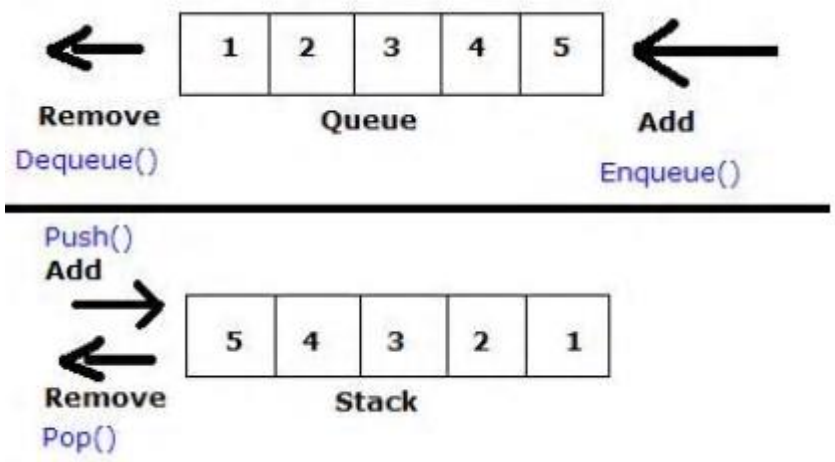
Priority Queues
Algorithmen und Datenstrukturen 2

- Grüne Farbe: Bitte im Script nachtragen

Priority Queues

- Zwischenlagerung für Elemente



- Geordnet nach Priorität
- Schneller Zugriff auf Min / Max Element
- Orientierungen
  - Min-Oriented Priority Queues
  - Max-Oriented Priority Queues

Priority Queue Interface

```
public interface MinPriorityQueue<K extends Comparable<? super K>> {
  void add(K element); // fügt beliebiges Element hinzu
  K min();             // Wert des minimalen Elements (Queue wird nicht verändert)
  K removeMin();       // entfernt das derzeit minimale Element und gibt es zurück
  int size();          // Anzahl aktuell in der Queue gespeicherte Elemente
}
```

- Elemente müssen in Ordnungsrelation stehen nach Priorität (Comparable)
  - x.compareTo(y), liefert int zurück:
    - > 0: x > y
    - == 0: x == y
    - < 0: x < y

Priority Queues mit bekannten Datenstrukturen (Seite 2)

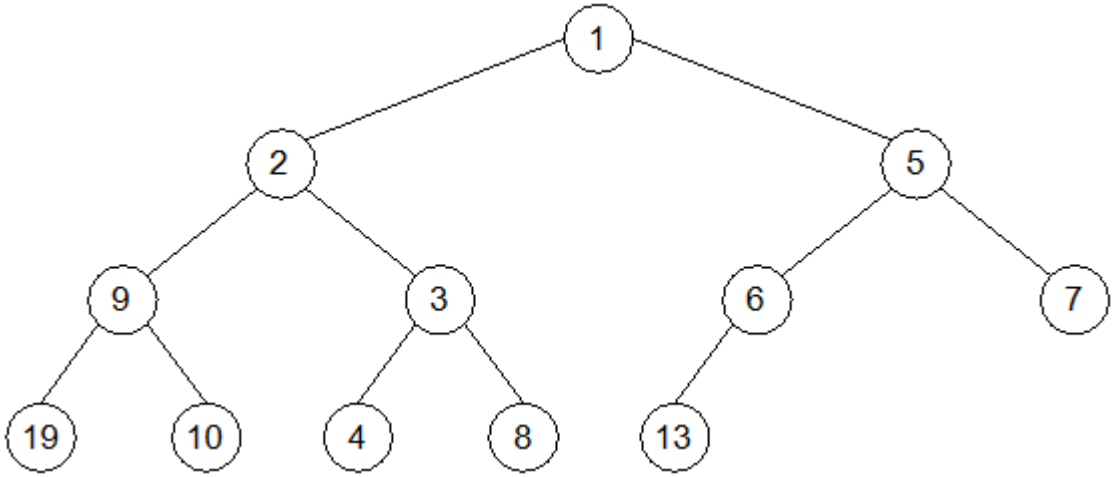
Operationen	**Array**		**LinkedList**		**Baum**	
	Sortiert	Unsortiert	Sortiert	Unsortiert	Allgemein	AVL
add(element)						
min()						
removeMin()						

Priority Queues mit bekannten Datenstrukturen (Seite 2)

Operationen	Array		LinkedList		Baum	
	Sortiert *(min am Ende)*	Unsortiert	Sortiert *(min am Anfang)*	Unsortiert	Allgemein	AVL
add(element)	O(n)	O(1)	O(n)	O(1)	O(n)	O (log n)
min()	O(1)	O(n)	O(1)	O(n)	O(n)	O (log n)
removeMin()	O(1)	O(n)	O(1)	O(n)	O(n)	O (log n)

Bemerkung: Array Sortiert: Anzahl Elemente müssen bekannt sein, sonst O(n)

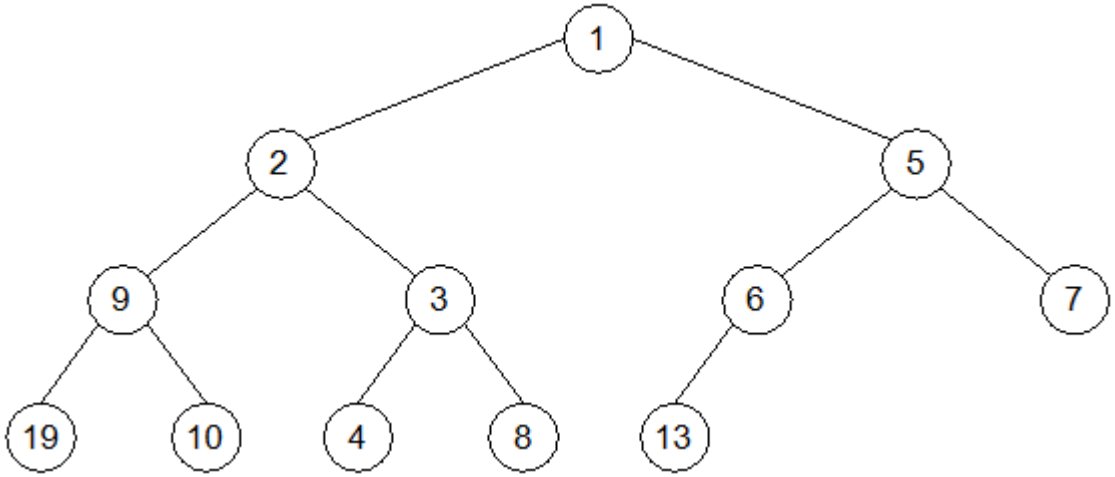
Heap Datenstruktur (Kap. 5.5)



- Sehr gut geeignet für PQ
- Bild zeigt einen **Min-Heap**
- Invariante Eigenschaften:
  - Binärer Baum
  - Struktur-Eigenschaft:

  - Ordnungs-Relation Eigenschaft:

Heap Datenstruktur (Kap. 5.5)

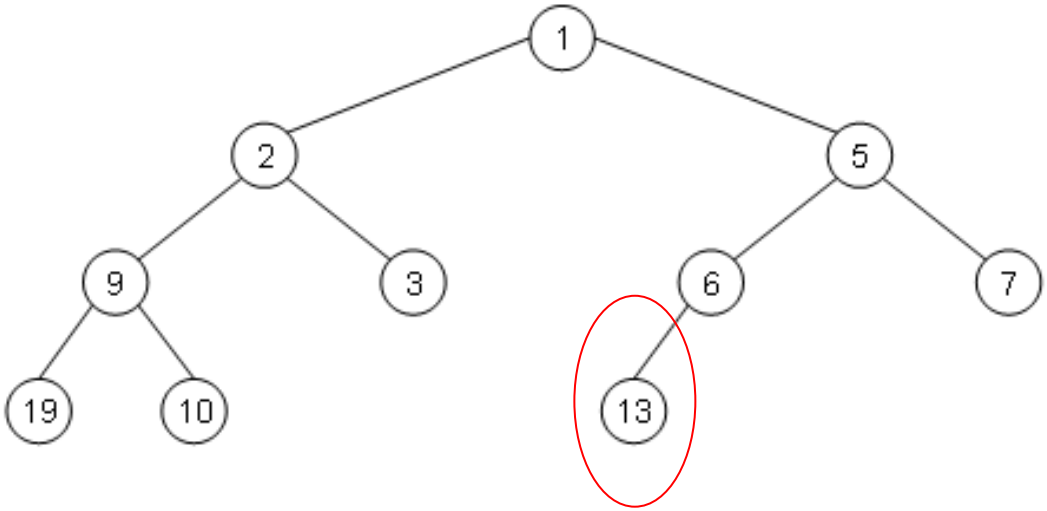


- Sehr gut geeignet für PQ
- Bild zeigt einen **Min-Heap**
- Invariante Eigenschaften:
  - Binärer Baum
  - Struktur-Eigenschaft:
    - Der Baum ist vollständig bis auf die unterste Stufe (Level), wo von links her aufgefüllt wird.
  - Ordnungs-Relation Eigenschaft:
    - Für jeden Knoten gilt, dass **kein Nachfolger eine kleinere** Priorität hat (*Min-Heap)

Beispiele: Heaps und nicht-Heaps (Seite 3)

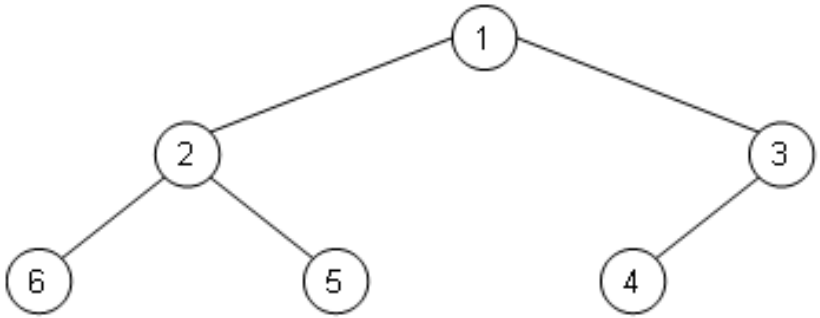
- Geben Sie für jedes Beispiel an:
  - Ist es ein Heap?
    - Falls ja:
      - ein Min-Heap oder
      - ein Max-Heap
    - Falls nein:
      - Welche invariante Eigenschaft wurde verletzt?

Heaps-Beispiele (1)



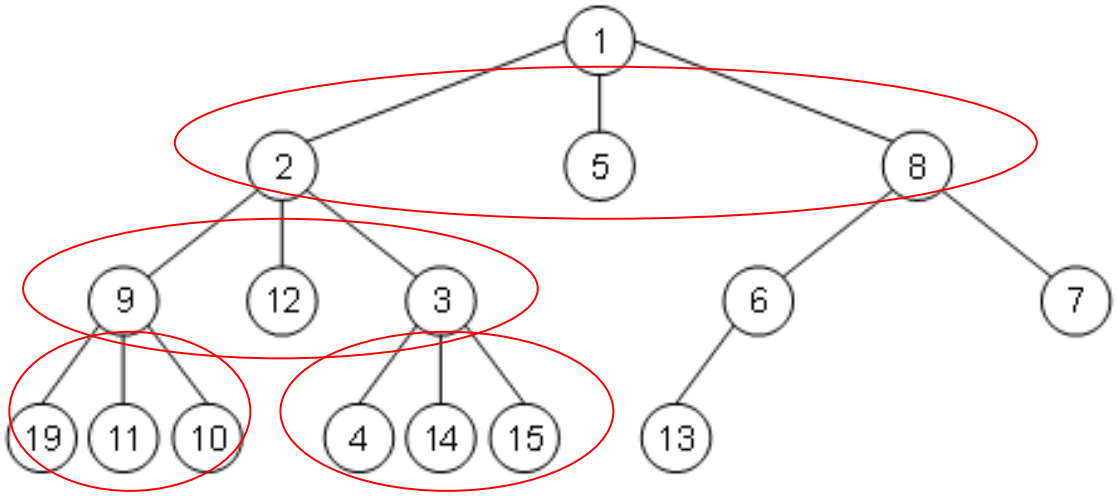
Kein Heap

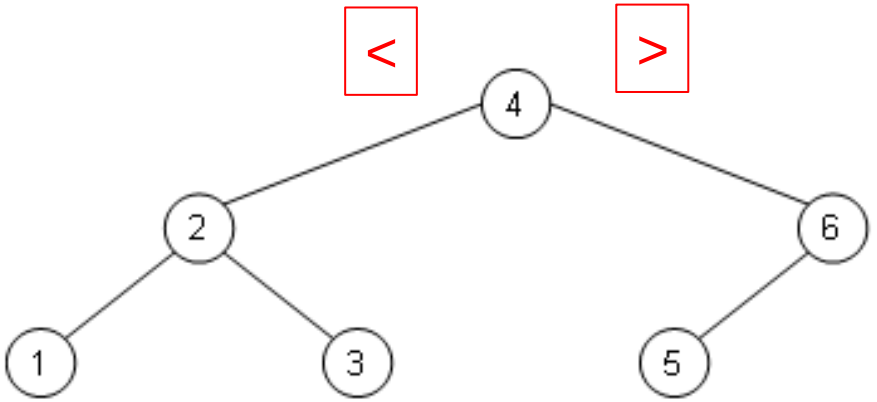
Nicht von links aufgefüllt



Gültiger Min-Heap

Heaps-Beispiele (2)





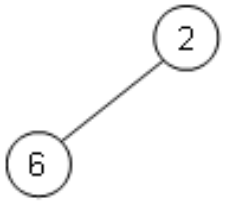
Kein Heap

Kein Binärbaum

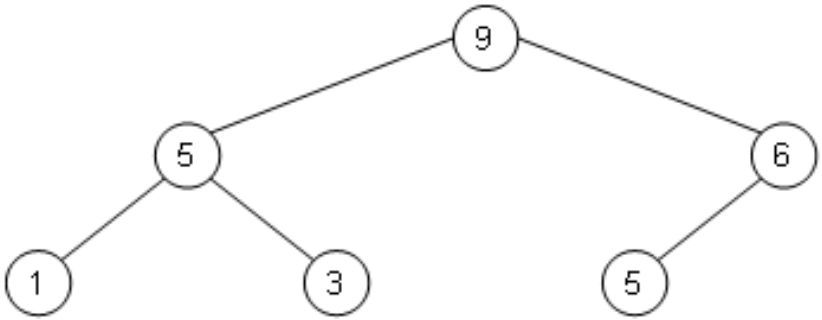
Kein Heap

Ordnungs-Relation verletzt (binärer Suchbaum)

Heaps-Beispiele (3)



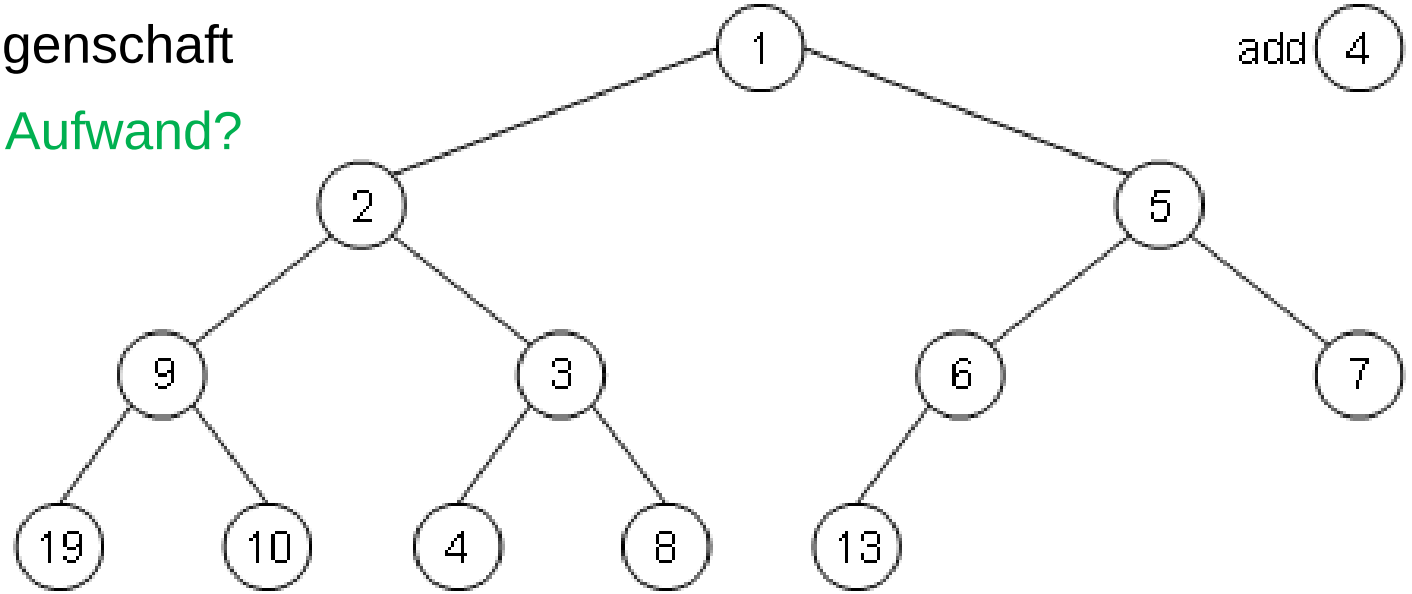
Gültiger Min-Heap



Gültiger Max-Heap

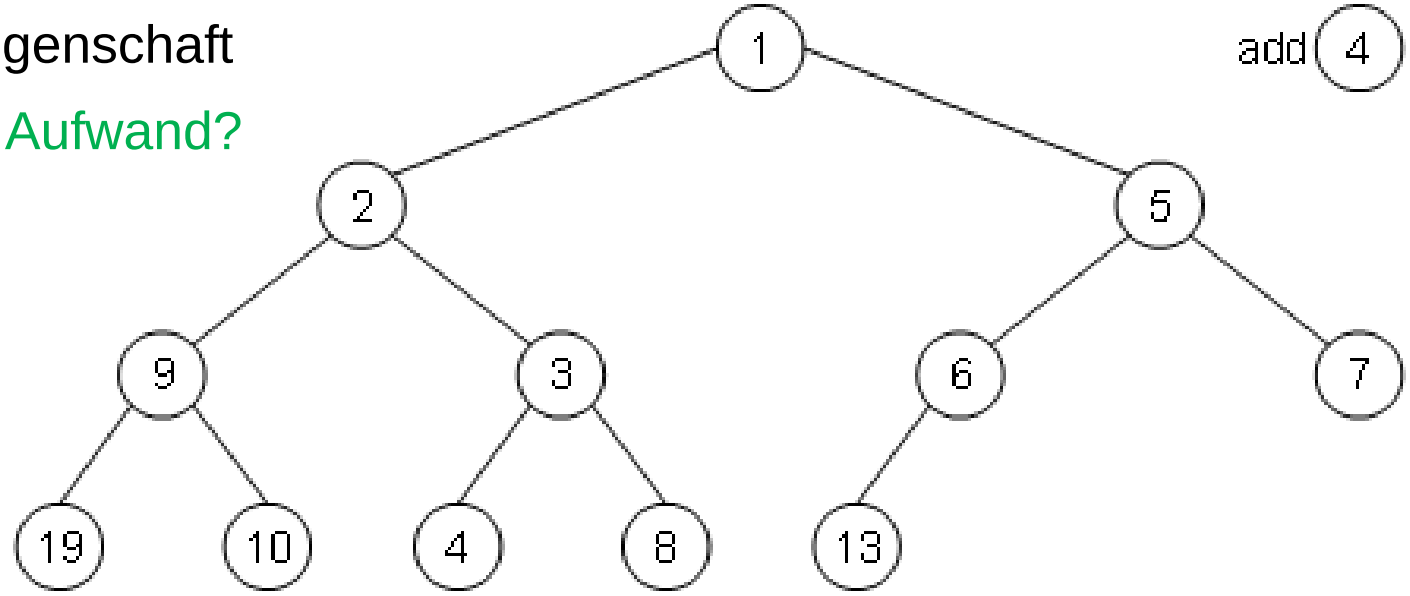
Operationen auf Heaps (Kap 5.6)

- Hinzufügen von Elementen
  - Invariante Eigenschaften müssen erhalten bleiben
    - Binärer Baum
    - Struktur-Eigenschaft
    - Ordnungs-Eigenschaft
  - Asymptotischer Aufwand?



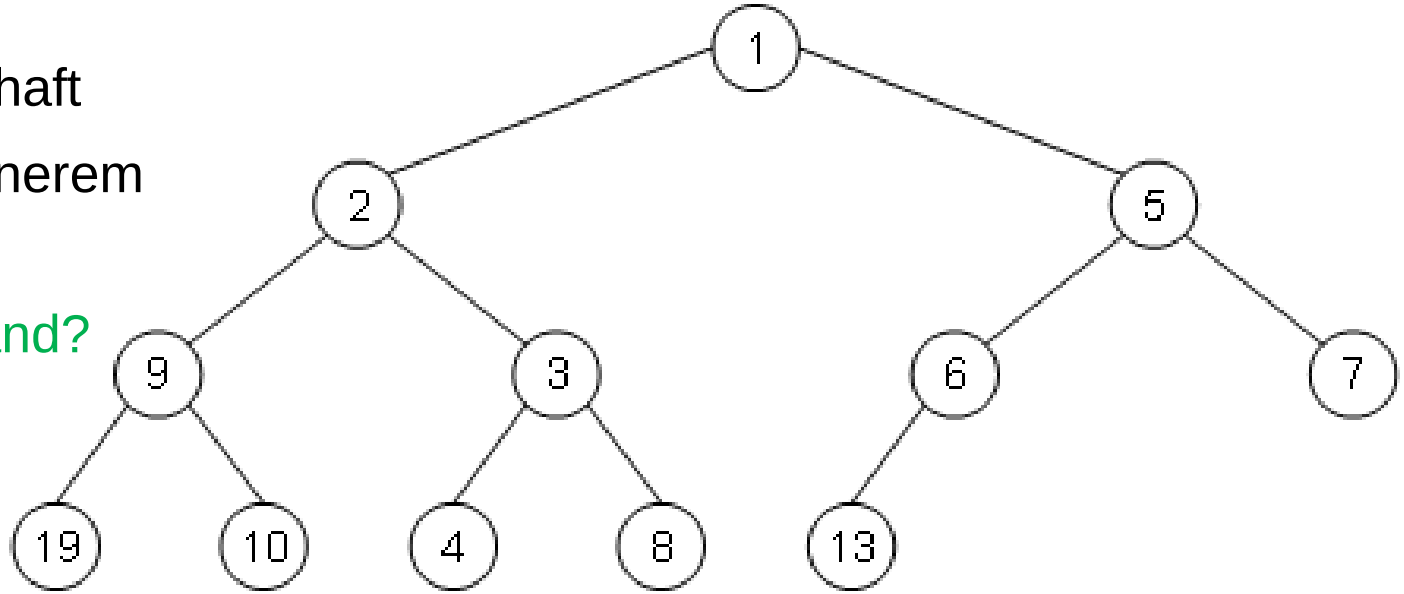
Operationen auf Heaps (Kap 5.6)

- Hinzufügen von Elementen
  - Invariante Eigenschaften müssen erhalten bleiben
    - Binärer Baum
    - Struktur-Eigenschaft
    - Ordnungs-Eigenschaft
  - Asymptotischer Aufwand?
    - O(log n)



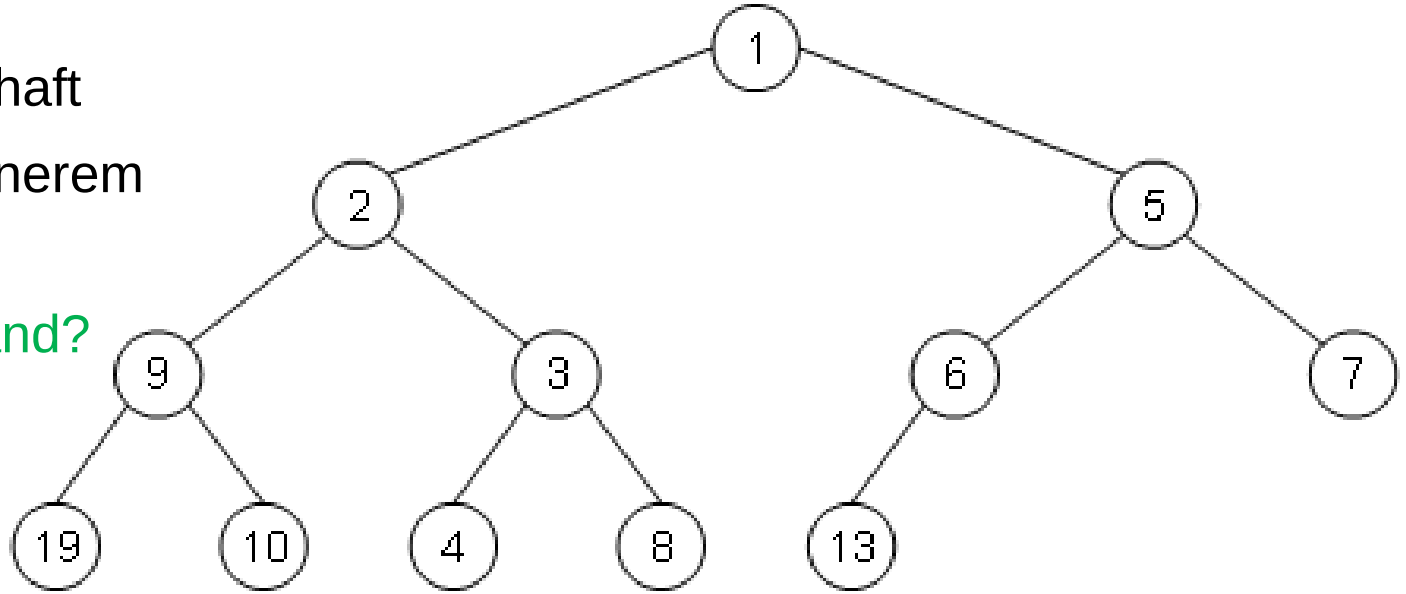
Operationen auf Heaps (Kap 5.6)

- Entfernen des kleinsten Elements (*removeMin()*)
  - Invariante Eigenschaften müssen erhalten bleiben
    - Struktur-Eigenschaft
    - Binärer Baum
    - Ordnungs-Eigenschaft
      - * Immer mit kleinerem vertauschen
  - Asymptotischer Aufwand?



Operationen auf Heaps (Kap 5.6)

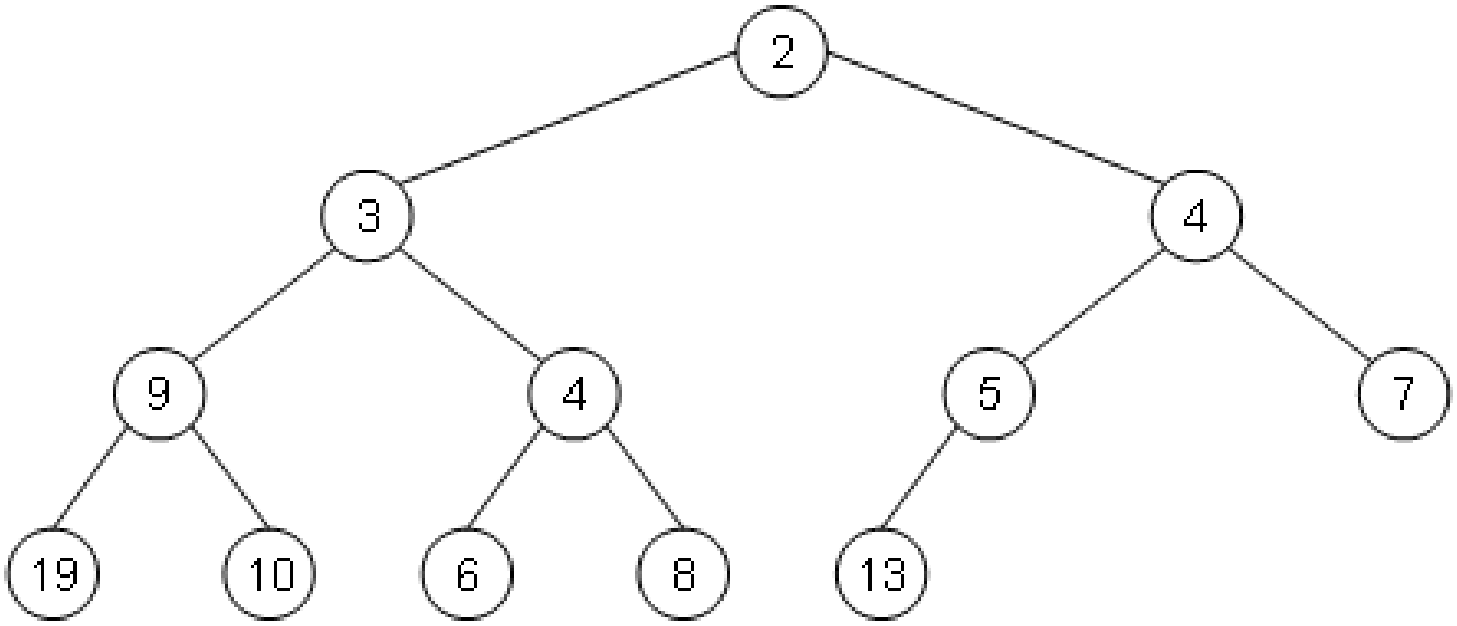
- Entfernen des kleinsten Elements (*removeMin()*)
  - Invariante Eigenschaften müssen erhalten bleiben
    - Struktur-Eigenschaft
    - Binärer Baum
    - Ordnungs-Eigenschaft
      - * Immer mit kleinerem vertauschen
  - Asymptotischer Aufwand?
  - O(log n)



Beispiel im Script (Seite 4)

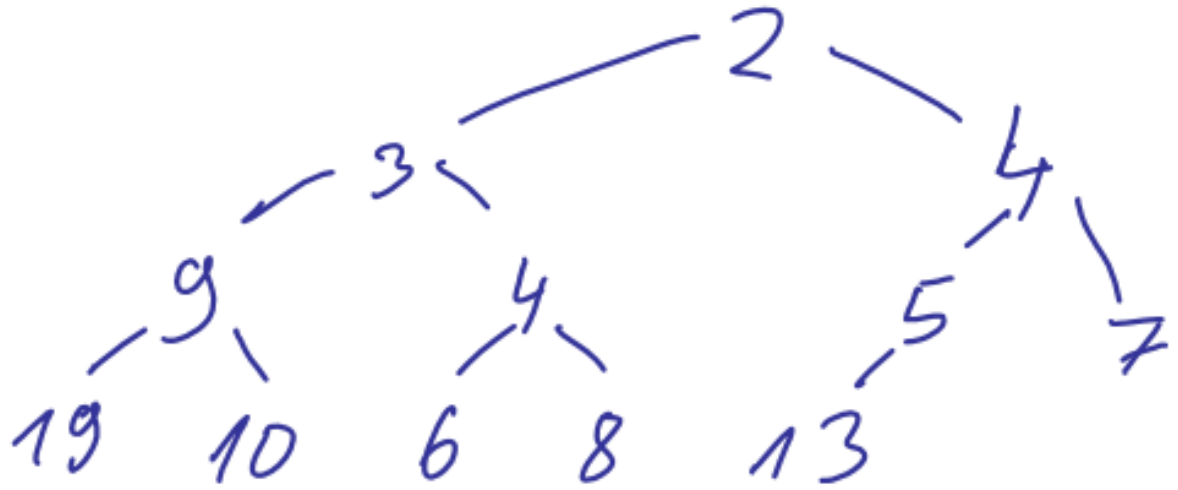
Beispiel

add(2);
removeMin();



Beispiel im Script (Seite 4)

Lösung:



Komplexitätsanalyse von Heaps

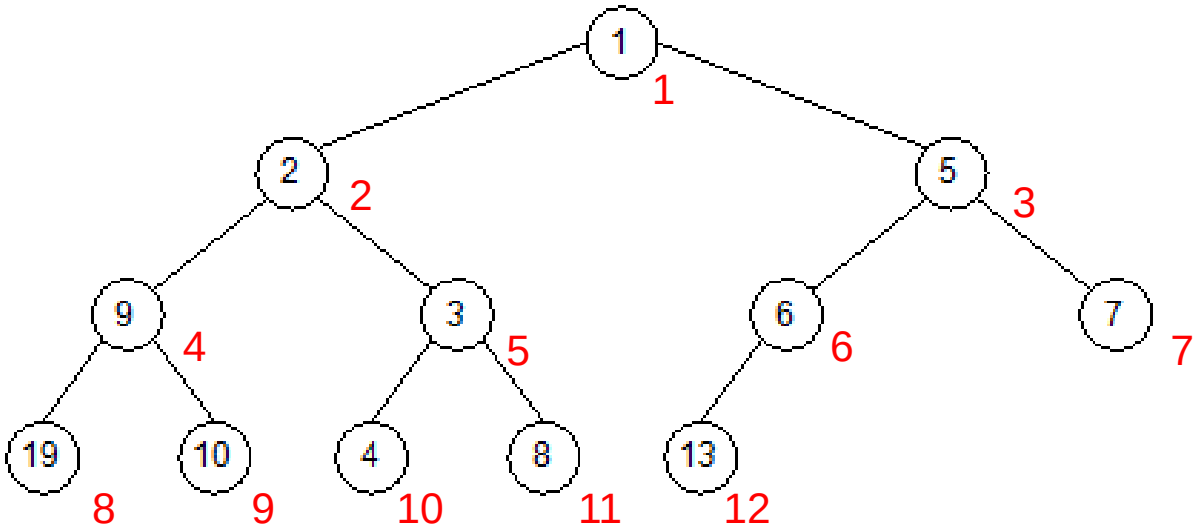
Operationen	**Array**		**LinkedList**		**Baum**		
	Sortiert *(min am Ende)*	Unsortiert	Sortiert *(min am Anfang)*	Unsortiert	Allgemein	AVL	Heap
add(element)	O(n)	O(1)	O(n)	O(1)	O(n)	O (log n)	
min()	O(1)	O(n)	O(1)	O(n)	O(n)	O (log n)	
removeMin()	O(1)	O(n)	O(1)	O(n)	O(n)	O (log n)	

Komplexitätsanalyse von Heaps

Operationen	**Array**		**LinkedList**		**Baum**		
	Sortiert *(min am Ende)*	Unsortiert	Sortiert *(min am Anfang)*	Unsortiert	Allgemein	AVL	Heap
add(element)	O(n)	O(1)	O(n)	O(1)	O(n)	O (log n)	O(log n)
min()	O(1)	O(n)	O(1)	O(n)	O(n)	O (log n)	O(1)
removeMin()	O(1)	O(n)	O(1)	O(n)	O(n)	O (log n)	O(log n)

Heap-Implementation in Array

- Heaps können elegant in Arrays implementiert werden
- Version mit Start-Index 1:



Vaterknoten von i:

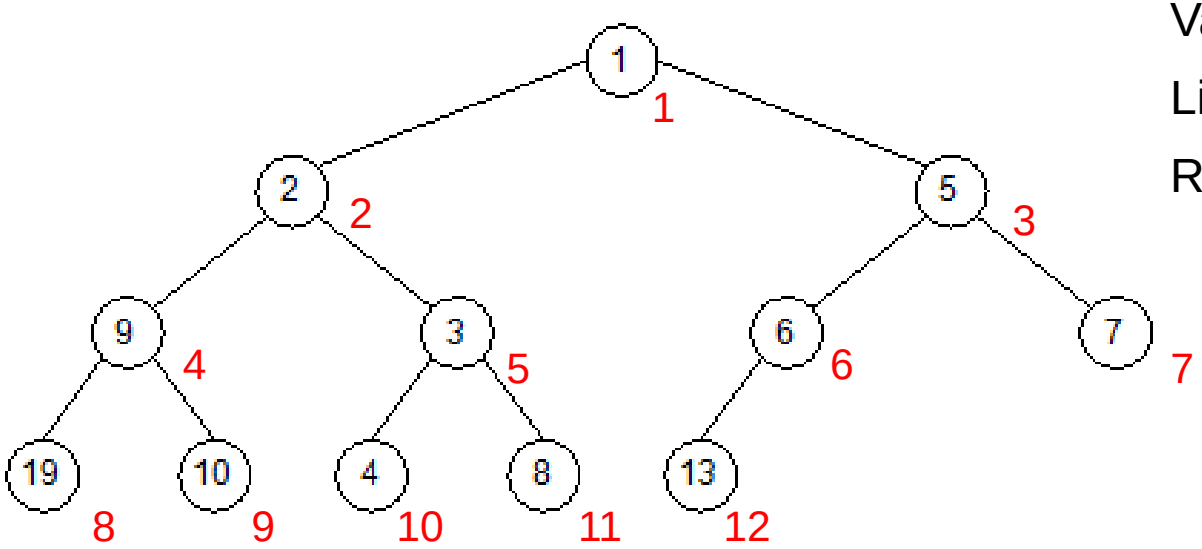
Linker Nachfolger von i:

Rechter Nachfolger von i:

Index	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
Element:		1	2	5	9	3	6	7	19	10	4	8	13	

Heap-Implementation in Array

- Heaps können elegant in Arrays implementiert werden
- Version mit Start-Index 1:



Vaterknoten von i: i/2 (int div)

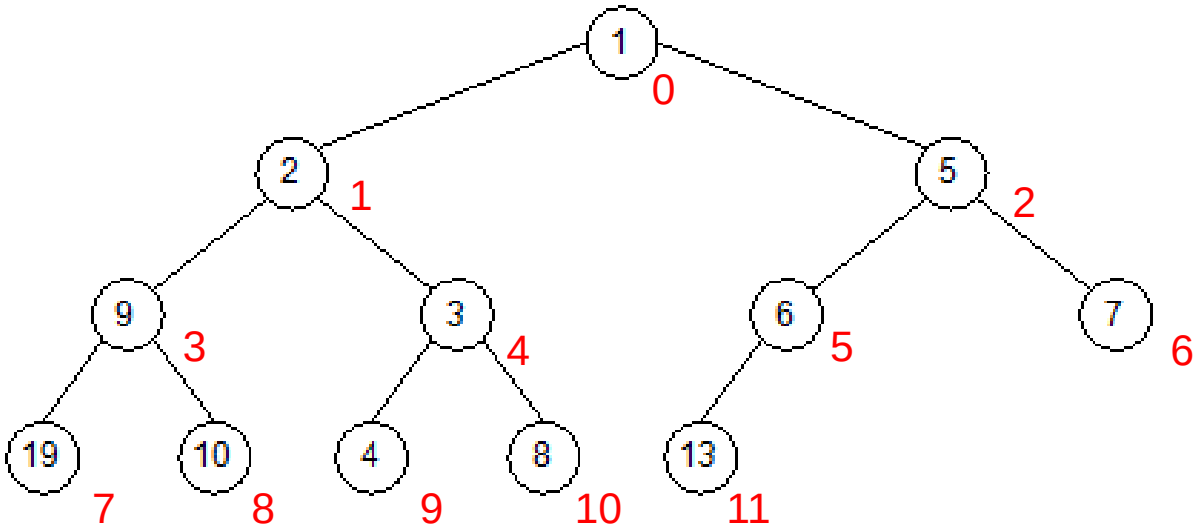
Linker Nachfolger von i: 2i

Rechter Nachfolger von i: 2i + 1

Index	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***
Element:		1	2	5	9	3	6	7	19	10	4	8	13	

Heap-Implementation in Array

- Version mit Start-Index 0:



Index	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
Element:	1	2	5	9	3	6	7	19	10	4	8	13		

Heap-Implementation in Array

- $F_1(x)$: Berechnung Vorgänger / Nachfolger ab Index 1
- $F_0(x)$: Berechnung Vorgänger / Nachfolger ab Index 0
- $F_0 = F_1(x+1) -1$

	Wurzel bei Index 1 ($f_1(x)$)	**Wurzel bei Index 0 ($f_0(x)$)**
Vaterknoten von i:	i / 2 (int div)	(i +1) / 2 -1 = **(i -1) / 2**
Linker Nachfolger von i:	2i	2 (i + 1) -1 = **2i + 1**
Rechter Nachfolger von i:	2i + 1	2 (i + 1) + 1 – 1 = **2i + 2**

Selbststudium

1. Schaut, ob ihr bis hierher alles verstanden habt (Heap-Aufbau, Operationen, Array-Implementierung). Bei Unklarheiten: Fragen
2. Löst die folgenden Aufgaben:
    1. **Script Seite 1: Kapitel 5.3 lesen und Anwendungsbeispiel (Ansatz 1** (Komplexitätsanalyse) und **Ansatz 2** (Implementation auf Papier))
    2. Implementieren eines Min-Heaps. Im Script auf den Seiten 5 und 6 gibt es Beschreibungen zu den Methoden: `min(), siftUp(index), siftDown(index), add(Element), removeMin().` Ihr könnt dies zuerst versuchen von Hand zu lösen oder die Anleitung verwenden, um gleich **Aufgabe 1 im Selbststudium** (Eclipse-Projekt HeapTest) zu implementieren. Hinweis: Implementiert zuerst siftUp und siftDown, weil diese Methoden die Grundlagen für das add und remove sind.