Ejercicios de la sección 2.3 La matriz de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$

(Clase de prácticas: 1, 2, 6, 7, 13, 15, 19, 22, 23, 24, 31, 32, 37, 42.)

En los ejercicios 1 a 10, T es una aplicación lineal. En cada uno de ellos se pide hallar su matriz canónica.

►**1.** $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$, $T(\mathbf{e}_1) = (3, 1, 3, 1)$ y $T(\mathbf{e}_2) = (-5, 2, 0, 0)$, donde $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

►**2.** $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $T(\mathbf{e}_1) = (1, 3)$, $T(\mathbf{e}_2) = (4, -7)$, y $T(\mathbf{e}_3) = (-5, 4)$, donde $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ son las columnas de la matriz identidad 3×3.

3. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es un giro con centro en el origen de $3\pi/2$ radianes (ángulos positivos representan giros en sentido contrario al de las agujas del reloj).

4. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es un giro con centro en el origen de $-\pi/4$ radianes (ángulos negativos representan giros en el sentido de las agujas del reloj).

Pista: $T(\mathbf{e}_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

5. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es una aplicación de cizalladura vertical que transforma $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, pero no modifica al vector $\mathbf{e}_2$.

►**6.** $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es una aplicación de cizalladura horizontal que transforma $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_1$, pero no modifica al vector $\mathbf{e}_1$.

►**7.** $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ primero gira los puntos del plano alrededor del origen un ángulo de $-3\pi/4$ radianes, y luego los refleja en el eje horizontal x_1.

Pista: $T(\mathbf{e}_1) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

8. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ primero refleja los puntos del plano sobre el eje horizontal x_1, y luego sobre la diagonal del primer y tercer cuadrante (la recta de ecuación $x_2 = x_1$).

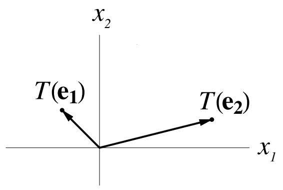
9. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ primero realiza un cizalladura horizontal que transforma $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1$ (sin modificar $\mathbf{e}_2$), y luego realiza una reflexión en la recta de ecuación $x_2 = -x_1$.

10. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ primero realiza una reflexión sobre el eje vertical, x_2, y luego gira el plano con centro en el origen un ángulo de $\pi/2$ radianes.

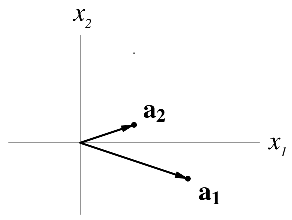
11. Una aplicación lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ primero realiza una reflexión en el eje x_1, y luego realiza una reflexión en el eje x_2. Muestra que T puede describirse como un giro y halla el ángulo de ese giro.

12. Muestra que la aplicación del ejercicio 8 es en realidad un giro con centro en el origen. ¿Cuál es el ángulo de giro?

►**13.** Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la aplicación lineal tal que $T(\mathbf{e}_1)$ y $T(\mathbf{e}_2)$ son los vectores mostrados en la figura. Usa la figura para trazar el vector $T(2, 1)$.



14. Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una aplicación lineal con matriz canónica $A = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$, donde $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ se muestran en la figura. Usa la figura para dibujar la imagen de $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bajo la aplicación T.



En los ejercicios 15 y 16 halla los elementos desconocidos de la matriz, suponiendo que las ecuaciones se cumplen para todos los valores de las variables.

►**15.** $\begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x_1 - 2\,x_3 \\ 4\,x_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -2\,x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$

En los ejercicios 17 a 20, demuestra que T es una aplicación lineal mostrando que se puede expresar como una aplicación matricial. Observa que $x_1, x_2, \ldots$ no son vectores sino números (elementos de vectores).

17. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$.

18. $T(x_1, x_2) = (2x_2 - 3x_1, x_1 - 4x_2, 0, x_1)$.

►**19.** $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3)$.

20. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 3x_3 - 4x_4$ ($T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$).

21. Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una aplicación lineal tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 4x_1 + 5x_2)$. Halla un vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^2$ tal que $T(\mathbf{x}) = (3, 8)$.

►**22.** Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una aplicación lineal tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -x_1 + 3x_2, 3x_1 - 2x_2)$. Halla un vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^2$ tal que $T(\mathbf{x}) = (-1, 4, 9)$.

En los ejercicios 23 y 24, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica cada una de tus respuestas.

Versión de 23 de enero de 2022, 6:47 h.

▶**23.**

(a) Toda transformación lineal es una transformación matricial.

(b) Una aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ está completamente determinada por su efecto sobre las columnas de la matriz identidad $n \times n$.

(c) Toda aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ siempre lleva el origen de $\mathbf{R}^n$ al origen de $\mathbf{R}^m$.

(d) Si $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $S : \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^p$ son aplicaciones lineales, la composición $S \circ T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ existe si y sólo si el número de columnas de la matriz de T es igual al número de filas de la matriz de S.

(e) Toda operación elemental de filas que actúe sobre matrices de n filas determina una aplicación lineal de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$.

(f) En la matriz elemental correspondiente a una operación elemental de filas todos los elementos son iguales a 1 o a 0.

▶**24.**

(a) No toda aplicación lineal de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ tiene por qué ser una aplicación matricial.

(b) Las columnas de la matriz canónica de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ son las imágenes de las columnas de la matriz identidad $n \times n$.

(c) La matriz canónica de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ que refleja los puntos en el eje horizontal, el eje vertical o el origen tiene la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, donde a y b son ± 1.

(d) En la matriz elemental correspondiente a una operación elemental de *intercambio* de filas todos los elementos son iguales a 1 o a 0.

(e) En toda matriz elemental correspondiente a una operación elemental de *reemplazo* en la que a una fila se le suma un múltiplo no nulo de otra distinta todos los elementos de la diagonal son iguales a 1.

En los ejercicios 25 a 28, averigua si la aplicación lineal es inyectiva y si es sobreyectiva. Justifica cada respuesta.

25. La aplicación del ejercicio 17.

26. La aplicación del ejercicio 2.

27. La aplicación del ejercicio 19.

28. La aplicación del ejercicio 14.

En los ejercicios 29 y 30, usa la notación usada en los ejercicios de la sección 1.2 para describir las posibles formas escalonadas de la matriz canónica de una aplicación lineal como la indicada.

29. $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ donde T es inyectiva.

30. $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ donde T es sobreyectiva.

▶**31.** Sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una aplicación lineal cuya matriz canónica es A. Completa el siguiente enunciado para hacerlo verdadero: "T es inyectiva si, y sólo si, A tiene ______ columnas pivote". Explica por qué el enunciado es verdadero.

▶**32.** Sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una aplicación lineal cuya matriz canónica es A. Completa el siguiente enunciado para hacerlo verdadero: "T es sobreyectiva si, y sólo si, A tiene ______ columnas pivote".

33. Demuestra el siguiente teorema: *Sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ la aplicación matricial $T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ para alguna matriz B de orden $m \times n$. Si A es la matriz canónica de T, entonces $A = B$.*
Sugerencia: Muestra que A y B tienen las mismas columnas.

34. ¿Por qué la pregunta de si una aplicación lineal es sobreyectiva es una pregunta de existencia?

35. Si una aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es sobreyectiva, ¿puede afirmarse que exista alguna relación entre m y n? Si T es inyectiva, ¿qué se puede decir de m y n?

36. Sean $S : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ y $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ aplicaciones lineales. Muestra que la aplicación $\mathbf{x} \mapsto T(S(\mathbf{x}))$ de $\mathbf{R}^p$ a $\mathbf{R}^m$ es una aplicación lineal.
Sugerencia: Calcula $T(S(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}))$ para $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbf{R}^p$ y números c y d. Justifica cada paso del cálculo, y explica por qué éste conduce a la conclusión deseada.

En los ejercicios 37 a 40, sea T la aplicación lineal cuya matriz canónica es la dada. En los ejercicios 37 y 38, averigua si T es una aplicación inyectiva. En los ejercicios 39 y 40, averigua si T es una aplicación sobreyectiva. Justifica tus respuestas.

▶**37.** $\begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 & 4 \\ 8 & 3 & -4 & 7 \\ 4 & -9 & 5 & -3 \\ -3 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

38. $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 & -9 \\ 10 & 6 & 16 & -4 \\ 12 & 8 & 12 & 7 \\ -8 & -6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

39. $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 & 7 & 5 \\ 6 & -8 & 5 & 12 & -8 \\ -7 & 10 & -8 & -9 & 14 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & -6 \\ -5 & 6 & -6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

40. $\begin{pmatrix} 9 & 13 & 5 & 6 & -1 \\ 14 & 15 & -7 & -6 & 4 \\ -8 & -9 & 12 & -5 & -9 \\ -5 & -6 & -8 & 9 & 8 \\ 13 & 14 & 15 & 2 & 11 \end{pmatrix}$.

Soluciones a ejercicios seleccionados de la sección 2.3

1. $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $T(2,1) = 2T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2)$. Para dibujarlo basta dibujar el doble de $T(\mathbf{e}_1)$ y completar el paralelogram de $2T(\mathbf{e}_1)$ y $T(\mathbf{e}_2)$.

15. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 5x_2 + 4x_3 \\ x_2 - 6x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

22. Hay que hallar una solución particular del sistema de matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$. Empezamos haciendo las operaciones elementales $F_2 + F_1$, $F_3 - 3F_1$. Luego hacemos $F_3 - 4F_2$ y $F_1 + 2F_2$, con lo que se llega a la forma escalonada reducida $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto un vector de $\mathbf{R}^2$ tal que $T(\mathbf{x}) = (-1, 4, 9)$ es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

23. (a) **Verdadero** (Su matriz es la que tiene por columnas las imágenes de las columnas de la identidad.), (b) **Verdadero** (Es la base de la definición de la matriz canónica de la aplicación lineal.), (c) **Verdadero** (Porque para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}$ y $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{v}) = 0T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.), (d) **Falso** (La condición es $m = q$. La matriz de T es $m \times n$ y la de S, $p \times q$, por tanto núm filas T igual a núm col's S.), (e) **Verdadero** (La aplicación que consiste en que la operación elemental actúe sobre matrices de una sola columna es lineal porque las operaciones elementales de filas conservan las relaciones de dependencia lineal que haya entre las columnas.), (f) **Falso** (Sólo es cierto si corresponde a una operación de intercambio, o a una operación de reemplazo o de reescalado con factor igual a 1, pero en los demás casos hay algún elemento que no es ni 0 ni 1.).

24. (a) **Falso** (Sí lo es. Es aquella en cuya matriz las columnas están determinadas por el efecto de la aplicación lineal sobre las columnas de la matriz identidad.), (b) **Verdadero** (Ver el teorema 2.3.1 "La matriz canónica de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$" y la definición de matriz canónica justa antes del ejercicio de tarea 2.3.1.), (c) **Verdadero** (En el primer caso es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, en el segundo es $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y en el tercero $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), (d) **Verdadero** (Tiene los mismos elementos que una matriz identidad, pero con dos filas intercambiadas.), (e) **Verdadero** (La única forma en que una operación elemental de reemplazo de filas realizada sobre una matriz identidad puede alterar un elemento de la diagonal sería que fuese del tipo $F_i \to F_i + kF_i$, es decir, sumar a una fila un múltiplo de ella misma.).

31. "T es inyectiva si, y sólo si, A tiene n columnas pivote". Por definición, T es inyectiva si, y sólo si todo sistema compatible de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es determinado. Por la linealidad de T eso es equivalente a decir que el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es determinado y esto ocurre si y sólo si este sistema no tiene variables libres, es decir, tiene un pivote en cada columna, lo que es decir que A (una matriz de n columnas) tiene n columnas pivote.

32. "T es sobreyectiva si, y sólo si, A tiene m columnas pivote". Por definición, T es sobreyectiva si, y sólo si todo sistema de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible. Esto ocurre si y sólo si A tiene un pivote en cada fila, lo que es decir que A (una matriz de m filas) tiene m pivotes. Como todos los pivotes están en columnas diferentes, tener m pivotes significa tener m columnas pivote.

37. Hay que averiguar si la matriz dada tiene un pivote en cada columna. Si realizamos las operaciones elementales de filas $F_1 + F_3$, $F_3 + 4F_1$ y $F_4 - 3F_1$ la matriz se transforma en $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene dos filas iguales y por tanto no puede tener 4 posiciones pivote. Luego no puede tener un pivote en cada columna y T no es inyectiva.