TEMA 5. Derivación de funciones reales de una variable real

Análisis Matemático

Profesor: José Ángel Cid

Grao en Enxeñaría Informática
Departamento de Matemáticas
Universidad de Vigo.

cambio en el valor de la cantidad

tasa de variación de cantidad | límite | valor nuevo | menos | valor antiguo

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

con respecto a | tiempo | intervalo de tiempo | tiende a cero | dividido entre | intervalo de tiempo

(se hace muy pequeño)

¿Qué dice?
Para encontrar la tasa de variación instantánea de una cantidad que varía con, por ejemplo, el tiempo, calcula cómo su valor cambia durante un intervalo de tiempo corto y divide por el tiempo en cuestión. Luego permite al intervalo hacerse arbitrariamente pequeño.

¿Por qué es importante?
Proporciona unas bases rigurosas para el cálculo, el principal modo con el que los científicos representan el mundo natural.

¿Qué provocó?
Cálculo de tangentes y áreas. Fórmulas para volúmenes de sólidos y longitudes de curvas. Leyes de Newton del movimiento, ecuaciones diferenciales. Las leyes de conservación de la energía y el momento. La mayoría de la física matemática.

Figura: Extracto del libro "17 ecuaciones que cambiaron el mundo", I. Stewart, Crítica, 2013.

Definición

Sea $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a,b)$. *Se dice que la función* f *es derivable en el punto* x_0 *si el siguiente límite existe y es finito*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1.1}$$

Al valor de este límite se le llama derivada de la función f *en el punto* x_0 *y se denota por* $f'(x_0)$.

La expresión

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se llama cociente incremental o tasa de variación media de la función f en el intervalo de extremos x y x_0, y mide la variación de la función $f(x)$ con respecto a la variación de la variable x.

La expresión

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se llama cociente incremental o tasa de variación media de la función f en el intervalo de extremos x y x_0, y mide la variación de la función $f(x)$ con respecto a la variación de la variable x.
Si hacemos $x - x_0 = h$ en (1.1) podemos expresar la derivada en la forma

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definición

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y supongamos que f está definida en un intervalo de la forma $[x_0, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$. Si el siguiente límite existe y es finito

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

diremos que la función f es derivable por la derecha en x_0. Al valor de este límite lo llamaremos derivada por la derecha de la función f en el punto x_0 y lo denotaremos por $f'(x_0^+)$.

Definición

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y supongamos que f está definida en un intervalo de la forma $[x_0, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$. Si el siguiente límite existe y es finito

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

diremos que la función f es derivable por la derecha en x_0. Al valor de este límite lo llamaremos derivada por la derecha de la función f en el punto x_0 y lo denotaremos por $f'(x_0^+)$.

Definición

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y supongamos que f está definida en un intervalo de la forma $[x_0, x_0+\delta)$ con $\delta>0$. Si el siguiente límite existe y es finito

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

diremos que la función f es derivable por la derecha en x_0. Al valor de este límite lo llamaremos derivada por la derecha de la función f en el punto x_0 y lo denotaremos por $f'(x_0^+)$.
Análogamente, si f está definida en un intervalo de la forma $(x_0-\delta, x_0]$ con $\delta>0$, podemos considerar el límite

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Si este límite existe y es finito diremos que f es derivable por la izquierda en x_0. Al valor de ese límite lo llamaremos derivada por la izquierda de la función f en el punto x_0 y lo denotaremos por $f'(x_0^-)$.

Proposición

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a, b)$. *Entonces,* f *es derivable en* x_0 *si y sólo si* f *es derivable por la izquierda y por la derecha en* x_0 *y además*

$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0).$$

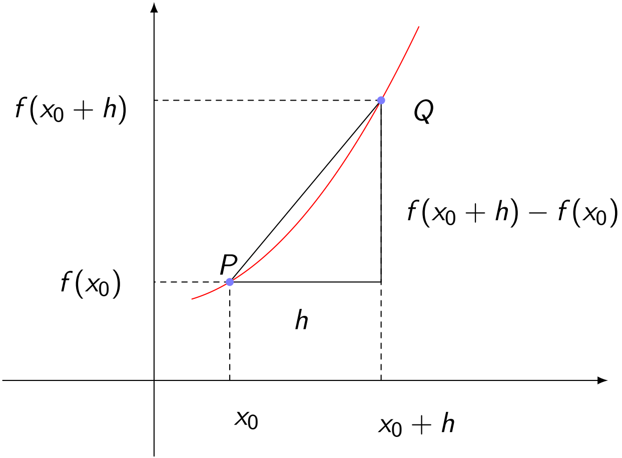
Interpretación geométrica de la derivada

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es derivable en un punto $x_0 \in (a, b)$. El cociente incremental

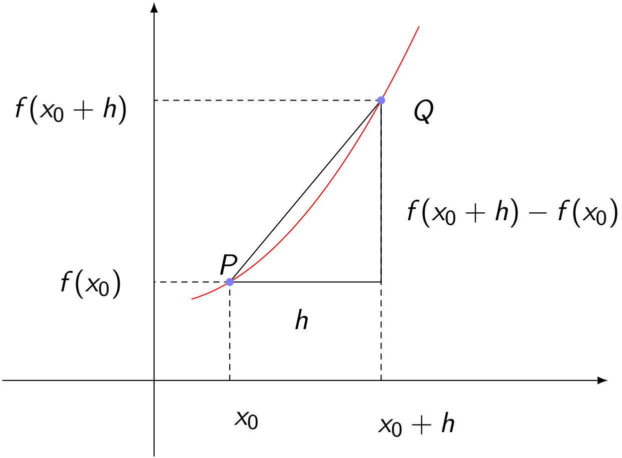
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P \equiv (x_0, f(x_0))$ y $Q \equiv (x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Interpretación geométrica de la derivada



Interpretación geométrica de la derivada



Cuando $h \to 0$, la recta que pasa por los puntos P y Q se aproxima a la recta tangente. Por tanto, la derivada $f'(x_0)$ se corresponde con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $P \equiv (x_0, f(x_0))$.

Interpretación física de la derivada

Supongamos una partícula que se mueve en línea recta y que recorre una distancia $s = s(t)$ al cabo de un cierto tiempo t. La velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$ viene dada por el cociente incremental

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}.$$

Si en la expresión anterior tomamos el límite cuando h tiende a cero obtenemos la velocidad instantánea en t_0 dada por

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = s'(t_0),$$

es decir, la velocidad en el instante $t = t_0$ es la derivada de la función $s(t)$ en el punto t_0.

Ecuación de la recta tangente

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en $x_0 \in (a, b)$. La recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene de pendiente $f'(x_0)$ por lo que su ecuación viene dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ecuación de la recta normal

La recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y es perpendicular a la recta tangente se denomina recta normal a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. Pueden presentarse dos situaciones:

1. Si $f'(x_0) \neq 0$, la pendiente de la recta normal es $-1/f'(x_0)$ y su ecuación viene dada por

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Ecuación de la recta normal

La recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y es perpendicular a la recta tangente se denomina recta normal a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. Pueden presentarse dos situaciones:

1. Si $f'(x_0) \neq 0$, la pendiente de la recta normal es $-1/f'(x_0)$ y su ecuación viene dada por

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

2. Si $f'(x_0) = 0$, la recta tangente es la recta horizontal de ecuación $y = f(x_0)$. En este caso la recta normal será la recta vertical de ecuación $x = x_0$.

Teorema (Derivable $\Rightarrow$ Continua)

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Si f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0.

Teorema (Derivable $\Rightarrow$ Continua)

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Si f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0.

Ejercicio

Poner un ejemplo de una función continua en un punto que no sea derivable en ese punto.

PROPOSICIÓN (**Derivación de funciones elementales**)

PROPOSICIÓN (**Derivación de funciones elementales)**

1. $\dfrac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Proposición (Derivación de funciones elementales)

1. $\dfrac{d}{dx}\, x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $\dfrac{d}{dx}\, a^{x} = a^{x} \ln a, \quad a > 0;$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\, e^{x} = e^{x}.$

Proposición (Derivación de funciones elementales)

1. $\dfrac{d}{dx}\, x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $\dfrac{d}{dx}\, a^{x} = a^{x}\, \ln a, \quad a > 0;$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\, e^{x} = e^{x}.$
3. $\dfrac{d}{dx}\, \log_a x = \dfrac{1}{x \cdot \ln a},\ a > 0, a \neq 1;$ $\ \dfrac{d}{dx}\, \ln x = \dfrac{1}{x}.$

PROPOSICIÓN (**Derivación de funciones elementales)**

1. $\dfrac{d}{dx}x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a, \quad a > 0;$ $\qquad \dfrac{d}{dx}e^x = e^x.$
3. $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x \cdot \ln a},\ a > 0, a \neq 1;$ $\quad \dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}.$
4. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x.$

Proposición (Derivación de funciones elementales)

1. $\dfrac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $\dfrac{d}{dx} a^x = a^x \ln a, \quad a > 0;$ $\qquad \dfrac{d}{dx} e^x = e^x.$
3. $\dfrac{d}{dx} \log_a x = \dfrac{1}{x \cdot \ln a},\ a > 0, a \neq 1;$ $\quad \dfrac{d}{dx} \ln x = \dfrac{1}{x}.$
4. $\dfrac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x.$
5. $\dfrac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx} \mathrm{cotg} x = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \mathrm{cotg}^2 x).$

Proposición (**Derivación de funciones elementales**)

1. $\dfrac{d}{dx}\, x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $\dfrac{d}{dx}\, a^{x} = a^{x}\, \ln a, \quad a > 0;$ $\quad \dfrac{d}{dx}\, e^{x} = e^{x}.$
3. $\dfrac{d}{dx}\, \log_a x = \dfrac{1}{x \cdot \ln a},\ a > 0, a \neq 1;$ $\quad \dfrac{d}{dx}\, \ln x = \dfrac{1}{x}.$
4. $\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{sen} x = \cos x,$ $\quad \dfrac{d}{dx}\, \cos x = -\operatorname{sen} x.$
5. $\dfrac{d}{dx}\, \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$ $\quad \dfrac{d}{dx}\, \mathrm{cotg} x = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \mathrm{cotg}^2 x).$
6. $\dfrac{d}{dx}\, \mathrm{arsen}\, x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$ $\quad \dfrac{d}{dx}\, \mathrm{arcos} x = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

Proposición (Derivación de funciones elementales)

1. $\dfrac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $\dfrac{d}{dx} a^x = a^x \ln a, \quad a > 0;$ $\qquad \dfrac{d}{dx} e^x = e^x.$
3. $\dfrac{d}{dx} \log_a x = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}, \; a > 0, a \neq 1;$ $\quad \dfrac{d}{dx} \ln x = \dfrac{1}{x}.$
4. $\dfrac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x.$
5. $\dfrac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$ $\qquad \dfrac{d}{dx} \operatorname{cotg} x = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$
6. $\dfrac{d}{dx} \operatorname{arsen} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$ $\qquad \dfrac{d}{dx} \operatorname{arcos} x = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$
7. $\dfrac{d}{dx} \operatorname{artg} x = \dfrac{1}{1 + x^2}.$

Proposición (**Reglas de derivación**)

Sean f, g dos funciones derivables en x_0. Entonces

PROPOSICIÓN (**Reglas de derivación**)

Sean f, g dos funciones derivables en x_0. Entonces

1. *$f+g$ es derivable en x_0 y*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

PROPOSICIÓN (**Reglas de derivación**)

Sean f, g dos funciones derivables en x_0. Entonces

1. *$f+g$ es derivable en x_0 y*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. *$f\,g$ es derivable en x_0 y se cumple que*

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$

Proposición (Reglas de derivación)

Sean f, g dos funciones derivables en x_0. Entonces

1. *$f+g$ es derivable en x_0 y*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. *$f\,g$ es derivable en x_0 y se cumple que*

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$

3. *Si $g(x_0) \neq 0$, entonces f/g es derivable en x_0 y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Proposición (**Reglas de derivación**)

Sean f, g dos funciones derivables en x_0. Entonces

1. *$f+g$ es derivable en x_0 y*
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
2. *$f\,g$ es derivable en x_0 y se cumple que*
$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$
3. *Si $g(x_0) \neq 0$, entonces f/g es derivable en x_0 y*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$
4. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la función λf es derivable en x_0 y se cumple que*
$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

Teorema (Regla de la cadena)

Sean f, g dos funciones tales que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ y consideremos la función compuesta $g \circ f$.
Si f es derivable en $x_0 \in \mathrm{Dom(f)}$ y g es derivable en $f(x_0) \in \mathrm{Dom}(g)$, entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y además

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)]\, f'(x_0).$$

Ejercicio

Aplicar la regla de la cadena a la composición $f^{-1} \circ f$ para obtener la fórmula para la derivada de la función inversa.

El siguiente resultado es de gran utilidad para resolver indeterminaciones cuando se calculan límites.

Teorema (Regla de L'Hôpital)

Sean f, g dos funciones derivables en $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$, para algún $r > 0$, tales que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Si $g'(x) \neq 0 \, \forall x \in (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ y existe $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además ambos límites coinciden

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observación

La regla de L'Hôpital es aplicable también cuando

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty,$$

lo que permite utilizarla para resolver indeterminaciones del tipo "∞/∞", y es también aplicable cuando $x \to \infty$ para resolver indeterminaciones del tipo "$0/0$" e "∞/∞".

Definición

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in D$*. Diremos que* f *tiene un* máximo relativo *en* x_0 *si existe un* $r > 0$*, tal que*

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r). \tag{3.2}$$

Análogamente, diremos que f *tiene un* mínimo relativo *en* x_0 *si existe un* $r > 0$*, tal que*

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in D \cap (x_0 - r, x_0 + r). \tag{3.3}$$

En cualquiera de los dos casos anteriores se dice que f *tiene un* extremo relativo *en* x_0*. El extremo es* estricto *si las* desigualdades *anteriores son* estrictas*. El extremo es* absoluto *si* las desigualdades se cumplen para todo $x \in D$*.*

Los puntos donde una función tiene un máximo o un mínimo relativo se llaman extremos locales o extremos relativos.

TEOREMA (Condición necesaria de extremo relativo)

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Si f tiene un máximo o un mínimo relativo en x_0 y f es derivable en x_0 entonces

$$f'(x_0) = 0.$$

Observación

(i) La condición $f'(x_0) = 0$ *no es suficiente para garantizar que una función tenga un máximo o mínimo relativo en* $x = x_0$.

(ii) La condición $f'(x_0) = 0$ *solo es necesaria para extremos relativos que se alcanzen un un punto* x_0 *interior al intervalo* (a, b) *y donde* f *sea derivable. En un intervalo cerrado* $[a, b]$ *los puntos* $x = a$ *y* $x = b$ *también son candidatos a extremos relativos.*

Teorema (Teorema de Rolle)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y supongamos que f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

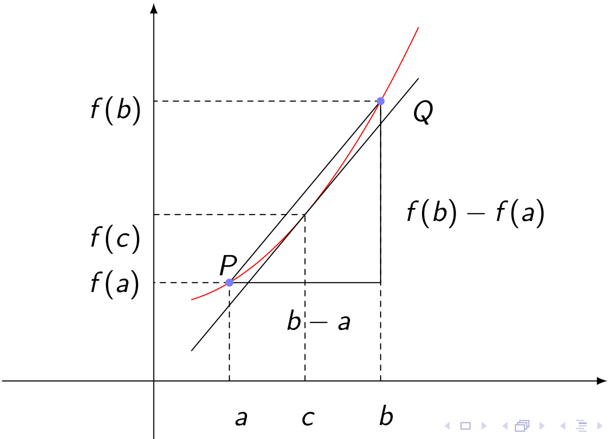
Corolario (Unicidad de solución)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *y supongamos que* f *es continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b). *Si* $f'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in (a,b)$ *entonces la ecuación* $f(x) = 0$ *tiene a lo sumo una solución en el intervalo* $[a,b]$.

Teorema (Teorema del Valor Medio)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y supongamos f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Como consecuencia del teorema del valor medio se obtienen los siguientes resultados.

COROLARIO

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto.

Como consecuencia del teorema del valor medio se obtienen los siguientes resultados.

COROLARIO

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto.

1. *Si $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$ entonces f es una función constante en I.*

Como consecuencia del teorema del valor medio se obtienen los siguientes resultados.

Corolario

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto.

1. *Si $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función constante en I.*
2. *Si $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función creciente en I.*

Como consecuencia del teorema del valor medio se obtienen los siguientes resultados.

Corolario

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto.

1. *Si $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$ entonces f es una función constante en I.*
2. *Si $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$ entonces f es una función creciente en I.*
3. *Si $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$ entonces f es una función estrictamente creciente en I.*

Como consecuencia del teorema del valor medio se obtienen los siguientes resultados.

Corolario

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto.

1. *Si $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función constante en I.*
2. *Si $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función creciente en I.*
3. *Si $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función estrictamente creciente en I.*
4. *Si $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función decreciente en I.*

Como consecuencia del teorema del valor medio se obtienen los siguientes resultados.

Corolario

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto.

1. *Si $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función constante en I.*
2. *Si $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función creciente en I.*
3. *Si $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función estrictamente creciente en I.*
4. *Si $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función decreciente en I.*
5. *Si $f'(x) < 0$ $\forall x \in I$ entonces f es una función estrictamente decreciente en I.*

Como consecuencia del teorema del valor medio se obtienen los siguientes resultados.

Corolario

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto.

1. *Si $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$ entonces f es una función constante en I.*
2. *Si $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$ entonces f es una función creciente en I.*
3. *Si $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$ entonces f es una función estrictamente creciente en I.*
4. *Si $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$ entonces f es una función decreciente en I.*
5. *Si $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$ entonces f es una función estrictamente decreciente en I.*
6. *Sea $g : I \to \mathbb{R}$. Si $f'(x) = g'(x) \ \forall x \in I$ entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) - g(x) = c \quad \forall x \in I.$$

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Decimos que f es convexa en I si la gráfica de f es mayor o igual que cualquier recta tangente a dicha gráfica en los puntos de I.

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Decimos que f es convexa en I si la gráfica de f es mayor o igual que cualquier recta tangente a dicha gráfica en los puntos de I.

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Decimos que f es convexa en I si la gráfica de f es mayor o igual que cualquier recta tangente a dicha gráfica en los puntos de I.
Si la gráfica de f es menor o igual que cualquier recta tangente a dicha gráfica en los puntos de I decimos que f es cóncava en I.

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Decimos que f es convexa en I si la gráfica de f es mayor o igual que cualquier recta tangente a dicha gráfica en los puntos de I.
Si la gráfica de f es menor o igual que cualquier recta tangente a dicha gráfica en los puntos de I decimos que f es cóncava en I.
Si f es convexa a un lado de x_0 y cóncava al otro diremos que f tiene en x_0 un punto de inflexión.

Ejemplo

La función $f(x) = x^2$ es convexa en $\mathbb{R}$ mientras que $g(x) = -x^2$ es cóncava en $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado nos permite analizar los intervalos de convexidad y concavidad de una función.

Ejemplo

La función $f(x) = x^2$ *es convexa en* $\mathbb{R}$ *mientras que* $g(x) = -x^2$ *es cóncava en* $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado nos permite analizar los intervalos de convexidad y concavidad de una función.

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ *una función dos veces derivable en el intervalo abierto* I.

Ejemplo

La función $f(x) = x^2$ *es convexa en* $\mathbb{R}$ *mientras que* $g(x) = -x^2$ *es cóncava en* $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado nos permite analizar los intervalos de convexidad y concavidad de una función.

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ *una función dos veces derivable en el intervalo abierto* I.

1. *Si* $f''(x) \geq 0$ *para todo* $x \in I$ *entonces* f *es convexa en* I.

Ejemplo

La función $f(x) = x^2$ *es convexa en* $\mathbb{R}$ *mientras que* $g(x) = -x^2$ *es cóncava en* $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado nos permite analizar los intervalos de convexidad y concavidad de una función.

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ *una función dos veces derivable en el intervalo abierto* I.

1. *Si* $f''(x) \geq 0$ *para todo* $x \in I$ *entonces* f *es convexa en* I.
2. *Si* $f''(x) \leq 0$ *para todo* $x \in I$ *entonces* f *es cóncava en* I.

Ejemplo

La función $f(x) = x^2$ es convexa en $\mathbb{R}$ mientras que $g(x) = -x^2$ es cóncava en $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado nos permite analizar los intervalos de convexidad y concavidad de una función.

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en el intervalo abierto I.

1. *Si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ entonces f es convexa en I.*
2. *Si $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$ entonces f es cóncava en I.*
3. *Si f tiene en x_0 un punto de inflexión entonces $f''(x_0) = 0$.*