II Autómatas Finitos y Gramáticas Regulares

5.1 Autómatas Finitos: FAs

Definición: Un autómata finito es un 5-tuple $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde:

i) Q es un conj. finito no vacío de estados

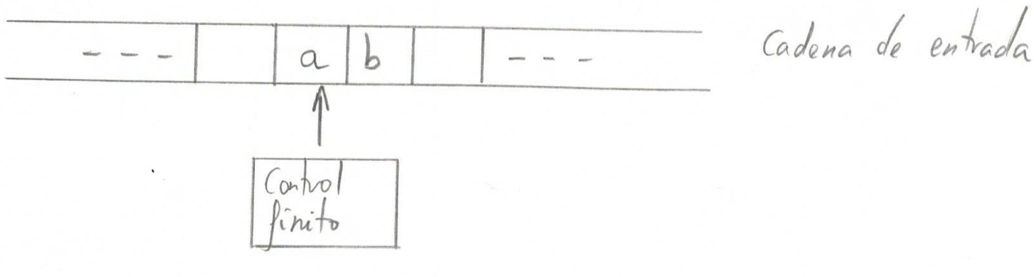
ii) Σ es un conj. finito no vacío de símbolos de entrada

iii) $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow P(Q)$ es la función de transición

iv) $q_0 \in Q$ es el estado inicial

v) $F \subseteq Q$ es el conj. de estados finales (o de aceptación)

NOTA: Podemos representar un FA mediante un control finito, el cual se encuentra en un estado $q \in Q$, y lee una secuencia de símbolos en Σ que se encuentran escritos en una cinta.



Suponiendo que el símbolo a analizar sea "a", el control finito pasa al estado $p = \delta(q, a)$ y mueve su cabeza de lectura sobre la cinta una posición a la derecha para situarse en el siguiente símbolo de entrada "b"

NOTACION: $(q, a) \vdash (p, b)$

Para describir formalmente el comportamiento de un FA con una cadena de entrada, extenderemos la definición de la función de transición δ.

Definición: Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un FA, definimos

$$\begin{aligned}
\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* &\longrightarrow P(Q) \\
(q, \varepsilon) &\longmapsto q \\
(q, xa) &\longmapsto \delta(\hat{\delta}(q, x), a)
\end{aligned}$$

Lema: Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un FA, entonces:

i) $\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y)$, $\forall x, y$

ii) $\hat{\delta}(q, x) = \hat{\delta}(q, y) \Rightarrow \hat{\delta}(q, xz) = \hat{\delta}(q, yz)$, $\forall x, y, z$

demostración

i) Lo haremos por inducción en $|y|$.

$|y| = 1 \Rightarrow y = a \Rightarrow \hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(q, xa) := \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$

$|y| \leq n$ Supuesto cierto

$|y| = n+1 \Rightarrow \exists a \in \Sigma \,/\, y = za, |z| = n$ por tanto:

$$\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(q, xza) := \delta(\hat{\delta}(q, xz), a) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{inducción por } |z| = n}}{:=} \delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), z), a)$$

$$:= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), za) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y) \text{ demostrado}$$

ii) $$\hat{\delta}(q, xz) \underset{\substack{\downarrow \\ i)}}{=} \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), z) \underset{\substack{\downarrow \\ \hat{\delta}(q,x) = \hat{\delta}(q,y)}}{=} \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, y), z) \underset{\substack{\downarrow \\ i)}}{=} \hat{\delta}(q, yz)$$ demostrado

5.1.1 Configuraciones, movimientos, aceptación.

<u>Definición</u>: Sean $\left.\begin{array}{l} \mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \text{ un AF} \\ x \in \Sigma^* \end{array}\right\}$, decimos que

<u>$\mathcal{A}$ acepta la cadena x</u> sii $(q_0, x) \vdash^* (q, \varepsilon)$ / $q \in F$.

<u>Definición</u>: Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AF, definimos una <u>configuración de $\mathcal{A}$</u> como un par $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$, donde:

i) "q" es el estado actual del control finito.

ii) "w" es el contenido actual de la cinta de entrada, esto es, el conj. de símbolos que quedan por analizar.

<u>NOTA</u>: Se consideran dos tipos particulares de configuración:

i) Las <u>configuraciones iniciales</u>, esto es, aquellas en las que se encuentra $\mathcal{A}$ en un estado inicial. Son de la forma (q_0, w).

ii) Las <u>configuraciones finales</u>, esto es, aquellas en las que se encuentra el control finito en uno de sus estados finales y la cadena que queda por analizar es ε. Son de la forma (q, ε) / $q \in F$.

Definición: Sea $\mathcal{A}=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ un FA. Entonces un movimiento de $\mathcal{A}$ es el paso de una configuración a otra mediante la aplicación de una transición. Esto es,

$(q,w) \vdash (p,x)$

Definición: Sea $\mathcal{A}=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ un FA, definimos el conj. $T(\mathcal{A})$ como el conj. de cadenas aceptadas por $\mathcal{A}$. Esto es, $T(\mathcal{A}) := \{x \in \Sigma^* / \delta(q_0,x) \in F\}$

5.1.2 Representación de FAs: tablas de transiciones, grafos de transiciones.

Definición: Sea $\mathcal{A}=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ un FA, una tabla de transiciones para $\mathcal{A}$ es aquella que describe el funcionamiento de δ sobre los estados de $\mathcal{A}$.

Ejemplo: Sea $\mathcal{A}=(\{p,q,r\},\{\emptyset,1\},\delta,p,\{r\})$, podemos considerar la tabla de transiciones siguiente

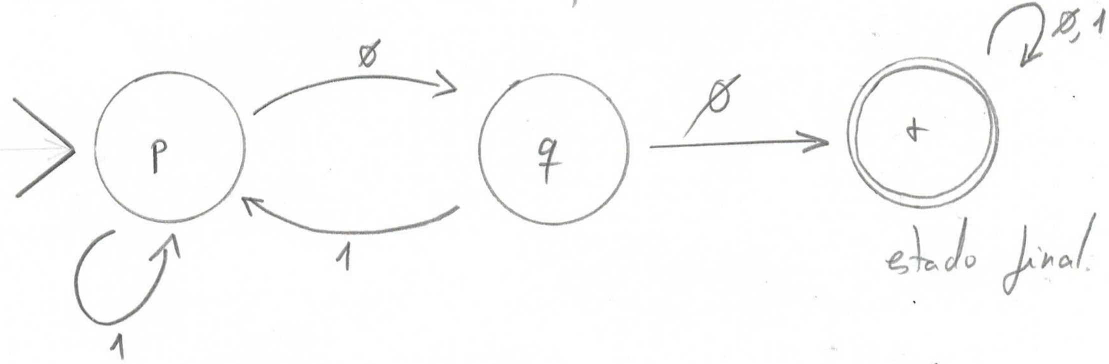
	δ	$\emptyset$	1	Inputs
Estados	p	$\{q\}$	$\{p\}$	
	q	$\{r\}$	$\{p\}$	
	r	$\{r\}$	$\{r\}$	

Definición: Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un FA, el grafo de transiciones de $\mathcal{A}$ es un grafo desordenado etiquetado donde:

i) los nodos del grafo están etiquetados con los nombres de los estados.

ii) el grafo tiene un arco (p, q) sii $\exists a \in \Sigma \,/\, q \in \delta(p, a)$. En adelante, etiquetaremos los arcos con el conj. de $a \in \Sigma \,/\, q \in \delta(p, a)$.

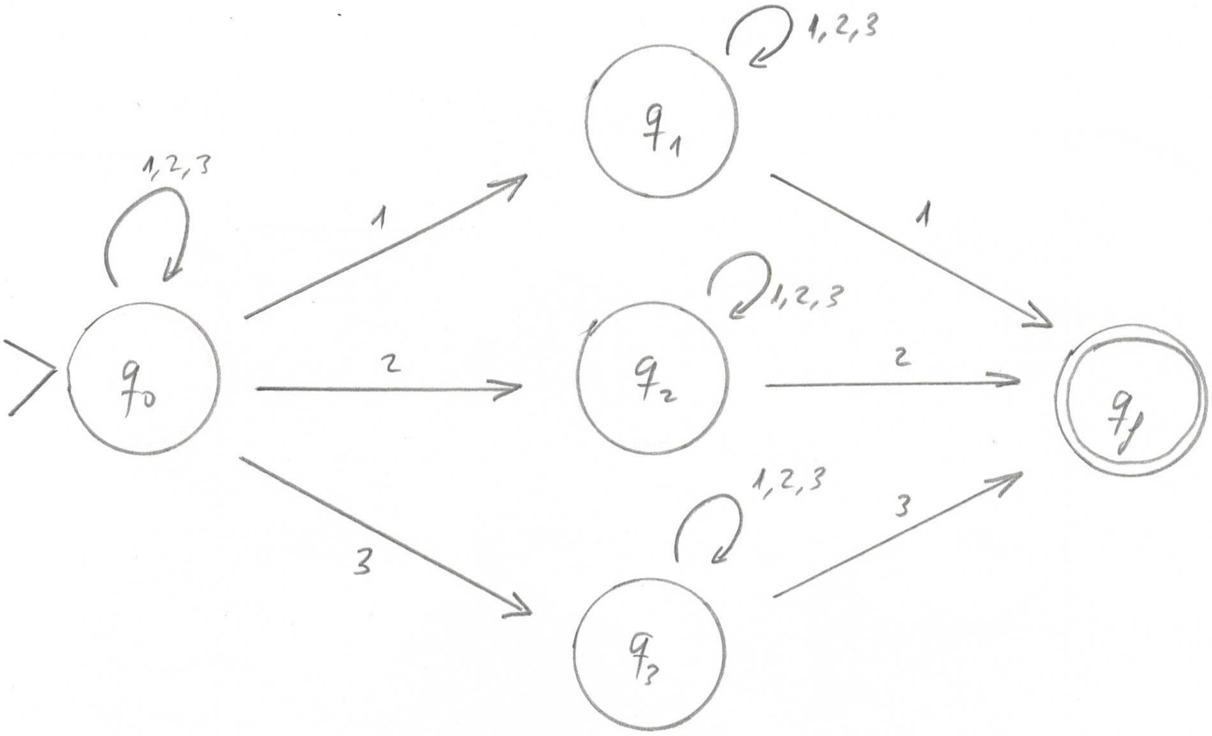
Ejemplo: Dado el autómata del ejemplo anterior, su grafo de transiciones vendrá dado por:



Ejemplo: Sea $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{1,2,3\}, \delta, q_0, \{q_f\})$ un FA, donde δ viene dada por la tabla:

δ	1	2	3
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_f\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2, q_f\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3, q_f\}$
q_f	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

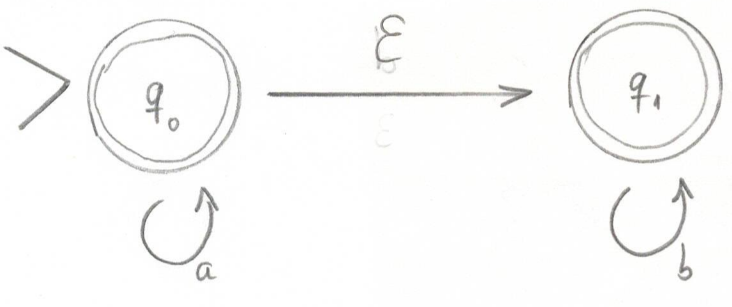
entonces su grafo de transiciones viene dado por:



5.1.3 Lenguajes reconocidos por FAs: conj. regulares

Definición: Sea Σ un alfabeto, $L \subseteq \Sigma^*$ se dice conj. regular sii $\exists \mathcal{A}$ un FA $/ L = T(\mathcal{A})$.

Ejemplo: Sea $L := \{a^i b^j / i,j \geq 0\} = a^*b^*$. Veremos que es regular. Para ello bastará con construir un FA $\mathcal{A} /$
$/ L = T(\mathcal{A})$.



Teorema: El conjunto $L = \{a^i b^i / i \geq \emptyset\}$ no es regular.

demostración:

Supongamos L conj. regular $\Rightarrow$: $\exists\, A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) / \boxed{L = T(A)}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Consideremos el conj. } \{\delta(q_0, a^i) / i \geq \emptyset\} \subseteq Q \\ |Q| \text{ finito} \\ \exists \text{ infinitas cadenas } a^i / i \geq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists\, i,j,\ i > j / \delta(q_0, a^i) = \delta(q_0, a^j) \\ \text{Sea } z := b^i \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \delta(q_0, a^i b^i) = \delta(q_0, a^j b^i)$, sea $q := \delta(q_0, a^j b^i)$ entonces:

1º caso $q \in F$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow: \boxed{a^j b^i \in T(A)} \\ i > j \Rightarrow \boxed{a^j b^i \notin L} \\ L = T(A) \text{ por hipótesis} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{L \neq T(A)}$$

absurdo demostrado

2º caso $q \notin F$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow: a^i b^i \notin T(A) \\ a^i b^i \in L \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{L \neq T(A)}$$

absurdo demostrado

5.1.4 Autómatas Finitos No Deterministas: NFAs. Simulación de un NFA: método de las dos pilas.

En adelante, consideraremos que la def. dada para los FAs se refiere a los NFAs, en contraposición a los DFAs que serán introducidos más tarde.

Teorema: Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA y sea $x \in \Sigma^*$, entonces podemos determinar si $x \in T(A)$ en un tiempo $O(|Q| \times |x|)$.

demo.

Bastará simular A utilizando el método de las dos pilas.
Introduciremos primero el concepto de ε-clausura.

ε-clausura $(p) := \{ q \in Q \,/\, \delta(p, \varepsilon) \ni q \}$
$p \in Q$

El algoritmo es el siguiente:

```
S := ε-clausura ({q0});
c := leer_siguiente_caracter;

WHILE   c ≠ EOF DO BEGIN
            S := ε-clausura (δ(S,c));
            c := leer_siguiente_caracter;
END;
IF  S∩F ≠ Ø THEN
     RETURN "yes"
ELSE RETURN "no"
```

NOTA: Dicho algoritmo puede simularse mediante dos pilas (de ahí su nombre):

1º PILA: Conjunto actual de estados.

2º PILA: " de estados siguientes.

Evidentemente, una vez hemos calculado el conj. siguiente de estados, podemos intercambiar los papeles de ambas pilas.

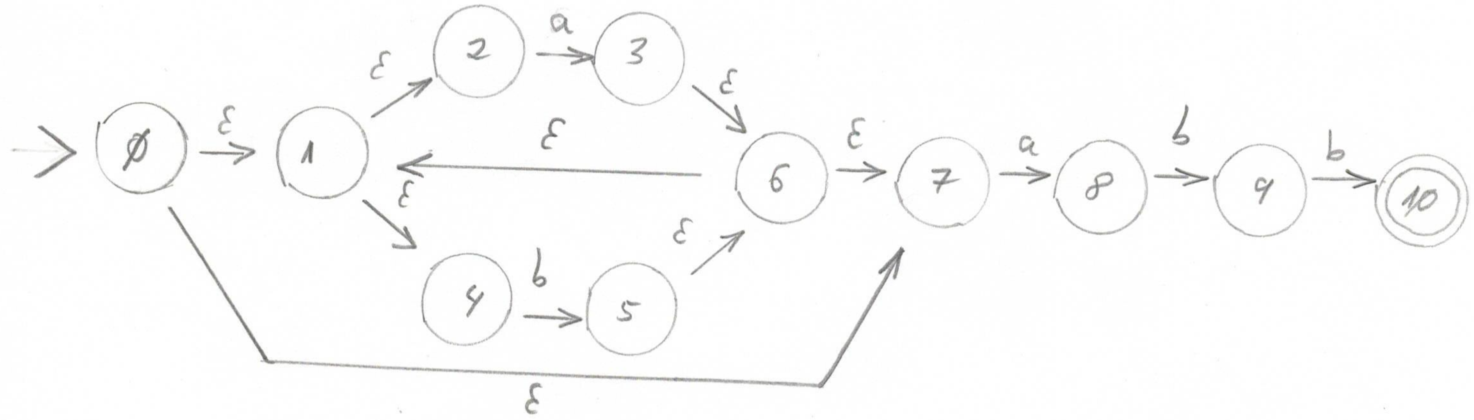
NOTA: Trivialmente dicho algoritmo simula el funcionamiento de A.

Veamos ahora el tiempo invertido en el reconocimiento de $x \in \Sigma^*$.

Dado que al interior del bucle WHILE el número total de estados calculados es como máximo $|Q|$, tendremos trivialmente que dicho bucle invierte un tiempo $\theta(|Q| \times |x|)$.

demostrado.

Ejemplo: Sea A el NFA dado por el esquema de transiciones siguiente:



para el cual $T(A) = (a|b)^*abb$

Consideremos como input $x = a$, aplicando el algoritmo de las dos pilas obtendremos:

$S := \varepsilon\text{-clausura}(\{q_0\}) = \{q_0, q_1, q_2, q_4, q_7\}$

$S := \varepsilon\text{-clausura}(\delta(S,a)) = \varepsilon\text{-clausura}(\{q_3, q_8\}) =$
$= \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_6, q_7, q_8\}$

$S \cap F = \emptyset$

RETURN "no"