Ejercicios de la sección 5.3 Sistemas de coordenadas

(Para hacer en clase: 1, 8, 10, 11, 14, 16.)
(Con solución o indicaciones: 2, 7, 9, 12, 13, 15.)

En los ejercicios 1 a 4, halla el vector $\mathbf{x}$ cuyo vector de coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$ dada es el vector $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ dado.

►**1.** $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

►**2.** $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$

3. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 5 a 8, halla el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto a la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$.

5. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

►**7.** $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

►**8.** $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 9 y 10, usa una matriz inversa para encontrar $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ para las $\mathbf{x}$ y $\mathcal{B}$ dadas.

►**9.** $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

►**10.** $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 11 y 12, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas. A menos que se diga lo contrario $\mathcal{B}$ es una base de un subespacio vectorial V de $\mathbf{R}^m$.

►**11.**

(a) Si $\mathbf{x}$ está en V y si la base $\mathcal{B}$ de V tiene n vectores entonces $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ está en $\mathbf{R}^n$.

(b) Si $P_{\mathcal{B}}$ es la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a la base canónica entonces $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{x}$

(c) Si la base $\mathcal{B}$ de V tiene 3 elementos, entonces V y $\mathbf{R}^3$ son isomorfos.

►**12.**

(a) Si $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\mathbf{R}^m$ entonces el vector de coordenadas de un $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^m$ relativas a $\mathcal{B}$ es el propio $\mathbf{x}$.

(b) La correspondencia $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \mapsto \mathbf{x}$ se llama función de coordenadas.

(c) En algunos casos, un plano en $\mathbf{R}^3$ puede ser isomorfo a $\mathbf{R}^2$.

►**13.** Halla la matriz canónica de la aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$ que asigna a cada vector $\mathbf{x}$ su vector de coordenadas relativas a la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$; es decir, la matriz canónica de la función de coordenadas relativas a $\mathcal{B}$.

►**14.** Para los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{x}$ dados, demuestra que $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de $H = \mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y halla las coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a $\mathcal{B}$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En los ejercicios 15 y 16, halla la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a la base canónica de $\mathbf{R}^n$

►**15.** $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

►**16.** $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 5.3

2. Por definición de coordenadas: $\mathbf{x} = 8\binom{4}{5} - 5\binom{6}{7} = \binom{2}{5}$.

7. Hay que resolver el sistema cuya matriz ampliada es $[\mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2 \ \ \mathbf{b}_3 \ \ \mathbf{x}]$. El vector solución es $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$. El resultado es $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

9. $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \binom{2}{-6} = \binom{6}{4}$.

12. (a) Todo vector de $\mathbf{R}^m$ es su propio vector de coordenadas respecto a la base canónica, (b) La función de coordenadas es la inversa de esa, $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, (c) Un plano que pase por el origen.

13. La matriz canónica de la función de coordenadas $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ es $P_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$.

Versión de 19 de enero de 2023, 12:29 h.