TEMA 2. Sucesiones de Números Reales

Análisis Matemático

Profesor: José Ángel Cid

Grao en Enxeñaría Informática
Departamento de Matemáticas
Universidad de Vigo.

Definición

Llamamos sucesión de números reales a una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$n \rightarrow f(n) = x_n.$$

Definición

Llamamos sucesión de números reales a una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$n \to f(n) = x_n.$$

Definición

Llamamos sucesión de números reales a una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$n \to f(n) = x_n.$$

Habitualmente denotaremos la sucesión como $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ *o simplemente por* $\{x_n\}$.

Definición

Llamamos sucesión de números reales a una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$n \to f(n) = x_n.$$

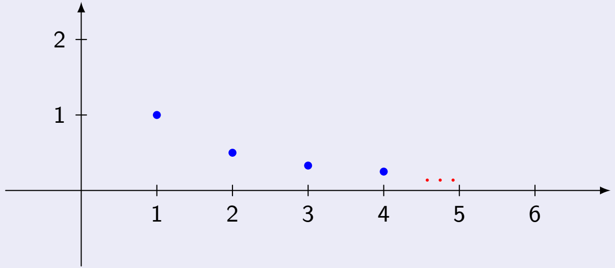
Habitualmente denotaremos la sucesión como $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ *o simplemente por* $\{x_n\}$.

A los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, se les llama términos de la sucesión, siendo x_n el término enésimo o término general de la sucesión.

Ejemplo

A continuación presentamos varios ejemplos de sucesiones

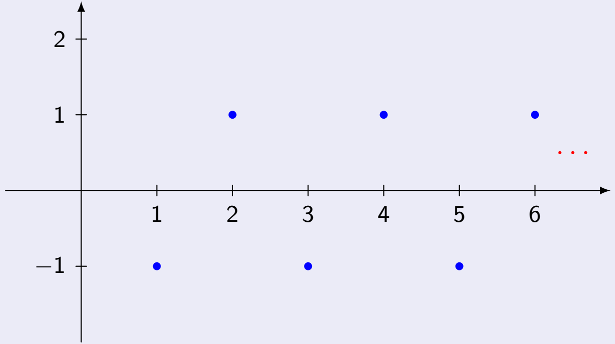
- $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$



Ejemplo

A continuación presentamos varios ejemplos de sucesiones

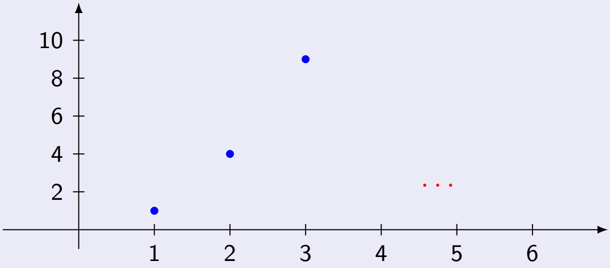
- $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$



Ejemplo

A continuación presentamos varios ejemplos de sucesiones

- $\{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$



No es necesario expresar $\{x_n\}$ en función de n mediante una fórmula. Por ejemplo el conjunto de los números primos forma una sucesión

$$\{p_n\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\},$$

a pesar de que no se conoce ninguna fórmula explícita que genere $\{p_n\}$.

No es necesario expresar $\{x_n\}$ en función de n mediante una fórmula. Por ejemplo el conjunto de los números primos forma una sucesión

$$\{p_n\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\},$$

a pesar de que no se conoce ninguna fórmula explícita que genere $\{p_n\}$.

Observación

La mejor fuente de información existente sobre sucesiones de números enteros es "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences", disponible en `http://oeis.org/`.

Definición

Una sucesión $\{x_n\}$ *converge a* $x \in \mathbb{R}$ *(escribimos* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *o* $\{x_n\} \to x$*) si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un número natural* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ *entonces*

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Definición

Una sucesión $\{x_n\}$ *converge a* $x \in \mathbb{R}$ *(escribimos* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *o* $\{x_n\} \to x$*) si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un número natural* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ *entonces*

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Definición

Una sucesión $\{x_n\}$ *converge a* $x \in \mathbb{R}$ *(escribimos* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *o* $\{x_n\} \to x$*) si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un número natural* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ *entonces*

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

En tal caso decimos que x *es el límite de la sucesión* $\{x_n\}$*. Si una sucesión* $\{x_n\}$ *tiene límite se llama convergente.*

Intuitivamente, "$\{x_n\}$ *converge a* $x \in \mathbb{R}$" significa que el término x_n está tan próximo "como queramos" del número real x siempre que n sea "suficientemente grande".

Intuitivamente, "$\{x_n\}$ *converge a* $x \in \mathbb{R}$" significa que el término x_n está tan próximo "como queramos" del número real x siempre que n sea "suficientemente grande".

Como $|x_n - x| < \varepsilon$ es equivalente a $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, podemos afirmar que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ converge a x si en cualquier entorno de x se encuentran todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$, salvo quizás un número finito.

Definición

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ decimos que la sucesión es divergente.

Definición

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

1. *Decimos que $\{x_n\} \to +\infty$ (o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$), si*

$$\forall M > 0\, \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ decimos que la sucesión es divergente.

Definición

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

1. *Decimos que $\{x_n\} \to +\infty$ (o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$), si*

$$\forall M > 0\, \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

2. *Decimos que $\{x_n\} \to -\infty$ (o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$), si*

$$\forall M > 0\, \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n < -M.$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ decimos que la sucesión es divergente.

Proposición

Dada una sucesión $\{x_n\}$ se cumplen las siguientes propiedades:

Proposición

Dada una sucesión $\{x_n\}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\{x_n\} \to x \Leftrightarrow \{x_n - x\} \to 0$

Proposición

Dada una sucesión $\{x_n\}$ *se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\{x_n\} \to x \Leftrightarrow \{x_n - x\} \to 0$
2. $\{x_n\} \to 0 \;\Leftrightarrow\; \{|x_n|\} \to 0.$

Proposición

Dada una sucesión $\{x_n\}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\{x_n\} \to x \Leftrightarrow \{x_n - x\} \to 0$
2. $\{x_n\} \to 0 \;\Leftrightarrow\; \{|x_n|\} \to 0.$
3. *La sucesión $\{y_n\} = \{x_{n+p}\}$, $p \in \mathbb{N}$ fijado, es convergente si y sólo si $\{x_n\}$ es convergente, en cuyo caso el límite de ambas coincide.*

Una propiedad importante del límite de una sucesión es que si existe es único.

Teorema (Unicidad del límite)

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que existen dos números reales, x e y, tales que $\{x_n\} \to x$ y también $\{x_n\} \to y$. Entonces $x = y$.

Definición

Sea $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales y* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ *una sucesión estrictamente creciente de números naturales.*
Llamamos subsucesión o sucesión parcial de la sucesión $\{x_n\}$ *a la sucesión* $\{x_{n_k}\}$.

Proposición

Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente, entonces cualquier subsucesión de $\{x_{n_k}\}$ también es convergente y tiene el mismo límite.

Proposición

Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente, entonces cualquier subsucesión de $\{x_{n_k}\}$ también es convergente y tiene el mismo límite.

Proposición

Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente, entonces cualquier subsucesión de $\{x_{n_k}\}$ también es convergente y tiene el mismo límite.

La proposición anterior resulta muy útil para demostrar que una sucesión no es convergente usándola de la siguiente forma: *si una sucesión admite dos subsucesiones con límites distintos o una subsucesión no convergente entonces la sucesión de partida no es convergente*.

Ejemplo

Ejemplo

1. *Usar la definición de límite para probar que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Ejemplo

1. *Usar la definición de límite para probar que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
2. *¿La sucesión* $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ *es convergente?*

Ejemplo

1. *Usar la definición de límite para probar que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
2. *¿La sucesión* $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ *es convergente?*
3. *Probar que la sucesión constante* $\{c, c, c, \dots\}$ *converge a* c.

Ejemplo

El límite de la sucesión $\{r^n\}$, con $r \in \mathbb{R}$, se comporta de la siguiente manera

Ejemplo

El límite de la sucesión $\{r^n\}$, *con* $r \in \mathbb{R}$, *se comporta de la siguiente manera*

Ejemplo

El límite de la sucesión $\{r^n\}$, con $r \in \mathbb{R}$, se comporta de la siguiente manera

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \textit{No existe el límite}, & \textit{si } r \leq -1, \\ 0, & \textit{si } -1 < r < 1 \iff |r| < 1, \\ 1, & \textit{si } r = 1, \\ +\infty, & \textit{si } r > 1. \end{cases}$$

Definición

Sea $\{ x_n \}$ *una sucesión de números reales.*

Definición

Sea $\{ x_n \}$ una sucesión de números reales.

1. *Se dice que $\{x_n\}$ está acotada superiormente si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que*

$$x_n \leq K, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Los números reales K que verifican (2.1) se llaman cotas superiores de la sucesión $\{x_n\}$.

Definición

Sea $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales.*

1. *Se dice que* $\{x_n\}$ *está* ***acotada superiormente*** *si existe* $K \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x_n \leq K, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

   Los números reales K *que verifican (2.1) se llaman* ***cotas superiores*** *de la sucesión* $\{x_n\}$*.*

2. *Se dice que* $\{x_n\}$ *está* ***acotada inferiormente*** *si existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x_n \geq k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

   Los números reales k *que verifican (2.2) se llaman* ***cotas inferiores*** *de la sucesión* $\{x_n\}$*.*

Definición

Sea $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales.*

1. *Se dice que* $\{x_n\}$ *está* *acotada superiormente* *si existe* $K \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x_n \leq K, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

   Los números reales K *que verifican (2.1) se llaman* *cotas superiores* *de la sucesión* $\{x_n\}$*.*

2. *Se dice que* $\{x_n\}$ *está* *acotada inferiormente* *si existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x_n \geq k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

   Los números reales k *que verifican (2.2) se llaman* *cotas inferiores* *de la sucesión* $\{x_n\}$*.*

3. *Se dice que la sucesión* $\{x_n\}$ *está* *acotada* *si existen valores* $k, K \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$k \leq x_n \leq K, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

De la definición de límite se sigue sin demasiada dificultad el siguiente resultado.

Teorema

Toda sucesión de números reales convergente está acotada.

El recíproco del teorema anterior no es cierto (por ejemplo $\{(-1)^n\}$ es una sucesión acotada no convergente). Un recíproco parcial lo proporciona el siguiente resultado.

Proposición

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales.

Proposición

Sean $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *dos sucesiones de números reales.*

1. *Si* $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, *entonces* $\{x_n + y_n\} \to x + y$.

Proposición

Sean $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *dos sucesiones de números reales.*

1. *Si* $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, *entonces* $\{x_n + y_n\} \to x + y$.
2. *Si* $\{x_n\} \to 0$ *e* $\{y_n\}$ *está acotada, entonces* $\{x_n y_n\} \to 0$.

Proposición

Sean $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *dos sucesiones de números reales.*

1. *Si* $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, *entonces* $\{\, x_n + y_n\} \to x + y$.
2. *Si* $\{x_n\} \to 0$ *e* $\{y_n\}$ *está acotada, entonces* $\{x_n\, y_n\} \to 0$.
3. *Si* $\{x_n\} \to x$ *e* $\{y_n\} \to y$, *entonces* $\{x_n\, y_n\} \to x\, y$.

Proposición

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales.

1. *Si $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, entonces $\{x_n + y_n\} \to x + y$.*
2. *Si $\{x_n\} \to 0$ e $\{y_n\}$ está acotada, entonces $\{x_n\, y_n\} \to 0$.*
3. *Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to x\, y$.*
4. *Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y \neq 0$, con $y_n \neq 0$, $\forall n \in N$, entonces $\{x_n/y_n\} \to x/y$.*

Proposición

Sean $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *dos sucesiones de números reales.*

1. *Si* $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, *entonces* $\{x_n + y_n\} \to x + y$.
2. *Si* $\{x_n\} \to 0$ *e* $\{y_n\}$ *está acotada, entonces* $\{x_n\, y_n\} \to 0$.
3. *Si* $\{x_n\} \to x$ *e* $\{y_n\} \to y$, *entonces* $\{x_n\, y_n\} \to x\, y$.
4. *Si* $\{x_n\} \to x$ *e* $\{y_n\} \to y \neq 0$, *con* $y_n \neq 0$, $\forall n \in N$, *entonces* $\{x_n / y_n\} \to x/y$.
5. *(Regla del encaje o del sandwich). Si* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *tienen por límite* l *y*

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$

entonces la sucesión $\{z_n\}$ *también es convergente a* l.

Proposición

Sean $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *dos sucesiones de números reales.*

1. *Si* $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, *entonces* $\{x_n + y_n\} \to x + y$.
2. *Si* $\{x_n\} \to 0$ *e* $\{y_n\}$ *está acotada, entonces* $\{x_n y_n\} \to 0$.
3. *Si* $\{x_n\} \to x$ *e* $\{y_n\} \to y$, *entonces* $\{x_n y_n\} \to x y$.
4. *Si* $\{x_n\} \to x$ *e* $\{y_n\} \to y \neq 0$, *con* $y_n \neq 0$, $\forall n \in N$, *entonces* $\{x_n / y_n\} \to x/y$.
5. *(Regla del encaje o del sandwich). Si* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *tienen por límite* l *y*
$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$
entonces la sucesión $\{z_n\}$ *también es convergente a* l.
6. *Si* $\{x_n\} \to +\infty$ *e* $\{y_n\} \to +\infty$, *entonces* $\{x_n y_n\} \to +\infty$.

Proposición

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales.

1. *Si $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, entonces $\{x_n + y_n\} \to x + y$.*
2. *Si $\{x_n\} \to 0$ e $\{y_n\}$ está acotada, entonces $\{x_n\, y_n\} \to 0$.*
3. *Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to x\, y$.*
4. *Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y \neq 0$, con $y_n \neq 0$, $\forall n \in N$, entonces $\{x_n / y_n\} \to x/y$.*
5. *(Regla del encaje o del sandwich). Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tienen por límite l y*
$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$
entonces la sucesión $\{z_n\}$ también es convergente a l.
6. *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to +\infty$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to +\infty$.*
7. *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to -\infty$.*

Proposición

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales.

1. *Si* $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, *entonces* $\{x_n + y_n\} \to x + y$.
2. *Si* $\{x_n\} \to 0$ *e* $\{y_n\}$ *está acotada, entonces* $\{x_n\, y_n\} \to 0$.
3. *Si* $\{x_n\} \to x$ *e* $\{y_n\} \to y$, *entonces* $\{x_n\, y_n\} \to x\, y$.
4. *Si* $\{x_n\} \to x$ *e* $\{y_n\} \to y \neq 0$, *con* $y_n \neq 0$, $\forall n \in N$, *entonces* $\{x_n/y_n\} \to x/y$.
5. *(Regla del encaje o del sandwich). Si* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *tienen por límite* l *y*
$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$
entonces la sucesión $\{z_n\}$ *también es convergente a* l.
6. *Si* $\{x_n\} \to +\infty$ *e* $\{y_n\} \to +\infty$, *entonces* $\{x_n\, y_n\} \to +\infty$.
7. *Si* $\{x_n\} \to +\infty$ *e* $\{y_n\} \to -\infty$, *entonces* $\{x_n\, y_n\} \to -\infty$.
8. *Si* $\{x_n\} \to +\infty$ $\{y_n\} \to y \neq 0$, *entonces* $\{x_n\, y_n\} \to +\infty$ *si* $y > 0$ *ó* $\{x_n\, y_n\} \to -\infty$ *si* $y < 0$.

Proposición

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales.

1. *Si $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, entonces $\{x_n + y_n\} \to x + y$.*
2. *Si $\{x_n\} \to 0$ e $\{y_n\}$ está acotada, entonces $\{x_n y_n\} \to 0$.*
3. *Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$, entonces $\{x_n y_n\} \to x y$.*
4. *Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y \neq 0$, con $y_n \neq 0$, $\forall n \in N$, entonces $\{x_n / y_n\} \to x/y$.*
5. *(Regla del encaje o del sandwich). Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tienen por límite l y*
$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$
entonces la sucesión $\{z_n\}$ también es convergente a l.
6. *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to +\infty$, entonces $\{x_n y_n\} \to +\infty$.*
7. *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$, entonces $\{x_n y_n\} \to -\infty$.*
8. *Si $\{x_n\} \to +\infty$ $\{y_n\} \to y \neq 0$, entonces $\{x_n y_n\} \to +\infty$ si $y > 0$ ó $\{x_n y_n\} \to -\infty$ si $y < 0$.*
9. *Si $x_n \neq 0$, $\forall n \in N$, entonces $\{x_n\} \to 0 \Leftrightarrow \{1/|x_n|\} \to +\infty$.*

Hay otras operaciones que no tienen un valor definido, dependen del ejemplo concreto y se llaman "indeterminaciones". Por ejemplo: "$+\infty - \infty$", "$0 \cdot \infty$", "∞/∞", "$0/0$", "1^{∞}", "∞^{0}", "0^{0}".

La sucesión de números reales dada por

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\},$$

es monótona creciente y acotada, por lo que $\{x_n\}$ es una sucesión convergente. Se define el número e, en honor de Euler, como el límite de la sucesión $\{x_n\}$, es decir,

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281\cdots$$

Teorema (Criterio para la indeterminación "1^∞")

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *y* $\lim_{n\to\infty} (x_n - 1)\cdot y_n = h$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \mathrm{e}^h.$$

Teorema (Criterio para la indeterminación "1^∞")

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *y* $\lim_{n\to\infty} (x_n - 1)\cdot y_n = h$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \mathrm{e}^h.$$

Teorema (Criterio para la indeterminación "1^∞")

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *y* $\lim_{n\to\infty} (x_n - 1)\cdot y_n = h$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \mathrm{e}^h.$$

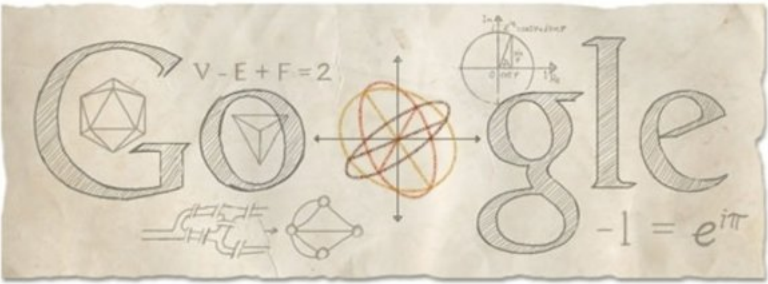


Figura: Doodle conmemorando el 306 aniversario del nacimiento de Euler

DEFINICIÓN

Una sucesión $\{x_n\}$ *se dice que es una sucesión recurrente de orden* p *si cada término viene dado en función de los* p *términos anteriores, es decir*

$$x_{n+p} = g(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-1}), \qquad n \geq 1, \tag{4.1}$$

siendo p *un valor fijo.*

DEFINICIÓN

Una sucesión $\{x_n\}$ *se dice que es una sucesión recurrente de orden* p *si cada término viene dado en función de los* p *términos anteriores, es decir*

$$x_{n+p} = g(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-1}), \qquad n \geq 1, \tag{4.1}$$

siendo p *un valor fijo.*

Definición

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es una sucesión recurrente de orden p si cada término viene dado en función de los p términos anteriores, es decir

$$x_{n+p} = g(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-1}), \qquad n \geq 1, \tag{4.1}$$

siendo p un valor fijo.

La igualdad (4.1) se denomina ley de recurrencia. Para generar los términos de una sucesión recurrente de orden p es preciso conocer los p-primeros términos de la sucesión. Los valores, $x_1, x_2, \ldots, x_p$, se denominan valores iniciales de la sucesión. Si partimos de una misma ley de recurrencia (4.1) pero con distintos valores iniciales, se generan sucesiones distintas.

Observación

Observación

i) *La mayoría de los métodos numéricos que estudiaremos generan una sucesión recurrente con el objetivo de aproximar la solución del problema estudiado.*

Observación

i) *La mayoría de los métodos numéricos que estudiaremos generan una sucesión recurrente con el objetivo de aproximar la solución del problema estudiado.*

ii) *Para estudiar la convergencia de sucesiones recurrentes es muy útil el Principio de Inducción. En determinados casos el estudio de la convergencia se reduce a probar que la sucesión es monótona y acotada.*

Definición

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Diremos que

En ambos casos se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona.

Definición

Sea $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales. Diremos que*

1. $\{x_n\}$ *es* **monótona creciente** *si* $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

En ambos casos se dice que $\{x_n\}$ *es una sucesión monótona.*

Definición

Sea $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales. Diremos que*

1. $\{x_n\}$ *es* ***monótona creciente*** *si* $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\{x_n\}$ *es* ***monótona decreciente*** *si* $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

En ambos casos se dice que $\{x_n\}$ *es una sucesión monótona.*

DEFINICIÓN

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Diremos que

1. $\{x_n\}$ *es monótona creciente si* $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\{x_n\}$ *es monótona decreciente si* $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

En ambos casos se dice que $\{x_n\}$ *es una sucesión monótona.*

DEFINICIÓN

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Diremos que

1. $\{x_n\}$ es *monótona creciente* si $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\{x_n\}$ es *monótona decreciente* si $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

En ambos casos se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona. Si en las definiciones anteriores se da la desigualdad estricta diremos que la sucesión es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Teorema

Toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.

EJEMPLO

Demostrar que la sucesión definida como $x_1 := 2$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *es convergente y calcular su límite.*