

| | |
|----------------------------|-------|
| NUME: | |
| PRENUME: | |
| GRUPA: | |
| NR.CRT. - VARIANTA: | |

INSTRUCȚIUNI

1. Varianta se va alege conform Nr.Crt. din "Tabel formatiuni studiu". Dacă $\text{Nr.Crt.} \leq 18$, atunci Varianta = Nr.Crt. Dacă $\text{Nr.Crt.} > 18$, se pastrează restul împărțirii Nr.Crt. la 18. Exemplu: Dacă Nr.Crt. = 18, atunci Varianta = 18; Dacă Nr.Crt. = 20, atunci Varianta = 2.
2. Problemele vor fi rezolvate pe coli de hârtie numerotate corespunzător, menționându-se numărul problemei.
3. Pe prima pagină a rezolvării fiecărei probleme, vor fi scrise **cu litere de tipar numele și prenumele studentului, grupa acestuia precum și Nr. Crt. - Varianta.**
4. Fiecare problemă trebuie să aibă cel puțin o pagină alocată rezolvării sale chiar dacă respectiva problemă nu se poate rezolva.
5. **TIMP DE LUCRU, inclusiv transmiterea lucrărilor: 150 minute, i.e. 10:00–12:30.**
6. Lucrarea va fi trimisă prin email ca fișier PDF titularilor de laborator:
 - Grupele 331, 332 și 333 - Bucătaru Mihai (mihai.bucataru@drd.unibuc.ro)
 - Grupele 334, 343, 344 - Ghiță Alexandru (alexandru.ghita@unibuc.ro)
 - Grupele 341, 342 - Pașcan Raisa (pascanraisa@fmi.unibuc.ro)

Numele fișierului va fi denumit cu `Nume_Prenume_nrGrupa.pdf`

CALCUL NUMERIC –SUBIECTE EXAMEN 2021

- I. Să se rezolve conform metodei de factorizare LU sistemul de mai jos. Factorizarea LU se va efectua folosind metoda Gauss cu pivotare parțială.

V1

$$\begin{cases} 10x_1 + 30x_2 + 16x_3 = 118 \\ 2x_1 + 15x_2 + 7x_3 = 53 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 21 \end{cases}$$

V2

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 18 \\ 3x_1 + 28x_2 + 23x_3 = 76 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

V3

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

V4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 17x_2 + 20x_3 = 33 \\ 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 16 \end{cases}$$

V5

$$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 17x_3 = 31 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12 \\ 20x_1 + 22x_2 + 38x_3 = 50 \end{cases}$$

V6

$$\begin{cases} 9x_1 + 18x_2 + 19x_3 = 84 \\ 15x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 47 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

V7

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 25 \\ 5x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 77 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

V8

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 11x_2 + 11x_3 = 58 \\ 15x_1 + 19x_2 + 22x_3 = 119 \end{cases}$$

V9

$$\begin{cases} 15x_1 + 6x_2 + 14x_3 = 94 \\ 25x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 120 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 23 \end{cases}$$

I. Să se rezolve conform metodei Gauss cu pivotare totală sistemele.

V10

$$\begin{cases} 10x_1 + 30x_2 + 16x_3 = 118 \\ 2x_1 + 15x_2 + 7x_3 = 53 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 21 \end{cases}$$

V11

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 18 \\ 3x_1 + 28x_2 + 23x_3 = 76 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

V12

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

V13

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 17x_2 + 20x_3 = 33 \\ 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 16 \end{cases}$$

V14

$$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 17x_3 = 31 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12 \\ 20x_1 + 22x_2 + 38x_3 = 50 \end{cases}$$

V15

$$\begin{cases} 9x_1 + 18x_2 + 19x_3 = 84 \\ 15x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 47 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

V16

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 25 \\ 5x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 77 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

V17

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 11x_2 + 11x_3 = 58 \\ 15x_1 + 19x_2 + 22x_3 = 119 \end{cases}$$

V18

$$\begin{cases} 15x_1 + 6x_2 + 14x_3 = 94 \\ 25x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 120 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 23 \end{cases}$$

II. Să se afle polinomul de interpolare Lagrange $P_3(x)$ asociat funcției $y = f(x)$ conform metodei Newton cu diferențe divizate, relativ la diviziunea $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Valorile funcției $y_i = f(x_i)$ se vor calcula cu ajutorul calculatorului. Toate rezultatele se vor scrie cu 3 cifre după virgula.

$$V1 \ f(x) = \ln(x), x = (1, 2, 3, 5)$$

$$V2 \ f(x) = \sin(x), x = (0, \pi/6, \pi/3, \pi/2)$$

$$V3 \ f(x) = e^{\frac{x}{2}}, x = (0, 1, 2, 4)$$

$$V4 \ f(x) = \cos(x), x = (0, \pi/6, \pi/3, \pi/2)$$

$$V5 \ f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x = (-1, 0, 1, 4)$$

$$V6 \ f(x) = \frac{4}{x}, x = (1, 2, 4, 6)$$

$$V7 \ f(x) = \sqrt{x}, x = (1, 3, 5, 6)$$

$$V8 \ f(x) = \sin(2x), x = (0, \pi/12, \pi/6, \pi/4)$$

$$V9 \ f(x) = \ln(2x), x = (1, 2, 3, 5)$$

- II. Să se afle polinomul de interpolare Lagrange $P_3(x)$ asociat funcției $y = f(x)$ conform metodei Lagrange, relativ la diviziunea $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Valorile funcției $y_i = f(x_i)$ se vor calcula cu ajutorul calculatorului. Toate rezultatele se vor scrie cu 3 cifre după virgula.

$$V10 \ f(x) = \ln(x), x = (1, 2, 3, 5)$$

$$V11 \ f(x) = \sin(x), x = (0, \pi/6, \pi/3, \pi/2)$$

$$V12 \ f(x) = e^{\frac{x}{2}}, x = (0, 1, 2, 4)$$

$$V13 \ f(x) = \cos(x), x = (0, \pi/6, \pi/3, \pi/2)$$

$$V14 \ f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x = (-1, 0, 1, 4)$$

$$V15 \ f(x) = \frac{4}{x}, x = (1, 2, 4, 6)$$

$$V16 \ f(x) = \sqrt{x}, x = (1, 3, 5, 6)$$

$$V17 \ f(x) = \sin(2x), x = (0, \pi/12, \pi/6, \pi/4)$$

$$V18 \ f(x) = \ln(2x), x = (1, 2, 3, 5)$$

- III. Să se afle funcția de interpolare spline pătratică S pentru funcția $y = f(x)$ relativ la diviziunea $x = (x_1, x_2, x_3)$. Valorile funcției $y_i = f(x_i)$ se vor calcula cu ajutorul calculatorului. Toate rezultatele se vor scrie cu 3 cifre după virgula.

$$V1 \ f(x) = \ln(x), x = (1, 2, 3)$$

$$V2 \ f(x) = \sin(x), x = (0, \pi/6, \pi/3)$$

$$V3 \ f(x) = e^{\frac{x}{2}}, x = (0, 1, 2)$$

$$V4 \ f(x) = \cos(x), x = (0, \pi/6, \pi/3)$$

$$V5 \ f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x = (-1, 0, 1)$$

$$V6 \ f(x) = \frac{4}{x}, x = (1, 2, 4)$$

$$V7 \ f(x) = \sqrt{x}, x = (1, 3, 5)$$

$$V8 \ f(x) = \sin(2x), x = (0, \pi/12, \pi/6)$$

$$V9 \ f(x) = \ln(2x), x = (1, 2, 3)$$

- III. În cazul interpolării spline cubice cu constrângeri, să se deducă sistemul complet în baza căruia se calculează coeficienții funcției spline cubice, pentru funcția $y = f(x)$ relativ la diviziunea $x = (x_1, x_2, x_3)$. Valorile funcției $y_i = f(x_i)$ se vor calcula cu ajutorul calculatorului. Toate rezultatele se vor scrie cu 3 cifre după virgula.

$$\text{V10 } f(x) = \ln(x), x = (1, 2, 3)$$

$$\text{V11 } f(x) = \sin(x), x = (0, \pi/6, \pi/3)$$

$$\text{V12 } f(x) = e^{\frac{x}{2}}, x = (0, 1, 2)$$

$$\text{V13 } f(x) = \cos(x), x = (0, \pi/6, \pi/3)$$

$$\text{V14 } f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x = (-1, 0, 1)$$

$$\text{V15 } f(x) = \frac{4}{x}, x = (1, 2, 4)$$

$$\text{V16 } f(x) = \sqrt{x}, x = (1, 3, 5)$$

$$\text{V17 } f(x) = \sin(2x), x = (0, \pi/12, \pi/6)$$

$$\text{V18 } f(x) = \ln(2x), x = (1, 2, 3)$$

IV. Fie $I = \int_a^b f(x)dx$. Să se calculeze integrala exactă. Să se aproximeze numeric integrala folosind datele din variantă. Să se calculeze eroarea absolută.

$$\text{V1 } a = 0, b = 1, f(x) = x^2, 5 \text{ noduri, metoda trapezului sumată.}$$

$$\text{V2 } a = 1, b = 2, f(x) = x^3, 4 \text{ noduri, metoda trapezului sumată.}$$

$$\text{V3 } a = 0, b = \pi, f(x) = \sin(x), 4 \text{ noduri, metoda trapezului sumată.}$$

$$\text{V4 } a = 0, b = 1, f(x) = x^2, 5 \text{ noduri, metoda Simpson sumată.}$$

$$\text{V5 } a = 1, b = 2, f(x) = x^3, 5 \text{ noduri, metoda Simpson sumată.}$$

$$\text{V6 } a = 0, b = \pi, f(x) = \sin(x), 5 \text{ noduri, metoda Simpson sumată.}$$

$$\text{V7 } a = 0, b = 1, f(x) = x^2, 5 \text{ noduri, metoda dreptunghiului sumată.}$$

$$\text{V8 } a = 1, b = 2, f(x) = x^3, 5 \text{ noduri, metoda dreptunghiului sumată.}$$

$$\text{V9 } a = 0, b = \pi, f(x) = \sin(x), 5 \text{ noduri, metoda dreptunghiului sumată.}$$

$$\text{V10 } a = 0, b = 1, f(x) = x^2, 6 \text{ noduri, metoda trapezului sumată.}$$

$$\text{V11 } a = 1, b = 2, f(x) = x^3, 5 \text{ noduri, metoda trapezului sumată.}$$

$$\text{V12 } a = 0, b = \pi, f(x) = \sin(x), 5 \text{ noduri, metoda trapezului sumată.}$$

$$\text{V13 } a = 0, b = 1, f(x) = x^2, 6 \text{ noduri, metoda Simpson sumată.}$$

$$\text{V14 } a = 1, b = 2, f(x) = x^3, 6 \text{ noduri, metoda Simpson sumată.}$$

IV. V15 Dacă se aplică formula trapezului calcului integralei $\int_0^2 f(x)dx$ se obține valoarea 5, iar dacă se aplică formula dreptunghiului, se obține 4. Ce valoare va da formula Simpson pentru calculul integralei.

V16 Fiind date $f(0) = 1, f(0.5) = 2.5, f(1) = 2, f(0.25) = f(0.75) = \alpha$. Să se afle α dacă, folosind formula trapezului sumată cu $m = 4$, se obține $\int_0^1 f(x)dx \approx 1.75$.

V17 Dacă se aplică formula trapezului calcului integralei $\int_0^2 f(x)dx$ se obține valoarea 5, iar dacă se aplică formula dreptunghiului, se obține 4. Ce valoare va da formula Simpson pentru calculul integralei.

V18 Fiind date $f(0) = 1, f(0.5) = 2.5, f(1) = 2, f(0.25) = f(0.75) = \alpha$. Să se afle α dacă, folosind formula trapezului sumată cu $m = 4$, se obține $\int_0^1 f(x)dx \approx 1.75$.

V. V1 Să se determine coeficienții B, C, D , astfel încât funcția

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + 2x - x^3, x \in [0, 1) \\ S_2(x) = 2 + B(x-1) + C(x-1)^2 + D(x-1)^3, x \in [1, 2] \end{cases}$$

să reprezinte o funcție spline naturală (i.e. $S''(a) = S''(b) = 0$, a, b fiind capetele intervalului de interpolare).

V2 Fie funcția $S(x)$ o funcție spline cubică cu constrângeri la capete (i.e. $S'(a) = f'(a), S'(b) = f'(b)$, unde a, b sunt capetele intervalului de interpolare):

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3, x \in [1, 2) \\ S_2(x) = A + B(x-2) + C(x-2)^2 + D(x-2)^3, x \in [2, 3] \end{cases}$$

Să se afle A, B, C, D , dacă $f'(1) = f'(3)$.

V3 O funcție spline cubică cu constrângeri este definită prin

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3, x \in [0, 1) \\ S_2(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3, x \in [1, 2] \end{cases}$$

Să se afle $f'(0)$ și $f'(2)$.

V4 O funcție spline cubică naturală este definită prin

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3, x \in [1, 2) \\ S_2(x) = 1 + b(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3, x \in [2, 3] \end{cases}$$

Să se afle B, D, b, d , știind că S interpoalează datele $(1, 1), (2, 1)$ și $(3, 0)$.

V5 Să se arate că polinomul Lagrange care interpoalează datele $(-2, 1), (-1, 4), (0, 11), (1, 16), (2, 13), (3, -4)$ este de gradul 3. Se va folosi metoda Newton DD.

V6 Fie $P_3(x)$ polinomul de interpolare Lagrange asociat setului de date $(0, 0), (0.5, y), (1, 3), (2, 2)$.

Să se afle y știind că, coeficientul lui x^3 în reprezentarea polinomului $P_3(x)$ este 6. Pentru reprezentarea polinomului $P_3(x)$ se va folosi metoda Lagrange.

V7 Următorul tabel se referă la polinomul de grad necunoscut, $P_n(x)$

| | | | |
|----------|---|----|---|
| x | 0 | 1 | 2 |
| $P_n(x)$ | 2 | -1 | 4 |

Să se determine coeficientul lui x^2 în reprezentarea $P_n(x)$ dacă toate diferențele divizate de ordinul 3 sunt 1.

V8 Să se determine coeficienții B, C, D , astfel încât funcția

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 1 + 2x - x^3, x \in [0, 1) \\ S_2(x) = 2 + B(x-1) + C(x-1)^2 + D(x-1)^3, x \in [1, 2] \end{cases}$$

să reprezinte o funcție spline naturală (i.e. $S''(a) = S''(b) = 0$, a, b fiind capetele intervalului de interpolare).

V9 Fie funcția $S(x)$ o funcție spline cubică cu constrângeri la capete (i.e. $S'(a) = f'(a), S'(b) = f'(b)$, unde a, b sunt capetele intervalului de interpolare):

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3, x \in [1, 2) \\ S_2(x) = A + B(x-2) + C(x-2)^2 + D(x-2)^3, x \in [2, 3] \end{cases}$$

Să se afle A, B, C, D , dacă $f'(1) = f'(3)$.

- V10 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h)$ și $f'(x_0) = \varphi(h) + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \dots$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(h/3), \varphi(h/9)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^3)$, folosind metoda Richardson.
- V11 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h)$ și $f'(x_0) = \varphi(h) + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \dots$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(h/4), \varphi(h/16)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^3)$, folosind metoda Richardson.
- V12 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h)$ și $f'(x_0) = \varphi(h) + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \dots$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(2h), \varphi(4h)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^3)$, folosind metoda Richardson.
- V13 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h)$ și $f'(x_0) = \varphi(h) + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \dots$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(3h), \varphi(9h)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^3)$, folosind metoda Richardson.
- V14 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h)$ și $f'(x_0) = \varphi(h) + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + \dots$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(4h), \varphi(16h)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^3)$, folosind metoda Richardson.
- V15 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h^2)$ și $f'(x_0) = \varphi(h) + a_2h^2 + a_3h^3 + a_4h^4 + \dots$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(h/3), \varphi(h/9)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^4)$, folosind metoda Richardson.
- V16 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h^2)$ și $f'(x_0) = \varphi(h) + a_2h^2 + a_3h^3 + a_4h^4 + \dots$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(h/2), \varphi(h/4)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^4)$, folosind metoda Richardson.
- V17 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h^2)$ și $f'(x_0) = \varphi(h) + a_2h^2 + a_3h^3 + a_4h^4 + \dots$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(h/4), \varphi(h/16)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^4)$, folosind metoda Richardson.
- V18 Presupunem că $\varphi(h)$ este aproximarea derivatei $f'(x_0)$ de ordinul $\mathcal{O}(h^2)$ și $f'(x_0) = \varphi(h) + a_2h^2 + a_3h^3 + a_4h^4 + \dots$, unde a_1, a_2, a_3 sunt constante. Să se folosească valorile $\varphi(h), \varphi(2h), \varphi(4h)$ pentru a se construi o formulă de aproximare de ordinul $\mathcal{O}(h^4)$, folosind metoda Richardson.