Ejercicios de la sección 5.4 Dimensión de un espacio vectorial

(Ejercicios para hacer en clase: 2, 5, 6, 11, 13, 17, 18, 20, 23, 26.)
(Ejercicios con solución o indicaciones: 1, 3, 4, 8, 10, 12, 16, 19, 21, 23, 27.)

▶**1.** Determina la dimensión del subespacio H de $\mathbf{R}^3$ generado por los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. (Primero halla una base para H.)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

▶**2.** Considera la siguiente base de $\mathbf{R}^2$ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0'2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0'2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Halla $\mathbf{x}$ sabiendo que su vector de coordenadas relativas a $\mathcal{B}$ es $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

▶**3.** ¿Podría $\mathbf{R}^3$ contener a un subespacio cuatridimensional? Explica tu respuesta.

En los ejercicios 4 y 5, halla el vector $\mathbf{x}$ determinado por el vector de coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ dado y la base $\mathcal{B}$ dada. Explica cada respuesta con una figura.

▶**4.** $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

▶**5.** $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 6 a 9, el vector $\mathbf{x}$ está en un subespacio H que tiene una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Halla el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a la base $\mathcal{B}$.

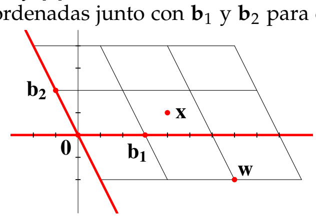
▶**6.** $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$

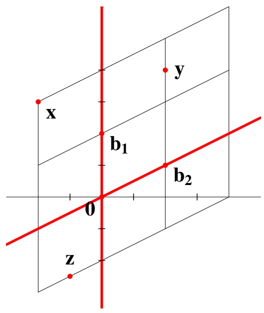
▶**8.** $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

▶**10.** Sean $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Usa la figura para estimar $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$. Confirma tu estimación de $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ usando esas coordenadas junto con $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ para calcular $\mathbf{x}$.



▶**11.** Sean $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2'5 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Usa la figura para estimar $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$ y $[\mathbf{z}]_{\mathcal{B}}$. Confirma tu estimación de $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$ y $[\mathbf{z}]_{\mathcal{B}}$ usando esas coordenadas junto con $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ para calcular $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$.



En los ejercicios 12 a 15 se presentan una matriz A y una forma escalonada de A. Halla bases para $\operatorname{Col} A$ y $\operatorname{Nul} A$, y dí cuáles son las dimensiones de estos subespacios.

▶**12.** $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 9 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & 4 & -3 \\ -4 & 12 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

▶**13.** $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 5 & -3 \\ -2 & 0 & -6 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -8 & 4 & 3 \\ -3 & -9 & 9 & -7 & -2 \\ 3 & 10 & -7 & 11 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & -9 & -7 & 8 \\ 4 & 8 & -9 & -2 & 7 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En los ejercicios 16 y 17, halla una base para el subespacio de $\mathbf{R}^4$ que generan los vectores dados. ¿Cuál es la dimensión del subespacio?.

Versión de 18 de enero de 2023, 20:06h.

▶**16.** $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$

▶**17.** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}.$

▶**18.** Supongamos que una matriz A de orden 3×5 tiene solamente tres columnas pivote. ¿Es $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^3$? ¿Es $\operatorname{Nul} A = \mathbf{R}^2$? Explica tus respuestas.

▶**19.** Supongamos que una matriz A de orden 4×7 tiene solamente tres columnas pivote ¿Es $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^3$? ¿Cuál es la dimensión de $\operatorname{Nul} A$? Explica tus respuestas.

En los ejercicios 20 y 21, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas. Aquí A es una matriz $m \times n$.

▶**20.**

(a) Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es una base para un subespacio H, y si $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$, entonces $c_1, \ldots, c_p$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a la base $\mathcal{B}$.

(b) Cada recta en $\mathbf{R}^n$ es un subespacio vectorial unidimensional de $\mathbf{R}^n$.

(c) La dimensión de $\operatorname{Col} A$ es el número de columnas pivote de A.

(d) La suma de las dimensiones de $\operatorname{Col} A$ y $\operatorname{Nul} A$ es igual al número de columnas de A.

(e) Si un conjunto de p vectores genera un subespacio p-dimensional H de $\mathbf{R}^n$, entonces estos vectores forman una base para H.

▶**21.**

(a) Si $\mathcal{B}$ es una base para un subespacio H, entonces cada vector en H puede escribirse sólo de una forma como combinación lineal de los vectores en $\mathcal{B}$.

(b) Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es una base para un subespacio H de $\mathbf{R}^n$, entonces la correspondencia $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ hace que H se vea y actúe igual que $\mathbf{R}^p$.

(c) La dimensión de $\operatorname{Nul} A$ es el número de variables en la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(d) Si H es un subespacio p-dimensional de $\mathbf{R}^n$, entonces todo conjunto de p vectores linealmente independientes de H es una base para H.

22. Construye una matriz A de orden 3×4 tal que $\dim \operatorname{Nul} A = 2$ y $\dim \operatorname{Col} A = 2$.

▶**23.** Sea A una matriz $n \times p$ cuyo espacio columna es p-dimensional. Explica por qué las columnas de A deben ser linealmente independientes.

24. Supongamos que los vectores $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ generan un subespacio W, y sea $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ cualquier subconjunto de W que contenga más de p vectores. Completa los detalles del siguiente argumento para demostrar que $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q$ es un conjunto ligado. Primero, sean $B = [\mathbf{b}_1 \ \ldots \ \mathbf{b}_p]$ y $A = [\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_q]$

(a) Explica por qué para cada vector $\mathbf{a}_j$, existe un vector $\mathbf{c}$ en $\mathbf{R}^p$ tal que $\mathbf{a}_j = B\,\mathbf{c}_j$.

(b) Sea $C = [\mathbf{c}_1 \ \ldots \ \mathbf{c}_q]$. Explica por qué existe un vector diferente de cero tal que $C\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(c) Usa B y C para demostrar que $A\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Esto demuestra que las columnas de A son dependientes.

25. Usa el ejercicio 24 para mostrar que si A y B son bases para un subespacio W de $\mathbf{R}^n$, entonces A no puede contener más vectores que B y, recíprocamente, que B no puede contener más vectores que A.

▶**26.** Con los vectores indicados a continuación, sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $H = \operatorname{Gen} \mathcal{B} = \operatorname{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Demuestra que $\mathbf{x}$ está en H y halla el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a la base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ -13 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

▶**27.** Con los vectores indicados a continuación, sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $H = \operatorname{Gen} \mathcal{B} = \operatorname{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Demuestra que $\mathbf{x}$ está en H y halla el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a la base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 5.4

1. La dimensión es el número de vectores que hay en una base cualquiera, que a su vez es el número de pivotes de la matriz formada por los vectores de un conjunto generador cualquiera. Aplicando a la matriz $[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3]$ las operaciones elementales $F_2 + 4F_1$, $F_3 - 3F_1$ y $F_3 - F_2$ se obtiene la matriz escalonada $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que nos muestra que una base de H es $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Por tanto $\dim H = 2$.

3. No es posible porque eso significaría la existencia de cuatro vectores independientes en $\mathbf{R}^3$ y esto la existencia de una matriz 3×4 con un pivote en cada columna.

4. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. Hay que resolver el sistema compatible determinado $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}$. La solución es: $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -5/4 \end{pmatrix}$.

10. $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. $\mathbf{x} = \frac{3}{2}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2 = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

12. $\dim(\operatorname{Col} A) = 3$; base de $\operatorname{Col} A$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$. $\dim(\operatorname{Nul} A) = 1$; la forma escalonada reducida de A es $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego una base de $\operatorname{Nul} A$ es: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

16. Estos vectores son las columnas de la matriz A del ejercicio 12, luego la respuesta es la misma que allí: la dimensión es 3 y una base es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$.

19. $\operatorname{Col} A \neq \mathbf{R}^3$ porque los vectores de $\mathbf{R}^4$ no pertenecen a $\mathbf{R}^3$. $\dim(\operatorname{Nul} A) =$ núm col's no pivote $= 4$.

21. (a) Cada vector puede porque la base genera H y de una sola forma porque es libre., (b) Esa correspondencia es un isomorfismo de H a $\mathbf{R}^p$, (c) Debía decir “el número de variables libres”, (d) Esos vectores forman un conjunto libre en H que tiene el mayor número posible de vectores.

23. Porque en un espacio p-dimensional todo conjunto de p vectores que genere el espacio es base, luego es libre.

27. Que $\mathbf{x}$ está en H se demuestra comprobando que la ecuación vectorial $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}$ (en las incógnitas c_1, c_2, c_3) tiene solución y las coordenadas pedidas se hallan resolviendo esa ecuación (o sea, el sistema equivalente a ella). El resultado es $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (3, 5, 2)$. Para comprobarlo basta calcular $3\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ y ver que el resultado es igual a $\mathbf{x}$.