ELEMENTE DE TEORIA ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

AURELIAN CERNEA

Pagina 1

Pagina 2

Cuvânt înainte

În această carte sunt prezentate o serie de noţiuni şi rezultate de bază ale teoriei ecuaţiilor diferenţiale. Publicul ţintă al acestei lucrări este format din studenţii din anul al doilea al facultăţilor de matematică. Cartea este, de asemenea, utilă studenţilor care au prevăzute în programele de studiu unele capitole de ecuaţii diferenţiale şi tuturor celor care vor să se familiarizeze cu bazele teoriei ecuaţiilor diferenţiale.

Primul capitol are un caracter introductiv, prezentându-se noţiunile de ecuaţie diferenţială, de soluţie a unei ecuaţii diferenţiale şi câteva exemple de probleme practice care conduc la studiul ecuaţiilor diferenţiale. În ultima parte sunt prezentate unele ecuaţii a căror integrare poate fi făcută la nivel elementar. Capitolul al doilea este dedicat prezentării principalelor rezultate de existenţă şi unicitate a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale. În capitolul al treilea sunt studiate în detaliu ecuaţiile liniare şi afine pe $\mathbf{R}^n$, respectiv ecuaţiile liniare şi afine de ordin superior. Prezentarea câtorva dintre cele mai cunoscute probleme la limite asociate ecuaţiilor diferenţiale este făcută în capitolul al patrulea. Capitolul al cincilea este consacrat problemei dependenţei soluţiilor de datele iniţiale şi parametrii. În capitolul al şaselea sunt prezentate integralele prime şi ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul întâi al căror studiu se reduce la folosirea de instrumente din teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare. Ultimul capitol prezintă pe scurt câteva direcţii de aprofundare pentru cititorul interesat: soluţii analitice, teoria stabilităţii şi ecuaţiile cu diferenţiale totale.

Rezultatele prezentate sunt acompaniate, în general, de exemple sugestive care ajută la înţelegerea metodelor discutate.

Fiind o introducere în teoria ecuaţiilor diferenţiale, noţiunile şi rezultatele din această carte se regăsesc în majoritatea lucrărilor dedicate acestei tematici. În organizarea şi selecţionarea materialului am urmat stilul tradiţional al cursului de ecuaţii diferenţiale de la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti, stil conturat în special de cărţile profesorilor Aristide Halanay şi Ştefan Mirică.

Din totdeauna, studenţii au întâmpinat dificultăţi serioase în studiul acestei discipline. Cu regret am putut constata că, în ultimii ani, aceste dificultăţi au sporit în special din cauza unei culturi matematice din ce în ce mai precare. Din aceste considerente şi cu speranţa unei mai mari accesibilităţi am ales o variantă de prezentare într-un stil cât mai concis şi cu un minimum rezonabil de concepte şi rezultate, fără însă a ne limita doar la metodele elementare de integrare şi la teoria ecuaţiilor liniare. Cititorul interesat în aprofundarea tematicii ecuaţiilor diferenţiale poate consulta o bibliografie imensă; câteva dintre cele mai reprezentative şi recente titluri din limba română găsindu-se la sfârşitul cărţii.

Iniţierea autorului în studiul acestei discipline s-a realizat prin intermediul cursului de ecuaţii diferenţiale ţinut de profesorul Ştefan Mirică la Facultatea de Matematică a Universităţii Bucureşti, pe care le-am audiat ca student. În plus, majoritatea conceptelor şi rezultatelor de bază ale teoriei ecuaţiilor diferenţiale au fost deprinse din cartea domniei sale; carte pe care o consider una dintre cele mai complete monografii scrise în limba română. Profesorul Ştefan Mirică a avut, de altfel, bunăvoinţa de a citi o primă versiune a prezentului curs, sugerând posibile îmbunătăţiri ale conţinutului. Pe această cale îi aduc cele mai vii mulţumiri.

Aurelian Cernea

Cuprins

1

Introducere

1.1 Noţiunea de ecuaţie diferenţială

În această carte vom studia, în principal, ecuaţiile diferenţiale ordinare a căror formulare generală este următoarea.

Definiţia 1.1.1. Dacă $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie dată, vom spune că $f(.,.)$ defineşte obiectul matematic, numit *ecuaţie diferenţială*,

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x). \tag{1.1.1}$$

O funcţie $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, se numeşte *soluţie a ecuaţiei diferenţiale* (1.1.1) dacă $\varphi(.)$ este derivabilă, graficul lui $\varphi(.)$, definit prin $Graph(\varphi) = \{(t, \varphi(t)), t \in I\}$ este conţinut în D şi dacă $\varphi(.)$ verifică identitatea

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I. \tag{1.1.2}$$

Funcţia $f(.,.)$ care defineşte ecuaţia differenţială se mai numeşte *câmp vectorial* (sau *câmp de vectori*).

Simbolul matematic care descrie ecuaţia diferenţială (1.1.1) are şi alte formulări; ca de exemplu

$$x' = f(t,x), \quad \dot{x} = f(t,x). \tag{1.1.3}$$

Cum orice bază din $\mathbf{R}^n$ introduce un sistem de coordonate pe $\mathbf{R}^n$, dacă $x \in \mathbf{R}^n$ are componentele $x_i, i = 1, 2, ..., n$ şi $f_i(.,.), i = 1, 2, ..., n$

sunt componentele lui $f(.,.)$ atunci ecuaţia diferenţiala (1.1.1) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, ..., x_n) \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1.1.4}$$

iar formularea (1.1.4) se mai numeşte un *sistem de ecuaţii diferenţiale* (pe $\mathbf{R}$) de dimensiune n. Corespunzător, o soluţie a sistemului (1.1.4) este o funcţie $\varphi(.) = (\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ derivabilă care verifică

$$\varphi_i'(t) = f_i(t, (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))) \quad \forall t \in I, \forall i = 1, 2, ..., n.$$

În terminologia clasică a ecuaţiilor diferenţiale $x \in \mathbf{R}^n$ poartă denumirea de *variabilă dependentă* sau *variabilă de stare*, iar $t \in \mathbf{R}$ se numeşte *variabilă independentă* sau *variabilă temporală*.

Unele exemple (a se vedea Secţiunea 1.2) au condus la egalităţi de altă natură decât cea din (1.1.1); mai precis, la egalităţi în care apar derivate de ordin superior.

Dacă $F : D \subset \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}$ este o funcţie dată vom spune că F defineşte *ecuaţia diferenţială de ordinul n (sub forma implicită).*

$$F(t, x, x', x'', ..., x^{(n)}) = 0. \tag{1.1.5}$$

O funcţie $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de n ori derivabilă care verifică

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n)}(t)) \in D \quad \forall t \in I,$$

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

se numeşte soluţie a ecuaţiei (1.1.5).

În anumite condiţii de regularitate asupra funcţiei F (cerute de aplicarea teoremei funcţiilor implicite), ecuaţia (1.1.5) poate fi rescrisă sub forma

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}), \tag{1.1.6}$$

unde $f : D \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$.

Ecuaţia (1.1.6) poartă denumirea de *formă normală* sau *formă explicită*.

Mulţimea tuturor soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale se numeşte *soluţia generală* a ecuaţiei.

Un studiu teoretic complet pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul n se poate face doar pentru ecuaţii explicite de forma (1.2.6); această ecuaţie fiind echivalentă într-un anumit sens care va fi precizat ulterior (în capitolul 2) cu sistemul canonic asociat

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{1.1.7}$$

În acest fel, studiul ecuaţiei (1.1.6) se reduce la studiul unei ecuaţii de tipul (1.1.1) (sau, echivalent, la studiul unui sistem de ecuaţii diferenţiale de tipul (1.1.4)). Din acest motiv, în cele ce urmează ne vom ocupa numai de studiul ecuaţiei (1.1.1), precizând când este cazul cum se transcriu rezultatele obţinute pentru ecuaţia (1.1.1) la cazul ecuaţiilor (1.1.6).

Ori de câte ori funcţia $f(.,.)$ din (1.1.1) nu depinde explicit de t, ecuaţia (1.1.1) se numeşte *autonomă*. În caz contrar, ecuaţia (1.1.1) se numeşte *neautonomă*.

Trebuie menţionat faptul că, de la bun început (prin Definiţia 1.1.1) am înţeles prin soluţie a ecuaţiei (1.1.1) o funcţie care verifică ecuaţia (i.e. egalitatea (1.1.2)) pentru orice t din I. În teoria modernă a ecuaţiilor diferenţiale mai apar concepte de soluţii care verifică ecuaţia, fie, pentru toţi t din $I \backslash E$ unde E este o mulţime de excepţie (E poate fi finită, numărabilă, de măsură nulă etc), fie într-un sens generalizat în care nu se cere verificarea egalităţii în nici măcar un punct. Toate aceste tipuri de soluţii sunt legate, evident, de clasa de funcţii în care căutăm ,,soluţiile". În acelaşi timp această clasă de soluţii depinde în mod esenţial de regularitatea câmpului vectorial.

Obiective.

O primă problemă pe care o studiem este aceea a *existenţei soluţiilor*; anume în ce ipoteze asupra funcţiei $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ ecuaţia (1.1.1) are cel puţin o soluţie. După cum se va vedea în Capitolul 2 în ipoteze foarte rezonabile se poate demonstra că pentru orice $(t_0, x_0) \in D$ există

$\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n$ soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.1.1) astfel încât $t_0 \in I$ şi $\varphi(.)$ verifică *condiţia iniţială* $\varphi(t_0) = x_0$.

După ce s-a dat răspuns la problema existenţei soluţiilor apare în mod natural problema *unicităţii soluţiilor*; adică cum trebuie să fie funcţia $f(.,.)$ şi ce fel de condiţii suplimentare trebuie adăugate astfel încât dacă ecuaţia (1.1.1) are soluţii acestea sunt unice ?

O a treia problemă fundamentală în teoria ecuaţiilor diferenţiale, care poartă denumirea generică de *teoria calitativă a ecuatiilor diferenţiale*, constă în studiul diverselor proprietăţi ale soluţiilor ecuaţiei diferenţiale în absenţa unor formule explicite pentru aceste soluţii. Dintre acestea menţionăm: problema prelungirii soluţiilor, determinarea intervalului pe care o anumită soluţie este definită, dependenţa soluţiilor de datele iniţiale sau parametrii (continuă, diferenţiabilă etc), problema comportării soluţiilor ne-prelungibile la capetele intervalului maxim de definiţie, studiul comportării soluţiilor pentru t tinzând la ∞.

O altă problemă esenţială, mai ales în zona aplicativă a ecuaţiilor diferenţiale, este aceea a *determinării efective a soluţiilor*. Această problemă comportă două aspecte: pe de o parte este vorba de aşa-numitele ,,ecuaţii integrabile prin cuadraturi", adică ecuaţii ale căror soluţii pot fi exprimate ca primitive de funcţii continue; pe de altă parte, atunci când ecuaţiile nu sunt integrabile prin cuadraturi, se urmăreşte determinarea de soluţii aproximative, obţinute utilizând tehnici de analiză numerică.

1.2 Modele matematice descrise de ecuaţii diferenţiale

După prezentarea ,,rece", pur formală din secţiunea precedentă a noţiunii de ecuaţie diferenţială, în această secţiune vom prezenta câteva exemple de ecuaţii diferenţiale provenite din modelarea unor fenomene din fizică, demografie, chimie şi chiar din matematică.

Desigur, paleta de fenomene a căror modelare conduce la studiul unor ecuaţii diferenţiale este imensă. Din considerente de spaţiu şi concizie ne limităm doar la câteva astfel de exemple, cu speranţa că sunt suficient de sugestive pentru a motiva foarte serios studiul ecuaţiilor diferenţiale.

Pendulul matematic.

Considerăm problema oscilaţiilor unui pendul de lungime l. Să notăm cu $d(t)$ spaţiul parcurs de extremitatea liberă a pendulului la momentul t şi cu $x(t)$ unghiul (măsurat în radiani) făcut de pendul cu axa verticală la momentul t; avem $d(t) = lx(t)$. Forţa care acţionează asupra pendulului este $F = mg$, unde m este masa punctului material, iar g este acceleraţia gravitaţională. Această forţă se descompune după două componente: una având direcţia firului şi care este anulată de rezistenţa firului şi alta având direcţia tangentei la arcul de cerc descris de capătul pendulului. Din legea a doua a lui Newton ecuaţia diferenţială a mişcării este

$$mlx'' = -mgsinx,$$

sau echivalent

$$x'' + \frac{g}{l}sinx = 0.$$

Dacă se studiază doar oscilaţiile mici, atunci $sinx$ se aproximează prin x şi obţinem ecuaţia oscilaţiilor mici ale pendulului

$$x'' + \frac{g}{l}x = 0,$$

care este o ecuaţie de ordinul al doilea liniară, care, după cum vom vedea mai târziu, are soluţia generală

$$x(t) = c_1 sin\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_2 cos\sqrt{\frac{g}{l}}t, \quad t \in \mathbf{R}, c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Oscilatorul armonic.

Considerăm mişcarea unui punct material de masă m care se deplasează pe dreapta orizontală $0x$ sub acţiunea unei forţe elastice F îndreptată către origine. Notăm cu $x(t)$ distanţa, la momentul t, de la punctul de origine; cum F este o forţa elastică de forma $F(x) =$

$-kx, \forall x \in \mathbf{R}$ unde $k > 0$ din legea a doua a lui Newton rezultă că ecuaţia mişcării va fi

$$mx'' = -kx.$$

Notând $\omega^2 = \frac{k}{m}$ obţinem ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea

$$x'' + \omega^2 x = 0,$$

numită ecuaţia oscilatorului armonic. Vom vedea, ulterior, că soluţia generală a acestei ecuaţii este de forma

$$x(t) = c_1 sin\omega t + c_2 cos\omega t, \quad t \in \mathbf{R}, c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Dezintegrarea radioactivă.

S-a constatat că radioactivitatea este direct proporţională cu numărul de atomi din substanţa radioactivă. Daca $x(t)$ este cantitatea de materie nedezintegrată la momentul t, viteza de dezintegrare $x'(t)$ este proporţională cu $x(t)$, adică

$$x' = -ax,$$

unde a este o constantă pozitivă care depinde de materialul considerat. Avem de-a face cu o simplă ecuaţie liniară a cărei soluţie generală, vom vedea în secţiunea următoare este

$$x(t) = ce^{-at}, \quad t \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}.$$

Datarea cu carbon 14.

Carbonul conţinut în materia vie conţine o cantitate infimă de izotop radioactiv C^{14}. Datorită unui proces complex toată materia vie conţine o proporţie constantă de C^{14} în carbonul său total. După moarte cantitatea de carbon radioactiv se diminuează; se pierde 1/8000 din masa sa în fiecare an. Cantitatea de C^{14} în carbonul total pierde de asemenea 1/8000 din valoarea sa în fiecare an. Acest lucru permite determinarea datei morţii unui individ.

Fragmente ale scheletului unui om de tip Neanderthal au fost găsite într-o peşteră din Palestina. Analiza acestuia a arătat că proporţia de C^{14} este de $6,24$ la suta din cea existentă în oasele respectivului în timpul vieţii.

Dacă t este timpul după moartea sa exprimat în ani, proporţia de C^{14} verifică ecuaţia

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{8000}x,$$

cu soluţiile $x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{8000}}$, unde x_0 reprezintă cantitatea de C^{14} în individul respectiv.

Avem $x(t) = -8000 ln(0,0624) = 22400$. Prin urmare, acest om a trăit acum aproximativ 22400 de ani.

O problemă de chimie.

Pornind de la legea cineticii chimice prin care viteza de reacţie este direct proporţională cu produsul concentraţiilor reactante şi notând cu $x(t)$ concentraţia substanţei la momentul t se obţine ecuaţia diferenţială liniară

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

unde k este constanta vitezei de reacţie. Prin urmare, cunoscând concentraţia la momentul iniţial t_0 se poate determina concentraţia la momentul t.

Creşterea populaţiei.

Dacă $x(t)$ este populaţia unei anumite specii la momentul t, iar $d(t,x)$ este diferenţa dintre rata natalităţii şi cea a mortalităţii, atunci, în ipoteza că nu au loc emigrări sau imigrări, viteza de creştere a populaţiei x' va fi egală cu $d(t,x)$. Un model simplificat de creştere a populaţiei presupune ca $d(t,x)$ este proporţional cu x. Deci $x(.)$ va verifica ecuaţia diferenţială liniară

$$x' = ax,$$

a cărei soluţie generală este $x(t) = ce^{at}$, care este cunoscută ca legea creşterii populaţiei a lui Malthus.

Un alt model propus de Verhulst admite că $d(t, x) = ax - bx^2$, cu b o constantă foarte mică în raport cu a. Acest model conduce la ecuaţia differenţială

$$x' = ax - bx^2,$$

care este o ecuaţie diferenţială de tip Bernoulli.

O problemă de geometrie.

Ne interesează să determinăm curbele din plan care trec prin origine cu proprietatea că în orice punct de pe curbă există tangentă în acel punct la curbă şi dreptunghiul format de axele de coordonate cu paralele la axe duse prin orice punct de pe curbă este împărţit în porţiuni egale de curbă.

Modelul cel mai natural de descriere a unei curbe este dat de $y = f(x)$ ecuaţia explicită a curbei, iar curba va fi graficul funcţiei $f(.)$.

Punând condiţia ca ariile celor două triunghiuri curbilinii sa fie egale şi deci egale cu jumatate din aria dreptunghiului format de axele de coordonate cu paralele la axele de coordonate duse dintr-un punct de pe curbă obţinem relaţia

$$2\int_0^x f(\xi)d\xi = xf(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Cum funcţia $f(.)$ este derivabilă, derivând în egalitatea precedentă obţinem ecuaţia diferenţială liniară

$$f' = \frac{f}{x},$$

care are soluţia generală $f(x) = k|x|$, $k \in \mathbf{R}$. Prin urmare, răspunsul la întrebarea problemei este dat de toate dreptele care trec prin origine.

1.3 Ecuaţii integrabile prin metode elementare

În această secţiune vom prezenta mai multe tipuri de ecuaţii diferenţiale ale căror soluţii pot fi determinate prin operaţii de integrare a unor funcţii cunoscute. Cum integrarea funcţiilor reale de variabilă reală mai poartă denumirea şi de cuadratură, aceste ecuaţii poartă numele de ecuaţii rezolvabile (integrabile) prin cuadraturi.

Exemplul cel mai simplu de astfel de ecuaţie este dat de ecuaţia

$$x' = f(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

unde $f(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă. Evident, soluţia sa se obţine găsind primitivele funcţiei continue $f(.)$.

Ecuaţii cu variabile separabile.

Dacă $I, J \subset \mathbf{R}$ sunt două intervale deschise nevide, $a(.) : I \to \mathbf{R}$, $b(.) : J \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue atunci *ecuaţiile cu variabile separabile* au forma

$$\frac{dx}{dt} = a(t)b(x) \tag{1.3.1}$$

Propoziţia 1.3.1. *Fie $a(.) : I \to \mathbf{R}$, $b(.) : J \to \mathbf{R}$ continue care definesc ecuaţia (1.3.1).*

a) Dacă $x_0 \in J$ este astfel încât $b(x_0) = 0$ atunci $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}$, $\varphi(t) \equiv x_0$ este soluţie (staţionară) a ecuaţiei.

b) Dacă $A(.) : I \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcţiei $a(.)$ şi $B(.) : J_0 = \{x \in J; b(x) \neq 0\} \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcţiei $\frac{1}{b(.)}|_{J_0}$ atunci o funcţie continuă $\varphi(.) : I_1 \subset I \to J_0$, I_1 interval, este soluţie a ecuaţiei dacă şi numai dacă există $c \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$B(\varphi(t)) \equiv A(t) + c.$$

Demonstraţie. a) Un calcul simplu arată că funcţia constantă $\varphi(t) \equiv x_0$ este soluţie a ecuaţiei (1.3.1).

b) Fie $A(.) : I \to \mathbf{R}$ o primitivă a lui $a(.)$ şi $B(.) : J_0 \to \mathbf{R}$ o primitivă a funcţiei $\frac{1}{b(.)}|_{J_0}$.

Mai întâi, fie $\varphi(.) : I_1 \subset I \to J_0$ o soluţie a ecuaţiei (1.3.1). Considerăm funcţia $g(.) : I_1 \to \mathbf{R}$, $g(t) := B(\varphi(t)) - A(t)$. Atunci, având în vedere că $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei, avem

$$g'(t) := B'(\varphi(t))\varphi'(t) - A'(t) = \frac{1}{b(\varphi(t))}\varphi'(t) - a(t) = 0.$$

Ca atare, cum I_1 este interval, există $c \in \mathbf{R}$ astfel încât $g(t) \equiv c$.

Reciproc, fie $\varphi(.) : I_1 \subset I \to J_0$ continuă şi $c \in \mathbf{R}$ astfel încât $B(\varphi(t)) \equiv A(t) + c$.

Dacă funcţia $\varphi(.)$ este derivabilă, derivând ultima egalitate obţinem că $\varphi'(t) \equiv a(t)b(\varphi(t))$, adică $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1.3.1).

Rămâne să arătăm că $\varphi(.)$ este derivabilă. Cum $b(.)$ este continuă şi nu se anulează pe J_0, ea păstrează semn constant pe J_0. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $b(x) > 0 \ \forall x \in J_0$. Dar $B'(x) \equiv \frac{1}{b(x)} > 0 \ \forall x \in J_0$. Ca atare, $B(.)$ este strict crescătoare pe J_0, deci inversabilă. Prin urmare, $\varphi(t) \equiv B^{-1}(A(t)+c)$, de unde rezultă că $\varphi(.)$ este derivabilă, fiind o compunere de funcţii derivabile. □

Propoziţia 1.3.2. *Dacă $a(.) : I \to \mathbf{R}$, $b(.) : J \to \mathbf{R}$ sunt continue şi definesc ecuaţia (1.3.1) atunci*

a) $\forall (t_0, x_0) \in I \times J$, există $I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ o vecinătate a lui t_0 şi există $\varphi(.) : I_0 \to J$ soluţie a ecuaţiei (1.3.1) astfel încât $\varphi(t_0) = x_0$.

b) $\forall (t_0, x_0) \in I \times J_0$, există $I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ o vecinătate a lui t_0 şi există în mod unic $\varphi(.) : I_0 \to J_0$ soluţie a ecuaţiei (1.3.1) astfel încât $\varphi(t_0) = x_0$.

Demonstraţie. Fie $(t_0, x_0) \in I \times J$. Distingem două cazuri.

i) Dacă $b(x_0) = 0$ atunci conform Propoziţiei 1.3.1 a) funcţia $\varphi(t) \equiv x_0$ este soluţia căutată. În acest caz $I_0 = I$.

ii) Dacă $b(x_0) \neq 0$, echivalent cu a spune că $x_0 \in J_0$. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $b(x_0) > 0$. Atunci există $J_1 \subset J$ interval deschis, $x_0 \in J_1$ astfel încât $b(x) > 0 \ \forall x \in J_1$.

Fie $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$ şi $B(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{b(y)}dy$. Aplicăm Propoziţia 1.3.1 b) şi deducem că dacă $\varphi(.) : I_1 \subset I \to J_0$ este soluţie a ecuaţiei atunci există $c \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$B(\varphi(t)) = A(t) + c \quad \forall t \in I_1.$$

Dacă luăm $t = t_0$ în egalitatea de mai sus, din $\varphi(t_0) = x_0$ rezultă că $c = 0$. Cum $B(.)$ este inversabilă pe J_1 obţinem $\varphi(t) \equiv B^{-1}(A(t))$, $t \in I_0$, unde $I_0 = \{t \in I_1; A(t) \subset B(J_1)\}$.

Unicitatea lui $\varphi(.)$ reiese din modul în care a fost construită pe mulţimea I_0. $\square$

Observaţia 1.3.3. Soluţiile descrise în Propoziţia 1.3.1 nu sunt unicele soluţii ale ecuaţiei (1.3.1). Orice concatenare (lipire) de astfel de soluţii rămâne soluţie a ecuaţiei (1.3.1). Mai precis, dacă $\varphi_1(.) : [a,b] \to J, \varphi_2(.) : (b,c) \to J$ sunt soluţii astfel încât $\varphi_1(t) \equiv x_0 \in J$ şi $\lim_{t\searrow b} \varphi_2(t) = x_0$, atunci funcţia

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in [a,b] \\ \varphi_2(t), & t \in (b,c) \end{cases}$$

este, de asemenea, soluţie (Exerciţiu !).

Ecuaţii liniare scalare.

O clasă particulară importantă de ecuaţii cu variabile separabile este aceea a *ecuaţiilor liniare scalare*, de forma

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x, \tag{1.3.2}$$

unde $a(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este continuă, iar $I \subset \mathbf{R}$ este interval.

Rezultatele de la ecuaţii cu variabile separabile pot fi îmbunătăţite, după cum urmează.

Propoziţia 1.3.4. *Dacă $A(.)$ este o primitivă a funcţiei continue $a(.)$ atunci $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (1.3.2) dacă şi numai dacă $\exists c \in \mathbf{R}$ astfel încât*

$$\varphi(t) = ce^{A(t)}, \quad t \in I.$$

Demonstraţie. Faptul că funcţia definită mai sus este soluţie a ecuaţiei rezultă dintr-un calcul imediat.

Reciproc, dacă $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ verifică $\varphi'(t) = a(t)\varphi(t)$ $\forall t \in I$, considerăm funcţia $g(.) : I \to \mathbf{R}$ dată prin $g(t) = e^{-A(t)}\varphi(t)$. Cum $g'(t) \equiv e^{-A(t)}(-a(t)\varphi(t) + \varphi'(t)) \equiv 0$ deducem că $\exists c \in \mathbf{R}$ astfel încât $g(t) \equiv c$. $\square$

Propoziţia 1.3.5. *Dacă funcţia* $a(.) : I \to \mathbf{R}$ *este continuă atunci* $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}$, $\exists! \varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ *soluţie a ecuaţiei (1.3.2) astfel încât* $\varphi(t_0) = x_0$. *Mai precis,*

$$\varphi(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \quad t \in I.$$

Demonstraţie. Este imediată din Propoziţia 1.3.4. $\square$

Ecuaţii afine scalare.

Ecuaţiile diferenţiale afine scalare sunt de forma

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t), \tag{1.3.3}$$

unde $a(.), b(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt continue, iar $I \subset \mathbf{R}$ este interval.

Oricărei ecuaţii afine i se ataşează *ecuaţia liniară asociată*

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = a(t)\overline{x}; \tag{1.3.4}$$

aceasta jucând un rol esenţial în integrarea ecuaţiilor afine, dupa cum se vede din afirmaţia următoare care poartă denumirea de *principiul variaţiei constantelor (al lui Lagrange).*

Propoziţia 1.3.6. *Dacă* $a(.), b(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *sunt continue şi dacă* $A(.)$ *este o primitivă a lui* $a(.)$, *atunci* $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ *este soluţie a ecuaţiei (1.3.3) dacă şi numai dacă* $\exists c(.)$ *o primitivă a funcţiei* $t \to e^{-A(t)}b(t)$ *astfel încât*

$$\varphi(t) = c(t)e^{A(t)}, \quad t \in I.$$

Demonstraţie. Dacă $\varphi(t) = c(t)e^{A(t)}$ cu $c'(t) \equiv e^{-A(t)}b(t)$ atunci $\varphi'(t) \equiv c'(t)e^{A(t)} + c(t)e^{A(t)}a(t) \equiv e^{-A(t)}b(t)e^{A(t)} + \varphi(t)a(t) \equiv b(t) + a(t)\varphi(t)$.

Reciproc, fie $\varphi(.)$ o soluţie a ecuaţiei (1.3.3) şi definim funcţia $c(t) = e^{-A(t)}\varphi(t)$, $t \in I$. Rezultă că $\varphi(t) = c(t)e^{A(t)}$ şi din faptul că $\varphi(.)$ este soluţie, avem că $(c(t)e^{A(t)})' \equiv a(t)(c(t)e^{A(t)}) + b(t)$, de unde în final se găseşte că $c'(t) \equiv e^{-A(t)}b(t)$. □

Propoziţia 1.3.7. *Dacă $a(.), b(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt continue, atunci $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}$, $\exists! \varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ soluţie a ecuaţiei (1.3.3) astfel încât $\varphi(t_0) = x_0$. Mai precis,*

$$\varphi(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} b(s)ds, \quad t \in I.$$

Demonstraţie. Din Propoziţia 1.3.6 aplicată cu $A(t) := \int_{t_0}^t a(s)ds$ avem că dacă $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1.3.3) atunci există $k \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\varphi(t) = (\int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(u)du} b(s)ds + k)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}.$$

Punând condiţia ca $\varphi(t_0) = x_0$ obţinem concluzia dorită. □

Formula care apare în Propoziţia 1.3.7 poartă denumirea de *formula variaţiei constantelor pentru ecuaţii afine scalare.*

Exemplul 1.3.8. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x' = -2tx + e^{-t^2}.$$

Cum avem o ecuaţie afină scalară considerăm, mai întâi ecuaţia liniară asociată

$$\overline{x}' = -2t\overline{x},$$

care are soluţia generală $\overline{x}(t) = ce^{\int_0^t -2sds} = ce^{-t^2}, c \in \mathbf{R}$. Aplicăm metoda variaţiei constantelor. Revenim la ecuaţia afină şi căutăm soluţii de forma $x(t) = c(t)e^{-t^2}$. Funcţia $c(.)$ o vom determina punând condiţia ca funcţia $x(.)$ dată de $x(t) = c(t)e^{-t^2}$ să verifice ecuaţia. Obţinem

$$c'(t)e^{-t^2} - 2tc(t)e^{-t^2} = -2tc(t)e^{-t^2} + e^{-t^2}.$$

De unde $c'(t) = 1$; deci $c(t) = t + k$ cu $k \in \mathbf{R}$.

Prin urmare soluţia generală este $x(t) = e^{-t^2}(t+k)$ cu $k \in \mathbf{R}$.

Ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli.

Dacă $\alpha \in \mathbf{R}$ şi $a(.), b(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue acestea definesc *ecuaţia diferenţială de tip Bernoulli*

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^{\alpha}. \tag{1.3.5}$$

Metoda variaţiei constantelor de la ecuaţii afine poate fi utilizată şi pentru integrarea ecuaţiilor Bernoulli.

Propoziţia 1.3.9. *Dacă $a(.), b(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt continue şi dacă $A(.)$ este o primitivă a lui $a(.)$, atunci $\varphi(.) : I_1 \subset I \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (1.3.5) dacă şi numai dacă $\exists c(.) : I_1 \to \mathbf{R}$ soluţie a ecuaţiei cu variabile separabile*

$$\frac{dc}{dt} = e^{(\alpha-1)A(t)}b(t)c^{\alpha},$$

astfel încât

$$\varphi(t) = c(t)e^{A(t)}, \quad t \in I_1.$$

Demonstraţie. Este asemănătoare cu demonstraţia Propoziţiei 1.3.6 şi o lăsăm ca un exerciţiu pentru cititor.

Ecuaţii diferenţiale de tip Riccati.

O *ecuaţie de tip Riccati* este de forma

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \tag{1.3.6}$$

unde $a(.), b(.), c(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt continue, iar $I \subset \mathbf{R}$ este interval.

În general o ecuaţie de tip Riccati nu poate fi rezolvată prin cuadraturi în afară de situaţia în care se poate pune în evidenţa o soluţie particulară a sa.

Propoziţia 1.3.10. *Fie $a(.), b(.), c(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue şi $\varphi_0(.) : I \to \mathbf{R}$ o soluţie a ecuaţiei (1.3.6). Atunci $\varphi(.) : I_1 \subset I \to$*

R *este soluţie a ecuaţiei (1.3.6) dacă şi numai dacă* $y(t) := \varphi(t) - \varphi_0(t), t \in I_1$ *este soluţie a ecuaţiei Bernoulli*

$$\frac{dy}{dt} = (2a(t)\varphi_0(t) + b(t))y + a(t)y^2.$$

Demonstraţie. Fie $\varphi(.)$ şi $\varphi_0(.)$ soluţii ale ecuaţiei (1.3.6). Pentru $t \in I$ avem

$$y'(t) = \varphi'(t) - \varphi_0'(t) = a(t)\varphi^2(t) + b(t)\varphi(t) + c(t) - a(t)\varphi_0^2(t) - b(t)\varphi_0(t)$$

$$-c(t) = a(t)(\varphi(t) - \varphi_0(t))^2 + 2a(t)\varphi_0(t)(\varphi(t) - \varphi_0(t)) + b(t)(\varphi(t) - \varphi_0(t))$$
$$= a(t)y^2(t) + 2a(t)\varphi_0(t)y(t) + b(t)y(t).$$

Reciproc, fie $y(.)$ o soluţie a ecuaţiei Bernoulli din enunţul propoziţiei, $\varphi_0(.)$ o soluţie a ecuaţiei (1.3.6) şi $\varphi(.) = \varphi_0(.) + y(.)$. Pentru $t \in I$ avem

$$\varphi'(t) = y'(t) + \varphi_0'(t) = (2a(t)\varphi_0(t) + b(t))y(t) + a(t)y^2(t) +$$

$$a(t)\varphi_0^2(t) + b(t)\varphi_0(t) + c(t) = a(t)(y(t) + \varphi_0(t))^2 + b(t)(y(t) + \varphi_0(t))$$
$$+c(t) = a(t)\varphi^2(t) + b(t)\varphi(t) + c(t). \quad \square$$

Exemplul 1.3.11. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei Riccati

$$x' = x^2 + 6x - 4t^2 + 11$$

ştiind că are soluţia particulară $\varphi_0(t) = 2t - 3$.

Fiind o ecuaţie Riccati şi cunoscând soluţia particulară $\varphi_0(.)$ definim funcţia $y(.)$ prin $y(t) = x(t) - \varphi_0(t)$. În continuare găsim ecuaţia pe care o satisface $y(.)$.

Cum $x(t) = y(t) + 2t - 3$, înlocuind în ecuaţie găsim

$$y' = y^2 + 4ty,$$

care este o ecuaţie Bernoulli, pe care o vom integra folosind metoda variaţiei constantelor. Considerăm ecuaţia liniară asociată

$$\overline{y}' = 4t\overline{y},$$

care are soluţia $\overline{y}(t) = ce^{2t^2}$. Căutăm, apoi, soluţii, pentru ecuaţia Bernoulli, de forma $y(t) = c(t)e^{2t^2}$. Găsim

$$c'(t) = c^2(t)e^{2t^2}.$$

Ecuaţia $\frac{dc}{dt} = c^2e^{2t^2}$ este o ecuaţie cu variabile separabile. Determinăm mai întâi soluţiile staţionare ale acesteia. Ecuaţia algebrică $c^2 = 0$ are soluţia $c = 0$. Corespunzător, ecuaţia va avea soluţia staţionară $c_0(t) \equiv 0$. În continuare separăm variabilele $\frac{dc}{c^2} = e^{2t^2}dt$, integrăm şi găsim $-\frac{1}{c} = \int_0^t e^{2s^2}ds + k$, $k \in \mathbf{R}$, deci $c(t) = -\frac{1}{\int_0^t e^{2s^2}ds+k}$ cu $k \in \mathbf{R}$.

Prin urmare, ecuaţia Bernoulli are soluţiile $y_0(t) \equiv 0$ şi $y_k(t) \equiv \frac{-e^{2t^2}}{\int_0^t e^{2s^2}ds+k}$, $k \in \mathbf{R}$.

Aşadar, soluţiile ecuaţiei noastre sunt $x_0(t) \equiv 2t - 3$ şi $x_k(t) \equiv 2t - 3 - \frac{e^{2t^2}}{\int_0^t e^{2s^2}ds+k}$, $k \in \mathbf{R}$. Soluţiile $x_k(.)$ sunt definite pe intervalele deschise pe care expresia $x_k(.)$ are sens.

Ecuaţii omogene.

Se numeşte *ecuaţie diferenţială omogenă* o ecuaţie de forma

$$\frac{dx}{dt} = f(\frac{x}{t}), \tag{1.3.7}$$

unde $f(.) : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă dată care satisface $f(x) \neq x$ $\forall x \in D$.

Propoziţia 1.3.12. *Funcţia $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (1.3.7) dacă şi numai dacă funcţia definită prin $\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{t}, t \in I$ este soluţie a ecuaţiei cu variabile separabile*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f(y) - y}{t}.$$

Demonstraţie. Dacă $\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{t}$, $t \in I$ cu $\varphi(.)$ soluţie a ecuaţiei (1.3.7), atunci $\varphi(t) = t\psi(t)$ şi punând condiţia ca funcţia $t \to t\psi(t)$ să verifice ecuaţia (1.3.7) se găseşte ca $\psi(.)$ verifică ecuaţia cu variabile separabile de mai sus.

Reciproc, dacă se pune conditia ca funcţia $t \to \frac{\varphi(t)}{t}$ să verifice ecuaţia cu variabile separabile din enunţ se obţine că $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (1.3.7). $\square$

O clasă de ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii omogene este formată din ecuaţiile de forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_{11}x + a_{12}t + b_1}{a_{21}x + a_{22}t + b_2}, \tag{1.3.8}$$

unde a_{ij} şi b_j, $i, j = 1, 2$ sunt constante şi $a_{11}^2 + a_{12}^2 + b_1^2 > 0$, $a_{21}^2 + a_{22}^2 + b_2^2 > 0$.

În funcţie de compatibilitatea sistemului algebric

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}t + b_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}t + b_2 = 0 \end{cases} \tag{1.3.9.}$$

distingem trei posibilităţi.

Dacă sistemul (1.3.9) este compatibil determinat cu soluţia (ξ, η) atunci cu schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = y + \xi \\ t = s + \eta \end{cases}$$

ecuaţia (1.3.8) poate fi rescrisă sub forma ecuaţiei omogene

$$\frac{dy}{ds} = \frac{a_{11}\frac{y}{s} + a_{12}}{a_{21}\frac{y}{s} + a_{22}}.$$

Dacă sistemul (1.3.9) este compatibil nedeterminat atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât $(a_{11}, a_{12}, b_1) = \lambda(a_{21}, a_{22}, b_2)$ şi ecuaţia (1.3.8) se reduce la $x' = \lambda$.

Dacă sistemul (1.3.9) este incompatibil atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât $(a_{11}, a_{12}) = \lambda(a_{21}, a_{22})$, $(a_{11}, a_{12}, b_1) \neq \lambda(a_{21}, a_{22}, b_2)$ şi ecuaţia (1.3.8) se reduce la o ecuaţie cu variabile separabile.

Ecuaţii de tip Lagrange.

O ecuaţie diferenţiala de forma

$$x = ta(x') + b(x'), \tag{1.3.10}$$

în care $a(.), b(.) : \mathbf{R} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii de clasă C^1 şi $a(r) \neq r, \forall r \in \mathbf{R}$ se numeşte *ecuaţie Lagrange.* Acest tip de ecuaţie se poate integra folosind *metoda parametrizării.* Această metodă constă în determinarea soluţiilor de clasă C^2 sub formă parametrică

$$\begin{cases} t = \tau(p) \\ x = \xi(p), \quad p \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Dacă $x(.)$ este o soluţie de clasa C^2 a ecuaţiei (1.3.10) derivând identitatea (1.3.10) membru cu membru obţinem

$$x'(t) = a(x'(t)) + ta'(x'(t))x''(t) + b'(x'(t))x''(t).$$

Dacă notăm $p(t) = x'(t)$ avem $x''(t) = p'(t)$ şi obţinem

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{a(p) - p}{ta'(p) + b'(p)}.$$

Luăm, în continuare, pe t ca funcţie şi pe p ca variabilă, astfel că ecuaţia de mai sus se rescrie sub forma

$$\frac{dt}{dp} = -\frac{a'(p)}{a(p) - p}t - \frac{b'(p)}{a(p) - p},$$

care este o ecuaţie afină, ce poate fi integrată cu metoda variaţiei constantelor; se găsesc soluţiile sub formă parametrică ale ecuaţiei Lagrange

$$\begin{cases} t = \theta(p, c) \\ x = \theta(p, c)a(p) + b(p), \quad p \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

cunoscute în literatura de specialitate şi ca ecuaţiile parametrice ale soluţiei generale ale ecuaţiei Lagrange.

Ecuaţii de tip Clairaut.

Dacă $a(.) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie de clasă C^1 aceasta va defini *ecuaţia diferenţială Clairaut*

$$x = tx' + a(x'), \tag{1.3.11}$$

Evident, ecuaţia Clairaut este un caz particular al ecuaţiei Lagrange. Ca atare, ecuaţia se integrează folosind tot metoda parametrizării. Dacă $x(.)$ este o soluţie de clasă C^2 a ecuaţiei (1.3.11) derivând identitatea (1.3.11) în ambii membrii obţinem

$$x''(t)(t + a'(x'(t))) = 0.$$

Notăm $p(t) = x'(t)$ şi ecuaţia de mai sus este echivalentă cu

$$p'(t)(t + a'(p(t))) = 0.$$

Dacă $p'(t) = 0$ atunci $x(t) = bt+c, t \in \mathbf{R}$ cu $b, c \in \mathbf{R}$ şi din condiţiia ca $x(.)$ să verifice ecuaţia găsim $x(t) = bt+a(b)$, $t \in \mathbf{R}$, care se numeşte soluţia generală a ecuaţiei Clairaut.

Dacă $t + a'(p(t)) = 0$ deducem

$$\begin{cases} t = -a'(p) \\ x = -pa'(p) + a(p), \quad p \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

sistem care poartă denumirea de soluţia singulară a ecuaţiei Clairaut.

Ecuaţii de ordin superior care admit reducerea ordinului.

În continuare vom trece în revistă câteva din cele mai cunoscute tipuri de ecuaţii de ordin superior care admit reducerea ordinului. Acestea sunt clase particulare de ecuaţii diferenţiale de ordin superior

$$F(t, x, x', x'', ..., x^{(n)}) = 0,$$

care prin diverse schimbări de variabile admit reducerea succesivă a ordinului, obţinându-se în final o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi pentru care se pot aplica metodele elementare studiate până în prezent.

• Ecuaţiile diferenţiale de forma

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, ..., x^{(n)}) = 0, \quad 1 \leq k < n \tag{1.3.12}$$

se reduc, prin substituţia $y(t) = x^{(k)}(t)$ la ecuaţia diferenţială de ordin $n - k$

$$F(t, y, y', ..., y^{(n-k)}) = 0.$$

• Ecuaţiile diferenţiale de forma

$$F(t, \frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}, ..., \frac{x^{(n)}}{x}) = 0, \tag{1.3.13}$$

definite de o funcţie $F(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ care este omogenă de grad zero în variabilele $x, x', x'', ..., x^{(n)}$, se reduc prin substituţia $y(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}$ la o ecuaţie diferenţială de ordinul $n-1$ în necunoscuta $y(.)$.

Reamintim că o funcţie $G : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ se numeşte omogenă de grad α, $\alpha \in \mathbf{R}$ dacă $G(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^\alpha G(x_1, x_2, ..., x_n)$ $\forall t \neq 0$, $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$.

• Ecuatiile diferenţiale autonome de forma

$$F(x, x', x'', ..., x^{(n)}) = 0, \tag{1.3.14}$$

definite de o funcţie $F(.,.) : D \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ (i.e. constantă în raport cu variabila t) prin schimbarea de variabilă $y(x) = x'$ se reduc la o ecuaţie diferenţială de ordinul $n-1$.

Această înseamnă că pentru orice soluţie inversabilă $x(.)$ a ecuaţiei (1.3.14) schimbarea de variabilă defineşte o nouă funcţie $y(.)$ prin relaţia $y(x(t)) = x'(t)$ sau $y(s) = x'(x^{-1}(s))$, care, după cum rezultă în urma efectuării unor calcule elementare, este soluţia unei ecuaţii de ordin $n-1$ de forma

$$G(s, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

• Ecuaţiile de tip Euler (neliniare) de forma

$$F(x, tx', t^2x'', ..., t^nx^{(n)}) = 0, \tag{1.3.15}$$

se reduc la o ecuaţie diferenţială de tipul (1.3.14) prin schimbarea de variabilă $|t| = e^s$.

Această înseamnă că pentru orice soluţie $x(.) : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ (respectiv, $x(.) : (-\infty, 0) \to \mathbf{R}$) schimbarea de variabilă defineşte o nouă funcţie $y(.)$ dată prin $y(s) := x(e^s)$, $s \in \{u \in \mathbf{R}; e^u \in I\}$ (respectiv, $y(s) := x(-e^s)$), care, după efectuarea unor calcule elementare, rezultă că este soluţie a unei ecuatii de forma (1.3.14).

• Ecuatiile diferenţiale omogene de ordinul n de forma

$$F(\frac{x}{t}, x', tx'', ..., t^{n-1}x^{(n)}) = 0$$

se reduc la o ecuaţie de tip Euler de forma (1.3.15) prin substituţia $y(t) = \frac{x(t)}{t}$.

Exemplul 1.3.13. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$txx'' + t(x')^2 - xx' = 0, \quad t > 0.$$

Observăm că $x(t) \equiv 0$ verifică ecuaţia. În continuare căutăm soluţii care sunt neidentic nule. Împărţim prin x^2 şi obţinem

$$t\frac{x''}{x} + t(\frac{x'}{x})^2 - \frac{x'}{x} = 0,$$

Ecuaţia se încadrează, deci, în clasa (1.3.13). Efectuăm substituţia $y = \frac{x'}{x}$ care conduce la ecuaţia

$$t(y' + y^2) + ty^2 - y = 0; \quad y' = \frac{y}{t} - 2y^2.$$

Ecuaţia în y este o ecuaţie Bernoulli pe care o integrăm cu metoda variaţiei constantelor. Ecuaţia liniară asociată $\overline{y}' = \frac{\overline{y}}{t}$ are soluţia generală $\overline{y}(t) = ct, c \in \mathbf{R}$. Căutăm soluţii de forma $y(t) = c(t)t$ şi găsim, după reducerea termenilor asemenea, ecuaţia cu variabile separabile $c' = -2c^2t$. Aceasta are soluţia staţionară $c_0(t) \equiv 0$ şi soluţiile $c_k(t) = \frac{1}{t^2+k}$, $k \in \mathbf{R}$; deci ecuaţia în y are soluţiile $y_0(t) \equiv 0$ şi $y_k(t) = \frac{t}{t^2+k}$, $k \in \mathbf{R}$. Întorcându-ne la ecuaţia iniţială avem, pe de o parte $\frac{x'}{x} = 0$ şi obţinem $x' = 0$, de unde soluţiile $x_a(t) \equiv a$, $a \in \mathbf{R}$ şi pe de altă parte $\frac{x'}{x} = \frac{t}{t^2+k}$, sau $x' = \frac{t}{t^2+k}x$, care este o ecuaţie liniară scalară cu soluţiile $x_{b,k}(t) = be^{\int \frac{t}{t^2+k}dt} = b\sqrt{t^2+k}$, $b, k \in \mathbf{R}$. Aceste soluţii sunt definite pe intervalele deschise pe care expresia $x_{b,k}(.)$ are sens.

2

Existenţa şi unicitatea soluţiilor

În acest capitol se studiază prima problemă fundamentală în teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, anume problema Cauchy. După ce se defineşte noţiunea de problemă Cauchy şi conceptele corespunzătoare de existenţa locală, unicitate locală, existenţa globală şi unicitate globală sunt prezentate câteva dintre cele mai cunoscute rezultate de existenţa şi unicitate atât locală cât şi globală pentru soluţiile ecuaţiilor diferenţiale.

2.1 Existenţa locală a soluţiilor

Fie funcţia $f(.,.) : D \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia diferenţială

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{2.1.1}$$

şi fie $(t_0, x_0) \in D$.

Problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială (2.1.1) constă în găsirea unei soluţii $\varphi(.) : I_0 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ (vecinătate a lui t_0) a ecuaţiei diferenţiale care satisface condiţia iniţială $\varphi(t_0) = x_0$.

Vom spune, în acest caz, că $\varphi(.)$ este soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0). Condiţia iniţială $\varphi(t_0) = x_0$ mai poartă denumirea şi de condiţie Cauchy.

Se disting următoarele noţiuni. Vom spune că ecuaţia diferenţială (2.1.1) (sau câmpul vectorial $f(.,.)$) admite *proprietatea de existenţa locală* a soluţiilor în $(t_0, x_0) \in D$ dacă $\exists I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ şi $\exists \varphi(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0). Ecuaţia diferenţială (2.1.1) (sau câmpul vectorial $f(.,.)$) admite *proprietatea de existenţa globală* a soluţiilor în $(t_0, x_0) \in D$ dacă $D = I \times G$, $I \subset \mathbf{R}$ interval, $G \subset \mathbf{R}^n$ şi $\exists \varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0).

Înainte de a demonstra principalul rezultat privitor la existenţa locală a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale prezentăm un rezultat simplu care va fi utilizat frecvent pe parcursul acestei cărţi.

Propoziţia 2.1.1. *Fie $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia diferenţială (2.1.1.). Atunci funcţia $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale (2.1.1) dacă şi numai dacă $\varphi(.)$ este continuă, $Graph(\varphi) \subset D$ şi $\varphi(.)$ verifică relaţia*

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) \quad \forall t, t_0 \in I. \tag{2.1.2}$$

Demonstraţie. Dacă $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (2.1.1), atunci $\varphi(.)$ este continuă (este chiar derivabilă), $Graph(\varphi) \subset D$ şi $\varphi(.)$ verifică

$$\varphi'(s) = f(s, \varphi(s)) \quad \forall s \in I.$$

Integrând egalitatea precedentă între t_0 şi t, din formula Leibnitz-Newton obţinem relaţia (2.1.2).

Reciproc, cum $\varphi(.)$ este continuă şi $t_0 \in I$ este astfel încât (2.1.2) are loc pentru orice $t \in I$, din relaţia (2.1.2) va rezulta că $\varphi(.)$ este derivabilă şi, deci, derivând, obţinem $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in I$, adică $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (2.1.1). □

Ecuaţia (2.1.2) se numeşte *ecuaţia integrală asociată ecuaţiei diferenţiale* (2.1.1).

În cele ce urmează vom prezenta celebra teoremă a lui Peano, care afirmă că orice ecuaţie diferenţială definită de un câmp vectorial continuu admite proprietatea de existenţă locală. Acest rezultat a fost demonstrat în 1890 de matematicianul italian Giuseppe Peano. Din numeroasele demonstraţii ale acestei teoreme am ales pe cea utilizând

,,şirul lui Tonelli", care pare a fi cea mai ,,scurtă", utilizând în acelaşi timp un minim de rezultate auxiliare de analiză matematică (i.e. teorema Arzela-Ascoli). Cu $||.||$ vom nota norma euclidiană pe $\mathbf{R}^n$.

Un instrument esenţial al demonstraţiei teoremei lui Peano este Teorema Arzela-Ascoli, un rezultat analog lemei lui Cesaro, care oferă un criteriu de compacitate în spaţiul funcţiilor continue definite pe un interval compact real cu valori în $\mathbf{R}^n$.

Fie $I := [a, b] \subset \mathbf{R}$ un interval şi fie $C(I, \mathbf{R}^n)$ spaţiul funcţiilor continue de la I la $\mathbf{R}^n$ înzestrat cu topologia convergenţei uniforme pe I. Reamintim că, norma care generează această topologie este definită de $d_C(f, g) := \sup\{||f(x) - g(x)||; \quad x \in I\}, \quad f, g \in C(I, \mathbf{R}^n)$.

O familie $\mathcal{A} \subset C(I, \mathbf{R}^n)$ se numeşte *relativ compactă* dacă orice şir de elemente din $\mathcal{A}$ are cel puţin un subşir convergent pe I.

O familie $\mathcal{A} \subset C(I, \mathbf{R}^n)$ se numeşte *uniform echicontinuă (sau egal uniform continuă)* pe I dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x, y \in I$ cu $|x - y| < \eta_\varepsilon$ are loc $d_C(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

O familie $\mathcal{A} \subset C(I, \mathbf{R}^n)$ se numeşte *egal mărginită* pe I dacă $\exists M > 0$ astfel încât pentru orice $f \in \mathcal{A}$ şi $t \in I$ avem $||f(t)|| \leq M$.

Teorema Arzela-Ascoli afirmă că dacă $\mathcal{A} \subset C(I, \mathbf{R}^n)$ este o familie uniform echicontinuă şi egal mărginită pe I, atunci $\mathcal{A}$ este relativ compactă.

Pentru demonstraţia acestei teoreme se poate consulta, de exemplu, [15].

Teorema 2.1.2. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă care defineşte ecuaţia diferenţială (2.1.1). Atunci ecuaţia (2.1.1) admite proprietatea de existenţă locală a soluţiilor pe D.*

Demonstraţie. Considerăm $(t_0, x_0) \in D$ arbitrar. Cum $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ este o mulţime deschisă, există $\delta, \gamma > 0$ astfel încât $D_0 = \overline{B}_\delta(t_0) \times \overline{B}_\gamma(x_0) \subset D$ (unde, în general, $\overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbf{R}^n; ||x - a|| \leq r\}$). Cum $f(.,.)$ este continuă şi $D_0 \subset D$ este compactă există $M \geq 0$ definit de $M = \max_{(t,x) \in D_0} ||f(t, x)||$.

Dacă $M = 0$, atunci $f(t, x) \equiv 0$ şi soluţia căutată este $\varphi_0(t) \equiv x_0$.

Evident, ne interesează cazul în care $M > 0$. Fie

$$a = \min\{\delta, \frac{\gamma}{M}\}, \quad I_0 = [t_0 - a, t_0 + a].$$

Pentru $m \geq 1$ definim *şirul lui Tonelli*, $\varphi_m(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$, astfel:

$$\varphi_m(t) = \begin{cases} x_0, & t \in [t_0 - \frac{a}{m}, t_0 + \frac{a}{m}] \\ x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{a}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds, & t \in [t_0 + \frac{a}{m}, t_0 + a] \\ x_0 + \int_{t_0}^{t+\frac{a}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds, & t \in [t_0 - a, t_0 - \frac{a}{m}]. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Să observăm mai întâi că acest şir este bine definit. Acest lucru se va face prin inducţie relativ la intervalele de forma $[t_0 - \frac{la}{m}, t_0 + \frac{la}{m}]$, $l = 1, 2, ..., m$.

Pentru $l = 1$, $\varphi_m(t) \equiv x_0$, evident definit. Presupunem că $\varphi_m(.)$ este bine definit pentru $t \in [t_0 - \frac{la}{m}, t_0 + \frac{la}{m}]$, $l < m$ şi vom demonstra acelaşi lucru pentru $t \in [t_0 - \frac{(l+1)a}{m}, t_0 + \frac{(l+1)a}{m}]$. Fie, deci, $t \in [t_0 - \frac{(l+1)a}{m}, t_0 + \frac{(l+1)a}{m}]$. Să presupunem, de exemplu, că $t \in [t_0 - \frac{(l+1)a}{m}, t_0 - \frac{la}{m}]$. Prin urmare, $t + \frac{a}{m} \in [t_0 - \frac{la}{m}, t_0 - \frac{(l-1)a}{m}]$ şi în baza ipotezei de inducţie dacă $s \in [t_0, t + \frac{a}{m}]$ atunci $\varphi_m(s)$ este bine definită, deci şi $\varphi_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t+\frac{a}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds$ este bine definită.

Vom demonstra, în continuare, că şirul de funcţii $\varphi_m(.)$ este un şir egal marginit şi uniform echicontinuu.

Pentru prima parte vom arăta că $\varphi_m(t) \in \overline{B}_\gamma(x_0)$ $\forall t \in I_0, m \geq 1$, de unde vom avea imediat că

$$||\varphi_m(t)|| \leq ||\varphi_m(t) - x_0|| + ||x_0|| = \gamma + ||x_0||, \quad \forall t \in I_0, m \geq 1,$$

adică şirul este marginit de o constantă care nu depinde de t şi m. Demonstraţia se va face, din nou, prin inducţie relativ la intervalele de forma $[t_0 - \frac{la}{m}, t_0 + \frac{la}{m}]$, $l = 1, 2, ..., m$. Pentru $l = 1$, evident, $\varphi_m(t) \equiv x_0 \in \overline{B}_\gamma(x_0)$. Să presupunem afirmaţia adevărată pentru l şi o demonstrăm pentru $l + 1$. De data aceasta să presupunem că $t \in [t_0 + \frac{la}{m}, t_0 + \frac{(l+1)a}{m}]$, deci $t - \frac{a}{m} \in [t_0 + \frac{(l-1)a}{m}, t_0 + \frac{la}{m}]$ şi în baza ipotezei de inducţie $\varphi_m(s) \in \overline{B}_\gamma(x_0)$ $\forall s \in [t_0, t - \frac{a}{m}]$. Prin urmare

$$||\varphi_m(t) - x_0|| \leq |\int_{t_0}^{t-\frac{a}{m}} ||f(s, \varphi_m(s))||ds| \leq M|t - \frac{a}{m} - t_0| \leq$$

$$\leq M\frac{la}{m} \leq Ma \leq \gamma, \quad \forall t \in [t_0 + \frac{la}{m}, t_0 + \frac{(l+1)a}{m}].$$

Pentru a arăta că şirul $\{\varphi_m(.)\}$ este uniform echicontinuu vom demonstra (chiar mai tare) că

$$||\varphi_m(t') - \varphi_m(t'')|| \leq M|t' - t''| \quad \forall t', t'' \in I_0, m \geq 1.$$

Fie, aşadar, $t', t'' \in I_0$. Există mai multe posibilităţi, după cum t', t'' se găsesc în subintervalele $[t_0 - a, t_0 + \frac{a}{m}]$, $[t_0 - \frac{a}{m}, t_0 + \frac{a}{m}]$, $[t_0 + \frac{a}{m}, t_0 + a]$. Să admitem, de exemplu, că $t', t'' \in [t_0 + \frac{a}{m}, t_0 + a]$ (analog se tratează şi celelalte situaţii). Ţinând cont de definiţia lui $\varphi_m(.)$, de construcţia lui D_0 şi de faptul că $(s, \varphi_m(s)) \in D_0$ $\forall s \in I_0$ avem

$$||\varphi_m(t') - \varphi_m(t'')|| \leq |\int_{t' - \frac{a}{m}}^{t'' - \frac{a}{m}} ||f(s, \varphi_m(s))||ds| \leq M|t' - t''|.$$

Aşadar, putem aplica Teorema Arzela-Ascoli şi deducem că există un subşir, notat pentru simplitate tot cu, $\varphi_m(.)$, uniform convergent la o funcţie continuă $\varphi(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$.

Cum $\varphi_m(.) \to \varphi(.)$ uniform pe I_0, atunci din proprietăţile integralei avem, pe de o parte, faptul că

$$\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_m(s))ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \quad \forall t \in I_0$$

şi pe de altă parte

$$||\int_{t}^{t \pm \frac{a}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds|| \leq M\frac{a}{m} \to 0;$$

rescriind formula (2.1.3) sub forma $\varphi_m(t) =$

$$\begin{cases} x_0, & t \in [t_0 - \frac{a}{m}, t_0 + \frac{a}{m}] \\ x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_m(s))ds + \int_{t}^{t - \frac{a}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds, & t \in [t_0 + \frac{a}{m}, t_0 + a] \\ x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_m(s))ds + \int_{t}^{t + \frac{a}{m}} f(s, \varphi_m(s))ds, & t \in [t_0 - a, t_0 - \frac{a}{m}] \end{cases}$$

şi trecând la limită în această ultimă egalitate cu $m \to \infty$, obţinem că $\varphi(.)$ verifică

$$\varphi(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds,$$

care, în baza Propoziţiei 2.1.1. şi a faptului că $\varphi(t_0) = x_0$, implică că $\varphi(.)$ este soluţie a problemei (f, t_0, x_0). $\square$

Observaţia 2.1.3. Dacă $f(.,.)$ nu este continuă, atunci ecuaţia poate să nu admită proprietatea de existenţă locală a soluţiilor. De exemplu, dacă

$$f(t,x) = g(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t \in \mathbf{Q} \\ 1 & \text{dacă } t \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q} \end{cases}$$

atunci ecuaţia diferenţială $x' = f(t,x)$ nu are nici o soluţie pentru nici o conditie iniţială. (Exerciţiu !)

În acelaşi timp, există exemple în care, deşi funcţia care defineşte ecuaţia nu este continuă, totuşi ecuaţia să admită proprietatea de existenţă locală. Dacă

$$f(t,x) = g(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x < 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ 1 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

atunci ecuaţia $x' = f(t,x)$ are soluţie locală (care este chiar unică) pentru orice condiţie iniţială $(t_0, x_0) \in D = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. (Exerciţiu !)

După cum s-a văzut, deja, în Secţiunea 1.1 studiul soluţiilor unei *ecuaţii diferenţiale de ordin superior* de forma

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}), \tag{2.1.4}$$

definită de o funcţie $f : D \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, se reduce la studiul soluţiilor *sistemului canoic asociat*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{2.1.5}$$

care este o ecuaţie diferenţială pe $\mathbf{R}^n$ de forma (2.1.1) definită de

$$\tilde{f}(.,.) : D \to \mathbf{R}^n, \quad \tilde{f}(t, (x_1, ..., x_n)) = (x_2, x_3, ..., x_n, f(t, x_1, ..., x_n)).$$

Mai precis, avem următorul rezultat de echivalenţă.

Propoziţia 2.1.4. *O funcţie* $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *este soluţie a ecuaţiei (2.1.4) dacă şi numai dacă* $\varphi(.)$ *este de* n *ori derivabilă şi* $\tilde{\varphi}(.) : I \to \mathbf{R}^n$ *definită prin*

$$\tilde{\varphi}(t) := (\varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)), \quad t \in I$$

este soluţie a ecuaţiei (2.1.5).

Demonstraţie. Dacă $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (2.1.4), atunci $\varphi(.)$ este de n ori derivabilă $(t, \tilde{\varphi}(t)) \in D$ şi $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t))$ $\forall t \in I$ şi evident $\tilde{\varphi}(.)$ este soluţie a ecuaţiei (2.1.5).

Reciproc, dacă $\tilde{\varphi}(.) = (\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.))$ este soluţie a ecuaţiei (2.1.5) atunci este derivabilă şi verifică ecuaţia (2.1.5), care înseamnă că $\varphi_1'(t) = \varphi_2(t)$, $\varphi_2'(t) = \varphi_3(t)$,..., $\varphi_{n-1}'(t) = \varphi_n(t)$ şi că $\varphi_n'(t) = f(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$, de unde obţinem, inductiv, că $\varphi_1(.)$ este de n ori derivabilă, $\varphi_{k+1}(t) = \varphi_1^{(k)}(t)$ $\forall t \in I, k \geq 1$ şi deci $\varphi_1(.)$ este soluţie a ecuaţiei (2.1.4). $\square$

Cum problema Cauchy pentru ecuaţia (2.1.5) înseamnă o soluţie $\tilde{\varphi}(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$ a ecuaţiei (2.1.5) care satisface condiţia iniţială $\tilde{\varphi}(t_0) = \tilde{x}_0$, dacă notăm componentele vectorului $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ cu $\tilde{x}_0 = (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})$ şi avem în vedere Propoziţia 2.1.4 deducem că $\tilde{\varphi}(.)$ este soluţie a problemei Cauchy $(\tilde{f}, t_0, \tilde{x}_0)$ dacă şi numai dacă prima componentă a lui $\tilde{\varphi}(.)$, notată cu $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (2.1.4) care satisface condiţiile iniţiale

$$\varphi(t_0) = x_0, \; \varphi'(t_0) = x_0^1, \; ..., \; \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}. \tag{2.1.6}$$

Prin urmare, *problema Cauchy pentru ecuaţii de ordin superior* este următorul concept: dacă sunt cunoscute funcţia $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ care defineşte ecuaţia (2.1.4) şi punctul iniţial $(t_0, (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})) \in D$ se cere să se determine $\varphi(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}$ soluţie a ecuaţiei (2.1.4) care verifică condiţiile iniţiale (2.1.6). Vom spune că $\varphi(.)$ este soluţie a problemei Cauchy $(f, t_0, x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})$.

Din Teorema 2.1.2 şi Propoziţia 2.1.4 obţinem imediat o teoremă privitoare la existenţa soluţiilor locale ale ecuaţiilor de ordin superior.

Teorema 2.1.5. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}$ continuă care defineşte ecuaţia (2.1.4). Atunci pentru orice $(t_0, (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})) \in D$ există $\varphi(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}$ soluţie a problemei Cauchy $(f, t_0, x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})$.*

Demonstraţie. Fie $(t_0, (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})) \in D$ şi fie $\tilde{f}(t, (x_1, ..., x_n)) = (x_2, x_3, ..., x_n, f(t, x_1, ..., x_n))$. Cum $f(.,.)$ este continuă şi $\tilde{f}(.,.)$ va fi continuă. Deci, dacă aplicăm Teorema 2.1.2 există $\tilde{\varphi}(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy $(\tilde{f}, t_0, \tilde{x}_0)$, unde am notat $\tilde{x}_0 = (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1}) \in \mathbf{R}^n$. Din Propoziţia 2.1.4 deducem că $\tilde{\varphi}(.) = (\varphi(.), \varphi'(.), ..., \varphi^{(n-1)}(.))$, unde $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (2.1.4), iar condiţia $\tilde{\varphi}(t_0) = \tilde{x}_0$, se rescrie sub forma $\varphi(t_0) = x_0, \varphi'(t_0) = x_0^1, ...,$ $\varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}$. □

2.2 Unicitatea soluţiilor

Considerăm funcţia $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia diferenţială

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2.2.1}$$

şi fie $(t_0, x_0) \in D$.

Spunem că ecuaţia diferenţială (2.2.1) admite *proprietatea de unicitate locală* a soluţiilor în (t_0, x_0) dacă pentru oricare două soluţii $\varphi(.) : I_1 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$, $\psi(.) : I_2 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$ ale problemei (f, t_0, x_0) există $I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ astfel încât

$$\varphi(.)|_{I_0 \cap (I_1 \cap I_2)} = \psi(.)|_{I_0 \cap (I_1 \cap I_2)}.$$

Ecuaţia diferenţială (2.2.1) admite *proprietatea de unicitate globală* a soluţiilor în (t_0, x_0) dacă pentru oricare două soluţii $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n$, $\psi(.) : J \to \mathbf{R}^n$ ale problemei (f, t_0, x_0) avem

$$\varphi(.)|_{I \cap J} = \psi(.)|_{I \cap J}.$$

Următorul rezultat ne arată că unicitatea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale este o proprietate pentru care caracterul local este echivalent cu cel global. De aceea, în ce priveşte proprietatea de unicitate se poate renunţa la precizarea privitoare la caracterul său local sau global.

Teorema 2.2.1. *Fie $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia diferenţială (2.2.1). Atunci ecuaţia (2.2.1) admite proprietatea de unicitate locală dacă şi numai dacă admite proprietatea de unicitate globală a soluţiilor.*

Demonstraţie. Suficienţa este evidentă. Pentru necesitatea afirmaţiei să considerăm $(t_0, x_0) \in D$ şi $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n$, $\psi(.) : J \to \mathbf{R}^n$ două soluţii ale problemei Cauchy (f, t_0, x_0). Fie

$$I_0 = \{t \in I \cap J; \quad \varphi(t) = \psi(t)\}.$$

Evident $t_0 \in I_0$ şi, deci, $I_0 \neq \emptyset$. De asemenea, mulţimea $I_0 \subset I \cap J$ este închisă, deoarece funcţiile $\varphi(.), \psi(.)$ sunt continue, deci şi $\varphi(.) - \psi(.)$ este continuă, mulţimea $\{0\} \subset \mathbf{R}^n$ este închisă şi $I_0 = (\varphi - \psi)^{-1}(.)(0)$. Demonstrăm că $I_0 \subset I \cap J$ este şi relativ deschisă. Într-adevăr, fie $t_* \in I_0$, deci $\varphi(t_*) = \psi(t_*)$ şi cum ecuaţia are proprietatea de unicitate locală există $I_* \in \mathcal{V}(t_*)$ astfel încât $\varphi(.)|_{I_* \cap I \cap J} = \psi(.)|_{I_* \cap I \cap J}$, adică $I_* \cap (I \cap J) \subset I_0$ şi mulţimea I_0 este relativ deschisă. Prin urmare, cum orice interval (în particular, intervalul $I \cap J$) este o mulţime conexă (i.e. este simultan deschisă şi închisă şi nu admite o submulţime proprie cu această proprietate) a lui $\mathbf{R}$ vom avea că $I_0 = I \cap J$ şi deci $\varphi(.)|_{I \cap J} = \psi(.)|_{I \cap J}$. $\square$

Înainte de a obţine o condiţie suficientă de unicitate a soluţiilor, pentru o mai bună înţelegere a rezultatelor ce urmează a fi prezentate, reamintim câteva rezultate fundamentale de analiză matermatică.

Definiţia 2.2.2. Funcţia $g(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ se numeşte *local lipschitziană* în $x_0 \in G$, dacă $\exists G_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ şi $\exists L \geq 0$ astfel încât

$$||g(x) - g(y)|| \leq L||x - y|| \quad \forall x, y \in G \cap G_0.$$

Funcţia $g(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ se numeşte *(global) lipschitziană (pe G)* dacă $\exists L \geq 0$ astfel încât

$$||g(x) - g(y)|| \leq L||x - y|| \quad \forall x, y \in G.$$

Vom spune că $g(.)$ este local lipschitziană pe G dacă $g(.)$ este local lipschitziană în fiecare punct al lui G. Evident că orice funcţie lipschitziană este şi local lipschitziană; reciproca nu este adevărată (de exemplu, $g(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$). De asemenea, orice funcţie local lipschitziană în x_0 este uniform continuă pe o vecinătate a lui x_0 şi deci este continuă.

O caracterizare echivalentă a funcţiilor local lipschitziene este dată de următorul rezultat.

Propoziţia 2.2.3. *Fie $G \subset \mathbf{R}^n$ deschisă şi $g(.) : G \to \mathbf{R}^n$. Atunci $g(.)$ este local lipschitziană dacă şi numai dacă restricţia sa $g(.)|_{G_0}$ la orice mulţime compactă $G_0 \subset G$ este lipschitziană.*

Demonstraţie. Suficienţa este evidentă. Pentru necesitate să presupunem, prin absurd, că există $G_0 \subset G$ compact astfel încât $g(.)|_{G_0}$ nu este lipschitziană; aceasta însemnând că $\forall k \in \mathbf{N}$, $\exists x_k, y_k \in G_0$ astfel încât

$$||g(x_k) - g(y_k)|| > k||x_k - y_k||. \tag{2.2.2}$$

Deoarece $G_0 \subset G$ este compactă vor exista subşirurile (pentru simplitate notate la fel) $\{x_k\}$ şi $\{y_k\}$ astfel încât $x_k \to x_0 \in G_0$ $y_k \to y_0 \in G_0$ pentru $k \to \infty$.

În acelaşi timp, $g(.)$ este continuă (fiind local lipschitziană), $G_0 \subset G$ este compactă, deci, dacă notăm $M = \max_{z \in G_0} ||g(z)||$, avem

$$||x_k - y_k|| \leq \frac{1}{k}||g(x_k) - g(y_k)|| \leq \frac{2M}{k}.$$

Dacă $k \to \infty$ în ultima inegalitate deducem că $x_0 = y_0$. Folosind ipoteza că $g(.)$ este local lipschitziană în $x_0 \in G$ vom deduce că există $G_1 \in \mathcal{V}(x_0)$ şi $L \geq 0$ astfel încât

$$||g(x) - g(y)|| \leq L||x - y|| \quad \forall x, y \in G \cap G_1.$$

Pe de altă parte, din convergenţa lui x_k şi y_k la x_0 există un rang $k_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât $x_k, y_k \in G \cap G_1$ $\forall k \geq k_0$ şi $k \geq L$. Deci

$$||g(x_k) - g(y_k)|| \leq L||x_k - y_k|| \leq k||x_k - y_k|| \quad \forall k \geq k_0,$$

care, evident, contrazice (2.2.2). $\square$

Sunt foarte frecvente situaţiile în care verificarea proprietăţii de lipschitzianitate a unei funcţii cu ajutorul definiţiei este foarte dificilă. De aceea un criteriu foarte util este dat în următoarea propoziţie.

Propoziţia 2.2.4. *Fie $G \subset \mathbf{R}^n$ deschisă, $g(.) : G \to \mathbf{R}^n$ o funcţie de clasă C^1. Atunci $g(.)$ este local lipschitziă.*

Demonstraţie. Este o consecinţă imediată a teoremei de medie a lui Lagrange şi o lăsăm ca un exerciţiu pentru cititor. □

În studiul unicităţii soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale vom folosi următoarea variantă de lipschitzianitate parţială a funcţiilor.

Definiţia 2.2.5. Funcţia $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ se numeşte *local lipschitziană în raport cu al doilea argument* în $(t_0, x_0) \in D$, dacă $\exists D_0 \in \mathcal{V}(t_0, x_0)$ şi $\exists L \geq 0$ astfel încât

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq L||x-y|| \quad \forall (t,x),(t,y) \in D \cap D_0.$$

Propoziţiile 2.2.3 şi 2.2.4 pot fi extinse imediat la funcţii local lipschitziene în raport cu al doilea argument. Lăsăm în seama cititorului cele două demonstraţii.

Propoziţia 2.2.6. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă. Atunci $f(.,.)$ este local lipschitziană în raport cu al doilea argument dacă şi numai dacă $\forall D_0 \subset D$ compact, $\exists L \geq 0$ astfel încât*

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq L||x-y|| \quad \forall (t,x),(t,y) \in D_0. \tag{2.2.3}$$

Propoziţia 2.2.7. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă şi de clasă C^1 în raport cu al doilea argument. Atunci $f(.,.)$ este local lipschitziă în raport cu al doilea argument.*

Un rezultat de analiză matematică, extrem de folositor, având, de altfel, o demonstraţie elementară, este aşa-numita lemă Bellman-Gronwall. Prezentăm, în continuare, o versiune particulară a acestui rezultat, pe care o vom utiliza frecvent în prezenta lucrare.

Lema 2.2.8. *Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval, $t_0 \in I$, $M \geq 0$, $u(.), v(.) : I \to \mathbf{R}_+ = [0,\infty)$ două funcţii continue care verifică inegalitatea*

$$u(t) \leq M + |\int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds| \quad \forall t \in I.$$

Atunci are loc inegalitatea

$$u(t) \le M e^{|\int_{t_0}^{t} v(s)ds|} \quad \forall t \in I.$$

Demonstraţie. Fie funcţia $w(.) : I \to \mathbf{R}$ dată prin

$$w(t) = (M + |\int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds|)e^{-|\int_{t_0}^{t} v(s)ds|}.$$

Fie $I_+ = \{t \in I, t \ge t_0\}$ şi $I_- = \{t \in I, t \le t_0\}$. Vom arăta că $w(.)$ este descrescătoare pe I_+ şi este crescătoare pe I_-. De exemplu pe I_+. Evident, $w(.)$ este derivabilă şi

$$w'(t) = v(t)[u(t) - (M + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds)]e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)ds} \le 0, t \in I_+.$$

Deci $w(.)$ este descrescătoare şi deci $w(t) \le w(t_0) = M$ $\forall t \in I_+$. Adică $(M + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds)e^{-\int_{t_0}^{t} v(s)ds} \le M$ şi ca atare, $u(t) \le M + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds \le Me^{\int_{t_0}^{t} v(s)ds}$ $\forall t \in I_+$. Analog se procedează pentru $t \in I_-$. $\square$

Putem, în acest moment, să formulăm şi să demonstrăm binecunoscuta teoremă Cauchy-Lipschitz privitoare la existenţa şi unicitatea locală a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale. Demonstraţia pe care o prezentăm este o consecinţa a teoremei lui Peano şi a lemei Bellman-Gronwall.

Teorema 2.2.9. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia diferenţială (2.2.1). Atunci $\forall (t_0, x_0) \in D$ $\exists I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ şi $\exists! \varphi(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0).*

În plus, dacă $\varphi_1(.)$ şi $\varphi_2(.)$ sunt două soluţii ale problemei (f, t_0, x_0) definite pe intervalul compact $I_1 = [t_0 - r, t_0 + r], r > 0$ atunci $\varphi_1(.) = \varphi_2(.)$.

Demonstraţie. Fie $(t_0, x_0) \in D$. Aplicăm teorema lui Peano şi rezultă că există $a > 0$ şi $\varphi(.) : I_0 = [t_0 - a, t_0 + a]$ soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0). Pentru a încheia demonstraţia, rămâne să arătam a doua afirmaţie din teoremă.

Fie $\varphi_i(.) : I_1 = [t_0 - r, t_0 + r] \to \mathbf{R}^n, i = 1, 2$ soluţii ale problemei Cauchy (f, t_0, x_0). Definim $u(t) := ||\varphi_1(t) - \varphi_2(t)||$, $t \in I_1$. Atât $\varphi_1(.)$ cât şi $\varphi_2(.)$ verifică ecuaţia integrală asociată lui (2.1.2). Scăzându-le şi trecând la normă obţinem

$$u(t) = || \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_2(s))ds|| \leq$$

$$\leq | \int_{t_0}^{t} ||f(s, \varphi_1(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_2(s))||ds|, \quad t \in I_1.$$

$I_1 \subset \mathbf{R}$ este compact, $\varphi_1(.)$, $\varphi_2(.)$ sunt continue, deci mulţimea

$$D_0 = \{(t, \varphi_1(t)), (t, \varphi_2(t)), t \in I_1\}$$

este compactă şi în baza Propoziţiei 2.2.6 există $L > 0$ astfel încât (2.2.3) are loc pentru orice $(t, x), (t, y) \in D_0$. În particular,

$$||f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))|| \leq L||\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|| \quad \forall s \in I_1.$$

Deci avem $u(t) \leq | \int_{t_0}^{t} Lu(s)ds| \; \forall t \in I_1$. Aplicăm Lema 2.2.8 şi deducem că $u(t) \equiv 0$ pe I_1. Prin urmare, $\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

Observaţia 2.2.10. Teorema Cauchy-Lipschitz conţine doar o condiţie suficientă de existenţă şi unicitate locală a soluţiilor. Dacă $f(t, x) = 3x^{2/3} + 1, (t, x) \in \mathbf{R}^2$, deşi $f(., .)$ nu este local lipschitziană în nici un punct de forma $(t_0, 0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (Exerciţiu !) totuşi ecuaţia diferenţială $x' = f(t, x)$ admite soluţii locale unice în orice punct $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (Exerciţiu !).

În finalul acestei secţiuni considerăm ecuaţia diferenţială de ordin superior

$$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}), \tag{2.2.4}$$

unde $f(., .) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

Din Propoziţia 2.1.4 şi Teorema 2.2.9 obţinem imediat un rezultat de existenţă şi unicitate locală pentru ecuaţia (2.2.4).

Teorema 2.2.11. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f(., .) : D \to \mathbf{R}$ continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument* *care defineşte ecuaţia (2.2.4). Atunci pentru orice* $(t_0,(x_0,x_0^1,...,x_0^{n-1}))$ $\in D$ $\exists!$ $\varphi(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}$ *soluţie a problemei Cauchy* $(f,t_0,x_0,x_0^1,$ $...,x_0^{n-1})$*.*

Demonstraţie. Fie $\tilde{x}_0 = (x_0,x_0^1,...,x_0^{n-1})$ şi $(t_0,\tilde{x}_0) \in D$. Considerăm $\tilde{f}(t,(x_1,...,x_n)) = (x_2,x_3,...,x_n,f(t,x_1,...,x_n))$. În ipotezele teoremei $\tilde{f}(.,.)$ este continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument. Deci, conform Teoremei 2.2.9 există în mod unic $\tilde{\varphi}(.)$: $I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy $(\tilde{f},t_0,\tilde{x}_0)$. Aplicăm Propoziţia 2.1.4 şi deducem că $\tilde{\varphi}(.) = (\varphi(.),\varphi'(.),...,\varphi^{(n-1)}(.))$, unde $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (2.2.4); condiţia $\tilde{\varphi}(t_0) = \tilde{x}_0$ se rescrie sub forma $\varphi(t_0) = x_0, \varphi'(t_0) = x_0^1,...,\varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}$ şi teorema este demonstrată. □

2.3 Prelungirea soluţiilor. Soluţii maximale

Trecerea de la soluţiile locale la soluţiile maximale are loc în mod natural printr-un procedeu care constă în a prelungi soluţia locală şi a vedea cât de ,,mult" se poate face acest lucru. În această secţiune se va vedea în ce condiţii o soluţie poate fi prelungită şi de asemenea dacă există soluţii care nu mai pot fi prelungite, adică soluţii maximale.

Reamintim, mai întâi, că dacă $\varphi_i(.) : I_i \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n, i = 1,2$ sunt două funcţii atunci, prin definiţie, $\varphi_1(.)$ *prelungeşte pe* $\varphi_2(.)$ dacă $I_2 \subset I_1$ şi restricţia lui $\varphi_1(.)$ la intervalul I_2 este $\varphi_2(.)$. În definiţia precedentă daca $\varphi_1(.) \neq \varphi_2(.)$ spunem că $\varphi_1(.)$ este o prelungire strictă a lui $\varphi_2(.)$.

Dacă $\varphi_i(.) : (a_i,b_i) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n, i = 1,2$ atunci, prin definiţie, $\varphi_1(.)$ *prelungeşte strict la dreapta pe* $\varphi_2(.)$ dacă $b_2 < b_1, a_2 \geq a_1$ şi restricţia lui $\varphi_1(.)$ la intervalul (a_2,b_2) este $\varphi_2(.)$. În mod similar, $\varphi_1(.)$ *prelungeşte strict la dreapta pe* $\varphi_2(.)$ dacă $b_1 \geq b_2, a_2 > a_1$ şi restricţia lui $\varphi_1(.)$ la intervalul (a_2,b_2) este $\varphi_2(.)$.

Este uşor de observat că mulţimea soluţiilor oricărei ecuaţii diferenţiale împreună cu relaţia de prelungire de mai sus este o mulţime ordonată. Un element maximal în această mulţime ordonată se va numi *soluţie maximală* a ecuaţiei diferenţiale respective.

Fie $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia diferenţială

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{2.3.1}$$

Definiţia 2.3.1. a) O soluţie $\varphi(.)$ a ecuaţiei (2.3.1) se numeşte *maximală (neprelungibilă, saturată)* dacă oricare ar fi $\psi(.)$ soluţie a ecuaţiei (2.3.1), dacă $\psi(.)$ prelungeşte pe $\varphi(.)$ atunci $\varphi(.) = \psi(.)$.

a) O soluţie $\varphi(.)$ a ecuaţiei (2.3.1) se numeşte *maximală la dreapta (respectiv, la stânga)* dacă oricare ar fi $\psi(.)$ soluţie a ecuaţiei (2.3.1), dacă $\psi(.)$ prelungeşte la dreapta (respectiv, la stânga) pe $\varphi(.)$ atunci $\varphi(.) = \psi(.)$.

Principalul rezultat privitor la prelungirea soluţiilor afirmă că o condiţie necesară şi suficientă ca o soluţie a unei ecuaţii diferenţiale definită pe un interval deschis să admită o prelungire strictă este ca graficul său să nu părăsească un compact. Mai precis, avem următoarea teoremă.

Teorema 2.3.2. *Fie $D \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă care defineşte ecuaţia (2.3.1) şi $\varphi(.) : (a, b) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ soluţie a ecuaţiei (2.3.1). Atunci*

1) $\varphi(.)$ admite o prelungire strictă la dreapta dacă şi numai dacă $b < +\infty$, $\exists t_0 \in (a, b)$ şi $\exists D_0 \subset D$ compactă astfel încât $(t, \varphi(t)) \in D_0$ $\forall t \in [t_0, b)$.

2) $\varphi(.)$ admite o prelungire strictă la stânga dacă şi numai dacă $a > -\infty$, $\exists t_0 \in (a, b)$ şi $\exists D_0 \subset D$ compactă astfel încât $(t, \varphi(t)) \in D_0$ $\forall t \in (a, t_0]$.

Demonstraţie. Vom demonstra afirmaţia 1) [afirmaţia 2) se demonstrează în mod analog].

Fie $\psi(.) : (a, b) \to \mathbf{R}^n$ o soluţie a ecuaţiei care prelungeşte strict la dreapta soluţia $\varphi(.)$. Atunci $b < b_1$, deci $b < +\infty$. Fie $t_0 \in (a, b)$ arbitrar şi definim $D_0 := \{(t, \psi(t)); t \in [t_0, b]\}$. Cum $\psi(.)$ este continuă şi intervalul $[t_0, b]$ este compact rezultă că şi $D_0 \subset D$ este o mulţime compactă. Pe de altă parte, pentru orice $t \in [t_0, b)$ $(t, \varphi(t)) = (t, \psi(t)) \in D_0$.

Reciproc, vom arăta, folosind criteriul Cauchy referitor la existenţa limitei unei funcţii că $\exists \lim_{t\nearrow b} \varphi(t) =: x_0$ şi $(b, x_0) \in D_0 \subset D$.

Arătăm, aşadar, că $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta_\epsilon > 0$ astfel încât $\forall t', t'' \in (b - \delta_\epsilon, b)$ avem $||\varphi(t') - \varphi(t'')|| < \epsilon$.

Fie $M = \max_{(t,x)\in D_0} ||f(t,x)||$. Din ecuaţia integrală asociată ecuaţiei diferenţiale (2.3.1) rezultă că pentru orice $t', t'' \in [t_0, b)$ avem

$$||\varphi(t') - \varphi(t'')|| = ||\int_{t'}^{t''} f(s, \varphi(s))ds|| \leq \int_{t'}^{t''} ||f(s,\varphi(s))||ds \leq M|t' - t''|,$$

iar dacă luăm $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{M}$ existenţa limitei este demonstrată.

În acelaşi timp, cum $D_0 \subset D$ este compact rezultă $(b, x_0) = \lim_{t\nearrow b}(t, \varphi(t)) \in D_0$.

Aplicăm, în continuare, Teorema 2.1.2 (Peano) şi deducem că există $\alpha > 0$ şi o soluţie $\varphi_1(.) : [b-\alpha, b+\alpha] \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy (f, b, x_0).

Rămâne să definim funcţia $\varphi_2(.) : (a, b+\alpha] \to \mathbf{R}^n$ prin

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{dacă } t \in (a,b) \\ \varphi_1(t), & \text{dacă } t \in [b, b+\alpha], \end{cases}$$

care este, evident, soluţie a ecuaţiei (vezi Observaţia 1.3.3) şi care, prin felul în care a fost construită, este o prelungire strictă la dreapta a soluţiei $\varphi(.)$. $\square$

Acest criteriu de prelungibilitate permite deducerea unui rezultat de caracterizare a soluţiilor maximale.

Propoziţia 2.3.3. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă, care defineşte ecuaţia (2.3.1).*

Atunci, $\varphi(.) : (a,b) \to \mathbf{R}^n$ este soluţie maximală la dreapta dacă şi numai dacă una din următoarele condiţii este satisfăcută.

a) $b = +\infty$.

b) $\lim_{t\nearrow b} ||\varphi(t)|| = +\infty$.

c) $\exists t_k \nearrow b$ pentru care există $\xi = \lim_{k\to\infty} \varphi(t_k)$ şi pentru orice astfel de şir avem $(b, \xi) \in \partial D$, unde cu ∂D am notat frontiera mulţimii D.

Demonstraţia acestei propoziţii poate fi consultată, de exemplu, în lucrarea [10].

Corolarul 2.3.4. *Fie $f(.,.) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă, care defineşte ecuaţia (2.3.1).*

Atunci, $\varphi(.) : (a, b) \to \mathbf{R}^n$ *este soluţie maximală la dreapta dacă şi numai dacă una din următoarele condiţii este satisfăcută.*

a) $b = +\infty$.

b) $\lim_{t \nearrow b} ||\varphi(t)|| = +\infty$.

Demonstraţie. Este suficient să observăm ca $\partial(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n) = \emptyset$, deci cazul c) din Propoziţia 2.3.3 nu poate avea loc. □

În general, în ipoteze de tip Peano, soluţiile locale pot fi extinse până la soluţii maximale. Mai exact, avem următorul rezultat privitor la existenţa soluţiilor maximale.

Teorema 2.3.5. *Fie* $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *o mulţime deschisă,* $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ *o funcţie continuă, care defineşte ecuaţia (2.3.1). Atunci pentru orice soluţie* $\varphi(.)$ *a ecuaţiei (2.3.1) există o soluţie maximală a aceleaşi ecuaţii care o prelungeşte pe* $\varphi(.)$.

Demonstraţie. Fie $\varphi(.)$ soluţie a ecuaţiei (2.3.1) şi definim mulţimea

$$S := \{\psi(.); \quad \psi(.) \text{ soluţie a ecuaţiei}, \quad \psi(.) \text{ prelungeşte pe } \varphi(.)\}.$$

Faptul că S împreună cu relaţia de prelungire este o mulţime ordonată se poate verifica imediat. Ca atare, afirmaţia din enunţ se reduce la a demonstra existenţa unui element maximal în această mulţime ordonată. Pentru aceasta vom folosi Lema lui Zorn (care afirmă că dacă în mulţimea ordonată S orice parte inductiv ordonată P admite un majorant, atunci există $\psi(.) \in S$ element maximal).

Fie, aşadar, $P = \{\varphi_j\}_{j \in J} \subset S$ o mulţime inductiv ordonată. Dacă notăm cu I_j domeniul de definiţie al funcţiei $\varphi_j(.)$, vom arăta că majorantul lui P este funcţia $\psi(.)$ definită prin

$$I = \cup_{j \in J} I_j, \quad \psi(t) = \varphi_j(t) \text{ dacă } t \in I_j, j \in J.$$

Pentru aceasta vom demonstra că a) $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, b) $\psi(.)$ este bine definită şi c) $\psi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (2.3.1).

a) Este suficient să demonstrăm că $\forall t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ avem $[t_1, t_2] \subset I$. Deoarece $t_l \in I$, $l = 1, 2$, rezultă că $\exists j_1, j_2 \in J$ astfel încât $t_l \in I_{j_l}$, $l = 1, 2$. Cum P este inductiv ordonată, sau $\varphi_{j_1}(.)$ prelungeşte pe $\varphi_{j_2}(.)$

şi deci $I_{j_2} \subset I_{j_1}$ sau $\varphi_{j_2}(.)$ prelungeşte pe $\varphi_{j_1}(.)$ şi deci $I_{j_1} \subset I_{j_2}$. În primul caz $[t_1, t_2] \subset I_{j_1} \subset I$, iar în al doilea caz $[t_1, t_2] \subset I_{j_2} \subset I$.

b) Revine la a arăta că dacă $t \in I_{j_1} \cap I_{j_2}$ atunci $\varphi_{j_1}(t) = \varphi_{j_2}(t)$. Demonstraţia este identică cu cea de la a).

c) Această afirmaţie rezultă imediat, având în vedere definiţia aplicaţiei $\psi(.)$. □

Următorul rezultat ne arată că intervalul de definiţie al unei soluţii maximale este deschis.

Propoziţia 2.3.6. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă, care defineşte ecuaţia (2.3.1) şi fie $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ soluţie maximală a ecuaţiei (2.3.1).*

Atunci $I \subset \mathbf{R}$ este interval deschis.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că I nu este deschis. Să presupunem fără a restrânge generalitatea că $I = (a, b]$ (cazurile $I = [a, b)$ şi $I = [a, b]$ se tratează analog). Conform Teoremei 2.1.2 (Peano) $\exists \alpha > 0$ şi $\exists \varphi_1(.) : [b - \alpha, b + \alpha] \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei $(f, b, \varphi(b))$. La fel ca în demonstraţia Teoremei 2.3.2 construim funcţia $\varphi_2(.)$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{dacă } t \in (a, b) \\ \varphi_1(t), & \text{dacă } t \in [b, b + \alpha], \end{cases}$$

care este soluţie a ecuaţiei, care în plus prelungeşte strict pe $\varphi(.)$. Cum $\varphi(.)$ este maximală am obţinut o contradicţie. □

În ipoteze de unicitate pentru câmpul vectorial soluţiile maximale sunt unice.

Propoziţia 2.3.7. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă, care defineşte ecuaţia (2.3.1). Presupunem că ecuaţia (2.3.1) are proprietatea de unicitate a soluţiilor.*

Atunci pentru orice soluţie $\varphi(.)$ a ecuaţiei (2.3.1) există şi este unică o soluţie maximală $\psi(.)$ astfel încât $\psi(.)$ prelungeşte pe $\varphi(.)$.

Demonstraţie. Din Teorema 2.3.5 există $\varphi_1(.) : I_1 \to \mathbf{R}^n$ soluţie maximală care prelungeşte pe $\varphi(.)$. Dacă $\varphi_2(.) : I_2 \to \mathbf{R}^n$ este o altă soluţie maximală care prelungeşte pe $\varphi(.)$, atunci rezultă $\varphi_1(.) = \varphi_2(.)$, deoarece dacă presupunem prin reducere la absurd că $\varphi_1(.) \neq \varphi_2(.)$, prin construirea unei prelungiri ca în Propoziţia 2.3.6 ajungem la o contradicţie cu maximalitatea lui $\varphi_1(.)$. Mai mult $I_1 \neq I_2$ şi din Teorema 2.2.1, $\varphi_1(.)|_{I_1 \cap I_2} = \varphi_1(.)|_{I_1 \cap I_2}$. Definim $\varphi_3(.)$ prin

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & \text{dacă } t \in I_1 \\ \varphi_2(t), & \text{dacă } t \in I_1 \cup (I_2 \backslash I_1), \end{cases}$$

care este o prelungire strictă a lui $\varphi_1(.)$, ceea ce contrazice maximalitatea lui $\varphi_1(.)$. $\square$

Corolarul 2.3.8. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă, care defineşte ecuaţia (2.3.1). Presupunem că ecuaţia (2.3.1) are proprietatea de unicitate a soluţiilor.*

Atunci $\forall (t_0, x_0) \in D$ $\exists!$ $\varphi_{t_0,x_0}(.) : I(t_0, x_0) := (t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0)) \to \mathbf{R}^n$ soluţie maximală a problemei Cauchy (f, t_0, x_0).

Demonstraţie. Fie $(t_0, x_0) \in D$. Din Teorema 2.1.2 (Peano) există $\varphi_0(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy (f, t_0, x_0). Din Propoziţia 2.3.7 $\exists!$ $\varphi_1(.) : I_1 \to \mathbf{R}^n$ soluţie maximală care prelungeşte pe $\varphi_0(.)$. La fel ca în demonstraţia Propoziţiei 2.3.7, presupunând că $\varphi_2(.)$ este o altă soluţie maximală a problemei Cauchy (f, t_0, x_0) deducem că $\varphi_2(.) = \varphi_1(.)$. Prin urmare, $\exists!$ $\varphi_{t_0,x_0}(.) : I(t_0, x_0) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ soluţie maximală a problemei Cauchy (f, t_0, x_0).

Din Propoziţia 2.3.6, $I(t_0, x_0) \subset \mathbf{R}$ este interval deschis, $t_0 \in I(t_0, x_0)$, interval ale cărui capete le vom nota cu $t^-(t_0, x_0)$, respectiv $t^+(t_0, x_0)$. $\square$

2.4 Existenţa globală a soluţiilor

Spre deosebire de proprietatea de unicitate globală a soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale, care, după cum s-a văzut în secţiunea 2.2, coincide cu proprietatea de unicitate locală, proprietatea de existenţă globală este foarte restrictivă şi implicit ,,îndepărtată" de proprietatea de existenţă locală.

De exemplu, ecuaţia diferenţială scalară

$$x' = x^2$$

are soluţiile maximale $x_0(t) \equiv 0, t \in \mathbf{R}$, $x_c(t) \equiv -\frac{1}{t+c}$, $t \in (-\infty, -c)$ sau $t \in (c, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. Dintre ele doar soluţia staţionară $x_0(t) \equiv 0$ este globală.

Există mai multe tipuri de rezultate care dau condiţii suficiente de existenţă globală. Prezentăm, în continuare, o teoremă care face apel la noţiunea de disipativitate.

Definiţia 2.4.1. Spunem că funcţia $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ are *proprietatea de disipativitate bilaterală* dacă există $r \geq 0$ şi există o funcţie continuă $a(.) : I \to \mathbf{R}_+$ astfel încât

$$| < x, f(t,x) > | \leq a(t)||x||^2 \quad \forall t \in I, x \in \mathbf{R}^n \text{ cu } ||x|| > r.$$

unde cu $< .,. >$ am notat produsul scalar de pe $\mathbf{R}^n$.

Teorema 2.4.2. *Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval şi $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă cu proprietatea de disipativitate bilaterală, care defineşte ecuaţia (2.3.1).*

Atunci $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$ $\exists$ $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n$ soluţie (globală) a problemei Cauchy (f, t_0, x_0).

Demonstraţie. Presupunem că $I = (\alpha, \beta)$ (în mod similar tratându-se celelalte cazuri) şi considerăm $(t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$. Fie $\varphi(.) : I_0 \subset I \to \mathbf{R}^n$ o soluţie maximală a ecuaţiei care satisface $\varphi(t_0) = x_0$. Vom demonstra că $I_0 = I$. I_0 este un interval deschis (fiind intervalul de definiţie al unei soluţii maximale) de forma $I_0 = (a, b)$. Vom arăta că $\alpha = a$ şi $\beta = b$. De exemplu, vom demonstra că $\alpha = a$. Presupunem că $\alpha < a$. Arătăm, în continuare, că $\exists D_0 \subset I \times \mathbf{R}^n$ compact astfel încât $(t, \varphi(t)) \in D_0$ $\forall t \in (a, t_0]$. Deci în baza Teoremei 2.3.2 soluţia (maximală !) admite o prelungire strictă la stânga, ceea ce este contradictoriu.

Rămâne, deci, de găsit compactul D_0. Funcţia $\varphi(.)$ este derivabilă (fiind soluţie a unei ecuaţii diferenţiale) deci şi funcţia $t \to < \varphi(t), \varphi(t) > = ||\varphi(t)||^2$ este derivabilă, având derivata

$$(||\varphi(t)||^2)' = 2 < \varphi(t), \varphi'(t) > = 2 < \varphi(t), f(t, \varphi(t)) >$$

Fie $r > 0$ şi $a(.) : I \to \mathbf{R}_+$ care apar în definiţia disipativităţii funcţiei $f(.,.)$.

Considerăm $A := \{t \in (a, t_0]; ||\varphi(t)|| \leq r\}$, $B := (a, t_0]\backslash A$ şi pe baza proprietăţi de disipativitate a lui $f(.,.)$ rezultă că

$$< \varphi(t), f(t, \varphi(t)) > \geq -a(t)||\varphi(t)||^2 \quad \forall t \in B$$

Prin urmare, dacă $t \in B$

$$(||\varphi(t)||^2)' = 2 < \varphi(t), f(t, \varphi(t)) > \geq -2a(t)||\varphi(t)||^2,$$

iar dacă $t \in A$, în baza inegalităţii Cauchy-Schwartz (i.e., $| < u, v > | \leq ||u||.||v|| \ \forall u, v \in \mathbf{R}^n$)

$$(||\varphi(t)||^2)' = 2 < \varphi(t), f(t, \varphi(t)) > \geq -2||\varphi(t)||.||f(t, \varphi(t)|| \geq -2rM,$$

unde am notat $M = \max_{t\in[a,t_0], x\in\overline{B}_r(0)} ||f(t, x)||$.

Aşadar, dacă $t \in (a, t_0]$

$$(||\varphi(t)||^2)' \geq \min\{-2rM, -2a(t)||\varphi(t)||^2\} \geq -2rM - 2a(t)||\varphi(t)||^2.$$

Integrăm în ultima inegalitate de la t la t_0 şi folosind formula Leibnitz-Newton obţinem

$$||\varphi(t_0)||^2 - ||\varphi(t)||^2 \geq -2rM(t_0 - t) - 2\int_t^{t_0} a(s)||\varphi(s)||^2 ds,$$

inegalitate care poate fi rescrisă sub forma

$$||\varphi(t)||^2 \leq ||\varphi(t_0)||^2 + 2rM(t_0 - a) + 2\int_t^{t_0} a(s)||\varphi(s)||^2 ds,$$

Utilizând Lema 2.2.8. (Bellman-Gronwall) deducem

$$||\varphi(t)||^2 \leq [||\varphi(t_0)||^2 + 2rM(t_0 - a)]e^{2|\int_{t_0}^t a(s)ds|}.$$

Notăm $K^2 := [||\varphi(t_0)||^2 + 2rM(t_0 - a)]e^{2|\int_{t_0}^a a(s)ds|}$ şi avem că $\varphi(t) \in \overline{B}_K(0)$ şi deci compactul căutat este $D_0 = [a, t_0] \times \overline{B}_K(0)$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Observaţia 2.4.3. Teorema 2.4.4 asigură doar o condiţie suficientă de existenţă globală. Există ecuaţii diferenţiale definite de funcţii care nu au proprietatea de disipativitate şi care au totuşi soluţii globale. De exemplu, funcţia care defineşte ecuaţia diferenţială pe $\mathbf{R}^2$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x^3 - x \end{cases}$$

nu este disipativă (Exerciţiu !), dar ecuaţia are soluţii globale în fiecare punct (Exerciţiu !).

Observaţia 2.4.4. Există exemple de funcţii pentru care verificarea condiţiei de disipativitate din Definiţia 2.4.1 este (sau pare a fi) dificilă. Introducem, în continuare, două noi concepte care pot uşura acest lucru.

Funcţia $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ are proprietatea de *creştere liniară* dacă există $r \geq 0$ şi există o funcţie continuă $a(.) : I \to \mathbf{R}_+$ astfel încât

$$||f(t,x)|| \leq a(t)||x|| \quad \forall t \in I, x \in \mathbf{R}^n \text{ cu } ||x|| > r.$$

Spunem că $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ are proprietatea de *creştere afină* dacă există $r \geq 0$ şi există funcţiile continue $a(.), b(.) : I \to \mathbf{R}_+$ astfel încât

$$||f(t,x)|| \leq a(t)||x|| + b(t) \quad \forall t \in I, x \in \mathbf{R}^n \text{ cu } ||x|| > r.$$

Cele două noţiuni definesc aceeaşi proprietate pentru că $f(.,.)$ are proprietatea de creştere liniară dacă şi numai dacă are proprietatea de creştere afină (Exerciţiu !). Mai mult, creşterea liniară implică (via inegalitatea Cauchy-Schwartz) proprietatea de disipativitate. Reciproca acestei afirmaţii este adevărată doar pe $\mathbf{R}$. De exemplu dacă $n = 2$ şi $f(t,(x_1,x_2)) = ||x||(x_1,x_2), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$ are proprietatea de disipativitate, dar nu şi pe cea de creştere liniară. (Exerciţiu !)

Prin urmare, ipoteza de disipativitate din Teorema 2.2.2 poate fi înlocuită cu o ipoteză în care se cere ca funcţia $f(.,.)$ să aibă proprietatea de creştere liniară sau de creştere afină.

3

Ecuaţii diferenţiale liniare şi afine

Acest capitol prezintă cele mai importante rezultate din teoria ecuaţiilor diferenţiale liniare şi afine pe $\mathbf{R}^n$ şi, respectiv, din teoria ecuaţiilor liniare şi afine de ordin superior. Ca de obicei, considerarea unor cazuri particulare -în care intervine, esenţial, liniaritatea funcţiilor cu care se lucrează- conduc la îmbunătăţirea rezultatelor obţinute în cazul general.

3.1 Ecuaţii liniare pe $\mathbf{R}^n$

În continuare vom nota cu $M_n(\mathbf{R})$ mulţimea matricilor pătratice de dimensiune n peste $\mathbf{R}$. Reamintim că pe spaţiul $M_n(\mathbf{R})$ se defineşte norma ,,operatorială"

$$||A|| = \sup\{||Ax||; \quad x \in \mathbf{R}^n, \ ||x|| \leq 1\}, \quad A \in M_n(\mathbf{R}).$$

Definiţia 3.1.1. Dacă $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ este o funcţie definită pe intervalul real I, spunem că $A(.)$ defineşte *ecuaţia diferenţia-lă liniară* pe $\mathbf{R}^n$.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{3.1.1}$$

Dacă elementele matricii $A(t)$ sunt $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$, $t \in I$

atunci ecuaţia (3.1.1) poate fi rescrisă sub forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = \overline{1,n} \tag{3.1.2}$$

care poartă denumirea de *sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de dimensiune n.*

Atunci când funcţia $A(.)$ este continuă, ecuaţia (3.1.1) admite existenţa şi unicitatea globală a soluţiilor.

Teorema 3.1.2. *Fie $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ continuă care defineşte ecuaţia (3.1.1). Atunci $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$ $\exists ! \varphi_{t_0,x_0}(.) : I \to \mathbf{R}^n$ soluţie a ecuaţiei (3.1.1) care satisface condiţia iniţială $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$.*

Demonstraţie. Fie $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ definită prin $f(t,x) = A(t)x$. Este evident faptul că $f(.,.)$ este continuă, local lipschitziană în raport cu al doilea argument (fiind liniară în al doilea argument) şi $f(.,.)$ are proprietatea de creştere liniară (vezi Observaţia 2.4.4).

Aşadar din Teoremele 2.2.1, 2.2.9, 2.4.2 şi Observaţia 2.4.4 rezultă afirmaţia din enunţ. □

Pe baza Teoremei 3.1.2 vom nota mulţimea soluţiilor ecuaţiei (3.1.1) cu

$$S_{A(.)} = \{\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n; \quad \varphi(.) \text{ soluţie a ecuaţiei (3.1.1)}\} \tag{3.1.3}$$

Corolarul 3.1.3. *Fie $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ continuă care defineşte ecuaţia (3.1.1). Dacă $\varphi(.) \in S_{A(.)}$, atunci $\varphi(t) \equiv 0$ dacă şi numai dacă $\exists t_0 \in I$ astfel încât $\varphi(t_0) = 0$.*

Demonstraţie. Fie $\varphi(.) \in S_{A(.)}$ astfel încât $\exists t_0 \in I$ cu $\varphi(t_0) = 0$. Fie $\psi(.) : I \to \mathbf{R}^n$ definită prin $\psi(t) \equiv 0$. Cum $\psi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (3.1.1) care evident satisface $\psi(t_0) = 0$, din Teorema 3.1.2 deducem că $\varphi(t) \equiv \psi(t) \equiv 0$. Reciproca este evidentă. □

Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii liniare pe $\mathbf{R}^n$ este un spaţiu vectorial de dimensiune n.

Teorema 3.1.4. *Fie $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ continuă care defineşte ecuaţia (3.1.1) şi fie $S_{A(.)}$ mulţimea soluţiilor definită în (3.1.3). Atunci $S_{A(.)}$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune n al spaţiului vectorial al funcţiilor de clasă C^1 definite pe I cu valori în $\mathbf{R}^n$, $C^1(I, \mathbf{R}^n)$.*

Demonstraţie. Demonstrarea faptului că $S_{A(.)} \subset C^1(I, \mathbf{R}^n)$ este un subspaţiu vectorial este un simplu exerciţiu.

Arătăm în continuare că $dim S_{A(.)} = n$.

Fie $t_0 \in I$ arbitrar şi $E_{t_0}(.) : S_{A(.)} \to \mathbf{R}^n$, *aplicaţia de evaluare*, definită prin

$$E_{t_0}(\varphi(.)) = \varphi(t_0).$$

Evident $E_{t_0}(.)$ este liniară. Vom arăta că este şi bijectivă. Fie $\varphi_1, \varphi_2 \in S_{A(.)}$ astfel încât $E_{t_0}(\varphi_1) = E_{t_0}(\varphi_2)$. Prin urmare, $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ şi în baza unicităţi (Teorema 3.1.2) decucem $\varphi_1 = \varphi_2$, adică E_{t_0} este injectivă. Pe de alta parte, $\forall \xi \in \mathbf{R}^n$ $\exists! \varphi_{t_0,\xi}(.) : I \to \mathbf{R}^n$ soluţie cu $\varphi_{t_0,\xi}(t_0) = \xi$ (tot în baza Teoremei 3.1.2) şi deci $E_{t_0}(\varphi_{t_0,\xi}) = \varphi_{t_0,\xi}(t_0) = \xi$, deci E_{t_0} este şi surjectivă.

Aşadar, $E_{t_0}(.)$ este un izomorfism şi teorema este demonstrată. □

Observaţia 3.1.5. Cum $S_{A(.)} \subset C^1(I, \mathbf{R}^n)$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune n, există $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ o bază. Mulţimea acestor funcţii $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)\}$ poartă denumirea de *sistem fundamental de soluţii* pentru ecuaţia (3.1.1). Cum orice element din $S_{A(.)}$ se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară de elementele bazei, înseamnă că dacă $\varphi(.) \in S_{A(.)}$, atunci există constantele $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$ unic determinate, astfel încât

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t), \quad t \in I. \tag{3.1.4}$$

În terminologia clasică a ecuaţiilor diferenţiale relaţia (3.1.4) poartă denumirea de *soluţie generală a ecuaţiei* (3.1.1).

Definiţia 3.1.6. Dacă $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_m(.)\} \subset S_{A(.)}$ şi definim $X(t) = col[\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)]$, $t \in I$ (i.e. matricea ale cărei coloane sunt $\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)$), $X(.)$ se numeşte *matrice de soluţii* ale ecuaţiei (3.1.1).

Dacă $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ este un sistem fundamental de soluţii atunci $X(t) = col[\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)]$ se numeşte *matrice fundamentală de soluţii.*

Observaţia 3.1.7. Dacă $X(t) = col[\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)]$ cu $\varphi_i(.) \in S_{A(.)}$, $i = \overline{1, m}$, din faptul că fiecare coloană a matricii $X(.)$ este soluţie a ecuaţiei (3.1.1) rezultă că $X(.)$ este soluţie pentru ecuaţia matricială

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad t \in I. \tag{3.1.5}$$

În general, dacă $X(.) : I \to M_{n,m}(\mathbf{R})$ este derivabilă şi verifică (3.1.5) atunci $X(.)$ se numeşte *soluţie matricială a ecuaţiei* (3.1.1).

Observaţia 3.1.8. Dacă $X(t) = col[\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)]$ este o matrice fundamentală de soluţii atunci soluţia generală (3.1.4) poate fi rescrisă sub formă $\varphi(.) \in S_{A(.)}$ dacă şi numai dacă există $c \in \mathbf{R}^n$ vector coloană de componente $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\varphi(t) = X(t)c, \quad t \in I. \tag{3.1.6}$$

Trebuie remarcat faptul că pentru elementele din $S_{A(.)}$ există criterii de independenţă liniară mai tari decât liniar independenţa din $C^1(I, \mathbf{R}^n)$. Acest lucru se poate observa în următorul rezultat.

Propoziţia 3.1.9. *Fie* $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_m(.)\} \subset S_{A(.)}$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_m(.)\} \subset S_{A(.)}$ *sunt liniar independente.*

b) $\{\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)\} \subset \mathbf{R}^n$ *sunt vectori liniari independenţi* $\forall t \in I$.

c) $\exists t_0 \in I$ *astfel încât* $\{\varphi_1(t_0), ..., \varphi_m(t_0)\} \subset \mathbf{R}^n$ *sunt vectori liniari independenţi.*

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b) rezultă imediat din faptul că funcţia E_t (definită în demonstraţia Teoremei 3.1.4) este izomorfism liniar (care păstrează liniar independenţa); b) $\Rightarrow$ c) este evident; c) $\Rightarrow$ a) rezultă, la fel, din faptul că funcţia E_{t_0} este izomorfism liniar. □

Definiţia 3.1.10. Fie $\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.) \subset S_{A(.)}$. Se numeşte *wronskianul* soluţiilor $\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)$, funcţia $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(.) : I \to \mathbf{R}$ definită prin

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) := det[col(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))], \quad t \in I.$$

Următoarea teoremă, cunoscută sub denumirea de teorema lui Liouville, este un rezultat important în teoria ecuaţiilor diferenţiale liniare.

Teorema 3.1.11. *Dacă* $\varphi_1(.),...,\varphi_n(.) \subset S_{A(.)}$, *atunci wronskianul acestor soluţii verifică relaţia*

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t_0)e^{\int_{t_0}^t Tr(A(s))ds} \quad \forall t, t_0 \in I \tag{3.1.7}$$

(unde, dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbf{R})$, *urma sa este definită prin* $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$*).*

Demonstraţie. Având în vedere Propoziţia 1.3.5 privind soluţiile unei ecuaţii liniare scalare, afirmaţia (3.1.7) este echivalentă cu faptul că funcţia $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(.)$ este soluţie a ecuaţiei liniare

$$\frac{dy}{dt} = Tr(A(t))y \tag{3.1.8}$$

Din ipoteză ştim că $\varphi_i(.) = (\varphi_i^j(.))_{j=\overline{1,n}}$, $i = \overline{1,n}$ sunt soluţii ale ecuaţiei (3.1.1) ceea ce poate fi scris sub forma

$$(\varphi_i^j(t))' = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t)\varphi_i^k(t) \quad i,j = \overline{1,n}, t \in I. \tag{3.1.9}$$

Din definiţia unui determinant avem, pentru $t \in I$,

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = det(\varphi_i^j(t)) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} sgn(\sigma)\varphi_{\sigma(1)}^1(t)...\varphi_{\sigma(n)}^n(t) \tag{3.1.10}$$

unde Σ_n este grupul permutărilor mulţimii $\{1,2,...,n\}$, iar $sgn(\sigma)$ este semnul permutării σ_n. Din (3.1.10) rezultă, evident, că $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(.)$ este derivabilă, iar derivata sa este (folosind (3.1.9))

$$W'_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) =$$

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_n} sgn(\sigma) \sum_{j=1}^n \varphi_{\sigma(1)}^1(t)...\varphi_{\sigma(j-1)}^{j-1}(t)(\varphi_{\sigma(j)}^j(t))'\varphi_{\sigma(j+1)}^{j+1}(t)...\varphi_{\sigma(n)}^n(t)$$

$$= \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(t) \sum_{\sigma \in \Sigma_n} sgn(\sigma)\varphi_{\sigma(1)}^1(t)...\varphi_{\sigma(j-1)}^{j-1}(t)\varphi_{\sigma(j)}^k(t)\varphi_{\sigma(j+1)}^{j+1}(t)...\varphi_{\sigma(n)}^n(t).$$

Cum

$$\Delta_{jk}(t) = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} sgn(\sigma)\varphi^1_{\sigma(1)}(t)...\varphi^{j-1}_{\sigma(j-1)}(t))\varphi^k_{\sigma(j)}(t)\varphi^{j+1}_{\sigma(j+1)}(t)...\varphi^n_{\sigma(n)}(t).$$

este determinantul unei matrici cu două linii identice dacă $j \neq k$ şi deci este 0, şi coincide cu $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t)$ dacă $j = k$ vom avea că

$$W'_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = (\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t))W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t),$$

adică $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(.)$ este soluţia ecuaţiei liniare scalare (3.1.8) şi teorema este demonstrată. □

Observaţia 3.1.12. Fie $t_0 \in I, x_0 \in \mathbf{R}^n$ şi $X(.)$ o matrice fundamentală de soluţii pentru ecuaţia (3.1.1). Atunci unica soluţie a problemei Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

este dată de $\varphi_{t_0,x_0}(t) = X(t)(X(t_0))^{-1}x_0, t \in I$.

Într-adevăr din Observaţia 3.1.8 ştim că $\varphi_{t_0,x_0}(t) = X(t)c, t \in I$, unde $c \in \mathbf{R}^n$. Din condiţia $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$ deducem că $X(t_0)c = x_0$. Cum $X(t_0)$ este inversabilă deducem $c = (X(t_0))^{-1}x_0$.

Propoziţia 3.1.13. *Fie $X(.)$ o matrice fundamentală de soluţii pentru ecuaţia (3.1.1). Atunci funcţia $\mathcal{R}(.,.) : I \times I \to M_n(\mathbf{R})$ definită prin*

$$\mathcal{R}(t, s) = X(t)(X(s))^{-1}, \quad t, s \in I$$

nu depinde de alegerea matricii fundamentale de soluţii $X(.)$.

În plus, pentru orice $s \in I$, $\mathcal{R}(., s)$ verifică

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial t}(t, s) = A(t)\mathcal{R}(t, s), \quad \mathcal{R}(s, s) = I_n \quad \forall t \in I \tag{3.1.11}$$

unde I_n este matricea unitate de ordin n.

Demonstraţie. Faptul că $\mathcal{R}(., s)$ verifică (3.1.11) rezultă din Observaţia 3.1.12 cu $t_0 = s$ şi luând succesiv $x^1_0 = e^1, ..., x^n_0 = e^n$ cu $\{e^1, ..., e^n\}$ baza canonică în $\mathbf{R}^n$. Din unicitatea soluţiei problemei Cauchy (3.1.11)

rezultă că $\mathcal{R}(.,.)$ nu depinde de matricea fundamentală de soluţii $X(.)$.
$\square$

Definiţia 3.1.14. Funcţia $\mathcal{R}(.,.)$ definită în Propoziţia 3.1.13 se numeşte *rezolvanta ecuaţiei* (3.1.1). O altă denumire a lui $\mathcal{R}(.,.)$ este aceea de *operator de evoluţie* generat de $A(.)$.

Observaţia 3.1.15. Notăm faptul că $\mathcal{R}(.,.)$ are următoarele proprietăţi

$$\mathcal{R}(s,s) = I_n \quad \forall s \in I,$$

$$\mathcal{R}(t,s)\mathcal{R}(s,\tau) = \mathcal{R}(t,\tau) \quad \forall t,s,\tau \in I.$$

Observaţia 3.1.16. Observaţia 3.1.12 poate fi reformulată folosind rezolvanta $\mathcal{R}(.,.)$. Mai exact, $\forall t_0, x_0 \in \mathbf{R}^n$ unica soluţie a problemei Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

este dată de $\varphi_{t_0,x_0}(t) = \mathcal{R}(t,t_0)x_0$.

3.2 Ecuaţii liniare pe $\mathbf{R}^n$ cu coeficienţi constanţi

În această secţiune considerăm cazul particular al ecuaţiilor liniare pe $\mathbf{R}^n$ în care funcţia $A(.)$ care defineşte ecuaţia (3.1.1) este constantă.

Spunem că o matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ defineşte *ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi pe* $\mathbf{R}^n$

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{3.2.1}$$

Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, atunci ecuaţia (3.2.1) poate fi rescrisă sub forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.2.2}$$

adică un *sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de dimensiune n*.

Cum ecuaţia (3.2.1) este un caz particular al ecuaţiei (3.1.1) ($A(t) \equiv A$) toate rezultatele din Secţiunea 3.1 rămân valabile şi pentru ecuaţia (3.2.1).

Vom nota mulţimea soluţiilor ecuaţiei (3.2.1) cu

$$S_A = \{\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n; \quad \varphi(.) \text{ soluţie a ecuaţiei (3.2.1)}\} \tag{3.2.3}$$

Observaţia 3.2.1. Prin inducţie după $k \in \mathbf{N}$ rezultă imediat că, dacă $\varphi(.) \in S_A$, atunci $\varphi(.)$ este de k ori derivabilă şi

$$\varphi^{(k)}(t) = A^k \varphi(t) \quad k \in \mathbf{N}, t \in I.$$

Prin urmare, $\varphi(.)$ este de clasă C^∞ şi seria Taylor a lui $\varphi(.)$ în $t = 0$ este

$$\sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}\varphi^{(k)}(0) = (\sum_{k\geq 0} \frac{t^k A^k}{k!})\varphi(0).$$

Se pune, deci, problema de a studia seria de puteri $\sum_{k\geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}$. Prin analogie cu cazul scalar vom demonstra că seria $\sum_{k\geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}$ este uniform convergentă pe mulţimi compacte din $\mathbf{R}$ şi vom arăta ca suma acestei serii este unica matrice fundamentală de soluţii a ecuaţiei (3.2.1) care satisface $X(0) = I_n$, unde I_n este matricea identitate.

Definiţia 3.2.2. a) Seria $\sum_{k\geq 0} A_k$, cu $A_k \in M_n(\mathbf{R})$ este *convergentă* la $A \in M_n(\mathbf{R})$ dacă

$$\lim_{m\to\infty} || \sum_{k=0}^{m} A_k - A|| = 0.$$

b) Fie $A_k(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R}), k \in \mathbf{N}$. Spunem că seria de funcţii cu valori matrici $\sum_{k\geq 0} A_k(t)$ este *uniform convergentă* pe I la $A(.) : I \to M_n(\mathbf{R})$ dacă $\forall \epsilon > 0$ $\exists m_\epsilon \in \mathbf{N}$ astfel încât $\forall m \geq m_\epsilon$

$$|| \sum_{k=0}^{m} A_k(t) - A(t)|| \leq \epsilon, \forall t \in I.$$

Teorema 3.2.3. *Pentru orice $A \in M_n(\mathbf{R})$ seria*

$$\sum_{k\geq 0} \frac{t^k A^k}{k!},$$

unde prin convenţie $A^0 = I_n$*, este uniform convergentă pe orice interval compact* I *din* $\mathbf{R}$*. În plus, suma ei* $\exp(tA)$ *este derivabilă pe* $\mathbf{R}$ *şi*

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A.\exp(tA) = \exp(tA).A \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Demonstraţie. Din proprietăţile normei unei matrici avem

$$||\sum_{k=m}^{m+p} \frac{t^k A^k}{k!}|| \leq \sum_{k=m}^{m+p} \frac{(|t|.||A||)^k}{k!} \quad \forall m, p \in \mathbf{N}, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Această inegalitate ne arată că seria considerată satisface condiţia lui Cauchy uniform pentru t în orice mulţime compactă întrucât seria cu termeni pozitivi care o majorează are această proprietate. Deci şirul sumelor parţiale este un şir Cauchy uniform pe orice interval compact I şi ca atare, seria considerată este uniform convergentă pe I.

Pentru a demonstra cea de-a doua parte a teoremei începem prin a observa că seria este derivabilă termen cu termen şi seria derivatelor este la rândul ei uniform convergentă pe orice interval compact din $\mathbf{R}$. Este uşor de văzut că $\frac{d}{dt}(I_n) = 0$ şi

$$\frac{d}{dt}(\frac{t^k A^k}{k!}) = A.\frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}.A \quad \forall k \in \mathbf{N}, k \geq 1, t \in \mathbf{R}.$$

De aici rezultă că

$$||\sum_{k=m}^{m+p} \frac{t^k A^k}{k!}|| \leq ||A|| \sum_{k=m}^{m+p} \frac{(|t|.||A||)^{k-1}}{(k-1)!},$$

inegalitate care arată că seria derivatelor satisface condiţia lui Cauchy uniform pentru t din orice interval compact. Ca atare, suma seriei iniţiale este derivabilă şi derivata ei este dată de formula

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A.(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}) = (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!}).A$$

şi demonstraţia este încheiată. □

Câteva dintre proprietăţiile exponenţialei unei matrici sunt prezentate în rezultatul următor.

Propoziţia 3.2.4. *Pentru orice* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *seria* $\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ *este convergentă. În plus,*

a) $\exp(0_n) = I_n$.

b) Dacă $AB = BA$ *atunci* $\exp(A + B) = \exp(A).\exp(B)$.

c) $\forall A \in M_n(\mathbf{R})\ \exists (\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

d) Dacă $A = C^{-1}BC$ *atunci* $\exp(A) = C^{-1}\exp(B)C$.

Demonstraţie. O lăsăm pe seama cititorului.

O consecinţă imediată a Teoremei 3.2.3 este:

Corolarul 3.2.5. *Dacă* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *atunci* $\varphi(.) \in S_A$ *dacă şi numai dacă* $\forall t_0 \in \mathbf{R}\ \exists x_0 \in \mathbf{R}^n$ *astfel încât* $\varphi(t) = \exp((t - t_0)A)x_0$ $\forall t \in \mathbf{R}$.

În plus, rezolvanta ecuaţiei (3.2.1) este dată de $\mathcal{R}(t, s) = \exp((t - s)A)$ $t, s \in \mathbf{R}$.

Demonstraţie. Fie $t_0 \in \mathbf{R}$ şi $x_0 \in \mathbf{R}^n$ astfel încât $\varphi(t) = \exp((t - t_0)A)x_0$. $\varphi(.)$ este derivabilă (din Teorema 3.2.3) şi $\varphi'(t) = A\varphi(t)$. Evident $\varphi(t_0) = \exp(0)x_0 = x_0$.

Reciproc, fie $\varphi(.) \in S_A$ $t_0 \in \mathbf{R}$ şi $x_0 \in \mathbf{R}^n$ astfel încât $\varphi(t_0) = x_0$. Pe de altă parte, funcţia $\psi(t) = \exp((t - t_0)A)x_0$ este soluţie a ecuaţiei (3.2.1) şi satisface $\psi(t_0) = x_0$; deci din proprietatea de unicitate a soluţiilor deducem $\varphi(t) \equiv \psi(t)$. Ultima afirmaţie rezultă imediat din definiţia rezolvantei. $\square$

Având în vedere Corolarul 3.2.5 problema determinării soluţiilor ecuaţiei (3.2.1) revine la determinarea matricii $\exp(tA)$. În continuare prezentăm o metodă de determinare a matricii $\exp(tA)$ folosind *forma canonică Jordan* a unei matrici.

Reamintim că pentru orice matrice pătratică cu elemente complexe $A \in M_n(\mathbf{C})$ există o matrice nesingulară $C \in M_n(\mathbf{C})$ astfel încât

$$A = C^{-1}JC \tag{3.2.4}$$

unde J este forma canonică Jordan a matricei A. Concret, dacă $\lambda_1, ...,$ λ_r sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice $det(A - \lambda I_n) = 0$ având ordinele de multiplicitate $m_1, ..., m_r$, $\sum_{p=1}^{r} = n$ atunci

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2 & ... & 0 \\ .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & ... & J_r \end{pmatrix} \text{ unde } J_p = \begin{pmatrix} \lambda_p & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_p \end{pmatrix}$$

este o celulă Jordan de ordin m_p, $p = \overline{1, r}$.

Din proprietăţile operaţiei de înmulţire a matricilor rezultă succesiv că

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2^k & ... & 0 \\ .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & ... & J_r^k \end{pmatrix},$$

$$\exp(tJ) = \begin{pmatrix} \exp(tJ_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \exp(tJ_2) & ... & 0 \\ .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & ... & \exp(tJ_r) \end{pmatrix}.$$

Din Propoziţia 3.2.4 d) şi (3.2.4) se obţine că

$$\exp(tA) = C^{-1} \begin{pmatrix} \exp(tJ_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \exp(tJ_2) & ... & 0 \\ .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & ... & \exp(tJ_r) \end{pmatrix} C \quad \forall t \in \mathbf{R} \tag{3.2.5}$$

Aşadar, pentru a determina $\exp(tA)$ este suficient să determinăm $\exp(tJ_p)$, $p = \overline{1, r}$. Să remarcăm, mai întâi, că $J_p = H_p + \lambda I_p$, unde I_p este matricea unitate de ordin p şi

$$H_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Evident H_p şi I_p comută şi din Propoziţia 3.2.4 deducem că

$$\exp(tJ_p) = \exp(t\lambda_p).\exp(tH_p). \tag{3.2.6}$$

Un calcul imediat ne arată că pentru $t \in \mathbf{R}$

$$\exp(tH_p) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m_p-1}}{(m_p-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{m_p-2}}{(m_p-2)!} \\ .. & .. & .. & \cdots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.2.7)$$

Din (3.2.5)-(3.2.7) găsim matricea $\exp(tA)$.

Raţionamentele de mai sus pot fi puse sub forma unei teoreme care se referă la structura matricii $\exp(tA)$.

Teorema 3.2.6. *Elementele matricii* $\exp(tA)$ *sunt de forma*

$$\sum_{k=1}^{r} e^{\alpha_k t}[P_k(t)cos(\beta_k t) + Q_k(t)sin(\beta_k t)], \qquad (3.2.8)$$

unde $\alpha_k + i\beta_k$, $k = \overline{1,r}$ *sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice* $det(A - \lambda I_n) = 0$, *iar* $P_k(t), Q_k(t)$ *sunt polinoame cu coeficienţi reali, de grad cel mult* $m_k - 1$, m_k *fiind ordinul de multiplicitate al rădăcinii* $\alpha_k + i\beta_k$, $k = \overline{1,r}$.

Demonstraţie. Fie $\lambda = \alpha + i\beta$ o rădăcină a ecuaţiei caracteristice $det(A - \lambda I_n) = 0$. Reamintim că $e^{\lambda t} = e^{\alpha t}[cos\beta t + isin\beta t]$ şi că deşi C^{-1} şi C sunt matrici cu elemente numere complexe produsul $C^{-1}\exp(tJ)C = \exp(tA)$ este în mod necesar o matrice cu elemente numere reale. Din (3.2.5)-(3.2.7) obţinem concluzia teoremei. □

Observaţia 3.2.7. Funcţiile de forma (3.2.8) se numesc *cvasi polinoame*. Dacă notăm cu $\sigma(A) = \{\lambda \in C;\ det(A - \lambda I_n) = 0\}$ spectrul matricii A atunci mulţimea funcţiilor de forma (3.2.8)

$$CP(\sigma(A)) = \{\varphi(.);\quad \varphi(t) = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}\cap\sigma(A)} e^{\lambda t}P_\lambda(t) +$$

$$+ \sum_{\lambda\in\sigma(A), Im\lambda>0} e^{Re(\lambda)t}[P_\lambda(t)cos(Im\lambda t) + Q_\lambda(t)sin(Im\lambda t)],$$

$$P_\lambda(t), Q_\lambda(t) \quad \text{polinoame în } \mathbf{R}^n \text{de grad cel mult } m_\lambda - 1\}$$

se numeşte spaţiul cvasi polinoamelor asociat matricii $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Observaţia 3.2.8. Teorema 3.2.6 ne oferă o metodă efectivă de determinare a matricii $\exp(tA)$. Mai precis, pentru a găsi $\exp(tA)$ avem în vedere că toate elementele acestei matrici sunt de forma (3.2.8) şi determinăm coeficienţii polinoamelor $P_k(t), Q_k(t)$ din condiţiile

$$\exp(0.A) = I_n, \quad \frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A.\exp(tA), \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Exemplul 3.2.9. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Matricea care defineşte ecuaţia este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

ecuaţia caracteristică $det(A - \lambda I_n) = 0$ se rescrie sub forma $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ are rădăcinile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$ ambele având ordinul de multiplicitate 1. Deci elementele matricii $\exp(tA)$ sunt combinaţii liniare de e^t şi e^{5t}.

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} ae^t + be^{5t} & ce^t + de^{5t} \\ fe^t + ge^{5t} & he^t + je^{5t} \end{pmatrix}.$$

Din $\exp(0.A) = I_2$ rezultă $a + b = 1$, $h + j = 1$, $f + g = 0$, $c + d = 0$.

Condiţia $(\exp(tA))' = A.\exp(tA)$ are forma

$$\begin{pmatrix} ae^t + 5be^{5t} & ce^t + 5de^{5t} \\ fe^t + 5ge^{5t} & he^t + 5je^{5t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (2a + f)e^t + (2b + g)e^{5t} & (2c + h)e^t + (2d + j)e^{5t} \\ (3a + 4f)e^t + (3b + 4g)e^{5t} & (3c + 4h)e^t + (3d + 4j)e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Cum familia $\{e^t, e^{5t}\}$ este liniar independentă în spaţiul funcţiilor continue de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$, identificând coeficienţii lui e^t şi e^{5t} din cele două matrici obţinem un sistem liniar cu opt ecuaţii care are soluţia $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = -\frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{4}$, $f = -\frac{3}{4}$, $g = \frac{3}{4}$, $h = \frac{1}{4}$, $j = \frac{3}{4}$. Deci

$$\exp(tA) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^t + e^{5t} & -1e^t + e^{5t} \\ -3e^t + 3e^{5t} & e^t + 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

pentru orice $t \in \mathbf{R}$, deci soluţia generală a ecuaţiei noastre este

$$\varphi(t) = \exp(tA)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2c_1e^t + 2c_2e^{5t} \\ -2c_1e^t + 6c_2e^{5t} \end{pmatrix}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

3.3 Ecuaţii afine pe $\mathbf{R}^n$

Definiţia 3.3.1. Fiind date funcţiile $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ şi $b(.) : I \to \mathbf{R}$, unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, acestea vor defini *ecuaţia diferenţială afină* pe $\mathbf{R}^n$.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t). \tag{3.3.1}$$

Dacă elementele matricii $A(t)$ sunt $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$, $t \in I$ şi elementele vectorului coloană $b(t)$ sunt $b_1(t), ..., b_n(t)$ atunci ecuaţia (3.3.1) poate fi rescrisă sub forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.3.2}$$

care poartă denumirea de *sistem de ecuaţii diferenţiale afine de dimensiune n.*

Atunci când funcţiile $A(.)$ şi $b(.)$ sunt continue, ecuaţia (3.3.1) admite existenţa şi unicitatea globală a soluţiilor.

Teorema 3.3.2. *Fie $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ şi $b(.) : I \to \mathbf{R}^n$ continue care definesc ecuaţia (3.3.1). Atunci $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$ $\exists! \varphi_{t_0,x_0}(.) : I \to \mathbf{R}^n$ soluţie a ecuaţiei (3.3.1) care satisface condiţia iniţială $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$.*

Demonstraţie. Fie $f(.,.) : I \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ definită prin $f(t,x) = A(t)x + b(t)$. Este evident faptul că $f(.,.)$ este continuă, local lipschitziană în raport cu al doilea argument (fiind liniară în al doilea argument) şi $f(.,.)$ are proprietatea de creştere afină (vezi Observaţia 2.4.4).

Aşadar din Teoremele 2.2.1, 2.2.9, 2.4.2 şi Observaţia 2.4.4 rezultă afirmaţia din enunţ. $\square$

Pe baza Teoremei 3.3.2 vom nota mulţimea soluţiilor ecuaţiei (3.3.1) cu

$$S_{A(.),b(.)} = \{\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n; \quad \varphi(.) \text{ soluţie a ecuaţiei } (3.3.1)\} \qquad (3.3.3)$$

Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii afine pe $\mathbf{R}^n$ este o o varietate afină de dimensiune n, paralelă cu subspaţiul $S_{A(.)} \subset C^1(I, \mathbf{R}^n)$ (al soluţiilor ecuaţiei linare asociate $\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x}$). Mai precis, avem următorul rezultat.

Teorema 3.3.3. *Dacă $A(.) : I \subset \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$, $b(.) : I \to \mathbf{R}$ sunt continue şi dacă $S_{A(.)}$ este mulţimea soluţiilor ecuaţiei linare asociate $\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x}$ atunci*

$$S_{A(.),b(.)} = S_{A(.)} + \{\varphi_0(.)\}, \quad \forall \varphi_0(.) \in S_{A(.),b(.)}. \qquad (3.3.4)$$

Demonstraţie. „$\subset$" Fie $\varphi_0(.) \in S_{A(.),b(.)}$; dacă $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ atunci $\overline{\varphi}(.) := \varphi(.) - \varphi_0(.) \in S_{A(.)}$ şi deci $\varphi(.) := \overline{\varphi}(.) + \varphi_0(.) \in S_{A(.)} + \{\varphi_0(.)\}$.

„$\supset$" Fie $\overline{\varphi}(.) \in S_{A(.)}$ atunci

$$(\overline{\varphi}(t) + \varphi_0(t))' \equiv A(t)(\overline{\varphi}(t) + \varphi_0(t)) + b(t),$$

deci $\overline{\varphi}(.) + \varphi_0(.) \in S_{A(.),b(.)}$. $\square$

Corolarul 3.3.4. *Dacă $\varphi_0(.) \in S_{A(.),b(.)}$ şi $\{\overline{\varphi}_1(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată atunci $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ dacă şi numai dacă există $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$ astfel încât*

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\varphi}_i(t) + \varphi_0(t), \quad t \in I. \qquad (3.3.5)$$

Demonstraţie. Dacă $\{\overline{\varphi}_1(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ este un sistem fundamental de soluţii atunci

$$S_{A(.)} = \{\sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\varphi}_i(.), \quad c_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}\}$$

şi afirmaţia rezultă din (3.3.4). $\square$

Egalitatea (3.3.5) se numeşte *soluţia generală* a ecuaţiei afine (3.3.1). Afirmaţia din Corolarul 3.3.4 poate fi reformulată astfel: soluţia generală a ecuaţiei afine este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei liniare asociate şi o soluţie particulară a ecuaţiei afine.

Există clase particulare de ecuaţii afine pentru care o soluţie particulară poate fi găsită efectiv. În general, însă, pentru determinarea soluţiei generale a unei ecuaţii afine pe $\mathbf{R}^n$ se utilizează (ca şi în cazul ecuaţiilor afine scalare) *metoda variaţiei constantelor*. Mai exact, avem următorul principiu al variaţiei constantelor pentru ecuaţii afine pe $\mathbf{R}^n$.

Teorema 3.3.5. *Dacă $X(.)$ este o matrice fundamentală de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată $\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x}$, atunci $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ dacă şi numai dacă $\exists c(.) : I \to \mathbf{R}^n$ o primitivă a funcţiei $(X(.))^{-1}b(.)$ astfel încât*

$$\varphi(t) = X(t)c(t), \quad \forall t \in I. \tag{3.3.6}$$

Demonstraţie. Fie $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ şi $c(t) = (X(t))^{-1}b(t)$. $X(.)$ fiind matrice fundamentală de soluţii este derivabilă şi $X(t)$ este nesingulară $\forall t \in I$. Prin urmare, $(X(.))^{-1}$ este derivabilă. Din (3.3.6) şi din faptul că $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ obţinem

$$X'(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t) + b(t),$$

şi cum $X'(t) = A(t)X(t)$ deducem $X(t)c'(t) = b(t)$ deci
$c'(t) = (X(t))^{-1}b(t)$.

Reciproc, dacă $c(.)$ este primitivă a lui $(X(.))^{-1}b(.)$ şi $\varphi(.)$ este definită în (3.3.6) atunci $\varphi(.)$ este derivabilă şi

$$\varphi'(t) = X'(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t) +$$
$$+ X(t)(X(t))^{-1}b(t) = A(t)X(t)c(t) + b(t)$$

adică $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ şi teorema este demonstrată. $\square$

Corolarul 3.3.6. *Dacă $\{\overline{\varphi}_1(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată atunci $\varphi(.) \in S_{A(.),b(.)}$ dacă şi numai dacă există $c_1(.), ..., c_n(.)$ derivabile astfel încât pentru orice $t \in I$*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\overline{\varphi}_i(t) = b(t), \quad \varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\overline{\varphi}_i(t).$$

Demonstraţie. Dacă $\{\overline{\varphi}_1(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ este un sistem fundamental de soluţii atunci $X(t) = col[\overline{\varphi}_1(t), ..., \overline{\varphi}_n(t)]$ este matrice fundamentală de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată şi cum $X(t)c(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t)\overline{\varphi}_i(t)$ afirmaţia rezultă din Teorema 3.3.5. □

Observaţia 3.3.7. Pentru determinarea soluţiilor ecuaţiei afine (3.3.1) metoda variaţiei constantelor constă în următoarele:

– se determină soluţia generală a ecuaţiei liniare asociate

$$\overline{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i\overline{\varphi}_i(t), \quad c_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1,n}.$$

(Dacă $A(t) \equiv A$, după cum s-a văzut în Secţiunea 3.2 acest lucru este întotdeauna posibil)

– se caută funcţiile $c_1(.), ..., c_n(.)$ astfel încât funcţia

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t)\overline{\varphi}_i(t)$$

să fie soluţie a ecuaţiei afine (3.3.1).

– din identitatea $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ după reducerea termenilor asemenea, determinarea lui $c_i(.)$ este imediată după ce se rezolvă sistemul algebric liniar

$$\sum_{i=1}^n c_i'(t)\overline{\varphi}_i(t) = b(t).$$

Corolarul 3.3.8. *a) Dacă $X(.)$ este matrice fundamentală de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată $\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\overline{x}$, atunci soluţia globală a ecuaţiei (3.3.1) care satisface condiţia iniţială $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$ este*

$$\varphi_{t_0,x_0}(t) = X(t)(X(t_0))^{-1}x_0 + \int_{t_0}^t X(t)(X(s))^{-1}b(s)ds, \quad t \in I.$$

b) Dacă $\mathcal{R}(.,.) : I \times I \to M_n(\mathbf{R})$ este rezolvanta ecuaţiei liniare asociate atunci

$$\varphi_{t_0,x_0}(t) = \mathcal{R}(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{R}(t,s)b(s)ds, \quad t \in I.$$

Demonstraţie. a) $\varphi_{t_0,x_0}(.)$ este soluţie, deci conform Teoremei 3.3.5 $\varphi_{t_0,x_0}(t) = X(t)(\int_{t_0}^{t}(X(s))^{-1}b(s)ds + k)$; din condiţia iniţială deducem că $k = (X(t_0))^{-1}x_0$.

b) Din Propoziţia 3.1.13, $\mathcal{R}(t,s) = X(t)(X(s))^{-1}$ $\forall t, s \in I$ şi afirmaţia rezultă imediat din a). $\square$

Exemplul 3.3.9. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{5t} \\ y' = 3x + 4y + 3e^{5t}. \end{cases}$$

Fiind o ecuaţie afină pe $\mathbf{R}^2$ vom folosi metoda variaţiei constantelor. Considerăm ecuaţia liniară asociată

$$\begin{cases} \overline{x}' = 2\overline{x} + \overline{y} \\ \overline{y}' = 3\overline{x} + 4\overline{y} \end{cases}$$

care, am văzut în Exemplul 3.2.9, are soluţia generală

$$\begin{cases} \overline{x}(t) = c_1e^t + c_2e^{5t} \\ \overline{y}(t) = -c_1e^t + 3c_2e^{5t}, \end{cases}$$

$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Căutăm soluţii pentru ecuaţia afină de forma

$$\begin{cases} x(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{5t} \\ y(t) = -c_1(t)e^t + 3c_2(t)e^{5t}. \end{cases}$$

Din condiţia ca $x(.)$ şi $y(.)$ să verifice ecuaţia afină, după reducerea termenilor asemenea obţinem

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t + c_2(t)e^{5t} = e^{5t} \\ -c_1'(t)e^t + 3c_2'(t)e^{5t} = 3e^{5t}, \end{cases}$$

de unde găsim $c_1'(t) \equiv 0$ şi $c_2'(t) \equiv 1$. Deci $c_1(t) \equiv k_1$ şi $c_2(t) \equiv t + k_2$ cu $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$. Prin urmare, soluţia căutată este

$$\begin{cases} x(t) = k_1e^t + (t + k_2)e^{5t} \\ y(t) = -k_1e^t + 3(t + k_2)e^{5t}, \quad k_1, k_2 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

3.4 Ecuaţii liniare de ordin superior

Definiţia 3.4.1. Dacă $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, funcţiile $a_1(.), ..., a_n(.) : I \to \mathbf{R}$ definesc *ecuaţia liniară de ordinul n*

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) x^{(n-j)} \tag{3.4.1}$$

Ecuaţia (3.4.1) este un caz particular de ecuaţie diferenţială de ordinul n de forma (2.1.4), deci este echivalenta cu un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi (sistemul canonic asociat). Mai precis, sistemul canonic asociat devine în acest caz

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) x_{n-j+1}, \end{cases} \tag{3.4.2}$$

care este un sistem de ecuaţii liniare, de dimensiune n, definit de $A(.) : I \to M_n(\mathbf{R})$

$$A(t) = \mathrm{comp}(a_1(t), ..., a_n(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ a_n(t) & a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & ... & a_n(t) \end{pmatrix} \tag{3.4.3}$$

Matricea $A(t)$ definită în (3.4.3) se numeşte *matricea companion* asociată numerelor reale $a_1(t), ..., a_n(t)$.

Reamintim că, în baza Propoziţiei 2.1.4 $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (3.4.1) dacă şi numai dacă $\varphi(.)$ este de n ori derivabilă şi $\tilde{\varphi}(.) := (\varphi(.), \varphi'(.), ..., \varphi^{(n-1)}(.))$ este soluţie a sistemului canonic asociat (3.4.2).

Din acest moment este clar că toate considerentele făcute în primele două secţiuni ale acestui capitol se pot reformula pentru ecuaţia (3.4.1). Trecem în revistă câteva dintre acestea.

Teorema 3.4.2. *Dacă funcţiile* $a_1(.), ..., a_n(.) : I \to \mathbf{R}$ *care definesc ecuaţia (3.4.1) sunt continue, atunci* $\forall (t_0, (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})) \in I \times \mathbf{R}^n$

$\exists!\varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ *soluţie a ecuaţiei (3.4.1) care verifică condiţiile iniţiale* $\varphi^{(k)}(t_0) = x_0^k$, $k = \overline{0, n-1}$.

Demonstraţie. Cum $a_i(.)$, $i = \overline{1, n}$ sunt continue rezultă că şi funcţia $A(.)$ definită în (3.4.3) este continuă, deci putem aplica Teorema 3.1.2 pentru ecuaţia (3.4.2) pentru a deduce existenţa şi unicitatea globală a soluţiilor pentru ecuaţia (3.4.2). Propoziţia 2.1.4 încheie demonstraţia. □

Pe baza Teoremei 3.4.2 vom nota mulţimea soluţiilor ecuaţiei (3.4.1) cu

$$S_{a_1(.),\dots,a_n(.)} = \{\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n; \quad \varphi(.) \text{ soluţie a ecuaţiei (3.4.1)}\} \tag{3.4.4}$$

care este un subspaţiu vectorial de dimensiune n al spaţiului funcţiilor reale de clasă C^n definite pe I, $C^n(I, \mathbf{R})$.

Teorema 3.4.3. *Dacă* $a_1(.), \dots, a_n(.) : I \to \mathbf{R}$ *sunt continue atunci* $S_{a_1(.),\dots,a_n(.)} \subset C^n(I, \mathbf{R})$ *este un subspaţiu vectorial de dimensiune n.*

Demonstraţie. Verificarea faptului că $S_{a_1(.),\dots,a_n(.)} \subset C^n(I, \mathbf{R})$ este un subspaţiu vectorial este imediată. Pentru a demonstra că dimensiunea acestui subspaţiu este n observăm că Propoziţia 2.1.4 defineşte izomorfismul liniar $T : S_{a_1(.),\dots,a_n(.)} \to S_{A(.)}$, unde $A(.)$ a fost definită în (3.4.3)

$$T(\varphi) = (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}).$$

Cum, conform Teremei 3.1.4, $S_{A(.)}$ este un spaţiu vectorial de dimensiune n şi T este un izomorfism rezultă concluzia teoremei. □

Definiţia 3.4.4. Dacă $\{\varphi_1(.), \dots, \varphi_n(.)\} \subset S_{a_1(.),\dots,a_n(.)}$ este o bază, atunci spunem că $\{\varphi_1(.), \dots, \varphi_n(.)\}$ formează un *sistem fundamental de soluţii* pentru ecuaţia (3.4.1).

În acest caz $\varphi(.) \in S_{a_1(.),\dots,a_n(.)}$ daca şi numai dacă există constantele $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t), \quad t \in I. \tag{3.4.5}$$

Relaţia (3.4.5) se numeşte *soluţie generală a ecuaţiei* (3.4.1).

Propoziţia 3.4.5. *Dacă* $a_1(.), ..., a_n(.) : I \to \mathbf{R}$ *sunt continue, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $\{\varphi_1(.), ..., \varphi_m(.)\} \subset S_{a_1(.),...,a_n(.)}$ *sunt liniar independente.*

b) $\{\tilde{\varphi}_1(.), ..., \tilde{\varphi}_m(.)\} \subset S_{A(.)}$ *sunt liniar independente, unde* $\tilde{\varphi}_i = T(\varphi_i)$, $i = \overline{1, n}$.

c) $\exists t_0 \in I$ *astfel încât* $\{\tilde{\varphi}_1(t_0), ..., \tilde{\varphi}_m(t_0)\} \subset \mathbf{R}^n$ *sunt vectori liniari independenţi.*

d) $\{\tilde{\varphi}_1(t), ..., \tilde{\varphi}_m(t)\} \subset \mathbf{R}^n$ *sunt vectori liniari independenţi* $\forall t \in I$.

Demonstraţie. Este imediat din Propoziţia 3.1.9 şi Propoziţia 2.1.4. $\square$

Definiţia 3.4.6. Fie $\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.) \in S_{a_1(.),...,a_n(.)}$. Se numeşte *wronskianul* soluţiilor $\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)$, funcţia $W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(.) : I \to \mathbf{R}$ definită prin

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) := det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & ... & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & ... & \varphi_n'(t) \\ .. & .. & ... & .. \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & ... & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.4.6)$$

Versiunea teoremei lui Liouville pentru ecuaţii de ordin superior este

Teorema 3.4.7. *Dacă* $\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.) \in S_{a_1(.),...,a_n(.)}$, *atunci wronskianul acestor soluţii verifică relaţia*

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t_0) e^{\int_{t_0}^t a_1(s)ds} \quad \forall t, t_0 \in I.$$

Demonstraţie. Având în vedere definiţia wronskianului soluţiilor unei ecuaţii liniare pe $\mathbf{R}^n$, definiţia izomorfisnului $T(.)$ şi faptul că urma matricii $A(t)$ definită în (3.4.3) este $a_1(t)$, Teorema 3.1.11 aplicată soluţiilor $T(\varphi_1), ..., T(\varphi_n)$ ne dă

$$W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t) = W_{T(\varphi_1),...,T(\varphi_n)}(t) =$$

$$= W_{T(\varphi_1),...,T(\varphi_n)}(t_0) e^{\int_{t_0}^t Tr(A(s))ds} = W_{\varphi_1,...,\varphi_n}(t_0) e^{\int_{t_0}^t a_1(s)ds},$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. $\square$.

3.5 Ecuaţii liniare de ordin superior cu coeficienţi constanţi

În cele ce urmează vom prezenta teorema privind structura soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi, rezultat care asigură o metodă de determinare a unui sistem fundamental de soluţii în cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi.

Definiţia 3.5.1. Se numeşte *ecuaţia diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi* o ecuaţie de forma

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_j x^{(n-j)} \tag{3.5.1}$$

unde $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$.

Fiind vorba de un caz particular al ecuaţiei liniare (3.4.1) ($a_j(t) \equiv a_j \quad \forall j = \overline{1,n}, t \in \mathbf{R}$) toate rezultatele din Secţiunea 3.4 rămân adevărate şi pentru ecuaţiile de forma (3.5.1).

Sa remarcăm că sistemul canonic asociat $\frac{\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x}$ este definit de matricea companion

$$A = \text{comp}(a_1, ..., a_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & ... & a_1 \end{pmatrix},$$

care este o matrice cu coeficienţi constanţi şi deci sistemul canonic asociat are, de asemenea, coeficienţi constanţi.

Observaţia 3.5.2. Se constată prin calcul direct că ecuaţia $det(A-\lambda I_n) = 0$ are în acest caz forma

$$\lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{3.5.2}$$

Această ecuaţie (algebrică) se numeşte *ecuaţia caracteristică* asociată ecuaţiei (3.5.1), iar polinomul corespunzător se numeşte *polinomul caracteristic* asociat ecuaţiei (3.5.1).

Rezultatul fundamental în teoria ecuaţiilor liniare de ordin superior cu coeficienţi constanţi afirmă că mulţimea soluţiilor ecuaţiei (3.5.1) coincide cu spaţiul cvasipolinoamelor asociat matricii A (definit în Observaţia 3.2.7).

Teorema 3.5.3. *Fie $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ rădăcinile ecuaţiei (3.5.2) având ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, ..., m_r$. Atunci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (3.5.1) este*

$$\varphi^j_{\lambda_k}(t) = \begin{cases} t^{j-1}e^{\lambda_k t} & \text{dacă } \lambda_k \in \mathbf{R}, j = \overline{1, m_{\lambda_k}} \\ t^{j-1}e^{\alpha_k t}cos\beta_k t & \text{dacă } \lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, \beta_k > 0, j = \overline{1, m_{\lambda_k}} \\ t^{j-1}e^{\alpha_k t}sin\beta_k t & \text{dacă } \lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, \beta_k > 0, j = \overline{1, m_{\lambda_k}}, \end{cases} \tag{3.5.3}$$

$k = \overline{1, r}$.

Demonstraţie. Este uşor de constatat că mulţimea de funcţii $\mathcal{B} = \{\varphi^j_{\lambda_k}(.)\}_{j=\overline{1,m_{\lambda_k}},k=\overline{1,r}}$ conţine cel mult n elemente. Ca atare, pentru a demonstra teorema este suficient să arătăm că orice soluţie a ecuaţiei (3.5.1) este o combinaţie liniară de elemente din $\mathcal{B}$. Dacă ar fi aşa, atunci $\mathcal{B}$ ar fi o familie de generatori pentru mulţimea soluţiilor $S_{a_1,...,a_n}$, care conform Teoremei 3.4.3 este un spaţiu vectorial de dimensiune n. Aşadar $\mathcal{B}$ are exact n elemente, deci ar fi o bază în $S_{a_1,...,a_n}$, ceea ce ar completa demonstraţia.

Fie $\varphi \in S_{a_1,...,a_n}$, atunci $T(\varphi) = \tilde{\varphi}$ definită în Teorema 3.4.3 este o soluţie a ecuaţiei liniare pe $\mathbf{R}^n$ $\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x}$. Conform Corolarului 3.2.5 există $c \in \mathbf{R}^n$ astfel încât $\tilde{\varphi}(t) = \exp(tA)c, t \in \mathbf{R}$.

Pe de altă parte, din Teorema 3.2.6 şi din Observaţia 3.5.2 rezultă că toate componentele lui $\tilde{\varphi}$ sunt combinaţii liniare de elemente din $\mathcal{B}$. În particular, prima componentă a lui $\tilde{\varphi}$, care este φ are aceeaşi proprietate şi demonstraţia este încheiată. $\square$

Observaţia 3.5.4. Determinarea soluţiei generale a ecuaţiei (3.5.1) constă în două etape. Mai întâi se rezolvă ecuaţia algebrică (3.5.2) determinându-se pentru fiecare rădăcină ordinul de multiplicitate. Apoi se scriu soluţiile fundamentale care sunt date de formulele (3.5.3). O combinaţie liniară a acestora este soluţia generală căutată.

Exemplul 3.5.5. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' - x' - 2x = 0.$$

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, având rădăcinile $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = -1$. Prin urmare, soluţia generală este $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}$.

3.6 Ecuaţii afine de ordin superior

Ca şi în cazul ecuaţiilor afine pe $\mathbf{R}^n$, ecuaţiile afine de ordin superior se studiază cu ajutorul metodei variaţiei constantelor; metodă care în acest caz are anumite particularităţi ce trebuiesc puse în evidenţă.

Definiţia 3.6.1. Dacă $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, funcţiile $a_1(.), ...,$ $a_n(.)$, $b(.) : I \to \mathbf{R}$ definesc *ecuaţia afină de ordinul n*

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) x^{(n-j)} + b(t) \tag{3.6.1}$$

Sistemul canonic asociat ecuaţiei (3.6.1) este

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A(t)\tilde{x} + \tilde{b}(t), \tag{3.6.2}$$

unde

$$A(t) = \mathrm{comp}(a_1(t), ..., a_n(t)), \quad \tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, t \in I,$$

matricea $A(t)$ este matricea companion definită în (3.4.3).

Propoziţia 2.1.4 afirmă, în acest caz, că $\varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (3.6.1) dacă şi numai dacă $\varphi(.)$ este de n ori derivabilă şi $\tilde{\varphi}(.) := (\varphi(.), \varphi'(.), ..., \varphi^{(n-1)}(.))$ este soluţie a ecuaţiei (3.6.2).

Aşadar, toate rezultatele din Secţiunea 3.3 pot fi transpuse şi pentru ecuaţiile de forma (3.6.1).

Teorema 3.6.2. *Dacă* $a_1(.), ..., a_n(.), b(.) : I \to \mathbf{R}$ *sunt continue, atunci* $\forall (t_0, (x_0, x_0^1, ..., x_0^{n-1})) \in I \times \mathbf{R}^n$ $\exists ! \varphi(.) : I \to \mathbf{R}$ *soluţie a ecuaţiei (3.6.1) care verifică condiţiile iniţiale* $\varphi^{(k)}(t_0) = x_0^k$, $k = \overline{0, n-1}$.

Demonstraţie. Este imediată, din Teorema 3.3.2 şi Propoziţia 2.1.4. □

Pe baza acestei teoreme introducem următoarea notaţie

$$S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)} = \{\varphi(.) : I \to \mathbf{R}^n; \quad \varphi(.) \text{ soluţie a ecuaţiei } (3.6.1)\} \tag{3.6.3}$$

La rândul său $S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)} \subset C^n(I, \mathbf{R})$ este o varietate afină paralelă cu subspaţiul $S_{a_1(.),...,a_n(.)} \subset C^n(I, \mathbf{R})$.

Teorema 3.6.3. *Dacă* $a_1(.), ..., a_n(.), b(.) : I \to \mathbf{R}$, *sunt continue şi dacă* $S_{a_1(.),...,a_n(.)}$ *este mulţimea soluţiilor ecuaţiei linare asociate (3.4.1) atunci*

$$S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)} = S_{a_1(.),...,a_n(.)} + \{\varphi_0(.)\}, \quad \forall \varphi_0(.) \in S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)}$$

Demonstraţie. Rezultă imediat din Teorema 3.3.3 observând că funcţia $T : S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)} \to S_{A(.),b(.)}$, $T(\varphi) := (\varphi(.), \varphi'(.), ..., \varphi^{(n-1)}(.))$ este o aplicaţie liniară şi bijectivă. □

Corolarul 3.6.4. *Dacă* $\varphi_0(.)$ *este soluţie a ecuaţiei (3.6.1) şi* $\{\overline{\varphi}_1(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\} \subset S_{a_1(.),...,a_n(.)}$ *este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată atunci* $\varphi(.) \in S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)}$ *dacă şi numai dacă există* $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$ *astfel încât*

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\varphi}_i(t) + \varphi_0(t), \quad t \in I. \tag{3.6.4}$$

Spunem că relaţia (3.6.4) reprezintă *soluţia generală a ecuaţiei afine* (3.6.1).

Principiul variaţiei constantelor pentru ecuaţii afine de ordin superior afirmă că orice soluţie a unei ecuaţii afine de ordinul n se poate obţine cu ajutorul soluţiei generale a ecuaţiei linare asociate şi a unei primitive.

Teorema 3.6.5. *Dacă* $\{\overline{\varphi}_1(.),...,\overline{\varphi}_n(.)\} \subset S_{a_1(.),...,a_n(.)}$ *este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată atunci* $\varphi(.) \in S_{a_1(.),...,a_n(.),b(.)}$ *dacă şi numai dacă există* $c_1(.),...,c_n(.) : I \to \mathbf{R}$ *derivabile care satisfac pentru orice* $t \in I$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i'(t)\overline{\varphi}_i(t) \equiv 0, \\ \sum_{i=1}^n c_i'(t)\overline{\varphi}_i'(t) \equiv 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n c_i'(t)\overline{\varphi}_i^{(n-2)}(t) \equiv 0, \\ \sum_{i=1}^n c_i'(t)\overline{\varphi}_i^{(n-1)}(t) \equiv b(t) \end{cases} \tag{3.6.5}$$

şi astfel încât

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t)\overline{\varphi}_i(t), \quad t \in I.$$

Demonstraţie. Cum $\{\overline{\varphi}_1(.),...,\overline{\varphi}_n(.)\}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia liniară asociată atunci $\{\tilde{\overline{\varphi}}_1(.),...,\tilde{\overline{\varphi}}_n(.)\} \subset S_{A(.)}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul liniar definit de $A(.) = comp(a_1(.),...,a_n(.))$ şi teorema rezultă din Corolarul 3.3.6 şi Propoziţia 2.1.4. □

Observaţia 3.6.6. Pentru determinarea soluţiilor ecuaţiei afine (3.6.1) metoda variaţiei constantelor constă în următoarele:

– se determină soluţia generală a ecuaţiei liniare asociate

$$\overline{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i\overline{\varphi}_i(t), \quad c_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1,n}.$$

(Dacă $a_j(t) \equiv a_j, j = \overline{1,n}$, după cum s-a văzut în Secţiunea 3.5 acest lucru este întotdeauna posibil)

– se caută funcţiile $c_1(.),...,c_n(.)$ care verifică sistemul algebric liniar (3.6.5)

– se scrie soluţia generală a ecuaţiei afine

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t)\overline{\varphi}_i(t).$$

Exemplul 3.6.7. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$t^2x'' - 2x = t^2 + \frac{1}{t}, \quad t > 0. \tag{3.6.6}$$

Fiind o ecuaţie afină de ordinul al doilea, considerăm ecuaţia liniară asociată

$$t^2\overline{x}'' - 2\overline{x} = 0,$$

care este o ecuaţie de tip Euler.

Efectuăm schimbarea de variabilă $t = e^s$. Deci, dacă $\overline{x}(.)$ este soluţie a acestei ecuaţii, schimbarea de variabile defineşte o funcţie $y(.)$ după regula $y(s) = \overline{x}(e^s)$. Derivând, obţinem $y'(s) = \overline{x}'(e^s)e^s$, adică $\overline{x}'(e^s) = y'(s)e^{-s}$. Derivăm, încă o dată, în ultima egalitate şi avem $\overline{x}''(e^s)e^s = y''(s)e^{-s} - y'(s)e^{-s}$, deci $\overline{x}''(e^s) = e^{-2s}(y''(s) - y'(s))$. Aşadar, ecuaţia verificată de $y(.)$ este

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Cum am văzut în Exemplul 3.5.5. soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$y(s) = c_1e^{-s} + c_2e^{2s}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei liniare asociate este

$$\overline{x}(t) = y(lnt) = c_1e^{-lnt} + c_2e^{2lnt} = \frac{c_1}{t} + c_2t^2.$$

În final, pentru a găsi soluţia generală a ecuaţiei aplicăm metoda variaţiei constantelor. Mai precis, căutăm soluţii de forma

$$x(t) = \frac{c_1(t)}{t} + c_2(t)t^2.$$

Funcţiile $c_1(.)$ şi $c_2(.)$ se determină, rezolvând sistemul algebric

$$\begin{cases} \frac{c_1'(t)}{t} + c_2'(t)t^2 = 0 \\ \frac{-c_1'(t)}{t^2} + c_2'(t)2t = t^2 + \frac{1}{t}. \end{cases} \tag{3.6.5}$$

Găsim $c_1'(t) = -\frac{t^4}{3} - \frac{t}{3}$ şi $c_2'(t) = \frac{1}{3t^2} + \frac{t}{3}$, de unde $c_1(t) = -\frac{t^5}{15} - \frac{t^2}{6} + k_1$ $c_2(t) = -\frac{1}{3t} + \frac{t^2}{6} + k_2$. Deci soluţia generală a ecuaţiei (3.6.6) este

$$x(t) = \frac{t^4}{10} + k_2t^2 - \frac{t}{2} + \frac{k_1}{t}, \quad k_1, k_2 \in \mathbf{R}, t > 0.$$

4

Probleme la limite pentru ecuaţii diferenţiale

Alături de problema Cauchy, un alt tip de probleme ce se formulează asupra unei ecuaţii diferenţiale ordinare sunt problemele la limite, adică problemele în care se cunosc anumite informaţii despre soluţii relativ la frontiera domeniului în care sunt definite. În acest capitol prezentăm principalele concepte şi rezultate din teoria generală a problemelor la limite pentru ecuaţii diferenţiale, concentrându-ne pe formula de reprezentare a soluţiilor problemelor la limite prin intermediul funcţiei Green. În prima secţiune este prezentată problema bilocală asociată unei ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea neliniare. Secţiunea a doua este consacrată studiului problemelor la limite asociate unei ecuaţii diferenţiale afine de ordinul al doilea şi formulele de reprezentare corespunzătoare obţinute cu ajutorul funcţiei Green. Ultima secţiune este dedicată prezentării problemelor la limite care se pot asocia unei ecuaţii diferenţiale afine de ordinul n. La fel ca în cazul $n = 2$, atunci când problema are soluţie pentru orice termen afin, se poate obţine o expresie a acestei soluţii prin intermediul funcţiei Green. Rezultatele se pot extinde la probleme la limite asociate unei ecuaţii afine pe $\mathbf{R}^n$.

4.1 Probleme bilocale

Considerăm mai întâi următoarea problemă la limită asociată unei ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea.

Fie $f(.,.,.) : [a,b] \times D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^2$ care defineşte ecuaţia diferenţială

$$x'' = f(t, x, x'). \tag{4.1.1}$$

Se cer soluţiile $x(.) : [a,b] \to \mathbf{R}$ ale acestei ecuaţii care satisfac următoarele condiţii

$$x(a) = A, \quad x(b) = B. \tag{4.1.2}$$

Această problemă se numeşte problema lui Dirichlet relativă la ecuaţia diferenţială (4.1.1).

Integrând succesiv în egalitatea (4.1.1) şi punând condiţiile (4.1.2) este uşor de văzut că dacă $x(.)$ este soluţie a problemei (4.1.1)-(4.1.2), atunci $x(.)$ verifică ecuaţia integrodiferenţială

$$x(t) = \frac{t-a}{b-a}B + \frac{b-t}{b-a}A - \int_a^b G(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds, \tag{4.1.3}$$

unde

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & \text{dacă} \quad s \le t, \\ \frac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & \text{dacă} \quad t \le s. \end{cases}$$

Reciproc, orice soluţie $x(.) : [a,b] \to \mathbf{R}$ de clasă C^1 a ecuaţiei (4.1.3) este o soluţie de clasă C^2 a problemei (4.1.1)-(4.1.2).

În particular, dacă $f(.,.,.)$ este continuă şi nu depinde de variabilele doi şi trei, formula (4.1.3) dă expresia soluţiei unice a problemei respective.

Funcţia $G(.,.)$ se numeşte *funcţia Green* corespunzătoare problemei (4.1.1)-(4.1.2).

Din definiţia lui $G(.,.)$ rezultă că

a) $G(.,.)$ este continuă pe $[a,b] \times [a,b]$,

b) $G(t,s) \ge 0$ $\forall t, s \in [a,b]$,

c) $G(t,s) = G(s,t)$ $\forall t, s \in [a,b]$.

Problema bilocală relativă la ecuaţia (4.1.1) constă în a determina soluţiile ecuaţiei (4.1.1) care satisfac condiţii de forma

$$\begin{cases} \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) + \beta_{11}x(b) + \beta_{12}x'(b) = \gamma_1, \\ \alpha_{21}x(a) + \alpha_{22}x'(a) + \beta_{21}x(b) + \beta_{22}x'(b) = \gamma_2, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

unde $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i,\ i, j = 1, 2$ sunt numere reale.

Notăm câteva cazuri particulare importante ale condiţiilor (4.1.4).

a) Condiţia lui Dirichlet

$$\begin{cases} x(a) = \gamma_1, \\ x(b) = \gamma_2. \end{cases}$$

b) Condiţia lui Neumann

$$\begin{cases} x'(a) = \gamma_1, \\ x'(b) = \gamma_2. \end{cases}$$

c) Condiţia mixtă

$$\begin{cases} \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) = \gamma_1, \\ \beta_{21}x(b) + \beta_{22}x'(b) = \gamma_2. \end{cases}$$

d) Condiţia de periodicitate

$$\begin{cases} x(a) - x(b) = 0, \\ x'(a) - x'(b) = 0. \end{cases}$$

Revenind la problema (4.1.1)-(4.1.2), pentru a simplifica lucruriile, vom studia în continuare problema

$$x'' = f(t, x), \tag{4.1.5}$$

$$x(a) = x(b) = 0. \tag{4.1.6}$$

Această problemă este echivalentă cu ecuaţia integrală de tip Fredholm

$$x(t) = -\int_a^b G(t, s)f(s, x(s))ds. \tag{4.1.7}$$

Pentru un studiu amănunţit al ecuaţiilor integrale cititorul poate consulta lucrarea [10]. Reamintim că dacă se consideră ecuaţia integrală Fredholm de speţa a doua

$$\varphi(t) = g(t) + \int_a^b K(t, s, \varphi(s))ds, \quad t \in [a, b], \tag{4.1.8}$$

atunci funcţia $K(.,.,.) : [a, b] \times [a, b] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ se numeşte ,,nucleu mic" pentru ecuaţia (4.1.8) dacă este continuă în raport cu toate argumentele şi există $L > 0$ astfel încât

$$||K(t, s, x) - K(t, s, y)|| \le L||x - y|| \quad \forall t, s \in [a, b], x, y \in \mathbf{R}^n, \tag{4.1.9}$$

$$0 < L < \frac{1}{b-a}. \tag{4.1.10}$$

În aceste condiţii se poate obţine un rezultat privitor la existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor integrale Fredholm de speţa a doua cu nucleu mic.

Teorema 4.1.1. *Fie $g(.) : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ continuă şi $K(.,.,.) : [a, b] \times [a, b] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un nucleu mic care definesc ecuaţia (4.1.8).*

Atunci ecuaţia (4.1.8) are o soluţie unică $\varphi(.) \in C([a, b], \mathbf{R}^n)$.

Demonstraţie. Demonstraţia este o aplicaţie a Teoremei de punct fix a lui Banach. Reamintim că Teorema de punct fix a lui Banach, cunoscută şi sub denumirea de Principiul contracţiei, afirmă că dacă X este un spaţiu metric complet şi $f : X \to X$ este o contracţie (i.e., o funcţie Lipschitz pe X cu constanta Lipschitz strict mai mică decât 1) atunci f admite un punct fix, adică un $x \in X$ astfel încât $f(x) = x$.

Considerăm aplicaţia $T : C([a, b], \mathbf{R}^n) \to C([a, b], \mathbf{R}^n)$ definită prin

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))ds + g(t)$$

şi observăm că T este corect definită, iar mulţimea soluţiilor ecuaţiei (4.1.8) coincide cu mulţimea punctelor fixe ale lui T.

Deoarece spaţiul $C([a, b], \mathbf{R}^n)$ înzestrat cu norma $||x(.)||_C = \sup_{t\in[a,b]} ||x(t)||$, $x(.) \in C([a, b], \mathbf{R}^n)$ este un spaţiu Banach, pentru a aplica Teorema de punct fix a lui Banach rămâne de verificat condiţia de contracţie pentru T. Folosind (4.1.9) avem

$$||(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)|| \leq || \int_a^b K(t,s,x_1(s))ds - \int_a^b K(t,s,x_2(s))ds|| \leq$$

$$\int_a^b ||K(t,s,x_1(s)) - K(t,s,x_2(s))||ds \leq \int_a^b L||x_1(s) - x_2(s)||ds \leq$$
$$\leq L(b-a)||x_1 - x_2||_C.$$

Din (4.1.10) rezultă că aplicaţia T este contracţie şi afirmaţia din enunţ rezultă din Principiul contracţiei. □

Aplicând Teorema 4.1.1 problemei (4.1.5)-(4.1.6) se obţine un rezultat privitor la existenţa şi unicitatea soluţiilor acestei probleme.

Teorema 4.1.2. *Presupunem că $f(.,.) : [a,b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este continuă, există $L > 0$ astfel încât*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \quad \forall t \in [a,b], x, y \in \mathbf{R}$$

şi $(\max_{t\in[a,b]} \int_a^b G(t,s)ds)L < 1$.

Atunci problema (4.1.5)-(4.1.6) are o soluţie unică $x(.) \in C([a,b], \mathbf{R}^n)$.

4.2 Probleme la limite pentru ecuaţii diferenţiale afine de ordinul al doilea

În continuare vom considera probleme la limite relative la o ecuaţie diferenţială afină de ordinul al doilea de forma

$$L(x) = p(t)x'' + q(t)x' + r(t)x = f(t), \tag{4.2.1}$$

$$\begin{aligned} l_1(x) = \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) + \alpha_{13}x(b) + \alpha_{14}x'(b) = \gamma_1, \\ l_2(x) = \alpha_{21}x(a) + \alpha_{22}x'(a) + \alpha_{23}x(b) + \alpha_{24}x'(b) = \gamma_2, \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

unde $p(.), q(.), r(.), f(.) : [a,b] \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue, $\alpha_{ij}, \gamma_i \in \mathbf{R}$. Presupunem că rangul matricii $(\alpha_{ij})_1^4$ este 2 şi $p(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$.

Problema care se pune este aceea de a determina funcţiile $x(.) : [a,b] \to \mathbf{R}$ de clasă C^2 soluţii ale ecuaţiei (4.2.1) care satisfac condiţiile (4.2.2).

Condiţiile (4.1.1) se numesc *condiţii la limite*, iar problema formulată mai sus se numeşte *problemă la limită*. Dacă în (4.2.2) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, ele se numesc *condiţii la limite omogene*; dacă în plus $f(.) = 0$, problema la limite se numeşte *problemă omogenă*.

Dacă se ataşează problemei (4.2.1)-(4.2.2) problema omogenă corespunzătoare

$$L(x) = 0, \tag{4.2.3}$$

$$l_1(x) = 0, \quad l_2(x) = 0, \tag{4.2.4}$$

atunci problema (4.2.1)-(4.2.2) are cel mult o soluţie dacă şi numai dacă problema omogenă corespunzătoare (4.2.3)-(4.2.4) admite numai soluţia banală $x(.) = 0$.

Într-adevăr, dacă am presupune că problema (4.2.1)-(4.2.2) ar avea două soluţii $x_1(.), x_2(.)$, atunci diferenţa lor $x(.) = x_1(.) - x_2(.)$ satisface ecuaţia (4.2.3) şi condiţiile (4.2.4). Însă cum problema (4.2.3)-(4.2.4) admite numai soluţia banală, rezultă că problema (4.2.1)-(4.2.2) are soluţie unică.

Aplicaţiile $L : C^2([a,b], \mathbf{R}) \to C([a,b], \mathbf{R})$, $l_i : C^2([a,b], \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ sunt liniare, iar mulţimea soluţiilor problemei (4.2.3)-(4.2.4) este

$$Ker(L) \cap Ker(l_1) \cap Ker(l_2),$$

ca atare, formează un subspaţiu liniar al lui $C^2([a,b], \mathbf{R})$. Unicitatea revine la faptul că

$$Ker(L) \cap Ker(l_1) \cap Ker(l_2) = \{0\}.$$

Am văzut în Capitolul 3 că $dim(Ker(L)) = 2$ şi, deci, orice $x \in Ker(L)$ se scrie sub forma $x = c_1 x_1 + c_2 x_2$, unde $\{x_1, x_2\}$ este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei (4.2.1) şi $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Din condiţia ca $x \in Ker(l_1) \cap Ker(l_2)$ se obţine sistemul

$$\begin{cases} c_1 l_1(x_1) + c_2 l_1(x_2) = 0, \\ c_1 l_2(x_1) + c_2 l_2(x_2) = 0. \end{cases}$$

Rezolvabilitatea acestui sistem este caracterizată de rangul matricii

$$l(x) = \begin{pmatrix} l_1(x_1) & l_1(x_2) \\ l_2(x_1) & l_2(x_2) \end{pmatrix}.$$

Dacă $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$ este un alt sistem fundamental de soluţii şi $\tilde{x} = Tx$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $x = (x_1, x_2)$ atunci $l(\tilde{x}) = Tl(x)$ şi deci rangul matricii l nu depinde de alegerea bazei in $Ker(L)$. Ca atare, rangul matricii l se numeşte *rangul problemei la limită.*

Considerăm în continuare restricţia lui L la $Ker(l_1) \cap Ker(l_2)$. Dacă rangul problemei (4.2.1)-(4.2.2) este 2, atunci această restricţie este injectivă şi putem, deci, să vorbim de aplicaţia inversă a lui $L : Ker(l_1) \cap Ker(l_2) \to C([a, b], \mathbf{R})$. Vom vedea, în cele ce urmează, cum se realizează construcţia lui L^{-1}; de asemenea, se va constata că L^{-1} este un operator integral şi nucleul acestui operator se va numi funcţia Green a problemei la limite date.

Definiţia 4.2.1. Prin funcţia Green a problemei (4.2.1)-(4.2.2) se înţelege o funcţie $G(.,.) : [a, b] \times [a, b] \to \mathbf{R}$ care satisface următoarele condiţii

a) $G(.,.)$ este continuă,

b) Pentru orice $s \in [a, b]$, funcţia $G(., s) \in C^2([a, s) \cup (s, b], \mathbf{R})$ şi $\frac{\partial}{\partial t}G(s + 0, s) - \frac{\partial}{\partial t}G(s - 0, s) = -\frac{1}{p(s)}$,

c) Funcţia $G(., s)$ este soluţie a ecuaţiei $L(x) = 0$ pe mulţimea $[a, b]\backslash\{s\}$ şi satisface condiţiile le limite omogene $l_1(x) = l_2(x) = 0$.

Următorul rezultat ne asigură existenţa şi unicitatea funcţiei Green.

Teorema 4.2.2. *Dacă problema la limită omogenă*

$$L(x) = 0, \quad l_1(x) = 0, \quad l_2(x) = 0$$

are doar soluţia banală, atunci funcţia Green există şi este unică.

Demonstraţie. Fie $\{x_1(.), x_2(.)\}$ un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei $L(x) = 0$. Din definiţia funcţiei Green, trebuie să avem

$$G(t, s) = \begin{cases} a_1x_1(t) + a_2x_2(t), & \text{dacă} \quad a \le t \le s \le b, \\ b_1x_1(t) + b_2x_2(t), & \text{dacă} \quad a \le s \le t \le b. \end{cases}$$

Din condiţiile a) şi b) obţinem

$$\begin{cases} c_1x_1(s) + c_2x_2(s) = 0, \\ c_1x_1'(s) + c_2x_2'(s) = -\frac{1}{p(s)}, \end{cases}$$

unde $c_i = b_i - a_i$, $i = 1, 2$. Ca atare, c_1 şi c_2 sunt determinate în mod unic.

Pentru determinarea lui a_i şi b_i folosim proprietatea c). Din $l_1(G(., s)) = 0$ şi $l_2(G(., s)) = 0$ deducem sistemul

$$\begin{cases} b_1l_1(x_1) + b_2l_1(x_2) = (c_1 + c_2)\alpha_{11}x_1(a) + (c_1 + c_2)\alpha_{12}x_1'(a), \\ b_1l_2(x_1) + b_2l_2(x_2) = (c_1 + c_2)\alpha_{21}x_1(a) + (c_1 + c_2)\alpha_{22}x_1'(a). \end{cases}$$

şi cum rangul problemei este 2, rezultă că b_1 şi b_2 sunt determinaţi în mod unic şi, deci, a_1 şi a_2 sunt determinaţi în mod unic. □

Soluţia problemei la limită admite o formulă de reprezentare cu ajutorul funcţiei Green, după cum se poate vedea în rezultatul următor.

Teorema 4.2.3. *Dacă problema omogenă (4.2.3)-(4.2.4) are numai soluţia banală, atunci problema la limite*

$$L(x) = f(t), \tag{4.2.5}$$

$$l_1(x) = 0, \quad l_2(x) = 0, \tag{4.2.6}$$

are o soluţie unică pentru orice $f(.) : [a, b] \to \mathbf{R}$ continuă. Mai mult, această soluţie este dată de

$$x(t) = -\int_a^b G(t, s)f(s)ds. \tag{4.2.7}$$

Demonstraţie. Arătăm că funcţia $x(.)$ definită în (4.2.7) este soluţie a problemei (4.2.5)-(4.2.6). Pentru aceasta calculăm derivatele lui $x(.)$. Avem

$$x(t) = -\int_a^t G(t, s)f(s)ds - \int_t^b G(t, s)f(s)ds$$

şi derivăm, ţinând cont de condiţia a) din definiţia funcţiei Green. Obţinem

$$\begin{aligned} x'(t) = -\textstyle\int_a^t \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)ds - G(t + 0, t)f(t) - \\ \textstyle\int_t^b \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)ds + G(t - 0, t)f(t) = -\int_a^b \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)ds. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Scriind pe $x'(.)$ sub forma

$$x'(t) = -\int_a^t \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)ds - \int_t^b \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)ds$$

şi ţinând cont de condiţia b) din definiţia funcţiei Green găsim

$$x''(t) = -\int_a^t \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s)ds - \frac{\partial G(t+0,t)}{\partial t} f(t) - \int_t^b \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s)ds$$

$$+\frac{\partial G(t-0,t)}{\partial t} f(t) = -\int_a^b \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s)ds + \frac{1}{p(t)} f(t).$$

Înlocuind în ecuaţia (4.2.1) se observă că funcţia definită de (4.2.7) este soluţie.

Folosind (4.2.7), (4.2.8) şi proprietatea c) din definiţia funcţiei Green se constată cu uşurinţă că şi condiţiile la limite sunt satisfăcute.

Prin urmare, L^{-1}, aplicaţia inversă a restricţiei lui L la $Ker(l_1) \cap Ker(l_2)$ este $L^{-1} : C([a,b], \mathbf{R}) \to Ker(l_1) \cap Ker(l_2)$, $(L^{-1}f)(t) = -\int_a^b G(t,s)f(s)ds$. $\square$

Teoria prezentată mai înainte se poate extinde şi la probleme neliniare de forma

$$-(r(t)x'(t))' + p(t)x(t) = f(t, x(t), x'(t)), \tag{4.2.9}$$

unde $r(.), p(.) : [a,b] \to \mathbf{R}$, $f(.,.) : [a,b] \times D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^2$.

Presupunând că problema

$$\begin{aligned} &-(r(t)x'(t))' + p(t)x(t) = 0, \\ &l_1(x) = l_2(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

admite numai soluţia banală, atunci funcţia Green $G(.,.)$ a acestei probleme există şi mai mult problema (4.2.9)-(4.2.2) este echivalentă cu ecuaţia integrodiferenţială

$$x(t) = \int_a^b G(t,s) f(s, x(s), x'(s))ds.$$

Un caz particular remarcabil al problemei (4.2.9)-(4.2.2) este cel al problemei Sturm-Liouville.

Fie $r(.), p(.) : [a,b] \to \mathbf{R}$, $r(.)$ de clasă C^1, $r(t) > 0$ $\forall t \in [a,b]$, $p(.)$ continuă, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in [0, \infty)$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ şi $\beta_1 + \beta_2 > 0$.

Se numeşte soluţie a *problemei Sturm-Liouville*

$$-(r(t)x'(t))' + p(t)x(t) = 0, \tag{4.2.11}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 x(a) - \alpha_2 x'(a) = 0,\\ &\beta_1 x(b) - \beta_2 x'(b) = 0 \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

o funcţie $x(.) : [a,b] \to \mathbf{R}$ de clasă C^2 care verifică (4.2.11) şi satisface condiţiile la limită (4.2.12).

Fie $D_L = \{x(.) \in C^2([a,b], \mathbf{R});\quad x(.)$ soluţie a lui $\quad (4.2.12)\}$ şi $L : D_L \to C([a,b], \mathbf{R})$

$$L(x) = -(rx')' + px. \tag{4.2.13}$$

Ca şi mai inainte, existenţa unei solutii pentru problema (4.2.11)-(4.2.12) se va deduce din condiţia $Ker(L) = \{0\}$ prin intermediul construcţiei unei funcţii Green.

Definiţia 4.2.4. Se numeşte funcţia Green a problemei (4.2.11)-(4.2.12) o funcţie $G(.,.) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbf{R}$ care satisface următoarele condiţii

a) $G(.,.)$ este continuă şi este de clasă C^2 pe mulţimile $\{(t,s) \in [a,b] \times [a,b]; 0 \le t \le s \le b\}$, $\{(t,s) \in [a,b] \times [a,b]; 0 \le s \le t \le b\}$ (derivatele parţiale sunt continue la frontieră numai pe direcţii din interiorul celor două triunghiuri),

b) $G(t,s) = G(s,t)$ $\forall t, s \in [a,b]$,

c) Pentru orice $t \in [a,b]$

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t+0, t) - \frac{\partial}{\partial t} G(t-0, t) = -\frac{1}{r(t)},$$

$$\frac{\partial}{\partial s} G(t, t+0) - \frac{\partial}{\partial s} G(t, t-0) = \frac{1}{r(t)},$$

d) $L_t G(, s) = 0$ $\forall t, s \in [a,b]$, $t \ne s$,

e) Pentru orice $s \in [a,b]$

$$\alpha_1 G(a,s) - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} G(a,s) = 0,$$

$$\beta_1 G(b,s) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial t} G(b,s) = 0,$$

f) $x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds$, $t \in [a,b]$ este soluţie a lui (4.2.11)-(4.2.12).

Teorema 4.2.5. *Fie L definit în (4.2.13). Dacă $Ker(L) = 0$ atunci funcţia Green există şi problema (4.2.11)-(4.2.12) are soluţie unică.*

Demonstraţie. Unicitatea este imediată. Într-adevăr dacă x_1, x_2 sunt soluţii ale ecuaţiei $Lx = f$, atunci $L(x_1 - x_2) = 0$, adică $x_1 - x_2 \in Ker(L) = \{0\}$, deci $x_1 = x_2$.

În continuare, demonstraţia are în vedere rezolvarea ecuaţiei (4.2.11) cu ajutorul metodei variaţiei constantelor. Acest lucru va conduce la construcţia funcţiei Green.

Fie $\varphi_1(.)$ o soluţie neidentic nulă a problemei

$$Lx = 0, \quad \alpha_1 x(a) - \alpha_2 x'(a) = 0 \tag{4.2.14}$$

şi $\varphi_2(.)$ o soluţie neidentic nulă a problemei

$$Lx = 0, \quad \beta_1 x(b) - \beta_2 x'(b) = 0. \tag{4.2.15}$$

Teorema 3.4.2 ne asigură ca există $\varphi_1(.)$, $\varphi_2(.)$ de clasă C^2 pe [a,b] neidentic nule care satisfac (4.2.14), respectiv (4.2.15). Mai mult, $\varphi_1(.)$ şi $\varphi_2(.)$ sunt liniar independente. Într-adevăr dacă presupunem că $\varphi_2 = c\varphi_1$, va rezulta $L\varphi_2 = 0$, deci $\varphi_2 \in D_L$, prin urmare $\varphi_2 = 0$, adică o contradicţie.

Fie $W(.)$ wronskianul acestor solutii. Din Teorema 3.4.7 (Teorema lui Liouville) avem

$$W(t) = W(a)e^{-\int_a^t \frac{r'(s)}{r(s)}ds} = \frac{r(a)}{r(t)} W(a), \quad \forall t \in [a,b]. \tag{4.2.16}$$

Căutăm, aşadar, $x \in D_L$ o soluţie a ecuaţiei $Lx = f$ cu metoda variaţiei constantelor, adică $x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$, $t \in [a,b]$. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} c_1'(t)\varphi_1(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) = 0, \\ c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) = -\frac{f(t)}{r(t)} \end{cases}$$

şi ţinând cont de (4.2.16) găsim

$$c_1'(t) = \frac{f(t)\varphi_2(t)}{r(a)W(a)}, \quad c_2'(t) = -\frac{f(t)\varphi_1(t)}{r(a)W(a)}. \tag{4.2.17}$$

Cum $x(.)$ trebuie să verifice (4.2.12), folosind şi (4.2.14) găsim

$$0 = \alpha_1 x(a) - \alpha_2 x'(a) = c_2(a)[\alpha_1\varphi_2(a) - \alpha_2\varphi_2'(a)],$$

şi cum $\varphi_2(.)$ nu verifică prima egalitate din (4.2.12), fiindcă $Ker(L) = \{0\}$, rezultă că $c_2(a) = 0$.

La fel se găseşte că

$$0 = \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = c_1(b)[\beta_1\varphi_1(b) - \beta_2\varphi_1'(b)], \quad \text{şi} \quad c_1(b) = 0.$$

Din (4.2.17) deducem că

$$c_1(t) = -\frac{\int_t^b f(s)\varphi_2(s)ds}{r(a)W(a)}, \quad c_2(t) = -\frac{\int_a^t f(s)\varphi_1(s)ds}{r(a)W(a)}.$$

Ca atare,

$$x(t) = -\frac{1}{r(a)W(a)}[\varphi_2(t)\int_a^t f(s)\varphi_1(s)ds + \varphi_1(t)\int_t^b f(s)\varphi_2(s)ds]. \tag{4.2.18}$$

Definim

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{1}{r(a)W(a)}\varphi_1(t)\varphi_2(s), & \text{dacă} \quad a \le t \le s \le b, \\ -\frac{1}{r(a)W(a)}\varphi_1(s)\varphi_2(t), & \text{dacă} \quad a \le s \le t \le b \end{cases} \tag{4.2.19}$$

şi rămân de verificat proprietăţile din Definiţia 4.2.4. Proprietăţile a) şi b) sunt evidente. Pentru c) avem

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t+0,t) = \lim_{s\to t, s>t}\frac{G(s,t)-G(t,t)}{s-t} =$$

$$-\frac{1}{r(a)W(a)}\lim_{s\to t,s>t}\frac{\varphi_1(t)\varphi_2(s)-\varphi_1(t)\varphi_2(t)}{s-t} = -\frac{1}{r(a)W(a)}\varphi_1(t)\varphi_2'(t).$$

Analog $\frac{\partial}{\partial t}G(t-0,t) = -\frac{1}{r(a)W(a)}\varphi_1'(t)\varphi_2(t)$ şi din (4.2.16) obţinem

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t+0,t) - \frac{\partial}{\partial t}G(t-0,t) = -\frac{W(t)}{r(a)W(a)} = -\frac{1}{r(t)}.$$

Analog se obţine a doua relaţie din c).

Cum $L_tG(t,s) = -\frac{1}{r(a)W(a)}\varphi_2(s)(L\varphi_1)(t) = 0$ pentru $t < s$ şi $L_tG(t,s) = -\frac{1}{r(a)W(a)}\varphi_1(s)(L\varphi_2)(t) = 0$ pentru $t > s$ rezultă d). Condiţia e) este o consecinţă imediată a lui (4.2.14) şi (4.2.15), iar f) este o rescriere a lui (4.2.18). □

Exemplul 4.2.6. Să se rezolve problema la limită

$$\begin{cases} x'' - 9x = t, \quad t \in [0,1], \\ x'(0) + 2x(0) = 0, \quad x'(1) - 2x(1) = 0. \end{cases}$$

Considerăm ecuaţia liniară asociată $\overline{x}'' - 9\overline{x} = 0$, care are soluţia generală $\overline{x}(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Dacă se pun condiţile la limite omogene $\overline{x}'(0) + 2\overline{x}(0) = 0$, $\overline{x}'(1) - 2\overline{x}(1) = 0$ se găşeşte $c_1 = c_2 = 0$; adică problema la limită omogenă are doar soluţia banală. Aplicăm Teorema 4.2.2 şi deducem că funcţia Green a problemei există şi este unică.

Urmând demonstraţia Teoremei 4.2.5, determinăm două soluţii nebanale $\overline{x}_1(.), \overline{x}_2(.)$ ale ecuaţiei liniare asociate astfel încât una din aceste soluţii să verifice $\overline{x}_1'(0) + 2\overline{x}_1(0) = 0$, iar a doua soluţie să verifice $\overline{x}_2'(1) - 2\overline{x}_2(1) = 0$. Cum avem soluţia generala de forma $c_1e^{3t} + c_2e^{-3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ găsim in primul caz $5c_1 - c_2 = 0$, iar in al doilea $c_1e^3 - 5c_2e^{-3} = 0$.

Alegem, de exemplu, soluţiile

$$\begin{cases} \overline{x}_1(t) = e^{3t} + 5e^{-3t}, \\ \overline{x}_2(t) = e^{-3t} + 5e^{3(t-2)}. \end{cases}$$

Wronskianul acestor soluţii este $W(t) = -6$ şi din (4.2.19) deducem funcţia Green

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{1}{6}(e^{3s} + 5e^{-3s})(e^{-3t} + 5e^{3(t-2)}), & \text{dacă } 0 \le s \le t \le 1, \\ -\frac{1}{6}(e^{3t} + 5e^{-3t})(e^{-3s} + 5e^{3(s-2)}), & \text{dacă } 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

Prin urmare, unica soluţie a problemei este $x(t) = -\int_0^1 G(t,s)sds$, $t \in [0,1]$.

4.3 Probleme la limite pentru ecuaţii diferenţiale afine de ordin superior

În cele ce urmează, $M_{ij}, N_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = 1, ..., r$, $j = 1, ..., n$, $a_k(.), f(.) : [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue şi $a_0(t) \neq 0$ $\forall t \in [a, b]$.

Problema găsirii unei soluţii a ecuaţiei

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_n(t)x = f(t) \tag{4.3.1}$$

care verifică

$$\sum_{j=1}^{n}[M_{ij}x^{(j-1)}(a) + N_{ij}x^{(j-1)}(b)] = 0, \quad i = 1, ..., r \tag{4.3.2}$$

se numeşte *problemă la limită* asociată ecuaţiei (4.3.1).

Problema la limită (4.3.1)-(4.3.2) poate fi rezolvată urmând abordarea, prezentată în secţiunea anterioară, din cazul $n = 2$.

Se consideră $\{\overline{\varphi}_1(.), \overline{\varphi}_2(.), ..., \overline{\varphi}_n(.)\}$ un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei

$$\overline{x}^{(n)} + b_1(t)\overline{x}^{(n-1)} + ... + b_n(t)\overline{x} = 0,$$

unde $b_j(t) = \frac{a_j(t)}{a_0(t)}$, $j = 1, ..., n$, $t \in [a, b]$ şi fie $\varphi(.)$ o soluţie a ecuaţiei

$$x^{(n)} + b_1(t)x^{(n-1)} + ... + b_n(t)x = g(t),$$

unde $g(t) = \frac{f(t)}{a_0(t)}$. Din Capitolul 3, ştim că $\varphi(.)$ poate fi găsită cu metoda variaţiei constantelor. Mai mult, orice soluţie a ecuaţiei (4.3.1) se poate scrie sub forma $x(t) = \varphi(t) + c_1\overline{\varphi}_1(t) + ... + c_n\overline{\varphi}_n(t)$, unde $c_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, ..., n$. Înlocuind această expresie a lui $x(.)$ în (4.3.2) se obţine un sistem de r ecuaţii liniare neomogene în necunoscutele $c_1, ..., c_n$. Este bine ştiut că acest sistem nu are întotdeauna soluţii. Ca atare, problema (4.3.1)-(4.3.2) nu va avea soluţii în orice situaţie.

Această abordare, deşi elementară, are dezavantajul că nu permite obţinerea simplă şi clară a condiţiilor de existenţă pentru soluţiile problemei la limită. Există, însă, alte abordări care permit acest lucru. Vom studia, în continuare, cazul în care problema (4.3.1)-(4.3.2) are o unică soluţie pentru orice funcţie continuă $f(.)$ şi vom exprima soluţia cu ajutorul unei funcţii Green.

Considerăm aplicaţia $l : C^{(n)}([a,b],\mathbf{R}) \to C([a,b],\mathbf{R})$

$$l(x)(t) = a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + ... + a_n(t)x(t).$$

Dacă $x(.) \in C^{(n)}([a,b],\mathbf{R})$ şi $t \in [a,b]$, notăm $X(t) = col(x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t))$; cu M şi N notăm matricile având r linii şi n coloane $(M_{ij})_{i=\overline{1,r},j=\overline{1,n}}$, respectiv $(N_{ij})_{i=\overline{1,r},j=\overline{1,n}}$.

Prin urmare, ecuaţia (4.3.1) se poate rescrie sub forma

$$l(x) = f, \tag{4.3.3}$$

iar condiţiile la limite (4.3.2) se pot rescrie sub forma

$$MX(a) + NX(b) = 0. \tag{4.3.4}$$

Dacă notăm $Y := \{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2; M\alpha + N\beta = 0\}$, atunci (4.3.4) se scrie sub forma $\begin{pmatrix} X(\alpha) \\ X(\beta) \end{pmatrix} \in Y$.

În fine, dacă introducem notaţia $\tilde{X} = \begin{pmatrix} X(\alpha) \\ X(\beta) \end{pmatrix}$, vom studia problema $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$, în locul problemei (4.3.3)-(4.3.4).

Fie, de asemenea, $D_L := \{x(.) \in C^{(n)}([a,b],\mathbf{R});\quad \tilde{X} \in Y\}$. Aplicaţia $L : D_L \to C([a,b],\mathbf{R})$ se defineşte ca restricţia aplicaţiei l la D_L, i.e., $L = l_{|D_L}$. Este clar că orice soluţie a problemei $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$ este soluţie a ecuaţiei $L(x) = f$ şi reciproc.

Teorema 4.3.1. *Problema $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$ are o unică soluţie pentru orice $f(.) \in C([a,b],\mathbf{R})$ dacă şi numai dacă problema $l(x) = 0$, $\tilde{X} \in Y$ are numai soluţia banală şi $dim(Y) = n$.*

Demonstraţia Teoremei 4.3.7 poate fii consultată în [7].

În continuare, ca şi în secţiunea precedentă, în ipoteza că problema $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$ are o unică soluţie pentru orice $f(.) \in C([a,b],\mathbf{R})$, vom stabili o formulă pentru această soluţie asemănătoare cu formula care apare în metoda variaţiei constantelor pentru ecuaţii afine.

Fie $D = [a,b] \times [a,b]$ şi $\Delta = \{(t,t);\ t \in [a,b]\}$

Definiţia 4.3.2. Presupunem că problema $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$ are o unică soluţie pentru orice $f(.) \in C([a,b],\mathbf{R})$. O funcţie $G(.,.) : D \to \mathbf{R}$ se numeşte *funcţie Green* a problemei $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$ dacă satisface următoarele condiţii.

a) Dacă $n = 1$, $G(.,.)$ este continuă şi mărginită pe $D \backslash \Delta$,

b) Dacă $n > 1$, $G(.,.)$ este continuă,

c) Pentru orice $f(.) \in C([a,b],\mathbf{R})$, funcţia $x(.) : [a,b] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds \tag{4.3.5}$$

este soluţie a problemei $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$.

Notăm faptul că atunci când funcţia Green există, formula (4.3.5) ne dă reprezentarea integrală a aplicaţiei L^{-1}.

Funcţia Green a problemei $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$ este determinată în mod unic, în următorul sens: Dacă $G(.,.)$ şi $H(.,.)$ sunt funcţii Green ale problemei $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$ atunci $G(t,s) = H(t,s)$ $\forall (t,s) \in D \backslash \Delta$ dacă $n = 1$ şi $G(t,s) = H(t,s)$ $\forall (t,s) \in D$ dacă $n > 1$.

Teorema 4.3.3. *Funcţia Green a problemei $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$ există.*

Demonstraţie. Din Propoziţia 2.1.4, funcţia $x(.)$ este soluţie a ecuaţiei $l(x) = f$ dacă şi numai dacă $X(.) = (x(.), x'(.), ..., x^{(n-1)}(.))$ este soluţie a ecuaţiei

$$X' = A(t)X + \tilde{f}(t), \tag{4.3.6}$$

unde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ -b_n(t) & -b_{n-1}(t) & ... & -b_1(t) \end{pmatrix}, \ \tilde{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Ca atare, căutăm o soluţie $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ .. \\ z_n \end{pmatrix}$ a ecuaţiei (4.3.6) astfel încât funcţia $x(.) = z_1(.)$ este soluţie a problemei $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$.

Fie $U(.)$ o matrice fundamentală de soluţii a ecuaţiei $X' = A(t)X$ astfel încât $U(a) = I_n$. Din Corolarul 3.3.8 avem

$$z(t) = U(t)y + \int_a^t U(t)U^{-1}(s)\tilde{f}(s)ds. \tag{4.3.7}$$

Urmărim să găsim $y \in \mathbf{R}^n$ astfel încât funcţia $x(.) = z_1(.)$ să satisfacă condiţia $\tilde{X} \in Y$, i.e., (4.3.4).

Presupunerea că problema $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$ are o unică soluţie pentru orice funcţie continuă $f(.)$ împreună cu Teorema 4.3.1 implică faptul că matricea $M + NU(b)$ este nesingulară; aşadar

$$y = \int_a^b [M + NU(b)]^{-1}NU(b)U^{-1}(s)f(s)ds. \tag{4.3.8}$$

Notăm cu $v(s)$ ultima coloană a matricii $[M + NU(b)]^{-1}NU(b)U^{-1}(s)$ $a_0^{-1}(s)$ şi cu $w(t, s)$ ultima coloană a matricii $U(t)U^{-1}(s)a_0^{-1}(s)$. Cum doar ultima componentă a vectorului $b(t)$ poate diferi de 0, (4.3.8) implică că $y = \int_a^b v(s)\varphi(s)ds$ şi din (4.3.7) obţinem

$$z(t) = \int_a^b U(t)v(s)\varphi(s)ds + \int_a^t w(t, s)\varphi(s)ds. \tag{4.3.9}$$

Fie $r(t, s)$ prima componentă a vectorului $U(t)v(s)$ şi $w_1(t, s)$ prima componentă a vectorului $w(t, s)$. Definim

$$G(t, s) = \begin{cases} r(t, s) + w_1(t, s), & \text{dacă} \quad a \le s \le t \le b, \\ r(t, s), & \text{dacă} \quad a \le t \le s \le b. \end{cases}$$

Funcţia $x(.)$ definită în (4.3.5) este soluţie a problemei $l(x) = f$, $\tilde{X} \in Y$. Mai mult, condiţia a) din Definiţia 4.3.2 este evident satisfăcută. Dacă $n > 1$; cum $U(t)U^{-1}(t) = I_n$, $w(t, t) = col(0, 0, ..., a_0^{-1}(t))$, $w_1(t, t) = 0$ dacă $t \in [a, b]$ şi condiţia b) este satisfăcută. □

Observaţia 4.3.4. Rezultatele anterioare se transpun cu uşurinţă la probleme la limită pentru ecuaţii afine pe $\mathbf{R}^n$.

Problema la limită pentru o ecuaţie afină pe $\mathbf{R}^n$ este de forma

$$A(t)x' + B(t)x = f(t), \tag{4.3.10}$$

$$\tilde{x} \in \hat{X}, \tag{4.3.11}$$

unde următoarele ipoteze sunt verificate: $A(.) : [a,b] \to M_n(\mathbf{R})$ este de clasă C^1, $A(t)$ este nesingulară $\forall t \in [a,b]$, $B(.) : [a,b] \to M_n(\mathbf{R})$, $f(.) : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ sunt continue şi $\hat{X} \subset \mathbf{R}^{2n}$ este un subspaţiu liniar.

Pentru $x(.) : [a,b] \to \mathbf{R}^n$, am notat $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x(\alpha) \\ x(\beta) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2n}$.

Abordarea problemei (4.3.10)-(4.3.11) este similară cu cea a problemei (4.3.1)-(4.3.2). Se consideră aplicaţia $l_1 : C^1([a,b], \mathbf{R}^n) \to C([a,b], \mathbf{R}^n)$

$$l_1(x)(t) = A(t)x'(t) + B(t)x(t).$$

În cazul în care problema $l_1(x) = f$, $\tilde{x} \in \hat{X}$ are o unică soluţie pentru orice $f(.) \in C([a,b], \mathbf{R}^n)$ se poate introduce definiţia funcţiei Green.

Funcţia $G(.,.) : D \to M_n(\mathbf{R})$ se numeşte *funcţie Green* a problemei $l_1(x) = f$, $\tilde{x} \in \hat{X}$ dacă

a) $G(.,.)$ este continuă şi mărginită pe $D \backslash \Delta$,

b) Pentru orice $f(.) \in C([a,b], \mathbf{R}^n)$, funcţia $x(.) : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ definită prin

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds$$

este soluţie a problemei $l_1(x) = f$, $\tilde{x} \in \hat{X}$.

Se poate demonstra că funcţia Green a problemei $l_1(x) = f$, $\tilde{x} \in \hat{X}$ există şi este unic determinată pe mulţimea $D \backslash \Delta$.

5

Dependenţa soluţiilor de datele iniţiale şi parametrii

Acest capitol este dedicat studiului dependenţei soluţiilor unei probleme Cauchy de datele iniţiale şi parametri. Studiul se va centra pe dependenţa de datele iniţiale, deoarece, după cum se va vedea, studiul dependenţei de parametri se reduce la studiul dependenţei de datele iniţiale. Toate proprietăţile de dependenţa de datele iniţiale şi parametri (continuitate, lipschitzianitate şi diferenţiabilitate) vor fi exprimate cu ajutorul noţiunii de curent maximal; mai precis, prin intermediul proprietăţilor de regularitate ale curentului maximal.

5.1 Continuitatea soluţiilor în raport cu datele iniţiale şi parametrii

În conformitate cu Corolarul 2.3.8 pentru orice câmp vectorial $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuu, definit pe mulţimea deschisă $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ şi care admite proprietatea de unicitate a soluţiilor locale, ecuaţia

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{5.1.1}$$

are o soluţie maximală unică prin fiecare punct $(t_0, x_0) \in D$, $\varphi_{t_0,x_0}(.) : I(t_0, x_0) = (t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0)) \to \mathbf{R}^n$.

Definiţia 5.1.1. Dacă $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie continuă definită pe mulţimea deschisă D astfel încât ecuaţia (5.1.1) admite proprietatea de unicitatea a soluţiilor, atunci se numeşte *curent maximal* al ecuaţiei (5.1.1) (sau al câmpului vectorial $f(.,.)$) funcţia $x_f(.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ definită prin: $\forall(\tau, \xi) \in D$ aplicaţia $x_f(., \tau, \xi) : I(\tau, \xi) = (t^-(\tau, \xi), t^+(\tau, \xi)) \to \mathbf{R}^n$ este soluţia maximală a problemei Cauchy (f, τ, ξ); $D_f = \{(t, \tau, \xi); (\tau, \xi) \in D, t \in I(\tau, \xi)\}$.

În teoria ecuaţiilor diferenţiale există situaţii în care câmpul vectorial variază într-o familie ,,parametrizată" dată. Mai exact, avem următorul concept.

Definiţia 5.1.2. Se numeşte *ecuaţie diferenţială parametrizată* simbolul matematic

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda) \tag{5.1.2}$$

definit de o funcţie $f(.,.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$, care se numeşte *câmp vectorial parametrizat*. Prin soluţie a ecuaţiei (5.1.2) se înţelege o funcţie derivabilă $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $I \subset \mathbf{R}$ interval, pentru care există $\lambda \in pr_3 D$ astfel încât $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale definită de

$$f(.,., \lambda) : D_\lambda := \{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n; \quad (t, x, \lambda) \in D\} \to \mathbf{R}^n.$$

Cu alte cuvinte, pentru fiecare $\lambda \in pr_3 D$, (5.1.2) este o ecuaţie diferenţială obişnuită, adică ecuaţia diferenţială parametrizată (5.1.2) este, de fapt, o familie de ecuaţii diferenţiale de forma (5.1.1). Este clar că soluţiile ecuaţiilor diferenţiale parametrizate (5.1.2) depind nu numai de datele iniţiale ci şi de parametri. Pentru a studia dependenţa soluţiilor maximale de datele iniţiale şi de parametri vom introduce noţiunea de curent maximal parametrizat.

Definiţia 5.1.3. Dacă $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie continuă astfel încât pentru orice $\lambda \in pr_3 D$ ecuaţia diferenţială definită de $f(.,., \lambda)$ admite proprietatea de unicitatea a soluţiilor, atunci se numeşte *curent maximal parametrizat* al ecuaţiei (5.1.2) funcţia $x_f(.,.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ definită prin: $\forall(\tau, \xi, \lambda) \in D$ aplicaţia $x_f(., \tau, \xi, \lambda) : I(\tau, \xi, \lambda) = (t^-(\tau, \xi, \lambda), t^+(\tau, \xi, \lambda)) \to \mathbf{R}^n$ este soluţia maximală a problemei Cauchy $(f(.,.,\lambda),\tau,\xi,\lambda)$; $D_f = \{(t,\tau,\xi,\lambda);$ $(\tau,\xi,\lambda) \in D, t \in I(\tau,\xi,\lambda)\}$.

Ecuaţiile diferenţiale parametrizate se reduc la ecuaţii diferenţiale (neparametrizate) cu ajutorul *ecuaţiei extinse asociate ecuaţiei diferenţiale parametrizare*. Mai precis, dacă $f(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ este un câmp vectorial parametrizat atunci *câmpul vectorial extins* se defineşte ca fiind funcţia $\overline{f}(.,.) : D \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$

$$\overline{f}(t,\overline{x}) = (f(t,x,\lambda), 0_{\mathbf{R}^k}), \quad \forall (t,(x,\lambda)) = (t,\overline{x}) \in D.$$

Ecuaţia diferenţială extinsă asociată ecuaţiei diferenţiale parametrizate (5.1.2) este

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}(t,\overline{x}) \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda) \\ \frac{d\lambda}{dt} = 0_{\mathbf{R}^k}. \end{cases} \tag{5.1.3}$$

Evident ecuaţia (5.1.3) este o ecuaţie diferenţială obişnuită (neparametrizată) pe $\mathbf{R}^{n+k} \sim \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$. Echivalenţa dintre ecuaţiile (5.1.2) şi (5.1.3) este dată de următorul rezultat.

Propoziţia 5.1.4. *Funcţie $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei (5.1.2) dacă şi numai dacă funcţia $\overline{\varphi}(.) : I \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ dată de $\overline{\varphi}(t) := (\varphi(t),\lambda)$, $t \in I$ este soluţie a ecuaţiei (5.1.3).*

Demonstraţie Fie $\overline{\varphi}(.) := (\varphi_1(.),\varphi_2(.))$ soluţie a ecuaţiei (5.1.3). Atunci $\varphi_1'(t) \equiv f(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ şi $\varphi_2'(t) \equiv 0$ deci există $\lambda \in pr_3 D$ astfel încât $\varphi_2(t) \equiv \lambda$ de unde rezultă $\varphi_1'(t) \equiv f(t,\varphi_1(t),\lambda)$, i.e. $\varphi_1(.)$ este soluţie a ecuaţiei (5.1.2). Cum reciproca acestei afirmaţii este imediată propoziţia este demonstrată. □

Rezultatul principal al acestei secţiuni afirmă, că, în ipoteze de tip Cauchy-Lipschitz, soluţiile maximale ale ecuaţiei diferenţiale depind continuu de datele iniţiale.

Teorema 5.1.5. *Fie $D \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia (5.1.1). Fie $x_f(.,.,.) : D_f \to \mathbf{R}^n$ curentul maximal al ecuaţiei (5.1.1). Atunci $D_f \subset \mathbf{R} \times D$ este o mulţime deschisă şi $x_f(.,.,.)$ este o funcţie continuă.*

Pentru a uşura demonstraţia Teoremei 5.1.5 demonstrăm, mai întâi următoarea lemă.

Lema 5.1.6. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia (5.1.1). Atunci $\forall (t_0, x_0) \in D$ $\exists I_1 \times I_0 \times G_0 \in \mathcal{V}(t_0, t_0, x_0)$ şi $\exists!\ y(.,.,.) : I_1 \times I_0 \times G_0 \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\forall (\tau, \xi) \in I_0 \times G_0$ $y(., \tau, \xi) : I_1 \to \mathbf{R}^n$ este soluţie a problemei Cauchy (f, τ, ξ).*

Demonstraţie. Considerăm $(t_0, x_0) \in D$. $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ este o mulţime deschisă, deci există $\delta, \gamma > 0$ astfel încât $D_0 = \overline{B}_\delta(t_0) \times \overline{B}_\gamma(x_0) \subset D$. Pe de altă parte, deoarece $f(.,.)$ este local lipschitziană în raport cu al doilea argument, conform Propozitiei 2.2.6, există $L \geq 0$ astfel încât

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq L||x - y|| \quad \forall (t,x), (t,y) \in D_0.$$

În acelaşi timp, cum $f(.,.)$ este continuă şi $D_0 \subset D$ este compactă există $M \geq 0$ definit de $M = \max_{(t,x)\in D_0} ||f(t,x)||$.

Dacă $M = 0$, atunci $f(t,x) \equiv 0$ şi deci $y(t, \tau, \xi) \equiv \xi$ pe $\overline{B}_\delta(t_0) \times \overline{B}_\delta(t_0) \times \overline{B}_\gamma(x_0)$.

Dacă $M > 0$ definim

$$a = \min\{\delta, \frac{\gamma}{4M}\}, \quad I_1 = \overline{B}_a(t_0), I_0 = \overline{B}_a(t_0), G_0 = \overline{B}_{\frac{\gamma}{2}}(x_0).$$

Definim, în continuare, şirul aproximaţiilor succesive $y_m(.,.,.) : I_1 \times I_0 \times G_0 \to \mathbf{R}^n$ astfel

$$y_0(t, \tau, \xi) = \xi,$$

$$y_m(t, \tau, \xi) = \xi + \int_\tau^t f(s, y_{m-1}(s, \tau, \xi))ds, \quad m \geq 1, (t, \tau, \xi) \in I_1 \times I_0 \times G_0.$$

Vom arăta, prin inducţie după $m \geq 0$, că

a) $y_m(t, \tau, \xi) \in \overline{B}_\gamma(x_0)$, $\forall (t, \tau, \xi) \in I_1 \times I_0 \times G_0$.

b) $y_m(.,.,.)$ este continuă

c) $||y_m(t, \tau, \xi) - y_{m-1}(t, \tau, \xi)|| \leq ML^{m-1}\frac{|t-\tau|^m}{m!}$, $\forall (t, \tau, \xi) \in I_1 \times I_0 \times G_0$, $m \geq 1$.

Demonstraţia prin inducţie a afirmaţiei b) rezultă imediat din definiţia lui $y_m(.,.,.)$ şi din teorema privind continuitatea integralei in raport cu parametri. Pentru afirmaţia a) avem:

$$y_0(t,\tau,\xi) = \xi \in \overline{B}_{\frac{\gamma}{2}}(x_0) \subset \overline{B}_\gamma(x_0).$$

Presupunem a) adevărată pentru $m-1$ şi o demonstrăm pentru m

$$||y_m(t,\tau,\xi) - x_0|| \leq ||\xi - x_0|| + |\int_\tau^t ||f(s, y_{m-1}(s,\tau,\xi))||ds| \leq$$

$$\leq \frac{\gamma}{2} + M|t-\tau| \leq \frac{\gamma}{2} + M.2.a \leq \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma$$

şi a) este demonstrată.

Pentru afirmaţia c), verificăm mai întâi proprietatea pentru $m = 1$

$$||y_1(t,\tau,\xi) - y_0(t,\tau,\xi)|| = ||\int_\tau^t f(s,\xi)ds|| \leq M|t-\tau|.$$

Presupunem c) verificată pentru $m-1$ şi o demonstrăm pentru m. Avem următoarele estimări succesive

$$||y_m(t,\tau,\xi) - y_{m-1}(t,\tau,\xi)|| \leq |\int_\tau^t ||f(s, y_{m-1}(s,\tau,\xi)) -$$

$$f(s, y_{m-2}(s,\tau,\xi))||ds| \leq |\int_\tau^t L||y_{m-1}(s,\tau,\xi) - y_{m-2}(s,\tau,\xi)||ds|$$

$$\leq L|\int_\tau^t ML^{m-2}\frac{|s-\tau|^{m-1}}{(m-1)!}ds| = ML^{m-1}\frac{|t-\tau|^m}{m!}.$$

deci c) este adevărată.

Deoarece din c) putem scrie succesiv pentru orice $m, p \in \mathbf{N}$

$$||y_{m+p}(t,\tau,\xi) - y_m(t,\tau,\xi)|| \leq ||y_{m+p}(t,\tau,\xi) - y_{m+p-1}(t,\tau,\xi)|| +$$

$$||y_{m+p-1}(t,\tau,\xi) - y_{m+p-2}(t,\tau,\xi)|| + ... + ||y_{m+1}(t,\tau,\xi) - y_m(t,\tau,\xi)||$$

$$\leq \sum_{j=1}^p ML^{m+j-1}\frac{|t-\tau|^{m+j}}{(m+j)!} \leq \frac{M}{L}\sum_{j=1}^p \frac{(2aL)^{m+j}}{(m+j)!} \leq \frac{M}{L}(S_{m+p} - S_m),$$

unde

$$S_m := \sum_{j=0}^m \frac{(2aL)^j}{j!} \to e^{2aL},$$

deducem că $y_m(.,.,.)$ este un şir Cauchy uniform pe $I_1 \times I_0 \times G_0$.

Fie, aşadar $y(.,.,.) : I_1 \times I_0 \times G_0 \to \mathbf{R}^n$ continuă, astfel încât $y_m(.,.,.)$ converge uniform la $y(.,.,.)$ pentru $m \to \infty$. Trecând la limită în relaţia de recurenţa care defineşte şirul $y_m(.,.,.)$ obţinem

$$y(t,\tau,\xi) = \xi + \int_\tau^t f(s, y(s,\tau,\xi))ds, \quad (t,\tau,\xi) \in I_1 \times I_0 \times G_0, \quad (5.1.4)$$

adică $y(.,\tau,\xi)$ verifică ecuaţia integrală asociată problemei Cauchy (f,τ,ξ).

Pentru a încheia demonstraţia va mai trebui să demonstrăm unicitatea lui $y(.,.,.)$.

Dacă $\overline{y}(.,.,.) : I_1 \times I_0 \times G_0 \to \mathbf{R}^n$ este o altă funcţie continuă care verifică proprietăţiile din enunţ, aplicând Teorema Cauchy-Lipschitz (mai precis, partea a doua a Teoremei 2.2.9) pentru orice $(\tau,\xi) \in I_0 \times G_0$, $y(.,\tau,\xi) = \overline{y}(.,\tau,\xi)$ pe intervalul compact I_1 şi lema este demonstrată. $\square$

Demonstraţia Teoremei 5.1.5. Fie $(t_0,x_0) \in D$ arbitrar. Notăm

$$I^*(t_0,x_0) = \{t \in I(t_0,x_0); \quad \exists I_1 \times I_0 \times G_0 \in \mathcal{V}(t,t_0,x_0)$$

$$\text{astfel încât} \quad x_f(.,.,.)|_{I_1 \times I_0 \times G_0} \quad \text{este continuă}\}$$

şi să observăm că cele două afirmaţii ale teoremei sunt echivalente (simultan) cu afirmaţia

$$I^*(t_0,x_0) = I(t_0,x_0), \quad \forall (t_0,x_0) \in D. \quad (5.1.5)$$

Cum $I(t_0,x_0) = (t^-(t_0,x_0), t^+(t_0,x_0))$ este mulţime conexă (fiind interval), egalitatea (5.1.5) este implicată de

a) $I^*(t_0,x_0) \neq \emptyset$.

b) $I^*(t_0,x_0) \subset I(t_0,x_0)$ este deschisă.

c) $I^*(t_0,x_0) \subset I(t_0,x_0)$ este relativ închisă (i.e., $\overline{I^*(t_0,x_0)} \cap I(t_0,x_0) = I^*(t_0,x_0)$).

a) În ipoteza noastră putem aplica Lema 5.1.6 şi deducem că există $y(.,.,.) : I_1 \times I_0 \times G_0 \in \mathcal{V}(t_0,t_0,x_0) \to \mathbf{R}^n$ continuă ca în Lema 5.1.6. Din teorema de unicitate globală rezultă că $\forall (\tau,\xi) \in I_0 \times G_0$ avem $x_f(.,\tau,\xi)|_{I_1} = y(.,\tau,\xi)$, deci $I_1 \times I_0 \times G_0 \subset D_f$ şi restricţia $x_f(.,.,.)|_{I_1 \times I_0 \times G_0} = y(.,.,.)$ este continuă, deci $t_0 \in I^*(t_0,x_0)$.

b) Dacă $t_1 \in I^*(t_0, x_0)$ atunci există $I_1 \times I_0 \times G_0 \in \mathcal{V}(t_1, t_0, x_0)$ astfel încât $x_f(.,.,.)|_{I_1 \times I_0 \times G_0}$ este continuă şi deci $int(I_1) \subset I^*(t_0, x_0)$, adică $I^*(t_0, x_0)$ este deschisă.

c) Este suficient să demonstrăm incluziunea

$$\overline{I^*(t_0, x_0)} \cap I(t_0, x_0) \subset I^*(t_0, x_0)$$

pentru că incluziunea reciprocă este evidentă. Fie, deci, $t_1 \in \overline{I^*(t_0, x_0)} \cap I(t_0, x_0)$. În particular, $t_1 \in I(t_0, x_0)$ şi dacă notăm $x_1 = x_f(t_1, t_0, x_0)$ atunci conform Lemei 5.1.6 există $y(.,.,.) : I'_1 \times I'_0 \times G'_0 \in \mathcal{V}(t_1, t_1, x_1) \to \mathbf{R}^n$ continuă ca în Lema 5.1.6.

Vom demonstra că $\exists t_2 \in I^*(t_0, x_0)$ şi $\exists I_0 \times G_0 \in \mathcal{V}(t_0, x_0)$ astfel încât restricţia lui $x_f(t_2, ., .)$ la $I_0 \times G_0$ este continuă şi

$$x_f(t, \tau, \xi) = y(t, t_2, x_f(t_2, \tau, \xi)), \quad \forall (t, \tau, \xi) \in I'_1 \times I_0 \times G_0. \tag{5.1.6}$$

De aici va rezulta că $I'_1 \times I_0 \times G_0 \subset D_f$ şi $x_f(.,.,.)|_{I'_1 \times I_0 \times G_0}$ este continuă; deci $t_1 \in I^*(t_0, x_0)$.

Cum $x_f(., t_0, x_0)$ este continuă, în particular în t_1, pentru $G'_0 \in \mathcal{V}(x_1)$ $\exists I_0 \in \mathcal{V}(t_1)$ astfel încât

$$x_f(I_0, t_0, x_0) \subset G'_0.$$

Pe e altă parte, $t_1 \in \overline{I^*(t_0, x_0)}$. Deci pentru $I'_0 \cap I_0 \in \mathcal{V}(t_1)$ $\exists t_2 \in (I'_0 \cap I_0) \cap I^*(t_0, x_0)$. În particular, $t_2 \in I^*(t_0, x_0)$; deci există $I''_1 \times I''_0 \times G''_0 \in \mathcal{V}(t_2, t_0, x_0)$ în D_f astfel încât $x_f(.,.,.)|_{I''_1 \times I''_0 \times G''_0}$ este continuă. În particular, $x_f(t_2, ., .)|_{I''_0 \times G''_0}$ este continuă. În final micşorăm, eventual, pe $I''_0 \times G''_0$ până la $I_0 \times G_0$ astfel ca $x_f(t_2, I_0 \times G_0) \subset G'_0$ (ceea ce se poate, din cauză că $x_f(t_2, ., .)$ este continuă).

În cele din urmă egalitatea din (5.1.6) rezultă din proprietatea de unicitate şi din faptul că funcţiile $x_f(., \tau, \xi)$ şi $y(., t_2, x_f(t_2, \tau, \xi))$ sunt soluţii ale aceleaşi probleme Cauchy $(f, t_2, x_f(t_2, \tau, \xi))$. $\square$

Reamintim că o funcţie $g(.) : D \to [-\infty, \infty)$, $D \subset \mathbf{R}^m$ deschisă, se numeşte *superior semicontinuă* dacă este continuă în topologia superioară a dreptei reale încheiate $\overline{\mathbf{R}}$, generată de familia de vecinătăţi $\{[-\infty, a); \quad a \in (-\infty, \infty]\}$. Analog, $g(.) : D \to [-\infty, \infty)$ se numeşte *inferior semicontinuă* dacă este continuă în topologia inferioară a dreptei reale încheiate $\overline{\mathbf{R}}$, generată de familia de vecinătăţi $\{(a,\infty];\quad a\in[-\infty,\infty)\}$.

Propoziţia 5.1.7. *Presupunem verificate ipotezele Teoremei 5.1.5 şi fie*

$$t^-(.,.) : D \to [-\infty,\infty), \quad t^+(.,.) : D \to (-\infty,\infty]$$

funcţiile care definesc intervalele de definiţie ale soluţiilor maximale.

Atunci $t^-(.,.)$ *este superior semicontinuă şi* $t^+(.,.)$ *este inferior semicontinuă.*

Demonstraţie. Vom arăta că $t^-(.,.)$ este superior semicontinuă (demonstraţia faptului că $t^+(.,.)$ este inferior semicontinuă este similară).

Fie $(t_0,x_0)\in D$ arbitrar. Considerăm $[-\infty,a)\in\mathcal{V}(t^-(t_0,x_0))$. Cum $t^-(t_0,x_0)<\min\{a,t^+(t_0,x_0)\}$ rezultă că există $t_2\in I(t_0,x_0)\cap[-\infty,a)$. Ca atare, $(t_2,t_0,x_0)\in D_f$ care este deschisă în $\mathbf{R}\times D$ (conform Teoremei 5.1.5). Deci $\exists I_1\times I_0\times G_0\in\mathcal{V}(t_2,t_0,x_0)$. Prin urmare, $(t_2,\tau,\xi)\in D_f$ $\forall(\tau,\xi)\in I_0\times G_0$, deci $t^-(\tau,\xi)<t_2<a$ $\forall(\tau,\xi)\in I_0\times G_0$ care se poate rescrie sub forma $t^-(I_0\times G_0)\subset[-\infty,a)$. □

Propoziţia 5.1.8. *Fie* $D\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ *deschisă şi* $f(.,.) : D\to\mathbf{R}^n$ *continuă şi local lipschitziană în al doilea argument care defineşte ecuaţia (5.1.1). Pentru* $(t_0,x_0)\in D$ *fie* $\varphi_{t_0,x_0}(.) : I(t_0,x_0)\to\mathbf{R}^n$ *soluţia maximală a problemei Cauchy* (f,t_0,x_0). *Atunci*

a) $\forall I_0\subset I(t_0,x_0)$ *compact* $\exists I_0'\times G_0'\in\mathcal{V}(t_0,x_0)$ *în* D *astfel încât*

$$I_0\subset I(\tau,\xi), \quad \forall(\tau,\xi)\in I_0'\times G_0'.$$

b) $\forall I_0\subset I(t_0,x_0)$ *compact şi* $\forall\epsilon>0$ $\exists I_\epsilon\times G_\epsilon\in\mathcal{V}(t_0,x_0)$ *în* D *astfel încât*

$$I_0\subset I(\tau,\xi), \quad \forall(\tau,\xi)\in I_\epsilon\times G_\epsilon,$$

$$||\varphi_{\tau,\xi}(t)-\varphi_{t_0,x_0}(t)||<\epsilon, \quad \forall t\in I_0,(\tau,\xi)\in I_\epsilon\times G_\epsilon.$$

Demonstraţie. a) Dacă I_0 este compact atunci $I_0=[a,b]$. Cum $I_0\subset I(t_0,x_0)$ rezultă $t^-(t_0,x_0)<a<b<t^+(t_0,x_0)$. Aplicăm Propoziţia 5.1.7 şi deducem că există $I_1\times G_1$, $I_2\times G_2\in\mathcal{V}(t_0,x_0)$ astfel încât

$t^-(I_1 \times G_1) \subset [-\infty, a)$, respectiv $t^+(I_2 \times G_2) \subset (b, +\infty]$. Rămâne să luăm $I_0' = I_1 \cap I_2$ $G_0' = G_1 \cap G_2$.

b) Presupunem, prin absurd, că $\exists I_0 \subset I(t_0, x_0)$ compact, $\exists \epsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall m \in \mathbf{N}$, $\exists (\tau_m, \xi_m) \in B_{\frac{1}{m}}(t_0) \times B_{\frac{1}{m}}(x_0)$, $t_m \in I_0$ astfel încât

$$||\varphi_{\tau_m, \xi_m}(t_m) - \varphi_{t_0, x_0}(t_m)|| \geq \epsilon_0.$$

$t_m \in I_0$, I_0 este compact, deci va exista un subşir (notat la fel) care converge la $\hat{t} \in I_0$. Cum $\tau_m \to t_0$, $\xi_m \to x_0$ şi $\varphi_{\tau,\xi}(.) = x_f(., \tau, \xi)$ şi $x_f(.,.,.)$ este continuă, din Teorema 5.1.5 avem

$$0 < \epsilon_0 \leq ||\varphi_{\tau_m, \xi_m}(t_m) - \varphi_{t_0, x_0}(t_m)|| =$$

$$= ||x_f(t_m, \tau_m, \xi_m) - x_f(t_m, t_0, x_0)|| \to 0,$$

ceea ce este contradictoriu. □

Rezultatele obţinute pentru ecuaţiile diferenţiale (neparametrizate) pot fi transpuse în cazul parametrizat, după cum urmează.

Teorema 5.1.9. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ deschisă şi $f(.,.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă în raport cu toate argumentele şi local lipschitziană în raport cu al doilea şi al treilea argument care defineşte ecuaţia diferenţială parametrizată (5.1.2). Fie $x_f(.,.,.,.) : D_f \to \mathbf{R}^n$ curentul maximal parametrizat al ecuaţiei (5.1.2). Atunci $D_f \subset \mathbf{R} \times D$ este o mulţime deschisă şi $x_f(.,.,.)$ este o funcţie continuă*

Demonstraţie. Câmpul vectorial extins $\overline{f}(.,.)$ definit în (5.1.3) verifică ipotezele Teoremei 5.1.5, deci dacă $x_{\overline{f}} : D_{\overline{f}} \to \mathbf{R}^n$ este curentul maximal (neparametrizat) al ecuaţiei (5.1.3), conform Teoremei 5.1.5 $D_{\overline{f}} \subset \mathbf{R} \times D$ este deschisă şi $x_{\overline{f}}(.,.,.)$ este continuă. Cum, din Propoziţia 5.1.4, $x_{\overline{f}}(t, \tau, (\xi, \lambda)) = (x_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda)$ $\forall (t, \tau, \xi, \lambda) \in D_{\overline{f}} = D_f$ rezultă că $D_f \subset \mathbf{R} \times D$ este deschisă şi $x_f(.,.,.,.)$ este continuă. □

Observaţia 5.1.10. Pentru a scurta demonstraţia în teorema precedentă s-a presupus că $f(.,.,.)$ este local lipschitziană în raport cu al doilea şi al treilea argument. Afirmaţia din Teorema 5.1.9 se poate demonstra presupunând că $f(.,.,.)$ este local lipschitziană doar în raport cu al doilea argument ([10]).

Propoziţia 5.1.11. *Presupunem verificate ipotezele Teoremei 5.1. 9. Pentru* $(t_0, x_0, \lambda_0) \in D$ *fie* $\varphi_{t_0,x_0,\lambda_0}(.) : I(t_0, x_0, \lambda_0) \to \mathbf{R}^n$ *soluţia maximală a problemei Cauchy* $(f(., ., \lambda_0), t_0, x_0)$. *Atunci*

a) $\forall I_0 \subset I(t_0, x_0, \lambda_0)$ *compact* $\exists I_0' \times G_0' \times \Lambda_0' \in \mathcal{V}(t_0, x_0, \lambda_0)$ *în* D *astfel încât*

$$I_0 \subset I(\tau, \xi, \lambda), \quad \forall(\tau, \xi, \lambda) \in I_0' \times G_0' \times \Lambda_0'.$$

b) $\forall I_0 \subset I(t_0, x_0, \lambda_0)$ *compact şi* $\forall \epsilon > 0$ $\exists I_\epsilon \times G_\epsilon \times \Lambda_\epsilon \in \mathcal{V}(t_0, x_0, \lambda_0)$ *în* D *astfel încât*

$$I_0 \subset I(\tau, \xi, \lambda), \quad \forall(\tau, \xi, \lambda) \in I_\epsilon \times G_\epsilon \times \Lambda_\epsilon,$$

$$||\varphi_{\tau,\xi,\lambda}(t) - \varphi_{t_0,x_0,\lambda_0}(t)|| < \epsilon, \quad \forall t \in I_0, (\tau, \xi, \lambda) \in I_\epsilon \times G_\epsilon \times \Lambda_\epsilon.$$

Demonstraţie. Este o consecinţa imediată a Propoziţiei 5.1.4 şi a Propoziţiei 5.1.8 şi o lăsăm pe seama cititorului. □

5.2 Lipschitzianitatea soluţiilor în raport cu datele iniţiale şi parametrii

Dependenţa continuă a soluţiilor maximale de datele iniţiale demonstrată în Teorema 5.1.5 poate fi îmbunătăţită demonstrându-se lipschitzianitatea locală a curentului maximal.

Teorema 5.2.1. *Fie* $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *deschisă şi* $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ *continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia diferenţială*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{5.2.1}$$

Dacă $x_f(., ., .) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ *este curentul maximal al ecuaţiei (5.2.1) atunci* $x_f(., ., .)$ *este o funcţie local lipschitziană.*

Demonstraţie. Fie $(t_0, \tau_0, \xi_0) \in D_f$. Conform Teoremei 5.1.5, $D_f \subset \mathbf{R} \times D$ este deschisă, deci există $r, \rho, \gamma > 0$ astfel încât

$$\overline{B}_r(t_0) \times \overline{B}_\rho(\tau_0) \times \overline{B}_\gamma(\xi_0) \in D_f,$$

$$\overline{B}_\rho(t_0) \times \overline{B}_\rho(\tau_0) \times \overline{B}_\gamma(\xi_0) \in D_f.$$

Fie $I_0 = [\min\{t_0 - r, \tau_0 - \rho\}, \max\{t_0 + r, \tau_0 + \rho\}]$. Atunci $D_0 := I_0 \times \overline{B}_\rho(\tau_0) \times \overline{B}_\gamma(\xi_0)$ este o vecinătate a punctului (t_0, τ_0, ξ_0), $D_0 \subset D_f$ şi $I_0 \subset I(\tau, \xi)$, $\forall (\tau, \xi) \in \overline{B}_\rho(\tau_0) \times \overline{B}_\gamma(\xi_0)$.

Cum $f(.,.)$ şi $x_f(.,.,.)$ sunt continue şi D_0 este compact are sens să definim

$$M = \max_{(s,\tau,\xi)\in D_0} ||f(s, x_f(s, \tau, \xi))||.$$

În plus, din Propoziţia 2.2.6, pentru compactul $D_1 = \{(t, x_f(t, \tau, \xi));\ (t, \tau, \xi) \in D_0\} \subset D$ există $L > 0$ astfel încât

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \le L||x_1 - x_2||, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D_1. \qquad (5.2.2)$$

Vom arăta că restricţia lui $x_f(.,.,.)$ la D_0 este lipschitziană în raport cu fiecare din cele trei variabile ale sale. Argumentul principal se bazează pe ecuaţia integrală asociată ecuaţiei diferenţiale (5.2.1).

$$x_f(t, \tau, \xi) = \xi + \int_\tau^t f(s, x_f(s, \tau, \xi))ds, \quad \forall (t, \tau, \xi) \in D_f. \qquad (5.2.3)$$

i) Lipschitzianitatea în raport cu primul argument.

Fie $t_1, t_2 \in I_0$ şi $(\tau, \xi) \in \overline{B}_\rho(\tau_0) \times \overline{B}_\gamma(\xi_0)$. Din (5.2.2) şi (5.2.3) avem

$$||x_f(t_1, \tau, \xi) - x_f(t_2, \tau, \xi)|| \le |\int_{t_1}^{t_2} ||f(s, x_f(s, \tau, \xi))||ds| \le M|t_1 - t_2|.$$

ii) Lipschitzianitatea în raport cu al doilea şi al treilea argument.

Fie $(t, \tau_1, \xi_1), (t, \tau_2, \xi_2) \in D_0$; din (5.2.2) şi (5.2.3) deducem succesiv

$$u(t) := ||x_f(t, \tau_1, \xi_1) - x_f(t, \tau_2, \xi_2)|| \le ||\xi_1 - \xi_2|| +$$

$$|\int_{\tau_1}^{\tau_2} ||f(s, x_f(s, \tau_1, \xi_1))||ds| + |\int_{\tau_2}^{t} ||f(s, x_f(s, \tau_1, \xi_1)) -$$

$$-f(s, x_f(s, \tau_2, \xi_2))||ds| \le ||\xi_1 - \xi_2|| + M|\tau_1 - \tau_2| + |\int_{\tau_2}^{t} Lu(s)ds|.$$

Aplicăm Lema 2.2.8 (Bellman-Gronwall) şi deducem

$$u(t) \le (||\xi_1 - \xi_2|| + M|\tau_1 - \tau_2|)e^{L|t-\tau_2|} \le (1 + M)e^{2rL}||(\tau_1, \xi_1) - (\tau_2, \xi_2)||.$$

Deci din i) şi ii), pentru orice (t_1, τ_1, ξ_1), $(t_2, \tau_2, \xi_2) \in D_0$ avem

$$||x_f(t_1, \tau_1, \xi_1) - x_f(t_2, \tau_2, \xi_2)|| \leq ||x_f(t_1, \tau_1, \xi_1) - x_f(t_2, \tau_1, \xi_1)||+$$

$$+||x_f(t_2, \tau_1, \xi_1) - x_f(t_2, \tau_2, \xi_2)|| \leq M|t_1 - t_2| + (1+$$
$M)e^{2rL}||(\tau_1, \xi_1) - (\tau_2, \xi_2)|| \leq [M + (1+M)e^{2rL}]||(t_1, \tau_1, \xi_1) - (t_2, \tau_2, \xi_2)||$
şi teorema este demonstrată. □

Teorema 5.2.1 se transpune în cazul ecuaţiilor parametrizate prin

Corolarul 5.2.2. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ deschisă şi $f(.,.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea şi al treilea argument care defineşte ecuaţia diferenţială parametrizată*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda). \tag{5.2.4}$$

Dacă $x_f(.,.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ este curentul maximal parametrizat al ecuaţiei (5.2.4) atunci $x_f(.,.,.)$ este o funcţie local lipschitziană.

Demonstraţie. Din Propoziţia 5.1.4 avem că $x_{\overline{f}}(t, \tau, (\xi, \lambda)) = (x_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda)$, unde $x_{\overline{f}} : D_{\overline{f}} \to \mathbf{R}^n$ este curentul maximal (neparametrizat) al ecuaţiei extinse (5.1.3). În ipotezele noastre $\overline{f}(.,.)$ (definit în (5.1.3)) verifică ipotezele Teoremei 5.2.1 şi deci $x_{\overline{f}}(.,.,.,.)$ este local lipschitziană; în particular, şi prima componentă a sa este local lipschitziană. □

5.3 Diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu datele iniţiale şi parametrii

Rezultatele din secţiunile anterioare le extindem în această secţiune, urmând să obţinem diferenţiabilitatea soluţiilor maximale în raport cu datele iniţiale şi parametri. În cazul neparametrizat distingem două tipuri de rezultate privitoare, pe de o parte, la diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu valorile iniţiale ale variabilei independente şi pe de altă parte la diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu valorile iniţiale ale variabilei dependente. În cazul ecuaţiilor parametrizate pe lângă cele două tipuri de diferenţiabilitate menţionate se adaugă cea în raport cu parametri.

Primul rezultat se referă la diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu valorile iniţiale ale variabilei dependente. Reamintim că funcţia $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$, $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă este de clasă C^1 în raport cu al doilea argument dacă $\forall (t,x) \in D$ există $D_2 f(t,x) (= \frac{\partial f}{\partial x}(t,x))$ şi aplicaţia $(t,x) \to D_2 f(t,x)$ este continuă.

Teorema 5.3.1. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi de clasă C^1 în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x). \tag{5.3.1}$$

Fie $x_f(.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ curentul maximal al ecuaţiei (5.3.1). Atunci $x_f(.,.,.)$ este de clasă C^1 în raport cu al treilea argument.

Mai mult, $\forall (\tau,\xi) \in D, \forall u \in \mathbf{R}^n$ funcţia $D_3 x_f(.,\tau,\xi)u$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale liniare, numită ecuaţia în variaţii

$$\frac{dy}{dt} = D_2 f(t, x_f(t,\tau,\xi))y \tag{5.3.2}$$

cu condiţia iniţială

$$D_3 x_f(\tau,\tau,\xi)u = u. \tag{5.3.3}$$

Demonstraţie. Pentru orice $u \in \mathbf{R}^n$, fie $y(.,\tau,\xi)$ soluţia unică a ecuaţiei (5.3.2) care satisface condiţia iniţială $y(\tau,\tau,\xi)u = u$.

Cum funcţia care defineşte ecuaţia (5.3.2) este continuă, deci pe baza Teoremei 3.1.2 are sens să vorbim de soluţia globală unică a problemei (5.3.2)-(5.3.3).

Afirmaţia din concluzia teoremei este echivalentă cu faptul că

$$D_3 x_f(s,\tau,\xi) = y(s,\tau,\xi), \quad \forall (s,\tau,\xi) \in D_f,$$

ceea ce este echivalent, având în vedere definiţia derivatei, cu faptul că

$$\lim_{h\to 0} \frac{||x_f(s,\tau,\xi+h) - x_f(s,\tau,\xi) - y(s,\tau,\xi)h||}{||h||} = 0. \tag{5.3.4}$$

La rândul său, (5.3.4) este echivalentă cu următorul fapt: $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta_\epsilon > 0$ astfel încât

$$||x_f(s,\tau,\xi+h) - x_f(s,\tau,\xi) - y(s,\tau,\xi)h|| < \epsilon, \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, ||h|| \leq \delta_\epsilon. \tag{5.3.5}$$

Fie, aşadar, $\epsilon > 0$ şi $I_0 = [\min\{s,\tau\}, \max\{s,\tau\}]$. Din Propoziţia 5.1.8 $\exists \delta_{1\epsilon} > 0$ astfel încât $I_0 \subset I(\tau, \xi+h)$, $\forall ||h|| \leq \delta_{1\epsilon}$. Ecuaţiile integrale asociate ecuaţiilor (5.3.1), respectiv (5.3.2) sunt

$$x_f(t,\tau,\eta) = \eta + \int_\tau^t f(\sigma, x_f(\sigma,\tau,\eta))d\sigma$$

$$y(t,\tau,\xi)h = h + \int_\tau^t D_2 f(\sigma, x_f(\sigma,\tau,\xi))y(\sigma,\tau,\xi)hd\sigma$$

şi prin urmare, deducem succesiv

$$u(t) := ||x_f(s,\tau,\xi+h) - x_f(s,\tau,\xi) - y(s,\tau,\xi)h|| \leq$$

$$|\int_\tau^t ||f(\sigma, x_f(\sigma,\tau,\xi+h)) - f(\sigma, x_f(\sigma,\tau,\xi)) -$$

$$-D_2 f(\sigma, x_f(\sigma,\tau,\xi))y(\sigma,\tau,\xi)h||d\sigma| \leq |\int_\tau^t ||f(\sigma, x_f(\sigma,\tau,\xi+h)) -$$

$$-f(\sigma, x_f(\sigma,\tau,\xi)) - D_2 f(\sigma, x_f(\sigma,\tau,\xi))[x_f(\sigma,\tau,\xi+h) -$$

$$-x_f(\sigma,\tau,\xi)]||d\sigma| + |\int_\tau^t ||D_2 f(\sigma, x_f(\sigma,\tau,\xi))||u(\sigma)d\sigma|.$$

Cum $D_2 f(.,.)$, $x_f(.,.,.)$ sunt continue şi I_0 este un interval compact definim

$$M_1 := \max_{\sigma \in I_0} ||D_2 f(\sigma, x_f(\sigma,\tau,\xi))||.$$

Reaminitim, teorema de medie, care afirmă că dacă $g(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ este diferenţiabilă şi $x_1, x_2 \in G$ astfel încât $[x_1, x_2] := \{x_2 + s(x_1 - x_2); s \in [0,1]\} \subset G$ atunci

$$||g(x_1) - g(x_2) - Dg(x_2)(x_1 - x_2)|| \leq ||x_1 - x_2|| \sup_{x \in [x_1, x_2]} ||Dg(x) - Dg(x_2)||$$

Aplicăm, această inegalitate pentru

$$x_1 = x_f(\sigma,\tau,\xi+h), x_2 = x_f(\sigma,\tau,\xi), g(x) = f(\sigma,x),$$

şi micşorăm pe $\delta_{1\epsilon}$ astfel ca $[x_1, x_2] \subset D$.

Pe de altă parte, în baza Teoremei 5.2.1, $x_f(.,.,.)$ este local lipschitziană, deci (global) lipschitziană pe compactul $D_0 = \{(\sigma, \tau, \xi + h), \sigma \in I_0, ||h|| \leq \delta_{1\epsilon}\}$, ceea ce revine la existenţa lui $L > 0$ astfel încât

$$||x_f(\sigma, \tau, \xi + h) - x_f(\sigma, \tau, \xi)|| \leq L||h||, \quad \forall \sigma \in I_0, ||h|| \leq \delta_{1\epsilon}.$$

În acelaşi timp, din continuitatea funcţiilor $D_2 f(.,.)$, $x_f(.,.,.)$ deducem că $\exists \delta_{2\epsilon} > 0$ astfel încât

$$||D_2 f(\sigma, x) - D_2 f(\sigma, x_f(\sigma, \tau, \xi))|| \leq \epsilon, \quad \forall \sigma \in I_0, x \in [x_1, x_2], ||h|| \leq \delta_{2\epsilon}.$$

În baza acestor consideraţii obţinem că pentru $t \in I_0$ şi $||h|| \leq \min\{\delta_{1\epsilon}, \delta_{2\epsilon}\}$

$$u(t) \leq \epsilon L||h||.|t - \tau| + |\int_\tau^t Mu(\sigma)d\sigma|.$$

Aplicăm Lema 2.2.8 (Bellman-Gronwall) şi deducem că

$$u(t) \leq \epsilon L||h||.|t - \tau|e^{M|t-\tau|}.$$

Pentru o alegere convenabilă a lui $\delta_\epsilon < \min\{\delta_{1\epsilon}, \delta_{2\epsilon}\}$ se obţine (5.3.5) şi teorema este demonstrată. □

Privitor la diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu valorile iniţiale ale variabilei independente avem următorul rezultat, a cărui demonstraţie foloseşte în mod esenţial Teorema 5.3.1.

Teorema 5.3.2. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ continuă şi de clasă C^1 în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia (5.3.1). Fie $x_f(.,.,.) : D_f \to \mathbf{R}^n$ curentul maximal al ecuaţiei (5.3.1). Atunci $x_f(.,.,.)$ este de clasă C^1 în raport cu al doilea argument.*

Mai mult, $\forall (\tau, \xi) \in D$ funcţia $D_2 x_f(., \tau, \xi)u$ este soluţie a ecuaţiei în variaţii (5.3.2) cu condiţia iniţială

$$D_2 x_f(\tau, \tau, \xi) = -f(\tau, \xi). \tag{5.3.6}$$

Demonstraţie. Ţinând cont de afirmaţia din Teorema 5.3.1 afirmaţia din enunţ este echivalentă cu a demonstra că există $D_2x_f(t,\tau,\xi)$ şi

$$D_2x_f(t,\tau,\xi) = -D_3x_f(t,\tau,\xi)f(\tau,\xi), \quad \forall(t,\tau,\xi)\in D_f. \tag{5.3.7}$$

Să observăm, mai întâi că,

$$x_f(t,\theta,x_f(\theta,\tau,\xi)) = x_f(t,\tau,\xi), \quad \forall(\tau,\xi)\in D, t,\theta\in I(\tau,\xi). \tag{5.3.8}$$

Egalitatea (5.3.8) este adevărată -via unicitatea soluţiilor- deoarece atât $x_f(,,\theta,x_f(\theta,\tau,\xi))$ căt şi $x_f(.,\tau,\xi)$ sunt soluţii ale aceleaşi probleme Cauchy $(f,\theta,x_f(\theta,\tau,\xi))$.

Reamintim că dacă $F(.):G\to\mathbf{R}^m$, $G\subset\mathbf{R}^n$ deschisă este o funcţie diferenţiabilă şi $x_1,x_2\in G$ sunt astfel încât $[x_1,x_2]=\{sx_1+(1-s)x_2, s\in[0,1]\}\subset G$ atunci formula creşterilor finite de tip integral este

$$F(x_1)-F(x_2) = \int_0^1 DF(x_2+s(x_1-x_2))(x_1-x_2)ds. \tag{5.3.9}$$

Din (5.3.8), Teorema 5.3.1, continuitatea curentului maximal (Teorema 5.1.5), teorema privind continuitatea integralelor în raport cu parametri şi (5.3.9) putem scrie succesiv

$$D_2x_f(t,\tau,\xi) = D_2x_f(t,\tau,\xi).1 = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[x_f(t,\tau+h,\xi)-x_f(t,\tau,\xi)] =$$

$$-\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[x_f(t,\tau+h,x_f(\tau+h,\tau,\xi))-x_f(t,\tau,\xi)] =$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^1 D_3x_f(t,\tau+h,\xi+\sigma(x_f(\tau+h,\tau,\xi)-\xi))[x_f(\tau+h,\tau,\xi)-\xi]d\sigma$$

$$= -\lim_{h\to 0}\int_0^1 D_3x_f(t,\tau+h,\xi+\sigma(x_f(\tau+h,\tau,\xi)-\xi))d\sigma\frac{x_f(\tau+h,\tau,\xi)-\xi}{h}$$

$$= -D_3x_f(t,\tau,\xi)D_1x_f(\tau,\tau,\xi) = -D_3x_f(t,\tau,\xi)f(\tau,x_f(\tau,\tau,\xi))$$

$$= -D_3x_f(t,\tau,\xi)f(\tau,\xi).\square$$

Observaţia 5.3.3. Dacă $f(.,.)$ verifică ipotezele Teoremei 5.3.1 (sau Teoremei 5.3.2) atunci egalitatea (5.3.7) poate fi rescrisă sub forma

$$D_2x_f(t,\tau,\xi)+D_3x_f(t,\tau,\xi)f(\tau,\xi)\equiv 0, \quad \forall(t,\tau,\xi)\in D_f. \tag{5.3.10}$$

Egalitatea (5.3.10) se numeşte *proprietatea de integrală primă a curentului maximal.*

Diferenţiabilitatea soluţiilor în raport cu parametrii este o consecinţă imediată a Teoremelor 5.3.1, 5.3.2 şi a Propoziţiei 5.1.4.

Teorema 5.3.4. *Fie* $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ *deschisă şi* $f(.,.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ *continuă şi de clasă* C^1 *în raport cu al doilea şi al treilea argument care defineşte ecuaţia*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda). \tag{5.3.11}$$

Fie $x_f(.,.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ *curentul maximal parametrizat al ecuaţiei (5.3.11).*

Atunci $x_f(.,.,.,.)$ *este o funcţie de clasă* C^1.

Mai mult, $\forall(\tau, \xi, \lambda) \in D$ *funcţia* $D_2x_f(., \tau, \xi, \lambda)$ *are proprietăţile din Teorema 5.3.2, funcţia* $D_3x_f(., \tau, \xi, \lambda)$ *are proprietăţile din Teorema 5.3.1, iar pentru orice* $u \in \mathbf{R}^k$ *funcţia* $D_4x_f(., \tau, \xi, \lambda)u$ *este soluţie a ecuaţiei diferenţiale afină, numită* ecuaţia în variaţii pentru parametri

$$\frac{dy}{dt} = D_2f(t, x_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda)y + D_3f(t, x_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda)u \tag{5.3.12}$$

cu condiţia iniţială

$$D_4x_f(\tau, \tau, \xi, \lambda)u = 0. \tag{5.3.13}$$

Demonstraţie. În ipotezele noastre, funcţia $\overline{f}(.,.)$, care defineşte ecuaţia extinsă (5.1.3), este continuă şi de clasă C^1 în raport cu al doilea argument. Putem, aşadar, aplica Teoremele 5.3.1 şi 5.3.2 pentru a deduce că $x_{\overline{f}}(.,.,.,.)$ este de clasă C^1.

Cum, conform Propoziţiei 5.1.4 $x_{\overline{f}}(t, \tau, (\xi, \lambda)) = (x_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda)$, deducem că $x_f(.,.,.)$ este, de asemenea, de clasă C^1.

$x_f(., \tau, \xi, \lambda)$ este soluţie a problemei Cauchy $(f(.,.,\lambda), \tau, \xi)$, deci avem, pe de o parte, că

$$D_1x_f(t, \tau, \xi, \lambda) \equiv f(t, x_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda). \tag{5.3.14}$$

Cum $\lambda \to f(t, x_f(t, \tau, \xi, \lambda), \lambda)$ este de clasă C^1, derivând în relaţia (5.3.14) în raport cu λ şi folosind Teorema lui Schwartz obţinem că $\forall u \in \mathbf{R}^k$

$$\exists \quad D_1(D_4x_f(t, \tau, \xi, \lambda).u) \equiv D_4(D_1x_f(t, \tau, \xi, \lambda).u) \equiv$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[f(t,x_f(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda).u] \equiv D_2 f(t,x_f(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda)(D_4 x_f(t,\tau,\xi,\lambda).u)+$$
$$+D_3 f(t,x_f(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda)u,$$

adică $D_4 x_f(.,\tau,\xi,\lambda)u$ este soluţie a ecuaţiei (5.3.12).

Pe de altă parte,

$$x_f(\tau,\tau,\xi,\lambda) \equiv \xi.$$

Derivând această egalitate în raport cu λ obţinem $D_4 x_f(\tau,\tau,\xi,\lambda) \equiv 0$, adică (5.3.13). □

Exemplul 5.3.5. Fie $\varphi(.,\lambda) : I(\lambda) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ soluţia maximală a problemei

$$x' = \frac{x}{t} + 2x^2 + \lambda, \quad x(1) = 1 + \lambda. \tag{5.3.15}$$

Dacă $\lambda = 0$ obţinem problema Cauchy

$$x' = \frac{x}{t} + 2x^2, \quad x(1) = 1.$$

Avem o ecuaţie Bernoulli, a cărei soluţie se găseşte cu metoda variaţiei constantelor. Ecuaţia liniară asociată $\overline{x}' = \frac{\overline{x}}{t}$ are soluţia $\overline{x}(t) = ce^{ln|t|} = c|t|$. Cum ne interesează o soluţie care trece prin $t = 1$ vom căuta o soluţie a ecuaţiei Bernoulli de forma $x(t) = c(t)t$, $t > 0$. Obţinem $c'(t) = 2c^2(t)t$, care este o ecuaţie cu variabile separabile cu soluţia staţionară $c(t) \equiv 0$ şi cu soluţiile $c(t) \equiv -\frac{1}{t^2+k}$, $k \in \mathbf{R}$. Cum soluţia ecuaţiei Bernoulli trebuie să verifice $x(1) = 1$ obţinem $\varphi(t,0) = \frac{t}{2-t^2}$, $t \in I(0) = (0, \sqrt{2})$.

Calculăm, în continuare, $D_2\varphi(t,0)$, $t \in (0,\sqrt{2})$.

Funcţia care defineşte ecuaţia (5.3.15)

$$f : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(t,x,\lambda) = \frac{x}{t} + 2x^2 + \lambda$$

este, evident, continuă şi de clasă C^1 în raport cu variabilele x şi λ. Fie $x_f(.,.,.,.) : D_f \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ curentul maximal parametrizat. În baza Teoremei 5.3.4 $x_f(.,.,.,.)$ este de clasă C^1 şi din definiţia lui $\varphi(.,\lambda)$ avem

$$\varphi(t,\lambda) \equiv x_f(t,1,1+\lambda,\lambda). \tag{5.3.16}$$

Derivând în raport cu λ în egalitatea (5.3.16) găsim

$$D_2\varphi(t,\lambda) \equiv D_3x_f(t,1,1+\lambda,\lambda) + D_4x_f(t,1,1+\lambda,\lambda).$$

Pentru $\lambda = 0$ deducem

$$D_2\varphi(t,0) \equiv D_3x_f(t,1,1,0) + D_4x_f(t,1,1,0).$$

În baza Teoremei 5.3.4, $y(.) := D_3x_f(.,1,1,0)$ este soluţia problemei Cauchy

$$y' = D_2f(t,x_f(t,1,1,0),0)y, \quad y(1) = 1,$$

iar $z(.) := D_4x_f(.,1,1,0)$ este soluţia problemei Cauchy

$$z' = D_2f(t,x_f(t,1,1,0),0)z + D_3f(t,x_f(t,1,1,0),0), \quad z(1) = 0.$$

Cum $x_f(t,1,1,0) = \varphi(t,0) = \frac{t}{2-t^2}$, $D_2f(t,x,\lambda) = \frac{1}{t} + 4x$ şi $D_3f(t,x,\lambda) = 1$, va trebui să găsim soluţiile următoarelor probleme Cauchy

$$y' = (\frac{1}{t} + \frac{4t}{2-t^2})y, \quad y(1) = 1, \tag{5.3.17}$$

$$z' = (\frac{1}{t} + \frac{4t}{2-t^2})z + 1, \quad z(1) = 0. \tag{5.3.18}$$

Ecuaţia care defineşte problema (5.3.17) este liniară, deci problema (5.3.17) are soluţia

$$y(t) = \frac{t}{(2-t^2)^2}, \quad t \in (0,\sqrt{2}).$$

Ecuaţia care defineşte problema (5.3.18) este afină; căutăm soluţii de forma $z(t) = c(t)\frac{t}{(2-t^2)^2}$ şi găsim

$$z(t) = (4lnt - t^2 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{4})\frac{t}{(2-t^2)^2}, \quad t \in (0,\sqrt{2}).$$

Prin urmare,

$$z(t) = (4lnt - t^2 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{7}{4})\frac{t}{(2-t^2)^2}, \quad t \in (0,\sqrt{2}).$$

Deci,

$$D_2\varphi(t,0) = y(t) + z(t) = \frac{t}{(2-t^2)^2} + (4lnt - t^2 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{7}{4})\frac{t}{(2-t^2)^2},$$

$t \in (0,\sqrt{2})$.

6

Integrale prime şi ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi

Acest capitol este consacrat studiului integralelor prime şi ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întâi. Prima secţiune este dedicată introducerii şi studiului noţiunii de integrală primă pentru ecuaţii diferenţiale. O aplicaţie a integralelor prime intervine în studiul unei clase particulare de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi; anume ecuaţiile liniare şi cvasi-liniare, prezentate în secţiunea a doua. În finalul capitolului, se arată, utilizând metoda caracteristicilor a lui Cauchy, că rezolvarea unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi se reduce la integrarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare.

6.1 Integrale prime

Există numeroase situaţii în care studiul soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale este făcut cu ajutorul noţiunii de integrală primă. Această noţiune, care este justificată de considerente ce privesc în special semnificaţiile fizice ale funcţiilor care definesc ecuaţia diferenţială, se referă la funcţii care, deşi sunt neconstante, rămân constante pe graficele soluţiilor ecuaţiei diferenţiale.

Fie $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x). \tag{6.1.1}$$

Definiţia 6.1.1. Se numeşte *integrală primă* a ecuaţiei diferenţiale (6.1.1) o funcţie $F(.,.) : D_0 \subset D \to \mathbf{R}$, neconstantă cu următoarea proprietate: $\forall \varphi(.) : I_0 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ soluţie a ecuaţiei (6.1.1) pentru care $Graph(\varphi) \subset D_0$, există $c \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$F(t,\varphi(t)) \equiv c. \tag{6.1.2}$$

Într-o formulare ne-riguroasă o funcţie este integrală primă pentru o ecuaţie diferenţială dacă este neconstantă şi dacă este constantă de-a lungul oricărei soluţii a ecuaţiei.

Următorul rezultat ne oferă un criteriu foarte simplu pentru integrale prime.

Teorema 6.1.2. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă care defineşte ecuaţia (6.1.1). Fie $D_0 \subset D$ deschisă şi $F(.,.) : D_0 \to \mathbf{R}$ o funcţie diferenţiabilă.*

Atunci $F(.,.)$ este integrală primă pentru ecuaţia (6.1.1) dacă şi numai dacă pentru orice $(t,x) \in D_0$

$$D_1F(t,x) + D_2F(t,x)f(t,x) = 0. \tag{6.1.3}$$

Demonstraţie. Fie $(t_0,x_0) \in D_0$. În baza Teoremei 2.1.2 (Peano) $\exists \varphi(.) : I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \to \mathbf{R}^n$ soluţie a problemei Cauchy (f,t_0,x_0). Evident, putem micşora pe I_0 astfel încât $Graph(\varphi) \subset D_0$.

Cum $F(.,.)$ este integrală primă, $\exists c \in \mathbf{R}$ astfel încât are loc (6.1.2). Derivând în raport cu t în identitatea (6.1.2) obţinem

$$D_1F(t,\varphi(t)) + D_2F(t,\varphi(t))\varphi'(t) \equiv 0.$$

Dar $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (6.1.1), deci $\varphi'(t) \equiv f(t,\varphi(t))$ pe I_0. În particular, dacă $t = t_0$, avem $\varphi(t_0) = x_0$ şi obţinem (6.1.3) pentru $(t_0,x_0) \in D_0$ arbitrar.

Reciproc, fie $\varphi(.)$ o soluţie a ecuaţiei (6.1.1) cu $Graph(\varphi) \subset D_0$. Prin urmare,

$$0 = D_1F(t,\varphi(t)) + D_2F(t,\varphi(t))f(t,\varphi(t)) =$$

$$= D_1F(t,\varphi(t)) + D_2F(t,\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{d}{dt}(F(t,\varphi(t)).$$

Aşadar, cum domeniul de definiţie al lui $\varphi(.)$ este un interval, $\exists c \in \mathbf{R}$ astfel încât $F(t,\varphi(t)) \equiv c$. $\square$

Definiţia 6.1.3. Dacă $D_0 \subset D$ este deschisă şi $F^1(.,.),...,F^k(.,.) : D_0 \to \mathbf{R}$ sunt integrale prime diferenţiabile atunci $F^1(.,.),...,F^k(.,.) : D_0 \to \mathbf{R}$ se numesc *integrale prime funcţional independente (în raport cu al doilea argument)* dacă următoarea condiţie este satisfăcută

$$\mathrm{rang}(\frac{\partial F^i}{\partial x_j}(t,(x_1,...,x_n)))_{i=\overline{1,k},j=\overline{1,n}} = k(\mathrm{maxim}), \quad \forall (t,x) \in D_0.$$

Următorul rezultat arată că problema caracterizării soluţiei unei ecuaţii diferenţiale pe $\mathbf{R}^n$ se reduce la o problemă de funcţii implicite.

Teorema 6.1.4. *Fie $f(.,.) : D \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă care defineşte ecuaţia (6.1.1) şi fie $F^1(.,.),...,F^n(.,.) : D_0 \subset D \to \mathbf{R}$, D_0 deschisă, integrale prime funcţional independente, funcţii de clasă C^1.*

Atunci $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ cu $Graph(\varphi) \subset D_0$ este soluţie a ecuaţiei (6.1.1) dacă şi numai dacă $\exists c_1,...,c_n \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$F^i(t,\varphi(t)) \equiv c_i, \quad t \in I, i = \overline{1,n}. \tag{6.1.4}$$

Demonstraţie. Necesitatea este evidentă din definiţia integralei prime. Pentru suficienţă, fie $\varphi(.) : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ cu $Graph(\varphi) \subset D_0$, care verifică condiţia (6.1.4). Fie $t_0 \in I$ arbitrar şi $x_0 = \varphi(t_0)$.

Aplicăm teorema funcţiilor implicite funcţiei $F(.,.) = (F^1(.,.),..., F^n(.,.))$ în (t_0,x_0), fapt posibil deoarece $D_2F(t,x) \in M_n(\mathbf{R})$ este inversabilă ($F^1,...,F^n$ fiind funcţional independente). Deducem că $\exists I_0 \in \mathcal{V}(t_0)$, $\exists!\psi(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$ de clasă C^1 astfel încât $\psi(t_0) = x_0$, $F(t,\psi(t)) = F(t_0,x_0)$ pe I_0.

Din unicitatea lui $\psi(.)$ şi din faptul că $\varphi(.)$ verifică aceeaşi problemă de funcţi implicite, deducem că $\varphi(.)$ şi $\psi(.)$ coincid pe I_0, deci $\varphi(.)$ este de clasă C^1. Cum t_0 a fost ales arbitrar avem că $\varphi(.)$ este de clasă C^1 pe I.

Pe de o parte, dacă derivăm în egalitatea (6.1.4) avem

$$D_1F^i(t,\varphi(t)) + D_2F^i(t,\varphi(t))\varphi'(t) \equiv 0, \quad i = \overline{1,n},$$

egalitate care poate fi rescrisă sub forma vectorială

$$D_1F(t,\varphi(t)) + D_2F(t,\varphi(t))\varphi'(t) \equiv 0. \tag{6.1.5}$$

Pe de altă parte, F^i, $i = \overline{1,n}$ sunt integrale prime. Deci, din (6.1.3) obţinem

$$D_1F^i(t,x) + D_2F^i(t,x)f(t,x) \equiv 0 \quad \text{pe} \quad D_0,$$

sau echivalent

$$D_1F(t,x) + D_2F(t,x)f(t,x) \equiv 0 \quad \text{pe} \quad D_0. \tag{6.1.6}$$

Aşadar, din (6.1.5) şi (6.1.6) gasim

$$\varphi'(t) \equiv f(t,\varphi(t))(\equiv -(D_2F(t,\varphi(t)))^{-1}D_1F(t,\varphi(t))) \quad \text{pe} \quad I_0.\Box$$

Observaţia 6.1.5. Prin convenţie, spunem că identităţiile

$$F^i(t,x) = c_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{6.1.7}$$

reprezintă *soluţia generală sub formă implicită* pe D_0 a ecuaţiei (6.1.1). Dacă sistemul (6.1.7) poate fi rezolvat în raport cu x, adică dacă se poate determina o funcţie $\psi(.,.)$ astfel încât $F^i(t,\psi(t,c)) = c_i$, $i = \overline{1,n}$ atunci spunem că

$$x = \psi(t,c), \quad c = (c_1,...,c_n) \in \mathbf{R}^n$$

este *soluţia generală sub formă explicită* a ecuaţiei (6.1.1).

Observaţia 6.1.6. Să admitem că se cunosc p $(< n)$ integrale prime ale ecuaţiei (6.1.1) funcţional independente. Atunci ecuaţia (6.1.1) este echivalentă cu o ecuaţie diferenţială pe $\mathbf{R}^{n-p}$. Mai precis, fie $F^1,...,F^p$:

$D_0 \to \mathbf{R}$ cele p integrale prime ale lui (6.1.1) şi fie $x(.) = (x_1(.), ..., x_n(.))$ o soluţie a lui (6.1.1). Ţinând cont că există constantele $c_1, ..., c_p$ astfel încât

$$F^i(t, (x_1(t), ..., x_n(t))) \equiv c_i, \quad i = \overline{1, p},$$

în virtutea faptului că $F^1, ..., F^p$ sunt funcţional independente şi a teoremei funcţiilor implicite rezultă că p componente ale lui $x(.)$ pot fi exprimate în mod unic ca funcţii de clasă C^1 de celelalte $n-p$. Renumerotând componentele lui $x(.)$, dacă este cazul, putem presupune că acele componente care se exprimă ca funcţii de celelalte sunt ultimele p. Înlocuind aceste componente ale lui $x(.)$ în primele $n-p$ ale ecuaţiei (6.1.1) obţinem o ecuaţie diferenţială cu $n-p$ funcţii necunoscute.

În încheierea acestei secţiuni, prezentăm un rezultat care afirmă că în ipoteze ,,rezonabile” pentru orice ecuaţie diferenţială pe $\mathbf{R}^n$ există n integrale prime funcţional independente.

Teorema 6.1.7. *Fie $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ deschisă si $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă şi de clasă C^1 în raport cu al doilea argument care defineşte ecuaţia (6.1.1).*

Atunci pentru orice $(t_0, x_0) \in D$ există $F^1(.,.), ..., F^n(.,.) : D_0 \in \mathcal{V}(t_0, x_0) \to \mathbf{R}$ de clasă C^1, integrale prime funcţional independente care verifică condiţia $F(t_0, x_0) = (F^1(t_0, x_0), ..., F^n(t_0, x_0)) = x_0$ şi care, în plus, are următoarea proprietate de generare a tuturor integralelor prime pe D_0: $\tilde{F}(.,.) : D_0 \to \mathbf{R}$ este integrală primă a ecuaţiei (6.1.1) dacă şi numai dacă $\exists G(.) : F(D_0) \to \mathbf{R}$ astfel încât

$$\tilde{F}(t, x) = G(F^1(t, x), ..., F^n(t, x)), \quad \forall (t, x) \in D_0.$$

Demonstraţie. Fie $x_f(.,.,.) = (x_f^1(.,.,.), ..., x_f^n(.,.,.)) : D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ curentul maximal al ecuaţiei (6.1.1). Din Teoremele 5.1.5, 5.3.1, 5.3.2 rezultă că $D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ este deschisă, $x_f(.,.,.)$ este de clasă C^1 şi verifică proprietatea de integrală primă (5.3.10).

Pentru orice $(t_0, x_0) \in D$ definim

$$D_0 := \{(t, x) \in D; \quad (t_0, t, x) \in D_f\},$$

$$F^i(t, x) = x_f^i(t_0, t, x), \quad (t, x) \in D_0, i = \overline{1, n}. \tag{6.1.8}$$

Cum $D_f \subset \mathbf{R} \times D \to \mathbf{R}^n$ este deschisă avem că şi $D_0 \subset D$ este deschisă şi $D_0 \in \mathcal{V}(t_0, x_0)$. Din Observaţia 5.3.3 rezultă că $F^i(.,.), i = \overline{1,n}$ sunt integrale prime; din Teoremele 5.3.1, 5.3.2 rezultă că $F^i(.,.), i = \overline{1,n}$ sunt de clasă C^1. În plus, din faptul că $x_f(t_0, t_0, x_0) = x_0$ rezultă că $F(t_0, x_0) = x_0$.

Notăm că $(\frac{\partial F^i}{\partial x_j}(t,x))_{i,j=\overline{1,n}} = D_2F(t,x) = D_3x_f(t_0,t,x)$.

Dar din Teorema 5.3.1, $s \to D_3x_f(s,t,x)$ este soluţie matricială a ecuaţiei în variaţii

$$\frac{dy}{ds} = D_2f(s, x_f(s,t,x))y, \quad y(t) = I_n$$

şi în baza Teoremei 3.1.11 (Liouville)

$$det(D_3x_f(t_0,t,x)) = e^{\int_t^{t_0} Tr(D_2f(s,x_f(s,t,x)))ds} \neq 0, \quad \forall (t,x) \in D_0,$$

ceea ce arată că $F^i(.,.), i = \overline{1,n}$ sunt funcţional independente pe D_0.

Să remarcăm că

$$F(D_0) \subset \{y \in \mathbf{R}^n; (t_0, y) \in D_0\} = pr_{t_0}D,$$

deoarece pentru orice $(t,x) \in D_0$ avem $(t_0, x_f(t_0,t,x)) \in D_0$.

În final, deoarece $\tilde{F}(.,.)$ este integrală primă şi pentru orice $(t,x) \in D_0$, funcţia $x_f(.,t,x)$ este soluţie a ecuaţiei (6.1.1) şi pentru $t, t_0 \in I(t,x)$ au loc egalităţile

$$\tilde{F}(t_0, x_f(t_0,t,x)) = \tilde{F}(s, x_f(s,t,x)) = \tilde{F}(t, x_f(t,t,x)) = \tilde{F}(t,x),$$

$\forall s \in [t_0, t]$ şi, deci, dacă definim $G(.) : F(D_0) \to \mathbf{R}$ prin

$$G(y) = \tilde{F}(t_0, y), \quad y \in F(D_0)$$

obţinem proprietatea de generare. $\Box$

Exemplul 6.1.8. Să se determine soluţia generală a sistemului

$$\begin{cases} x' = \frac{x^3}{y} \\ y' = y - x^2 \end{cases}$$

ştiind că ca funcţia $F_1(.,.) : \mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*)$, $F_1(t,(x,y)) = xye^{-t}$ este integrală primă a acestui sistem.

Cum

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}(t,(x,y)) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(t,(x,y)).\frac{x^3}{y} + \frac{\partial F_1}{\partial y}(t,(x,y)).(y-x^2) =$$

$$= -xye^{-t} + ye^{-t}\frac{x^3}{y} + xe^{-t}(y-x^2) = 0$$

conform Teoremei 6.1.2 deducem că $F_1(.,.)$ este integrală primă.

Acest lucru se mai putea observa şi astfel. Fie $(x(.), y(.))$ o soluţie a sistemului, adică

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x^3(t)}{y(t)} \\ y'(t) = y(t) - x^2(t). \end{cases}$$

Înmulţim prima identitate cu $y(t)$, pe a doua cu $x(t)$, le adunăm şi dacă definim $z(t) = x(t)y(t)$, atunci $z(.)$ verifică ecuaţia liniară scalară $z' = z$; deci $\exists c \in \mathbf{R}$ astfel încât $z(t) = ce^t$, i.e. $x(t)y(t)e^{-t} \equiv c$.

În acest moment putem folosi Observaţia 6.1.6 pentru a reduce dimensiunea sistemului.

Din $xye^{-t} = c$, deducem $y = \frac{ce^t}{x}$, care introdus în prima ecuaţie a sistemului ne dă ecuaţia cu variabile separabile $x' = \frac{e^{-t}}{c}x^4$ care are, pe de o parte soluţia staţionară $x_0(t) \equiv 0$, iar pe de altă parte soluţiile $x(t) = \sqrt[3]{\frac{ce^t}{3(1+kce^t)}}$, $k \in \mathbf{R}$.

Prin urmare, soluţia generală a sistemului este $x(t) = \sqrt[3]{\frac{ce^t}{3(1+kce^t)}}$, $y(t) = \sqrt[3]{\frac{3(1+kce^t)}{c^2e^{2t}}}$, $k \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}^*$.

Dacă $x_0(t) \equiv 0$ (corespunzător lui $c = 0$) obţinem $y_0(t) = ke^t$, $k \in \mathbf{R}$.

Constantă k obţinută la integrarea ecuaţiei cu variabile separabile sugerează o a doua integrală primă pentru sistem. Din $x(t) = \sqrt[3]{\frac{ce^t}{3(1+kce^t)}}$ rezultă $k \equiv \frac{1}{3x^3(t)} - \frac{e^{-t}}{c}$; avem în vedere că $c \equiv x(t)y(t)e^{-t}$ şi deducem $k \equiv \frac{1}{3x^3(t)} - \frac{1}{x(t)y(t)}$. Ca atare, definim funcţia $F_2(t,(x,y)) = \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{xy}$, $(t,(x,y)) \in D = \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*)$. F_1 şi F_2 sunt funcţional independente pe D, deoarece

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(t,(x,y)) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(t,(x,y)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(t,(x,y)) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(t,(x,y)) \end{pmatrix} =$$

$$= det \begin{pmatrix} ye^{-t} & xe^{-t} \\ -x^{-4} + x^{-2}y^{-1} & x^{-1}y^{-2} \end{pmatrix} = e^{-t}x^{-3} \neq 0, \quad \forall x \neq 0.$$

6.2 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare

Fie $D \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi fie $f_i(.) : D \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ funcţii de clasă C^1 care satisfac $\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)| \neq 0$, $\forall x \in D$.

Definiţia 6.2.1. Se numeşte *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară* o ecuaţie de forma

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial z}{\partial x_i}(x) = 0. \tag{6.2.1}$$

O *soluţie* a ecuaţiei (6.2.1) este o funcţie $\varphi(.) : D_0 \to \mathbf{R}$ de clasă C^1, cu $D_0 \subset D$ deschisă, care verifică ecuaţia, adică

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = 0.$$

Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei (6.2.1) se numeşte *soluţia generală* a ecuaţiei (6.2.1).

Este evident că orice funcţie constantă pe D este soluţie a ecuaţiei (6.2.1). În continuare vom considera doar soluţiile neconstante ale ecuaţiei (6.2.1).

Sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$x_i' = f_i(x), \quad i = 1, 2, ..., n \tag{6.2.2}$$

se numeşte *sistemul caracteristic* asociat ecuaţiei (6.2.1).

Teorema 6.2.2. *Fie $D_0 \subset D$ deschisă şi fie $\varphi(.) : D_0 \to \mathbf{R}$ o funcţie neconstantă de clasă C^1. Atunci $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (6.2.1) dacă şi numai dacă $\varphi(.)$ este integrală primă pe D_0 a sistemului caracteristic (6.2.2).*

Demonstraţie. Teorema 6.2.2 este, de fapt, o reformulare a Teoremei 6.1.2. □

Teorema 6.2.3. *Fie* $D_0 \subset D$ *deschisă şi fie* $F_1(.), ..., F_{n-1}(.) : D_0 \to \mathbf{R}$ *integrale prime funcţional independente ale sistemului caracteristic (6.2.2).*

Atunci soluţia generală a ecuaţiei (6.2.1) este dată de

$$\varphi(x) = H(F_1(x), ..., F_{n-1}(x)), \quad x \in D_0,$$

unde $F(.) = (F_1(.), ..., F_{n-1}(.))$ *şi* $H(.) : F(D_0) \to \mathbf{R}$ *este o funcţie de clasă* C^1.

Demonstraţie. Este imediată prin aplicarea Teoremei 6.1.7. □

Observaţia 6.2.4. Pentru a rezolva o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară se procedează în felul următor:

– Ecuaţiei cu derivate parţiale liniare (6.2.1) i se ataşează sistemul caracteristic (6.2.2).

– Se determină $n - 1$ integrale prime funcţional independente ale sistemului (6.2.2).

– Soluţia generală a ecuaţiei (6.2.1) este o funcţie de clasă C^1 arbitrară de aceste $n - 1$ integrale prime.

Exemplul 6.2.5. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + ... + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0.$$

Sistemul caracteristic asociat este

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n' = x_n, \end{cases}$$

de unde găsim $n - 1$ integrale prime funcţional independente

$$F_1(x_1, ..., x_n) = \frac{x_1}{x_n}, \quad ... \quad , F_{n-1}(x_1, ..., x_n) = \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

Ca atare, soluţia generală a ecuaţiei este $z(x_1, ..., x_n) = F(\frac{x_1}{x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{x_n})$, unde $F(.) : \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$ este o funcţie de clasă C^1.

Studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare permite determinarea soluţiilor pentru o clasă mai generală, anume ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasi-liniare.

Fie $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ o mulţime deschisă şi fie $f_i(.), f(.) : G \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ funcţii de clasă C^1 care satisfac $\sum_{i=1}^{n} |f_i(x,z)| + |f(x,z)| \neq 0$, $\forall (x,z) \in G$.

Definiţia 6.2.6. Se numeşte *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasi-liniară* o ecuaţie de forma

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x, z(x)) \frac{\partial z}{\partial x_i}(x) = f(x, z(x)). \tag{6.2.3}$$

O *soluţie* a ecuaţiei (6.2.1) este o funcţie $\varphi(.) : D \to \mathbf{R}$ de clasă C^1, cu $D \subset \mathbf{R}^n$ deschisă astfel încât $(x, \varphi(x)) \in G$, $\forall x \in D$ şi $\varphi(.)$ verifică ecuaţia, adică

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei (6.2.3) se numeşte *soluţia generală* a ecuaţiei (6.2.3).

Căutăm soluţii $z(.)$ ale ecuaţiei (6.2.3) ca o funcţie definită implicit de o relaţie de forma $V(x, z(x)) \equiv c$. Din teorema de derivare a funcţiilor definite implicit avem

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial z}}(x, z(x)), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Înlocuim această expresie a lui $\frac{\partial z}{\partial x_i}(.)$ în egalitatea (6.2.3) şi obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x,z) \frac{\partial V}{\partial x_i}(x,z) + f(x,z) \frac{\partial V}{\partial z}(x,z) = 0,$$

care este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară.

Teorema 6.2.7. *Fie $G_0 \subset G$ deschisă şi fie $F_1(.), ..., F_n(.) : G_0 \to \mathbf{R}$ integrale prime funcţional independente ale sistemului.*

$$\begin{cases} x_i' = f_i(x,z), \quad i = 1, 2, ..., n, \\ z' = f(x,z). \end{cases}$$

Atunci soluţia generală a ecuaţiei (6.2.3) pe mulţimea G_0 este definită implicit de

$$H(F_1(x,z(x)), F_2(x,z(x)), ..., F_n(x,z(x))) = c,$$

unde $c \in \mathbf{R}$, $F(.,.) = (F_1(.,.), ..., F_n(.,.))$ *şi* $H(.) : F(G_0) \to \mathbf{R}$ *este o funcţie de clasă* C^1.

Demonstraţie. Rezultă imediat prin aplicarea Teoremei 6.2.3. □

6.3 Metoda caracteristicilor pentru ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi

Această secţiune este dedicată studiului ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întâi generale. Prezentăm *metoda caracteristicilor* care permite studiul unei ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întâi cu ajutorul unei ecuaţii (sistem) diferenţiale ordinare care se asociază unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi, aşa-numitul *sistem al caracteristicilor*. Prin urmare, rezultatele, pe care le vom prezenta în continuare, sunt aplicaţii ale teoriei generale a ecuaţiilor diferenţiale ordinare studiate în capitolele anterioare.

Definiţia 6.3.1. Funcţia $F(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ defineşte *ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I*

$$F(x, z, \frac{\partial z}{\partial x}) = 0. \tag{6.3.1}$$

Se numeşte *soluţie a ecuaţiei* (6.3.1) o funcţie $\varphi(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ diferenţiabilă, G deschisă, care verifică ecuaţia, adică

$$F(x, \varphi(x), D\varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in G. \tag{6.3.2}$$

În coordonate ecuaţia (6.3.1) devine

$$F((x_1, ..., x_n), z, (\frac{\partial z}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial z}{\partial x_n})) = 0,$$

iar dacă folosim notaţiile lui Monge

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,n}, \quad p = (p_1, ..., p_n),$$

ecuaţia poate fi rescrisă sub forma

$$F((x_1, ..., x_n), z, (p_1, ..., p_n)) = 0.$$

Daca $n = 1$, ecuaţia (6.3.1) este, de fapt, o ecuaţie diferenţială implicită de ordinul I

$$F(x, z, z') = 0.$$

Dacă $n = 2$ se utilizează, de obicei, notaţiile

$$(x_1, x_2) = (x, y), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

ecuaţia scriindu-se $F((x, y), z, (p, q)) = 0$.

Aşa cum în cazul ecuaţiilor diferenţiale ordinare, pentru a putea individualiza soluţiile unei ecuaţii diferenţiale este nevoie de o condiţie iniţială, la fel şi la ecuaţiile cu derivate parţiale este nevoie de condiţii suplimentare de acelaşi tip.

Definiţia 6.3.2. Fiind date funcţiile $F(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ şi $\varphi_0(.) : G_0 \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ spunem că $\varphi(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este soluţie a *problemei la limită* (F, φ_0) dacă $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (6.3.1) şi verifică *condiţia la limită*

$$\varphi(x) = \varphi_0(x), \quad \forall x \in G_0 \cap G.$$

În cele ce urmează vom considera doar situaţia în care graficul funcţiei date φ_0 este o mulţime parametrizată de două funcţii $\alpha(.), \beta(.)$,

$$Graph(\varphi_0(.)) = \{(\alpha(\sigma), \beta(\sigma)); \sigma \in A \subset \mathbf{R}^{n-1}\}.$$

Mulţimea $Graph(\varphi_0(.))$ se numeşte *varietate iniţială*.

Definiţia 6.3.3. Fiind date funcţiile $F(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\alpha(.) : A \subset \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^n$, $\beta(.) : A \to \mathbf{R}$ spunem că funcţia $\varphi(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este soluţie a *problemei la limită parametrizată* *pentru ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I* (F, α, β) dacă $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (6.3.1) şi $\varphi(.)$ verifică condiţia la limită

$$\varphi(\alpha(\sigma)) = \beta(\sigma), \quad \forall \sigma \in B = \{\sigma \in A; \alpha(\sigma) \in G\}.$$

Definiţia 6.3.4. Fiind date funcţiile $F(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\alpha(.) : A \subset \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^n$, $\beta(.) : A \to \mathbf{R}$, $\gamma(.) : A \to \mathbf{R}^n$ cu $\alpha(.)$ şi $\beta(.)$ diferenţiabile, iar $\gamma(.)$ verificând condiţiile de compatibilitate

$$\begin{array}{l} F(\alpha(\sigma), \beta(\sigma), \gamma(\sigma)) \equiv 0, \\ \gamma(\sigma) D\alpha(\sigma) \equiv D\beta(\sigma). \end{array} \tag{6.3.3}$$

spunem că funcţia $\varphi(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este soluţie a *problemei la limită compatibilă cu ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I* $(F, \alpha, \beta, \gamma)$ dacă $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (6.3.1) şi $\varphi(.)$ verifică condiţiile

$$\begin{array}{l} \varphi(\alpha(\sigma)) = \beta(\sigma), \quad \forall \sigma \in A, \\ D\varphi(\alpha(\sigma)) = \gamma(\sigma), \quad \forall \sigma \in A. \end{array} \tag{6.3.4}$$

Definiţia 6.3.5. Dacă $D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ este deschisă şi $F(.,.,.) : D \to \mathbf{R}$ este o funcţie de clasă C^1 atunci sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p}(x, z, p), \\ \frac{dz}{dt} = < p, \frac{\partial F}{\partial p}(x, z, p) >, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, z, p) - p\frac{\partial F}{\partial z}(x, z, p) \end{array} \right. \tag{6.3.5}$$

se numeşte *sistemul caracteristicilor asociat ecuaţiei* (6.3.1).

Observaţia 6.3.6. În coordonate sistemul caracteristicilor (6.3.5) devine

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}((x_1, ..., x_n), z, (p_1, ..., p_n)), \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}((x_1, ..., x_n), z, (p_1, ..., p_n)), \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}((x_1, ..., x_n), z, (p_1, ..., p_n)) - \\ -p_i \frac{\partial F}{\partial z}((x_1, ..., x_n), z, (p_1, ..., p_n)), \quad i = \overline{1, n}. \end{array} \right.$$

Trecem în revistă două proprietăţi remarcabile ale sistemului caracteristicilor.

Propoziţia 6.3.7. *Fie* $F(.,.,.) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, *o funcţie de clasă* C^1 *şi* $\varphi(.) : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, *o funcţie de clasă* C^2, *soluţie a ecuaţiei (6.3.1).*

Atunci pentru orice $x_0 \in G$ *există* $(X(.), Z(.), P(.)) : I_0 \in \mathcal{V}(0) \to D$ *soluţie a sistemului caracteristicilor (6.3.5), care, în plus verifică:* $X(0) = x_0$, $\varphi(X(t)) = Z(t)$, $\forall t \in I_0$ *şi* $D\varphi(X(t)) = P(t)$, $\forall t \in I_0$.

Demonstraţie. Considerăm următoarea problemă Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p}(x, \varphi(x), D\varphi(x)), \quad x(0) = x_0. \tag{6.3.6}$$

Observăm că, în ipotezele noastre, funcţia

$$f_\varphi(t, x) := \frac{\partial F}{\partial p}(x, \varphi(x), D\varphi(x))$$

este continuă, şi deci putem aplica Teorema 2.1.2 (Peano) pentru a deduce existenţa lui $X(.) : I_0 \in \mathcal{V}(0) \to G$ soluţie a problemei Cauchy considerate.

Definim $Z(.) : I_0 \to \mathbf{R}$, $P(.) : I_0 \to \mathbf{R}^n$ prin $Z(t) = \varphi(X(t))$, $P(t) = D\varphi(X(t))$, $t \in I_0$. Rămâne de demonstrat că $(X(.), Z(.), P(.))$ este soluţie a sistemului caracteristicilor. Din faptul că $X(.)$ verifică (6.3.6) şi din felul în care au fost definite $Z(.)$ şi $P(.)$ deducem imediat că

$$X'(t) \equiv \frac{\partial F}{\partial p}(X(t), Z(t), P(t)).$$

Pe de altă parte, din definiţia lui $Z(.)$ şi (6.3.6) avem

$$Z'(t) \equiv D\varphi(X(t))X'(t) \equiv < P(t), \frac{\partial F}{\partial p}(X(t), Z(t), P(t)) > .$$

În final, dacă derivăm în raport cu x identitatea (6.3.2) obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x), D\varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, \varphi(x), D\varphi(x))D\varphi(x) +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial p}(x, \varphi(x), D\varphi(x))D^2\varphi(x) \equiv 0,$$

şi dacă luăm $x = X(t)$, $t \in I_0$ obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial p}(X(t), Z(t), P(t))D^2\varphi(X(t)) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial F}{\partial x}(X(t), Z(t), P(t)) - \frac{\partial F}{\partial z}(X(t), Z(t), P(t))P(t).$$

Din definiţia lui $P(.)$ şi prima ecuaţie a sistemului (6.3.5)

$$P'(t) \equiv D^2\varphi(X(t)).X'(t) \equiv D^2\varphi(X(t)).\frac{\partial F}{\partial p}(X(t), Z(t), P(t)).$$

Din ultimele două egalităţi deducem că şi cea de-a treia ecuaţie a sistemului (6.3.5) este verificată. □

Propoziţia 6.3.8. *Dacă $F(., ., .) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, care defineşte ecuaţia (6.3.1) este clasă C^1, atunci $F(., ., .)$ este integrală primă pentru sistemul caracteristicilor (6.3.5).*

Demonstraţie. Se aplică Teorema 6.1.2 (criteriul pentru integrale prime). □

Definiţia 6.3.9. Fie $F(., ., .) : D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\alpha(.) : A \subset \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^n$, $\beta(.) : A \to \mathbf{R}$, $\gamma(.) : A \to \mathbf{R}^n$ funcţii de clasă C^1 astfel încât $(F, \alpha, \beta, \gamma)$ este o problemă la limită compatibilă cu ecuaţia (6.3.1).

Se numeşte *curentul caracteristicilor asociat problemei* $(F, \alpha, \beta, \gamma)$ funcţia $C(., .) = (X(., .), Z(., .), P(., .)) : \Omega \subset \mathbf{R} \times A \to D$ cu proprietatea că $\forall \sigma \in A$, $C(., \sigma) : I(\sigma) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ este soluţie maximală a sistemului caracteristicilor (6.3.5) care verifică condiţia iniţială

$$C(0, \sigma) = (\alpha(\sigma), \beta(\sigma), \gamma(\sigma)), \quad \sigma \in A. \tag{6.3.7}$$

Principalul rezultat al acestei secţiuni este cunoscut sub denumirea de teorema asupra metodei caracteristicilor.

Teorema 6.3.10. *Fie $D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^{n-1}$ deschise, $F(., ., .) : D \to \mathbf{R}$ de clasă C^2 şi $\alpha(.), \gamma(.) : A \to \mathbf{R}^n$, $\beta(.) : A \to \mathbf{R}$ de clasă C^1 astfel încât $(F, \alpha, \beta, \gamma)$ este o problemă la limită compatibilă cu ecuaţia (6.3.1).*

Fie $C(.,.) = (X(.,.), Z(.,.), P(.,.)) : \Omega \subset \mathbf{R} \times A \to D$ *curentul caracteristicilor asociat problemei* $(F, \alpha, \beta, \gamma)$*, despre care presupunem că există* $\Omega_0 \subset \Omega$ *deschisă astfel încât* $X(.,.)|_{\Omega_0}$ *este un difeomorfism de clasă* C^1 *cu inversa*

$$(X(.,.)|_{\Omega_0})^{-1} = (T(.), \Sigma(.))$$

şi astfel încât $\{\sigma \in A; (0,\sigma) \in \Omega_0\} \neq \emptyset$.

Atunci funcţia $\varphi(.) : G := X(\Omega_0) \to \mathbf{R}$ *definită prin* $\varphi(x) = (T(x), \Sigma(x))$ *este soluţie a problemei la limită* $(F, \alpha, \beta, \gamma)$.

Demonstraţie. Faptul că $(T(.), \Sigma(.))$ este inversa lui $X(.,.)$ pe Ω_0 se scrie sub forma

$$\begin{aligned} &T(X(t,\sigma)) = t, \Sigma(X(t,\sigma)) = \sigma, \quad \forall (t,\sigma) \in \Omega_0, \\ &X(T(x), \Sigma(x)) = x, \quad \forall x \in G. \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Vom structura demonstraţia în mai mulţi paşi.

Pasul 1. $\varphi(.)$ verifică condiţia la limită $\varphi(\alpha(\sigma)) = \beta(\sigma)$, $\sigma \in A$.

Într-adevăr, din definiţia lui $\varphi(.)$ şi (6.3.8) avem

$$\varphi(\alpha(\sigma)) \equiv Z(T(\alpha(\sigma)), \Sigma(\alpha(\sigma))) \equiv$$

$$\equiv Z(T(X(0,\sigma)), \Sigma(X(0,\sigma))) \equiv Z(0,\sigma) \equiv \beta(\sigma).$$

Pasul 2. $C(.,.)$ este de clasă C^1 şi verifică identitatea

$$DZ(t,\sigma) = P(t,\sigma) DX(t,\sigma), \quad \forall (t,\sigma) \in \Omega_0. \tag{6.3.9}$$

Faptul că $C(.,.)$ este de clasă C^1 rezultă imediat din ipoteza că F este de clasă C^2; de unde va rezulta că funcţia f care defineşte sistemul caracteristicilor (6.3.5) este de clasă C^1 şi deci curentul său maximal $x_f(.,.,.)$ este de clasă C^1. Cum

$$C(t,\sigma) \equiv x_f(t, 0, (\alpha(\sigma), \beta(\sigma), \gamma(\sigma)))$$

rezultă că aplicaţia $C(.,.)$ este de clasă C^1.

Demonstraţia identităţii (6.3.9) revine la demonstraţia următoarelor identităţi

$$D_1 Z(t,\sigma) \equiv < P(t,\sigma), D_1 X(t,\sigma) >, \tag{6.3.10}$$

$$D_2 Z(t,\sigma) \equiv P(t,\sigma) D_2 X(t,\sigma). \tag{6.3.11}$$

Egalitatea (6.3.10) rezultă imediat din faptul că $C(.,\sigma)$ este soluţie a sistemului caracteristicilor.

Pentru a demonstra egalitatea (6.3.11), fie $\sigma \in A$ arbitrar şi fie $w(.) : I(\sigma) \to \mathbf{R}^{n-1}$

$$w(t) = D_2 Z(t,\sigma) - P(t,\sigma) D_2 X(t,\sigma).$$

Un calcul destul de laborios, dar elementar pe care îl lăsăm ca exerciţiu cititorului, arată că $w(.)$ verifică următoarea problemă Cauchy

$$w' = -\frac{\partial F}{\partial z}(C(t,\sigma))w, \quad w(0) = 0.$$

Deci $w(.)$ este soluţie a unei ecuaţii liniare care se anulează la momentul 0; deci în baza Corolarului 3.1.3 deducem că $w(t) \equiv 0$, adică (6.3.11).

Pasul 3. $\varphi(.)$ verifică condiţia $D\varphi(\alpha(\sigma)) = \gamma(\sigma)$, $\sigma \in A$.

Din definiţia lui $\varphi(.)$, derivând în egalitatea (6.3.8) şi folosind egalitatea (6.3.9) avem succesiv

$$D\varphi(x) = DZ(T(x), \Sigma(x)).D(T,\Sigma)(x) = P(T(x),\Sigma(x)).$$

$$.DX(T(x),\Sigma(x)).D(X(.,.)|_{\Omega_0})^{-1}(x) = P(T(x),\Sigma(x)) \tag{6.3.12}$$

Folosind din nou (6.3.8)

$$D\varphi(\alpha(\sigma)) \equiv P(T(\alpha(\sigma)), \Sigma(\alpha(\sigma))) \equiv$$

$$\equiv P(T(X(0,\sigma)), \Sigma(X(0,\sigma))) \equiv P(0,\sigma) \equiv \gamma(\sigma).$$

Pasul 4. $\varphi(.)$ verifică condiţia (6.3.1).

Din Propoziţia 6.3.8 deducem că există $c \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$F(X(t,\sigma), Z(t,\sigma), P(t,\sigma)) = c, \quad \forall (t,\sigma) \in \Omega_0.$$

În particular, pentru $t = 0$ din condiţia (6.3.3) deducem $c = 0$. Deci

$$F(X(t,\sigma), Z(t,\sigma), P(t,\sigma)) \equiv 0.$$

Pentru $t = T(x), \sigma = \Sigma(x)$, $x \in G$ utilizând iar (6.3.8) şi (6.3.12) deducem

$$F(x, \varphi(x), D\varphi(x)) \equiv 0.$$

Prin urmare, pe baza afirmaţiilor de la Paşii 1,3 şi 4 teorema este complet demonstrată. □

Din Propoziţia 6.3.7 şi Teorema 6.3.10 se obţine o teoremă privitoare la existenţa şi unicitatea unei soluţii locale pentru o problemă la limită parametrizată.

Teorema 6.3.11. *Fie $D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^{n-1}$ deschise, $F(.,.,.) : D \to \mathbf{R}$, $\alpha(.) : A \to \mathbf{R}^n$, $\beta(.) : A \to \mathbf{R}$ funcţii de clasă C^2, $\sigma_0 \in A$, $p_0 \in \mathbf{R}^n$ astfel încât $(\alpha(\sigma_0), \beta(\sigma_0), p_0) \in D$ şi sunt verificate condiţiile*

$$F(\alpha(\sigma_0), \beta(\sigma_0), p_0) = 0,$$
$$p_0.D\alpha(\sigma_0) = D\beta(\sigma_0),$$
$$det(\frac{\partial F}{\partial p}(\alpha(\sigma_0), \beta(\sigma_0), p_0), \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_1}(\sigma_0), ..., \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_{n-1}}(\sigma_0)) \neq 0.$$

Atunci există $G_0 \in \mathcal{V}(\alpha(\sigma_0))$ şi există în mod unic $\varphi_0(.) : G_0 \to \mathbf{R}$ de clasă C^2 soluţie a problemei la limită $(F, (\alpha, \beta)|_{A_0})$, unde $A_0 := \{\sigma \in A; \alpha(\sigma) \in G_0\}$ care satiface $D\varphi(\alpha(\sigma_0)) = p_0$.

În plus, există $A_1 \in \mathcal{V}(\sigma_0)$ şi există în mod unic $\gamma(.) : A_1 \to \mathbf{R}^n$ de clasă C^1 astfel încât $\gamma(\sigma_0) = p_0$ şi astfel încât $(F, (\alpha, \beta, \gamma)|_{A_1})$ este problemă la limită compatibilă cu ecuaţia (6.3.1) şi $\varphi(.)$ este soluţie a problemei $(F, (\alpha, \beta, \gamma)|_{A_1})$.

Demonstraţia Teoremei 6.3.11 se poate consulta în lucrarea [10].

Observaţia 6.3.12. În baza rezultatelor anterioare, pentru determinarea soluţiilor unei probleme la limită (F, φ_0) unde F este o funcţie de clasă C^2 trebuie parcurse următoarele etape.

– se determină o parametrizare (de clasă C^1) $(\alpha(.), \beta(.))$ a varietăţii iniţiale.

– se determină funcţia $\gamma(.)$, rezolvând sistemul algebric (6.3.3) cu necunoscuta $\gamma(\sigma)$.

– se integrează sistemul caracteristicilor (6.3.5) care satisface condiţia iniţială $x(0) = \alpha(\sigma)$, $z(0) = \beta(\sigma)$, $p(0) = \gamma(\sigma)$, $\sigma \in A$.

– se scrie
$$\begin{cases} x = X(t,\sigma), \\ z = Z(t,\sigma), \quad \sigma \in A, t \in I(\sigma) \end{cases}$$
soluţia sub formă parametrică.

– se inversează (dacă este posibil) $X(.,.)$ (pe un domeniu maximal) obţinându-se $t = T(x)$, $\sigma = \Sigma(x)$ şi se scrie soluţia explicită $\varphi(x) = Z(T(x), \Sigma(x))$.

Exemplul 6.3.13. Să se rezolve problema la limită
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)x^2 + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)x + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)y + z(x,y) = 0, \quad z(1,y) = y.$$

În notaţiile lui Monge problema se rescrie sub forma
$$pqx^2 + px + qy + z = 0, \quad x = 1, z = y.$$
Ca atare, $F((x,y), z, (p,q)) = pqx^2 + px + qy + z$. Parametrizăm mai întâi condiţia la limită. Este natural să alegem parametrizarea
$$x = 1, \quad y = \sigma, \quad z = \sigma.$$
adică $\alpha(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \end{pmatrix}$, $\beta(\sigma) = \sigma$.

Determinăm valorile iniţiale ale variabilelor p şi q, rezolvând sistemul algebric
$$\begin{cases} F(\alpha(\sigma), \beta(\sigma), (p,q)) = 0, \\ (p,q)D\alpha(\sigma) = D\beta(\sigma), \end{cases}$$
care în cazul nostru este
$$\begin{cases} pq + p + q\sigma + \sigma = 0, \\ (p,q)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \end{cases}$$
cu soluţia $\gamma(\sigma) = (-\sigma, 1)$.

Integrăm sistemul caracteristicilor
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p}(x,y,z,p,q), \quad x(0) = pr_1\alpha(\sigma), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}(x,y,z,p,q), \quad y(0) = pr_2\alpha(\sigma), \\ \frac{dz}{dt} = p.\frac{\partial F}{\partial p}(x,y,z,p,q) + q.\frac{\partial F}{\partial q}(x,y,z,p,q), \quad z(0) = \beta(\sigma), \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,p,q) - p\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,p,q), \quad p(0) = pr_1\gamma(\sigma), \\ \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,p,q) - q\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,p,q), \quad q(0) = pr_2\gamma(\sigma). \end{cases}$$

care, în cazul nostru, este

$$\begin{cases} x' = qx^2 + x, \quad x(0) = 1, \\ y' = px^2 + y, \quad y(0) = \sigma, \\ z' = 2pqx^2 + px + qy, \quad z(0) = \sigma, \\ p' = -2pqx - 2p, \quad p(0) = -\sigma, \\ q' = -2q, \quad q(0) = 1. \end{cases}$$

Ecuaţia în q este independentă; cum este liniară scalară se va determina q. Acesta va fi introdus în prima ecuaţie, care acum este o ecuaţie Bernoulli şi îl vom determina pe x. Din a patra ecuaţie, care în acest moment este liniară scalară, îl găsim pe p. Apoi ecuaţia a doua devine ecuaţie afină scalară, de unde îl determinăm pe y. În final, z se găseşte fie din ecuaţia sa, fie folosind faptul că $F(.,.,.)$ este integrală primă a sistemului caracteristicilor, care se anulează pe o soluţie a sistemului caracteristicilor.

Să trecem la realizarea acestui plan.

Considerăm ecuaţia liniară scalară

$$q' = -2q, \quad q(0) = 1$$

cu soluţia $q(t, \sigma) \equiv e^{-2t}$.

Prima ecuaţie devine

$$x' = x + e^{-2t}x^2, \quad x(0) = 1,$$

aşadar ecuaţie de tip Bernoulli. Folosind metoda variaţiei constantelor găsim soluţia generală $x_0(t) \equiv 0$, $x_c(t) \equiv \frac{e^t}{e^{-t}+c}$, $c \in \mathbf{R}$. Din condiţia iniţială $x(0) = 1$ deducem $x(t, \sigma) \equiv e^{2t}$.

Ecuaţia a patra devine

$$p' = -4p, \quad p(0) = -\sigma,$$

care este liniară scalară cu soluţia $p(t, \sigma) \equiv -\sigma e^{-4t}$.

În final, ecuaţia a doua se scrie acum

$$y' = y - \sigma, \quad y(0) = \sigma,$$

Fiind o ecuaţie afină scalară cu metoda variaţiei constantelor deducem $y(t, \sigma) \equiv \sigma$.

În cele din urmă, ţinând seama de faptul că $F(.,.,.)$ se anulează pe o soluţie a sistemului caracteristicilor, obţinem

$$z(t,\sigma) \equiv -p(t,\sigma)q(t,\sigma)x^2(t,\sigma) + p(t,\sigma)x(t,\sigma) - q(t,\sigma)y(t,\sigma).$$

Deci $z(t,\sigma) \equiv \sigma e^{-2t}$.

Expresiile

$$\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \sigma, \\ z = \sigma e^{-2t}, \end{cases} \tag{6.3.13}$$

reprezintă soluţia soluţia sub formă parametrică a problemei considerate.

Rezolvând în raport cu t şi σ primele două ecuaţii obţinem $e^{2t} = x$ şi $\sigma = y$ şi înlocuind în a treia relaţie din (6.3.13) obţinem soluţia explicită

$$z(x,y) = \frac{y}{x}.$$

7

Noţiuni şi rezultate complementare

Ultimul capitol al acestei cărţi este consacrat unor clase de ecuaţii diferenţiale care din diverse motive nu îşi găsesc locul în cadrul teoretic dezvoltat anterior. Astfel, în prima secţiune se demonstrează că o problemă Cauchy are numai soluţii analitice ori de câte ori funcţia care defineşte ecuaţia este analitică. În secţiunea a doua sunt prezentate câteva concepte şi rezultate din vastul domeniu al stabilităţii soluţiilor sistemlor de ecuaţii diferenţiale. Ultima secţiune este dedicată ecuaţiilor cu diferenţiale totale, ecuaţii care mai sunt cunoscute şi sub titulatura de sisteme de tip gradient.

7.1 Soluţii analitice locale

În această secţiune vom demonstra cu ajutorul aşa numitei „metode a majorantelor" că atunci când funcţia care defineşte o ecuaţie diferenţială este analitică atunci unica soluţie a unei probleme Cauchy ataşate este, de asemenea, o funcţie analitică pe domeniul său de definiţie. Acest rezultat permite căutarea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale definite de funcţii analitice sub forma unei serii de puteri.

Considerăm o funcţie $f(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia diferenţială

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{7.1.1}$$

Teorema 7.1.1. *Dacă $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ este deschisă şi $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie analitică care defineşte ecuaţia (7.1.1), atunci $\forall (t_0, x_0) \in D$ $\exists r_0 > 0$ şi $\exists! \varphi(.) : B_{r_0}(t_0) \to \mathbf{R}^n$ analitică, soluţie a ecuaţiei (7.1.1) care verifică condiţia iniţială $\varphi(t_0) = x_0$.*

Demonstraţie. Să notăm la început că putem presupune, fără a restrânge generalitatea că $t_0 = 0 \in \mathbf{R}$ şi $x_0 = 0 \in \mathbf{R}^n$. Într-adevăr, dacă nu ar fi aşa, schimbarea de variabilă $\tau = t - t_0$, $y = x - x_0$ conduce la o ecuaţie diferenţială de acelaşi tip, dar cu datele iniţiale $(0,0) \in D$.

Funcţia $f(.,.)$ fiind analitică pe D rezultă că verifică ipotezele Corolarului 2.3.8. Rămâne, aşadar, de demonstrat că unica soluţie maximală a problemei Cauchy $(f, 0, 0)$ este analitică în 0 şi, deci, analitică, în orice punct din D.

Pentru început să remarcăm că dacă $\varphi(.) = (\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)) : B_r(0) \to \mathbf{R}^n$ este soluţie a ecuaţiei (7.1.1) atunci, pentru orice $i = \overline{1,n}$ avem

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^i t^k, \quad \text{unde} \quad b_k^i = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \varphi_i}{\partial t^k}(0) \tag{7.1.2}$$

Să observăm că toţi coeficienţii b_k^i din (7.1.2) sunt bine definiţi (pentru că $f(.,.)$ este de clasă C^∞, atunci şi $\varphi(.)$ soluţia ecuaţiei (7.1.1) este de clasă C^∞) şi, în plus, aceşti coeficienţi se exprimă cu ajutorul lui $f(0,0)$ şi a derivatelor parţiale ale funcţiei $f(.,.)$ calculate în $(0,0)$. De exemplu,

$$b_0^i = \varphi_i(0) = 0, \quad b_1^i = \varphi_i'(0) = f_i(0,0),$$

$$b_2^i = \varphi_i''(0) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}(0,0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0) f_j(0,0)\right), \quad \text{etc.},$$

unde am notat componentele lui f cu $(f_1, ..., f_n)$.

În continuarea demonstraţiei vom determina o funcţie $g : B_r(0) \times (B_\rho(0))^n \to \mathbf{R}$ cu $r > 0$, $\rho > 0$ aleşi convenabili şi cu proprietatea că g împreună cu derivatele sale sunt pozitive în $(0,0)$ şi satisfac inegalităţiile

$$\left|\frac{\partial^{p_0+p_1+...p_n} f_i}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} ... \partial x_n^{p_n}}(0,0)\right| \le \frac{\partial^{p_0+p_1+...p_n} g}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} ... \partial x_n^{p_n}}(0,0), \quad i = \overline{1,n}. \tag{7.1.3}$$

Pentru aceasta folosim ipoteza că funcţia $f = (f_1, ..., f_n)$ este analitică. Există, deci, $r > 0$, $\rho > 0$ astfel încât

$$f_i(t,x) = \sum_{p_0,p_1,...,p_n \in \mathbf{N}} a^i_{p_0,p_1,...,p_n} t^{p_0} x_1^{p_1} ... x_n^{p_n}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{7.1.4}$$

pentru orice $(t,x) \in B_r(0) \times (B_\rho(0))^n$ unde coeficienţii $a^i_{p_0,p_1,...,p_n}$ sunt daţi de

$$a^i_{p_0,p_1,...,p_n} = \frac{1}{p_0!p_1!...p_n!} \frac{\partial^{p_0+p_1+...p_n} f_i}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} ... \partial x_n^{p_n}}(0,0). \tag{7.1.5}$$

Mai mult, cum seriile din (7.1.4) sunt convergente, rezultă că există $M > 0$ astfel încât

$$|a^i_{p_0,p_1,...,p_n} r^{p_0} \rho^{p_1+...+p_n}| \leq M, \quad \forall i = \overline{1,n}, p_0, p_1, ..., p_n \in \mathbf{N}.$$

Din această inegalitate şi din (7.1.5) deducem

$$\left|\frac{\partial^{p_0+p_1+...p_n} f_i}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} ... \partial x_n^{p_n}}(0,0)\right| \leq M \frac{p_0!p_1!...p_n!}{r^{p_0} \rho^{p_1+...+p_n}}, \quad \forall i = \overline{1,n}, p_0, p_1, ..., p_n \in \mathbf{N}.$$

Această inegalitate sugerează alegerea lui $g(.)$ astfel încât

$$\frac{\partial^{p_0+p_1+...p_n} g}{\partial t^{p_0} \partial x_1^{p_1} ... \partial x_n^{p_n}}(0,0) = M \frac{p_0!p_1!...p_n!}{r^{p_0} \rho^{p_1+...+p_n}}, \quad \forall p_0, p_1, ..., p_n \in \mathbf{N}.$$

Este clar, că această condiţie este verificată de funcţia următoare

$$g(t,x) = M \sum_{p_0,p_1,...,p_n \in \mathbf{N}} (\frac{t}{r})^{p_0} (\frac{x_1}{\rho})^{p_1} ... (\frac{x_n}{\rho})^{p_n} =$$

$$= M \frac{1}{1-\frac{t}{r}} \frac{1}{1-\frac{x_1}{\rho}} ... \frac{1}{1-\frac{x_n}{\rho}}, \quad \forall (t,x) \in B_r(0) \times (B_\rho(0))^n.$$

Definim, acum, funcţia $F(.,.) : B_r(0) \times (B_\rho(0))^n \to \mathbf{R}^n$ prin

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} g(t,x) \\ g(t,x) \\ ... \\ g(t,x) \end{pmatrix}$$

şi considerăm problema Cauchy

$$y' = F(t, y), \quad y(0) = 0. \tag{7.1.6}$$

Problema Cauchy (7.1.6) poate fi rescrisă sub forma

$$y_i' = g(t, (y_1, ..., y_n)), \quad y_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Deci, $y_1'(t) = ... = y_n'(t)$, $\forall t \in B_r(0)$ şi $y_1(0) = ... = y_n(0)$, de unde rezultă că $y_1(t) = ... = y_n(t) = y_0(t)$, $\forall t \in B_r(0)$, unde $y_0(.)$ este unica soluţie a problemei

$$y_0' = g(t, y_0, ..., y_0), \quad y_0(0) = 0,$$

care poate fi rescrisă sub forma

$$y_0' = M \frac{1}{1 - \frac{t}{r}} \frac{1}{(1 - \frac{y_0}{\rho})^n}, \quad y_0(0) = 0,$$

adică o ecuaţie cu variabile separabile, a cărei soluţie poate fi găsită efectiv, anume

$$y_0(t) = \rho(1 - \sqrt[n+1]{1 + \frac{(n+1)Mr}{\rho} ln(1 - \frac{t}{r})}),$$

cu $t \in B_{r_0}(0)$, unde $r_0 \in (0, r]$ este convenabil ales. Evident, funcţia $y_0(.)$ este analitică.

Prin urmare, problema (7.1.6) are (local) o soluţie analitică de forma

$$y_i(t) = \sum_{k \geq 0} c_k^i t^k, \quad \text{cu} \quad c_k^i = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k y_i}{\partial t^k}(0), i = \overline{1, n}. \tag{7.1.7}$$

Cum toţi coeficienţii c_k^i se exprimă cu ajutorul valorilor funcţiei F şi a derivatelor ei în $(0, 0)$ cu aceleaşi expresii cu care se exprimă coeficienţii b_k^i prin intermediul funcţiei f şi a derivatelor ei în $(0, 0)$; din (7.1.3) obţinem

$$|b_k^i| \leq c_k^i \quad i = \overline{1, n}, k \in \mathbf{N}^*. \tag{7.1.8}$$

Din (7.1.8) şi din convergenţa seriilor din (7.1.7) rezultă convergenţa seriilor din (7.1.2) şi demonstraţia este încheiată. $\square$

Exemplul 7.1.2. Să se rezolve problema Cauchy

$$x'' - 2tx' - 2x, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0.$$

Cum avem o ecuaţie cu coeficienţi funcţii analitice pe $\mathbf{R}$, orice soluţie a ecuaţiei va fi de forma $x(t) = \sum_{n\geq 0} c_n t^n$ cu $c_n \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Derivând succesiv găsim

$$x'(t) = \sum_{n\geq 1} nc_n t^{n-1}, \quad x''(t) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)c_n t^{n-2}.$$

Din condiţia ca $x(.)$ să verifice ecuaţia găsim formula de recurenţă

$$c_{n+2} = \frac{2c_n}{n+2}, \quad n \geq 0.$$

Din condiţiile iniţiale obţinem $c_0 = 1$ şi $c_1 = 0$. Prin urmare, din formula de recurenţa de mai sus deducem

$$c_{2n} = \frac{1}{n!} \quad \text{şi} \quad c_{2n+1} = 0, \quad n \geq 0.$$

Aşadar, soluţia căutată este $x(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^{2n} = e^{t^2}$, $t \in \mathbf{R}$. Evident, raza de convergenţă a seriei de puteri care-l dă pe $x(t)$ este ∞.

7.2 Elemente de teoria stabilităţii

Definiţia neformală a stabilităţii este proprietatea sistem de a nu-şi modifica considerabil evoluţia în urma unor mici perturbări ale stării iniţiale. Această formulare ne-riguroasă, care a provenit din considerente practice (în special din mecanică) se traduce în teoria ecuaţiilor diferenţiale prin mai multe concepte, care descriu diverse tipuri de continuitate a soluţiei unei ecuaţii diferenţiale ca funcţie de datele iniţiale.

Fie $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$, $D = [0,\infty) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ care defineşte ecuaţia diferenţială

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x). \tag{7.2.1}$$

Presupunem că problema Cauchy (f, t_0, x_0) are soluţie unică $\forall(t_0, x_0) \in D$. De asemenea, presupunem că ecuaţia (7.2.1) are o soluţie $\varphi(.) : [0,\infty) \to \Omega$.

Definiţia 7.2.1. a) Soluţia $\varphi(.) : [0, \infty) \to \Omega$ a ecuaţiei (7.2.1) se numeşte *(simplu) stabilă* dacă pentru orice $\epsilon > 0$ şi orice $t_0 \geq 0$ există $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ astfel încât pentru orice $x_0 \in \Omega$ cu $||x_0 - \varphi(t_0)|| \leq \delta(\epsilon, t_0)$, unica soluţie maximală $x(., t_0, x_0)$ a ecuaţiei (7.2.1) care verifică $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ este definită pe $[t_0, +\infty)$ şi

$$||x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)|| \leq \epsilon, \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

b) Soluţia $\varphi(.) : [0, \infty) \to \Omega$ a ecuaţiei (7.2.1) se numeşte *uniform stabilă* dacă este stabilă şi $\delta(\epsilon, t_0)$ din proprietatea a) nu depinde de $t_0 \geq 0$.

c) Soluţia $\varphi(.) : [0, \infty) \to \Omega$ a ecuaţiei (7.2.1) se numeşte *asimptotic stabilă* dacă este stabilă şi dacă pentru orice $t_0 \geq 0$ există $\mu(t_0) > 0$ astfel încât pentru orice $x_0 \in \Omega$ cu $||x_0 - \varphi(t_0)|| \leq \mu(t_0)$, unica soluţie maximală $x(., t_0, x_0)$ a ecuaţiei (7.2.1) care verifică $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ este definită pe $[t_0, +\infty)$ şi

$$\lim_{t \to \infty} ||x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)|| = 0.$$

d) Soluţia $\varphi(.) : [0, \infty) \to \Omega$ a ecuaţiei (7.2.1) se numeşte *uniform asimptotic stabilă* dacă este uniform stabilă şi dacă există $\mu > 0$ astfel încât $\forall t_0 \geq 0$, $\forall x_0 \in \Omega$ cu $||x_0 - \varphi(t_0)|| \leq \mu$ unica soluţie maximală $x(., t_0, x_0)$ a ecuaţiei (7.2.1) care verifică $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ este definită pe $[t_0, \infty)$ şi $\forall \epsilon > 0$, $\exists t_0(\epsilon) > 0$ astfel încât $\forall t_0 \geq 0$, $\forall x_0 \in \Omega$ cu $||x_0 - \varphi(t_0)|| \leq \mu$ şi orice $t \geq t_0 + t_0(\epsilon)$ avem

$$||x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)|| \leq \epsilon.$$

Observaţia 7.2.2. Este imediat din definiţia precedentă că orice soluţie $\varphi(.)$ a ecuaţiei (7.2.1) care este uniform asimptotic stabilă este atât uniform stabilă cât şi asimptotic stabilă. De asemenea, orice soluţie uniform sau asimptotic stabilă este (simplu) stabilă. Pe de altă parte, stabilitatea simplă nu implică stabilitatea uniformă, iar stabilitatea uniformă nu o implică pe cea uniform asimptotică.

Observaţia 7.2.3. Prin schimbarea de variabilă $y = x - \varphi(t)$ studiul oricarui tip de stabilitate referitor la soluţia $\varphi(.)$ se reduce la studiul aceluiaşi tip de stabilitate referitor la soluţia identic nulă a ecuaţiei diferenţiale

$$y' = f(t, y + \varphi(t)) - \varphi'(t).$$

De aceea, se poate admite că $0 \in \Omega$, $f(t, 0) = 0$ şi se va studia doar stabilitatea soluţiei identic nule, $\varphi_0(t) \equiv 0$, a ecuaţiei (7.2.1).

Considerăm, în continuare, ecuaţiile diferenţiale liniare de forma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{7.2.2}$$

unde $A(.) : [0, +\infty) \to M_n(\mathbf{R})$ este o funcţie continuă.

Observaţia 7.2.4. Dacă, în general, stabilitatea este o proprietate a soluţiei şi nu a ecuaţiei, în cazul sistemelor liniare, deoarece prin schimbarea de variabilă $y = x - \varphi(t)$, soluţia $\varphi(.)$ a ecuaţiei (7.2.2) se transformă în soluţia identic nulă a ecuaţiei (7.2.2). Rezultă că dacă soluţia identic nulă a ecuaţiei (7.2.2) este stabilă (respectiv, asimptotic stabilă, uniform stabilă, uniform asimptotic stabilă) atunci toate soluţiile ecuaţiei (7.2.2) sunt stabile (respectiv, asimptotic stabile, uniform stabile, uniform asimptotic stabile). Din acest motiv vom vorbi, în continuare, despre stabilitatea ecuaţiei (7.2.2) şi vom înţelege stabilitatea soluţiei identic nule (sau a oricărei soluţii maximale).

Referitor la stabilitatea ecuaţiilor liniare (7.2.2) are loc următorul rezultat.

Teorema 7.2.5. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

a) Ecuaţia (7.2.2) este stabilă.

b) Ecuaţia (7.2.2) are un sistem fundamental de soluţii marginite pe $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$.

c) Toate soluţiile maximale ale ecuaţiei (7.2.2) sunt mărginite pe $\mathbf{R}_+$.

d) Toate matricile fundamentale de soluţii ale ecuaţiei (7.2.2) sunt mărginite pe $\mathbf{R}_+$.

e) Ecuaţia (7.2.2) are o matrice fundamentală de soluţii mărginită pe $\mathbf{R}_+$.

Demonstraţie. Implicaţiile b) $\Rightarrow$ c), c) $\Rightarrow$ d), d) $\Rightarrow$ e) sunt evidente.

a) $\Rightarrow$ b). Din definiţia stabilităţii pentru $\epsilon = 1$, $t_0 = 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$ cu $||x_0|| \leq \delta$ avem $||x(t, 0, x_0)|| \leq 1$. Dacă luăm n vectori liniari independenţi din $B_\delta(0)$ atunci cele n soluţii maximale care au ca date iniţiale pe 0 şi pe cei n vectori aleşi sunt mărginite pe $\mathbf{R}_+$ şi formează un sistem fundamental de soluţii.

e) $\Rightarrow$ a). Fie $X(.)$ o matrice fundamentală de soluţii a ecuaţiei (7.2.2). Conform Observaţiei 3.1.12 $\forall t \geq t_0$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$ unica soluţie maximală $x(., t_0, x_0)$ a lui (7.2.2) este

$$x(t, t_0, x_0) = X(t)(X(t_0))^{-1}x_0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Fie $M > 0$ astfel încât $||X(t)|| \leq M$.

Deci $||x(t, t_0, x_0)|| \leq M||(X(t_0))^{-1}||.||x_0||$ şi dacă luăm pentru $\epsilon > 0$ şi $t_0 \geq 0$ $\delta(\epsilon, t_0) = \frac{\epsilon}{M||(X(t_0))^{-1}||}$ rezultă afirmaţia dorită. $\square$

Observaţia 7.2.6. Afirmaţii asemănătoare celor din Teorema 7.2.5 se pot formula şi pentru celelalte tipuri de stabilitate.

Considerăm, mai departe, ecuaţiile liniare cu coeficienţi constanţi de forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{7.2.3}$$

unde $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Reamintim că matricea A se numeşte *hurwitziană* dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice $det(A - \lambda I_n) = 0$ au partea reală strict negativă.

Teorema 7.2.7. *Dacă ecuaţia (7.2.3) este asimptotic stabilă atunci A este hurwitziană. Dacă matricea A este hurwitziană atunci ecuaţia (7.2.3) este uniform asimptotic stabilă.*

Pentru demonstraţia teoremei se poate consulta lucrarea [4].

În cele ce urmează vom considera ecuaţii diferenţiale ,,perturbate" de forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b(t, x), \tag{7.2.4}$$

unde $A \in M_n(\mathbf{R})$, $b(.,.) : D = \mathbf{R}_+ \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument, $b(t, 0) = 0\ \forall t \geq 0$.

Denumirea de *ecuaţie (sistem) perturbat* e ecuaţiei (7.2.4) este justificată de considerarea ecuaţiei (7.2.4) ca provenind din ecuaţia (7.2.3) la care s-a adăugat *funcţia perturbatoare* $b(.,.)$.

Următorul rezultat este cunoscut ca Teorema Poincaré-Liapunov.

Teorema 7.2.8. *Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $b(.,.) : D = \mathbf{R}_+ \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă şi local lipschitziană în raport cu al doilea argument, $b(t, 0) \equiv 0$ care definesc ecuaţia (7.2.4).*

Dacă există $M \geq 1, L > 0$ şi $\omega > 0$ astfel încât

$$||\exp(tA)|| \leq M.e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \tag{7.2.5}$$

$$||b(t, x)|| \leq L||x||, \quad \forall (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega, \tag{7.2.6}$$

$$LM - \omega < 0, \tag{7.2.7}$$

atunci soluţia nulă a ecuaţiei (7.2.4) este asimptotic stabilă.

Demonstraţie. Fie $t_0 \in \mathbf{R}_+, x_0 \in \mathbf{R}^n$ şi fie $x(., t_0, x_0) : [t_0, t^+(t_0, x_0)) \to \Omega$ soluţia maximală a ecuaţiei (7.2.1) care satisface $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Vom arăta, pentru început, că, dacă $||x_0||$ este suficient de mică, atunci $x(., t_0, x_0)$ este definită pe $[t_0, \infty)$. Având în vedere formula variaţiei constantelor (Corolarul 3.3.8) pentru $t \in [t_0, t^+(t_0, x_0))$ avem

$$x(t, t_0, x_0) = \exp((t - t_0)A)x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp((t - s)A)b(s, x(s, t_0, x_0))ds.$$

Trecând la normă în această egalitate, folosind proprietăţile normei şi condiţiile (7.2.5), (7.2.6) avem

$$||x(t, t_0, x_0)|| \leq ||\exp((t-t_0)A)||.||x_0|| + \int_{t_0}^{t} ||\exp((t-s)A)||.||b(s, x(s, t_0,$$

$$x_0))||ds \leq Me^{-\omega(t-t_0)}||x_0|| + \int_{t_0}^{t} LM||e^{-\omega(t-s)}||.||x(s, t_0, x_0)||ds.$$

Înmulţiind inegalitatea precedentă cu $e^{\omega t}$ şi notând $y(t) = e^{\omega t}||x(t, t_0, x_0)||$, $t \in [t_0, t^+(t_0, x_0))$ obţinem

$$y(t) \leq Me^{\omega t_0}||x_0|| + \int_{t_0}^{t} LMy(s)ds.$$

Aplicăm Lema 2.2.8 (Bellman-Gronwall) şi deducem

$$y(t) \leq Me^{\omega t_0}||x_0||e^{(LM-\omega)(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, t^+(t_0, x_0)),$$

sau, echivalent,

$$||x(t, t_0, x_0)|| \leq Me^{\omega t_0}||x_0||e^{(LM-\omega)(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, t^+(t_0, x_0)). \quad (7.2.8)$$

Fie $\rho > 0$ astfel încât $B_\rho(0) \subset \Omega$ şi $\mu(t_0) = \frac{\rho}{2M}$. Deci, pentru orice $x_0 \in \Omega$ cu $||x_0|| \leq \mu(t_0)$ avem

$$||x(t, t_0, x_0)|| \leq \frac{\rho}{2}, \quad \forall t \in [t_0, t^+(t_0, x_0)).$$

Dacă $t^+(t_0, x_0) < +\infty$ atunci aplicăm Propoziţia 2.3.3 şi deducem că $x(., t_0, x_0)$ admite o prelungire strictă la dreapta, ceea ce contrazice maximalitatea lui $x(., t_0, x_0)$.

Pentru a încheia demonstraţia, să observăm că din (7.2.8) rezultă că $\forall x_0 \in \Omega$ cu $||x_0|| \leq \mu(t_0)$ avem

$$\lim_{t\to\infty} ||x(t, t_0, x_0)|| = 0. \quad \square$$

În finalul acestei secţiuni vom prezenta o metodă, datorată matematicianului A. M. Liapunov, de construire a unei funcţii descrescătoare pe soluţiile unei ecuaţii date, care este suficientă pentru stabilitatea ecuaţiilor diferenţiale.

Definiţia 7.2.9. Funcţia $V : \mathbf{R}_+ \times \Omega \to \mathbf{R}_+$ se numeşte *pozitiv definită* pe $\mathbf{R}_+ \times \Omega$ dacă există o funcţie $\omega : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ continuă, crescătoare cu $\omega(r) = 0$ dacă şi numai dacă $r = 0$, astfel încât

$$V(t, x) \geq \omega(||x||), \quad \forall (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega.$$

Definiţia 7.2.10. Funcţia $V : \mathbf{R}_+ \times \Omega \to \mathbf{R}_+$ se numeşte *funcţie Liapunov* pentru ecuaţia (7.2.1) dacă:

a) V este de clasă C^1 pe $\mathbf{R}_+ \times \Omega$ şi $V(t, 0) = 0$, $\forall t \in \mathbf{R}_+$,

b) V este pozitiv definită pe $\mathbf{R}_+ \times \Omega$,

c) $\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^n f_i(t, x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x) \leq 0$, $\forall (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega$.

Teorema 7.2.11. *Dacă ecuaţia (7.2.1) admite o funcţie Liapunov atunci soluţia nulă a sa este (simplu) stabilă.*

Demonstraţie. Fie $t_0 \in \mathbf{R}_+, x_0 \in \mathbf{R}^n$ şi $x(., t_0, x_0) : [t_0, t^+(t_0, x_0)) \to \Omega$ unica soluţie maximală a ecuaţiei (7.2.1) care satisface condiţia iniţială $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Arătăm că $t^+(t_0, x_0) = \infty$.

Fie

$$g(.) : [t_0, t^+(t_0, x_0)) \to \mathbf{R}_+, \quad g(t) = V(t, x(t, t_0, x_0)),$$

unde V este funcţia Liapunov a ecuaţiei (7.2.1). Evident, $g(.)$ este de clasă C^1 şi pe baza Definiţiei 7.2.10 c) $g'(t) \leq 0$, $\forall t \in [t_0, t^+(t_0, x_0))$. deci, $g(.)$ este descrescătoare. În particular, $g(t) \leq g(t_0)$, $\forall t \in [t_0, t^+(t_0, x_0))$; adică

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0).$$

Deoarece, V este pozitiv definită din inegalitatea de mai sus deducem

$$\omega(||x(t, t_0, x_0)||) \leq V(t_0, x_0), \quad \forall t \in [t_0, t^+(t_0, x_0)).$$

Fie $\rho > 0$ astfel încât $B_\rho(0) \subset \Omega$. Cum $V(t_0, .)$ este continuă în 0, $V(t_0, 0) = 0$ pentru $\omega(\rho) > 0$ $\exists r = r(t_0) \in (0, \rho)$ astfel încât

$$V(t_0, x_0) < \omega(\rho), \quad \forall x_0 \in \Omega, ||x_0|| < r.$$

Prin urmare,

$$\omega(||x(t, t_0, x_0)||) < \omega(\rho),$$

şi cum $\omega(.)$ este crescătoare, rezultă că

$$||x(t, t_0, x_0)|| < \rho, \quad \forall t \in [t_0, t^+(t_0, x_0)).$$

Folosind Propoziţia 2.3.3, deducem că $t^+(t_0, x_0) = \infty$ dacă $||x_0|| \leq r(t_0)$.

Un raţionament similar ne arată că, $\forall t_0 \in \mathbf{R}_+$ şi $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta(t_0, \epsilon) > 0$ astfel încât

$$||x(t, t_0, x_0)|| < \epsilon$$

pentru orice $x_0 \in \Omega$ cu $||x_0|| \leq \delta(t_0, \epsilon)$ şi $\forall t \geq t_0$, adică soluţia nulă a ecuaţiei (7.2.1) este stabilă. □

Observaţia 7.2.12. Dacă funcţia Liapunov din Teorema 7.2.11 are proprietăţi suplimentare, atunci se obţin rezultate similare Teoremei 7.2.11 pentru celelalte tipuri de stabilitate.

Exemplul 7.2.13. Să se studieze stabilitatea soluţiei banale a sistemului

$$\begin{cases} x' = -x^3 - y \\ y' = x - y^3 \end{cases}$$

Căutăm o funcţie Liapunov de forma

$$V(x,y) = ax^2 + by^2, \quad a,b > 0.$$

Este uşor de verificat că funcţia $V(x,y) = x^2 + y^2$ este o funcţie Liapunov pentru sistemul nostru, deoarece V este de clasă C^1, $V(0,0) = 0$, $V(x,y) > 0$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$ şi

$$(-x^3 - y)\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) + (x - y^3)\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = -2x^4 - 2y^4 \leq 0.$$

Ca atare, soluţia banală este stabilă.

7.3 Ecuaţii cu diferenţiale totale

O etapă intermediară între studiul ecuaţiilor diferenţiale ordinare şi studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale este alcătuită de clasa *ecuaţiilor cu diferenţiale totate* cunoscute şi sub denumirea de *sisteme de tip gradient*. În această secţiune, după ce vom preciza cadrul general al problemelor definite de ecuaţii cu diferenţiale totale vom prezenta celebra teorema a lui Frobenius care este o condiţie necesară şi suficientă de existenţă locală pentru ecuaţii cu diferenţiale totale.

Notăm cu $L(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$ spaţiul aplicaţiilor liniare de la $\mathbf{R}^k$ la $\mathbf{R}^n$.

Definiţia 7.3.1. Fiind dată o funcţie $F(.,.) : D \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \to L(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$ spunem că defineşte *ecuaţia cu diferenţiale totale*

$$dx = F(t,x)dt. \tag{7.3.1}$$

Se numeşte *soluţie* a ecuaţiei (7.3.1) o funcţie derivabilă $\varphi(.) : G \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ pentru care $Graph(\varphi) \subset D$ şi care verifică

$$D\varphi(t) = F(t, \varphi(t)), \quad \forall t \in G. \tag{7.3.2}$$

În coordonate dacă $F(t,x) \in L(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$ este reprezentată de

$$F(t,x) = (f^i_j(t,x))_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,k}} \in M_{nk}(\mathbf{R})$$

$$t = (t_1, ..., t_k) \in \mathbf{R}^k, x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

ecuaţia (7.3.1) devine

$$dx_i = \sum_{j=1}^{k} f^i_j(t,x) dt_j, \quad i = \overline{1,n}, \tag{7.3.3}$$

care mai poartă denumirea de *sistem de ecuaţii cu diferenţiale totale.* O soluţie $\varphi(.) = (\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)) : G \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ va trebui să verifice

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) = f^i_j(t, \varphi(t)), \quad i = \overline{1,n}, j = \overline{1,k}, \forall t = (t_1, ..., t_k) \in G. \tag{7.3.4}$$

Din cauza identităţiilor (7.3.4), ecuaţia (7.3.3) poate fi scrisă sub forma simbolică

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = f^i_j(t,x), \quad i = \overline{1,n}, j = \overline{1,k}, \tag{7.3.5}$$

care se mai numeşte un *sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi.*

Observaţia 7.3.2. Este clar că ecuaţiile cu diferenţiale totale reprezintă o generalizare a ecuaţiilor diferenţiale ordinare. Acestea se obţin în cazul particular $k = 1$. Mai precis, atunci când $k = 1$, $F(.,.) : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to L(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n) \simeq \mathbf{R}^n$ se va identifica cu $f(.,.) : D \to \mathbf{R}^n$, $f(t,x) = F(t,x).1$; soluţiile ecuaţiei $dx = F(t,x)dt$ fiind, de fapt, soluţiile ecuaţiei $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$.

Definiţia 7.3.3. Ecuaţia (7.3.1) se numeşte *complet integrabilă* dacă $\forall (t_0, x_0) \in D$ $\exists G_0 \in \mathcal{V}(t_0, x_0)$ şi $\exists \varphi(.) : G_0 \to \mathbf{R}^n$ soluţie a ecuaţiei care verifică condiţia iniţială $\varphi(t_0) = x_0$.

Problema centrală în teoria ecuaţiilor cu diferenţiale totale este aceea a integrabilităţii complete, sau, în terminologia folosită la ecuaţiile diferenţiale ordinare, cea a existenţei soluţiilor locale. Dacă în cazul $k = 1$, după cum s-a văzut în Capitolul 2, problema este rezolvată de Teorema lui Peano, în cazul general, simpla ipoteză ca D să fie deschisă şi $A(.,.)$ să fie continuă nu mai este de ajuns pentru a obţine existenţa soluţiilor.

Rezultatul principal al acestei secţiuni, cunoscut sub numele de Teorema lui Frobenius, şi pe care îl prezentăm în continuare, rezolvă problema existenţei locale a soluţiilor ecuaţiilor cu diferenţiale totale.

Teorema 7.3.4. *Fie $k > 1$, $D \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n$ deschisă şi $F(.,.) : D \to L(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$ o funcţie de clasă C^1 care defineşte ecuaţia (7.3.1).*

Atunci o condiţie necesară şi suficientă ca ecuaţia (7.3.1) să fie complet integrabilă este că

$$[\frac{\partial}{\partial t}(F(t,x).u)].v + [\frac{\partial}{\partial x}(F(t,x).u)].(F(t,x).v) =$$

$$[\frac{\partial}{\partial t}(F(t,x).v)].u + [\frac{\partial}{\partial x}(F(t,x).v)].(F(t,x).u) \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^k, \forall (t,x) \in D. \tag{7.3.6}$$

Demonstraţie. Demonstrăm mai întâi necesitatea condiţiei (7.3.6).

Fie $F(.,.) = (f_j^i(.,.))_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,k}}$, $(t_0, x_0) \in D$ şi $\varphi(.) = (\varphi_1(.), ..., \varphi_n(.)) : G_0 \in \mathcal{V}(t_0, x_0) \to \mathbf{R}^n$ o soluţie a ecuaţiei (7.3.1) cu $\varphi(t_0) = x_0$.

Cum $f_j^i(.,.)$ sunt de clasă C^1 din (7.3.4) rezultă că $\varphi_i(.)$ sunt de clasă C^2 şi cu teorema lui Schwartz avem

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t_h \partial t_j}(t) = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t_j \partial t_h}(t), \quad \forall i = \overline{1,n}, 1 \leq j < h \leq k, t \in G. \tag{7.3.7}$$

Din (7.3.4) şi (7.3.7) obţinem

$$\frac{\partial}{\partial t_h}(f_j^i(t, \varphi(t))) = \frac{\partial}{\partial t_j}(f_h^i(t, \varphi(t))), \quad t \in G,$$

de unde, având în vedere regula de derivare a funcţiilor compuse, găsim

$$\frac{\partial f_j^i}{\partial t_h}(t, \varphi(t)) + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_j^i}{\partial x_m}(t, \varphi(t)) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_h}(t) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial f_h^i}{\partial t_j}(t,\varphi(t)) + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_h^i}{\partial x_m}(t,\varphi(t))\frac{\partial \varphi_m}{\partial t_j}(t). \tag{7.3.8}$$

Cum $\varphi(t_0) = x_0$, din (7.3.4) şi (7.3.8) deducem

$$\frac{\partial f_j^i}{\partial t_h}(t_0,x_0) + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_j^i}{\partial x_m}(t_0,x_0) f_h^m(t_0,x_0) == \frac{\partial f_h^i}{\partial t_j}(t_0,x_0)+$$

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_h^i}{\partial x_m}(t_0,x_0) f_j^m(t_0,x_0), \quad \forall i = \overline{1,n}, 1 \leq j < h \leq k, t \in G. \tag{7.3.9}$$

Înmulţiind ambii membrii ai egalităţii (7.3.9) cu u_j, v_h şi adunând termen cu termen pentru $j = \overline{1,k}, h = \overline{1,k}$ obţinem

$$\sum_{j,h=1}^{k} \frac{\partial f_j^i}{\partial t_h}(t_0,x_0)u_j v_h + \sum_{j,h=1}^{k}\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_j^i}{\partial x_m}(t_0,x_0) f_h^m(t_0,x_0)u_j v_h =$$

$$= \sum_{j,h=1}^{k} \frac{\partial f_h^i}{\partial t_j}(t_0,x_0)u_j v_h + \sum_{j,h=1}^{k}\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_h^i}{\partial x_m}(t_0,x_0) f_j^m(t_0,x_0)u_j v_h$$

$\forall u = (u_1, ..., u_k), v = (v_1, ..., v_k) \in \mathbf{R}^k$, care este scrierea în coordonate a condiţiei (7.3.6) în punctul $(t_0, x_0) \in D$. Cum $(t_0, x_0) \in D$ a fost ales arbitrar rezultă afirmaţia dorită.

Pentru a demonstra partea de suficienţă din enunţ să remarcăm, mai întâi că ecuaţia cu diferenţiale totale (7.3.1) poate fi redusă la o ecuaţie diferenţială (ordinară) parametrizată. Mai exact, dacă $\varphi(.) : G \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ este soluţie a ecuaţiei şi $t, t_0 \in G$ sunt astfel încât $[t_0, t] = \{t_0 + s(t - t_0); s \in [0, 1]\} \subset D$ atunci funcţia

$$y(.) : [0, 1] \to \mathbf{R}^n, \quad y(s) = \varphi(t_0 + s(t - t_0))$$

este soluţie a ecuaţiei parametrizate (de parametrul $t - t_0$)

$$\frac{dy}{ds} = F(t_0 + s(t - t_0), y_0)(t - t_0), \quad y(0) = \varphi(t_0).$$

În plus, $y(1) = \varphi(t)$.

Fie $(t_0, x_0) \in D$. Demonstraţia în continuare va avea doi paşi.

Pasul 1. Considerăm $\psi(.,\lambda) : I(\lambda) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ soluţia maximală unică a problemei Cauchy

$$\frac{dy}{ds} = F(t_0 + s\lambda, y)\lambda, \quad y(0) = x_0 \tag{7.3.10}$$

şi vom arăta că există $\Lambda_0 \in \mathcal{V}(0)$ (în $\mathbf{R}^k$) astfel încât $[0,1] \subset I(\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda_0$.

Pasul 2. Definim $\varphi(t) = \psi(1, t - t_0)$, $t \in G_0 := \Lambda_0 + \{t_0\}$ şi vom arăta că $\varphi(.)$ este soluţie a ecuaţiei (7.3.1) cu $\varphi(t_0) = x_0$.

Pentru a demonstra afirmaţia din Pasul 1 considerăm câmpul vectorial parametrizat $f(s, y, \lambda) = F(t_0 + s\lambda, y)\lambda$ cu $s \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}^n$ şi $\lambda \in \mathbf{R}^k$ sunt aleşi astfel ca $(t_0 + s\lambda, y) \in D$.

Mai precis, deoarece $D \subset \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n$ este deschisă rezultă că $\exists r > 0$ astfel încât $\forall (s, y, \lambda) \in \overline{D} := (-1, 2) \times B_r(x_0) \times B_r(0)$ să avem $(t_0 + s\lambda, y) \in D$.

Cum funcţia $f(.,.,.) : \overline{D} \to \mathbf{R}^n$ este de clasă C^1 vom avea, conform Teoremei 5.3.4, că şi curentul său maximal parametrizat $x_f(.,.,.,.) : \overline{D}_f \to \mathbf{R}^n$ este de clasă C^1 şi mai mult

$$\psi(s, \lambda) = x_f(s, 0, x_0, \lambda), \quad \forall s \in I(\lambda). \tag{7.3.11}$$

Dacă $\lambda = 0$ obţinem ecuaţia $\frac{dy}{ds} = 0, y(0) = x_0$ care are soluţia $\psi(s, 0) = x_0$ $\forall s \in (-1, 2) = I(0)$. Dar compactul $[0, 1]$ este, evident, conţinut în $(-1, 2) = I(0)$ şi deci pe baza Propoziţiei 5.1.11 există $\Lambda_0 \in \mathcal{V}(0)$ astfel încât $[0, 1] \subset I(\lambda)$, $\forall \lambda \in \Lambda_0$.

Trecem la demonstrarea Pasului 2. Fie $\varphi(t) = \psi(1, t - t_0)$, $t \in G_0 := \Lambda_0 + \{t_0\}$ şi observăm că $\varphi(t_0) = \psi(1, 0) = x_0$. ($\psi(s, 0) \equiv x_0$ pe $(-1, 2)$).

Din egalitatea (7.3.11) deducem că $\psi(.)$ este de clasă C^1, deci în particular, $\varphi(.)$ este de clasă C^1. Faptul că $\varphi(.)$ verifică ecuaţia (7.3.1) (adică condiţia (7.3.2)) este echivalent cu

$$D_2\psi(1, t - t_0) = F(t, \psi(1, t - t_0)), \quad \forall t \in G_0. \tag{7.3.12}$$

Vom demonstra, mai general, că

$$D_2\psi(s, \lambda) = sF(t_0 + s\lambda, \psi(s, \lambda)), \quad \forall s \in (-1, 2), \lambda \in \Lambda_0. \tag{7.3.13}$$

Este clar, că dacă în (7.3.13) luăm $s = 1$, $\lambda = t - t_0$ obţinem (7.3.12) şi demonstraţia va fi încheiată.

Pentru a demonstra egalitatea (7.3.13) folosim un argument de unicitate a soluţiilor pentru ecuaţii diferenţiale ordinare.

Mai exact, cum din (7.3.11) $D_2\psi(s,\lambda) = D_4 x_f(s, 0, x_0, \lambda)$, în baza Teoremei 5.3.4 $\forall u \in \mathbf{R}^k$ funcţia $D_2\psi(.,\lambda)u$ este soluţie a următoarei probleme Cauchy

$$\frac{dz}{ds} = D_2 f(s, \psi(s,\lambda), \lambda)z + D_3 f(s, \psi(s,\lambda), \lambda)u, \quad z(0) = 0. \quad (7.3.14)$$

Pentru $u \in \mathbf{R}^k$ arbitrar definim funcţia $\alpha(s) = sF(t_0+s\lambda, \psi(s,\lambda))u$, $s \in (-1, 2)$ şi vom demonstra că $\alpha(.)$ verifică problema Cauchy (7.3.14).

Este evident că $\alpha(0) = 0$. Ţinând cont de regula de derivare a funcţiilor compuse şi de faptul că $\psi(.,\lambda)$ verifică ecuaţia (7.3.10) avem

$$\alpha'(s) = F(t_0 + s\lambda, \psi(s,\lambda))u+$$

$$s[\frac{\partial}{\partial t}(F(t_0 + s\lambda, \psi(s,\lambda))u)]\lambda + s[\frac{\partial}{\partial x}(F(t_0 + s\lambda, \psi(s,\lambda))u)]D_1\psi(s,\lambda) =$$

$$= F(t_0 + s\lambda, \psi(s,\lambda))u + s[\frac{\partial}{\partial t}(F(t_0 + s\lambda, \psi(s,\lambda))u)]\lambda+$$

$$+s[\frac{\partial}{\partial x}(F(t_0 + s\lambda, \psi(s,\lambda))u)](F(t_0 + s\lambda, \psi(s,\lambda))\lambda). \quad (7.3.15)$$

Pe de altă parte, având în vedere definiţia lui $f(.,.,.)$

$$D_2 f(s, \psi(s,\lambda), \lambda)\alpha(s) + D_3 f(s, \psi(s,\lambda), \lambda)u =$$

$$= [\frac{\partial}{\partial x}(F(t_0 + s\lambda, \psi(s,\lambda))\lambda)](sF(t_0 + s\lambda, \psi(s,\lambda))u)+$$

$$[\frac{\partial}{\partial t}(F(t_0 + s\lambda, \psi(s,\lambda))\lambda)]su + F(t_0 + s\lambda, \psi(s,\lambda))u. \quad (7.3.16)$$

Invocâm acum condiţia (7.3.6) (scrisă pentru $t = t_0 + s\lambda$, $x = \psi(s,\lambda)$, $v = \lambda$, $u = u$) şi deducem că expresiile din partea dreaptă a egalităţiilor (7.3.15) şi (7.3.16) coincid.

Aşadar, $\alpha(.)$ este soluţie a problemei (7.3.14) şi demonstraţia este încheiată. $\square$

Observaţia 7.3.5. După cum s-a văzut, de altfel, în demonstraţia Teoremei 7.3.4, condiţia (7.3.6) este echivalentă cu condiţia

$$\frac{\partial f_j^i}{\partial t_h}(t,x) + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_j^i}{\partial x_m}(t,x) f_h^m(t,x) = \frac{\partial f_h^i}{\partial t_j}(t,x) +$$

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_h^i}{\partial x_m}(t,x) f_j^m(t,x), \quad \forall (t,x) \in D, \forall i = \overline{1,n}, 1 \le j < h \le k, \tag{7.3.17}$$

care este o variantă în coordonate a condiţiei (7.3.6) şi care în aplicaţii este mai convenabil de verificat.

Exemplul 7.3.6. Considerăm ecuaţia cu diferenţiale totale

$$dz = 2xe^y dx + zdy \tag{7.3.18}$$

Notăm $P((x,y),z) = 2xe^y$ şi $Q((x,y),z) = z$.

În acest caz $n = 2, k = 1$ şi condiţia de integrabilitate completă (7.3.17) devine

$$D_2P(x,y,z) + D_3P(x,y,z)Q(x,y,z) \equiv$$

$$\equiv D_1Q(x,y,z) + D_3Q(x,y,z)P(x,y,z)$$

care, în cazul exemplului nostru se reduce la

$$2xe^y \equiv 2xe^y.$$

Aşadar ecuaţia (7.3.18) este complet integrabilă.

Determinăm, în continuare, soluţia ecuaţiei (7.3.18) care verifică condiţia iniţială $\varphi(x_0, y_0) = z_0$, $(x_0, y_0, z_0) \in D = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Pentru aceasta folosim metoda indicată în demonstraţia Teoremei 7.3.4.

Rezolvăm problema Cauchy

$$\frac{dz}{dt} = P(x_0 + \lambda_1 t, y_0 + \lambda_2 t, z)\lambda_1 + Q(x_0 + \lambda_1 t, y_0 + \lambda_2 t, z)\lambda_2, \quad z(0) = z_0.$$

Avem, deci, ecuaţia afină scalară

$$z' = 2(x_0 + \lambda_1 t)e^{y_0 + \lambda_2 t}\lambda_1 + z\lambda_2.$$

Cu metoda variaţiei constantelor găsim soluţia

$$z(t, \lambda_1, \lambda_2) = [e^{y_0}(x_0 + \lambda_1 t)^2 + c]e^{\lambda_2 t}.$$

Din condiţia iniţială $z(0) = z_0$, găsim $c = z_0 - e^{y_0}x_0^2$ şi deci

$$z(t, \lambda_1, \lambda_2) = e^{y_0+\lambda_2 t}(x_0 + \lambda_1 t)^2 + z_0 e^{\lambda_2 t} - e^{y_0+\lambda_2 t}x_0^2.$$

Soluţia căutată se găseşte pentru $t = 1$, $\lambda_1 = x - x_0$, $\lambda_2 = y - y_0$ adică

$$\varphi(x, y) = z(1, x - x_0, y - y_0) = e^y(x^2 - x_0^2) + z_0 e^{y-y_0}.$$

Bibliografie

[1] Gh. Aniculesei, *Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţiile fizicii matematice*, Ed. Universităţii ,,Al. I. Cuza", Iaşi, 2003.

[2] V. I. Arnold, *Ecuaţii diferenţiale ordinare*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1978.

[3] V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Junimea, Iaşi, 1985.

[4] A. Halanay, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

[5] A. Halanay, M. Mateescu, *Elemente din teoria ecuaţiilor diferenţiale şi a ecuaţiilor integrale*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2002.

[6] J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, Paris, 1999.

[7] J. Kurzweil, *Ordinary differential equations*, Elsevier, Amsterdam, 1986.

[8] D. V. Ionescu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.

[9] Gh. Marinescu, *Teoria ecuaţiilor diferenţiale şi integrale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.

[10] Şt. Mirică, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale I, II, III*, Ed. Universităţii Bucureşti, 1999.

[11] Gh. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1989.

[12] I. Roşca, *Lecţii de ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Ed. Fundaţiei ,,România de Mâine", Bucureşti, 2000.

[13] I. A. Rus, Gh. Micula, P. Pavel, B. Ionescu, *Probleme de ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[14] I. A. Rus, P. Pavel, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[15] I. I. Vrabie, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 1999.