l \leftrightarrow L_k$ vom interschimba si elementele $w_l \leftrightarrow w_k$.

Deasemenea, în urma interschimbării de linii va fi afectată și matricea L și anume, se vor interschimba subliniile situate sub diagonala principală.

Vectorul b se va modifica după cum urmează:

$$b'_{w_k} = b_k, k = \overline{1, n}$$

În final, rezolvăm două sisteme triunghiulare $Ly = b'$, $Ux = y$.

ALGORITM (Factorizarea LU cu GPP)

Date de intrare: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
Date de ieșire: $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, U, w

STEP 1: Iniţializăm $L = I_n$; $w = 1 : n$;
STEP 2: for $k = 1 : n - 1$ do
- Se calculează p astfel încât $|a_{pk}| = \max\limits_{j=\overline{k,n}} |a_{jk}|$;
- if $a_{pk} = 0$ then
  OUTPUT('A nu admite factorizarea LU')
  STOP
  endif
- if $p \neq k$ then
  $L_p \leftrightarrow L_k$ (schimbă linia p cu linia k în A);
  $w_p \leftrightarrow w_k$;

  if $k > 1$ then
  $\ell_{p,1:k-1} \leftrightarrow \ell_{k,1:k-1}$; (schimbă sublinii în L)
  endif
  endif
- for $\ell = k+1 : n$ do
  $\ell_{\ell k} = \dfrac{a_{\ell k}}{a_{kk}}$;
  $L_\ell \leftarrow L_\ell - \ell_{\ell k} L_k$;
  endfor

STEP 3:
- if $a_{nn} = 0$ then
  OUTPUT('A nu admite factorizarea LU')
  STOP
  endif

STEP 4: $U = A$.

Exemplul # 2
Să se rezolve prin metoda LU cu GFP sistemul $Ax = b$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aplicăm metoda Gauss fără pivotare. Inițializăm vectorul $w = (1, 2, 3)$. $k = 1$: Se caută primul $p = \overline{1, 3}$ cu $|a_{p1}| \neq 0 \Rightarrow p = 2$. Interschimbăm $L_2 \leftrightarrow L_1$, deasemenea efectuăm aceeași interschimbare și în vectorul w, obținându-se astfel $w = (2, 1, 3)$. Se obține o matrice echivalentă cu A

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicatorii $m_{21} = \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 0, m_{31} = \dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 3$. În urma transformării elementare $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ se obține

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$k=2$: Se caută primul $p=\overline{2,3}$ cu $|a_{p2}|\neq 0 \Rightarrow p=2$. Multiplicatorii
$m_{32}=\dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}=\dfrac{2}{1}=2.$
Se aplică în final transformarea $L_3 \leftarrow L_3-2L_2$

$$A\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&-6\end{pmatrix}$$

Obținem astfel matricele

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&2&1\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&-6\end{pmatrix}$$

Obs.: Produsul matricelor L,U este:

$$LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}=:A'$$

Matricea A' este matricea A cu liniile permutate.

Pentru a afla soluția sistemului $Ax=b$ vom aplica schimbarea pozițiilor elementelor vectorului b după cum urmează:

$$b'_{w_1}=b_1, b'_{w_2}=b_2\Rightarrow b'=(4\ 8\ 10)^T$$

Sistemul $Ly=b'$ se rescrie

$$\begin{cases}y_1=4\\y_2=8\\3y_1+2y_2+y_3=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=4\\y_2=8\\y_3=-18\end{cases}$$

Din relația $Ux=y$ sau echivalent cu sistemul

$$\begin{cases}x_1+x_3=4\\x_2+2x_3=8\\-6x_3=-18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\\x_3=3\end{cases}$$

Exemplu #3 Să se rezolve prin metoda LU cu GPP sistemul de la Exemplul #2.

Răspuns: $L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}3&3&1\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix},w=\begin{pmatrix}3&1&2\end{pmatrix}$

Exemplul # 4 Fie sistemul

$$\begin{cases}x_2+x_3=3\\2x_1+x_2+5x_3=5\\4x_1+2x_2+x_3=1\end{cases}$$

Să se afle facorizarea LU a matricei asociate A asociate sistemului, utilizând metoda GPP. Să se afle soluția sistemului conform factorizării LU.

Scriem matricea asociată sistemului și vectorul termenilor liberi:
$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&5\\4&2&1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$
Inițializăm matricea L și vectorul w:
$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$
$k=1$: Se calculeză $|a_{p1}|=\max\limits_{j=\overline{1,3}}|a_{jk}|=max\{|a_{11}|,|a_{21}|,|a_{31}|\}=|a_{31}|$, rezultă $p=3$. Se interschimbă atât liniile $L_1\leftrightarrow L_3$, cât și elementele $w_1\leftrightarrow w_3$. Se obține:

$$A\sim\begin{pmatrix}4&2&1\\2&1&5\\0&1&1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

Se efectuează transformarea elementară $L_2\leftarrow L_2-\dfrac{2}{4}L_1$, în timp ce multiplicatorii $\ell_{21}=\dfrac{1}{2},\ell_{31}=0$. Se obțin matricile A și L actualizate:

$$A\sim\begin{pmatrix}4&2&1\\0&0&\frac{9}{2}\\0&1&1\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$k=2$: Se calculeză $|a_{p2}|=\max\limits_{j=\overline{2,3}}|a_{jk}|=max\{|a_{22}|,|a_{32}|\}=|a_{32}|$, rezultă $p=3$. Se interschimbă atât liniile $L_2\leftrightarrow L_3$, cât și elementele $w_2\leftrightarrow w_3$. La acest pas, deoarece $k>1$, se vor interschimba sublinii în matricea L și anume: $\ell_{p,1:k-1}\leftrightarrow\ell_{k,1:k-1}$ sau echivalent $\ell_{3,1}\leftrightarrow\ell_{2,1}$.

Se obține:

$$A \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Matricea $U = A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

Cu ajutorul vectorului w se calculează elementele vectorului b' :

$$b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Sistemul $Ly = b'$ se rescrie

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 3 \\ \frac{1}{2}y_1 + y_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Din relația $Ux = y$ sau echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ \frac{9}{2}x_3 = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$