5. Arbeitsblatt Priority Queues – Teil 2 – Lösungen

Aufgabe 7 (Heap bauen in linearer Zeit)

Sei F(h) die maximale Anzahl Vertauschungen in einem Binärbaum der Höhe h. Dann gilt

$$\mathrm{F}(h) = \begin{cases} 0 & falls\ \ h = 1 \\ (h-1) + 2 \cdot F(h-1) & falls\ \ h > 1 \end{cases}$$

a) Erklären Sie die obige Rekursionsgleichung in Worten.

Für einen Teilbaum der Höhe 1 (also ein Blatt) wird kein siftDown aufgerufen und deshalb auch keine Vertauschung gemacht. Für jeden Teilbaum der Höhe h wird ein siftDown in dessen Wurzel gemacht (h-1 Vertauschungen). Ausserdem hat jeder Teilbaum zwei Kinder, die wieder Teilbäume sind. In beiden Kindern werden die Anzahl Vertauschungen rekursiv gezählt (2 mal T(h-1) Vertauschungen).

b) Zeigen Sie mittels Teleskopieren, dass sich die Rekursionsgleichung zu $\mathbf{F(h) = 2^h - h - 1}$ auflöst. Benützen Sie die folgenden beiden geometrischen Reihen, um Summen aufzulösen:

$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1} \qquad\qquad \sum_{i=0}^{k} ic^i = \frac{kc^{k+2} - (k+1)c^{k+1} + c}{(c-1)^2}$$

Wir beginnen mit dem Teleskopieren der Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} \mathrm{F(h)} &= \mathrm{(h-1) + 2 \cdot F(h-1)} \\ &= \mathrm{(h-1) + 2 \cdot (h-2) + 4 \cdot F(h-2)} \\ &= \mathrm{(h-1) + 2 \cdot (h-2) + 4 \cdot (h-3) + 8 \cdot F(h-3)} \end{aligned}$$

Darin erkennen wir die folgende Regel, um die Reihe fortzusetzen:

$$\mathrm{F(h)} = \mathrm{(h-1) + 2 \cdot (h-2) + 4 \cdot (h-3) + \cdots + 2^{i-1} \cdot (h-i) + 2^i \cdot F(h-i)}$$

Die Reihe endet, sobald $\mathrm{h - i = 1}$ ist. Dann nämlich ist mit $\mathrm{F(1)}$ der Base Case der Rekursion erreicht:

$$\mathrm{F(h)} = \mathrm{(h-1) + 2 \cdot (h-2) + 4 \cdot (h-3) + \cdots + 2^{h-2} \cdot 1 + 2^{h-1} \cdot 0}$$

Diese Summe lässt sich umschreiben in:

$$\begin{aligned} \mathrm{F(h)} &= \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{h-1}} \mathrm{(h-1-i)2^i} \\ &= \mathrm{(h-1)} \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{h-1}} \mathrm{2^i} \quad - \quad \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{h-1}} \mathrm{i2^i} \end{aligned}$$

Schliesslich können wir diese Summen auflösen mit den geometrischen Reihen $\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1}-1}{c-1}$ und $\sum_{i=0}^{k} ic^i = \frac{kc^{k+2}-(k+1)c^{k+1}+c}{(c-1)^2}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{F(h)} &= \mathrm{(h-1)} \frac{\mathrm{2^h - 1}}{\mathrm{2-1}} \qquad - \quad \frac{\mathrm{(h-1)2^{(h+1)} - \ h2^h + 2}}{\mathrm{(2-1)^2}} \\ &= \mathrm{(h-1)2^h - (h-1)} \quad - \quad \mathrm{(h-1)2^{h+1} + (h-1)2^h + 2^h - 2} \\ &= \mathrm{-(h-1) \ + 2^h - 2} \\ &= \mathrm{2^h - h + 1} \end{aligned}$$

Damit haben wir die Rekursionsformel fertig aufgelöst.

Aufgabe 8 (Heapsort von Hand)

Führen Sie Heapsort (in-place) von Hand auf folgendem Array durch. Zeichnen Sie den Array nach jedem siftDown.

32	28	17	21	9	11	15	19	12
28	21	17	19	9	11	15	12	32
21	19	17	12	9	11	15	28	32
19	15	17	12	9	11	21	28	32
17	15	11	12	9	19	21	28	32
15	12	11	9	17	19	21	28	32
12	9	11	15	17	19	21	28	32
11	9	12	15	17	19	21	28	32
9	11	12	15	17	19	21	28	32