Análise Matemática. Curso 2020-2021.
Grao en Enxenería Informática. ESEI Ourense.
Departamento de Matemáticas. Universidade de Vigo.
Data: 19/01/2021

**EXAMEN FINAL**

| APELIDOS | NOME | DNI | NOTA |
|---|---|---|---|
| | | | |

**NOTA 1:** Realizar os cálculos con 6 cifras decimais redondeadas. Poñer a calculadora en modo RADIÁNS.

1. **Representar gráficamente os seguintes conxuntos e determinar (se existen) o seu mínimo, máximo, ínfimo e supremo:**

   $a) A = \{x \in \mathbb{R} : |2x^2 - 12x + 16| < 1\}$. $\qquad$ $b) B = \{\mathrm{e}^{-1/n} : n \in \mathbb{N}\}$.

SOLUCIÓN: **a)** Como $|2x^2 - 12x + 16| < 1 \Longleftrightarrow |2x^2 - 12x + 16| - 1 < 0$, estudiamos as raíces da función continua $y(x) = |2x^2 - 12x + 16| - 1$, é dicir,

$$y(x) = 0 \Longleftrightarrow |2x^2 - 12x + 16| = 1 \Longleftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 = 1 \quad \text{ou} \quad 2x^2 - 12x + 16 = -1,$$

de onde se obteñen as catro solucións

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{6}}{2} \simeq 1.775255, \; x_4 = \frac{6 + \sqrt{6}}{2} \simeq 4.224745,$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{2}}{2} \simeq 2.292893, \; x_3 = \frac{6 + \sqrt{2}}{2} \simeq 3.707107.$$

Logo $y(x)$ ten signo constante nos intervalos $(-\infty, x_1)$, $(x_1, x_2)$, $(x_2, x_3)$, $(x_3, x_4)$ e $(x_4, +\infty)$ e para determinar o seu signo basta obter o valor de $y(x)$ nun punto $x$ calqueira de cada intervalo:

$$x = 0 \Longrightarrow y(0) = 15 > 0 \Longrightarrow y(x) > 0 \text{ para todo } x \in (-\infty, x_1),$$

$$x = 2 \Longrightarrow y(2) = -1 < 0 \Longrightarrow y(x) < 0 \text{ para todo } x \in (x_1, x_2),$$

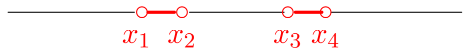
$$x = 3 \Longrightarrow y(3) = 1 > 0 \Longrightarrow y(x) > 0 \text{ para todo } x \in (x_2, x_3),$$

$$x = 4 \Longrightarrow y(4) = -1 < 0 \Longrightarrow y(x) < 0 \text{ para todo } x \in (x_3, x_4),$$

$$x = 5 \Longrightarrow y(5) = 5 > 0 \Longrightarrow y(x) > 0 \text{ para todo } x \in (x_4, +\infty),$$

Polo tanto,

$$A = (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4) = \left( \frac{6 - \sqrt{6}}{2}, \frac{6 - \sqrt{2}}{2} \right) \bigcup \left( \frac{6 + \sqrt{2}}{2}, \frac{6 + \sqrt{6}}{2} \right).$$




A partires da representación gráfica do conxunto $A$ deducimos que:

$$M(A) = [x_4, +\infty)\,, \quad m(A) = (-\infty, x_1]\,,$$

$$A \cap M(A) = \emptyset \Longrightarrow \text{ Non existe máx}(A),$$

$$\sup(A) = \text{mín}\, M(A) = x_4 = \frac{6+\sqrt{6}}{2} \simeq 4.224745,$$

$$A \cap m(A) = \emptyset \Longrightarrow \text{ Non existe mín}(A),$$

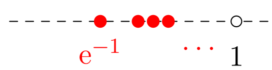
$$\text{ínf}(A) = \text{máx}\, m(A) = x_1 = \frac{6-\sqrt{6}}{2} \simeq 1.775255.$$

**b)** O conxunto $B = \{\mathrm{e}^{-1/n} : n \in \mathbb{N}\}$ está formado polos elementos da sucesión

$$\mathrm{e}^{-1} \simeq 0.367879,\ \mathrm{e}^{-1/2} \simeq 0.606531,\ \mathrm{e}^{-1/3} \simeq 0.716531,\ \mathrm{e}^{-1/4} \simeq 0.778801, \ldots$$

Trátase dunha sucesión crecente e que se aproxima ó valor 1 pero sen chegar a alcanzalo porque

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-1/n} = 1 \quad \text{pero} \quad \mathrm{e}^{-1/n} \neq 1 \, \text{para todo}\ n \in \mathbb{N}.$$




A partires da representación gráfica do conxunto $B$ deducimos que:

$$M(B) = [1, +\infty)\,, \quad m(B) = \left(-\infty, \mathrm{e}^{-1}\right]\,,$$

$$B \cap M(B) = \emptyset \Longrightarrow \text{ Non existe máx}(B),$$

$$\sup(B) = \text{mín}\, M(B) = 1,$$

$$B \cap m(B) = \{\mathrm{e}^{-1}\} \Longrightarrow \text{mín}(B) = \mathrm{e}^{-1},$$

$$\text{ínf}(B) = \text{máx}\, m(B) = \mathrm{e}^{-1}.$$

2. **Estudiar o carácter (converxente ou diverxente) das seguintes series:**

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^2-1}. \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n! \cdot 2^n}.$$

Solución: **a)** Dada $a_n = \frac{n+2}{2n^2-1} > 0$ usaremos o criterio de comparación no límite con $b_n = \frac{1}{n} > 0$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n+2}{2n^2-1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{2n^2-1} \overset{\boxed{\text{grado num.=grado den.}}}{=} \frac{1}{2} > 0,$$

as dúas series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ teñen o mesmo carácter. Posto que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é diverxente, por tratarse da serie armónica con $\alpha = 1$, entón

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^2-1} \quad \textbf{é diverxente.}$$

**b)** Como é unha serie de termos positivos $a_n = \dfrac{3^n}{n! \cdot 2^n} > 0$ podemos intentar aplicar o criterio do cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}}{\dfrac{3^n}{n! \cdot 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot n! \cdot 2^n}{3^n \cdot (n+1)! \cdot 2^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2 \cdot (n+1)} = 0 = L < 1,$$

e polo tanto a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \; n!}{n^n}$ **é converxente**.

3. **Considérese a función $H(x) := \displaystyle\int_0^{x^2} \cos(\operatorname{sen}(t))dt$ para $x \in \mathbb{R}$.**

   *a*) **Calcular $H'(x)$.**

   Solución: Definimos as funcións $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(\operatorname{sen}(t))dt$ e $G(x) = x^2$. Claramente $H = F \circ G$, polo que usando a regra da cadea e o Teorema Fundamental do Cálculo (según o cal $F'(x) = \cos(\operatorname{sen}(x))$) obténse que

   $$H'(x) = (F \circ G)'(x) = F'(G(x))G'(x) = \cos(\operatorname{sen}(x^2))2x.$$

   *b*) **Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{H(x)}{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}$.**

   Solución: Como se trata dunha indeterminación $0/0$ aplicamos a regra de L'Hôpital:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{H(x)}{1 - \mathrm{e}^{-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{H'(x)}{-\mathrm{e}^{-x^2}(-2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{sen}(x^2))2x}{\mathrm{e}^{-x^2}2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{sen}(x^2))}{\mathrm{e}^{-x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

4. **Xustificar a converxencia ou diverxencia das seguintes integrais impropias. En caso de ser converxentes calcular o seu valor:**

   $$a) \quad \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x} dx. \qquad\qquad b) \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^4} dx.$$

Solución: **a)** Pola definición de integral impropia

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b x\mathrm{e}^{-x} dx.$$

Calculamos unha primitiva da función integrando por partes $\left\{ \begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = 1\,dx \\ dv = \mathrm{e}^{-x}dx \Longrightarrow v = -\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right.$ ,

$$\int x\mathrm{e}^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -\mathrm{e}^{-x}dx = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + c.$$

Aplicando a regra de Barrow

$$\int_0^b x\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\Big]_0^b = (-b\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-b}) - (0-1) = -b\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-b} + 1,$$

e por tanto

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} (-b\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-b} + 1) = -\lim_{b\to+\infty} (b\mathrm{e}^{-b}) + \lim_{b\to+\infty} (-\mathrm{e}^{-b} + 1) =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b}{\mathrm{e}^b}\right) + 1 \overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty},\ \text{L'Hôp.}}}{=} -\lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^b}\right) + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Trátase por tanto dunha integral impropia **converxente e o seu valor é** $1$.

**b)** Facendo o cambio de variable $u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx$ obtense

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(u) + c = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x^2) + c.$$

Aplicando agora a definición de integral impropia e a regra de Barrow chegamos a

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^4}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x}{1+x^4}dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{\arctan(x^2)}{2}\Big]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} \frac{\arctan(0)}{2} - \frac{\arctan(a^2)}{2} = 0 - \frac{\pi/2}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Polo tanto a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^4}dx$ é **converxente e seu valor e** $-\dfrac{\pi}{4}$.

5. **Aproximar a solución da ecuación $x = \cos(x^2)$ para $x \in [0,1]$ usando o método de Newton-Raphson con 3 iteracións, comprobando previamente que se cumplen as condicións de converxencia global e tamén elixindo adecuadamente o valor inicial $x_0$.**

Solución: Comprobamos que se cumpren as condicións de converxencia global no intervalo $[0,1]$.

Definimos $f(x) = x - \cos(x^2)$ para $x \in [0,1]$.

i) $f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 - \cos(1) = 0.459698 > 0$. $\boxed{\surd}$

ii) $f'(x) = 1 + 2x\,\mathrm{sen}(x^2) \geq 1$ en $[0,1]$ porque

$$x \in [0,1] \Longrightarrow x^2 \in [0,1] \Longrightarrow \mathrm{sen}(x^2) \geq 0 \Longrightarrow 2x\,\mathrm{sen}(x^2) \geq 0.$$

En particular, $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0,1]$. $\boxed{\surd}$

iii) $f''(x) = 2\,\mathrm{sen}(x^2) + 2x\cos(x^2)2x = 2\,\mathrm{sen}(x^2) + 4x^2\cos(x^2) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$ porque

$$x \in [0,1] \Longrightarrow x^2 \in [0,1] \Longrightarrow \mathrm{sen}(x^2) \geq 0 \text{ e } \cos(x^2) \geq 0,$$

e polo tanto $f''(x) \geq 0$ en $[0,1]$ sendo $f$ convexa en $[0,1]$. $\boxed{\surd}$

Polo tanto cúmplense as condicións de converxencia global do método de Newton-Raphson no intervalo $[0,1]$. Entón partindo dun valor

$$x_0 \in [0,1] \text{ tal que } f(x_0)f''(x_0) > 0,$$

temos garantido que a sucesión xerada polo método de Newton-Raphson converxe. Elexindo por exemplo $x_0 = 1$, porque $f(1) \cdot f''(1) > 0$, a sucesión é

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n - \cos(x_n^2)}{1 + 2x_n\,\mathrm{sen}(x_n^2)}, \text{ para n=0,1,2,...} \end{cases}$$

Realizando 3 iteracións obtense:

$x_0 = 1,$

$x_1 = 1 - \dfrac{f(1)}{f'(1)} = 0.828659,$

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.801692,$

$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \boxed{0.801071}.$

6. **Aproximar o valor da integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}(x)\cos(x)dx$ usando a fórmula de Simpson composta con $n = 2$. Calcular o valor exacto e obter o erro cometido.**

Solución: Os datos que nos proporciona o exercicio son

$$f(x) = \mathrm{sen}(x)\cos(x), \quad a = 0, \quad b = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad n = 2.$$

Entón a lonxitude de cada subintervalo onde aplicaremos a fórmula de Simpson é

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{4},$$

e os nodos da partición que divide o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ en $n = 2$ partes iguais son

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Aplicando a fórmula de Simpson composta con $n = 2$ obtense o seguinte valor aproximado:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{\pi/4}{6}\left(f(0)+4f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+\frac{\pi/4}{6}\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)+4f\left(\frac{3\pi}{8}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{\pi}{24}\left(f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+2f\left(\frac{\pi}{4}\right)+4\left(f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)\right)=\boxed{0.501140}.$$

Facendo o cambio de variable $u=\text{sen}(x) \Longrightarrow du=\cos(x)dx$ obtense a integral indefinida:

$$\int \text{sen}(x)\cos(x)dx=\int u\,du=\frac{u^2}{2}+c=\frac{\text{sen}^2(x)}{2}+c.$$

Agora, usando a regra de Barrow obtense o valor exacto da integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x)\cos(x)dx=\left.\frac{\text{sen}^2(x)}{2}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}=\boxed{0.5}.$$

Desta forma o erro cometido no apartado anterior é:

$$\text{Erro=|ValorExacto-ValorAproximado|=}\boxed{0.001140}.$$