# CURS #1

**CONȚINUTUL CURSULUI #1:**





# 0.Erori

## 0.1. Erori de trunchiere

Fie $x$ un parametru reprezentat prin valoarea sa exactă, $F$ o funcție în baza căreia se evaluează exact o formulă matematică și $F_t$ o funcție obținută în urma operației de trunchiere a formulei exacte.

**Definiția (0.1.)**

*Definim $e_t(x) = F(x) - F_t(x)$ și numim eroare de trunchiere.*

**Teorema (0.1. Dezvoltarea în serie Taylor)**

*Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de infinit ori derivabilă pe intervalul $I, x_0 \in I$ fixat. Atunci,*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$



**Teorema (0.1. ( reprezentarea restului sub forma Lagrage))**

*Mai mult, dacă $f$ este derivabilă de $n+1$ ori, pentru orice $x \in I$, $\exists\, \xi$ cuprins între $x_0$ și $x$, astfel încât:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

**Exemplul #1**

Fie $x = e$, numărul Euler și formula matematică exactă de calcul a valorii acestui număr, obținută în baza dezvoltării în serie Taylor a funcției $e^x$ în jurul punctului $x_0 = 0$ și evaluată în $x = 1$.

Întrucat, derivata funcției $e^x$ rămâne la fel, dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x) = e^x$ în jurul punctului $x_0$ este:

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0) + \frac{e^{x_0}}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k$$



Notăm cu $F(x)$ formula exactă prin intermediul căreia se evaluează valoarea $e^x$ pentru un $x$ dat, astfel $e = F(1)$ sau

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Fie $F_t(x)$ formula trunchiată de forma:

$$F_t(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k \tag{1}$$

deci, numărul $e$ poate fi aproximat cu

$$e \approx F_t(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Eroarea de trunchiere a acestei aproximări se determină prin formula:

$$e_t(1) = F(1) - F_t(1) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

sau, folosind formula de reprezentare Lagrange a restului din dezvoltarea Taylor, obținem: $e_t(1) = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}$ cu $\xi$ între 0 și 1.

**Exemplul** #2 Fie $g \in C^2([a,b])$, $x \in (a,b)$ și $h > 0$ astfel încât $x+h$ rămâne în intervalul $(a,b)$. Conform formulei de dezvoltare în serie Taylor, cu reprezentarea restului sub forma Lagrange, putem scrie:

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + g''(\xi)\frac{h^2}{2},\ \xi \in (x, x+h)$$

Din expresia de mai sus, putem deduce o formulă prin intermediul căreia se poate calcula prima derivată

$$g'(x) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g''(\xi)\frac{h^2}{2}$$

Întrucât, nu întotdeauna putem calcula analitic derivata funcției, formula de mai sus poate fi trunchiată la:

$$g'(x) \approx \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

cu eroarea de trunchiere $e_t(x) = -g''(\xi)\frac{h^2}{2}$



## 0.2. Erori de rotunjire

Un *număr mașină* poate fi reprezentat în baza 10 cu virgulă mobilă normalizată sub forma:

$$x^* = \pm 0.d_1 d_2 ... d_k \times 10^n \tag{2}$$

$$0 \leq d_1, d_2, ..., d_k \leq 9,\ d_1 \neq 0 \tag{3}$$

cifrele $d_1, d_2, ..., d_k$ se numesc cifre semnificative.
**Observație:** Reprezentarea se numește normalizată deoarece cifra care precede virgula este zero.
Un număr real $x$, din punct de vedere matematic, se reprezintă cu o infinitate de cifre semnificative

$$x = \pm 0.d_1 d_2 ... d_k ... \times 10^n \tag{4}$$

Acest număr poate fi asimilat cu numărul mașină cu $k$ cifre semnificative după următoarea regulă:

$$x^* = \begin{cases} \pm 0.d_1 d_2 ... d_k \times 10^n, \text{ dacă } d_{k+1} < 5 \\ \pm 0.d_1 d_2 ... (d_k + 1) \times 10^n, \text{ dacă } d_{k+1} \geq 5 \end{cases} \tag{5}$$



**Exemplul** #3 Să se afle numărul mașină cu 5 cifre semnificative al numărului $\pi = 3,14159265...$
Numărul $\pi$ scris în reprezentarea normalizată are forma

$$\pi = +0.31415965... \times 10^1$$

iar numărul mașină cu 5 cifre semnificative asociat este

$$+0.31416 \times 10^1$$

**Definiția (0.2.)**

*Presupunem că $x^*$ reprezintă aproximarea numărului $x$. Notăm cu*

$$e_a := |x - x^*|$$

*și numim eroarea absolută a aproximării. Notăm cu*

$$e_r := \frac{|x - x^*|}{|x|}$$

*și numim eroarea relativă.*



**Exemplul** #4 Să se determine erorile absolută și relativă, dacă $x$ este aproximarea lui $x^*$, unde $x = 0,3000 \times 10^4$, $x^* = 0,3100 \times 10^4$.
Eroarea absolută $e_a = 0,01 \times 10^4 = 100$, iar eroarea relativă
$e_r = \dfrac{100}{3 \times 10^3} = 0,1$.
Eroarea absolută nu este un indice suficient pentru stabilirea exactității calculului, pentru că acesta ne dă doar abaterea fără a ține cont de ordinul mărimilor implicate în calcul. Pentru a determina exactitatea calculului, eroarea absolută se raportează la mărimea valorii exacte, obținându-se eroarea relativă, sau dacă se dorește să se exprime în procente, aceasta se înmulțește cu 100%.

**Definiția (0.3.)**

*Spunem că numărul $x^*$ aproximează numărul $x$ cu $k$ cifre semnificative, dacă $k$ este cel mai mare număr cu proprietatea*

$$e_r = \frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \times 10^{-k} \tag{6}$$

**Observație:** Dacă $x^*$ este numărul mașină asociat numărului $x$ după regula (**??**), atunci are loc estimarea (**??**). Într-adevăr, fie $x = \pm 0.d_1 d_2 ... d_k ... \times 10^n$ și $x^*$ definit prin:

$$x^* = \begin{cases} \pm 0.d_1 d_2 ... d_k \times 10^n, \text{ dacă } d_{k+1} < 5 \\ \pm 0.d_1 d_2 ... (d_k + 1) \times 10^n, \text{ dacă } d_{k+1} \geq 5 \end{cases}$$

Vom considera cele două cazuri separat.
Cazul 1. $d_{k+1} < 5$ :

$$\begin{aligned} \frac{|x - x^*|}{|x|} &= \frac{|0.0 \cdots 0 d_{k+1} \cdots| \times 10^n}{|0.d_1 d_2 \cdots d_k \cdots| \times 10^n} \leq \frac{d_{k+1} \times 10^{-(k+1)}}{0.1} \\ &= d_{k+1} \times 10^{-k} \leq 5 \times 10^{-k} \end{aligned} \tag{7}$$

Cazul 2. $d_{k+1} \geq 5$ : (sau, echivalent $d'_{k+1} := 10 - d_{k+1} \leq 5$)

$$\begin{aligned} \frac{|x - x^*|}{|x|} &= \frac{|0.0 \cdots 0 (10 - d_{k+1}) \cdots| \times 10^n}{|0.d_1 d_2 \cdots d_k \cdots| \times 10^n} \leq \frac{d'_{k+1} \times 10^{-(k+1)}}{0.1} \\ &= d'_{k+1} \times 10^{-k} \leq 5 \times 10^{-k} \end{aligned} \tag{8}$$



# I. Metode de aproximare a soluțiilor ecuațiilor neliniare

## I.1. Metoda bisecției

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Atunci $\exists x^* \in (a, b)$, astfel încât $f(x^*) = 0$.
Metoda bisecției generează un șir de aproximări $(x_k)_{k \geq 0}$ convergent către soluția exactă $x^*$ a ecuației $f(x) = 0$ (i.e. $lim_{k \to \infty} x_k = x^*$, unde $x^*$ verifică ecuația $f(x) = 0$).
Metoda bisecției constă în înjumătățirea la fiecare pas $k$ a intervalului $[a, b]$ și selectarea acelui interval notat prin $[a_k, b_k]$ în care se află $x^*$.
Șirurile $(a_k)_{k \geq 0}$, $(b_k)_{k \geq 0}$ și $(x_k)_{k \geq 0}$ se construiesc conform schemei:

$$(a_k, b_k, x_k) = \begin{cases} a_k = a_{k-1}, b_k = b_{k-1}, x_k = x_{k-1}, & \text{dacă} \quad f(x_{k-1}) = 0 \\ a_k = a_{k-1}, b_k = x_{k-1}, x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}, & \text{dacă} \quad f(a_{k-1}) f(x_{k-1}) < 0 \\ a_k = x_{k-1}, b_k = b_{k-1}, x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}, & \text{dacă} \quad f(a_{k-1}) f(x_{k-1}) > 0, \end{cases} \tag{9}$$

unde $a_0 = a, b_0 = b, x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.



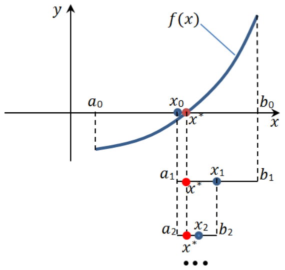


Figure: Metoda bisecției



**Teorema (I.1.)**

*Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă, $f(a)f(b) < 0$. Dacă $f$ admite soluție unică $x^* \in (a, b)$ atunci șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ este convergent la $x^*$ și*

$$|x^* - x_k| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}, \forall k \geq 0 \tag{10}$$

**Demonstrație:**

$$|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2}|a_k - b_k| = \begin{cases} \frac{1}{2}|a_{k-1} - x_{k-1}|, f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0 \\ \frac{1}{2}|x_{k-1} - b_{k-1}|, f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0 \end{cases} \tag{11}$$

Constatăm că

$$\frac{1}{2}|a_{k-1} - x_{k-1}| = \frac{1}{2}\left|a_{k-1} - \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}\right| = \frac{1}{4}|a_{k-1} - b_{k-1}| \tag{12}$$

Analog

$$\frac{1}{2}|x_{k-1} - b_{k-1}| = \frac{1}{4}|a_{k-1} - b_{k-1}| \tag{13}$$

Astfel că, din (**??**) rezultă

$$0 \leq |x^* - x_k| \leq \frac{1}{4}|a_{k-1} - b_{k-1}| = \frac{1}{8}|a_{k-2} - b_{k-2}| = ... = \frac{1}{2^{k+1}}|a_0 - b_0| \tag{14}$$

sau $|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2^{k+1}}|a-b|$ de unde rezultă $lim_{k\to\infty} x_k = x^*$. $\square$

**Criteriul de oprire:** Fiind dat $\varepsilon > 0$, se caută $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{b-a}{2^{N+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow N > log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}) - 1 \Leftrightarrow N = \left[log_2(\frac{b-a}{\varepsilon})\right]$;

**Definiția (I.1.)**

*Fie șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ convergent la $x^*$. Spunem că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ converge **cel puțin liniar** la $x^*$, dacă există șirul de numere reale pozitive $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ convergent la zero și $\alpha \in (0,1)$ astfel încât*

$$|x_k - x^*| \leq \varepsilon_k, \quad k \geq 0 \quad \text{și} \quad lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \alpha \tag{15}$$

- Dacă relația (**??**) are loc pentru $\alpha = 0$, atunci spunem că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ converge **superliniar**;
- Dacă relația (**??**) are loc pentru $\alpha \in (0,1)$ și $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$, $k \geq 0$, atunci spunem că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ converge **liniar**;
- Dacă (**??**) are loc pentru $\alpha = 1$ și $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$, atunci viteza de convergență este mai lentă decât cea liniară și spunem că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ converge **subliniar**.



**Definiția (I.2.)**

*Fie șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ convergent la $x^*$. Spunem că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ converge la $x^*$ cu ordinul de convergență cel puțin egal cu $r > 1$, dacă există un șir $(\varepsilon_k)_{k\geq}$ de numere reale pozitive convergent la 0 și $\alpha > 0$ astfel încât*

$$|x_k - x^*| \leq \varepsilon_k, \quad k \geq 0 \quad \text{și} \quad lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^r} = \alpha \tag{16}$$

Dacă (**??**) are loc pentru $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$, $k \geq 0$, atunci spunem că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ converge la $x^*$ cu **ordinul $r$ de convergență**. În particular, dacă $r = 2$ atunci spunem că $(x_k)_{k\geq 0}$ converge **pătratic.**

**Obs.:** Datorită faptului că în cazul metodei bisecției avem estimarea $|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$ putem considera $\varepsilon_k = \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$. Atunci

$$lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \frac{1}{2} \in (0,1), \tag{17}$$

deci convergența este **cel puțin liniară**.



**ALGORITM** (Metoda bisecției)

**Date de intrare:** $f, a, b, \varepsilon$;
**Date de ieșire:** $x_{aprox}$;

STEP 1: $a_0 = a$; $b_0 = b$; $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$;
$N = \left[log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}) - 1\right] + 1$;

STEP 2: for $k = 1 : N$ do
  if $f(x_{k-1}) = 0$ then
   $x_k = x_{k-1}$;
   break
  elseif $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0$ then
   $a_k = a_{k-1}$; $b_k = x_{k-1}$; $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$;
  elseif $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0$ then
   $a_k = x_{k-1}$; $b_k = b_{k-1}$; $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$;
  endif
 endfor
 $x_{aprox} = x_k$.



## I.2.Metoda Newton-Raphson

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Metoda N-R presupune construcția șirului $(x_k)_{k\geq 0}$ conform următoarei scheme grafice: la pasul $k$, aproximarea $x_k$ a soluției exacte $x^*$ a ecuației $f(x) = 0$ se obține prin intersecția cu axa $Ox$ a tangentei $T$ la graficul funcției $f$ în punctul $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$.

$$T : y = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) \tag{18}$$

$$\{x_k\} = T \cap Ox \Rightarrow f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \tag{19}$$

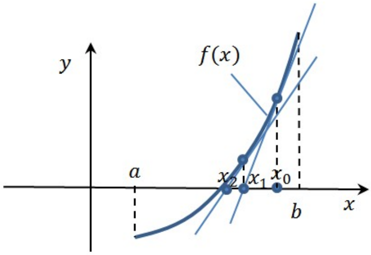


Figure: Metoda Newton

**Teorema (I.2)**

*Presupunem că $f \in C^2([a,b])$, $f', f''$ nu se anulează pe $[a,b]$ și $f(a)f(b) < 0$. Fie $x_0 \in [a,b]$ astfel încât să aibă loc condiția*

$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \tag{20}$$

*Atunci ecuația $f(x) = 0$ are o soluție unică $x^* \in (a,b)$, iar șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ construit prin metoda Newton-Raphson, rămâne în $[a,b]$ și converge pătratic la $x^*$.*

**Demonstrație:**
**EXISTENȚA:** Existența soluției ecuației $f(x) = 0$ este asigurată de condiția $f(a)f(b) < 0$.
**UNICITATEA:** Presupunem că $\exists y^* \in (a,b)$ cu $x^* \neq y^*$ și $f(y^*) = 0$. Cum $f(x^*) = f(y^*) = 0$, atunci conform Teoremei lui Rolle rezultă că $\exists c \in (x^*, y^*)$ astfel încât $f'(c) = 0$, contradicție, deoarece am presupus cu a $f'$ este nenulă pe intervalul $[a,b]$.





**CONVERGENȚA:** Fără a restrânge generalitatea vom considera $f', f''$ strict pozitive, i.e. $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \forall x \in [a,b]$. Celelalte cazuri se tratează în mod analog.
Fie $x_0 \in [a,b]$ cu proprietatea (**??**), atunci $f(x_0) > 0 = f(x^*)$. Deoarece $f'(x) > 0, \forall x \in [a,b]$ rezultă că $f$ este strict crescătoare, astfel că $x^* < x_0 \leq b$ sau $x_0 \in (x^*, b]$.
Presupunem în continuare $x_k \in (x^*, b]$, i.e. $x^* < x_k \leq b$. Dezvoltăm în serie Taylor funcția $f$ în jurul punctului $x_k$ și evaluăm funcția în punctul $x^*$ :

$$f(x^*) = f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(x^* - x_k)^2 f''(\xi_k), \quad \xi_k \in [x^*, x_k] \tag{21}$$

Împărțim această relație la $f'(x_k)$, ținem cont că $f(x^*) = 0$ și $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Obținem:

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2}(x^* - x_k)^2 \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}, \quad \xi_k \in [x^*, x_k] \tag{22}$$

Din monotonia funcției $f$ rezultă $f(x_k) > 0 = f(x^*)$. Din (**??**) rezultă $x_{k+1} < x_k$, iar conform formulei (**??**) rezultă $x_{k+1} > x*$,



deci $x^* < x_{k+1} < x_k \leq b$. Am obținut că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ este descrescător și mărginit, deci convergent.
Fie $y^* = lim_{k\to\infty} x_k$, atunci trecând la limită în formula (**??**) rezultă:

$$y^* = y^* - \frac{f(y^*)}{f'(y^*)} \Rightarrow f(y^*) = 0, \tag{23}$$

deci $y^*$ este soluție a ecuației $f(x) = 0$, iar din unicitatea soluției avem $x^* = y^*$.
Din relația (**??**) rezultă

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} \tag{24}$$

Dacă $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$ atunci

$$lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\frac{|f''(\xi_k)|}{|f'(x_k)|} \tag{25}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|f''(x^*)|}{|f'(x^*)|} \in (0, \infty) \tag{26}$$

Rezultă că $(x_k)_{k\geq 0}$ converge **pătratic** la $x^*$. □

Deoarece $f', f''$ nu se anulează pe intervalul $[a, b]$, atunci funcția trebuie să fie monotonă (crescătoare sau descrescătoare) și să nu-și schimbe concavitatea pe intervalul dat.

**Strategie de lucru:** Din punct de vedere computațional se alege conform graficului funcției un interval în care funcția să fie monotonă și să nu-și schimbe concavitatea. Valoarea $x_0$ se alege în modul următor:

1. Dacă $f$ este convexă ($f''(x_0) > 0$), atunci $f(x_0) > 0$;
2. Dacă $f$ este concavă ($f''(x_0) < 0$), atunci $f(x_0) < 0$.

Pentru metoda N-R ca și criteriu de oprire vom alege una din următoarele condiții:

- $|f(x_k)| < \varepsilon$;
- $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} < \varepsilon$.



**ALGORITM** (Metoda Newton-Raphson)

**Date de intrare:** $f, f', x_0, \varepsilon$;
**Date de ieșire:** $x_{aprox}$;

STEP 1: $k = 0$;

STEP 2: do

$$k = k + 1;$$

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})};$$

while $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} \geq \varepsilon$;

$x_{aprox} = x_k$.