**URCA : 2020/2021** — **NOM :Yannick GNAGO**
L3 MAP/S5O4 A — yannick.gnago@etudiant.univ-reims.fr

# COMPTE RENDU TP1 MA504
## *Les formules de Newton-côtes*

## OBJECTIF TP1 :

On souhaite calculer l'intégrale d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. entrée par un utilisateur par les formules de *Newton-côtes* vu en cours, connaitre l'erreur effectuée et déterminer l'ordre graphiquement pour chaque formules.

1. Validation du programme
   On a : $f_1(x) = 1 \qquad f_2(x) = 2x + 1 \qquad f_3(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$
   En calculant, on trouve :
   $\int_{-1}^{12} f_1(x)d(x) = 13 \qquad \int_{-1}^{12} f_2(x)d(x) = 156 \qquad \int_{-1}^{12} f_3(x)d(x) = 6420, 91$
   D'après le cours, on sait que :
   La méthode de rectangles est exacte pour les polynômes de degré 0.$(ordre = 0)$
   la méthode des trapèzes est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égale a 1.$(ordre \leq 1)$
   La méthode de simpson est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égale a 3.$(ordre \leq 3)$

```
VALIDATION DES PROGRAMMES avec f1(x)=1   f2(x)=2x+1   f3(x)=x^3+2x^2+x+1
l'integrale de f1 entre -1  et 12 par la methode de rectangle a gauche est: 13.0
l'integrale de f1 entre -1  et 12 par la methode de rectangle a droite est: 13.0
l'integrale de f1 entre -1  et 12 par la methode de trapeze est: 13.0
l'integrale de f2 entre -1  et 12 par la methode de trapeze est: 156.0
l'integrale de f1 entre -1  et 12 par la methode de simpson est: 13.0
l'integrale de f2 entre -1  et 12 par la methode de simpson est: 156.00000000000006
l'integrale de f3 entre -1  et 12 par la methode de simpson est: 6420.9166666666715
```

FIGURE 1 – Validation des formules avec $\int_{-1}^{12} f(x)d(x), \quad i = 1, 2, 3$

   Conclusion : la procédure **Méthode_intégration** fonctionne bien, On retrouve bien les valeurs calculées des intégrales avec les différents méthodes.
   (Voir fonction Method_integration)

2. Formule de Newton-Cotes composée
   Pour cela on considère $n + 1$ points équidistants : $x_i = a + h.i \forall i \in 0, ...n$ et $h = (b - a)/n$.
   Sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, nous appliquons une valeur approchée de l'intégrale de $f$ par une formule de Newton-Côtes(Vu au cours).
   **RAPPEL :**
   Méthodes des rectangles : $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx (x_{i+1} - x_i)f(s_i) \quad ou \quad s_i = [x_i, x_{i+1}]$
   Méthodes des trapèzes : $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx (x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}$
   Méthodes de simpson : $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{(x_{i+1}-x_i)}{6}.(f(x_{i+1}) + 4f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}) + f(x_i))$

Donc une valeur approchée de l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x)d(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

en additionnant les intégrales calculées sur chaque sous-intervalle.
(voir fonction formule_newton et method_integration)

3. l'erreur d'approximation
Soit R(f) : l'erreur On a $R(f) = |valeur\_exacte - valeur\_approche|$
Prenons $f(x) = \exp(-x^2)$, $a = 1$, $b = 10$, et $n = 100$ (subdivision de $[a, b]$).
On a : $y0 = 0,13940$(valeur_exacte)

```
entrer la fonction f (ex: lambda x: 2*x+1):lambda x: exp(-x**2)

Donner la valeur calculé de l'intégrale entre [1,10]:0.139402
Resultat de l'integrale de f avec les formules de NewtonCotes:
la valeur de l'integrale de f pour m= 0 est: 0.156454138778352
la valeur de l'integrale de f pour m= 1 est: 0.156454138778352
la valeur de l'integrale de f pour m= 2 est: 0.1398995639256371
la valeur de l'integrale de f pour m= 3 est: 0.13940275913368003
Affichage des erreurs:
l'erreur de calcul de l'integrale de f pour m= 0 est 0.01705213877835199
l'erreur de calcul de l'integrale de f pour m= 1 est 0.01705213877835199
l'erreur de calcul de l'integrale de f pour m= 2 est 0.0004975639256371012
l'erreur de calcul de l'integrale de f pour m= 3 est 7.591336800283344e-07
```

FIGURE 2 – Calcul d'erreur des formules avec $\int_1^{10} \exp(-x^2)d(x)$

Prenons $f(x) = 21x^7 + x^5 + 12$, $a = -5$, $b = 11$, et $n = 50$(subdivision de $[a, b]$)
On a : $y0 = 561959520$(valeur-exacte)

```
entrer la fonction f (ex: lambda x: 2*x+1):lambda x: 21*(x**7)+(x**5)+12
    ...:

Donner la valeur calculé de l'intégrale entre [-5,11]:561959520
Resultat de l'integrale de f avec les formules de NewtonCotes:
la valeur de l'integrale de f pour m= 0 est: 498396201.32937956
la valeur de l'integrale de f pour m= 1 est: 498396201.32937956
la valeur de l'integrale de f pour m= 2 est: 564161864.0493797
la valeur de l'integrale de f pour m= 3 est: 561959745.0099828
Affichage des erreurs:
l'erreur de calcul de l'integrale de f pour m= 0 est 63563318.67062044
l'erreur de calcul de l'integrale de f pour m= 1 est 63563318.67062044
l'erreur de calcul de l'integrale de f pour m= 2 est 2202344.0493797064
l'erreur de calcul de l'integrale de f pour m= 3 est 225.00998282432556
```

FIGURE 3 – Calcul d'erreur des formules avec $\int_{-5}^{11} 21x^7 + x^5 + 12.d(x)$ et $n = 50$

```
entrer la fonction f (ex: lambda x: 2*x+1):lambda x: 21*(x**7)+(x**5)+12

Donner la valeur calculé de l'intégrale entre [-5,11]:561959520
Resultat de l'integrale de f avec les formules de NewtonCotes:
la valeur de l'integrale de f pour m= 0 est: 545655803.5617862
la valeur de l'integrale de f pour m= 1 est: 545655803.5617862
la valeur de l'integrale de f pour m= 2 est: 562097219.2417862
la valeur de l'integrale de f pour m= 3 est: 561959520.8791552
Affichage des erreurs:
l'erreur de calcul de l'integrale de f pour m= 0 est 16303716.438213825
l'erreur de calcul de l'integrale de f pour m= 1 est 16303716.438213825
l'erreur de calcul de l'integrale de f pour m= 2 est 137699.24178624153
l'erreur de calcul de l'integrale de f pour m= 3 est 0.879155158996582
```

FIGURE 4 – Calcul d'erreur des formules avec $\int_{-5}^{11} 21x^7 + x^5 + 12.d(x)$ et $n = 200$

**REMARQUES :**
Avec ces 2 fonctions, on voit que la plus petite des erreurs est celle de la

méthode de Simpson(m=3) et que l'erreur diminue au fur a mesure que m augmente et $n \to \infty$.
(voir fonction Erreur_integration)

4. l'ordre de precision des méthodes.
On avait : $erreur = |\int_a^b f(x).d(x) - I_{m,N}(f)|$
D'après le cours, on a :

$$erreur \leq Ch^{\alpha} \Longleftrightarrow erreur \leq C.(\frac{b-a}{N})^{\alpha} \approx \frac{K}{N^{\alpha}}$$

$avec \quad \alpha$ : l'ordre de la méthode
$\Longrightarrow \log(erreur) \leq \log(K) - \alpha \log(N)$
En posant : $Y = log(erreur)$, $\beta = log(K)$ et $X = log(N)$
On a : $Y \leq \beta - \alpha - X$, alors l'ordre $\alpha$ correspond à la pente de la droite affine $(\log(N), \log(erreur))$ (voir fonction ordre_courbe)

(a) Prenons : $f(x) = x^3 + 2 * x^2 + x + 1 \quad, a = -1 \quad ,b = 12 \quad ,y0 = 6420,91$

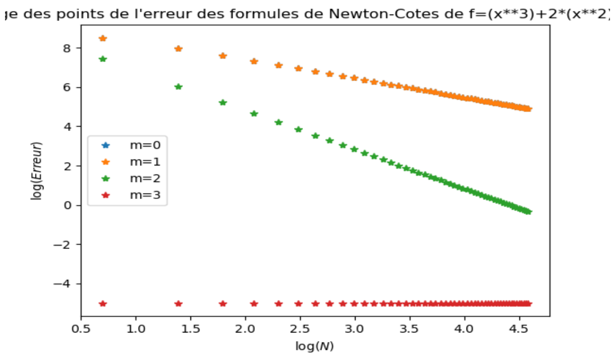


FIGURE 5 – Nuage des points de l'erreur d'intégration de $f$

(b) Prenons $f(x) = 21x^7 + x^5 + 12, \quad a = -5, \quad b = 11$, et $\quad y0 = 561959520$

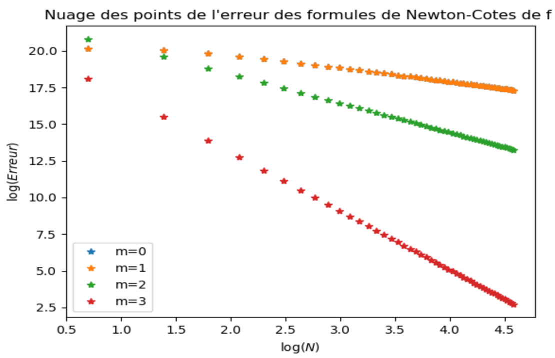


FIGURE 6 – Nuage des points de l'erreur d'intégration de $f$

(c) Prenons $f(x) = \exp(-x), \quad a = 1, \quad b = 10$, et $\quad y0 = 0.13940$

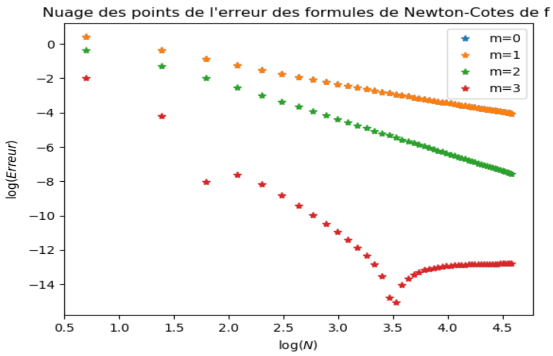


FIGURE 7 – Nuage des points de l'erreur d'intégration de $f$

**REMARQUES :** les nuages pour m=0 et m=1 sont identiques.
**<u>Essayons de trouver par calcul l'ordre des méthodes pour la fonction</u>** $f(x) = 21x$

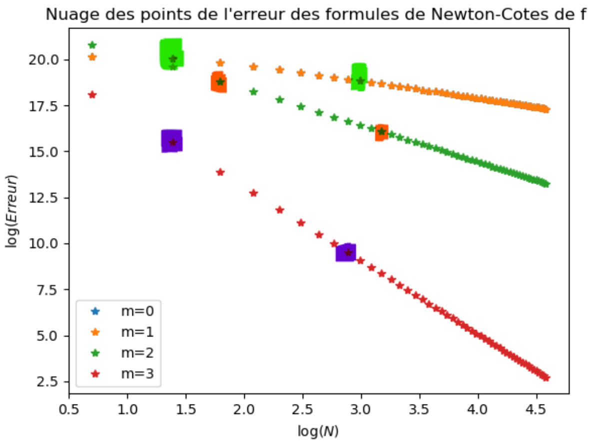


FIGURE 8 – Calcul de pentes avec les points surlignés de l'erreur d'intégration de $f$

$\Longrightarrow$ Pour $m = 0,1$ ; $B(X1 = 1.378; Y1 = 19.985)$ et $A(X2 = 3.096; Y2 = 18.689)$

$$Alors \quad \alpha = |\frac{Y1 - Y2}{X1 - X2}| = 0.75 \approx 1$$

$\Longrightarrow$ Pour $m = 2$ ; $B(X1 = 1.784; Y1 = 18.851)$ et $A(X2 = 3.182; Y2 = 16.043)$

$$Alors \quad \alpha = |\frac{Y1 - Y2}{X1 - X2}| = 2.008 \approx 2$$

$\Longrightarrow$ Pour $m = 3$ ; $B(X1 = 1.378; Y1 = 15.558)$ et $A(X2 = 2.984; Y2 = 9.078)$

$$Alors \quad \alpha = |\frac{Y1 - Y2}{X1 - X2}| = 4.035 \approx 4$$

# Références

[1] *Cours Magistral Analyse Numérique L3-MA0504-URCA.*
**Professeur Stéphanie Salmon.**

[2] *Analyse numérique en python*,
Site : *https : //bouquinpython.readthedocs.io/fr/latest/analysenumerique.html*

[3] *Intégration numérique en python*,
Site : *https : //courspython.com/integration − numerique.html*