Ejercicios de la sección 1.1 Operaciones elementales en los sistemas de ecuaciones lineales y los sistemas en forma escalonada

(Ejercicios para hacer en clase: 2, 4, 5, 8, 10, 11, 16, 18, 20, 22, 23, 26, 28, 30.)
(Ejercicios con solución o indicaciones: 1, 3, 6, 7, 9, 12, 15, 17, 19, 21, 24, 25, 27, 29.)

En los ejercicios 1 y 2, escribe las ecuaciones paramétricas del objeto geométrico indicado.

▶**1.** La recta de $\mathbf{R}^2$ de ecuación $x - 3y = 5$.

▶**2.** El plano de $\mathbf{R}^3$ de ecuación $2x + 6y - 8z = 4$.

En cada uno de los ejercicios 3 y 4 se da un sistema de ecuaciones lineales en forma resuelta y se pide escribir las ecuaciones paramétricas del conjunto solución.

▶**3.**
$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_3 \\ x_2 &= 2 - 3x_3 \end{aligned}$$

▶**4.**
$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - x_2 + 2x_4 \\ x_3 &= 7 - 4x_4 \end{aligned}$$

▶**5.** Dadas las dos rectas del plano $x_1 - 2x_2 = 1$, $2x_1 - 4x_2 = 3$, ¿tienen un punto de intersección?. Explica tu respuesta.

▶**6.** Dadas las tres rectas del plano $x_1 - 4x_2 = 1$, $2x_1 - x_2 = -3$, y $-x_1 - 3x_2 = 4$, ¿tienen un punto de intersección común?. Explica tu respuesta.

▶**7.** La matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales ha sido transformada mediante operaciones elementales de filas a la forma que se presenta a continuación. ¿Se ha completado la primera fase del proceso de resolución?

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

▶**8.** ¿Es compatible el sistema de ecuaciones lineales del ejercicio anterior? En caso afirmativo ¿tiene solución única?

En los ejercicios 9 y 10 se da la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales. Expresa con palabras las siguientes dos operaciones elementales de fila a realizar para resolver el sistema.

▶**9.** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

▶**10.** $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 11 a 14, la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales ha sido reducida mediante operaciones de fila a la forma que se muestra. En cada caso, realiza las operaciones de fila apropiadas y describe el conjunto solución del sistema original.

▶**11.** $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

▶**12.** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 15 a 18, describe la operación elemental de filas que transforma la primera matriz en la segunda. Después, describe la operación elemental de filas que transforma la segunda matriz en la primera (es decir, la operación inversa de la anterior).

▶**15.** $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

▶**16.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$.

▶**17.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

▶**18.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Determina si los sistemas de los ejercicios 19 y 20 son compatibles. No resuelvas los sistemas; no se pide la solución. Sólo hay que averiguar si existe (y, por supuesto, justificar la respuesta).

▶**19.**
$$\begin{aligned} x_1 \quad + 3x_3 \quad &= 2 \\ x_2 \quad - 3x_4 &= 3 \\ -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 \quad + 7x_4 &= -5 \end{aligned}$$

▶**20.**
$$\begin{aligned} x_1 \quad - 2x_4 &= -3 \\ 2x_2 + 2x_3 \quad &= 0 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

En los ejercicios 21 a 24, determina el valor o los valores de h tales que la matriz dada es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales compatible.

▶**21.** $\begin{pmatrix} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

▶**22.** $\begin{pmatrix} 1 & h & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

▶**23.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & h & 8 \end{pmatrix}$.

▶**24.** $\begin{pmatrix} 2 & -3 & h \\ -6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

▶**25.** Indica para cada uno de los siguientes enunciados si es verdadero o falso.

(a) Todas las operaciones elementales de fila son inversibles y sus inversas también son operaciones elementales de filas.

(b) Una matriz 5×6 tiene seis filas.

(c) El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales que tenga las incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ es una lista de números $s_1, \ldots, s_n$ que hace de cada ecuación del sistema un enunciado verdadero cuando las incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ se sustituyen por los valores $s_1, \ldots, s_n$.

Versión de 17 de enero de 2023, 5:42 h.

(d) Las dos preguntas fundamentales acerca de un sistema de ecuaciones lineales son preguntas sobre la existencia y la unicidad de solución.

►**26.** Indica para cada uno de los siguientes enunciados si es verdadero o falso.

(a) Las operaciones elementales de fila realizadas sobre la matriz (*ampliada*) de un sistema de ecuaciones lineales no cambian nunca el conjunto solución del sistema.

(b) Dos matrices son equivalentes por filas cuando poseen el mismo número de filas.

(c) Un sistema incompatible tiene más de una solución.

(d) Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si y sólo si ambos tienen el mismo conjunto solución.

►**27.** ¿Para qué valores de h y k es compatible el siguiente sistema?

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= h \\ -6x_1 + 3x_2 &= k \end{aligned}$$

►**28.** Halla una ecuación entre los parámetros g, h y k, que haga que la siguiente matriz corresponda a un sistema compatible:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -6 & h \\ -1 & 5 & -9 & k \end{pmatrix}.$$

►**29.** Supón que el sistema presentado a continuación es compatible para todos los valores posibles de f y g. ¿Qué puede afirmarse acerca de los coeficientes c y d?. Justifica tu respuesta.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= f \\ cx_1 + dx_2 &= g \end{aligned}$$

►**30.** Supón que a, b, c y d son constantes tales que a es diferente de cero y el sistema presentado a continuación es compatible para todos los valores posibles de f y g. ¿Qué puede afirmarse acerca de los números a, b, c y d?. Justifica tu respuesta.

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= f \\ cx_1 + dx_2 &= g \end{aligned}$$

31. (a) Demuestra que cualquier operación elemental de reescalado puede calcularse mediante una operación de reemplazo si entre éstas operaciones se admite el reemplazar una fila por el resultado de sumarle un múltiplo de ella misma (lo cual *extiende* las operaciones de reemplazo usuales en las que a una fila se le suma un múltiplo de *otra distinta*).

(b) Demuestra que cualquier operación elemental de intercambio de filas puede calcularse usando solamente operaciones de reemplazo y una operación de reescalado de factor $k = -1$. ¿Es posible obtener un intercambio usando solamente operaciones de reemplazo usuales?

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 1.1

1. Como sólo hay una ecuación basta elegir la incógnita básica y las demás serán variables libres. Si elijo x, despejo x en función de y(ésta será una variable libre), $x = 5 + 3y$ y ahora sólo hay que elegir un parámetro para cada variable libre, escribir la ecuación que asigna ese parámetro a la variable libre, $y = t$ y sustituir en la ecuación de x cada variable libre por su parámetro, con lo que las ecuaciones paramétricas nos quedan:

$$\begin{aligned} x &= 5 + 3t \\ y &= t \end{aligned}.$$

3. El enunciado ya nos da como incógnitas básicas x_1 y x_2 y como variable libre x_3, sólo falta elegir un parámetro para x_3, por ejemplo $x_3 = t$ y las ecuaciones paramétricas quedan:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + t \\ x_2 &= 2 - 3t. \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

6. Este es un problema de existencia. Para resolverlo se pone la matriz del sistema en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{F_1-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[F_3+F_1]{F_1-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos llegado a una matriz escalonada que no tiene pivote en la columna de la derecha, por tanto el sistema original era compatible, tenía solución. Las tres rectas tienen un punto común.

7. La matriz obtenida es una matriz escalonada, por tanto ya se ha terminado la primera fase de resolución.

9. Sumar a la fila 2 la fila 3 multiplicada por 3.

12. Las operaciones a realizar son $\frac{1}{2}F_3$, $F_2 - 7F_3$, $F_1 - 9F_3$ y $F_1 + 4F_2$ tras lo cual la matriz dada queda transformada en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se deduce que el conjunto solución tiene un único elemento que es el vector $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$.

15. Intercambio de las filas 1 y 2. La inversa es la misma: intercambio de las filas 1 y 2.

17. Restar a la fila 3 la fila 1 multiplicada por 4. La inversa es: Sumar a la fila 3 la fila 1 multiplicada por 4.

21. Con la operación elemental $F_2 - 3F_1$ la matriz se pone en la siguiente forma escalonada: $\begin{pmatrix} 1 & h & 4 \\ 0 & 6-3h & -4 \end{pmatrix}$. Para que el sistema sea compatible es necesario y suficiente que $6 - 3h \neq 0$, es decir $h \neq 2$.

24. Con la operación elemental $F_2 + 3F_1$ la matriz se pone en la siguiente forma escalonada: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & h \\ 0 & 0 & 5+3h \end{pmatrix}$. Para que el sistema sea compatible es necesario y suficiente que $5 + 3h = 0$, es decir $h = -\frac{5}{3}$.

25. (a) Ver la subsección "Inversas de las operaciones elementales" al final de la sección 1 del tema 1, (b) Tiene 5 filas y 6 columnas, (c) Esto define una solución particular, no el conjunto solución, (d) Esto es: si el sistema admite solución y si ésta es única.

27. Este es un problema de existencia. Para resolverlo se pone la matriz del sistema en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & h \\ -6 & 3 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+3F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & h \\ 0 & 0 & k+3h \end{pmatrix}.$$

Si fuese $k + 3h \neq 0$ el sistema sería incompatible, pero si $k + 3h = 0$ entonces el sistema es compatible, por tanto esta es la condición pedida, que también puede ponerse como $k = -3h$.

29. Puede afirmarse que $d \neq 3c$.