Nombre y apellidos: ________ **S O L U C I O N E S** ________ DNI: ____________

no escribir en esta caja

nota sobre **10**

Evaluación continua 2, Grupo A

7 de noviembre de 2014, 11:00h – Aula B003

Pregunta 1

(3 pt.)

Sean los vectores

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que $\mathbf{p}$ es una solución particular del sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y que $\mathbf{x} = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2$ es la solución general del sistema homogéneo asociado, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

(0.3 pt.) (a) ¿Cuál es el número de columnas de la matriz A?

(0.3 pt.) (b) ¿Cuál es el número de filas de la matriz A?

(0.4 pt.) (c) ¿Cuál es el número de columnas pivote y no pivote de la matriz A?

(0.5 pt.) (d) ¿Es el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ compatible para todo vector $\mathbf{d}$ de $\mathbf{R}^4$?

(0.8 pt.) (e) ¿Cuál es la forma escalonada reducida de la matriz ampliada del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?
Sugerencia: Escribe las ecuaciones cartesianas del conjunto solución en forma matricial.

(0.7 pt.) (f) Escribe una matriz A tal que la solución general del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2$.

Solución:

(a) 5, el número de incógnitas, que es el número de coordenadas del vector solución $\mathbf{p}$.

(b) 4, el número de ecuaciones, que es el número de términos independientes o coordenadas del vector $\mathbf{b}$.

(c) Sin pivote: 2 (el número de parámetros). Con pivote: 3 (las restantes).

(d) No (A no tiene un pivote en cada fila).

(e) $[A|\mathbf{b}] \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(f) Basta realizar en la matriz hallada en el apartado anterior operaciones elementales de filas que transformen su última columna, $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, en el vector $\mathbf{b}$. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+F_3]{F_1-2F_3} \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_2]{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)F_3]{(-1)F_1} \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_4]{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Realizadas estas operaciones sobre $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se obtiene: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 8 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Nombre y apellidos: ______________ S O L U C I O N E S ______________ DNI: ______________

Pregunta 2

(4 pt.)

Sean A, L, U matrices tales que $A = L\,U$ es la factorización LU de A.

(1 pt.) (a) Suponiendo que A es una matriz cuadrada, demuestra que $A^2 = L^2\,U^2$ si y sólo si A conmuta con U, es decir, si y sólo si $AU = UA$.

(3 pt.) (b) Supongamos ahora que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

i. Halla la factorización LU, $A = L\,U$, de A y calcula U^{-1}.

ii. Calcula el determinante de A^n para todo entero positivo n.

iii. Contesta razonadamente: ¿Es A inversible?. En caso afirmativo halla A^{-1}.

Solución:

(a) Suponiendo primero $A^2 = L^2U^2$ y usando $A = LU$ se tiene

$$\begin{aligned} (LU)(LU) &= (LL)(UU) \\ LU(LU) &= L(LU)U \\ LUA &= LAU. \end{aligned}$$

Como L tiene inversa podemos multiplicar por L^{-1} por la izquierda y se obtiene:

$$UA = AU.$$

Suponiendo ahora $UA = AU$ y usando $A = LU$ se tiene

$$U(LU) = (LU)U.$$

Multiplicando por L por la izquierda: $LULU = LLUU$, es decir: $A^2 = L^2U^2$.

(b) i.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii. $\det A^n = (\det A)^n = (\det U)^n = 2^n$.

iii. $A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Nombre y apellidos: ______________ S O L U C I O N E S ______________ DNI: ______________

Pregunta 3
(3 pt.)

Sea $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la aplicación lineal $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(0.5 pt.) (a) Halla una base de la imagen de T (o sea, del espacio columna de A).

(1 pt.) (b) Halla una base del núcleo de T (o sea, del espacio nulo de A).

(1 pt.) (c) Halla una base del espacio fila de A (o sea, del espacio columna de A^{T}).

(0.5 pt.) (d) Halla una base del espacio nulo de A^{T}.

Solución:

(a) Las dos últimas columnas de A son las opuestas de las dos primeras y estas dos primeras son independientes porque sus coordenadas no son proporcionales, luego una base del espacio columna está formada por las dos primeras columnas de A.

(b) Resolvemos $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ poniendo A en forma escalonada reducida:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{de donde una base del espacio nulo es:} \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) La última fila de A es la opuesta de la primera y las dos primeras son independientes porque sus coordenadas no son proporcionales, luego una base del espacio fila está formada por las dos primeras filas de A.

(d) Resolvemos $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ poniendo A^{T} en forma escalonada reducida:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y una base del espacio nulo es:} \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$