Ejercicios de la sección 7.3 Gram-Schmidt y factorización QR

(Para hacer en clase: 1, 8, 12, 13, 16, 17.)
(Con solución o indicaciones: 3, 7, 11, 14, 15, 18.)

En los ejercicios 1 a 6, se da una base de un subespacio W. Usa el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal de W.

▶**1.** $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$

▶**3.** $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}.$

▶**7.** Halla una base ortonormal del subespacio generado por los vectores del ejercicio 3.

▶**8.** Halla una base ortonormal del subespacio generado por los vectores del ejercicio 4.

En los ejercicios 9 a 12 halla una base ortogonal del espacio columna de la matriz dada:

9. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$

▶**11.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

▶**12.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$

En los ejercicios 13 y 14 las columnas de Q fueron halladas aplicando el proceso de Gram-Schmidt a las columnas de A. Halla una matriz triangular superior R tal que $A = QR$.

▶**13.** $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \\ 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -2/7 & 5/7 \\ 5/7 & 2/7 \\ 2/7 & -4/7 \\ 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}.$

▶**14.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \\ 1/6 & 5/6 \\ -3/6 & 1/6 \\ 1/6 & 3/6 \end{pmatrix}.$

▶**15.** Halla una factorización QR de la matriz del ejercicio 11.

▶**16.** Halla una factorización QR de la matriz del ejercicio 12.

En los ejercicios 17 y 18 todos los vectores y subespacios están en $\mathbf{R}^n$. Indica para cada afirmación si es verdadera o falsa, justificando tus respuestas.

▶**17.**

(a) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base ortogonal de W, entonces al multiplicar $\mathbf{v}_3$ por un escalar c se obtiene una nueva base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, c\mathbf{v}_3\}$.

(b) El proceso de Gram-Schmidt produce, a partir de un conjunto libre $S = \{\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_r\}$, un conjunto ortogonal $U = \{\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_r\}$ con la propiedad de que para cada k de 1 a r los k primeros vectores de U generan el mismo subespacio que los k primeros vectores de S.

(c) Si $A = QR$ donde Q tiene columnas ortonormales, entonces $R = Q^{\mathrm{T}}A$.

▶**18.**

(a) Si $W = \mathrm{Gen}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ donde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ son linealmente independientes y si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es un conjunto ortogonal en W entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de W.

(b) Si $\mathbf{x}$ no pertenece a un subespacio W, entonces $\mathbf{x} - \mathrm{proy}_W\, \mathbf{x}$ es distinto de cero.

(c) En una factorización QR, $A = QR$ (donde las columnas de A son linealmente independientes), las columnas de Q forman una base ortonormal del espacio columna de A.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 7.3

3. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

7. $\left\{ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{30} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}.$

11. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

o también: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$

14. $R = Q^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$

15. $Q = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 2 & -\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 2 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{pmatrix}, R = Q^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

18. (a) Podría ser que uno de los $\mathbf{v}_i$ fuese igual a cero, (b) Cada vector de W es igual a su propia proyección ortogonal sobre W, (c) Las columnas de Q forman un conjunto ortonormal y por tanto una base ortonormal de $\mathrm{Col}\, Q$. Pero $A = QR$ implica que cada columna de A es una combinación lineal de las columnas de Q por lo que $\mathrm{Col}\, A \subset \mathrm{Col}\, Q$. Recíprocamente, al ser R invertible también $\mathrm{Col}\, Q \subset \mathrm{Col}\, A$.

Versión de 19 de enero de 2023, 14:20h.