# Calcul Numeric – Tema #2

**Ex. 1** Se consideră sistemul $Ax = b$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice tridiagonală şi $b \in \mathbb{R}^n$. Pe diagonala principală are elementele $a_{ii} = a_i, i = \overline{1,n}$, deasupra diagonalei principale are elementele $a_{i,i+1} = b_i, i = \overline{1,n-1}$ şi sub diagonala principală are elementele $a_{i+1,i} = c_i, i = \overline{1,n-1}$. Presupunem că matricea poate fi descompusă în produs de două matrice $A = LR$, unde $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este inferior triunghiulară şi $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este superior triunghiulară având următoarele elemente:

- elementele diagonale ale matricei $L$ sunt egale cu 1, i.e. $\ell_{ii} = 1, i = \overline{1,n}$
- sub diagonala principală se află elementele notate cu $\ell_i, i = \overline{1,n-1}$, i.e. $\ell_{i+1,i} = \ell_i$
- restul elementelor în matricea $L$ sunt nule
- pe diagonala principală a matricei $R$ se află numerele $r_i, i = \overline{1,n}$, i.e. $r_{i,i} = r_i$
- deasupra diagonalei principale se află numerele $s_i, i = \overline{1,n-1}$, i.e. $r_{i,i+1} = s_i$
- restul elementelor neprecizate din $R$ sunt nule

(a) Să se deducă următoarea schemă numerică de determinare a matricelor $L$ şi $R$

$$\begin{cases} r_1 = a_1 \\ for\ i = 1 : n-1\ do \\ \quad \ell_i = \dfrac{c_i}{r_i} \\ \quad s_i = b_i \\ \quad r_{i+1} = a_{i+1} - \ell_i s_i \\ endfor \end{cases} \tag{1}$$

Indicaţie: Produsul matriceal $A = LU$ poate fi scris pe componente $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{ik} r_{kj}$. Se vor calcula elementele $b_i := a_{i,i+1}, a_{i+1} := a_{i+1,i+1}, c_i := a_{i+1,i}$ folosind formula anterioară păstrând doar acei termeni din sumă care sunt nenuli.

(b) Sistemul $Ax = b$ se rezolvă folosind descompunerea $A = LR$ după cum urmează

- se rezolvă sistemul $Ly = b$
- cu $y$ calculat anterior se rezolvă sistemul $Rx = y$ şi se calculează soluţia $x$

Se se deducă formulele de calcul pentru $y_i$ şi $x_i$, $i = \overline{1,n}$. Nu se vor aplica metodele subsitituţiei descendente, respectiv ascendente.

**Ex. 2** Să se rezolve în Python următorul sistem tridiagonal, folosind metoda de factorizare $LR$. Să se verifice soluţia.

$$\begin{cases} dx_1 + fx_2 = 2 \\ cx_1 + dx_2 + fx_3 = 1 \\ \qquad cx_2 + dx_3 + fx_4 = 1 \\ \dots \\ \qquad\qquad cx_{n-2} + dx_{n-1} + fx_n = 1 \\ \qquad\qquad\qquad cx_{n-1} + dx_n = 2 \end{cases}$$

V0 $d = 6, f = -2, c = -2, n = 20$

V1 $d = 12, f = -4, c = -4, n = 20$

V2 $d = 15, f = -5, c = -4, n = 15$

V3 $d = 18, f = -6, c = -6, n = 20$

V4 $d = 9, f = -3, c = -3, n = 15$

V5 $d = 21, f = -7, c = -7, n = 20$

V6 $d = 7, f = -3, c = -1, n = 20$

V7 $d = 10, f = -4, c = -4, n = 20$

V8 $d = 15, f = -9, c = -4, n = 15$

V9 $d = 18, f = -6, c = -3, n = 20$

V10 $d = 9, f = -8, c = -3, n = 15$

V11 $d = 21, f = -7, c = -2, n = 20$

V12 $d = 7, f = -3, c = -1, n = 20$

V13 $d = 10, f = -4, c = -4, n = 20$

V14 $d = 15, f = -9, c = -4, n = 15$

V15 $d = 18, f = -6, c = -3, n = 20$

V16 $d = 9, f = -8, c = -3, n = 15$

V17 $d = 21, f = -7, c = -2, n = 20$

**Ex. 3** Să se creeze în Python procedura **InvDet**$(A)$, care returnează inversa şi determinantul matricei $A$. Să se rezolve în Python sistemul de mai jos, folosind inversa matricei asociate sistemului. Să se afişeze inversa, determinantul şi soluţia sistemului.

V0

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

V1

$$\begin{cases} 10x_1 + 30x_2 + 16x_3 = 118 \\ 2x_1 + 15x_2 + 7x_3 = 53 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 21 \end{cases}$$

V2

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 18 \\ 3x_1 + 28x_2 + 23x_3 = 76 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

V3

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

V4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 17x_2 + 20x_3 = 33 \\ 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 16 \end{cases}$$

V5

$$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 17x_3 = 31 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12 \\ 20x_1 + 22x_2 + 38x_3 = 50 \end{cases}$$

V6

$$\begin{cases} 9x_1 + 18x_2 + 19x_3 = 84 \\ 15x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 47 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

V7

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 25 \\ 5x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 77 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

V8

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 11x_2 + 11x_3 = 58 \\ 15x_1 + 19x_2 + 22x_3 = 119 \end{cases}$$

V9

$$\begin{cases} 15x_1 + 6x_2 + 14x_3 = 94 \\ 25x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 120 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 23 \end{cases}$$

V10

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

V11

$$\begin{cases} 10x_1 + 30x_2 + 16x_3 = 118 \\ 2x_1 + 15x_2 + 7x_3 = 53 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 21 \end{cases}$$

V12

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 18 \\ 3x_1 + 28x_2 + 23x_3 = 76 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

V13

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

V14

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 17x_2 + 20x_3 = 33 \\ 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 16 \end{cases}$$

V15

$$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 17x_3 = 31 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12 \\ 20x_1 + 22x_2 + 38x_3 = 50 \end{cases}$$

V16

$$\begin{cases} 9x_1 + 18x_2 + 19x_3 = 84 \\ 15x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 47 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

V17

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 25 \\ 5x_1 + 13x_2 + 12x_3 = 77 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

**Ex. 4** Fie matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ & a_1 & a_2 & ... & a_{n-1} \\ & & a_1 & ... & a_{n-2} \\ SYM & & & \ddots & \\ & & & & a_1 \end{pmatrix}$

1. Să se definească în Matlab vectorul $a$ şi matricea simetrică $A$;
2. Să se verifice în Matlab că matricea $A$ este pozitiv definită (Se va folosi criteriul Sylvester);
3. Să se construiască în Matlab procedura **FactCholesky** conform sintaxei **FactCholesky**$(A, b)$ conform. Procedura **FactCholesky** returnează matricea $L$.
4. Să se afle factorizarea Cholesky a matricei $A$;
5. Să se rezolve sistemul $Ax = b$ conform metodei Cholesky.
6. Să se afişeze matricea $L$ şi soluţia sistemului.

V0 $n = 5, b_i = i^2, i = \overline{1,n}, a = (2n, 2n-2, ..., 2)^T$

V1 $n = 8, b_i = i^3, i = \overline{1,n}, a = (3n, 3n-3, ..., 3)^T$

V2 $n = 10, b_i = i^3 + 2, i = \overline{1,n}, a = (n, n-1, ..., 1)^T$

V3 $n = 5, b_i = i^4, i = \overline{1, n}, a = (2^n, 2^{n-1}, ..., 2^1)^T$

V4 $n = 6, b_i = i^4, i = \overline{1, n}, a = (4^n, 4^{n-1}, ..., 4^1)^T$

V5 $n = 6, b_i = i^2, i = \overline{1, n}, a = (3^n, 3^{n-1}, ..., 3^1)^T$

V0 $n = 5, b_i = i^2, i = \overline{1, n}, a = (2n, 2n-2, ..., 2)^T$

V1 $n = 8, b_i = i^3, i = \overline{1, n}, a = (3n, 3n-3, ..., 3)^T$

V2 $n = 10, b_i = i^3 + 2, i = \overline{1, n}, a = (n, n-1, ..., 1)^T$

V3 $n = 5, b_i = i^4, i = \overline{1, n}, a = (2^n, 2^{n-1}, ..., 2^1)^T$

V4 $n = 6, b_i = i^4, i = \overline{1, n}, a = (4^n, 4^{n-1}, ..., 4^1)^T$

V5 $n = 6, b_i = i^2, i = \overline{1, n}, a = (3^n, 3^{n-1}, ..., 3^1)^T$

V6 $n = 5, b_i = i^2, i = \overline{1, n}, a = (2n, 2n-2, ..., 2)^T$

V7 $n = 8, b_i = i^3, i = \overline{1, n}, a = (3n, 3n-3, ..., 3)^T$

V8 $n = 10, b_i = i^3 + 2, i = \overline{1, n}, a = (n, n-1, ..., 1)^T$

V9 $n = 5, b_i = i^4, i = \overline{1, n}, a = (2^n, 2^{n-1}, ..., 2^1)^T$

V10 $n = 6, b_i = i^4, i = \overline{1, n}, a = (4^n, 4^{n-1}, ..., 4^1)^T$

V11 $n = 6, b_i = i^2, i = \overline{1, n}, a = (3^n, 3^{n-1}, ..., 3^1)^T$

V12 $n = 5, b_i = i^2, i = \overline{1, n}, a = (2n, 2n-2, ..., 2)^T$

V13 $n = 8, b_i = i^3, i = \overline{1, n}, a = (3n, 3n-3, ..., 3)^T$

V14 $n = 10, b_i = i^3 + 2, i = \overline{1, n}, a = (n, n-1, ..., 1)^T$

V15 $n = 5, b_i = i^4, i = \overline{1, n}, a = (2^n, 2^{n-1}, ..., 2^1)^T$

V16 $n = 6, b_i = i^4, i = \overline{1, n}, a = (4^n, 4^{n-1}, ..., 4^1)^T$

V17 $n = 8, b_i = i^3, i = \overline{1, n}, a = (3n, 3n-3, ..., 3)^T$