

Projet MA0822
Etude thermique d'un lanceur
spatial de retour dans
l'atmosphère.

Master 1 Mathématiques et
Applications
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Parcours Statistique pour l'Évaluation et la
Prévision



P A R
G N A G O Y A N N I C K .



ENSEIGNANT: M. LEFÈVRE FRANÇOIS

2021/2022

Résumé

Dans le but de la reconquête spatiale, plusieurs acteurs ont mené des recherches pour aller dans l'espace. En effet, l'humain est arrivé à aller dans l'espace la première fois en 1973 grâce à la fusée . Celle-ci, devait alors se déplacer à une très grande vitesse afin de franchir l'atmosphère pour d'atterrir sur la terre. En effet, cet aspect suscitera plusieurs réflexions afin de savoir si les astronautes à bord de la fusée reviendront vivants vu que la température de la fusée sera très élevée à l'approche de l'atmosphère terrestre. Pour notre situation, nous avons considéré un modèle de fusée de retour sur terre pour résoudre l'équation de la chaleur et de connaître les différents échanges thermiques relatives à certaines caractéristiques de la fusée pour répondre à la problématique : **les astronautes reviennent-ils vivants ?**

Dans la suite, nous allons alors utiliser tous les outils nécessaires (MEF $\mathbf{P_1}$, FreeFem++, python ...) vus en cours afin de répondre à ce problème.

Table des matières

1	le maillage 2D pour l'élément fini de la fusée	3
2	le solveur Eléments finis en 2D	5
2.1	Avec FreeFem++	6
2.2	Avec Python	6

Table des figures

1.1	Maillage non structuré d'un domaine en forme de fusée.	3
1.2	Maillage non structuré d'un domaine en forme de fusée.	4
2.1	Solveur Eléments Finis en 2D en variant V et e	6
2.2	Le format de la matrice de rigidité.	7
2.3	la solution approchée avec $e = 100$ et $V = 1500$	7
2.4	la solution approchée avec $e = 1000$ et $V = 100000$	7
2.5	la solution approchée avec $e = 2000$ et $V = 5000$	7
2.6	la solution approchée avec $e = 100$ et $V = 500000$	7

Chapitre 1

le maillage 2D pour l'élément fini de la fusée

Dans cette partie, l'objectif est de pourvoir exécuter et de créer un fichier maillage de la fusée. Pour cela, nous utilisons donc le logiciel FreeFem++ qui est un logiciel écrit en C++ développé au laboratoire Jacques –Louis de l'Université Pierre et Marie Curie, porté sous Windows, linux. Ce logiciel permet de créer des maillages qu'on pourra utiliser pour la méthode des éléments finis en 2D. Pour créer ce fichier, nous avons respecté les dimensions ($L=50$ m , $l=5$ m) et les conditions d'isolation donnés dans le projet. Il faut noter que la forme de notre fusée a été simplifié dans le but de pourvoir appliquer les échanges thermiques vu en cours.

cf. [script proj.ffem](#)

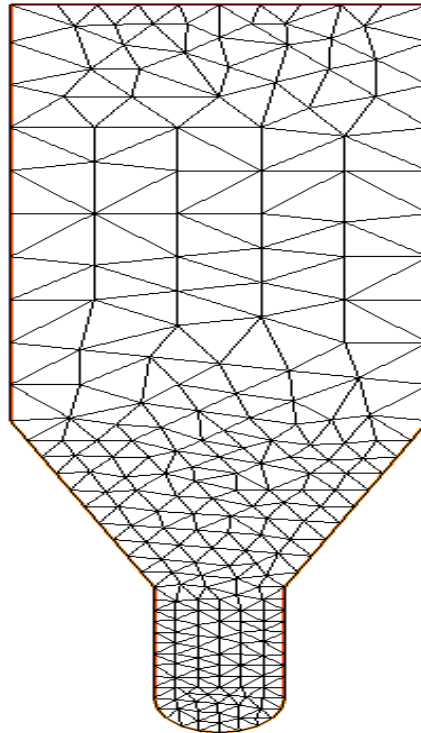


FIGURE 1.1 – Maillage non structuré d'un domaine en forme de fusée.

On remarque que le fichier maillage(.msh) respecte bien la structure de la méthode des éléments finis. Le maillage est acceptable car la qualité du maillage est à 2,185 $([1, 3])$. Le nombre d'arêtes et les coordonnées des nœuds sont générés automatiquement par le logiciel en fonction du pas de discrétisation(Ici 10 sur tous les bords du domaine).

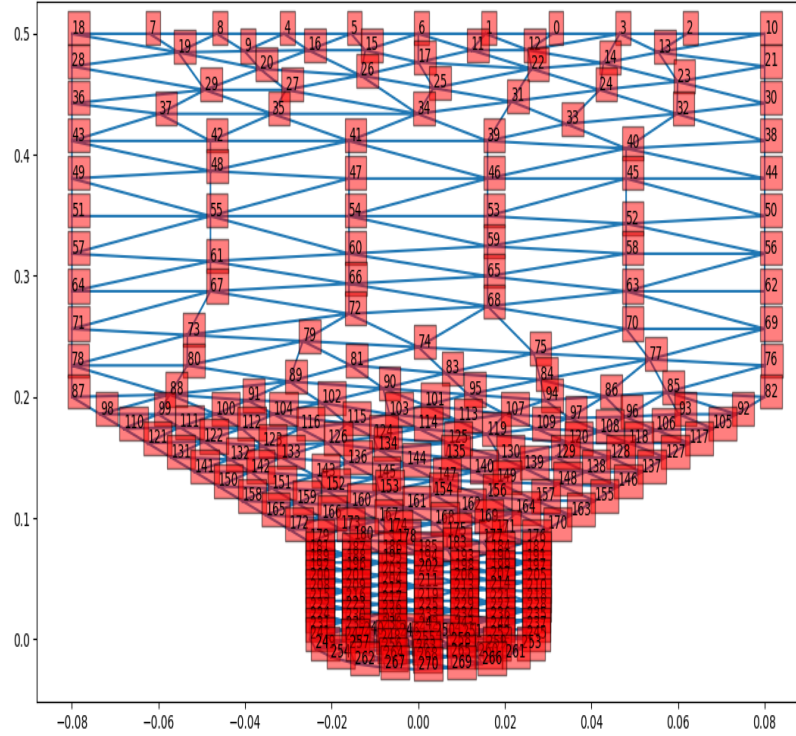


FIGURE 1.2 – Maillage non structuré d'un domaine en forme de fusée.

Chapitre 2

le solveur Eléments finis en 2D

Dans cette partie, l'objectif est d'utiliser le solveur de FreeFem++ pour résoudre le problème de conductibilité thermique stationnaire avec les conditions aux bords de Dirichlet (la base de la fusée), Neumann homogène (les bords verticaux) et Fourier Robin (les bords soumis à la compression d'air). Nous utilisons alors le fichier (.msh) généré dans la partie précédente. Vu que nous ne connaissons pas la solution réelle, nous allons créer 2 solveurs (en FreeFem++ et Python) afin de les comparer et d'analyser les échanges thermiques dans les deux situations.

Le problème à résoudre est alors : Trouver $u = u(x, y)$ tel que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\kappa_a \nabla u) = f(x, y) & \text{sur } \Omega \\ -\kappa_a \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ -\kappa_a \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha \cdot (u - u_E) & \text{sur } \Gamma_F \\ u = u_D & \text{sur } \Gamma_D \end{cases} \quad (A)$$

On a :

- $\kappa_a > 0$: la conductivité thermique de l'air (Ici on a choisi $\kappa_a = 0,024 W.m^{-1}.K^{-1}$).
- $f(x) = (-\frac{1}{2})e^{-\|(x-x_0, y-y_0)\|_2^2}$: la source de chaleur (avec le point (x_0, y_0) défini dans le programme).

- $\kappa_b > 0$: la conductivité thermique du bouclier de la fusée (Ici on a choisi $\kappa_b = 237$ pour l'aluminium).

- $\alpha = \frac{\kappa_b}{e}$: le facteur de transfert thermique du bouclier avec e : l'épaisseur (en mètre).

- $V = \|\vec{v}\|$: La vitesse (en m/s) du lanceur de retour dans l'atmosphère.

- $U_D = 20^{\circ}C$ la température sur Γ_D .

- $U_E = 10^{-3}.V^2$ la température extérieure.

Après l'analyse dimensionnelle de la condition de Fourier, nous utiliserons dans la suite les températures en Kelvin (K).

En résolvant théoriquement le problème, nous trouvons comme **formulation variationnelle** :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) & \text{tel que} \\ a(u, v) = l(v) & \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Avec :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v dx dy + \int_{\Gamma_F} \alpha u v dS + \int_{\Gamma_D} \beta u v dS$$

et

$$l(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx dy + \int_{\Gamma_F} \alpha u_E v dS + \int_{\Gamma_D} \beta u_D v dS$$

2.1 Avec FreeFem++

Nous avons créé le programme FreeFem++ permettant de résoudre le problème et permettant d'afficher l'échange thermique de la fusée en variant à chaque fois la vitesse et l'épaisseur.

cf. script `validation.ffem`

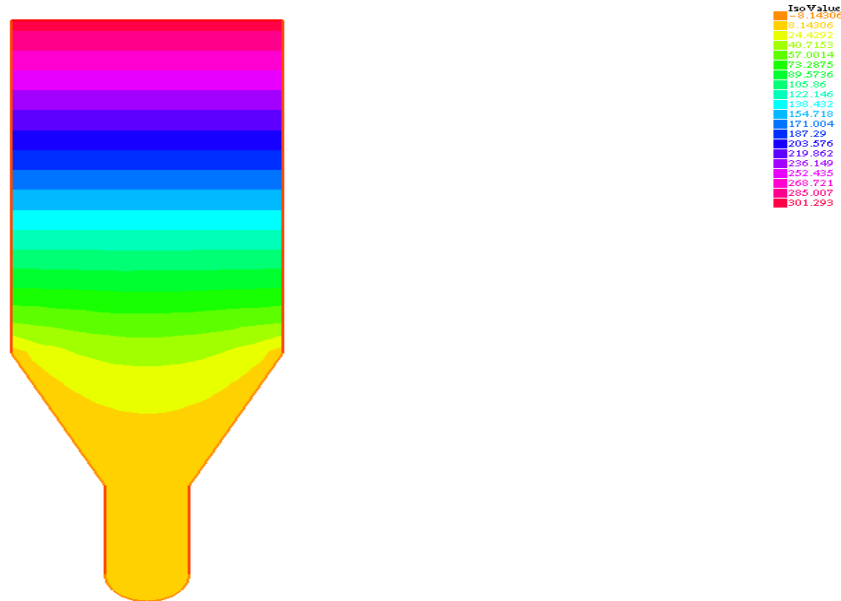


FIGURE 2.1 – Solveur Eléments Finis en 2D en variant V et e .

En variant que la vitesse et l'épaisseur du bouclier, nous remarquons que l'échange thermique ne change pas significativement. On observe que la température baisse au fur à mesure jusqu'au niveau de la coiffe (le bout pointu) de la fusée où l'on trouve la température la plus basse entre 24,42 Kelvin et 8,14 Kelvin.

2.2 Avec Python

En nous aidant du programme vu en TP, nous avons modifié les paramètres et rajouter le terme sur la condition de Dirichlet. cf. script `projj.py`

On remarque que la matrice de rigidité du problème est bien creuse.

Les graphes de l'évolution de la température approchée en fonction du nombre de nœuds sont les suivants :

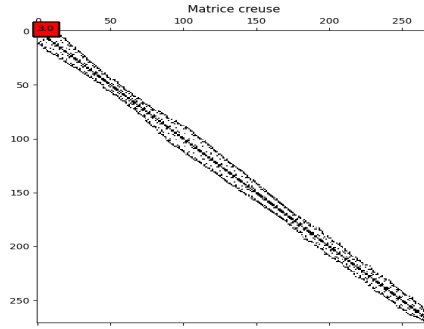


FIGURE 2.2 – Le format de la matrice de rigidité.

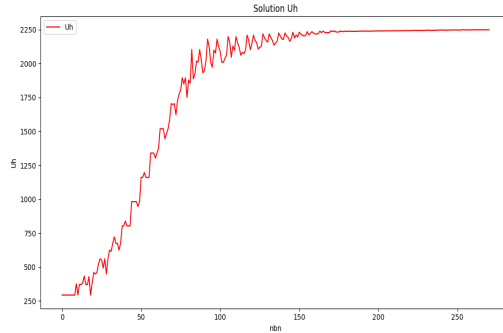


FIGURE 2.3 – la solution approchée avec $e = 100$ et $V = 1500$

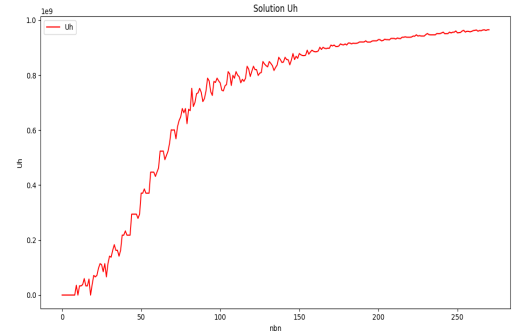


FIGURE 2.4 – la solution approchée avec $e = 1000$ et $V = 100000$

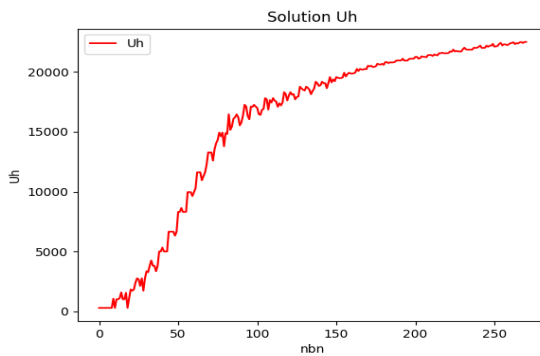


FIGURE 2.5 – la solution approchée avec $e = 2000$ et $V = 5000$

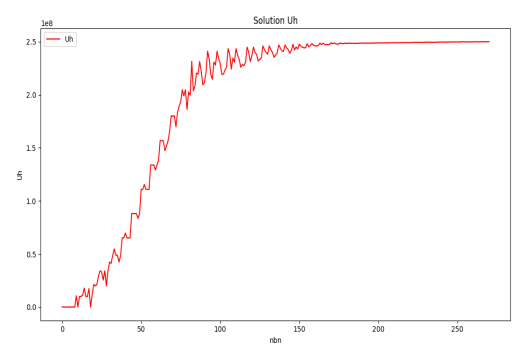


FIGURE 2.6 – la solution approchée avec $e = 100$ et $V = 500000$

Interprétation et Conclusion

On constate que les températures approchées ont la même évolution croissante dans la fusée, cela ne semble pas logique vu les résultats obtenus précédemment. À partir d'un certain nœud(dès le début de la coiffe), l'évolution reste stable ce qui prouve que la fusée a franchi l'atmosphère terrestre. On constate que ces évolutions de ces températures au bout de la fusée sont très élevées (soit $U_h \geq 2000\text{kelvin}$), ce qui

équivalent à $1726,85^{\circ}C$, qui est une température très extrême.

Par conséquent vu notre contexte, les astronautes ne survivront pas de retour sur terre .

Bibliographie

- [1] S Bouzid, AC Boumaaza, and M Afrid. Calcul du champ de température dans un solide anisotrope par la méthode des éléments finis. cas bidimensionnel. *J. of Energies Renouvelables CISM*, 8 :103–111, 2008.
- [2] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2002.
- [3] Philippe Mestat. Maillages d’éléments finis pour les ouvrages de géotechnique. conseils et recommandations. *Bulletin-Laboratoires des Ponts et Chaussées*, pages 39–64, 1997.

Les explorations Internet

- Résolution d'EDP en 2D avec Freefem++. (page consultée le 20/04/2022).
<<http://www.georges-sadaka.fr/FreeFem++/GTA3/GTA3FreeFem++2D.html>>
- FreeFEM Documentation .[en ligne]. (page consultée le 9/04/2022).
<<https://doc.freefem.org/pdf/FreeFEM-documentation.pdf>>
- M. KALLEL. Introduction a FreeFem++ .[en ligne] (page consultée le 9/04/2022).
<http://www.cmap.polytechnique.fr/IMG/pdf/Setif-FreeFem_I.pdf>