

5. Arbeitsblatt Priority Queues - Teil 2 - Lösungen

Aufgabe 7 (Heap bauen in linearer Zeit)

Sei F(h) die maximale Anzahl Vertauschungen in einem Binärbaum der Höhe h. Dann gilt

$$F(h) = \begin{cases} 0 & falls \ h = 1\\ (h-1) + 2 \cdot F(h-1) & falls \ h > 1 \end{cases}$$

a) Erklären Sie die obige Rekursionsgleichung in Worten.

Für einen Teilbaum der Höhe 1 (also ein Blatt) wird kein siftDown aufgerufen und deshalb auch keine Vertauschung gemacht. Für jeden Teilbaum der Höhe h wird ein siftDown in dessen Wurzel gemacht (h-1 Vertauschungen). Ausserdem hat jeder Teilbaum zwei Kinder, die wieder Teilbäume sind. In beiden Kindern werden die Anzahl Vertauschungen rekursiv gezählt (2 mal T(h-1) Vertauschungen).

b) Zeigen Sie mittels Teleskopieren, dass sich die Rekursionsgleichung zu $F(h) = 2^h - h - 1$ auflöst. Benützen Sie die folgenden beiden geometrischen Reihen, um Summen aufzulösen:

$$\sum_{i=0}^{k} c^{i} = \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1}$$

$$\sum_{i=0}^{k} ic^{i} = \frac{kc^{k+2} - (k+1)c^{k+1} + c}{(c-1)^{2}}$$

Wir beginnen mit dem Teleskopieren der Rekursionsformel:

$$F(h) = (h-1) + 2 \cdot F(h-1)$$

= (h-1) + 2 \cdot (h-2) + 4 \cdot F(h-2)
= (h-1) + 2 \cdot (h-2) + 4 \cdot (h-3) + 8 \cdot F(h-3)

Darin erkennen wir die folgende Regel, um die Reihe fortzusetzen:

$$F(h) = (h-1) + 2 \cdot (h-2) + 4 \cdot (h-3) + \dots + 2^{i-1} \cdot (h-i) + 2^i \cdot F(h-i)$$

Die Reihe endet, sobald h - i = 1 ist. Dann nämlich ist mit F(1) der Base Case der Rekursion erreicht:

$$F(h) = (h-1) + 2 \cdot (h-2) + 4 \cdot (h-3) + \dots + 2^{h-2} \cdot 1 + 2^{h-1} \cdot 0$$

Diese Summe lässt sich umschreiben in:

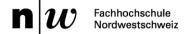
$$F(h) = \sum_{i=0}^{h-1} (h-1-i)2^{i}$$
$$= (h-1)\sum_{i=0}^{h-1} 2^{i} - \sum_{i=0}^{h-1} i2^{i}$$

Schliesslich können wir diese Summen auflösen mit den geometrischen Reihen $\sum_{i=0}^k c^i = \frac{c^{k+1}-1}{c-1}$ und $\sum_{i=0}^k ic^i = \frac{kc^{k+2}-(k+1)c^{k+1}+c}{(c-1)^2}$:

$$\begin{split} \sum_{i=0}^k ic^i &= \frac{kc^{k+2} - (k+1)c^{k+1} + c}{(c-1)^2} : \\ F(h) &= (h-1)\frac{2^h - 1}{2-1} &- \frac{(h-1)2^{(h+1)} - h2^h + 2}{(2-1)^2} \\ &= (h-1)2^h - (h-1) &- (h-1)2^{h+1} + (h-1)2^h + 2^h - 2 \\ &= -(h-1) + 2^h - 2 \\ &= 2^h - h + 1 \end{split}$$

Damit haben wir die Rekursionsformel fertig aufgelöst.

© Dr. Barbara Geissmann 1



Aufgabe 8 (Heapsort von Hand)

Führen Sie Heapsort (in-place) von Hand auf folgendem Array durch. Zeichnen Sie den Array nach jedem siftDown.

32	28	17	21	9	11	15	19	12
28	21	17	19	9	11	15	12	32
21	19	17	12	9	11	15	28	32
19	15	17	12	9	11	21	28	32
17	15	11	12	9	19	21	28	32
15	12	11	9	17	19	21	28	32
12	9	11	15	17	19	21	28	32
11	9	12	15	17	19	21	28	32
9	11	12	15	17	19	21	28	32

© Dr. Barbara Geissmann 2