Ejercicios de la sección 1.4 La ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(Para hacer en clase: 1, 4, 6, 8, 16, 20, 22, 24, 25, 31, 34.)
(Con solución o indicaciones: 3, 5, 7, 15, 19, 21, 23, 26, 32, 33, .)

▶**1.** Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & -8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comprueba que $\mathbf{p}$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Utiliza este hecho para mostrar una combinación lineal específica de las columnas de A que sea igual a $\mathbf{b}$.

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Comprueba la primera propiedad del producto de matrices por vectores calculando, en este caso, $A(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ y $A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$.

En los ejercicios 3 a 6 halla cada uno los productos de dos formas: (a) usando la definición del producto de una matriz por un vector y (b) usando la regla "fila por columna". Si un producto no está definido, explica por qué.

▶**3.** $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

▶**4.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

▶**5.** $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

▶**6.** $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 7 y 8 usa la definición del producto $A\mathbf{x}$ para escribir la ecuación matricial como una ecuación vectorial.

▶**7.** $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -8 & 4 \\ -2 & -7 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix}$.

▶**8.** $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \\ 9 & -6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 9 y 10 usa la definición del producto $A\mathbf{x}$ para escribir la ecuación vectorial como una ecuación matricial.

9. $x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.

10.
$z_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} + z_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 11 y 12, primero escribe el sistema de ecuaciones lineales como una ecuación vectorial y después como una ecuación matricial.

11.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 9 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} 8x_1 - x_2 &= 4 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

En los ejercicios 13 y 14, escribe la matriz ampliada para el sistema de ecuaciones lineales que corresponde a la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Después resuelve el sistema y escribe la solución en forma paramétrica vectorial.

13.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

14.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

▶**15.** Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en el plano de $\mathbf{R}^3$ generado por las columnas de A?. ¿Por qué sí o por qué no?

▶**16.** Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en el subconjunto en $\mathbf{R}^3$ generado por las columnas de A?. ¿Por qué sí o por qué no?.

En los ejercicios 17 y 18, demuestra que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución para todas las $\mathbf{b}$ posibles, y describe el conjunto de todas las $\mathbf{b}$ para las cuales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sí tiene solución.

17. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Los ejercicios 19 a 22 se refieren a las matrices A y B que se presentan a continuación. Realiza los cálculos adecuados que justifiquen tus respuestas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

▶**19.** ¿Cuántas filas de A contienen una posición pivote?. La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ¿tiene solución para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^4$?

▶**20.** ¿Cuántas filas de B contienen una posición pivote?. La ecuación $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$, ¿tiene solución para cada $\mathbf{y}$ en $\mathbf{R}^4$?

▶**21.** ¿Puede escribirse cada vector en $\mathbf{R}^4$ como una combinación lineal de las columnas de la matriz A?. ¿Las columnas de A generan $\mathbf{R}^4$?

Versión de 17 de febrero de 2023, 8:44h.

▶**22.** ¿Puede escribirse cada vector en $\mathbf{R}^4$ como una combinación lineal de las columnas de la matriz B?. ¿Las columnas de B generan $\mathbf{R}^4$?

▶**23.** Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. ¿Genera $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ a $\mathbf{R}^4$?. ¿Por qué sí o por qué no?

▶**24.** Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. ¿Genera $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ a $\mathbf{R}^3$?. ¿Por qué sí o por qué no?

En los ejercicios 25 y 26, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica cada respuesta.

▶**25.**

(a) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se conoce como una ecuación vectorial.

(b) Un vector $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de una matriz A si, y sólo si, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución.

(c) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible si la matriz ampliada $[A\ \mathbf{b}]$ tiene una posición pivote en cada fila.

(d) El primer elemento en el producto $A\mathbf{x}$ es una suma de productos.

(e) Si las columnas de una matriz A de orden $m \times n$ generan $\mathbf{R}^m$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible para cada vector $\mathbf{b}$ de $\mathbf{R}^m$.

(f) Si A es una matriz $m \times n$ y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es incompatible para algún $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^m$, entonces A no puede tener una posición pivote en cada fila.

▶**26.**

(a) Cualquier ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ corresponde a una ecuación vectorial con el mismo conjunto solución.

(b) Cualquier combinación lineal de vectores de $\mathbf{R}^m$ siempre puede escribirse en la forma de producto $A\mathbf{x}$ para una matriz A y un vector $\mathbf{x}$.

(c) El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{b}]$ es el mismo que el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$.

(d) Si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es incompatible, entonces $\mathbf{b}$ no está en el conjunto generado por las columnas de A.

(e) Si la matriz ampliada $[A\ \mathbf{b}]$ tiene una posición pivote en cada fila, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es incompatible.

(f) Si A es una matriz $m \times n$ cuyas columnas no generan $\mathbf{R}^m$, entonces necesariamente la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es incompatible para algún vector $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^m$.

27. Comprueba que $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$.
Usa este hecho para (sin realizar operaciones de filas) hallar los valores de los coeficientes c_1, c_2 y c_3 tales que

$$\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

28. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comprueba que $3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} - \mathbf{w} = 0$ y utiliza este hecho para (sin realizar operaciones de filas) encontrar x_1 y x_2 que satisfagan la ecuación

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

29. Sean $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ y $\mathbf{v}$ vectores en $\mathbf{R}^5$, y sean x_1, x_2, x_3 tres números desconocidos. Escribe la siguiente ecuación vectorial como una ecuación matricial explicando el significado de cada símbolo nuevo que necesites utilizar.

$$x_1\mathbf{q}_1 + x_2\mathbf{q}_2 + x_3\mathbf{q}_3 = \mathbf{v}.$$

30. Reescribe la siguiente ecuación matricial (numérica) en forma simbólica como una ecuación vectorial, y utiliza los símbolos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ para los vectores y $c_1, c_2, \ldots$ para los coeficientes. Define lo que representa cada símbolo usando los datos de la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

▶**31.** Construye una matriz 3×3, en forma no escalonada, cuyas columnas generen $\mathbf{R}^3$. Demuestra que dicha matriz tiene la propiedad deseada.

▶**32.** Construye una matriz 3×3, en forma no escalonada, cuyas columnas no generen $\mathbf{R}^3$. Demuestra que dicha matriz tiene la propiedad deseada.

▶**33.** Sea A una matriz 3×2. Explica por qué la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no puede ser compatible para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^3$. Generaliza tu argumento para el caso de una matriz A arbitraria con más filas que columnas.

▶**34.** ¿Podría un conjunto de tres vectores en $\mathbf{R}^4$ generar todo $\mathbf{R}^4$? Explica tu respuesta. ¿Qué sucede con n vectores en $\mathbf{R}^m$ cuando n es menor que m?

35. Supongamos que A es una matriz 4×3 y $\mathbf{b}$ un vector en $\mathbf{R}^4$ con la propiedad de que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única. ¿Qué puede decirse acerca de la forma escalonada reducida de A? Justifica tu respuesta.

36. Supongamos que A es una matriz 3×3 y $\mathbf{b}$ un vector en $\mathbf{R}^3$ con la propiedad de que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única. Explica por qué las columnas de A necesariamente generan todo $\mathbf{R}^3$.

37. Sean A una matriz 3×4, $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ dos vectores en $\mathbf{R}^3$, y $\mathbf{w} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$. Supongamos que $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$ para algunos vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ en $\mathbf{R}^4$. ¿Qué hecho permite concluir que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ es compatible?.

38. Sean A una matriz de 5×3, sea $\mathbf{y}$ un vector en $\mathbf{R}^3$, y sea $\mathbf{z}$ el vector de $\mathbf{R}^5$ dado por $\mathbf{z} = A\mathbf{y}$. ¿Qué hecho permite concluir que el sistema $A\mathbf{x} = 4\mathbf{z}$ es compatible?

En los ejercicios 39 a 42, determina si las columnas de la matriz generan a $\mathbf{R}^4$.

39. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 & 8 \\ -5 & -3 & 4 & -9 \\ 6 & 10 & -2 & 7 \\ -7 & 9 & 2 & 15 \end{pmatrix}$.

40. $\begin{pmatrix} 5 & -7 & -4 & 9 \\ 6 & -8 & -7 & 5 \\ 4 & -4 & -9 & -9 \\ -9 & 11 & 16 & 7 \end{pmatrix}.$

41. $\begin{pmatrix} 12 & -7 & 11 & -9 & 5 \\ -9 & 4 & -8 & 7 & -3 \\ -6 & 11 & -7 & 3 & -9 \\ 4 & -6 & 10 & -5 & 12 \end{pmatrix}.$

42. $\begin{pmatrix} 8 & 11 & -6 & -7 & 13 \\ -7 & -8 & 5 & 6 & -9 \\ 11 & 7 & -7 & -9 & -6 \\ -3 & 4 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$

43. En la matriz del ejercicio 41, halla una columna que se pueda borrar sin que las columnas restantes dejen de generar a $\mathbf{R}^4$.

44. En la matriz del ejercicio 42, halla una columna que se pueda borrar sin que las columnas restantes dejen de generar a $\mathbf{R}^4$. ¿Podría borrarse más de una columna?

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 1.4

3. Producto no definido porque el número de columnas de la matriz (2) no es igual al número de elementos del vector (3).

5. (a) Por la definición de producto matriz por vector: $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(b) Por la regla "fila por columna" $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 + (-3) \times 5 \\ 2 \times (-4) + (-3) \times (-3) \\ 2 \times 7 + (-3) \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

7. La ecuación vectorial es:

$$5 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

15. $\mathbf{u}$ estará en el plano de $\mathbf{R}^3$ generado por las columnas de A siempre y cuando $\mathbf{u}$ sea combinación lineal de las columnas de A, lo que es igual a decir que la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ es compatible. A su vez, $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ es compatible si y sólo si el sistema cuya matriz es $[A|\mathbf{u}]$ es compatible. Por tanto basta poner esta matriz en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sistema compatible, luego $\mathbf{u}$ está en el plano de $\mathbf{R}^3$ generado por las columnas de A porque $\mathbf{u}$ es combinación lineal de las columnas de A.

19. Las operaciones elementales $F_2 + F_1$, $F_4 - 2F_1$, $F_3 + 2F_2$, $F_4 + 3F_2$ transforman a A en

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

por lo que, aún sin llegar a una forma escalonada, ya vemos que A tiene posición pivote sólo en tres filas (en la 1, en la 2 y en la 3). Como A no tiene una posición pivote en cada fila, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, no tiene solución para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^4$.

21. Las dos preguntas tienen la misma respuesta, "no", porque A no tiene una posición pivote en cada fila.

23. El conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ no genera a $\mathbf{R}^4$ porque la matriz $[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3]$ cuyas columnas son esos vectores no tiene bastantes columnas como para tener un pivote en cada fila.

26. (a) Corresponde a la ecuación $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ donde $x_1, \ldots, x_n$ son los elementos de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ son las columnas de A, (b) Basta coger A como la matriz cuyas columnas son los vectores dados y coger $\mathbf{x}$ como el vector formado por los coeficientes, (c) Ver definición 1.4.8 y observaciones que le siguen, (d) Si lo estuviera sería igual a una combinación lineal de las columnas de A y los coeficientes de esa comb. lin. serían una solución particular de la ecuación, (e) El pivote de la última fila podría no estar en la columna de la derecha, (f) Para cualquier $\mathbf{b}$ de $\mathbf{R}^m$ que no esté en el conjunto generado por las columnas de A.

32. Si se pudiese dar una matriz escalonada sería fácil; luego bastaría reordenar las columnas. En general, basta que sea una matriz con una fila de ceros. Una matriz 3×3 con una fila de ceros puede tener a lo sumo dos posiciones pivote y por tanto sus columnas no pueden generar a $\mathbf{R}^3$.

33. Una matriz 3×2 no tiene bastantes columnas como para tener una posición pivote en cada fila y por tanto sus columnas no pueden generar a $\mathbf{R}^3$. Generalizando: Una matriz $m \times n$ con más filas que columnas no tiene bastantes columnas como para tener una posición pivote en cada fila y por tanto sus columnas no pueden generar a $\mathbf{R}^m$