INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA MATEMÁTICA

La *Lógica* es la disciplina que se ocupa de los métodos de razonamiento, suministrando reglas y técnicas que nos permiten decidir si una argumentación, una deducción, es correcta o no. Es la base de todo razonamiento matemático y tiene numerosas aplicaciones en las ciencias de la computación (construcción, escritura y verificación de programas, diseño de circuitos de ordenador, ...), en las ciencias físicas y naturales, en las ciencia sociales y en la vida diaria.

1. Proposiciones

1.1. Definiciones.

Definición 1.1.1. Una *proposición* es una oración declarativa que es verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez.

Ejemplo 1.1.2. Son proposiciones:

- El río Miño pasa por Ourense.
- $1 - 100 = 99$
- La suma de dos números positivos es un número positivo.

No son proposiciones:

- ¿Qué hora es?
- Escuchadme.
- $x + 2 = 5$

Denotaremos las proposiciones por las letras minúsculas **p, q, r, s, t, u, ...**

Ejemplo 1.1.3.

$$p: \text{ El río Miño pasa por Ourense.}$$
$$q: \ 1 - 100 = 99$$

Definición 1.1.4. El *valor de verdad de una proposición* es *verdadero* si la proposición es verdadera (V) y es *falso* si la proposición es falsa (F).

Ejemplo 1.1.5. En el ejemplo anterior el valor de verdad de p es V y el de q es F.

Definición 1.1.6. El área de la lógica que se ocupa de las proposiciones y de las reglas para el cálculo de sus valores de verdad se llama *lógica proposicional o cálculo proposicional.*

Definición 1.1.7. Un *operador lógico* es un elemento verbal o escrito que permite formar una proposición (llamada *fórmula* o *proposición molecular* o *proposición compuesta*) a partir de otras (llamadas *proposiciones* o *proposiciones atómicas* o *proposiciones simples*).

Ejemplo 1.1.8. Algunos ejemplos de proposiciones compuestas son:
- Pareces cansado o enfermo.
- Está lloviendo y hace mucho viento.
- No te escucho.
- O vienes al laboratorio regularmente o tienes que realizar una prueba práctica.
- Si no entiendo, pregunto.
- Comeré si, y sólo si, tengo hambre.

1.1.9. En la Tabla 1 se describen los operadores lógicos más importantes.

Operador lógico	Notación	Se lee
Disyunción u O inclusivo	$\vee$	o
Conjunción	$\wedge$	y
Negación	$\neg$	no
O exclusivo	$\oplus$	o ... o ...
Implicación	$\rightarrow$	si ..., entonces ...
Bicondicional o doble implicación	$\leftrightarrow$	... si, y sólo si, ...

Tabla 1: operadores lógicos

Ejercicio 1.1.10. Expresa las proposiciones compuestas del ejemplo anterior utilizando proposiciones simples y conectores lógicos.

1.2. Tablas de verdad.

Definición 1.2.1. Una *tabla de verdad* de una proposición compuesta es una tabla que da los valores de verdad (V ó F) de la proposición en función de los valores de verdad (V ó F) de sus proposiciones componentes atómicas.

A continuación describimos las tablas de verdad de los operadores lógicos.

1.2.2 (*Negación* ($\neg$))**.** Si p es una proposición, entonces $\neg p$ (se lee "no p") es la proposición "no se cumple p".

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabla 2: tabla de verdad de la negación

Ejemplo 1.2.3.

$$p: \text{ Hoy es lunes, } \neg p: \text{ Hoy no es lunes.}$$
$$q: 2+5=7, \ \neg q: 2+5 \neq 7$$

1.2.4 (*Conjunción* ($\wedge$))**.** Si p y q son dos proposiciones, entonces $p \wedge q$ (se lee "p y q") es la proposición "se cumplen p y q".

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 3: tabla de verdad de la conjunción

Ejemplo 1.2.5.

$$p: \text{ Hoy es lunes, } q: \text{ Hoy Llueve.}$$
$$p \wedge q: \text{ Hoy es lunes y llueve.}$$

La proposición $p \wedge q$ sólo es verdadera los lunes con lluvia.

1.2.6 (*Disyunción* ($\vee$)). Si p y q son dos proposiciones, entonces $p \vee q$ (se lee "p o q") es la proposición "se cumple p o se cumple q o ambas".

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 4: tabla de verdad de la disyunción

Ejemplo 1.2.7. En el ejemplo anterior:

$$p \vee q : \text{ Hoy es lunes u hoy llueve.}$$

La proposición $p \vee q$ sólo es falsa los días que ni son lunes ni llueve.

1.2.8 (*O exclusivo* ($\oplus$)). Si p y q son dos proposiciones, entonces $p \oplus q$ (se lee "o p o q") es la proposición "se cumple p o se cumple q, pero no ambas".

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 5: tabla de verdad de la disyunción exclusiva

Ejemplo 1.2.9. En el ejemplo anterior:

$$p \oplus q : \text{ U hoy es lunes u hoy llueve.}$$

La proposición $p \oplus q$ sólo es falsa los días que ni son lunes ni llueve y los lunes que llueve.

1.2.10 (*Implicación* ($\rightarrow$)). Si p y q son dos proposiciones, entonces $p \rightarrow q$ (se lee "si p, entonces q", "p es suficiente para q", "p implica q", "q es necesaria para p" o "q se deduce de p") es la proposición "si p es verdadera, entonces q también". A p se le llama *hipótesis*, *condición suficiente* o *premisa* y a q *conclusión*, *condición necesaria*, *tesis* o *consecuencia*.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 6: tabla de verdad de la implicación

Ejemplo 1.2.11.

$$p: \text{ Hace frío, } q: \text{ Enciendo la calefacción.}$$

$$p \rightarrow q: \text{ Si hace frío, enciendo la calefacción.}$$

La proposición $p \rightarrow q$ sólo es falsa si hace frío y no enciendo la calefacción.

Definición 1.2.12. La implicación $q \rightarrow p$ se llama *recíproca* de $p \rightarrow q$ y la *contra-recíproca* de $p \rightarrow q$ es $\neg q \rightarrow \neg p$.

p	q	$q \rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Tabla 7: tabla de verdad de la implicación recíproca

p	q	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 8: tabla de verdad de la implicación contra-recíproca

En la Sección 2 veremos que una implicación y su contra-recíproca son equivalentes.

Ejemplo 1.2.13. En el ejemplo anterior:

$$q \rightarrow p: \text{ Si enciendo la calefacción, entonces hace frío.}$$

La proposición $q \to p$ sólo es falsa si enciendo la calefacción y no hace frío.

$$\neg q \to \neg p: \text{ Si no enciendo la calefacción, entonces no hace frío.}$$

La proposición $\neg q \to \neg p$ sólo es falsa si hace frío y no enciendo la calefacción.

1.2.14 (*Doble implicación* ($\leftrightarrow$))**.** Si p y q son dos proposiciones, entonces $p \leftrightarrow q$ (se lee "p si, y sólo si, q", "p es necesario y suficiente para q" o "si p, entonces q, y recíprocamente") es la proposición "se cumple p si, y sólo si, se cumple q".

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 9: tabla de verdad de la doble implicación

Ejemplo 1.2.15.

$$p: \text{ Supero la prueba}, q: \text{ Estudio.}$$
$$p \leftrightarrow q: \text{ Supero la prueba si, y sólo si, estudio.}$$

Observación 1.2.16. Combinando operadores lógicos, paréntesis y proposiciones moleculares es posible formar otras proposiciones compuestas y determinar sus valores de verdad utilizando las tablas de verdad.

Ejemplo 1.2.17. La tabla de verdad de la proposición $(p \to q) \wedge (q \to p)$ es:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Tabla 10: tabla de verdad de $(p \to q) \wedge (q \to p)$

Ejercicio 1.2.18. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas:

- $(p \vee \neg q) \to q$
- $(p \vee q) \to (p \wedge q)$
- $(p \vee q) \to (p \oplus q)$
- $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
- $(p \to q) \to (q \to p)$
- $(p \oplus q) \to (p \wedge q)$

1.3. Tautologías, contradicciones y contingencias.

Definición 1.3.1. Una proposición molecular que siempre es verdadera independientemente de los valores de verdad de las fórmulas atómicas que la componen es una *tautología*; si siempres es falsa, se llama *contradicción*. Y si no es ni tautología ni contradicción se llama *contingencia*.

La tabla de verdad de una tautología únicamente tiene valores verdaderos en su última columna, la de una contradicción valores falsos, y la de una contingencia valores falsos y verdaderos.

Ejemplo 1.3.2. Se verifica que:

- $p \vee \neg p$ es una tautología.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Tabla 11: tabla de verdad de $p \vee \neg p$

- $p \wedge \neg p$ es una contradicción.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Tabla 12: tabla de verdad de $p \wedge \neg p$

- $p \to q$ es una contingencia (véase la Tabla 6).

1.3.3 (*Otras tautologías*)**.** Las siguientes implicaciones son tautologías y se usarán en la demostración de resultados en matemáticas y ciencias de la computación (véase la Sección 4).

- $(p \wedge q) \rightarrow p$
- $p \rightarrow (p \vee q)$
- $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
- $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
- $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$
- $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$
- $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
- $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Ejercicio 1.3.4. Construye las tablas de verdad de las anteriores tautologías.

2. Equivalencias lógicas

2.1. Definiciones.

Definición 2.1.1. Dos fórmulas p y q son *lógicamente equivalentes* si $p \leftrightarrow q$ es una tautología. Es decir, p y q son simultáneamente verdaderas o falsas. Se denota $p \equiv q$.

Ejemplo 2.1.2. Las fórmulas $p \rightarrow q$ y $\neg p \vee q$ son lógicamente equivalentes, *i. e.*, $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Tabla 13: tabla de verdad de $p \rightarrow q$ y $\neg p \vee q$

2.2. Equivalencias lógicas relativas a $\neg$, $\vee$ y $\wedge$.

Propiedades 2.2.1. Sean p, q y r proposiciones. Se tienen las siguientes equivalencas lógicas:

- Identidad: $p \wedge V \equiv p$, $p \vee F \equiv p$
- Dominación: $p \vee V \equiv V$, $p \wedge F \equiv F$
- Idempotentes: $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$
- Doble negación: $\neg(\neg p) \equiv p$
- Conmutativas: $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- Absorción: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- Asociativas: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- Distributivas: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- De Morgan: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Ejercicio 2.2.2. Demuestra las equivalencias anteriores.

Ejemplo 2.2.3. Se verifica que:

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)) \\
&\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) \\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) \\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
&\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q)
\end{aligned}$$

2.3. Equivalencias lógicas relativas a $\rightarrow$.

Propiedades 2.3.1. Si p, q y r son proposiciones, se verifican las siguientes equivalencias lógicas:

- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
- $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
- $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
- $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
- $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
- $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
- $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

Ejercicio 2.3.2. Demuestra las equivalencias anteriores.

2.4. Equivalencias lógicas relativas a $\leftrightarrow$.

Propiedades 2.4.1. Sean p y q proposiciones.

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$
- $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Ejercicio 2.4.2. Demuestra las equivalencias anteriores.

3. Predicados y cuantificadores

La afirmación $x + 2 = 5$ no es una proposición, ya que el hecho de que sea verdadera o falsa depende del valor de x. Sin embargo, muchas afirmaciones en matemáticas y en computación son de este tipo.

3.1. Predicados.

Definición 3.1.1. Una sentencia P que alude a una o varias variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se llama *predicado* o *función proposicional* y se denota $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Ejemplo 3.1.2. Son predicados:

- $P(X) : X > 3$, donde X representa a cualquier número real.
- $Q(X, Y) : X + Y = 5$, donde X e Y representan a dos números reales cualesquiera.

Definición 3.1.3. Todo predicado $P(X)$ se puede considerar como una aplicación P que asocia una proposición $P(x)$ a cada elemento x de un cierto conjunto llamado *universo del predicado* o *dominio del predicado.*

Ejemplo 3.1.4. En el ejemplo anterior:

- El universo de P es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
- El universo de Q es el conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Observación 3.1.5. El *valor de verdad de un predicado* puede variar ya que depende de la selección de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Cuando las variables de una función proposicional tomen valores concretos el resultado será una proposición verdadera o falsa.

Ejemplo 3.1.6. En el ejemplo anterior:

- $P(4)$ es verdadera y $P(2)$ es falsa.
- $Q(0, 5)$ es verdadera, $Q(-1, 6)$ es verdadera y $Q(0, \frac{1}{2})$ es falsa.

A partir de ahora y, para simplificar, consideraremos predicados $P(X)$ que dependen únicamente de una variable X.

3.1.7 (*Operadores lógicos y predicados*)**.** Al igual que las proposiciones, los predicados que se apoyan en un mismo universo pueden combinarse mediante operadores lógicos. Por ejemplo:

- El predicado $\neg P(X)$ que asocia a cada elemento x del dominio de P la negación de la proposición $P(x)$, *i. e.*, $\neg P(x)$.
- El predicado $(P \vee Q)(X)$ que asocia a cada elemento x del dominio de P y de Q la conjunción de las proposiciones $P(x)$ y $Q(x)$, *i. e.*, $P(x) \vee Q(x)$.

- El predicado $(P \wedge Q)(X)$ que asocia a cada elemento x del dominio de P y de Q la disyunción de las proposiciones $P(x)$ y $Q(x)$, *i. e.*, $P(x) \wedge Q(x)$.

Ejemplo 3.1.8. Sean P y Q los siguientes predicados con dominio el conjunto de los números naturales:

$$P(X) : X \text{ es un número par,}$$
$$Q(X) : X \text{ es el cuadrado de un número natural.}$$

Entonces:

- $\neg P(X) : X$ no es un número par.
- $(P \vee Q)(X) : X$ es par o es el cuadrado de un número natural.
- $(P \wedge Q)(X) : X$ es par y es el cuadrado de un número natural.

Ejercicio 3.1.9. Sean P y Q los siguientes predicados con universo el conjunto de los gallegos:

$$P(X) : X \text{ vive en Ourense,}$$
$$Q(X) : X \text{ trabaja en Ourense.}$$

Expresa en lenguaje natural:

- $\neg P(X)$
- $(P \vee Q)(X)$
- $(P \wedge Q)(X)$

3.2. Cuantificadores. Cuando a todas las variables de una proposición proposicional se le han asignado valores, la sentencia resultante se convierte en una proposición con un determinado valor de verdad (V ó F). Pero hay otra forma importante de conseguir una proposición a partir de un predicado: la cuantificación.

Definición 3.2.1. Sea $P(X)$ un predicado en la variable X. La *cuantificación universal* de $P(X)$ es la proposición "$P(x)$ es verdadera para todo los valores x del dominio".

Se denota $\forall\, x$, $P(x)$ y se lee "para todo x, $P(x)$", "para cada x, $P(x)$" o "para cualquier x, $P(x)$". Y para especificar el universo U del predicado escribimos $\forall\, x$ en U, $P(x)$ ($\forall\, x \in U$, $P(x)$).

El símbolo $\forall$ se llama *cuantificador universal.*

Ejemplo 3.2.2. En el Ejemplo 3.1.8:

- $\forall\, x \in \mathbb{N},\ P(x)$: todo número natural es par.
- $\forall\, x \in \mathbb{N},\ Q(x)$: todo número natural es el cuadrado de un número natural.

3.2.3 (*Valores de verdad de la cuantificación universal*)**.** Para mostrar que una proposición de la forma $\forall\, x,\ P(x)$ es falsa, sólo necesitamos encontrar un valor x del dominio para el cual $P(x)$ sea falsa. Este valor x se llama *contraejemplo* de la sentencia $\forall\, x,\ P(x)$. Y para mostrar que $\forall\, x,\ P(x)$ es verdadera hay que probar que $P(x)$ es verdadera para todos los valores x en el dominio.

Ejemplo 3.2.4. En el Ejemplo 3.1.8:

- $\forall\, x \in \mathbb{N},\ P(x)$ es falsa ya que el número 3 es natural y no es par.
- $\forall\, x \in \mathbb{N},\ Q(x)$ es falsa ya que el número 3 es natural y no es el cuadrado de un número natural.

Ejercicio 3.2.5. Determina el valor de verdad de:

- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x < 100 \Rightarrow x - 1 < 100$
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq 0 \Rightarrow x \leq x^2$

Definición 3.2.6. La *cuantificación existencial* de $P(X)$ es la proposición "existe un elemento x en el dominio tal que $P(x)$ es verdadera".

Se denota $\exists\, x,\ P(x)$ y se lee "hay un x tal que $P(x)$", "hay al menos un x tal que $P(x)$" o "para algún x, $P(x)$". Y para especificar el universo U del predicado escribimos $\exists\, x$ en U, $P(x)$ ($\exists\, x \in U,\ P(x)$).

El símbolo $\exists$ se llama *cuantificador existencial.*

Ejemplo 3.2.7. En el Ejemplo 3.1.8:

- $\exists\, x \in \mathbb{N},\ P(x)$: existe (al menos) un número natural que es par.
- $\exists\, x \in \mathbb{N},\ Q(x)$: existe (al menos) un número natural que es el cuadrado de un número natural.

3.2.8 (*Valores de verdad de la cuantificación existencial*)**.** Para mostrar que una proposición de la forma $\exists\, x,\ P(x)$ es falsa, hay que mostrar que $P(x)$ es falsa para todos los valores x del dominio; y para mostrar que es verdadera hay que encontrar un valor x en el dominio para el cual $P(x)$ sea verdadera.

Ejemplo 3.2.9. En el Ejemplo 3.1.8:

- $\exists\, x \in \mathbb{N},\ P(x)$: es verdadera, ya que el número 2 es natural y par.

- $\exists\, x \in \mathbb{N},\ Q(x)$: es verdadera, ya que el número 4 es natural y $4 = 2^2$.

Ejercicio 3.2.10. Determina el valor de verdad de:

- $\exists\, n \in \mathbb{N},\ n^2 < n$
- $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{x^2+1} > 1$

Observación 3.2.11. Cuando un predicado depende de varias variables se pueden utilizar cuantificadores (universal y/o existencial) para cada una de las variables (*cuantificadores anidados*). Si $P(X, Y)$ es un predicado se pueden presentar las siguientes situaciones:

- $\forall\, x,\ \forall\, y,\ P(x, y)$: "para todo par x, y $P(x, y)$ es verdadera".
- $\exists\, x,\ \exists\, y,\ P(x, y)$: "existe un par x, y para el cual $P(x, y)$ es verdadera".
- $\forall\, x,\ \exists\, y,\ P(x, y)$: "para todo x hay un y para el cual $P(x, y)$ es verdadera".
- $\exists\, x,\ \forall\, y,\ P(x, y)$: "existe un x para el cual $P(x, y)$ es verdadera para todo y".

Para cada una de las variables se puede especificar el universo.

Ejemplo 3.2.12. Supongamos que el dominio de las variables reales x e y consiste en todos los números reales.

- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$: la suma de dos números reales es conmutativa.
- $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x + y = y$: existencia del elemento neutro para la suma (x es el 0).
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x = 0$: existencia del elemento opuesto para la suma (y es $-x$).
- $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = \frac{x}{y} = -1$

Ejercicio 3.2.13. Expresa la proposición "existe (al menos) un número natural que es el cuadrado de un número natural" utilizando dos variables.

Propiedad 3.2.14 (*Conmutatividad de los cuantificadores anidados*)**.** Si $P(x, y)$ es un predicado, entonces:

- $\forall\, x, \forall\, y, P(x, y) \equiv \forall\, y, \forall\, x, P(x, y) \equiv \forall\, (x, y), P(x, y)$
- $\exists\, x, \exists\, y, P(x, y) \equiv \exists\, y, \exists\, x, P(x, y) \equiv \exists\, (x, y), P(x, y)$

Observación 3.2.15. ¡Cuidado! En general NO se verifica que:

$$\exists\, y, \forall\, x, P(x,y) \equiv \forall\, x, \exists\, y, P(x,y)$$

Ejemplo 3.2.16. Sea $P(X,Y)$ la sentencia "$X+Y=0$", con universo el conjunto de los números reales. Estudia el valor de verdad de:

- $\exists\, y \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}, P(x,y)$
  Hay un número real y tal que para todo número real x se verifica que $x+y=0$. Esta sentencia es falsa.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, P(x,y)$
  Para todo número real x existe un número real y tal que $x+y=0$. Esta sentencia es verdadera (y sería $-x$).

Ejercicio 3.2.17. Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones. El universo de las variables x e y es $\mathbb{R}$.

- $\forall\, x, \forall\, y, x^2 > y+1$
- $\exists\, x, \forall\, y, x^2 > y+1$
- $\forall\, x, \exists\, y, x^2 > y+1$
- $\exists\, x, \exists\, y, x^2 > y+1$

3.3. Álgebra de predicados.

Definición 3.3.1. El *álgebra de predicados* se ocupa de las reglas que relacionan los cuantificadores entre sí y con los conectores lógicos.

Propiedades 3.3.2 (*Negación*)**.** Sea $P(x)$ un predicado. Entonces:

- $\neg(\forall\, x, P(x)) \equiv \exists\, x, \neg P(x)$
- $\neg(\exists\, x, P(x)) \equiv \forall\, x, \neg P(x)$

Ejemplo 3.3.3. Sea $P(X)$ el predicado "X ha cursado una asignatura de francés" con universo todos los alumnos de 1º de la E.S.E.I.

- $\neg(\forall\, x, P(x))$: hay al menos un alumno que no ha cursado una asignatura de francés.
- $\neg(\exists\, x, P(x))$: ningún alumno ha cursado una asignatura de francés.

Ejercicio 3.3.4. Niega las siguientes proposiciones:

- $\exists\, x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x^2+1} < 1$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 < x$

Propiedades 3.3.5 (*Disyunción*)**.** Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos predicados. Entonces:

- $\exists\, x, P(x) \vee Q(x) \equiv (\exists\, x, P(x)) \vee (\exists\, x, Q(x))$

Observación 3.3.6. ¡Cuidado! En general NO se verifica que:

$$\forall\, x,\ P(x) \vee Q(x) \equiv (\forall\, x,\ P(x)) \vee (\forall\, x,\ Q(x))$$

Ejemplo 3.3.7. Consideremos los siguientes predicados con universo el alfabeto:

$$P(X) : X \text{ es una vocal,}$$
$$Q(X) : X \text{ es una consonante.}$$

- $\forall\, x,\ P(x) \vee Q(x)$: toda letra es vocal o consonante.
- $(\forall\, x,\ P(x)) \vee (\forall\, x,\ Q(x))$: todas las letras son vocales o todas las letras son consonantes.

Propiedades 3.3.8 (*Conjunción*)**.** Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos predicados. Entonces:

- $\forall\, x,\ P(x) \wedge Q(x) \equiv (\forall\, x,\ P(x)) \wedge (\forall\, x,\ Q(x))$

Observación 3.3.9. ¡Cuidado! En general NO se verifica que:

$$\exists\, x,\ P(x) \wedge Q(x) \equiv (\exists\, x,\ P(x)) \wedge (\exists\, x,\ Q(x))$$

Ejemplo 3.3.10. En el Ejemplo 3.3.7:

- $\exists\, x,\ P(x) \wedge Q(x)$: Existe una letra que es vocal y consonante.
- $(\exists\, x,\ P(x)) \wedge (\exists\, x,\ Q(x))$: Existe una letra que es vocal y existe una letra que es consonante.

Definición 3.3.11. La *unicidad* de la cuantificación existencial de $P(X)$ es la proposición "existe un único elemento x en el dominio tal que $P(x)$ es verdadera".

Se denota $\exists^{\bullet}\, x,\ P(x)$ o $\exists!\, x,\ P(x)$ y se lee "hay un único x tal que $P(x)$".

Se verifica que:

$$\exists^{\bullet}\, x,\ P(x) \equiv (\exists\, x,\ P(x)) \wedge [\forall\, y,\ \forall\, z,\ (P(y) \wedge P(z)) \rightarrow (y = z)]$$

Ejemplo 3.3.12. Sea $P(X) = X + X = 0$ con dominio el conjunto de los números reales. Entonces:

$$\exists^{\bullet}\, x \in \mathbb{R},\ P(x)$$

se expresa en lenguaje natural: existe un único número real x tal que $x + x = 0$. La sentencia es verdadera y x sería el número 0.

Propiedades 3.3.13 (*Implicaciones*)**.** Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos predicados. Entonces:

- $\exists\, x,\ (P(x) \to Q(x)) \equiv (\forall\, x,\ P(x)) \to (\exists\, x,\ Q(x))$
- $(\exists\, x,\ P(x)) \to (\forall\, x,\ Q(x)) \equiv \forall\, x,\ (P(x) \to Q(x))$

Propiedades 3.3.14 (*Tautologías*)**.** Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos predicados. Son tautologías:

- $((\forall\, x,\ P(x)) \vee (\forall\, x,\ Q(x))) \to (\forall\, x,\ P(x) \vee Q(x))$
- $(\exists\, x,\ P(x) \wedge Q(x)) \to ((\exists\, x,\ P(x)) \wedge (\exists\, x,\ Q(x)))$

Ejercicio 3.3.15. Sean

$$P(x) : x \text{ es un número primo,}$$
$$Q(x) : x \text{ es un número par,}$$

dos predicados en el dominio de los números naturales. Expresa en lenguaje natural las siguientes expresiones y estudia su valor de verdad:

- $\exists\, x,\ P(x) \vee Q(x)$
- $\forall\, x,\ P(x) \vee Q(x)$
- $(\forall\, x,\ P(x)) \vee (\forall\, x,\ Q(x))$
- $\forall\, x,\ P(x) \wedge Q(x)$
- $\exists\, x,\ P(x) \wedge Q(x)$
- $(\exists\, x,\ P(x)) \wedge (\exists\, x,\ Q(x))$
- $\exists^{\bullet}\, x,\ P(x)$

4. Razonamiento deductivo

4.1. Reglas de inferencia.

Definición 4.1.1. Los argumentos basados en tautologías son métodos de razonamiento universalmente correctos. Son las *reglas de inferencia.* Las reglas de inferencia se basan en tautologías de la forma

$$\text{Hipótesis 1} \wedge \text{Hipótesis 2} \wedge \ldots \to \text{Conclusión}$$

Usaremos la siguiente notación para las reglas de inferencia:

$$\begin{array}{c} \text{Hipótesis 1} \\ \text{Hipótesis 2} \\ \ldots \\ \hline \therefore \text{ Conclusión} \end{array}$$

El símbolo $\therefore$ se lee “por lo tanto”, “luego”, etc.

Las reglas de inferencia más frecuentes se indican en la Tabla 14.

Regla	Tautología	Nombre
$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	$p \to (p \vee q)$	*adición*
$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	$(p \wedge q) \to p$	*simplificación*
$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$	$((p) \wedge (q)) \to p \wedge q$	*conjunción*
$\begin{array}{c} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$	*modus ponens*
$\begin{array}{c} \neg q \\ p \to q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$	*modus tollens*
$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$	*silogismo hipotético*
$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p)) \to q$	*silogismo disyuntivo*
$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (q \vee r)$	*ley de resolución*
$\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ \hline \therefore (p \to q) \wedge (q \to p) \end{array}$	$(p \leftrightarrow q) \to ((p \to q) \wedge (q \to p))$	
$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to p \\ \hline \therefore p \leftrightarrow q \end{array}$	$((p \to q) \wedge (q \to p)) \to (p \leftrightarrow q)$	
$\begin{array}{c} p \to q \\ \hline \therefore \neg q \to \neg p \end{array}$	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	

Tabla 14: Reglas de inferencia

Ejemplo 4.1.2. El argumento

> "Si hace frío, enciendo la calefacción. Hace frío, luego enciendo la calefacción."

se basa en la regla de inferencia *modus ponens*:

$$\begin{aligned} p &: \text{ Hace frío,} \\ q &: \text{ Enciendo la calefacción.} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{p} \rightarrow \text{q} \\ \text{p} \\ \hline \therefore \text{q} \end{array}$$

Ejercicio 4.1.3. Determina en qué regla de inferencia se basan los siguientes argumentos:

- Hace frío. Por tanto, hace frío o llueve.
- Hace frío y llueve. Por tanto, llueve.
- Hace frío. Llueve. Por tanto, hace frío y llueve.
- Si hace frío, enciendo la calefacción. Si enciendo la calefacción, el consumo de electricidad aumenta. Si hace frío, el consumo de electricidad aumenta.
- Si hace frío, enciendo la calefacción. No enciendo la calefacción, luego no hace frío.
- Llueve o hace frío. No hace frío. Por lo tanto, llueve.
- Voy al cine o voy a la piscina. No voy al cine o voy a la playa. Por lo tanto, voy a la piscina o voy a la playa
- Bebo si, y sólo si, tengo sed. Por lo tanto, si bebo, tengo sed y si tengo sed, bebo.
- Si bebo, tengo sed y si tengo sed, bebo. Por lo tanto, bebo si, y sólo si, tengo sed.

Propiedades 4.1.4. Para $P(X)$ un predicado y c un elemento en el universo de P, se tienen las *reglas de inferencia para sentencias cuantificadas* indicadas en la Tabla 15.

Estas reglas de inferencia se usan con frecuencia en los argumentos matemáticos, muchas veces sin mencionarlas explícitamente.

Regla	Nombre
$\dfrac{\forall x\, P(x)}{\therefore P(c)}$	particularización universal
$\dfrac{P(c),\ c \text{ arbitrario}}{\therefore \forall x\, P(x)}$	generalización universal
$\dfrac{\exists x\, P(x)}{\therefore P(c), \text{ para algún elemento } c}$	particularización existencial
$\dfrac{P(c), \text{ para algún elemento } c}{\therefore \exists x\, P(x)}$	generalización existencial

Tabla 15: Reglas de inferencia para sentencias cuantificadas

Ejemplo 4.1.5. El argumento

> "Todos los alumnos de Fundamentos Matemáticos para la Informática (FMI) están matriculados en Ingeniería Informática. María es una alumna de FMI. Entonces María está matriculada en Ingeniería Informática."

se basa en la regla de inferencia *particularización universal*:

$P(x)$: x está matriculado en Ingeniería Informática,

$c =$ María.

$$\frac{\forall\, x\, P(x)}{\therefore\, P(c)}$$

Ejercicio 4.1.6. Determina en qué regla de inferencia se basan los siguientes argumentos:

- Un estudiante de esta clase no ha leído el libro. Luego, alguien no ha leído el libro.
- Todos los estudiantes de la clase entienden lógica. Xavier es un estudiante de la clase. Por tanto, Xavier entiende lógica.
- Todos los estudiantes de Ingeniería Informática cursan FMI. María cursa FMI. Por tanto, María es estudiante de Ingeniería Informática.

4.2. Razonamientos válidos y falacias.

Definición 4.2.1. Un argumento $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q$ es *válido* si siempre que $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ sean todas verdaderas, entonces Q también sea verdadera.

Observa que no decimos que la conclusión Q sea verdadera; sino que si se garantizan las hipótesis, entonces se tiene garantizada la conclusión. Un argumento es válido debido a su foma, no a su contenido.

Para evitar razonamientos incorrectos, se debe mostrar en cada paso cómo se llega de un razonamiento a otro, razonando explícitamente cada paso que se ha dado.

Ejemplo 4.2.2. El razonamiento

> "Fumar es saludable. Si fumar es saludable, entonces los cigarrillos son recetados por los médicos. Entonces los cigarrillos son recetados por los médicos."

es válido, ya que se basa en la regla de inferencia *modus ponens*:

p : Fumar es saludable,

q : Los cigarrillos son recetados por los médicos.

$$\begin{array}{c} \mathrm{p} \\ \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q} \\ \hline \therefore \mathrm{q} \end{array}$$

Ejercicio 4.2.3. Determina si los siguientes argumentos son válidos:

- Si bajan los impuestos, entonces se elevan los ingresos. Los ingresos se elevan. Entonces bajan los impuestos.
- Si $2 = 3$, entonces piloté un avión. $2 = 3$. Entonces piloté un avión.
- Si fumar es saludable, entonces los cigarrillos son recetados por los médicos. Fumar no es saludable. Entonces los cigarrillos no son recetados por los médicos.
- Si $2 = 3$, entonces piloté un avión. Piloté un avión. Entonces $2 = 3$.

Definición 4.2.4. Las *falacias* son una forma de razonamiento incorrecto basadas en contingencias.

Algunas falacias frecuentes son:

- *Falacia de afirmar la conclusión:* $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$
- *Falacia de negar la hipótesis*: $[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$

Ejemplo 4.2.5. En el Ejercicio 4.2.3:

- El último razonamiento es la falacia de afirmar la conclusión.
- El tercer razonamiento es la falacia de negar la hipótesis.

Ejercicio 4.2.6. Estudia la validez del siguiente argumento: "Condición suficiente para que yo apruebe es que yo sepa o que el profesor no sea justo. Yo no se y el profesor no es justo. Por lo tanto, suspendo".

5. Métodos de demostración

5.1. Definiciones. Un sistema matemático consta de axiomas, definiciones y términos no definidos. Se suponen verdaderos los axiomas; las definiciones se utilizan para crear conceptos nuevos en términos de los ya existentes; algunos términos no se definen de forma explícita, sino que se definen de forma implícita mediante axiomas. Dentro de un sistema matemático es posible deducir teoremas.

Definición 5.1.1. Un *teorema* es una sentencia que se puede verificar que es verdadera (*i.e.* su valor de verdad es verdadero). El enunciado de un teorema puede ser de la forma:

- $p \to q$ (recordemos que p es la *hipótesis* y q la *conclusión*)
- $p \leftrightarrow q$
- $\exists\, x\, P(x)$
- $\forall\, x\, P(x)$

Ejemplo 5.1.2. Algunos ejemplos de teoremas son:

- Si $3n + 2$ es impar, entonces n es impar.
- El entero n impar si, y sólo si, n^2 es un entero impar.
- Existen dos números irracionales x e y tales que x^y es racional.
- $\forall\, n$ con n un número natural positivo, se verifica que $n < 2^n$.

Definición 5.1.3. Se distinguen los siguientes *tipos de teoremas*:

- Una *proposición* es un teorema de menor importancia en el discurso. Cuando tenemos varios resultados y queremos resaltar la importancia de uno de elllos, se llama teorema y los otros proposiciones.
- Un *lema* es un teorema sencillo utilizado en la demostración de otros teoremas.
- Un *corolario* es una proposición que se puede establecer directamente a partir de un teorema que ya ha sido demostrado.

Definición 5.1.4. Una *demostración* de un teorema es un argumento formado por una secuencia de sentencias, mediante el cual se prueba que el teorema es verdadero. La demostración de un teorema debe comenzar con las hipótesis y, mediante axiomas o postulados y teoremas demostrados previamente, se derivan sentencias nuevas, justificando cada paso por alguna regla de inferencia, hasta llegar a la conclusión.

Las reglas de inferencia se usan para deducir conclusiones a partir de otras afirmaciones y son las que enlazan los pasos de una demostración.

5.2. Métodos de demostración. Los métodos de demostración son importantes no sólo porque se usan para demostrar teoremas matemáticos, sino por sus muchas aplicaciones en ciencias de la computación (verificación de que un programa de ordenador es correcto, seguridad de los sistemas operativos, inferencias en inteligencia artificial, consistencia de las especificaciones de un sistema, ...).

5.2.1. Consideremos un teorema de la forma “Si se cumple p, entonces se cumple q”:

$$\boxed{\textbf{Teorema}: \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \qquad \text{(puede ocurrir que } \mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{p_1} \wedge \mathbf{p_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{p_n}\text{)}}$$

Entre las técnicas de demostración de este tipo de teoremas destacamos:

- Demostración directa.
- Demostración indirecta: paso al contra-recíproco.
- Demostración por contradicción: reducción al absurdo.
- Demostración vacua.
- Demostración trivial.

A continuación se explican cada una de estas técnicas.

5.2.2 (*Demostración directa*)**.** Suponemos que p es verdadera y se utilizan las reglas de inferencia, axiomas y teoremas ya demostrados para demostrar que q también es verdadera.

Ejemplo 5.2.3. Demuestra la proposición: “Si n es un entero impar, entonces n^2 es un entero impar”.
Demostración.

$$n \text{ es impar } \Rightarrow n = 2k+1, \text{ para algún número entero } k \Rightarrow$$
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2 \text{ es impar.}$$

Observa que un corolario de este resultado sería: “Si n es un entero tal que n^2 es par, entonces n es par”.

5.2.4 (*Demostración indirecta: paso al contra-recíproco*)**.** Como $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$, el teorema se puede demostrar viendo que el contra-recíproco es verdadero. A su vez, este se puede probar directamente o mediante otra técnica.

Ejemplo 5.2.5. Demuestra la proposición: “Si $3n+2$ es un entero impar, entonces n es un entero impar”.

Demostración. Por paso al contra-recíproco veamos que si n es un entero par, entonces $3n+2$ es un entero par.

$$n \text{ es par } \Rightarrow n = 2k, \text{ para algún número entero } k \Rightarrow$$
$$3n+2 = 3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1) \Rightarrow 3n+2 \text{ es par.}$$

5.2.6 (*Demostración por contradicción: reducción al absurdo*)**.** Se basa en la tautología $p \to q \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to F]$, *i.e.* $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to F$. Para probar que $p \to q$ supongamos que $\neg q$ es verdadera (*i.e.* q es falsa) y que p es verdadera. Basta ver que $p \wedge \neg q$ implica una contradicción (F).

En efecto, si $p \wedge \neg q$ implica una contradicción (*i.e.* $p \wedge \neg q \to F$ es verdadera), entonces o p es falsa o $\neg q$ es falsa. Con lo cual, como p es verdadera, $\neg q$ es falsa y, por lo tanto, q es verdadera.

Ejemplo 5.2.7.

$$Teorema: \sqrt{2} \text{ es irracional.}$$

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{con } p \text{ y } q \neq 0 \text{ números enteros sin factores comunes} \Rightarrow$$
$$2 = (\frac{p}{q})^2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ es par } \Rightarrow p \text{ es par } \Rightarrow$$
$$p = 2n, \text{con } n \text{ un número entero } \underset{p^2=2q^2}{\Rightarrow} 4n^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2n^2 = q^2 \Rightarrow$$
$$q^2 \text{ es par } \Rightarrow q \text{ es par } \Rightarrow$$
$$\text{contradicción, ya que } p \text{ y } q \text{ no tienen factores comunes.}$$

5.2.8 (*Demostración vacua*)**.** Supongamos que p es falsa, entonces $p \to q$ es verdadera.

Ejemplo 5.2.9. Sea n un número entero. Si $P(n)$ es la proposición "Si $n > 1$ es impar, entonces $n^2 > n$", demuestra que la proposición $P(0)$ es verdadera.

Demostración. La proposición $P(0)$ es la implicación "Si $0 > 1$ es impar, entonces $0^2 > 0$". Como la hipótesis es falsa, la implicación es automáticamente verdadera.

5.2.10 (*Demostración trivial*)**.** Supongamos que q es verdadera, entonces $p \to q$ es verdadera.

Ejemplo 5.2.11. Sea n un número entero. Si $P(n)$ es la proposición "Si a y b son enteros positivos, entonces $a^n \geq b^n$", demuestra que la proposición $P(0)$ es verdadera.

Demostración. La proposición $P(0)$ es la implicación "Si a y b son enteros positivos, entonces $a^0 \geq b^0$". Como $a^0 = b^0 = 1$, la conclusión de $P(0)$ es verdadera (y no se ha usado la hipótesis).

Ejercicio 5.2.12. Demuestra que si n es un entero y $n^3 + 5$ es impar, entonces n es par usando:

- Una demostración directa.
- Una demostración indirecta.
- Una demostración por reducción al absurdo.

5.2.13. Supongamos ahora que $p \leftrightarrow p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$, *i.e.*, el teorema es de la forma

$$\boxed{\textbf{Teorema}: \mathbf{p_1} \vee \mathbf{p_2} \vee \ldots \vee \mathbf{p_n} \to \mathbf{q}}$$

Para demostrar este tipo de teoremas se usa la técnica de demostración por casos.

5.2.14 (*Demostración por casos*)**.** La técncia se basa en la tautología

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q] \leftrightarrow [(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)]$$

y, por lo tanto, consiste en probar que $p_1 \to q$, $p_2 \to q$, ... y $p_n \to q$.

Ejemplo 5.2.15. Demuestra que si x e y son números reales, entonces $|xy| = |x||y|$.

Demostración.

- Si x e y son positivos, xy es positivo y, por lo tanto, $|xy| = xy = |x||y|$, ya que $x = |x|$ e $y = |y|$.
- Si x e y son negativos, xy es positivo y, por lo tanto, $|xy| = xy = (-x) \cdot (-y) = |x||y|$, ya que $-x = |x|$ y $-y = |y|$.
- Si x es positivo e y es negativo, xy es negativo y, por lo tanto, $|xy| = -xy = x \cdot (-y) = |x||y|$, ya que $x = |x|$ y $-y = |y|$.
- Si x es negativo e y es positivo, xy es negativo y, por lo tanto, $|xy| = -xy = (-x) \cdot y = |x||y|$, ya que $-x = |x|$ e $y = |y|$.

5.2.16. Consideremos un teorema de la forma

$$\boxed{\textbf{Teorema}: \mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}}$$

Para probar este tipo de teorema se utiliza la técnica de demostración por equivalencia.

5.2.17 (*Demostración por equivalencia*)**.** El método se fundamenta en la tautología

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \land (q \to p)]$$

y, por lo tanto, se reduce a probar que $p \to q$ y $q \to p$.

Ejemplo 5.2.18. Demuestra que "El entero n impar si, y sólo si, n^2 es un entero impar".

Demostración.

$\Rightarrow$ Esta implicación se ha probado en un ejemplo anterior.

$\Leftarrow$ Por paso al contra-recíproco, probemos que si n es un entero par entonces n^2 es par.

$$n \text{ par } \Rightarrow n = 2k \text{ para algún entero } k \Rightarrow$$
$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 \text{ es par.}$$

5.2.19. Supongamos que el teorema es de la forma

$$\boxed{\textbf{Teorema}: \mathbf{p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n}}$$

Para demostrarlo se usa el método siguiente.

5.2.20 (*Demostración de varias equivalencias*)**.** La técnica se basa en la tautología

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \to p_2) \land (p_2 \to p_3) \land \ldots \land (p_n \to p_1)]$$

y, por lo tanto, la demostración consiste en mostrar que $p_1 \to p_2$, $p_2 \to p_3$, ... y $p_n \to p_1$.

Ejemplo 5.2.21. Muestra que las siguientes sentencias son equivalentes:

1. n es un entero par.
2. $n - 1$ es un entero impar.
3. n^2 es un entero par.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$n \text{ par } \Rightarrow n = 2k \text{ para algún entero } k \Rightarrow$$
$$n - 1 = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1 \Rightarrow n - 1 \text{ impar.}$$

(2) $\Rightarrow$ (3)

$n-1$ impar $\Rightarrow n-1=2k+1$ para algún entero $k \Rightarrow$

$n=2k+2=2(k+1) \Rightarrow n^2=[2(k+1)]^2=4(k+1)^2 \Rightarrow$

n^2 par.

(3) $\Rightarrow$ (1) Por paso al contra-recíproco, basta probar que si n es impar entonces n^2 es impar. Y esta implicación ya ha sido probada en un ejemplo anterior.

Ejercicio 5.2.22. Demuestra que estas tres sentencias son equivalentes, donde a y b son números reales:

- a es menor que b.
- El valor medio de a y b es mayor que a.
- El valor medio de a y b es menor que b.

5.2.23. Supongamos que el teorema es de la forma

$$\boxed{\textbf{Teorema}: \exists\mathbf{x},\ \mathbf{P}(\mathbf{x})}$$

Se distinguen dos técnicas de demostración de existencia: la constructiva y la no constructiva.

5.2.24 (*Demostración de existencia*)**.**

- Demostración constructiva: encontrar un elemento a tal que $P(a)$ es verdadera.
- Demostración no constructiva: por ejemplo, por reducción al absurdo, *i.e.*, mostrando que $\neg(\exists\, x,\ P(x))$ implica una contradicción.

Ejemplo 5.2.25. Demuestra que: "Hay un entero positivo que se puede poner de dos formas diferentes como suma de cubos de enteros positivos".

Demostración. Tras muchos cálculos se encuentra que $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$.

Ejemplo 5.2.26. Demuestra que: "Existen dos números irracionales x e y tales que x^y es racional".

Demostración. Por un ejemplo anterior sabemos que $\sqrt{2}$ es irracional. Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional, ya estaría. En caso contrario, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional y tomando $x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y=\sqrt{2}$ resulta que:

$$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

5.2.27. Consideremos un teorema de la forma

$$\boxed{\textbf{Teorema} : \exists^{\bullet}\, \mathbf{x},\ \mathbf{P}(\mathbf{x})}$$

5.2.28 (*Demostración de unicidad*)**.** Para demostrar este teorema debemos realizar dos pasos:

1. Demostrar la existencia (ver 5.2.24).
2. Demostrar la unicidad: para ello hay que mostrar que si $y \neq x$ entonces no se cumple $P(y)$. Es decir:

$$(\exists\, x,\ P(x)) \wedge (\forall\, y\, (y \neq x \to \neg P(y)))$$

Ejemplo 5.2.29. Muestra que "Todo número entero tiene un único elemento opuesto".

Demostración.

Existencia: si p es un número entero $-p$ es su opuesto ya que $p+(-p) = 0$.

Unicidad: supongamos que existe un número entero $r \neq -p$ tal que $p + r = 0$. Entonces:

$$p + r = 0 = p + (-p) \Rightarrow p + r - p = -p \Rightarrow r = -p$$

5.2.30 (*Contraejemplos*)**.** Si creemos que una sentencia de la forma $\forall\, x,\ P(x)$ es falsa, o bien no conseguimos encontrar una demostración, buscamos un contraejemplo.

Ejemplo 5.2.31. Muestra que la siguiente afirmación es falsa: "Todo entero positivo es la suma de los cuadrados de tres enteros".

El número 7 es un contraejemplo ya que no se puede escribir como suma de los cuadrados de tres enteros. En efecto, sólo podrían considerarse los cuadrados que no excedan de 7, que son 0, 1 y 4. Y utilizando estos tres cuadrados nunca se obtiene el 7.

5.2.32. Supongamos un teorema de la forma

$$\boxed{\textbf{Teorema} : \forall\, \mathbf{n},\ \mathbf{P}(\mathbf{n})}$$

donde el dominio es el conjunto de los números enteros n tales que $n \geq n_0$ para un número entero n_0 fijo.

Para demostrar este tipo de enunciados se usa la inducción matemática.

5.2.33 (*Inducción matemática*)**.** La inducción matemática se basa en la tautología:

$$[P(n_0) \wedge (\forall\, k,\, P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall\, n,\, P(n)$$

Por lo tanto, en toda demostracción por inducción se deben realizar los siguientes pasos:

- Paso base: Se demuestra que $P(n_0)$ es verdadera.
- Paso de inducción: Se demuestra que $P(k) \rightarrow P(k+1)$ es una tautología, $\forall\, k \geq n_0$. Es decir, hay que probar que si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ también.

Ejemplo 5.2.34. Demuestra que: "$\forall\, n$ con n un número natural positivo, se verifica que $n < 2^n$".

- *Paso base:* $n_0 = 1$. La afirmación $1 < 2$ es trivial.
- *Paso de inducción:* supongamos que la afirmación es cierta para $k > 1$ y probémosla para $k+1$.

  $$k < 2^k \Rightarrow 2k < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

  Por otra parte:

  $$1 < k \Rightarrow k+1 < k+k = 2k$$

  Combinando las dos desigualdades se obtiene que:

  $$k+1 < 2k < 2^{k+1} \Rightarrow k+1 < 2^{k+1}$$

Ejercicio 5.2.35. Usa la inducción matemática para demostrar que:

$$3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \ldots + 3 \cdot 5^n = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4},$$

para todo entero no negativo n.

En el Capítulo **??** se estudia en detalle la inducción matemática en su versión fuerte, así como su validez como técnica de demostración.

6. Ejercicios

6.1. Proposiciones.

1. ¿Cuáles de estas frases son proposiciones? ¿Cuál es el valor de verdad de aquellas que son proposiciones?
   - Lugo es la capital de Galicia.
   - Madrid es la capital de España.

- $2 + 3 = 5$
- $5 + 7 = 10$
- $x + 2 = 11$
- Responde a esta pregunta.
- $x + y = y + x$ para todo par de números reales x e y.

2. ¿Cuál es la negación de cada uno de estos enunciados?
   - Hoy es jueves.
   - No hay polución en Ourense.
   - $2 + 1 = 3$
   - El verano de Ourense es cálido y soleado.
3. Sean p y q los enunciados: p: Compré un billete de lotería, q: gané el bote de un millón de euros. Expresa cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural: $\neg p$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \wedge q$, $p \leftrightarrow q$, $\neg p \rightarrow \neg q$, $\neg p \wedge \neg q$, $\neg p \vee (p \wedge q)$.
4. Sean p y q los enunciados: p: Conduces a más de 100 km por hora, q: Te multan por exceso de velocidad. Escribe los enunciados siguientes usando p y q y conectivos lógicos.
   - No conduces a más de 100 km por hora.
   - Conduces a más de 100 km por hora, pero no te multan por exceso de velocidad.
   - Te multarán por exceso de velocidad si conduces a más de 100 km por hora.
   - Si no conduces a más de 100 km por hora no te multarán por exceso de velocidad.
   - Conducir a más de 100 km por hora es suficiente para que te multen por exceso de velocidad.
   - Te multan por exceso de velocidad pero no conduces a más de 100 km por hora.
   - Siempre que te multan por exceso de velocidad conduces a más de 100 km por hora.
5. Determina si cada una de estas proposiciones es verdadera o falsa:
   - $6 > 8$ y $8 > 7$
   - No es cierto que ($6 > 8$ y $8 > 7$).
   - $8 > 6$ o no es cierto que $(8 > 7)$ y $(6 > 7)$.
   - $1 + 1 = 2$ si, y sólo si, $2 + 3 = 4$.
   - Es invierno si, y sólo si, no es primavera, verano u otoño.
   - $1 + 1 = 3$ si, y sólo si, los perros hablan.

6. Determina si cada una de estas proposiciones es verdadera o falsa:
    - Si $1 + 1 = 2$, entonces $2 + 2 = 5$.
    - Si $1 + 1 = 3$, entonces $2 + 2 = 4$.
    - Si $1 + 1 = 3$, entonces $2 + 2 = 5$.
    - $1 + 1 = 3$ si los cerdos vuelan.
    - Los perros hablan si $1 + 1 = 3$.
    - Si $1 + 1 = 2$, entonces los perros hablan.
    - Si $2 + 2 = 4$, entonces $1 + 2 = 3$.
7. Determina el valor de verdad de la recíproca y contra-recíproca de cada una de las implicaciones del ejercicio anterior.
8. Escribe cada uno de estos enunciados de la forma "si p, entonces q".
    - Es necesario lavar el coche de tu padre para salir.
    - Viento del norte implica temporal.
    - Una condición suficiente para que la garantía sea válida es que hayas comprado el ordenador hace menos de un año
    - A Guillermo siempre se le pilla cuando hace trampas.
    - Puedes acceder al servidor de correo electrónico si eres alumno de la escuela.
    - Ser seleccionado para un trabajo es consecuencia de conocer a la gente adecuada.
    - Raquel se marea siempre que va en avión.
9. Escribe cada uno de estos enunciados de la forma "p si, y sólo si, q".
    - Si hace calor, te compras un helado, y si te compras un helado, hace calor.
    - Para ganar el premio es necesario y suficiente tener el número ganador.
    - Ascenderás sólo si tienes contactos, y tienes contactos sólo si asciendes.
    - Si ves televisión, tu mente se empobrecerá, y recíprocamente.
    - El tren llega con retraso exactamente aquellos días que lo utilizo.
10. Enuncia la recíproca y la contra-recíproca de cada una de estas implicaciones.
    - Si llueve esta noche, me quedaré en casa.
    - Voy a la playa siempre que el día amanezca soleado.

- Cuando me acuesto tarde es necesario que duerma hasta el mediodía.

11. Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.
    - $(p \vee q) \oplus (p \wedge q)$
    - $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow \neg r)$
    - $(p \wedge q) \vee r$
    - $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow q)$
    - $(p \oplus q) \to (p \oplus \neg q)$
    - $(p \wedge q) \vee \neg r$
12. Una antigua leyenda siciliana dice que el barbero de una remota ciudad, a la que sólo se puede llegar a través de un peligroso camino de montaña, afeita a aquellas personas y sólo a aquellas personas, que no se afeitan a sí mismas. ¿Puede existir tal barbero?
13. Expresa las siguientes especificaciones del sistema utilizando las proposiciones p: "El archivo es revisado para buscar algún error", y q: "El archivo fue grabado desde una memoria USB", junto con conectivos lógicos.
    - "El archivo se revisa para buscar algún error siempre que haya sido grabado desde una memoria USB".
    - "El archivo fue grabado desde una memoria USB, pero no se revisó para buscar ningún error".
    - "Es necesario revisar el archivo para buscar algún error siempre que haya sido grabado desde una memoria USB".
    - "Cuando el archivo no sea grabado desde una memoria USB no se revisa para buscar ningún error".
14. Demuestra que cada una de estas implicaciones es una tautología.
    - $(p \wedge q) \to (p \to q)$
    - $\neg(p \to q) \to \neg q$
    - $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$

6.2. Equivalencias lógicas.

1. Demuestra que las siguientes fórmulas no son equivalentes:
    - $p \to (q \to r)$ y $(p \to q) \to r$
    - $\neg(p \leftrightarrow q)$ y $(p \leftrightarrow q)$
2. Demuestra que las siguientes fórmulas son equivalentes:
    - $\neg(p \oplus q)$ y $p \leftrightarrow q$
    - $\neg p \to (q \to r)$ y $q \to (p \vee r)$
3. Demuestra que:
    - $p \to \neg q \equiv q \to \neg p$

- $(p \to q) \to r] \not\equiv [(p \wedge \neg r) \to \neg q]$
- $[(p \wedge q) \to r] \equiv [(p \wedge \neg r) \to \neg q]$

4. Demuestra que $(p \wedge q) \to$ r y $p \to (q \to r)$ son lógicamente equivalentes.
5. Simplifica las proposiciones:
   - $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$
   - $\neg[\neg[(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q]$
6. La siguiente frase se ha tomado de una especificación de un sistema de datos en una entidad bancaria: "Si la base de datos del directorio está abierta, el monitor se pone en estado cerrado si el sistema no está en estado inicial ". Encuentra una especificación equivalente, más fácil de entender, que incluya disyunciones o negaciones, pero no implicaciones.

6.3. Predicados y cuantificadores.

1. Denotemos por $P(X)$ la sentencia: "La palabra X contiene la letra a". ¿Cuáles son los valores de verdad siguientes?
   - P(naranja)
   - P(limón)
   - P(verdadero)
   - P(falsa)
2. Sea $P(X)$ la sentencia: "X vive en Ourense", donde el dominio de X consiste en todos los estudiantes de tu clase. Expresa cada una de estas cuantificaciones en lenguaje natural:
   - $\exists\, x,\ P(x)$
   - $\forall\, x,\ P(x)$
   - $\neg\exists\, x,\ P(x)$
   - $\exists\, x,\ \neg P(x)$
   - $\neg\forall\, x,\ P(x)$
   - $\forall\, x,\ \neg P(x)$
3. Traduce estas sentencias a lenguaje natural donde $P(X)$ es "X es un político" y $Q(X)$ es "X es locuaz" y el dominio consiste en todas los ciudadanos gallegos.
   - $\forall\, x,\ P(x) \to Q(x)$
   - $\forall\, x,\ P(x) \wedge Q(x)$
   - $\exists\, x,\ P(x) \to Q(x)$
   - $\exists\, x,\ P(x) \wedge Q(x)$
4. Sea $P(X)$ la sentencia: "X tiene un coche", $Q(X)$: "X tiene una moto", y $R(X)$: "X tiene una bicicleta". Expresa cada una de las siguientes sentencias en términos de $P(X)$, $Q(X)$ y $R(X)$, cuantificadores y conectivos lógicos. El dominio para los cuantificadores consiste en todos los estudiantes de tu clase.

- Un estudiante de tu clase tiene un coche, una moto y una bicicleta.
- Todos los estudiantes de tu clase tienen un coche, una moto y una bicicleta.
- Algún estudiante de tu clase tiene un coche y una moto, pero no una bicicleta.
- Ningún estudiante de tu clase tiene un coche, una moto y una bicicleta.
- Para cada uno de los tres medios de transporte, coche, moto y bicicleta, hay un estudiante de tu clase que tiene uno de ellos.

5. Sea $Q(X)$ la sentencia: $X+2 < 3X$. Si el dominio consiste en todos los enteros, ¿cuáles son los valores de verdad?
   - $Q(0)$
   - $Q(-1)$
   - $Q(1)$
   - $\forall x, \neg Q(x)$
   - $\forall x, Q(x)$
   - $\exists x, \neg Q(x)$
   - $\exists x, Q(x)$
6. Halla un contraejemplo, si es posible, a estas sentencias universalmente cuantificadas.
   - $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq x$
   - $\forall x \in \mathbb{Z}, x > 0$ o $x < 0$
   - $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 = 1$
   - $\forall x \in \mathbb{Z}, x - 3 < x^2$
7. ¿Cuáles son los valores de verdad de estas proposiciones?
   - $\exists x \in \mathbb{Z}, x > 1$
   - $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = 1$
   - $\exists x \in \mathbb{Z}, x + 3 = 2x$
   - $\exists x \in \mathbb{Z}, x = x + 1$
   - $\exists^\bullet x \in \mathbb{Z}, x > 1$
   - $\exists^\bullet x \in \mathbb{Z}, x^2 = 1$
   - $\exists^\bullet x \in \mathbb{Z}, x + 3 = 2x$
   - $\exists^\bullet x \in \mathbb{Z}, x = x + 1$
8. Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones. El universo de las variables x e y es $\mathbb{R}$.
   - Para cada x, $x^2 > x + 7$.
   - $\forall x, x > 1 \Rightarrow x^2 > x + 7$
   - $\forall x, \forall y, x < y \Rightarrow x^2 < y^2 + 7$
   - $\forall x, \exists y, x < y \Rightarrow x^2 < y^2 + 7$
   - Para algún x, $x^2 > x + 7$.
   - $\exists x, x > 1 \Rightarrow x^2 > x + 7$
   - $\exists x, \forall y, x < y \Rightarrow x^2 < y^2 + 7$
   - $\exists x, \exists y, x < y \Rightarrow x^2 < y^2 + 7$

9. Escribe la negación de cada una de las proposiciones de los ejercicios 6, 7 y 8.
10. Traduce estas especificaciones de sistema a lenguaje natural, donde $P(x)$ es "El servidor x no reponde", $Q(x)$ es "El servidor x está ocupado", $R(y)$ es "El mensaje y se ha perdido" y $S(y)$ es "El mensaje se está enviando".
    - $\exists\, x,\ P(x) \wedge Q(x) \to \exists\, y,\ R(y)$
    - $\forall\, x,\ Q(x) \to \exists\, y,\ S(y)$
    - $\exists\, y,\ S(y) \wedge R(y) \to \exists\, x,\ P(x)$
    - $(((\forall\, x,\ Q(x)) \wedge (\forall\, y,\ S(y))) \to \exists\, y,\ R(y)$
11. Sea $Q(X, Y)$ la sentencia "X ha enviado un mensaje a Y", donde el dominio tanto para X como para Y consiste en todos los estudiantes de tu clase. Expresa cada una de estas cuantificaciones en lenguaje natural.
    - $\exists\, x,\ \exists\, y,\ P(x, y)$
    - $\forall\, x,\ \exists\, y,\ P(x, y)$
    - $\forall\, y,\ \exists\, x,\ P(x, y)$
    - $\exists\, x,\ \forall\, y,\ P(x, y)$
    - $\exists\, y,\ \forall\, x,\ P(x, y)$
    - $\forall\, x,\ \forall\, y,\ P(x, y)$
12. Sea $P(X, Y)$ la sentencia "X se puede comunicar vía chat con Y", donde el dominio tanto para X como para Y consiste en todas las personas del mundo. Utiliza cuantificadores para expresar cada una de las siguientes sentencias.
    - Todo el mundo puede comunicarse vía chat con Juan.
    - María puede comunicarse vía chat con todo el mundo.
    - Todo el mundo puede comunicarse vía chat con alguien.
    - No hay nadie que pueda comunicarse vía chat con todo el mundo.
    - Todo el mundo puede puede comunicarse vía chat con alguien.
    - Nadie puede puede comunicarse vía chat con Juan y María.
    - Paula puede comunicarse vía chat exactamente con dos personas.
    - Hay exactamente una persona con quien todo el mundo puede comunicarse vía chat.
    - Nadie puede comunicarse vía chat consigo mismo.
13. Determina el valor de verdad de cada una de estas sentencias.
    - $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \exists\, m \in \mathbb{Z},\ n^2 \leq m$
    - $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \exists\, m \in \mathbb{Z},\ n + m = 0$

- $\exists\, n \in \mathbb{Z},\ \exists\, m \in \mathbb{Z},\ n^2 + m^2 = 5$
- $\exists\, n \in \mathbb{Z},\ \forall\, m \in \mathbb{Z},\ n \leq m^2$
- $\exists\, n \in \mathbb{Z},\ \forall\, m \in \mathbb{Z},\ nm = m$

6.4. Razonamiento deductivo.

1. ¿Qué reglas de inferencia se han usado en los siguientes argumentos?
   - Los jabalíes habitan en Galicia y son mamíferos. Por lo tanto, los jabalíes son mamíferos.
   - Estamos a más de 40ºC o la polución es peligrosa. Hoy estamos a menos de 40ºC. Por tanto, la polución es peligrosa.
   - Andrea es una excelente nadadora. Si Andrea es una excelente nadadora, entonces puede trabajar como salvavidas. Por tanto, Andrea puede trabajar como salvavidas.
   - Susana trabajará en una empresa de informática este verano. Por tanto, este verano Susana trabajará en una empresa de informática o deambulará por la playa.
   - Si trabajo toda la noche, podré resolver todos los problemas. Si puedo resolver todos los problemas, entonces entenderé la asignatura. Por tanto, si trabajo toda la noche, entonces entenderé la asignatura.
2. Para cada uno de estos conjuntos de premisas, ¿qué conclusión o conclusiones se pueden deducir? Explica las reglas de inferencia utilizadas para obtener cada conclusión a partir de las premisas.
   - Si ceno comidas picantes, entonces tengo pesadillas. Tengo pesadillas si llueve por la noche. No he tenido pesadillas.
   - Soy inteligente o afortunado. No soy afortunado. Si soy afortunado, me tocará la lotería.
   - Todo estudiante de ingeniería informática tiene un ordenador. Marcos no tiene un ordenador. Ana tiene un ordenador
   - Lo que es bueno para el medio ambiente, lo es para tu país. Lo que es bueno para tu país es bueno para ti. Lo que es bueno para el medio ambiente es que recicles.
   - Todos los rumiantes rumian la comida. Las ovejas son rumiantes. Los perros no rumian la comida. Los murciélagos no son rumiantes.

3. Para cada uno de estos argumentos determina si es válido y explica por qué.
   - Todos los estudiantes de la clase entienden lógica. Xavier es un estudiante de la clase. Por tanto, Xavier entiende lógica.
   - Todos los estudiantes de Ingeniería Informática cursan Fundamentos Matemáticos para la Informática (FMI). Lucía cursa FMI. Por tanto Lucía es estudiante de Ingeniería Informática.
   - A todos los loros les gusta la fruta. Mi pájaro no es un loro. Por tanto, a mi pájaro no le gusta la fruta.
   - Los que comen vegetales todos los días están sanos. Ana no está sana. Por tanto, Ana no come vegetales todos los días.
4. Para cada uno de estos argumentos determina si es válido y explica por qué.
   - $$\begin{array}{c} \mathrm{p} \to \mathrm{q} \\ \neg\, \mathrm{p} \\ \hline \therefore\ \mathrm{q} \end{array}$$
   - $$\begin{array}{c} \mathrm{p} \to (\mathrm{q} \to \mathrm{r}) \\ \mathrm{q} \to (\mathrm{p} \to \mathrm{r}) \\ \hline \therefore\ (\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \to \mathrm{r} \end{array}$$
   - $$\begin{array}{c} \mathrm{p} \to \mathrm{q} \\ \neg\, \mathrm{q} \\ \hline \therefore\ \neg\, \mathrm{p} \end{array}$$
   - $$\begin{array}{c} (\mathrm{p} \to \mathrm{r}) \\ \neg \mathrm{p} \to \mathrm{q} \\ \mathrm{q} \to \mathrm{s} \\ \hline \therefore\ \neg\, \mathrm{r} \vee \mathrm{s} \end{array}$$
   - $$\begin{array}{c} \mathrm{p} \wedge \neg\, \mathrm{p} \\ \hline \therefore\ \mathrm{q} \end{array}$$
   - $$\begin{array}{c} (\mathrm{p} \to \mathrm{q}) \wedge (\mathrm{r} \to \mathrm{s}) \\ \mathrm{p} \vee \mathrm{r} \\ \hline \therefore\ \mathrm{q} \vee \mathrm{s} \end{array}$$

6.5. Métodos de demostración.

1. Demuestra que $\sqrt{5}$ es un número irracional.
2. Demuestra que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ las siguientes condiciones son equivalentes:
   - $n^2 + 2n + 1$ es par.
   - n^2 es impar.
   - $n + 7$ es par.
3. (*Desigualdad triangular*) Demuestra que $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}$ se verifica:
$$|x| + |y| < |x + y|$$
4. Demuestra que la suma de un número irracional y un número racional es irracional.
5. Demuestra que el producto de dos números racionales es racional.

6. Muestra que se cumple, o que no, que el producto de dos números irracionales es irracional.
7. Demuestra que si n es un entero positivo, entonces:
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
8. Obtén una fórmula para la suma de los n primeros positivos pares.
9. Usa la inducción matemática para probar la fórmula obtenida en el ejercicio anterior.
10. Obtén una fórmula para la suma de los n primeros positivos impares.
11. Usa la inducción matemática para probar la fórmula obtenida en el ejercicio anterior.
12. Para todo entero no negativo n usa la inducción matemática para demostrar que:
    - $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$, $n\in\mathbb{N}$
    - $\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$, $n\in\mathbb{N}$
    - $1+2+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$
13. Encuentra el fallo en esta "demostración":
    Teorema: Para todo entero positivo n, $2|2n+3$.
    - *Paso base:* La fórmula es cierta para $n_0=1$.
    - *Paso de inducción:* Supongamos que $2|2k+3$ y veamos que $2|2(k+1)+3$. Se verifica que $2(k+1)+3=2k+2+3=2k+3+2$. Aplicando la hipótesis de inducción, se deduce que $2|2k+3+2$ y, por lo tanto, $2|2(k+1)+3$.

Referencias

[1] Bujalance, E.: *Elementos de matemática discreta.* Sanz y Torres, 1993.
[2] Bujalance, E.: *Problemas de matemática discreta.* Sanz y Torres, 1993.
[3] Busby, R. C.; Kolman, B.;Ross, S. C.: *Estructuras de matemáticas discretas para la computación.* Prentice Hall, 1997.
[4] Ferrando, J. C.; Gregori, V.: *Matemática discreta.* Reverté, 1995.
[5] García Merayo, F.: *Matemática discreta.* Paraninfo, 2005.
[6] García Merayo, F.; Hernández Peñalver, G.; Nevot Luna, A.: *Problemas resueltos de matemática discreta.* Thomson, 2003.
[7] García C.; López, J. M.; Puigjaner, D.: *Matemática discreta: problemas y ejercicios resueltos.* Prentice Hall, 2002.

[8] Garnier, R.; Taylor, J.: *Discrete mathematics for new technology*. Adam Hilger, 1992.
[9] Grassmann, W. K.: *Matemática discreta y lógica*. Prentice Hall, 1998.
[10] Grimaldi, R. P.: *Matemáticas discreta y combinatoria: una introducción con aplicaciones*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.
[11] Johnsonbaugh, R.: *Matemáticas discretas*. Prentice Hall, 1999.
[12] Rosen, K. H.: *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. Mc Graw Hill, 2004.
[13] Wilson, R. J.: *Introducción a la teoría de los grafos*. Alianza, 1983.