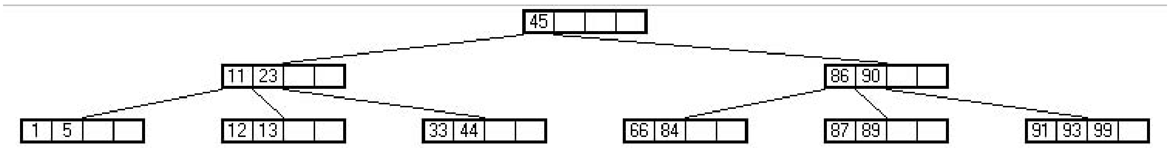
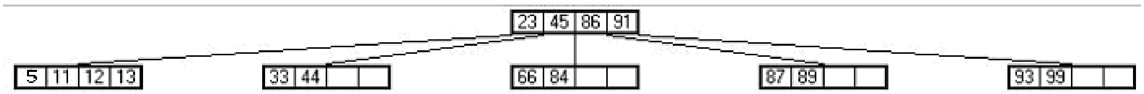
Selbststudium B-Bäume – Lösungen

1.

Nach dem Einfügen:



Nach dem Löschen von 90 und 1:



2.

Die Höhe eines Baumes ist die Anzahl *Knoten* auf dem längsten Weg von der Wurzel zu einem Blatt. Ein Baum, der nur aus der Wurzel besteht, hat die Höhe 1. Wir haben die Formel für die maximale Anzahl Knoten in einem Baum von Grad *d* und Höhe *h* kennengelernt als:

$$N(d,h) = \tfrac{d^h - 1}{d - 1}$$

Davon können wir die gesuchte Formel ableiten:

Die Wurzel ist eine Ausnahme und kann minimal 1 Element enthalten = 2 Nachfolgeknoten.

Betrachten wir nun erst einmal nur einen dieser beiden Nachfolgeknoten. Ab der zweiten Stufe gibt es keine Ausnahmen mehr, und wir wissen, dass jeder Knoten mindestens *n* Elemente haben muss (Ordnung *n*) und daher auch *n+1* Nachfolger.

Wir können also die beiden Teilbäume unter der Wurzel als volle Bäume des Grades *n+1* betrachten. Die Höhe dieser Teilbäume ist natürlich um 1 geringer als die Gesamthöhe des B-Baumes.

Mit obiger Formel können wir deshalb die Anzahl Elemente in einem der beiden Teilbäume bestimmen, wobei jetzt

> d = n+1 (Jeder Knoten der Ordnung *n* hat mindestens *n+1* Nachfolger)
> h = h-1 (weil wir ja vorerst nur einen Teilbaum der Wurzel betrachten)
>
> N_T = minimale Anzahl Elemente für einen Teilbaum direkt unter der Wurzel
> N = minimale Anzahl Elemente für den ganzen B-Baum.

wenn wir in die Formel einsetzen ergibt dies:

$$N_T = \tfrac{(n+1)^{h-1} - 1}{n} \cdot n = (n+1)^{h-1} - 1$$

Wir haben unter der Wurzel zwei gleichgrosse minimale Teilbäume plus das Element in der Wurzel. Dies ergibt für den ganzen Baum:

$$N = 2N_T + 1 = 2\left((n+1)^{h-1} - 1\right) + 1 = 2(n+1)^{h-1} - 1$$

Nach *h* aufgelöst ergibt sich:

$$h = \left\lceil \log_{n+1}\left(\frac{(N+1)}{2}\right) + 1 \right\rceil$$

Bemerkung: Wird die Höhe über die Anzahl *Kanten* auf dem längsten Weg von der Wurzel zu einem Blatt definiert, so muss in obigen Formeln überall *h*+1 anstelle von *h* gesetzt werden. Als Endergebnis ergibt sich in diesem Fall:

$$h = \left\lceil \log_{n+1}\left(\frac{(N+1)}{2}\right) \right\rceil$$

