Ejercicios de la sección 3.2 Matrices inversas

(Clase de prácticas: 2, 3, 7, 11, 12, 19, 20, 23, 24, 33, 34.)

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Construye una matriz C de 2×3 (mediante ensayo y error) usando sólo los números 1, -1 y 0 como elementos, de tal forma que $CA = I_2$. Calcula AC y observa que $AC \neq I_3$.

►**2.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Construye una matriz D de 4×2 usando sólo los números 1 y 0 como elementos, de tal forma que $AD = I_2$. ¿Es posible que $CA = I_4$ para alguna matriz C de orden 4×2?. ¿Por qué sí o por qué no?.

En los ejercicios 3 a 6 halla las inversas de las matrices dadas.

►**3.** $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$.

►**7.** Usa la inversa de la matriz del ejercicio 3 para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 4x_2 &= -1 \end{aligned}$$

8. Usa la inversa de la matriz del ejercicio 5 para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 &= -9 \\ -7x_2 - 5x_2 &= 11 \end{aligned}$$

9. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(a) Halla A^{-1} y utilízala para resolver las cuatro ecuaciones

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_4$

(b) Las cuatro ecuaciones del apartado (a) pueden resolverse con el mismo conjunto de operaciones de fila, puesto que la matriz de coeficientes es la misma en cada caso. Resuelve las cuatro ecuaciones del apartado (a) reduciendo por filas la matriz ampliada $[A\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4]$ para hallar su forma escalonada reducida.

10. Usa el álgebra de matrices para mostrar que si A es inversible y D satisface $AD = I$, entonces $D = A^{-1}$.

En los ejercicios 11 y 12, indica para cada afirmación si es verdadera o falsa. Justifica tus respuestas.

►**11.**

(a) Para que una matriz B sea inversa de A, ambas ecuaciones $AB = I$ y $BA = I$ deben ser ciertas.

(b) Si A y B son matrices $n \times n$ inversibles, entonces $A^{-1}B^{-1}$ es la inversa de AB.

(c) Si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, y $ab - cd \neq 0$, entonces A es inversible.

(d) Si A es una matriz inversible $n \times n$, entonces la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible para todo vector $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^n$.

(e) Toda matriz elemental es inversible.

►**12.**

(a) Un producto de matrices $n \times n$ inversibles es inversible, y la inversa del producto es el producto de sus inversas en el mismo orden.

(b) Si A es inversible, entonces la inversa de A^{-1} es la propia A.

(c) Si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, y $ad = bc$, entonces A no es inversible.

(d) Si A se puede reducir por filas a la matriz identidad, entonces A es inversible.

(e) Si A es una matriz inversible $n \times n$, entonces las operaciones elementales de filas que reducen A a la identidad I_n también reducen A^{-1} a I_n.

13. Sea A una matriz inversible de $n \times n$ y sea B una matriz $n \times p$. Demuestra que la ecuación $AX = B$ tiene una única solución $A^{-1}B$.

14. Sea A una matriz inversible $n \times n$, y sea B una matriz $n \times p$. Explica por qué $A^{-1}B$ puede calcularse mediante reducción por filas:

$$\text{Si} \quad [A \quad B] \sim \cdots \sim [I \quad X] \quad \text{entonces} \quad X = A^{-1}B$$

Observación: Si A tiene orden más grande que 2×2, entonces la reducción por filas de $[A \quad B]$ es mucho más rápida (requiere menos operaciones) que calcular A^{-1} y luego el producto $A^{-1}B$.

15. Supongamos que $AB = AC$, donde B y C son matrices $n \times p$ y A es inversible. Demuestra que $B = C$. ¿Es esto cierto en general si A no es inversible?

16. Supongamos $(B - C)D = 0$, donde B y C son matrices $m \times n$ y D es inversible. Demuestra que $B = C$.

17. Supongamos que A, B y C son matrices inversibles $n \times n$. Demuestra que ABC también es inversible construyendo una matriz D tal que $(ABC)D = I$ y $D(ABC) = I$.

18. Supongamos que A y B son matrices $n \times n$, y que AB es inversible. Demuestra que A y B son inversibles.
Sugerencia: Pon $C = AB$ deduce qué se debe multiplicar a derecha/izquierda de C^{-1} para obtener las inversas requeridas y luego demuestra que efectivamente son las inversas requeridas...

►**19.** Despeja A en la ecuación $AB = BC$ suponiendo que A, B y C son cuadradas y que B es inversible.

►**20.** Supongamos que P es inversible y $A = PBP^{-1}$. Halla B en términos de A.

21. Si A, B y C son matrices inversibles $n \times n$, la ecuación $C^{-1}(A + X)B^{-1} = I_n$ ¿tiene alguna solución para X? Si es así, hállala.

Versión de 8 de febrero de 2022, 16:41 h.

22. Supongamos que A, B y X son matrices $n \times n$ con A, X, y $A - AX$ inversibles, y supongamos que

$$(A - AX)^{-1} = X^{-1}B \qquad (1)$$

(a) Explica por qué B es inversible.

(b) Resuelve la ecuación (1) en X. Si es necesario usar la inversa de una matriz, explique por qué dicha matriz es inversible.

►**23.** Explica por qué las columnas de una matriz A de $n \times n$ son linealmente independientes cuando A es inversible.

►**24.** Explica por qué las columnas de una matriz A de orden $n \times n$ generan $\mathbf{R}^n$ cuando A es inversible.

25. Supongamos que A es $n \times n$ y que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial. Explica por qué A tiene n columnas pivote y es equivalente por filas a I_n. *Observación:* Esto implica que A debe ser inversible.

26. Supongamos que para una matriz cuadrada A de orden n la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución para todo $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^n$. Explica por qué A debe ser inversible.
Sugerencia: Piensa si A es equivalente por filas a I_n

Los ejercicios 27 y 28 demuestran el teorema que dice: *Si* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *entonces A es inversible sólo si $ad - bc \neq 0$ y en ese caso su inversa es*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

27. Demuestra que si $ad - bc = 0$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene más de una solución. ¿Por qué implica esto que A no es inversible?
Sugerencia: Primero, considera el caso $a = b = 0$. Después, si a y b no son ambos cero, considera el vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

28. Demuestra que si $ad - bc \neq 0$, la fórmula para A^{-1} es correcta.

Halla las inversas de las matrices dadas en los ejercicios 29 a 32, caso de que existan. Usa el algoritmo explicado en clase consistente en hallar la forma escalonada reducida de la matriz ampliada $[A \;\; I]$.

29. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

►**33.** Usa el algoritmo explicado en clase para hallar las inversas de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para cada una de las inversas halladas verifica que efectivamente es la inversa comprobando que cumple $AB = I$.

►**34.** Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Halla la tercera columna de A^{-1} sin calcular las otras columnas.

35. Si existe, halla la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soluciones a ejercicios seleccionados de la sección 3.2

2. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. No es posible que A tenga una inversa por la derecha y una inversa por la izquierda porque no es una matriz cuadrada.

3. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$. (Usando $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.)

7. $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}$.

11. (a) **Verdadero** (Es la definición de matriz inversa.), (b) **Falso** (La inversa de AB es $B^{-1}A^{-1}$.), (c) **Falso** (La condición es $ad - bc \neq 0$.), (d) **Verdadero** (Y determinado. Con solución $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.), (e) **Verdadero** (Porque, según se vio en el tema 1, toda operación elemental es inversible.).

12. (a) **Falso** (Debería decir "en el orden contrario".), (b) **Verdadero** (Las ecuaciones que definen a A^{-1} como inversa de A son las mismas que las que definen a A como inversa de A^{-1}.), (c) **Verdadero** (Si $ad = bc$ entonces, suponiendo $b, d \neq 0$, las operación elemental bF_2 seguida de $F_2 - dF_1$ producen una fila de ceros y A tiene a lo sumo una posición pivote.), (d) **Verdadero** (Es una matriz con un pivote en cada fila y en cada columna.), (e) **Falso** (Debería decir "también reducen I_n a A^{-1}.).

19. $A = BCB^{-1}$.

20. $B = P^{-1}AP$.

23. Porque todo sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única dada por $x = A^{-1}\mathbf{b}$. En particular, el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es determinado, lo que significa que las columnas de A son independientes.

24. Porque todo sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única dada por $x = A^{-1}\mathbf{b}$. En particular, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible para todo $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$, lo que significa que las columnas de A generan $\mathbf{R}^n$.

33. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

34. Basta resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_3$ donde $\mathbf{e}_3$ es la tercera columna de la identidad 3×3. Si llamamos $\mathbf{a}_3$ a la tercera columna de A^{-1}, entonces $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.