# Ejercicios de la sección 5.2 Independencia lineal y Bases

(Ejercicios para hacer en clase: 1, 3, 5, 7, 13, 15, 17, 19, 21, 23.)
(Ejercicios con solución o indicaciones: 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, 20, 22.)

Averigua cuáles conjuntos de los ejercicios 1 a 6 son bases para $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Justifica tus respuestas.

►**1.** $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}.$

►**2.** $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$

►**3.** $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$

►**4.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$

►**5.** $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$

►**6.** $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$

En los ejercicios 7 a 10 se presenta una matriz $A$ y una forma escalonada de $A$. Halla una base para Col $A$ y una base para Nul $A$.

►**7.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

►**8.** $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -2 & -7 \\ 2 & -6 & 4 & 8 \\ 3 & -9 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

**9.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

**10.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 7 & 5 \\ -5 & 9 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

**11.** Halla una base del subespacio de $\mathbf{R}^2$ determinado por la ecuación $y = -3x$.

►**12.** Halla una base del subespacio de $\mathbf{R}^3$ determinado por la ecuación $x - 3y + 2z = 0$.

►**13.** Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$ y sea $H = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Sabiendo que $4\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ halla una base de $H$.

En los ejercicios 14 y 15 indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

►**14.**

(a) Si $H = \text{Gen}\{\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_p\}$ entonces el conjunto $\{\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_p\}$ es una base de $H$.

(b) Las columnas de una matriz inversible $n \times n$ forman una base para $\mathbf{R}^n$.

(c) Una base es un conjunto generador que tiene el mayor número posible de vectores.

(d) Las operaciones elementales de filas no afectan a las relaciones de dependencia lineal entre las columnas de una matriz.

►**15.**

(a) Si un conjunto finito de vectores, $S$, genera un espacio vectorial $V$, entonces algún subconjunto de $S$ es una base de $V$.

(b) Una base es un conjunto de vectores linealmente independientes con el mayor número posible de vectores.

(c) Al hallar la solución general de un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en forma paramétrica vectorial, los vectores generadores hallados pueden no constituir una base de Nul $A$.

(d) Si $B$ es una forma escalonada de una matriz $A$, entonces las columnas pivote de $B$ forman una base para Col $A$.

►**16.** Explica por qué si $\mathbf{R}^4 = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es una base.

►**17.** Explica por qué si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto libre en $\mathbf{R}^n$ entonces es una base.

►**18.** Supongamos que las columnas $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ de la matriz $A = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_p]$ son linealmente independientes. Explica por qué esas columnas forman una base de Col $A$.

►**19.** ¿Qué puede decirse acerca del número de filas y de columnas de una matriz $A$ de orden $m \times n$ si las columnas de $A$ constituyen una base de $\mathbf{R}^m$?

Los ejercicios 20 y 21 muestran que toda base de $\mathbf{R}^n$ contiene exactamente $n$ vectores.

►**20.** Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de $k$ vectores de $\mathbf{R}^n$ con $k < n$. Indica qué resultado del tema 1 implica que $S$ no puede ser una base de $\mathbf{R}^n$.

►**21.** Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de $k$ vectores de $\mathbf{R}^n$ con $k > n$. Indica qué resultado del tema 1 implica que $S$ no puede ser una base de $\mathbf{R}^n$.

Los ejercicios 22 y 23 revelan una importante conexión entre la independencia lineal y las aplicaciones lineales y son una buena práctica del uso de la definición de la independencia lineal. Sean $V$ y $W$ dos espacios vectoriales, sea $T : V \to W$ una aplicación lineal, y sea $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ un subconjunto de $V$.

►**22.** Demuestra que si los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ son linealmente dependientes en $V$, entonces los vectores imagen $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_p)$ también son linealmente dependientes. (Esto significa que si los vectores $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_p)$ son independientes, también lo son los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$.)



Versión de 18 de enero de 2023, 19:14 h.

►**23.** Supón que $T$ es inyectiva (o sea que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ implica $\mathbf{u} = \mathbf{v}$). Demuestra que si los vectores imagen $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_p)$ son linealmente dependientes entonces también lo son los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$. (Esto indica que toda aplicación lineal inyectiva trnasforma un conjunto de vectores independientes en otro conjunto de vectores independientes.)

## Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 5.2

**2.** No es base porque no son independientes (el primero es $-2$ por el segundo).

**4.** Son 3 vectores independientes de $\mathbf{R}^3$; es base de $\mathbf{R}^3$.

**6.** No es base. Una base de $\mathbf{R}^3$ no puede tener más de tres vectores.

**8.** Base Col $A$: $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Para hallar una base de Nul $A$ hay que calcular la forma escalonada reducida de $A$, que es: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 6/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y de aquí se obtiene la base:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

**12.** $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

**14.** (a) No dice que los vectores sean independientes, (b) Son independientes por haber un pivote en cada columna y generan $\mathbf{R}^n$ por haber un pivote en cada fila, (c) Debía decir "menor", (d) Considerada la matriz como la ampliada de un sistema, no afectan a la compatibilidad o no del sistema.

**16.** Como los cuatro vectores generan $\mathbf{R}^4$, la matriz cuyas columnas son esos vectores tiene un pivote en cada fila, luego tiene cuatro pivotes y por tanto tiene un pivote en cada columna. Luego las columnas son linealmente independientes.

**18.** Porque esas columnas son un conjunto libre que genera Col $A$; por definición de base eso es una base de Col $A$.

**20.** La matriz cuyas columnas son esos vectores, al tener más filas que columnas no puede tener un pivote en cada fila y por tanto no puede generar $\mathbf{R}^n$.

**22.** Por ser linealmente dependientes, los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ tienen una relación de dependencia lineal. Por el principio de superposición $T$ transforma esa relación de dependencia lineal en una relación de dependencia lineal entre los vectores $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_p)$.