Exercice 3 (Monte Carlo).
On simule des échantillons (U_1, … U_n) et (V_1, … V_n) de lois uniformes sur [0,1].
(on fait ça avec rand)
On calcule (f étant la fonction de l'énoncé)
$(f(U_1,V_1), \dots , f(U_n,V_n)) = (Z_1, \dots Z_n)$ et puis

$$I = (1/n)\ \Sigma^n_{k=1} Z_k$$

f est ici une fonction bornée car continue et l'on travaille sur un compact.
Donc les Z sont des variables aléatoires ayant une espérance (ce sont des va bornées).
par la LGN (forte) puisque 1) la suite $(Z_n)_n$ est une suite de va iid 2) elles admettent un moment d'ordre 1 , on a que

$$(1/n)\ \Sigma^n_{k=1} Z_k \quad \to \quad E(Z) \quad \text{(espérance de Z)}$$

(donc si l'on veut approximer E(Z) on peut utiliser la LGN).

Que vaut ou comment écrire E(Z) ? Par le thme de transfert on a par ailleurs que

$$E(Z)= E(f(U,V))= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(u,v)\, du\, dv$$

car (U,V) a pour densité $\mathbf{1}_{[0,1]}(u)\ \mathbf{1}_{[0,1]}(v)$.

C'est le même principe pour l'exercice 4.

Pour calculer $J= \iint_{[0,1]*[0,1]} y \sin(xy)^2\, dx\, dy$

Par le thme de Fubini on dit que
$J= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} y \sin(xy)^2\, dx \right) dy$
$\left(\int_{[0,1]} y \sin(xy)^2\, dx \right)$ on pose dedans u= xy. On obtient
$\left(\int_{[0,1]} y \sin(xy)^2\, dx \right) = \left(\int_{[0,y]} \sin(u)^2\, du \right)$ = (linéarisation de sin au carré)
$= \left(\int_{[0,y]} (1-\cos(2u))/2 \ du \right) = (1/2)\ (y - [\sin(2u)\ /2]_0^y\ ) = (y/2 - \sin(2y)\ /4)$

Donc $J= \int_{[0,1]} (y/2 - \sin(2y)\ /4)\ dy = \left[y^2/4 + \cos(2y)/8\right]_0^1 = 1/4 + \cos(2)/8 - \cos(0)/8$
$= (1+\cos(2))/8$

En revanche on ne peut pas calculer l'intégrale $J= \iint_{[0,1]*[0,1]} \sin(xy)^2\, dx\, dy$
(sans le y)

⇔ ⟺ ˥ ∃ ∀

$\pm \ \wedge \ \vee \ \cap \qquad \infty \ \Sigma \ \amalg \prod \ \in \notin \cap \ \subset \bigcap \bigcup \supset \int \ \int$

$\lambda \ \varphi \ \sigma \ \pi \ \mu \ \theta \ \varepsilon \delta \tau \chi \ \rho \alpha \beta \gamma \eta \omega \ \ \Omega \mathcal{T} \quad \ell$

$\uparrow \downarrow \leftarrow \rightarrow$