4.4. B-Bäume

Die bisher betrachteten Baumstrukturen sind gut geeignet für *Collections* im Hauptspeicher, aber schlecht, wenn Baumstrukturen auf externen Speichern (d.h. *Platten*) abgelegt werden müssen. Das ist bei grossen Datenmengen der Fall, wenn von mehreren Programmen gleichzeitig darauf zugegriffen wird oder wenn man mit persistenten Daten arbeitet, die nicht alle in den Hauptspeicher kopiert werden sollen.

Betrachten wir als Beispiel eine eher kleine Datenbank über die Schweizer Bevölkerung:

- Daten über ca. $8 \cdot 10^6$ Personen
- Schlüssel (Annahme): 64 Byte
- Daten pro Person (Annahme): 2048 Byte

Insgesamt zu speichernde Daten:

Speichert man die Schlüssel in einem AVL-Baum, ergibt sich eine durchschnittliche Höhe von:[1]

Ein im Hauptspeicher abgelegter AVL-Baum besteht pro Datensatz aus einem Knoten (Objekt). Plattenspeicher (*Disks*) sind hingegen in Blöcken fixer Grösse organisiert, die grundsätzlich nur als Einheit gelesen und geschrieben werden können.

Moderne SSD haben sehr hohe Lesegeschwindigkeiten, wie 45‘000 Blöcke pro Sekunde. Wie viele Suchanfragen pro Sekunde lassen sich dann mit einem Baum der eben berechneten Höhe beantworten?

Bei sich (mit 7‘200 U/min) drehenden Disks rechnet man damit, bis zu 120 Blöcke pro Sekunde lesen zu können.[2] Wie oft kann man damit im gerade betrachteten Baum suchen?

Zum Vergleich: Für die Zugriffszeit im Hauptspeicher rechnen wir mit 10ns, also 10^8 Zugriffen pro Sekunde. Wie oft kann dann im Baum gesucht werden?

Ziel

Wir benötigen eine Baumstruktur, auf der die üblichen Operationen (*Suchen*, *Einfügen*, *Löschen*) mit einer minimalen Anzahl Plattenzugriffe ausgeführt werden können. Wegen der langen Zugriffszeiten auf die Disk darf das ruhig ein paar CPU-Instruktionen brauchen.

Idee

Ein Baumknoten sollte gerade einem Diskblock entsprechen. Statt einem Binärbaum verwenden wir einen Mehrwegbaum.

[1] Die Höhe von AVL-Bäumen mit *N* Elementen ist $1.1 \cdot log_2(N)$. Die Höhe von unausgeglichenen binären Such-Bäumen ist bei gleichverteilt eingefügten Schlüsseln im Schnitt $2.3 \cdot log_2(N)$.

[2] siehe beispielsweise http://de.wikipedia.org/wiki/Input/Output_operations_Per_Second

Hat in einem solchen Baum jeder Knoten *s* Nachfolger, ist die Höhe *h* bei *N* gespeicherten Elementen:

$$h = \lceil log_s(N+1) \rceil.$$

Ein Datentyp für einen Knoten in einem B-Baum könnte so programmiert werden:

```
class Node<K> {
 int m;
 K[] keys = (K[])new Object[CAPACITY];
 int[] data = new int[CAPACITY];
 int[] successor = new int[CAPACITY + 1];
}
```

Veranschlagen wir jeweils 4 Byte pro Referenz auf einen (Nachfolge-)Knoten, sowie 4 Byte als Referenz auf die zu einem Schlüssel gehörenden Daten. Wie viele 64-Byte Schlüssel passen dann in einen Knoten mit 4096 Bytes (häufige Block-Grösse) und wie hoch wird der Baum dann für $8 \cdot 10^6$ Elemente?

Auch wenn man die Blöcke füllt, kann der Baum zu einer Liste solcher Blöcke entarten. Das führt im schlimmsten Fall für eine Anfrage zu vielen Plattenzugriffen:

Der Mehrwegbaum muss daher auch ausgeglichen sein. Diese Eigenschaften haben *B-Bäume*.

Definition: B-Baum [Bayer / McCreight 1970][3]

Achtung: Für B-Bäume wird der Begriff Ordnung *anders definiert, als für allgemeine Bäume![4]*

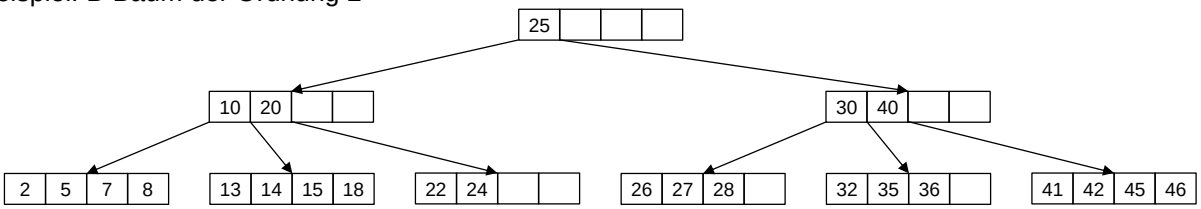
Ein B-Baum der Ordnung *n* ist ein Mehrwegsuchbaum vom Grad *2n + 1* mit folgenden Struktur-Eigenschaften:

1. Jeder Knoten enthält höchstens *2n* Elemente.
2. Jeder Knoten ausser der Wurzel enthält mindestens *n* Elemente (ist zur Hälfte gefüllt).
3. Jeder Knoten, der nicht Blattknoten ist, hat *m+1* Nachfolger, wobei *m* die Anzahl der Elemente ist.
4. Alle Blattknoten liegen auf derselben Stufe.
5. Ein Knoten enthält
   m Schlüssel + Daten (bzw. Verweise auf einen Datensatz)
   m+1 Referenzen auf Nachfolger.

[3] B-Bäume wurden ursprünglich für relationale Datenbanken entwickelt, um die dort benötigten Indizes effizient speichern zu können. Dafür werden sie bis heute benutzt. Darüber hinaus sind in vielen Datei-Systemen die Verzeichnisse mit B-Bäumen aufgebaut.

[4] Die allgemein übliche Definition von *Ordnung* in allgemeinen Bäumen entstand gleichzeitig wie die B-Bäume und die Begriffe wurden unabhängig voneinander definiert. Da in jeder der beiden Welten die jeweils verwendete Definition sehr sinnvoll ist, hat sich das bis heute so erhalten. Ein *B-Baum der Ordnung n* hat also gemäss des allgemeinen Ordnungsbegriffs für Bäume eine Ordnung von 2n+1. Das ist auch der Grad aller Knoten im B-Baum, wobei jedoch `null` als „Nachfolger“ zulässig ist.

Beispiel: B-Baum der Ordnung 2



Wie viele Elemente können noch eingefügt werden, ohne dass die Höhe wächst?

4.4.1. Suchen im B-Baum

```
E find(Node<K> node, K key) {
 // search inside the node p, either sequentially or binary
 int i = 0;
 while (i < node.m && key.compareTo(node.keys[i]) > 0) i++;
 if (i < node.m && key.equals(node.keys[i])) return dataBlock(node.data[i]);
 if (node.isLeaf()) return null;
 Node<K> child = diskRead(node.successor[i]);
 return find(child, key);
}
```

Es ist schwierig, B-Bäume in Java für praktische Anwendungen zu implementieren:

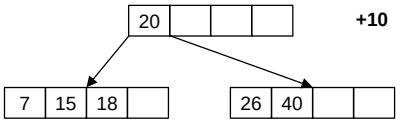
- Man weiss nicht wie gross die Disk-Blöcke sind (Absicht: Java soll plattformunabhängig sein)
- Keine Kontrolle über Caching
- Daten müssen serialisiert werden

Deswegen betrachten wir die weiteren Operationen auf B-Bäumen ausschliesslich auf der Konzept-Ebene.

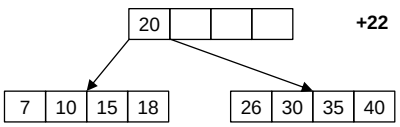
4.4.2. Einfügen im B-Baum

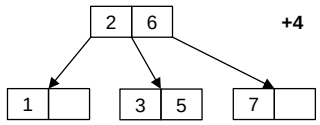
Neue Elemente werden immer in Blätter eingefügt. Dabei können folgende Situationen entstehen:

a) Neues Element wird in Seite mit $m < 2n$ Elementen eingefügt



b) Seite ist voll, man muss sie splitten





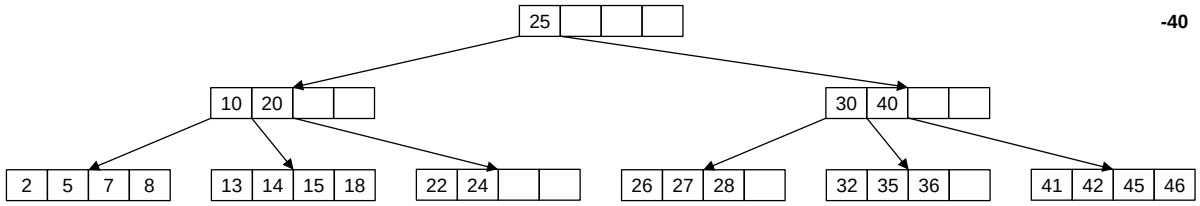
4.4.3. Löschen im B-Baum

Beim Löschen eines Elementes aus einem B-Baum können folgende Situationen entstehen:

a) Element befindet sich in einem Blatt

b) Element befindet sich in einem inneren Knoten

In diesem Fall wird es durch das nächstgrössere Element ersetzt. Dieses befindet sich *immer* auf einem Blatt.



Es müssen folgende Fälle beim Löschen aus einem Blattknoten unterschieden werden:

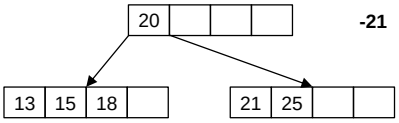
a) Blattseite hat $m > n$ Elemente

b) Blattseite hat n Elemente. Das Entfernen eines Elementes würde die Bedingung $m \geq n$ verletzen (ausser beim Wurzelknoten).

$\Rightarrow$ Ausgleichen.

Ausgleichen:

1. Ausleihen von Elementen aus dem benachbarten Knoten (links oder rechts), falls dieser mehr als n Elemente enthält.



Variante:

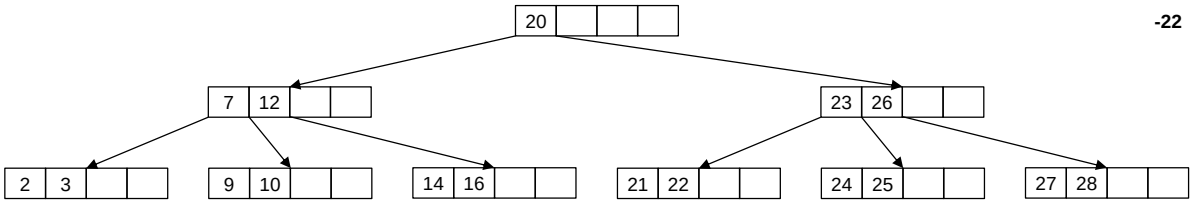
Da die Nachbarseite sowieso in den Hauptspeicher geladen werden muss, kann man die Situation ausnützen und die Elemente gleichmässig aufteilen:

$m + 1 + n - 1 = m + n$ $\Rightarrow$ neu links: $(m + n) / 2$

neu rechts: $(m + n - 1) / 2$

2. Falls Nachbarseite nur *n* Elemente hat: Beide Seiten zusammenlegen. Mit dem dazwischenliegenden Element im Vaterknoten erhält man $n + 1 + n - 1 = 2n$ Elemente, was einer vollen Seite entspricht.

   Falls der Vaterknoten damit weniger als *n* Elemente enthält, muss rekursiv ausgeglichen werden. Dies kann sich bis zur Wurzel fortsetzen. Hat die Wurzel kein Element mehr, dann wird sie gelöscht. Die Höhe verringert sich dabei.



-22

Variante:

Zusammenlegen von drei benachbarten Seiten und Bildung von zwei neuen Seiten daraus. Die entstehenden Seiten sind dann nicht ganz gefüllt.