Ejercicios de la sección 4.3 Regla de Cramer y fórmula de la matriz inversa

(Para hacer en clase: 4, 9, 12.)
(Con solución o indicaciones: 5, 10, 11, 13.)

Usa la regla de Cramer para resolver los sistemas de los ejercicios 1 a 6.

1. $\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 7 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 7 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -5 \end{aligned}$

▶**4.** $\begin{aligned} -5x_1 + 3x_2 &= 9 \\ 3x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned}$

▶**5.** $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ -3x_1 + x_3 &= -8 \\ x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$

En los ejercicios 7 a 10 determina el valor o valores del parámetro s que hagan que el sistema dado tenga solución única y halla la solución.

7. $\begin{aligned} 6sx_1 + 4x_2 &= 5 \\ 9x_1 + 2sx_2 &= -2 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 3sx_1 - 5x_2 &= 3 \\ 9x_1 + 5sx_2 &= 2 \end{aligned}$

▶**9.** $\begin{aligned} sx_1 - 2sx_2 &= -1 \\ 3x_1 + 6sx_2 &= 4 \end{aligned}$

▶**10.** $\begin{aligned} 2sx_1 + x_2 &= 1 \\ 3sx_1 + 6sx_2 &= 2 \end{aligned}$

▶**11.** Suponiendo que todos los elementos de A son enteros y que $\det A = 1$, explica por qué se sabe que todos los elementos de la inversa, A^{-1} son también enteros.

▶**12.** Halla el área del paralelogramo cuyos vértices tienen las coordenadas:

$$(-1,0),\ (0,5),\ (1,-4),\ (2,1).$$

▶**13.** Halla el volumen del paralelepípedo que tiene un vértice en el origen y los tres vértices adyacentes a éste tienen coordenadas $(1,0,-2)$, $(1,2,4)$ y $(7,1,0)$.

14. Sea S el paralelogramo de $\mathbf{R}^2$ determinado por los vectores $\mathbf{b}_1 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ y $\mathbf{b}_2 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ y sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Calcula el área de la imagen de S bajo la aplicación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

15. Halla una fórmula para el área de un triángulo en $\mathbf{R}^2$ cuyos vértices son $\mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

16. Usa el resultado del ejercicio anterior para demostrar que si R es el triángulo de $\mathbf{R}^2$ cuyos vértice tienen las coordenadas (x_1,y_1), (x_2,y_2) y (x_3,y_3), entonces su área es:

$$\text{área de } R = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pista: Traslada R de forma que tenga un vértice en el origen. Para ello resta de cada vértice el que vaya a quedar en el origen.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 4.3

5. $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-3-7+16}{-2+6} = \frac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -3 & -8 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-32+6+42}{4} = \frac{16}{4} = 4$, $x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-21-9+16}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$.

10. $\left|\begin{smallmatrix} 2s & 1 \\ 3s & 6s \end{smallmatrix}\right| = 12s^2 - 3s$. Habrá solución única cuando $12s^2 - 3s \neq 0$, o $4s^2 \neq s$, es decir: $s \neq 0$ y $s \neq 1/4$. En esos casos: $x_1 = \dfrac{\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6s \end{smallmatrix}\right|}{12s^2-3s} = \frac{6s-2}{12s^2-3s}$, $x_2 = \dfrac{\left|\begin{smallmatrix} 2s & 1 \\ 3s & 2 \end{smallmatrix}\right|}{12s^2-3s} = \frac{s}{12s^2-3s} = \frac{1}{12s-3}$.

11. Al tener determinante igual a 1, su inversa es igual a la traspuesta de la matriz de cofactores, todos cuyos elementos son números enteros por ser cada cofactor el determinante de una matriz de número enteros.

13. $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{smallmatrix}\right| = 23$.

Versión de 19 de enero de 2023, 12:28 h.