Ejercicios de la sección 3.3 Matrices por bloques

(Para hacer en clase: 1, 2, 3, 5, 7, 10, 13.)
(Con solución o indicaciones: 4, 6, 8, 9, 11, 14.)

En los ejercicios siguientes en los que aparezcan productos de matrices por bloques, se debe suponer que las matrices están partidas en bloques conformes para la multiplicación por bloques.

Calcula los productos indicados en los ejercicios 1 a 4. Intenta "predecir" el resultado teniendo en cuenta que en cada caso la matriz de la izquierda es una "matriz elemental por bloques".

▶**1.** $\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ E & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

▶**2.** $\begin{bmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$.

▶**3.** $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ I & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

▶**4.** $\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ -E & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$.

En los ejercicios 5 a 8 halla fórmulas para X, Y y Z en términos de A, B y C.

▶**5.** $\begin{bmatrix} A & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ Z & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

▶**6.** $\begin{bmatrix} X & \mathbf{0} \\ Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}$.

▶**7.** $\begin{bmatrix} X & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Y & \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & Z \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}$.

▶**8.** $\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix}$.

▶**9.** Sabiendo que

$$\text{la inversa de} \quad \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & I & \mathbf{0} \\ B & D & I \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P & I & \mathbf{0} \\ Q & R & I \end{bmatrix},$$

halla P, Q y R.

En los ejercicios 10 y 11 indica para cada enunciado si es verdadero o falso.

▶**10.**

(a) Si $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$ son matrices por bloques con A_1 y A_2 de los mismos tamaños respectivos que B_1 y B_2, entonces $A + B = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \end{bmatrix}$.

(b) Si $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ entonces las particiones de A y B son conformes para la multiplicación por bloques.

▶**11.**

(a) Sean A_1, A_2, B_1, y B_2 matrices $n \times n$ y $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$. Entonces el producto BA está definido pero el producto AB no lo está.

(b) La traspuesta de la matriz $A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$ es la matriz $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} P^{\mathrm{T}} & Q^{\mathrm{T}} \\ R^{\mathrm{T}} & S^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$.

12. Sea $A = \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}$ donde B y C son matrices cuadradas. Demuestra que A es inversible si y sólo si tanto B como C son inversibles.

▶**13.**

(a) Comprueba que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $A^2 = I$.

(b) Usa el producto de matrices por bloques para demostrar que $M^2 = I$ siendo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

▶**14.** Sin realizar ninguna operación elemental de filas calcula la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 3.3

4. $\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ -E & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & X \\ Y - EW & Z - EX \end{bmatrix}$.
Nótese la analogía con una operación elemental de reemplazo.

6. Hay que resolver las ecuaciones $XA = I$, $ZC = I$ e $YA + ZB = I$. De las dos primeras $X = A^{-1}$ y $Z = C^{-1}$. Con esto y la tercera ecuación se obtiene: $Y = -C^{-1}BA$. (Obsérvese que este ejercicio nos da la inversa de una matriz triangular por bloques de 2×2 bloques cuadrados, en función de los bloques y sus inversos.)

8. $X = A^{-1}$, $Y = \mathbf{0}$, $Z = A^{-1}(I - B)$.

9. $P = -A$, $Q = DA - B$, $R = -D$.

11. (a) Ambos lo están, (b) Las Q^{T} y R^{T} en A^{T} habría que intercambiarlas.

14. Es una matriz diagonal por bloques y por tanto su inversa también es diagonal por bloques con bloques diagonales los inversos de los bloques originales. Obsérvese que los tres bloques tienen $\det = 2$ y de ahí el factor $\frac{1}{2}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Versión de 19 de enero de 2023, 12:19 h.