Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

SIMULACRO 1

4 de marzo de 2020, 16:00 a 17:00h – Aula Magna

Pregunta 1

(3.5 pt.)

Considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 \\ -1 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ y el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. Contesta razonadamente:

(1 pt.) (a) Determina el número de posiciones pivote de A y deduce si las columnas de A generan $\mathbf{R}^4$ o no.

(0.5 pt.) (b) ¿Pertenece el vector $\mathbf{v}$ al espacio columna de A?

(0.5 pt.) (c) Escribe las columnas pivote de A.

(0.5 pt.) (d) ¿Existe algún vector $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ que haga que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea incompatible?.

(0.5 pt.) (e) ¿Es compatible el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$. En caso afirmativo halla la solución general escribiéndola en forma paramétrica vectorial.

(0.5 pt.) (f) Halla un vector que pertenezca al espacio nulo de A.

Solución:

(a) Hallamos una forma escalonada de A:

$$A \xrightarrow[F_4+2F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4+\frac{9}{2}F_2]{F_3-\frac{9}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4+8F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las posiciones pivote son $(1,1)$, $(2,3)$ y $(3,4)$. Como hay menos de 4 pivotes, las columnas de A no generan $\mathbf{R}^4$.

(b) Hay que mirar si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ es compatible. Realizamos las mismas operaciones de antes sobre la matriz ampliada $[A\ \ \mathbf{v}]$

$$[A\ \ \mathbf{v}] \xrightarrow[F_4+2F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & 8 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4+\frac{9}{2}F_2]{F_3-\frac{9}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4+8F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema es compatible, luego existe una combinación lineal de las columnas de A que es igual a $\mathbf{v}$, luego $\mathbf{v}$ pertenece al espacio columna de A.

(c) Las columnas pivote de A son $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) Sí. Existe porque las columnas de A no generan todo $\mathbf{R}^4$.

(e) Sí, es compatible por el resultado del apartado (b). Para hallar la solución general, calculamos la forma escalonada reducida de la matriz $[A\ \mathbf{v}]$, así que realizamos la fase regresiva:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_2]{(-1)F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+7F_2]{F_1-3F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y de aquí, la solución general en forma paramétrica vectorial es: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(f) De la solución anterior se tiene que $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Nombre y apellidos: ______________ S O L U C I O N E S ______________ DNI: ______________

Pregunta 2

(3 pt.)

Dados $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\-2\\-3\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, contesta razonadamente:

(0.5 pt.) (a) Halla valores numéricos para los cuatro elementos x_1, x_2, x_3, x_4 de $\mathbf{x}$ que hagan que $\mathbf{x}$ pertenezca al conjunto generado por los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, y $\mathbf{v}_3$.

(1 pt.) (b) ¿Qué ecuación tienen que cumplir los cuatro elementos x_1, x_2, x_3, x_4 de $\mathbf{x}$ para que $\mathbf{x}$ sea combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$?

(0.5 pt.) (c) El conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ¿es libre o ligado? (es decir, ¿los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son independientes o no?).

(1 pt.) (d) Halla los coeficientes de una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ que sea igual a $\mathbf{b}$.

Solución:

(a) La respuesta más sencilla e inmediata es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. También vale $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ o las coordenadas de $\mathbf{v}_2$ o las de $\mathbf{v}_3$ o las de cualquier múltiplo de uno de ellos o cualquier combinación lineal de ellos.

(b) Para que $\mathbf{x}$ sea combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, el sistema que corresponde a la ecuación vectorial $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}$ tiene que ser compatible. Empezamos reduciendo la matriz ampliada $[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3\ \ \mathbf{x}]$ a forma escalonada:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & x_1\\0 & 1 & -2 & x_2\\0 & 2 & -3 & x_3\\0 & 1 & 0 & x_4\end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_2]{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & x_1\\0 & 1 & -2 & x_2\\0 & 0 & 1 & x_3 - 2x_2\\0 & 0 & 2 & x_4 - x_2\end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - 2F_3} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & x_1\\0 & 1 & -2 & x_2\\0 & 0 & 1 & x_3 - 2x_2\\0 & 0 & 0 & x_4 - x_2 - 2(x_3 - 2x_2)\end{pmatrix}.$$

La ecuación que debe cumplirse para que el sistema sea compatible es $\boxed{x_4 - x_2 - 2(x_3 - 2x_2) = 0}$.

(c) Para averiguarlo buscamos el número de pivotes de la matriz formada por esos vectores reduciendo esa matriz a forma escalonada:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & -2\\0 & 2 & -3\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_2]{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Incluso sin terminar de obtener una forma escalonada se ve que la matriz tiene tres pivotes, tantos como columnas y por tanto los vectores dados son independientes.

(d) Hay que hallar una solución del sistema que corresponde a la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}.$$

Empezamos reduciendo la matriz ampliada a forma escalonada:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & 1\\0 & 2 & -3 & 3\\0 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_2]{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - 2F_3} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Todos los pivotes están en las columnas de coeficientes, luego el sistema es compatible. Completamos el cálculo de la forma escalonada reducida para hallar los coeficientes:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 - 3F_3]{F_2 + 2F_3} \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + 2F_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\0 & 1 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Luego el sistema tiene solución única, que es: $(c_1, c_2, c_3) = (5, 3, 1)$.

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 3

(3.5 pt.)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 8 & 3 & -2 & 7 \\ -2 & -2 & -1 & 4 \\ 4 & -9 & -49 & -4 \end{pmatrix}$ y los vectores $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$, sea $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la aplicación lineal cuya matriz canónica es A.

(0.5 pt.) (a) Calcula el vector $T(\mathbf{v})$.

(1 pt.) (b) Averigua si $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(T)$, es decir si $\mathbf{b}$ pertenece al conjunto imagen de T.

(1 pt.) (c) Explica si T es o no es una aplicación sobreyectiva y si es o no es una aplicación inyectiva.

(1 pt.) (d) Explica por qué una aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ puede ser inyectiva pero no puede ser sobreyectiva.

Solución:

(a) $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 8 & 3 & -2 & 7 \\ -2 & -2 & -1 & 4 \\ 4 & -9 & -49 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$.

(b) **Primera forma:** El resultado del apartado (a) indica que $\mathbf{b} = T(\mathbf{v})$ y por tanto $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}\, T$.

Segunda forma: Averiguar si el sistema correspondiente a la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible. Para ello ponemos la matriz ampliada en forma escalonada:

$$[A \;\; \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & -2 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 4 & 6 \\ 4 & -9 & -49 & -4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - 2F_1]{F_2 - 4F_1;\; F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -9 \\ 0 & -2 & -3 & 8 & 8 \\ 0 & -9 & -45 & -12 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}F_4]{\frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 8 & 8 \\ 0 & -3 & -15 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4 + 3F_2]{F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -13 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 + 9F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como la columna de los términos independientes no tiene pivote, el sistema es compatible y $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}\, T$.

(c) La matriz canónica de T, es decir A, tiene, según los cálculos del apartado (b), un pivote en cada fila, por tanto T es una aplicación sobreyectiva. Pero A tiene también un pivote en cada columna, por tanto T es una aplicación inyectiva. (T es inyectiva y sobreyectiva, es decir, es biyectiva.)

(d) Supongamos que B es la matriz canónica de la aplicación lineal. entonces B tiene 3 filas y 2 columnas.

Para que la aplicación lineal sea inyectiva, el sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene que ser determinado, o sea, no tener variables libres y por tanto B debe tener un pivote en cada columna. Para ello basta que las columnas de B sean dos vectores de $\mathbf{R}^3$ que no sean uno múltiplo del otro.

Para que la aplicación lineal sea sobreyectiva, el sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{u}$ tiene que ser compatible para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$, y ello sólo es posible si B tiene un pivote en cada fila. Pero esto es imposible porque tiene 3 filas y los pivotes han de estar en columnas diferentes con lo que no puede tener más de 2 pivotes.