Tema 1

Sistemas de ecuaciones lineales, combinaciones lineales y dependencia lineal

Este tema, en el que se estudian los sistemas de ecuaciones lineales desde el punto de vista del Álgebra Lineal, es la base sobre la que reposa toda la asignatura. Lo que se ha aprendido sobre los sistemas en el bachillerato no es suficiente, pues allí no se ponía el acento en la estructura formal del proceso de resolución sino que era suficiente con ser capaz de discutir las soluciones del sistema. Por otra parte, al estudiar este tema con atención se comprenderá que hay mucho más que aprender sobre los sistemas de ecuaciones lineales que el mero cálculo de todas las soluciones.

1.1. Operaciones elementales en los sistemas de ecuaciones lineales y los sistemas en forma escalonada

Lección 1, 31 ene 2023

El caso más simple de sistema de ecuaciones lineales es el de un sistema que sólo consta de una ecuación. Por ejemplo

$$3x - 2y + z = 7. \tag{1.1}$$

Esta ecuación en concreto es la ecuación de un plano en $\mathbf{R}^3$ porque los puntos de $\mathbf{R}^3$ que la cumplen (como, por ejemplo, los puntos $(0,0,7)$, $(1,-1,2)$, $(5,4,0)$, etc.) forman un plano. Cada punto de $\mathbf{R}^3$ que cumple la ecuación se llama una *solución particular* y el conjunto de todos los puntos que la cumplen se llama *el conjunto solución*.

Siempre que tengamos un sistema de ecuaciones lineales que sólo consta de una ecuación, podemos resolverlo « despejando » una cualquiera de las incógnitas. Por ejemplo, en la ecuación (1.1) lo más sencillo es despejar la z y escribir

$$z = 7 - 3x + 2y.$$

Resolución de los sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales modificaremos una o varias veces las ecuaciones del sistema mediante *operaciones que no alteran el conjunto solución* y siguiendo un método que garantiza llegar o bien a un sistema que contiene una ecuación claramente falsa o imposible (normalmente una de la forma $0 = 1$ o similar) o a uno que se encuentra en forma resuelta.

Versión de 19 de enero de 2023, 19:01 h.

¿Cuáles son las operaciones que no alteran el conjunto solución de un sistema?

Hay muchas operaciones que se pueden realizar sobre un sistema de ecuaciones lineales cuyo resultado es otro sistema que tiene las mismas incógnitas y el mismo conjunto solución; por ejemplo multiplicar todas las ecuaciones por 2 o sumar a una de ellas todas las demás. Pero toda operación que no altere el conjunto solución se puede obtener combinando unas operaciones especialmente sencillas llamadas *operaciones elementales* de las cuales hay *tres tipos básicos* que son los siguientes:

- *Cambiar el orden en que están dadas las ecuaciones*. Esto se llama *reordenar*. Por ejemplo:

$$\text{El sistema} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases} \quad \text{tiene las mismas soluciones que} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

- *Multiplicar una ecuación del sistema dado por un número distinto de cero*. Esto se llama *reescalar*. Por ejemplo:

$$\text{El sistema} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases} \quad \text{tiene las mismas soluciones que} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 5x_1 - 5x_2 = 5, \end{cases}$$

  porque la segunda ecuación del segundo sistema es igual a la correspondiente ecuación del otro multiplicada por 5.

- *Sustituir o reemplazar una ecuación del sistema por el resultado de sumarle o restarle miembro a miembro una ecuación* distinta *del sistema*. Esto se llama *reemplazar*. Por ejemplo:

$$\text{El sistema} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases} \quad \text{tiene las mismas soluciones que} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ - 3x_2 = -3, \end{cases}$$

  porque a la segunda ecuación se le ha restado la primera.

Nota: Si en el tercer tipo de operación se permitiese realizar la operación de sumar o restar a una ecuación un múltiplo de ella misma, se podría eliminar una ecuación del sistema (restando a esa ecuación ella misma) con el consiguiente posible cambio del conjunto solución.

Método de resolución

El método básico de resolución de sistemas es el llamado *método de eliminación de Gauss con pivotación simple*, el cual consta de dos fases. Al terminar la primera fase se obtiene la información de si el sistema es compatible o no y tras terminar la segunda se obtiene inmediatamente el sistema escrito en forma resuelta. Veamos cómo se aplican esas dos fases poniendo como ejemplo la resolución de este sistema:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 &= 13. \end{aligned} \quad \text{cuya matriz es} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 10 & 13 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

1º) Fase de eliminación progresiva: Escribir el sistema en *forma escalonada*

Comenzamos asegurándonos de que en la primera ecuación aparezca la primera incógnita del sistema. En nuestro ejemplo no aparece y cuando eso ocurre elegimos una ecuación en la que sí aparezca y realizamos una *operación elemental de intercambio* entre esa ecuación y la primera.

En nuestro ejemplo podemos intercambiar la primera ecuación con la segunda, operación que denotamos $E_1 \leftrightarrow E_2$.

$$\begin{array}{rcl} x_2 + x_3 + x_4 &=& -1 \\ x_1 \quad + x_3 + 2x_4 &=& 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 &=& 13 \end{array} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{array}{rcl} x_1 \quad + x_3 + 2x_4 &=& 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 &=& -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 &=& 13 \end{array}$$

Evidentemente, las operaciones que hagamos sobre un sistema podemos hacerlas ahorrando escritura sobre la matriz del sistema; por ejemplo esta operación si la realizamos sobre la matriz del sistema sería *intercambio de las filas* 1 *y* 2 y la denotaríamos $F_1 \leftrightarrow F_2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 10 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 10 & 13 \end{pmatrix}.$$

Para realizar el siguiente paso señalamos la posición de la primera incógnita en la primera ecuación para recordar que esa es la incógnita de referencia en el siguiente paso, así que nuestro sistema queda así:

$$\begin{array}{rcl} \boxed{x_1} \quad + x_3 + 2x_4 &=& 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 &=& -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 &=& 13 \end{array} \tag{1.3}$$

Como nos hemos asegurado de que el coeficiente de esa incógnita de referencia sea no nulo, podemos usar esa ecuación en operaciones de reemplazo para eliminar la primera incógnita de todas las demás ecuaciones en las que aparezca. En nuestro ejemplo sólo necesitamos realizar en este paso la operación de reemplazo: "restar la primera ecuación a la tercera". Esta operación la denotamos mediante $E_3 - E_1$ y, en general denotaremos mediante $E_k + cE_h$ la operación de "sumar a la ecuación k la ecuación h multiplicada por c". Así pues, este paso es:

operación de reemplazo

$$\begin{array}{rcl} \boxed{x_1} \quad + x_3 + 2x_4 &=& 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 &=& -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 &=& 13 \end{array} \xrightarrow{E_3 - E_1} \begin{array}{rcl} \boxed{x_1} \quad + x_3 + 2x_4 &=& 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 &=& -1 \\ 2x_2 - 4x_3 + 8x_4 &=& 10 \end{array} \tag{1.4}$$

Si realizamos esta operación sobre la matriz del sistema tendríamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 10 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Observando el sistema al que hemos llegado en (1.4) vemos que el subsistema formado por las ecuaciones posteriores a la primera carece de la primera incógnita por lo que puede ser tratado como un sistema en sí mismo (con una incógnita menos) y podemos aplicar toda esta primera fase a dicho subsistema. En nuestro ejemplo empezaríamos señalando la incógnita x_2 en la ecuación 2 (porque es la primera del subsistema y tiene coeficiente distinto de cero) y usando esa ecuación para eliminar la x_2 de la ecuación restante:

$$\begin{array}{rcl} \boxed{x_1} \quad + x_3 + 2x_4 &=& 3 \\ \boxed{x_2} + x_3 + x_4 &=& -1 \\ 2x_2 - 4x_3 + 8x_4 &=& 10 \end{array} \xrightarrow{E_3 - 2E_2} \begin{array}{rcl} \boxed{x_1} \quad + x_3 + 2x_4 &=& 3 \\ \boxed{x_2} + x_3 + x_4 &=& -1 \\ -6x_3 + 6x_4 &=& 12 \end{array}$$

o, trabajando sobre la matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 8 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

La primera fase ha terminado porque queda solamente una ecuación por utilizar. Señalamos la primera incógnita de coeficiente no nulo en esa ecuación y con ello el sistema queda preparado para realizar la segunda fase.

$$\begin{array}{rrrrl} \boxed{x_1} & & +\ x_3 & +2x_4 = & 3 \\ & \boxed{x_2} & +\ x_3 & +\ x_4 = & -1 \\ & & \boxed{-6x_3} & +6x_4 = & 12 \end{array} \quad \text{cuya matriz es} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

incógnitas básicas
posiciones pivote

Las incógnitas que han quedado señaladas se llaman las *incógnitas básicas* y las correspondientes posiciones en la matriz del sistema se llaman las *posiciones pivote* de la matriz. En este caso las posiciones pivote son las posiciones $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,3)$. La forma de la matriz del sistema al final de esta fase tiene estas propiedades: 1. El elemento en cada posición pivote es el primer elemento no nulo de su fila, y (2) todos los elementos a la izquierda y debajo de cada posición pivote son nulos. Por estas propiedades, la forma de la matriz del sistema al final de esta fase se llama *forma escalonada*.

forma escalonada

1.1.1 Ejercicio de tarea. ¿Qué puede decirse de una matriz en la que la posición $(1,2)$ es una posición pivote?

Solución: Que tiene al menos dos columnas, que la primera es toda de ceros y que la segunda tiene algún elemento no nulo.

2^{o}) Fase de reducción regresiva: Escribir el sistema en *forma escalonada reducida*

En este ejemplo, lo más sencillo es empezar realizando la operación de reescalado que consiste en multiplicar la tercera ecuación por el *factor de reescalado* $-\frac{1}{6}$. Con esto conseguimos dos cosas: primero, que los coeficientes de la ecuación queden simplificados con lo que serán más sencillos los cálculos posteriores; y, segundo, que el coeficiente de su *incógnita principal*[1] sea 1, lo cual es un requisito para llegar a escribir el sistema en forma resuelta.

incógnita principal

$$\begin{array}{rrrrl} \boxed{x_1} & & +\ x_3 & +2x_4 = & 3 \\ & \boxed{x_2} & +\ x_3 & +\ x_4 = & -1 \\ & & \boxed{-6x_3} & +6x_4 = & 12 \end{array} \xrightarrow{(-\frac{1}{6}) \times E_3} \begin{array}{rrrrl} \boxed{x_1} & & +\ x_3 & +2x_4 = & 3 \\ & \boxed{x_2} & +\ x_3 & +\ x_4 = & -1 \\ & & \boxed{x_3} & -x_4 = & -2, \end{array}$$

o, trabajando sobre la matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{6}) \times F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ahora eliminamos la incógnita x_3 de las ecuaciones 1 y 2 restando de cada una de ellas la ecuación 3:

$$\begin{array}{rrrrl} \boxed{x_1} & & +\ x_3 & +2x_4 = & 3 \\ & \boxed{x_2} & +\ x_3 & +\ x_4 = & -1 \\ & & \boxed{x_3} & -x_4 = & -2 \end{array} \xrightarrow[E_1 - E_3]{E_2 - E_3} \boxed{\begin{array}{rrrrl} \boxed{x_1} & & & +3x_4 = & 5 \\ & \boxed{x_2} & & +2x_4 = & 1 \\ & & \boxed{x_3} & -\ x_4 = & -2 \end{array}} \quad \text{con matriz:} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

[1] La incógnita principal de una ecuación es la primera que aparece en ella; o sea, la primera de las incógnitas del sistema que en esa ecuación tiene coeficiente no nulo.

3º) Fase de resolución: Escribir el sistema en *forma resuelta*

Esta fase sólo es necesario realizarla en aquellos casos en que exista alguna variable libre, como en el ejemplo que estamos resolviendo en el que la incógnita x_4 es una variable libre. En estos casos, la tercera fase consiste en "despejar" cada una de las incógnitas básicas en función de las variables libres y obtener las ecuaciones paramétricas del conjunto solución:

$$\begin{array}{rrrrl} \boxed{x_1} & & & +3x_4 = & 5 \\ & \boxed{x_2} & & +2x_4 = & 1 \\ & & \boxed{x_3} & -\, x_4 = & -2 \end{array} \xrightarrow[\text{incógn. básicas}]{\text{despejar las}} \begin{array}{l} x_1 = \;\; 5 - 3x_4 \\ x_2 = \;\; 1 - 2x_4 \\ x_3 = -2 \;+ x_4 \\ x_4 \text{ libre.} \end{array} \xrightarrow[\text{paramétricas}]{\text{ecuaciones}} \begin{array}{l} x_1 = \;\; 5 - 3t \\ x_2 = \;\; 1 - 2t \\ x_3 = -2 \;+ t \\ x_4 = \qquad\;\; t. \end{array}$$

Por otra parte, si en el sistema del ejemplo no hubiese habido la incógnita x_4, entonces al final de la segunda fase ya tendríamos el sistema en forma resuelta:

$$\begin{array}{rrrl} & x_2 + & x_3 = & -1 \\ x_1 & + & x_3 = & 3 \\ x_1 + & 2x_2 - & 3x_3 = & 13 \end{array} \xrightarrow[\text{Eliminación}]{1^{\underline{a}}\text{ Fase}} \begin{array}{rrrl} \boxed{x_1} & & + x_3 = & 3 \\ & \boxed{x_2} & + x_3 = & -1 \\ & & \boxed{x_3} = & -2 \end{array} \xrightarrow[\text{Reducción}]{2^{\underline{a}}\text{ Fase}} \begin{array}{rrrl} \boxed{x_1} & & = & 5 \\ & \boxed{x_2} & = & 1 \\ & & \boxed{x_3} = & -2 \end{array} \tag{1.5}$$

Operaciones elementales de filas y las matrices equivalentes por filas

En la práctica realizaremos sobre las ecuaciones del sistema dado *operaciones elementales*, las cuales son esencialmente los tres *tipos básicos* usados más arriba, excepto que el tercer tipo de operación elemental es un poco más general que sumar una ecuación a otra: Los tres tipos de operaciones elementales son:

1. Realizar un *intercambio* de dos ecuaciones determinadas del sistema. *Intercambio.*

2. Multiplicar los dos miembros de una ecuación dada por un número distinto de cero. Esto es una operación de *reescalado*. *Reescalado.*

3. Reemplazar una ecuación por el resultado de sumarle, miembro a miembro, un múltiplo de otra ecuación *distinta*. Esto es una operación de *reemplazo*. *Reemplazo.*

Nota: Como se ha indicado más arriba, si se permitiese realizar la operación de sumar a una ecuación un múltiplo de ella misma, se podría eliminar una ecuación del sistema (sumando a esa ecuación ella misma multiplicada por -1) con el consiguiente posible cambio del conjunto solución.

Como vimos antes, las operaciones elementales se pueden realizar sobre las filas de la matriz del sistema en lugar de realizarlas sobre las ecuaciones del sistema. Se pueden realizar incluso sobre matrices cualesquiera sin necesidad de que provengan de un sistema de ecuaciones lineales, lo cual nos lleva al concepto de *matrices equivalentes por filas*: *matrices equivalentes por filas*

DEFINICIÓN 1.1.1

Matrices equivalentes por filas

Se llaman matrices equivalentes por filas *a cualesquiera dos matrices que se han obtenido una de la otra mediante la realización de una o varias operaciones elementales de filas.*

Inversas de las operaciones elementales

Sabemos que al realizar una operación elemental sobre las ecuaciones de un sistema se obtiene un nuevo sistema que tiene el mismo conjunto solución. Pero también es cierto que toda solución del sistema nuevo es solución del sistema original. Eso se debe a que el sistema original también se puede obtener a partir del nuevo mediante la realización de una operación elemental. En otras palabras: Toda operación elemental realizada sobre un sistema o sobre una matriz se puede "deshacer" mediante la realización de otra operación elemental es otra se llama la *operación inversa*. Veamos por qué es esto cierto examinando uno a uno cada tipo de operación elemental.

1. Una operación de *intercambio* se deshace al realizar de nuevo la misma operación de intercambio.

2. Una operación de *reescalado* que multiplica una cierta ecuación por c, se deshace mediante la operación de reescalado que multiplica la misma ecuación por $1/c$.

3. Una operación de *reemplazo*, como por ejemplo la que consista en sumar a la segunda ecuación la primera multiplicada por 3,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned} \xrightarrow{(2^{\text{a}}\text{ ec.}) + 3\times(1^{\text{a}}\text{ ec.})} \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 13. \end{aligned}$$

ciertamente se deshace *restando* a la segunda ecuación la primera multiplicada por 3:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 13 \end{aligned} \xrightarrow{(2^{\text{a}}\text{ ec.}) - 3\times(1^{\text{a}}\text{ ec.})} \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 1. \end{aligned}$$

En general, la operación de reemplazo «*sumar a la ecuación i-ésima la ecuación j-ésima multiplicada por k*» (representada simbólicamente por $E_i + kE_j$) se deshace mediante la operación de reemplazo «*sumar a la ecuación i-ésima la ecuación j-ésima multiplicada por* $-k$» ($E_i - kE_j$). Nótese la importancia de que en la operación de reemplazo $E_i + kE_j$ sea $i \neq j$.

En resumen:

Toda operación elemental tiene una inversa que es también una operación elemental del mismo tipo.

Como es indiferente realizar las operaciones elementales sobre los sistemas o sobre sus matrices (ampliadas), se deduce lo siguiente:

Si las matrices ampliadas de dos sistemas de ecuaciones son equivalentes por filas, entonces los dos sistemas tienen el mismo conjunto solución.

Las cuestiones de existencia y unicidad (y cómo averiguar si un sistema tiene muchas, una o ninguna solución sin resolverlo)

Para responder las cuestiones de existencia y unicidad para un sistema de ecuaciones lineales, basta realizar la primera fase del proceso de resolución. Al terminar esta primera fase ya se conoce si el sistema es compatible simplemente mirando si hay al menos una incógnita (esto es, con coeficiente distinto de cero) en cada ecuación *no nula*. Además, si esto se cumple y en el

Una ecuación *nula* es una de la forma $0 = 0$.

sistema hay alguna variable libre, sabremos que el sistema es *indeterminado*, como en el primer ejemplo resuelto más arriba:

$$\begin{array}{rcl} x_2 + x_3 + x_4 &=& -1 \\ x_1 \quad + x_3 + 2x_4 &=& 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 &=& 13 \end{array} \xrightarrow[\text{Eliminación}]{1^{\underline{a}}\text{ Fase}} \begin{array}{rcl} \boxed{x_1} \quad + x_3 + 2x_4 &=& 3 \\ \boxed{x_2} + x_3 + x_4 &=& -1 \\ \boxed{-6x_3} + 6x_4 &=& 12 \end{array}$$

Por otra parte, si el sistema es compatible y no hay ninguna variable libre (como en el caso del sistema en (1.5)) entonces el sistema es *determinado*:

$$\begin{array}{rcl} x_2 + x_3 &=& -1 \\ x_1 \quad + x_3 &=& 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &=& 13 \end{array} \xrightarrow[\text{Eliminación}]{1^{\underline{a}}\text{ Fase}} \begin{array}{rcl} \boxed{x_1} \quad + x_3 &=& 3 \\ \boxed{x_2} + x_3 &=& -1 \\ \boxed{x_3} &=& -2 \end{array}$$

Los sistemas incompatibles se detectan cuando a lo largo de la primera fase aparece alguna ecuación no nula en la que no hay ninguna incógnita, como en este ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} x_1 \quad + x_3 &=& 3 \\ x_2 + x_3 &=& -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& 13 \end{array} \xrightarrow{E_3 - E_1} \begin{array}{rcl} \boxed{x_1} \quad + x_3 &=& 3 \\ \boxed{x_2} + x_3 &=& -1 \\ 2x_2 + 2x_3 &=& 10 \end{array} \xrightarrow{E_3 - 2E_2} \begin{array}{rcl} \boxed{x_1} \quad + x_3 &=& 3 \\ \boxed{x_2} + x_3 &=& -1 \\ 0x_2 + 0x_3 &=& 12 \end{array} \quad (1.6)$$

La última ecuación es $0 = 12$, lo cual es imposible o contradictorio y denota una inconsistencia en el sistema. Tal sistema, por lo tanto, no tiene ninguna solución, o sea: es un *sistema incompatible*.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1.

Ejercicios de la sección 1.1 Operaciones elementales

En los ejercicios 1 y 2, escribe las ecuaciones paramétricas del objeto geométrico indicado.

1. La recta de $\mathbf{R}^2$ de ecuación $x - 3y = 5$.

2. El plano de $\mathbf{R}^3$ de ecuación $2x + 6y - 8z = 4$.

En cada uno de los ejercicios 3 y 4 se da un sistema de ecuaciones lineales en forma resuelta y se pide escribir las ecuaciones paramétricas del conjunto solución.

3.
$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_3 \\ x_2 &= 2 - 3x_3 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - x_2 + 2x_4 \\ x_3 &= 7 - 4x_4 \end{aligned}$$

5. Dadas las dos rectas del plano $x_1 - 2x_2 = 1$, $2x_1 - 4x_2 = 3$, ¿tienen un punto de intersección?. Explica tu respuesta.

6. Dadas las tres rectas del plano $x_1 - 4x_2 = 1$, $2x_1 - x_2 = -3$, y $-x_1 - 3x_2 = 4$, ¿tienen un punto de intersección común?. Explica tu respuesta.

7. La matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales ha sido transformada mediante operaciones elementales de filas a la forma que se presenta a continuación. ¿Se ha completado la primera fase del proceso de resolución?

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. ¿Es compatible el sistema de ecuaciones lineales del ejercicio anterior? En caso afirmativo ¿tiene solución única?

En los ejercicios 9 y 10 se da la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales. Expresa con palabras las siguientes dos operaciones elementales de fila a realizar para resolver el sistema.

9. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. **10.** $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 11 a 14, la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales ha sido reducida mediante operaciones de fila a la forma que se muestra. En cada caso, realiza las operaciones de fila apropiadas y describe el conjunto solución del sistema original.

11. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 15 a 18, describe la operación elemental de filas que transforma la primera matriz en la segunda. Después, describe la operación elemental de filas que transforma la segunda matriz en la primera (es decir, la operación inversa de la anterior).

15. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Determina si los sistemas de los ejercicios 19 y 20 son compatibles. No resuelvas los sistemas; no se pide la solución. Sólo hay que averiguar si existe (y, por supuesto, justificar la respuesta).

19.

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 3x_3 \quad &= 2 \\ x_2 \quad - 3x_4 &= 3 \\ -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 \quad + 7x_4 &= -5 \end{aligned}$$

20.

$$\begin{aligned} x_1 \quad - 2x_4 &= -3 \\ 2x_2 + 2x_3 \quad &= 0 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

En los ejercicios 21 a 24, determina el valor o los valores de h tales que la matriz dada es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales compatible.

21. $\begin{pmatrix} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. **22.** $\begin{pmatrix} 1 & h & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & h & 8 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 2 & -3 & h \\ -6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

25. Indica para cada uno de los siguientes enunciados si es verdadero o falso.

(a) Todas las operaciones elementales de fila son inversibles y sus inversas también son operaciones elementales de filas.

(b) Una matriz 5×6 tiene seis filas.

(c) El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales que tenga las incógnitas $x_1, \dots, x_n$ es una lista de números $s_1, \dots, s_n$ que hace de cada ecuación del sistema un enunciado verdadero cuando las incógnitas $x_1, \dots, x_n$ se sustituyen por los valores $s_1, \dots, s_n$.

(d) Las dos preguntas fundamentales acerca de un sistema de ecuaciones lineales son preguntas sobre la existencia y la unicidad de solución.

26. Indica para cada uno de los siguientes enunciados si es verdadero o falso.

(a) Las operaciones elementales de fila realizadas sobre la matriz (*ampliada*) de un sistema de ecuaciones lineales no cambian nunca el conjunto solución del sistema.

(b) Dos matrices son equivalentes por filas cuando poseen el mismo número de filas.

(c) Un sistema incompatible tiene más de una solución.

(d) Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si y sólo si ambos tienen el mismo conjunto solución.

27. ¿Para qué valores de h y k es compatible el siguiente sistema?

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= h \\ -6x_1 + 3x_2 &= k \end{aligned}$$

28. Halla una ecuación entre los parámetros g, h y k, que haga que la siguiente matriz corresponda a un sistema compatible:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -6 & h \\ -1 & 5 & -9 & k \end{pmatrix}.$$

29. Supón que el sistema presentado a continuación es compatible para todos los valores posibles de f y g. ¿Qué puede afirmarse acerca de los coeficientes c y d?. Justifica tu respuesta.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= f \\ cx_1 + dx_2 &= g \end{aligned}$$

30. Supón que a, b, c y d son constantes tales que a es diferente de cero y el sistema presentado a continuación es compatible para todos los valores posibles de f y g. ¿Qué puede afirmarse acerca de los números a, b, c y d?. Justifica tu respuesta.

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= f \\ cx_1 + dx_2 &= g \end{aligned}$$

31. (a) Demuestra que cualquier operación elemental de reescalado puede calcularse mediante una operación de reemplazo si entre éstas operaciones se admite el reemplazar una fila por el resultado de sumarle un múltiplo de ella misma (lo cual *extiende* las operaciones de reemplazo usuales en las que a una fila se le suma un múltiplo de *otra distinta*).

(b) Demuestra que cualquier operación elemental de intercambio de filas puede calcularse usando solamente operaciones de reemplazo y una operación de reescalado de factor $k = -1$. ¿Es posible obtener un intercambio usando solamente operaciones de reemplazo usuales?

1.2. La Forma Escalonada Reducida y la solución de sistemas en forma paramétrica vectorial

En esta sección definimos rigurosamente las dos fases del algoritmo de eliminación de Gauss, así como los conceptos de *matriz escalonada* y *matriz escalonada reducida* que son esenciales para toda esta asignatura. Comenzamos con una observación evidente:

> *Si sobre un sistema de ecuaciones lineales se realiza una operación elemental, y luego se escribe la matriz correspondiente al nuevo sistema obtenido, el resultado es el mismo que si se realiza dicha operación elemental sobre las filas de la matriz del sistema original.*

Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc}
\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 2 \\ - x_3 - 6x_4 &= 1 \end{aligned}
& \xrightarrow[\text{A la ec. 2 se le suma la ec. 3}]{\text{Ec. 2} + \text{Ec. 3}} &
\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_2 \qquad - 6x_4 &= 3 \\ - x_3 - 6x_4 &= 1 \end{aligned} \\
\text{matr. del sistema} \updownarrow & & \updownarrow \text{matr. del sistema} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}
& \xrightarrow[\text{A la fila 2 se le suma la fila 3}]{\text{Fila 2} + \text{Fila 3}} &
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Así pues, para resolver un sistema de ecuaciones lineales, empezaremos escribiendo la matriz del sistema aplicándole a ella el algoritmo de eliminación y reducción con lo cual obtendremos —en la primera fase— una matriz escalonada y —en la segunda fase— la *forma escalonada reducida* de la matriz del sistema.

Definiciones básicas

Llamamos *elemento principal* de una fila de una matriz al primer elemento no nulo de la misma *Elemento principal de una fila* (contando de izquierda a derecha). Toda fila no nula tiene un elemento principal. Las únicas filas que no tienen elemento principal son las filas nulas (todos cuyos elementos son cero).

DEFINICIÓN 1.2.2

Forma Escalonada y Forma Escalonada Reducida

Se llama matriz escalonada *a toda matriz que tenga las siguientes propiedades:*

1. *Todas las filas de ceros que haya en la matriz, aparecen juntas en la parte de abajo.*
2. *El elemento principal de cualquier fila no nula está estrictamente más a la derecha que el de la fila anterior si la hubiera.*

Se llama matriz escalonada reducida *a toda matriz que cumpla, además de las anteriores, las dos siguientes propiedades:*

3. *El elemento principal de cualquier fila no nula es igual a 1.*
4. *Todo elemento principal es el único no nulo de su columna.*

1.2.1 Ejercicio de tarea. Explica por qué toda matriz de una sola fila ya es automáticamente una matriz escalonada.

Una consecuencia de la definición de matriz escalonada es que en toda matriz escalonada todos los elementos de la columna de un elemento principal que estén por debajo del mismo son cero. Por tanto la única diferencia que puede haber entre una matriz escalonada reducida y una que sólo sea escalonada es el valor de algún elemento principal (que en la forma reducida tiene que ser siempre 1) o de algún elemento de la columna de un elemento principal que esté *por encima de él* (que en la forma reducida tiene que ser siempre 0).

Para cualquier sistema de ecuaciones lineales al que apliquemos el proceso de resolución descrito en la sección anterior, el sistema obtenido al final de la primera fase tiene siempre como matriz una matriz escalonada. Por ejemplo, la matriz del sistema obtenido en (1.6),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

es una matriz escalonada.

Unicidad de la forma escalonada reducida

Toda matriz no nula se puede transformar en una matriz escalonada mediante la realización de una o varias operaciones elementales de filas. La matriz escalonada obtenida depende de la matriz inicial y de cuáles sean las operaciones de fila realizadas, pero lo que no depende de las operaciones realizadas son el número de filas no nulas y las posiciones de sus elementos principales en la forma escalonada.

Por ejemplo, supongamos que queremos poner en forma escalonada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Según que se realicen las operaciones que aparecen a continuación en la lista de la izquierda o en la de la derecha, se obtendrá una matriz u otra

(1) (Fila 2) − (Fila 1),
(2) (Fila 3) − 2 × (Fila 1),
(3) (Fila 3) − (Fila 2)

$$\text{Resultado: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 2 × (Fila 2),
(2) (Fila 3) − (Fila 2),
(3) (Fila 2) − 2 × (Fila 1)
(4) (Fila 3) + $\frac{1}{2}$(Fila 2)

$$\text{Resultado: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Ejercicio de tarea. Realiza sobre la matriz (1.8) las operaciones de la lista de la izquierda para comprobar el resultado indicado. Haz lo mismo con la lista de la derecha y finalmente calcula una forma escalonada de la matriz (1.8) distinta de las anteriores usando diferentes operaciones elementales.

PROPOSICIÓN 1.2.1

Si una matriz es equivalente por filas a dos matrices escalonadas diferentes, esas dos matrices escalonadas tienen el mismo número de elementos principales y los tienen en las mismas posiciones.

Debido a lo que enuncia esta proposición, se puede dar la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.2.3

Posiciones pivote y columnas pivote de una matriz

Se llaman posiciones pivote *de una matriz a las posiciones de los elementos principales en cualquier forma escalonada de la misma. Toda columna correspondiente a una posición pivote se llama una* columna pivote *de la matriz.*

Por tanto, el número de columnas pivote en una matriz dada es igual al número de posiciones pivote de esa matriz (o, simplemente, igual al número de pivotes de esa matriz). Por ejemplo, debido a que, como se comprobó en (1.6), la matriz (1.7) es una forma escalonada de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

se deduce que las posiciones pivote de ésta son las posiciones $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,4)$ ya que éstas son las posiciones de los elementos principales de la forma escalonada. Además, las columnas pivote de esta matriz son la 1ª, la 2ª y la 4ª; es decir, las columnas pivote de esta matriz son:

$$1^{\underline{a}}\text{: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 2^{\underline{a}}\text{: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 4^{\underline{a}}\text{: } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Ejercicio de tarea. Determina las columnas pivote de la matriz (1.8).

Solución: $1^{\underline{a}}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $2^{\underline{a}}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1.2.4 Ejercicio de tarea. Toda matriz no nula tiene al menos una posición pivote ¿Por qué?. Supongamos que A es una matriz no nula pero que sus primeras k columnas son nulas ¿Cuál es la primera posición pivote de A?.

Solución: Posición $(1, k+1)$ (fila 1, columna $k+1$).

TEOREMA 1.2.1

Unicidad de la forma escalonada reducida

Toda matriz es equivalente por filas a una única matriz escalonada reducida, la cual se llama la forma escalonada reducida *de la matriz dada.*

El algoritmo de reducción por filas

El proceso de reducción por filas de una matriz es el proceso de calcular la forma escalonada reducida de esa matriz y se corresponde con las dos primeras fases del proceso de resolución de sistemas visto en la sección anterior. En una primera fase (llamada *fase progresiva*) se halla una matriz escalonada, y en la segunda fase (llamada *fase regresiva*) se transforma esa matriz escalonada en una matriz escalonada reducida.

Fase progresiva

Paso 1.— Si la matriz tiene una sola fila, la fase progresiva ha terminado y pasamos al paso 4, pues una matriz de una sola fila ya es automáticamente una matriz escalonada. En caso contrario, buscamos la primera columna no nula y determinamos en qué fila de esa columna está el primer elemento no nulo. La fila que lo contenga se intercambia con la primera fila de la matriz (de forma que el elemento no nulo encontrado pasa ahora a ser el elemento principal de la primera fila).

Paso 2.— Usar operaciones elementales de reemplazo para hacer cero todos los elementos bajo el elemento principal de la primera fila que no sean cero de por sí.

Paso 3.— Si el elemento principal usado en el paso anterior estaba en la última columna de la matriz, la fase progresiva ha terminado y pasamos al paso 4. En caso contrario consideramos la submatriz formada por los elementos que están a la derecha de la columna y por debajo de la fila del elemento principal usado en el paso anterior. Aplicamos a esa submatriz recursivamente los pasos 1, 2 y 3.

Fase regresiva

Paso 4.— Empezando por la última fila no nula de la matriz escalonada hallada en la fase anterior, usamos el elemento principal para hacer cero todos los elementos de su columna por encima de él mediante operaciones de reemplazo. Después hacemos lo mismo con la penúltima fila y continuamos así hasta hacerlo con la segunda fila.

Paso 5.— Reescalamos cada fila no nula de la matriz obtenida en el paso anterior dividiéndola por su elemento principal. De esta forma todos los elementos principales de la matriz se hacen iguales a 1.

Aplicaciones a la resolución de sistemas

El algoritmo de reducción por filas nos lleva directamente a una descripción explícita del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales cuando se le aplica a la matriz del sistema.

Supongamos, por ejemplo, que la matriz de un sistema tiene la siguiente forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces el sistema correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 \quad -5x_3 &= 1 \\ x_2 + \ x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{cuya forma resuelta es:} \qquad \begin{aligned} &x_1 = 1 + 5x_3 \\ &x_2 = 4 - \ x_3 \\ &x_3 \ \text{libre.} \end{aligned}$$

Descripción paramétrica del conjunto solución

A partir de la forma escalonada reducida de la matriz de un sistema es inmediato escribir una *forma resuelta* el sistema dado en la que las incógnitas básicas son las correspondientes a las columnas pivote y las demás son las variables libres. Estas variables libres actúan como parámetros y podemos escribir un parámetro variable en lugar de las incógnitas. Por ejemplo, en el caso anterior en el que la variable libre es x_3 podemos escribir t en lugar de x_3 y añadir la igualdad $x_3 = t$, con lo que tendríamos las siguientes *ecuaciones paramétricas del conjunto solución*: *ecuaciones paramétricas del conjunto solución*

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 5t \\ x_2 &= 4 - \ t \\ x_3 &= t. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.— Supongamos que la forma escalonada reducida de la matriz de un sistema de ecuaciones lineales es

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & 0 & \mathbf{5} & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{8} & 0 & \mathbf{4} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Entonces, las ecuaciones paramétricas del conjunto solución son

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - \mathbf{2}x_3 - \mathbf{3}x_4 - \mathbf{5}x_6 \\ x_2 &= \ \ 9 + \mathbf{1}x_3 - \mathbf{8}x_4 - \mathbf{4}x_6 \\ x_3&, \ \text{libre} \\ x_4&, \ \text{libre} \\ x_5 &= \ \ 6 - 7x_6 \\ x_6&, \ \text{libre.} \end{aligned} \qquad \text{o bien:} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -1 - \mathbf{2}r - \mathbf{3}s - \mathbf{5}t \\ x_2 &= \ \ 9 + \mathbf{1}r - \mathbf{8}s - \mathbf{4}t \\ x_3 &= r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= \ \ 6 - 7t \\ x_6 &= t. \end{aligned}$$

1.2.5 Ejercicio de tarea. Escribe las ecuaciones paramétricas del conjunto solución de un sistema para el que la forma escalonada reducida de su matriz es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $x_1 = 3 - 2s + t, x_2 = s, x_3 = 4 + 2t, x_4 = t, x_5 = 5.$

1.2.6 Ejercicio de tarea. Para cada uno de los siguientes casos escribe una matriz escalonada reducida que sea la matriz de un sistema del tipo indicado. Escribe también las ecuaciones paramétricas del conjunto solución en los casos en que el sistema sea compatible.

(a) Compatible determinado. (b) Compatible indeterminado. (c) Incompatible.

Acerca de la sustitución regresiva

Un programa de ordenador calcularía una forma escalonada y después podría realizar una sustitución regresiva. Por ejemplo, si al final de la primera fase se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 10 \\ x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= -5 \\ x_4 - x_5 &= 4 \end{aligned}$$

el programa podría hallar x_4 de la ecuación 3, después sustituiría la expresión hallada en las ecuaciones 2 y 1, despejaría x_2 de la segunda, etc. Nosotros no debemos hacer eso.

El esquema que seguimos nosotros de hallar primero la forma escalonada reducida requiere el mismo número de operaciones aritméticas que la sustitución regresiva del programa, pero es mucho más sólido que aquél ya que reduce mucho la probabilidad de cometer errores cuando se hacen los cálculos a mano. Por ello es importante adquirir la disciplina de resolver los sistemas siempre mediante el cálculo de la forma escalonada reducida.

Ejemplo: Resolución completa de un sistema paso a paso. Vamos a resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 7x_2 - 21x_3 + 21x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

El primer paso es escribir la matriz del sistema y determinar la posición pivote de la primera fila (primera posición pivote): La matriz es $\begin{pmatrix} 0 & 7 & -21 & 21 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la posición pivote de la primera fila tendrá que ser la $(1,1)$ porque hay algún elemento no nulo en la primera columna.

El segundo paso es realizar un intercambio de filas para que el elemento en posición pivote no sea cero. En este ejemplo podemos elegir la segunda o tercera fila. Elegir la tercera simplificará los cálculos porque el elemento en posición pivote será un 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -21 & 21 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -21 & 21 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación creamos ceros bajo la primera posición pivote. Basta realizar la operación de reemplazo $F_2 - 2F_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -21 & 21 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -21 & 21 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinamos la segunda posición pivote: $(2,2)$. El elemento que hay en ella no es cero: No hay que hacer ningún intercambio. Usamos el elemento en posición pivote para crear ceros debajo de él. La operación de reemplazo es $F_3 + 7F_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -21 & 21 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + 7F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hemos terminado la fase progresiva. Vemos que la última posición pivote es $(3,4)$ y que no está en la columna de la derecha. Ningún pivote está en la columna de la derecha, por tanto el sistema es compatible. También vemos que hay una variable libre (que es la correspondiente a la tercera coluna, es decir x_3) por tanto el sistema es indeterminado. Comenzamos la fase regresiva. La primera operación es reescalar la tercera fila para que el elemento en posición pivote sea 1. La operación es $-\frac{1}{7}F_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora creamos ceros encima de la última posición pivote. Las dos operaciones de reemplazo que hay que hacer son $F_2 + 4F_3$ y $F_1 - 2F_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1-2F_3]{F_2+4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El siguiente paso es reescalar la segunda fila para que el elemento en posición pivote sea 1 y luego creamos ceros encima de ese posición pivote. En este caso es igual de sencillo reescalar primero y crear los ceros después o a la inversa. Si creamos ceros primero haremos la operación $F_1 + F_2$ y a continuación cambiamos de signo a la segunda fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_2]{F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto se termina la fase regresiva y hemos hallado la *forma escalonada reducida* de la matriz del sistema. Ahora vamos a escribir las ecuaciones paramétricas del conjunto solución. Comenzamos escribiendo el sistema que corresponde a la última matriz obtenida (la forma escalonada reducida), despejando las variables básicas x_1, x_2 y x_4 tras lo cual es fácil escribir las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{rl} x_1 \quad +2x_3 & =1 \\ x_2 - 3x_3 & =0 \\ x_4 & =0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 - 2x_3 \\ x_2 = 3x_3 \\ x_3 \ \ \text{libre} \\ x_4 = 0 \end{array} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 - 2s \\ x_2 = 3s \\ x_3 = s \\ x_4 = 0 \end{array}}$$

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1, Ejercicio 2, Ejercicio 3, Ejercicio 4, Ejercicio 5, Ejercicio 6.

Ejercicios de la sección 1.2 Forma Escalonada Reducida

---

1. Para las siguientes matrices determina cuáles están en forma escalonada reducida y cuáles sólo en forma escalonada (pero no reducida).

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Repite el ejercicio anterior, con las matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 3 y 4 halla la forma escalonada reducida de la matriz dada. Señala las posiciones pivote rodeando con un círculo los elementos en posición pivote tanto en la matriz final como en la matriz original. Enumera las columnas pivote.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

5. Describe las formas escalonadas posibles de una matriz no nula de 2 filas y 2 columnas. Utiliza el símbolo de punto, "$\bullet$", para representar un elemento no nulo y el de asterisco, "$*$", para representar un elemento que puede ser cero o no.

6. Repite el ejercicio 5 para una matriz no nula de 3 filas y 3 columnas.

En los ejercicios 7 a 10 cada matriz representa la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales. En cada caso, determina si el sistema es compatible. De ser así, determina si la solución es única o no. Al igual que en el ejercicio 5, el punto "$\bullet$" representa un número no nulo y el asterisco "$*$" un número que puede ser distinto de cero o no.

7. $\begin{pmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & 0 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 11 y 12, determina el valor o los valores de h tales que la matriz sea la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales compatible.

11. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & h \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & h & -7 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 13 y 14, elije h y k de tal forma que el sistema dado: (a) no tenga solución, (b) tenga una solución única, y (c) tenga muchas soluciones. Da respuestas por separado para cada caso.

13.

$$\begin{aligned} x_1 + hx_2 &= 2 \\ 4x_1 + 8x_2 &= k \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 3x_1 + hx_2 &= k \end{aligned}$$

En los ejercicios 15 y 16, indica, para cada enunciado, si es verdadero o falso. Justifica cada respuesta.

15.

(a) En algunos casos, una matriz se puede reducir por filas a más de una matriz en forma escalonada reducida, usando diferentes secuencias de operaciones elementales de filas.

(b) El algoritmo de reducción por filas se aplica solamente a matrices ampliadas de sistemas de ecuaciones lineales.

(c) Una incógnita básica de un sistema de ecuaciones lineales es una incógnita que corresponde a una columna pivote en la matriz de coeficientes.

(d) Resolver un sistema de ecuaciones lineales es lo mismo que encontrar las ecuaciones paramétricas de su conjunto solución.

(e) Si una fila en la forma escalonada de la matriz ampliada de un sistema es $(0\ 0\ 0\ 5\ 0)$, entonces el sistema de ecuaciones lineales asociado es incompatible.

16.

(a) La forma escalonada de una matriz es única.

(b) En una matriz, las posiciones pivote dependen de si se usan o no intercambios de fila en el proceso de eliminación.

(c) La reducción de una matriz a forma escalonada es la fase progresiva del proceso de reducción por filas.

(d) Si un sistema tiene variables libres, entonces el conjunto solución contiene muchas soluciones.

(e) Una solución general de un sistema es una descripción explícita de todas las soluciones del sistema.

17. Supongamos que una matriz de coeficientes 3×5 para un sistema tiene tres columnas pivote. ¿Es compatible el sistema? ¿Por qué sí o por qué no?

18. Supongamos que un sistema de ecuaciones lineales tiene una matriz ampliada de 3×5 cuya quinta columna es una columna pivote. ¿Es compatible el sistema? ¿Por qué sí o por qué no?

19. Supongamos que la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales tiene una posición pivote en cada fila. Explica por qué este sistema es compatible.

20. Supongamos que la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y tres incógnitas tiene un pivote en cada columna. Explica por qué tiene este sistema una solución única.

21. Completa la siguiente frase utilizando el concepto de columnas pivote: "Si un sistema de ecuaciones lineales es compatible, entonces la solución es única si, y sólo si, ..."

22. ¿Qué debería saberse acerca de las columnas pivote de una matriz ampliada para poder asegurar que el sistema de ecuaciones lineales es compatible y tiene una solución única?

23. Un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas se denomina sistema *subdeterminado*. Supongamos que un sistema así resulta ser compatible. Explica por qué necesariamente existirá un número infinito de soluciones.

24. Pon un ejemplo de un sistema subdeterminado incompatible de dos ecuaciones y tres incógnitas.

25. Un sistema de ecuaciones lineales con más ecuaciones que incógnitas se denomina sistema *sobredeterminado*. ¿Puede ser compatible un sistema así?. Pon un ejemplo concreto de un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas que justifique tu respuesta.

Para los sistemas cuyas matrices se dan en los ejercicios 26 a 33, halla las soluciones generales escribiéndolas en forma paramétrica vectorial.

26. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ **27.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & -6 \end{pmatrix}$ **29.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ **31.** $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

34. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(a) Escribe la matriz A del sistema (matriz ampliada).

(b) Halla una matriz equivalente a A que esté en forma escalonada.

(c) A la vista de dicha forma escalonada discute las cuestiones de existencia y unicidad de soluciones del sistema de ecuaciones dado.

(d) Halla la forma escalonada reducida de A.

(e) En caso de ser compatible, escribe la solución general del sistema en forma paramétrica vectorial.

Halla las ecuaciones paramétricas del conjunto solución de los sistemas dados en los ejercicios 35 y 36.

35. $$\begin{aligned} x_1 \qquad - 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 7 \\ x_1 - 3x_2 \qquad &= 5. \end{aligned}$$

36. $$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 5x_3 &= -2. \end{aligned}$$

1.3. Combinaciones lineales de vectores en $\mathbf{R}^n$ y las ecuaciones vectoriales

Vectores en $\mathbf{R}^n$

En general, para todo número entero positivo n llamaremos vector de $\mathbf{R}^n$ a todo conjunto ordenado de n números reales y lo representaremos normalmente como una columna de números reales (esto es, una matriz con n filas y una sola columna), aunque a veces, para ahorrar papel lo representaremos en la forma $(a_1, \ldots, a_n)$ que no hay que confundir con una matriz de una sola fila (en una matriz no hay comas). El espacio $\mathbf{R}^n$.

Operaciones con vectores y sus propiedades algebraicas

Las dos operaciones básicas que se pueden realizar con los vectores de $\mathbf{R}^n$, son la *suma de vectores* y la *multiplicación de un número por un vector* (o "reescalado" de vectores), las cuales se efectúan *componente a componente* como en el siguiente ejemplo:

Ejemplos de operaciones con vectores de $\mathbf{R}^2$:

$$\text{Si}\quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},\quad \text{entonces}\quad \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si}\quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ c=3,\quad \text{entonces}\quad c\,\mathbf{u} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2 \\ 3\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dichas dos operaciones básicas de vectores de $\mathbf{R}^n$, dado que se definen en términos de las operaciones de los números, tienen propiedades análogas a las de éstas:

(a) Propiedades de la suma de vectores (“Grupo conmutativo”):

1. Propiedad *asociativa* de la suma: $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$.
2. Existencia del neutro de la suma o *vector cero*: $\mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$.
3. Existencia de *opuestos* para la suma: $-\mathbf{u}+\mathbf{u} = \mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
4. Propiedad *conmutativa* de la suma: $\mathbf{v}+\mathbf{u} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$.

(b) Propiedades distributivas de la multiplicación de números por vectores (o reescalado):

1. Propiedad *distributiva* para la suma de vectores: $x(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = x\mathbf{u}+x\mathbf{v}$.
2. Propiedad *distributiva* para la suma de números: $(x+y)\mathbf{u} = x\mathbf{u}+y\mathbf{u}$.

(c) “Acción de los escalares”:

1. Propiedad *asociativa* del producto de números por vectores: $x(y\mathbf{u}) = (xy)\mathbf{u}$.
2. Ley de *identidad*: $1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$.
   (El número 1 es neutro para la multiplicación de números por vectores.)

La importancia de estas ocho propiedades de las operaciones básicas de los vectores de $\mathbf{R}^n$ radica en que todas las demás propiedades de las operaciones de vectores se deducen de ellas. Por ello decimos que estas ocho son las *propiedades fundamentales de las operaciones con vectores*. Es por estas propiedades por lo que se dice que el conjunto $\mathbf{R}^n$, para cualquier número n dado, es un *espacio vectorial*.

Combinaciones lineales de vectores; cálculo de una combinación lineal

Las propiedades algebraicas de las operaciones básicas de vectores —suma y multiplicación por escalares (o reescalado)— hacen posible realizar muchas otras operaciones, como por ejemplo la operación “punto medio” definido como:

$$\text{punto medio}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{u}+\tfrac{1}{2}\mathbf{v}.$$

Una operación algo más general es la llamada “baricentro” que se puede aplicar a un número arbitrario de vectores y está definida por la fórmula:

$$\text{baricentro}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p) = \tfrac{1}{p}(\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_p) = \tfrac{1}{p}\mathbf{a}_1+\cdots+\tfrac{1}{p}\mathbf{a}_p.$$

1.3.1 Ejercicio de tarea. ¿Cuál es el baricentro de un solo vector?

Solución: $\text{baricentro}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.

combinación lineal

La operación más general que se puede realizar combinando las operaciones básicas de vectores se llama *combinación lineal* y consiste en multiplicar cada uno de los vectores dados por un número y sumar todos los resultados:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p$$

El resultado, $\mathbf{y}$, de esta operación se llama la *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ con *coeficientes* respectivos $c_1, \ldots, c_p$. Estos coeficientes por los que han sido multiplicados los vectores $\mathbf{u}_i$ se llaman también los *pesos* de esos vectores en la combinación lineal.

peso de un vector en una combinación lineal.

Por ejemplo, vamos a calcular la combinación lineal $\mathbf{y} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}$ en la que los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y sus pesos c_1, c_2 son:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, c_1 = -1, c_2 = 2.$$

Entonces:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} = (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+10 \\ -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

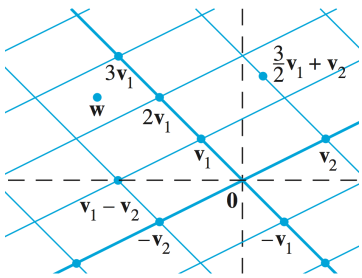
y decimos que el vector $\mathbf{y} = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ es igual a la combinación lineal de los vectores $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ con coeficientes (o pesos) respectivos -1, 2.

Si el conjunto de vectores que se quieren combinar linealmente tuviese únicamente un solo vector, las únicas combinaciones lineales que se podrían formar tendrían un solo coeficiente y un solo sumando, y darían como resultado los distintos múltiplos del vector dado.

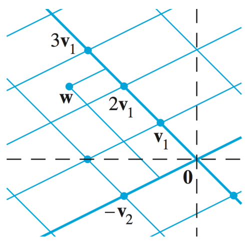
Problema inverso: expresar un vector como combinación lineal de otros dados. Ecuaciones vectoriales

El problema inverso al de calcular una combinación lineal de ciertos vectores con unos coeficientes dados es el de averiguar qué coeficientes hay que usar para que el resultado de la combinación lineal sea un vector dado. Por ejemplo:

Ejercicio: Averiguar los pesos que hay que dar a los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ de la siguiente figura para expresar el vector $\mathbf{w}$ como combinación lineal de ellos.



Solución:



Trazando por $\mathbf{w}$ rectas paralelas a los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ como se muestra en la figura de la derecha, observamos que es necesario calcular dos veces y media $\mathbf{v}_1$ y restarle a eso la mitad de $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{w} = \tfrac{5}{2}\mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_2.$$

Según lo dicho, la forma general del problema inverso al de calcular una combinación lineal es: "Dados en $\mathbf{R}^m$ un vector $\mathbf{b}$ y n vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, se desea saber si $\mathbf{b}$ es combinación lineal de los $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ y si lo es, cuáles deben ser los coeficientes.” Dicho de otra forma: *averiguar si es posible hallar escalares $x_1, \ldots, x_n$ tales que la ecuación*

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}. \tag{1.9}$$

sea verdadera. Toda ecuación que sea una combinación lineal con ceficientes desconocidos igualada a un vector, como (1.9), se conoce como una *ecuación vectorial*.

ecuación vectorial

Ejemplo. Dados los vectores

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

averiguar si el vector $\mathbf{b}$ es igual a una combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$.

Solución: Nos piden averiguar si existen números x_1, x_2 tales que se cumpla

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$$

es decir

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Utilizando las definiciones de las operaciones de vectores, la combinación lineal en el miembro de la izquierda de esta ecuación vectorial de la siguiente forma:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -5x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \\ 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -5x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \\ 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$$

de forma que la condición pedida es

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{lo cual se cumple si y sólo si} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3. \end{aligned}$$

El problema ha quedado reducido al de averiguar si un sistema de ecuaciones lineales es compatible o no. Por lo tanto, para resolverlo basta hallar una forma escalonada de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3.2 Ejercicio de tarea. Comprueba que las operaciones de filas $F_2 + 2F_1$, $F_3 + 5F_1$, $F_3 - \frac{16}{9}F_2$ realizadas en ese orden transforman esta matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ en esta otra: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Explica por qué de ello se deduce que la respuesta a la pregunta del ejemplo anterior es afirmativa.

Equivalencia entre sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones vectoriales

Lo más importante que se aprende del ejemplo anterior es que toda ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

es equivalente a un sistema de ecuaciones lineales. La matriz de coeficientes del sistema tiene por columnas los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, y el vector de términos independientes es $\mathbf{b}$. En otras palabras:

la matriz ampliada del sistema es la matriz cuyas columnas son $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ $\mathbf{b}$. Tal matriz la vamos a denotar de la siguiente forma:

$$[\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_n \ \mathbf{b}].$$

Por ejemplo, si $\mathbf{a}_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{a}_2 = \left(\begin{smallmatrix}3\\-1\\5\end{smallmatrix}\right)$ y $\mathbf{b} = \left(\begin{smallmatrix}4\\1\\7\end{smallmatrix}\right)$ entonces la ecuación vectorial $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$ es

$$x_1 \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\7\end{pmatrix},$$

y es equivalente al sistema cuya matriz es

$$[\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2 \ \ \mathbf{b}] = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 7\end{pmatrix}.$$

Cada solución del sistema nos proporciona una forma de expresar $\mathbf{b}$ como combinación lineal de los $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Por tanto, preguntarse si $\mathbf{b}$ es combinación lineal de los $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ es lo mismo que preguntarse si ese sistema es compatible.

Conjunto generado por varios vectores

Dados n vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ de $\mathbf{R}^m$ hay infinitas posibles combinaciones lineales de los mismos, usando distintos pesos en cada una. Esto es cierto incluso en el caso de que el número de vectores sea igual a 1 siempre que ese vector no sea el vector cero, pues un vector no nulo tiene infinitos múltiplos.

El conjunto de todos los vectores que se obtienen al formar combinaciones lineales de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, se conoce como el *conjunto generado* por $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

conjunto generado por $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$

DEFINICIÓN 1.3.4

Conjunto generado por varios vectores

Dados n vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ de $\mathbf{R}^m$ se llama conjunto generado *por dichos vectores —y se denota* $\mathrm{Gen}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$*— al conjunto de todos los vectores de $\mathbf{R}^m$ que son combinación lineal de los $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Es decir:* $\mathrm{Gen}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.*

Preguntarse si un vector $\mathbf{b}$ pertenece al conjunto generado $\mathrm{Gen}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ es lo mismo que preguntarse si $\mathbf{b}$ es combinación lineal de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. En consecuencia, según lo visto más arriba, la cuestión de si un vector pertenece a un conjunto generado es equivalente a la de si un sistema de ecuaciones lineales es compatible.

El conjunto generado por varios vectores es un subespacio vectorial.— El conjunto generado por un conjunto de vectores de $\mathbf{R}^n$ no es un subconjunto cualquiera. Es evidente que la suma de dos combinaciones lineales de los vectors $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ es otra combinación lineal de esos vectores y lo mismo ocurre al multiplicar una combinación lineal de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ por un número. En consecuencia, si llamamos U al conjunto generado por los vectors $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ y $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ son dos vectores de ese conjunto U, la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es otro vector del mismo conjunto U y el producto de cualquier vector de U por un número es también otro vector de U. Esto hace que el conjunto generado por los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ no sea un subconjunto cualquiera de $\mathbf{R}^n$ sino uno con una estructura de espacio vectorial *propia*, por lo cual se dice que $\mathrm{Gen}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ es un *subespacio vectorial* de $\mathbf{R}^n$.

subespacio vectorial

DEFINICIÓN 1.3.5

Espacio fila y espacio columna de una matriz

Si A es una matriz $m \times n$, se llama espacio fila *de A al conjunto generado por las filas de A, que es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$. Y se llama* espacio columna *de A al conjunto generado por las columnas de A, el cual es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^m$.*

Efecto de las operaciones elementales de filas sobre las relaciones que haya entre las columnas de una matriz

Supongamos que $\mathbf{b}$ es un vector que es combinación lineal de los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ con coeficientes respectivos $c_1, \ldots, c_n$. Esto significa que $(c_1, \ldots, c_n)$ es una solución de la ecuación vectorial $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ y por tanto $(c_1, \ldots, c_n)$ es también una solución del sistema cuya matriz es $[\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_n \ \mathbf{b}]$. Debido a que las operaciones elementales de filas no cambian el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, si al realizar una o varias operaciones elementales de filas sobre la matriz $[\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_n \ \mathbf{b}]$ se obtiene como resultado la matriz $[\mathbf{a}'_1 \ \ldots \ \mathbf{a}'_n \ \mathbf{b}']$, entonces $(c_1, \ldots, c_n)$ será también una solución del sistema cuya matriz es esta matriz obtenida, $[\mathbf{a}'_1 \ \ldots \ \mathbf{a}'_n \ \mathbf{b}']$ y esto nos dice que el vector $\mathbf{b}'$ será una combinación lineal de los vectores $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n$ con los mismos coeficientes $c_1, \ldots, c_n$. Resumiendo:

Si la última columna de una matriz dada es combinación lineal de las anteriores, en cualquier matriz equivalente por filas a la dada también se cumple que la última columna es combinación lineal de las anteriores y con los mismos coeficientes.

Pero además, si en la matriz A se permutan varias columnas de forma que se obtiene una nueva matriz, B, una operación elemental de filas realizada sobre B dará el mismo resultado que si esa operación de filas se realiza sobre A y al resultado se le aplica la permutación de columnas que había transformado A en B. La justificación última de este hecho está en la propiedad conmutativa de la suma de vectores. Debido a esta propiedad, en el resultado anterior es irrelevante que la columna que es combinación lineal de las otras sea la última o no, lo cual nos lleva al siguiente teorema:

TEOREMA 1.3.1

Si una columna de una matriz dada es combinación lineal de las demás, en cualquier matriz equivalente por filas a la dada también se cumple que la columna correspondiente es combinación lineal de las demás y con los mismos coeficientes.

Dicho de otra forma: Sea A la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Si uno de éstos, digamos el vector $\mathbf{a}_i$ es combinación lineal de los otros y si al realizar una o varias operaciones elementales de fila sobre A se obtiene una matriz A' cuyas columnas son los vectores $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n$, entonces la columna $\mathbf{a}'_i$ de A' sigue siendo combinación lineal de las otras columnas de A' y con los mismos coeficientes con los que se obtenía $\mathbf{a}_i$.

El teorema anterior tiene una importante consecuencia: Observemos que en una matriz escalonada toda columna no pivote es combinación lineal de las que la preceden (las que están a su izquierda), e incluso podemos decir que es combinación lineal de *las columnas pivote que la preceden*. Esto implica que:

En toda matriz escalonada cada columna no pivote es combinación lineal de las columnas pivote.

En consecuencia, el teorema anterior implica que lo mismo es cierto para cualquier matriz y tenemos:

COROLARIO 1.3.1

En toda matriz cada columna no pivote es combinación lineal de las columnas pivote y por lo tanto todo vector del espacio columna es combinación lineal de las columnas pivote. Dicho de otra forma: Las columnas pivote de una matriz bastan para generar su espacio columna.

Las operaciones elementales de filas conservan el espacio fila de una matriz

Sea A una matriz cualquiera y sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ los vectores determinados por las filas de A (de forma que la matriz traspuesta es $A^{\mathrm{T}} = [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_m]$). Sea ahora $\mathbf{u}$ una combinación lineal de las filas de A,

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m. \tag{1.10}$$

Si la matriz B es el resultado de realizar una operación elemental de filas sobre A, entonces el vector $\mathbf{u}$ es también combinación lineal de las filas de B.

Esto es evidente en el caso de que la operación elemental sea una operación de intercambio (porque ésta sólo afectaría al orden de los sumandos de la combinación lineal (1.10)) y también es evidente si se trata de una operación de reescalado (si la primera fila de B es la primera fila de A multiplicada por k se obtiene $\mathbf{u}$ haciendo la combinación lineal de las filas de B que tiene coeficientes $\frac{1}{k}c_1, c_2, \dots, c_m$). Veamos por qué la propiedad tambén se cumple si la operación elemental es una operación de reemplazo.

Supongamos que la operación es «sumar a la primera fila la segunda multiplicada por k». Entonces las filas de B son

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{v}_m' = \mathbf{v}_m$$

y tendríamos

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m \\
&= c_1\mathbf{v}_1 + c_1k\mathbf{v}_2 + (c_2 - c_1k)\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m \\
&= c_1(\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2) + (c_2 - c_1k)\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m \\
&= c_1\mathbf{v}_1' + (c_2 - c_1k)\mathbf{v}_2' + c_3\mathbf{v}_3' + \cdots + c_m\mathbf{v}_m',
\end{aligned}$$

lo que muestra que $\mathbf{u}$ es una combinación lineal de las filas de B.

Como consecuencia de lo anterior tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 1.3.2

Las operaciones elementales de filas conservan el espacio fila

El conjunto generado por las filas de una matriz es el mismo que el conjunto generado por las filas de cualquier matriz equivalente por filas a ella.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1, Ejercicio 2.

Ejercicios de la sección 1.3 Combinaciones lineales

1. Demuestra que $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbf{R}^n$.

En los ejercicios 2 y 3, halla $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-2\mathbf{v}$.

2. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

En los ejercicios 4 y 5, representa los siguientes vectores utilizando flechas en una gráfica en el plano xy : $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $-\mathbf{v}$, $-2\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-2\mathbf{v}$. Observa que $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ es el vértice de un paralelogramo cuyos otros vértices son $\mathbf{u}$, $\mathbf{0}$ y $-\mathbf{v}$.

4. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como en el ejercicio 2.

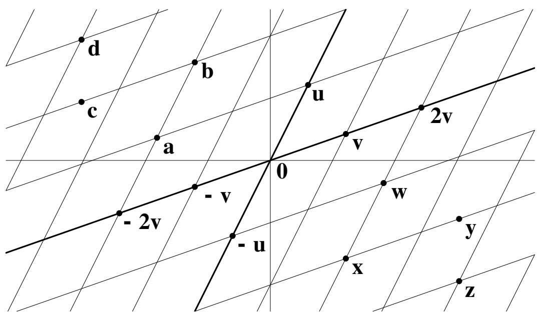
5. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como en el ejercicio 3.

En los ejercicios 6 y 7, escribe un sistema de ecuaciones que sea equivalente a la ecuación vectorial dada.

6. $x_1\begin{pmatrix}6\\-1\\5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-7\\-5\end{pmatrix}$

7. $x_1\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Usa la siguiente figura para escribir cada vector indicado en los ejercicios 8 y 9 como una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Es cada vector en $\mathbf{R}^2$ una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$?.



8. Los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$.

9. Los vectores $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$.

En los ejercicios 10 y 11, escribe una ecuación vectorial que sea equivalente al sistema de ecuaciones dado.

10.

$$\begin{aligned} x_2+5x_3&=0\\ 4x_1+6x_2-x_3&=0\\ -x_1+3x_2-x_3&=0 \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} 4x_1+x_2+3x_3&=9\\ x_1-7x_2-2x_3&=2\\ x_1+6x_2-5x_3&=15 \end{aligned}$$

En los ejercicios 12 y 13, averigua si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$.

12. $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\8\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix}$.

13. $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-5\\11\\-7\end{pmatrix}$.

En los ejercicios 14 y 15, averigua si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de los vectores formados a partir de las columnas de la matriz A.

14. $A=\begin{pmatrix}1&-4&2\\0&3&5\\-2&8&-4\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\-7\\-3\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}1&-2&-6\\0&3&7\\1&-2&5\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}11\\-5\\9\end{pmatrix}$

En los ejercicios 16 y 17, escribe cinco vectores que pertenezcan a Gen$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$. Para cada vector, indica los coeficientes usados con $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ para generar el vector e indica los tres elementos del vector. No hagas ningún bosquejo; trabaja algebraicamente.

16. $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}7\\1\\-6\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-5\\3\\0\end{pmatrix}$

17. $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$

18. Halla los valores de h para los que $\mathbf{y}$ estará en Gen$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ si

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}5\\-4\\-7\end{pmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}-4\\3\\h\end{pmatrix}$$

19. Sean $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de h está $\mathbf{b}$ en el plano generado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$?.

20. Sean $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de h está $\mathbf{b}$ en el plano generado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$?.

21. Da una descripción geométrica del subespacio $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de $\mathbf{R}^3$ para los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

22. Da una descripción geométrica de $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para los vectores del ejercicio 17.

23. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Demuestra que el vector $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ está en $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ para todos los valores de h y k.

24. Construye una matriz A de 3×3, con todos los elementos distintos de cero, y un vector $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^3$ tal que $\mathbf{b}$ no esté en el conjunto generado por las columnas de A.

En los ejercicios 25 y 26, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica cada una de tus respuestas.

25.

(a) Una notación equivalente para el vector $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ es $[-4 \ \ 3]$.

(b) Los puntos en el plano correspondientes a $(-2, 5)$ y $(-5, 2)$ están sobre una recta que pasa por el origen.

(c) Un ejemplo de una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es el vector $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1$.

(d) El conjunto solución del sistema cuya matriz ampliada es $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{b}]$ es igual al conjunto solución de la ecuación vectorial $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$.

(e) Cualesquiera que sean los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ el conjunto generado por ellos, $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, siempre representa un plano que pasa por el origen.

26.

(a) Cualquier lista de cinco números reales es un vector en $\mathbf{R}^5$.

(b) El vector $\mathbf{u}$ se obtiene cuando al vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ se le suma el vector $\mathbf{v}$.

(c) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores distintos de cero, $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ contiene la recta que pasa por $\mathbf{u}$ y por el origen.

(d) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores distintos ambos no nulos, $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ contiene la recta que pasa por $\mathbf{u}$ y por $\mathbf{v}$.

(e) Preguntar si el sistema correspondiente a una matriz ampliada $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{b}]$ tiene alguna solución es lo mismo que preguntar si $\mathbf{b}$ está en el conjunto generado $\text{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

27. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Denotemos las columnas de A mediante $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, y sea $W = \text{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

(a) ¿Está $\mathbf{b}$ en W? ¿Cuántos vectores hay en W?.

(b) Demuestra que $\mathbf{a}_1$ está en W. [Indicación: No se requieren operaciones de fila.]

28. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, sea $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, y sea W el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

(a) ¿Está $\mathbf{b}$ en W?.

(b) Demuestra que la tercera columna de A está en W.

29. Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ puntos en $\mathbf{R}^3$, y supongamos que para $j = 1, \ldots, k$ un objeto de masa m_j, se localiza en el punto $\mathbf{v}_j$. Los físicos llaman a tales objetos masas puntuales. La masa total del sistema es

$$m = m_1 + \cdots + m_k$$

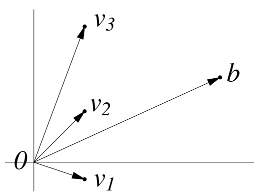
El centro de gravedad (o centro de masa) del sistema es

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + \cdots + m_k\mathbf{v}_k}{m}.$$

Calcula el centro de gravedad del sistema constituido por las siguientes masas puntuales:

Punto	Masa
$\mathbf{v}_1 = (5, -4, 3)$	2 g
$\mathbf{v}_2 = (4, 3, -2)$	5 g
$\mathbf{v}_3 = (-4, -3, -1)$	2 g
$\mathbf{v}_4 = (-9, 8, 6)$	1 g

30. Considera los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^2$ que se muestran en la figura. La ecuación vectorial $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$, ¿tiene alguna solución?. En caso afirmativo, ¿es única?. Utiliza la figura para explicar tus respuestas.



31. Usa los vectores $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ para verificar las siguientes propiedades algebraicas de $\mathbf{R}^n$.

(a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$,

(b) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ para cada número c.

32. Usa el vector $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ para verificar las siguientes propiedades algebraicas de $\mathbf{R}^n$.

(a) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = 0$,

(b) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ para cualesquiera números c y d.

Lección 2, 7 feb 2023

1.4. La ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Hemos visto que un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas es equivalente a una sola "ecuación vectorial" en n incógnitas, la cual consiste en una combinación lineal (cuyos coeficientes son las n incógnitas) igualada a un vector. Ahora bien, una combinación lineal (de las columnas de una matriz) es justamente lo que se obtiene al multiplicar una matriz por un vector. Esto nos lleva a tomar la combinación lineal como definición del producto matriz por vector.

Definición del producto de una matriz por un vector.

DEFINICIÓN 1.4.6

Producto matriz por vector

Sean A una matriz y sean los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ las columnas de A. Si $\mathbf{x}$ es un vector de $\mathbf{R}^n$, el producto de la matriz A por el vector $\mathbf{x}$ se define *como la combinación lineal de los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ con coeficientes las componentes de $\mathbf{x}$, es decir:*

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Por ejemplo, el producto de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ por el vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ es la combinación lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+18 \\ 10+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

¿No es esta definición más complicada que la regla "fila por columna"?

La forma de calcular el producto de una matriz A por un vector $\mathbf{x}$ como "combinación lineal", consiste en reescalar cada columna de la matriz A usando como factor la correspondiente componente del vector $\mathbf{x}$ y después sumar todas las columnas reescaladas. El vector resultante es el producto $A\mathbf{x}$.

Hay otra forma muy conocida de obtener el mismo resultado, que se conoce como la "regla fila por columna". Imaginemos que la matriz dada sólo tenga una fila, por ejemplo $A = (1 \ \ 3)$. Entonces la definición 1.4.6 nos dice que

$$(1 \quad 3) \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 5 \times 1 + 6 \times 3 = 23.$$

La regla *fila por columna* consiste en imaginar a nuestra matriz como formada por filas; multiplicamos cada una de estas filas por el vector dado con lo que cada uno de estos resultados es un número. El resultado final es el vector columna formado por todos estos números.

¿Qué ventaja tiene el método usado en la definición? La ventaja es que hace que sea evidente que *toda ecuación matricial es equivalente a una ecuación vectorial y viceversa.*

Según la definición 1.4.6 del producto matriz por vector, el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada tiene por columnas los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ y cuya representación vectorial es la ecuación

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b},$$

tiene el mismo conjunto solución que la ecuación matricial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Por tanto podemos decir:

Para cualquier matriz A, existe alguna solución $\mathbf{x}$ de la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si y sólo si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A.

Sistemas que son compatibles para cualesquiera términos independientes

¿Qué condiciones tiene que cumplir la matriz de coeficientes de un sistema para que ese sistema sea compatible cualesquiera que sean los términos independientes?. En términos de la ecuación matricial asociada esa cuestión es: ¿qué condición debe cumplir una matriz A para que la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenga solución cualquiera que sea el vector $\mathbf{b}$?. Evidentemente esto se cumple si y sólo si el conjunto generado por las columnas de A es todo $\mathbf{R}^m$ donde m es el número de filas de A. La respuesta la da el siguiente teorema:

TEOREMA 1.4.1

Sea A una matriz y sea m el número de filas de A (lo que quiere decir que las columnas de A son vectores de $\mathbf{R}^m$). Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes (es decir, si una es verdadera todas lo son):

(a) *Para todo vector $\mathbf{b}$ de $\mathbf{R}^m$ la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución.*
(b) *Todo vector $\mathbf{b}$ de $\mathbf{R}^m$ es combinación lineal de las columnas de A.*
(c) *El conjunto generado por las columnas de A es $\mathbf{R}^m$ ("las columnas de A generan $\mathbf{R}^m$").*
(d) *A tienen una posición pivote en cada fila.*
(e) *A tiene m posiciones pivote.*
(f) *Una forma escalonada cualquiera de A no tiene ninguna fila de ceros.*

Evidentemente, una condición suficiente para que se cumpla el apartado (a) es que la forma escalonada reducida de A no tenga ninguna fila de ceros, pues si esto se cumple ningún vector de términos independientes puede dar lugar a un sistema incompatible. Por otro lado esa condición también es necesaria porque si la forma escalonada reducida de A tuviese una fila de ceros sería fácil construir un vector de términos independientes tal que en la forma escalonada reducida tuviese un pivote y el sistema fuese incompatible. El resto de las afirmaciones ya han sido vistas. El teorema anterior tiene este corolario:

COROLARIO 1.4.2

Sea A una matriz de m filas cuyas columnas generan $\mathbf{R}^m$. Entonces el número de columnas de A es mayor o igual que m (ya que A tiene m filas y una posición pivote en cada una, las cuales tienen que estar en distintas columnas).

Propiedades de linealidad del producto matriz por vector $A\mathbf{x}$

De la definición del producto de matriz por vector y de las propiedades de las operaciones con vectores se deducen fácilmente las siguientes propiedades llamadas *propiedades de linealidad*: *propiedades de linealidad*

TEOREMA 1.4.2

Propiedades de linealidad del producto matriz por vector

Si A es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ son vectores de $\mathbf{R}^m$, y c es un número real, entonces

(a) $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$.

(b) $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$.

Ejercicios de la sección 1.4 La ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & -8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comprueba que $\mathbf{p}$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Utiliza este hecho para mostrar una combinación lineal específica de las columnas de A que sea igual a $\mathbf{b}$.

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Comprueba la primera propiedad del producto de matrices por vectores calculando, en este caso, $A(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ y $A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$.

En los ejercicios 3 a 6 halla cada uno los productos de dos formas: (a) usando la definición del producto de una matriz por un vector y (b) usando la regla “fila por columna”. Si un producto no está definido, explica por qué.

3. $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & -3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 7 y 8 usa la definición del producto $A\mathbf{x}$ para escribir la ecuación matricial como una ecuación vectorial.

7. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -8 & 4 \\ -2 & -7 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \\ 9 & -6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 9 y 10 usa la definición del producto $A\mathbf{x}$ para escribir la ecuación vectorial como una ecuación matricial.

9. $x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.

10.

$$z_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} + z_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

En los ejercicios 11 y 12, primero escribe el sistema de ecuaciones lineales como una ecuación vectorial y después como una ecuación matricial.

11.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 9 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} 8x_1 - x_2 &= 4 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

En los ejercicios 13 y 14, escribe la matriz ampliada para el sistema de ecuaciones lineales que corresponde a la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Después resuelve el sistema y escribe la solución en forma paramétrica vectorial.

13.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

14.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

15. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en el plano de $\mathbf{R}^3$ generado por las columnas de A?. ¿Por qué sí o por qué no?

16. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en el subconjunto en $\mathbf{R}^3$ generado por las columnas de A?. ¿Por qué sí o por qué no?.

En los ejercicios 17 y 18, demuestra que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución para todas las $\mathbf{b}$ posibles, y describe el conjunto de todas las $\mathbf{b}$ para las cuales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sí tiene solución.

17. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Los ejercicios 19 a 22 se refieren a las matrices A y B que se presentan a continuación. Realiza los cálculos adecuados que justifiquen tus respuestas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

19. ¿Cuántas filas de A contienen una posición pivote?. La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ¿tiene solución para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^4$?

20. ¿Las columnas de B generan $\mathbf{R}^4$?. La ecuación $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$, ¿tiene solución para cada $\mathbf{y}$ en $\mathbf{R}^4$?

21. ¿Puede escribirse cada vector en $\mathbf{R}^4$ como una combinación lineal de las columnas de la matriz A?. ¿Las columnas de A generan $\mathbf{R}^4$?

22. ¿Puede escribirse cada vector en $\mathbf{R}^4$ como una combinación lineal de las columnas de la matriz B?. ¿Las columnas de B generan $\mathbf{R}^4$?

23. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. ¿Genera $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ a $\mathbf{R}^4$?. ¿Por qué sí o por qué no?

24. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. ¿Genera $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ a $\mathbf{R}^3$?. ¿Por qué sí o por qué no?

En los ejercicios 25 y 26, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica cada respuesta.

25.

(a) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se conoce como una ecuación vectorial.

(b) Un vector $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de una matriz A si, y sólo si, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución.

(c) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible si la matriz ampliada $[A\ \mathbf{b}]$ tiene una posición pivote en cada fila.

(d) El primer elemento en el producto $A\mathbf{x}$ es una suma de productos.

(e) Si las columnas de una matriz A de orden $m \times n$ generan $\mathbf{R}^m$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible para cada vector $\mathbf{b}$ de $\mathbf{R}^m$.

(f) Si A es una matriz $m \times n$ y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es incompatible para algún $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^m$, entonces A no puede tener una posición pivote en cada fila.

26.

(a) Cualquier ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ corresponde a una ecuación vectorial con el mismo conjunto solución.

(b) Cualquier combinación lineal de vectores de $\mathbf{R}^m$ siempre puede escribirse en la forma de producto $A\mathbf{x}$ para una matriz A y un vector $\mathbf{x}$.

(c) El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{b}]$ es el mismo que el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$.

(d) Si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es incompatible, entonces $\mathbf{b}$ no está en el conjunto generado por las columnas de A.

(e) Si la matriz ampliada $[A\ \mathbf{b}]$ tiene una posición pivote en cada fila, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es incompatible.

(f) Si A es una matriz $m \times n$ cuyas columnas no generan $\mathbf{R}^m$, entonces necesariamente la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es incompatible para algún vector $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^m$.

27. Comprueba que $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$.
Usa este hecho para (sin realizar operaciones de filas) hallar los valores de los coeficientes c_1, c_2 y c_3 tales que

$$\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

28. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comprueba que $3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} - \mathbf{w} = 0$ y utiliza este hecho para (sin realizar operaciones de filas) encontrar x_1 y x_2 que satisfagan la ecuación

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

29. Sean $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ y $\mathbf{v}$ vectores en $\mathbf{R}^5$, y sean x_1, x_2, x_3 tres números desconocidos. Escribe la siguiente ecuación vectorial como una ecuación matricial explicando el significado de cada símbolo nuevo que necesites utilizar.

$$x_1\mathbf{q}_1 + x_2\mathbf{q}_2 + x_3\mathbf{q}_3 = \mathbf{v}.$$

30. Reescribe la siguiente ecuación matricial (numérica) en forma simbólica como una ecuación vectorial, y utiliza los símbolos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ para los vectores y $c_1, c_2, \ldots$ para los coeficientes. Define lo que representa cada símbolo usando los datos de la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

31. Construye una matriz 3×3, en forma no escalonada, cuyas columnas generen $\mathbf{R}^3$. Demuestra que dicha matriz tiene la propiedad deseada.

32. Construye una matriz 3×3, en forma no escalonada, cuyas columnas no generen $\mathbf{R}^3$. Demuestra que dicha matriz tiene la propiedad deseada.

33. Sea A una matriz 3×2. Explica por qué la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no puede ser compatible para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^3$. Generaliza tu argumento para el caso de una matriz A arbitraria con más filas que columnas.

34. ¿Podría un conjunto de tres vectores en $\mathbf{R}^4$ generar todo $\mathbf{R}^4$? Explica tu respuesta. ¿Qué sucede con n vectores en $\mathbf{R}^m$ cuando n es menor que m?

35. Supongamos que A es una matriz 4×3 y $\mathbf{b}$ un vector en $\mathbf{R}^4$ con la propiedad de que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única. ¿Qué puede decirse acerca de la forma escalonada reducida de A? Justifica tu respuesta.

36. Supongamos que A es una matriz 3×3 y $\mathbf{b}$ un vector en $\mathbf{R}^3$ con la propiedad de que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única. Explica por qué las columnas de A necesariamente generan todo $\mathbf{R}^3$.

37. Sean A una matriz 3×4, $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ dos vectores en $\mathbf{R}^3$, y $\mathbf{w} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$. Supongamos que $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$ para algunos vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ en $\mathbf{R}^4$. ¿Qué hecho permite concluir que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ es compatible?.

38. Sean A una matriz de 5×3, sea $\mathbf{y}$ un vector en $\mathbf{R}^3$, y sea $\mathbf{z}$ el vector de $\mathbf{R}^5$ dado por $\mathbf{z} = A\mathbf{y}$. ¿Qué hecho permite concluir que el sistema $A\mathbf{x} = 4\mathbf{z}$ es compatible?

En los ejercicios 39 a 42, determina si las columnas de la matriz generan a $\mathbf{R}^4$.

39. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 & 8 \\ -5 & -3 & 4 & -9 \\ 6 & 10 & -2 & 7 \\ -7 & 9 & 2 & 15 \end{pmatrix}$.

40. $\begin{pmatrix} 5 & -7 & -4 & 9 \\ 6 & -8 & -7 & 5 \\ 4 & -4 & -9 & -9 \\ -9 & 11 & 16 & 7 \end{pmatrix}$.

41. $\begin{pmatrix} 12 & -7 & 11 & -9 & 5 \\ -9 & 4 & -8 & 7 & -3 \\ -6 & 11 & -7 & 3 & -9 \\ 4 & -6 & 10 & -5 & 12 \end{pmatrix}$.

42. $\begin{pmatrix} 8 & 11 & -6 & -7 & 13 \\ -7 & -8 & 5 & 6 & -9 \\ 11 & 7 & -7 & -9 & -6 \\ -3 & 4 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

43. En la matriz del ejercicio 41, halla una columna que se pueda borrar sin que las columnas restantes dejen de generar a $\mathbf{R}^4$.

44. En la matriz del ejercicio 42, halla una columna que se pueda borrar sin que las columnas restantes dejen de generar a $\mathbf{R}^4$. ¿Podría borrarse más de una columna?

1.5. Conjuntos solución

Forma vectorial paramétrica de la solución

El uso de vectores nos permite escribir las ecuaciones paramétricas del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales en una forma especialmente simple y reveladora: *La forma vectorial paramétrica*, que es la siguiente:

Forma vectorial paramétrica de la solución.

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k, \tag{1.11}$$

vector de traslación. vectores generadores.

donde k es el número de variables libres del sistema. Al expresar la solución en esta forma, el vector $\mathbf{p}$ se llama el *vector de traslación* y los vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ se llaman los *vectores generadores*. El vector de traslación es evidentemente una solución particular (la que corresponde a dar valor cero a todos los parámetros) y toda solución particular se puede usar como vector de traslación. Todas las soluciones del sistema se obtienen sumando el vector de traslación, $\mathbf{p}$, a todas las combinaciones lineales de los vectores generadores, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. La matriz $U = [\mathbf{u}_1 \ \ldots \ \mathbf{u}_k]$ cuyas columnas son los vectores generadores se llama la *matriz de los vectores generadores*.

matriz de los vectores generadores.

Conocidas la ecuaciones paramétricas del conjunto solución, es muy sencillo ponerlas en la forma vectorial (1.11) porque ello no requiere ningún cálculo adicional, solamente es necesario reescribir dichas ecuaciones. Por ejemplo, para las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 11x_3 \\ x_2 &= 2 - x_3 \\ x_4 &= -1 - 6x_3 \end{aligned}$$

(x_3 libre), la forma vectorial es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}. \quad \text{o sea:} \quad \mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{u} \quad \text{con:} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

¿Cómo se consigue llegar a esto? Para conseguirlo hacemos lo siguiente:

(a) Primeramente, para cada una de las variables libres x_i, añadimos la identidad $x_i = x_i$ y escribimos las incógnitas en orden:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 11x_3 \\ x_2 &= 2 - x_3 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= -1 - 6x_3. \end{aligned}$$

(b) Después escribimos estas ecuaciones en forma vectorial, para lo cual escribiremos la columna de coeficientes de cada variable libre multiplicada por la misma y una columna de términos independientes si los hubiera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(c) Finalmente podemos sustituir los nombres de las variables libres *en los miembros de la derecha* por nuestros nombres favoritos de parámetros, y así es como hemos llegado a lo escrito más arriba, donde se ha usado como parámetro la letra t en lugar de x_3.

Ejercicio resuelto:

Suponiendo que las ecuaciones paramétricas del conjunto solución de cierto sistema son las siguientes:

$$x_1 = -5x_2, \quad x_3 = 3 - x_2 + 2x_4 \quad (x_2 \text{ y } x_4 \text{ libres}),$$

escribir la solución general del sistema en forma vectorial paramétrica y escribir la matriz de los vectores generadores.

Solución: Siguiendo los pasos indicados antes,

(1) Para cada una de las variables libres x_i (que aparecen en los miembros de la derecha), añadimos la identidad $x_i = x_i$:

$$\begin{aligned} x_1 &= -5x_2, \\ x_2 &= x_2 \end{aligned}$$

$$x_3 = 3 - x_2 + 2x_4,$$
$$x_4 = x_4.$$

(2) Re-escribimos estas ecuaciones en forma vectorial: para ello escribimos la columna de coeficientes de cada variable libre multiplicada por esa variable libre mas la columna de términos independientes:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Sustituimos los nombres de las variables libres en los miembros de la derecha por nuestros nombres favoritos de parámetros:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{o:} \quad \mathbf{x} = \mathbf{p} + s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} \quad \text{con} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Los *vectores generadores* del conjunto solución.

En estas ecuaciones del conjunto solución, la matriz de los *vectores generadores* es

$$U = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5.1 Ejercicio de tarea. Escribe la forma escalonada reducida de la matriz U del ejercicio resuelto anterior. ¿Por qué no hace falta realizar ningún cálculo?

Pista: Fíjate en las filas 2 y 4.

Una propiedad importante de la matriz de los vectores generadores

La matriz $U = [\mathbf{u}_1 \ \ldots \ \mathbf{u}_k]$ de los vectores generadores de las ecuaciones (1.11) tiene la siguiente propiedad:

Todas las columnas de U son columnas pivote. Esto es lo mismo que decir que su forma escalonada reducida es una matriz identidad completada con $n-k$ filas de ceros (donde n es el número de filas y k el número de columnas de U).

Esto se deduce de que U contiene (salvo una reordenación de sus filas) a la matriz identidad $k \times k$. Efectivamente: para cada $j = 1, \ldots, k$ la j-ésima variable libre produce una fila de U que es la fila j de la matriz identidad $k \times k$. En consecuencia, la forma escalonada reducida de U es la matriz identidad $k \times k$ seguida de $n-k$ filas de ceros.

Caso homogéneo

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es automáticamente compatible ya que tiene una solución obvia que consiste en todas las incógnitas iguales a cero. Esta solución se llama *la solución trivial*. La única cuestión, pues, para estos sistemas es la cuestión de unicidad, es decir, si el sistema es determinado o no. Esta cuestión es equivalente a la de si el sistema tiene o no alguna variable libre: si tiene, hay infinitas soluciones, si no, la única solución es la trivial.

Para un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, la columna de la derecha de la matriz del sistema tiene todos los elementos iguales a cero y esto sigue siendo así en cualquier matriz obtenida de ella mediante operaciones elementales de filas; por tanto, también en la forma escalonada reducida de la matriz del sistema todos los elementos de la columna de la derecha son cero. Esto implica que al escribir la solución en la forma vectorial paramétrica (1.11) el vector $\mathbf{p}$ es igual a cero. Por tanto, si un sistema homogéneo tiene k variables libres, su solución en forma vectorial tiene la forma:

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k. \tag{1.12}$$

Por ejemplo, supongamos que un sistema homogéneo tenga dos variables libres. Entonces al escribir su solución en forma vectorial paramétrica encontramos dos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tales que la solución es:

$$\mathbf{x} = s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}$$

Lo cual nos dice que el conjunto solución es el plano generado por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, es decir, el conjunto de todos los vectores que son combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Igualmente, en el caso general (1.12), los "vectores generadores" $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ tienen la propiedad de que *El conjunto solución del sistema homogéneo es el conjunto generado por los vectores* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$:

$$\text{Conjunto solución} = \text{Gen}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}. \tag{1.13}$$

El conjunto solución de una sistema homogéneo tiene una gran importancia en varias partes del Álgebra Lineal y por ello recibe un nombre especial:

DEFINICIÓN 1.5.7

Espacio nulo de una matriz

Se llama espacio nulo *de una matriz A, y se denota* Nul A *al conjunto solución del sistema homogéneo* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *(cuya matriz de coeficientes es A).*

Usando esta definición, la expresión (1.13) del conjunto solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ puede escribirse así:

$$\text{Nul}\,A = \text{Gen}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}. \tag{1.14}$$

Caso no-homogéneo

En el caso de un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, supongamos que $\mathbf{p}$ es una solución particular, es decir, que el vector $\mathbf{p}$ cumple $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$. Entonces para todo vector $\mathbf{v}_h$ que sea solución del sistema homogéneo asociado (es decir, que $A\mathbf{v}_h = 0$) se cumplirá:

$$A(\mathbf{p} + \mathbf{v}_h) = A\mathbf{p} + A\mathbf{v}_h = \mathbf{b} + 0 = \mathbf{b},$$

lo cual nos dice que $\mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ es una nueva solución del sistema completo.

Por otra parte, se puede demostrar que *toda solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es igual a $\mathbf{p}$ sumado a una solución del sistema homogéno asociado*. Para convencernos de ello basta ver que si $\mathbf{x}$ es una solución del sistema completo, $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ es una solución del sistema homogéno asociado:

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = A\mathbf{x} - A\mathbf{p} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = 0.$$

Resumiendo: *La solución general de un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales se obtiene sumando una solución particular del mismo a la solución general del sistema homogéneo asociado.*

Al escribir en forma vectorial paramétrica la solución de un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k,$$

el vector $\mathbf{p}$ (que hemos llamado "el vector de traslación") es siempre una *solución particular* del sistema (es la solución para $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$. Esto implica que la solución general del sistema homogéneo asociado es:

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k,$$

En consecuencia:

El conjunto solución de un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales es el resultado de trasladar, mediante una solución particular del mismo, el conjunto solución del sistema homogéneo asociado.

1.5.2 Ejercicio de tarea. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(a) Escribe la matriz del sistema (matriz ampliada) llamando a esa matriz A.

(b) Halla una matriz equivalente a A que esté en forma escalonada.

(c) A la vista de dicha forma escalonada discute las cuestiones de existencia y unicidad de soluciones del sistema de ecuaciones dado.

(d) Halla la forma escalonada reducida de A.

(e) Escribe la solución general del sistema en forma paramétrica vectorial.

(f) Escribe el vector de traslación de la solución y la matriz U de los vectores generadores.

(g) ¿Es el conjunto solución correctamente descrito por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

Solución: (c) Compatible indeterminado. (d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 10/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (f) $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2 & -10/3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (g) Sí, porque el nuevo vector de traslación, $(-4, 0, -1, 1)$, es una solución del sistema inicial y el conjunto generado por los dos nuevos vectores generadores coincide con Col U.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1, Ejercicio 2.

Ejercicios de la sección 1.5 Conjuntos solución

1. Cada una de las siguientes ecuaciones determina un plano en $\mathbf{R}^3$. ¿Se intersecan los dos planos? Si lo hacen, describe su intersección.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

2. Escribe la solución general de $10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7$ en forma vectorial paramétrica.

En los ejercicios 3 a 6, determina si el sistema tiene una solución no trivial. Trata de emplear tan pocas operaciones elementales de fila como sea posible.

3.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} -3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0 \\ -6x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} -5x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 7 y 8, escribe en forma vectorial paramétrica la solución del sistema homogéneo dado.

7.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 9 a 14, describe todas las soluciones de $A\,\mathbf{x} = 0$ en forma vectorial paramétrica, donde A sea equivalente por filas a la matriz dada.

9. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. Supongamos que el conjunto solución de cierto sistema de ecuaciones lineales puede describirse como $x_1 = 5 + 4x_3$, $x_2 = -2 - 7x_3$, (x_3 libre). Usa vectores para describir este conjunto como una recta en $\mathbf{R}^3$.

16. Supongamos que el conjunto solución de cierto sistema de ecuaciones lineales puede describirse como $x_1 = 3x_4$, $x_2 = 8 + x_4$, $x_3 = 2 - 5x_4$, (x_4 libre). Usa vectores para describir este conjunto como una recta en $\mathbf{R}^4$.

17. Describe en forma vectorial paramétrica las soluciones del siguiente sistema.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Da también una descripción geométrica del conjunto solución y compárelo con el del ejercicio 7.

18. Igual que en el ejercicio 17, describe las soluciones del siguiente sistema en forma paramétrica vectorial y compáralo geométricamente con el conjunto solución del ejercicio 8.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 &= -6 \end{aligned}$$

19. Describe y compara los conjuntos solución de las ecuaciones $x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 0$ y $x_1 + 9x_2 - 4x_3 = -2$.

20. Describe y compara los conjuntos solución de las ecuaciones $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$ y $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4$.

En los ejercicios 21 y 22, halla la ecuación paramétrica de la recta que pasa por **a** y es paralela a **b**.

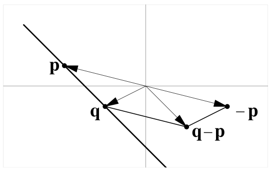
21. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 23 y 24, halla una ecuación paramétrica de la recta ℓ que pasa por **p** y **q**. [Indicación: ℓ es paralela al vector $\mathbf{q} - \mathbf{p}$.]

23. $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

24. $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$



En los ejercicios 25 y 26, indica para cada afirmación si es verdadera o falsa. Justifica cada respuesta.

25.

(a) Una ecuación homogénea siempre es compatible.

(b) La ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ proporciona una descripción explícita de su conjunto solución.

(c) La ecuación homogénea $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución trivial si, y sólo si, cuenta por lo menos con una variable libre.

(d) La ecuación $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\,\mathbf{v}$ describe una recta que pasa por **v** y es paralela a **p**.

(e) El conjunto solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el conjunto de todos los vectores de la forma $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$, donde **v** es cualquier solución de la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

26.

(a) Si $\mathbf{x}$ es una solución no trivial de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces todos los elementos de $\mathbf{x}$ son diferentes de cero.

(b) La ecuación $\mathbf{x} = x_2\mathbf{u} + x_3\mathbf{v}$, con x_2 y x_3 arbitrarios (y con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tales que no son múltiplos entre sí), describe un plano que pasa por el origen.

(c) La ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es homogénea si el vector cero es una solución.

(d) El efecto de sumar $\mathbf{p}$ a un vector es trasladar el vector en una dirección paralela a $\mathbf{p}$.

(e) El conjunto solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se obtiene al trasladar el conjunto solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ por un vector cualquiera.

27. Los siguientes dos apartados demuestran el teorema que relaciona las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con las del sistema homogéneo asociado, a saber: *Si* $\mathbf{p}$ *es una solución particular de* $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$*, las soluciones de* $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *son precisamente los vectores la forma* $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$*, donde* $\mathbf{v}$ *es una solución de* $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(a) Supongamos que $\mathbf{p}$ es una solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (de manera que $A\,\mathbf{p} = \mathbf{b}$) y que $\mathbf{v}$ es una solución de la ecuación homogénea $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Definamos el vector $\mathbf{w}$ como $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$. Demuestra que $\mathbf{w}$ es una solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(b) Sea $\mathbf{w}$ cualquier solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y sea $\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{p}$. Demuestra que $\mathbf{v}$ es una solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

28. Supongamos que $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución. Explica por qué la solución es única precisamente cuando $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial.

29. Supongamos que A es la matriz cero de orden 3×3 (todos los elementos iguales a cero). Describe el conjunto solución de la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

30. Si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, ¿el conjunto solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede ser un plano que pase por el origen? Explica tu respuesta.

En cada uno de los ejercicios 31 a 34 se da una matriz $m \times n$. Para cada uno de ellos contesta a las siguientes dos preguntas:

(a) ¿La ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial?.

(b) ¿La ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución para todos los vectores $\mathbf{b}$ de $\mathbf{R}^m$?.

31. A es una matriz de orden 3×3 con tres posiciones pivote.

32. A es una matriz de orden 3×3 con dos posiciones pivote.

33. A es una matriz de orden 3×2 con dos posiciones pivote.

34. A es una matriz de orden 2×4 con dos posiciones pivote.

35. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 21 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$, halla mediante inspección una solución no trivial de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. [*Sugerencia:* Piensa en la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ escrita como una ecuación vectorial.]

36. Dada $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -8 & 12 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$, halla mediante inspección una solución no trivial de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

37. Construye una matriz A de orden 3×3, distinta de cero, tal que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea una solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

38. Construye una matriz A de orden 3×3, distinta de cero, tal que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea una solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

39. Construye una matriz A de orden 2×2 tal que el conjunto solución de la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sea la recta ℓ en $\mathbf{R}^2$ que pasa por (4, 1) y el origen. Después, halla un vector $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^2$ tal que el conjunto solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sea una recta en $\mathbf{R}^2$ paralela a la recta ℓ. ¿Por qué esto no contradice el teorema que relaciona las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con las del sistema homogéneo asociado (ejercicio 27)?

40. Supongamos que A es una matriz de orden 3×3 e $\mathbf{y}$ un vector en $\mathbf{R}^3$ tal que la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *no* tiene solución. ¿Existe un vector $\mathbf{z}$ en $\mathbf{R}^3$ tal que la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$ tenga una solución única?.

41. Sea A una matriz de orden $m \times n$ y $\mathbf{u}$ un vector en $\mathbf{R}^n$ que satisfaga la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Demuestra que para cualquier número c, el vector $c\,\mathbf{u}$ también satisface $A\,\mathbf{x} = 0$. [Esto es, muestra que $A(c\,\mathbf{u}) = 0$.]

42. Sea A una matriz de orden $m \times n$, y sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en $\mathbf{R}^n$ con la propiedad de que $A\,\mathbf{u} = 0$ y $A\,\mathbf{v} = 0$. Explica por qué $A(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ debe ser igual al vector cero. Después explica por qué $A(c\,\mathbf{u} + d\,\mathbf{v}) = 0$ para cada par de números c y d.

1.6. Dependencia e independencia lineal

Dependencia e independencia lineal

La idea básica de *dependencia lineal* entre unos vectores dados, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, es la de que uno de esos vectores es una combinación lineal de los otros, lo cual expresamos diciendo que uno de ellos *depende linealmente* de los otros. Por ejemplo, entre los vectores $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$ y $\mathbf{w} = (2, 3)$ el último es una combinación lineal de los otros:

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}, \tag{1.15}$$

por ello decimos que $\mathbf{w}$ depende linealmente de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Lo que acabamos de decir, aunque sencillo y claro, no es la mejor forma de ver las cosas porque, siguiendo con el ejemplo, también $\mathbf{u}$ depende linealmente de $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$, y también $\mathbf{v}$ depende linealmente de $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u}$. Lo que realmente ocurre es que esos tres vectores cumplen esta ecuación (entr otras):

$$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}. \tag{1.16}$$

Esta forma de expresar la dependencia lineal es preferible a (1.15) porque aquí no se "señala" a ninguno de los vectores como "responsable" de la dependencia lineal y se está reconociendo que todos los vectores que intervienen en la "combinación lineal igualada a cero" están en pie de igualdad: cualquier vector con coeficiente distinto de cero en una combinación lineal se puede "despejar" en términos de los otros y por ello *depende linealmente* de los otros. Así pues, damos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.6.8

Relación de dependencia lineal

Dado un número finito de vectores, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, *una* relación de dependencia lineal *entre ellos es una combinación lineal no trivial de esos vectores que es igual a cero. O sea: Una relación de dependencial lineal entre los vectores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *es una igualdad de la forma:*

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

en la que los escalares $c_1, \ldots, c_n$ *no son todos cero.*

Según esta definición, si formamos la matriz A cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, dar una relación de dependencia lineal entre estos vectores es lo mismo que dar una solución no trivial del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Evidentemente, esto solamente es posible si ese sistema es indeterminado: *Las columnas de A son linealmente independientes si y sólo si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es determinado.*

Por ejemplo: Supongamos que A es la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$. Dar una relación de dependencia lineal entre las columnas de A es dar tres números x_1, x_2, x_3 no todos cero tales que

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}.$$

Pero el miembro de la izquierda es igual a un producto matriz por vector:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\mathbf{x},$$

luego dar una relación de dependencia lineal entre las columnas de A es lo mismo que dar una solución no trivial del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Conjuntos libres y conjuntos ligados

conjunto ligado
conjunto libre o vectores independientes

Un conjunto de vectores entre los que existe una relación de dependencia lineal se llama un conjunto *ligado*. Un conjunto de vectores entre los que no existe una relación de dependencia lineal se llama un conjunto *libre* y los propios vectores se llaman *linealmente independientes entre sí*. Por lo tanto:

PROPOSICIÓN 1.6.2

Las columnas de una matriz A son independientes (forman un conjunto libre de vectores) si y sólo si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es determinado. Forman un conjunto ligado si y sólo si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es indeterminado.

En términos de las columnas pivote de A:

Las columnas de una matriz A son vectores independientes si y sólo si cada una de ellas es una columna pivote.

Consecuencias de la definición

(a) El conjunto formado por el vector cero como único elemento, $\{\mathbf{0}\}$, es ligado porque en él existe la realción de dependencia lineal $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
(b) Si un conjunto de vectores es libre, cualquier subconjunto suyo es libre.
(c) Si un conjunto de vectores es ligado, cualquier conjunto que lo contenga es ligado.

La principal consecuencia de la existencia de una relación de dependencia lineal entre los vectores de un conjunto dado es el hecho de que en ese conjunto existe algún vector que es combinación lineal de los demás. Pero este hecho se puede refinar aún más:

TEOREMA 1.6.1

Dado un conjunto ordenado *de vectores: $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, si existe una relación de dependencia lineal entre ellos y $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ entonces se puede afirmar que en ese conjunto existe algún vector $\mathbf{v}_{k+1}$ que es combinación lineal* de los anteriores $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k$.

La demostración de esto es bien sencilla: Sea k el número más grande entre 1 y n tal que los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ son independientes. Por hipótesis $k \geq 1$ ya que $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, y $k < n$ porque el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es ligado. Por lo tanto $1 < k+1 \leq n$ con lo cual $\mathbf{v}_{k+1}$ es uno de los vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y es combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Independencia lineal de los conjuntos de cero, uno o dos vectores

Es muy importante saber reconocer si un conjunto de vectores es libre o ligado y para ello es útil tener claros los casos más sencillos de conjuntos de cero, uno o dos vectores.

Caso del conjunto vacío. El conjunto vacío es libre porque al no tener ningún vector no existe niguna relación de dependencia lineal entre sus (¡inexistentes!) elementos.

Caso de conjuntos de uno o dos vectores. Un conjunto formado por un solo vector es libre si y sólo si ese vector es distinto del vector cero.

Un conjunto formado por dos vectores es ligado si y sólo si alguno de los dos vectores es igual al resultado de multiplicar el otro por un número. Por ejemplo: Un conjunto formado por dos vectores de $\mathbf{R}^n$ (o $\mathbf{C}^n$) es ligado si y sólo si las componentes de los dos vectores son proporcionales.

1.6.1 Ejercicio de tarea. Sean

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(a) Sin hacer ningún cálculo se sabe que cada uno de los conjuntos $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{u},\mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{u},\mathbf{z}\}$, $\{\mathbf{v},\mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{v},\mathbf{z}\}$ y $\{\mathbf{w},\mathbf{z}\}$ es libre. ¿Por qué?

(b) ¿Es el vector $\mathbf{w}$ combinación lineal de $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{z}$?

(c) El conjunto de vectores $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z}\}$ ¿es libre o ligado?

Pista: Si A es la matriz cuyas columnas son esos vectores, ¿el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es determinado o indeterminado?

El último apartado del ejercicio 1.6.1 se puede contestar sin hacer ningún cálculo debido al siguiente hecho general:

Dependencia lineal de las columnas de una matriz con más columnas que filas:

Toda matriz que tenga más columnas que filas tendrá, necesariamente, alguna columna no pivote (ya que una matriz tiene, como mucho, un pivote en cada fila). En consecuencia las columnas de dicha matriz serán linealmente dependientes.

Independencia lineal de las columnas pivote de una matriz

Según vimos más arriba:

Las columnas de una matriz A forman un conjunto libre (son linealmente independientes) si y solamente si todas ellas son columnas pivote.

Las columnas de una matriz A forman un conjunto ligado (son linealmente dependientes) si y solamente si A contiene alguna columna no pivote.

Además, si en una matriz que esté en forma escalonada eliminamos una columna no pivote, la matriz resultante (que tiene una columna menos que la original) seguirá estando en forma escalonada. En consecuencia, las mismas operaciones elementales que transforman una matriz a forma escalonada transforman también a forma escalonada toda matriz que se obtenga de la anterior eliminando una o varias columnas no pivote. Eliminando *todas* las columnas no pivote llegamos a la conclusión de que:

Las columnas pivote de cualquier matriz son linealmente independientes.

Independencia lineal de las filas no nulas de una matriz escalonada

Si nos paramos a pensar en la matriz traspuesta de una *matriz escalonada A*, nos daremos cuenta de que sus columnas pivote se corresponden con las filas no nulas de A. Por ejemplo, sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y vemos claramente que las columnas pivote de A^{T} son precisamente las filas no nulas de A (¿Puedes justificar este punto con rigor?).

Así, llegamos a la conclusión de que:

Las filas no nulas de cualquier matriz escalonada son linealmente independientes.

Pero hay más: Supongamos que A es una matriz cualquiera (no necesariamente escalonada). Por el teorema 1.3.2 (página 23) las operaciones elementales de filas que transformen A en una matriz escalonada no cambian el espacio fila de A. Por tanto, el número de filas linealmente independientes de A es igual al de cualquier forma escalonada de A y por lo anterior es también igual al número de columnas linealmente independientes de A. De esto se deduce que una matriz y su traspuesta tienen el mismo número de posiciones pivote.

Independencia lineal de los vectores que generan la solución de un sistema homogéneo

Hemos visto que los vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ que se obtienen al expresar la solución de un sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en la forma paramétrica vectorial

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k. \tag{1.17}$$

generan el espacio nulo de A:

$$\operatorname{Nul} A = \operatorname{Gen}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

Pero además, hemos visto en la página 32 que la matriz $U = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$ cuyas columnas son esos vectores que generan el espacio nulo de A tiene un pivote en cada columna y por lo tanto la columnas de U (los vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$), son linealmente independientes.

Otra forma de llegar a la misma conclusión es mediante el siguiente razonamiento: Sabemos que *los parámetros $t_1, \ldots, t_k$ son las variables libres* del sistema homogéneo. En consecuencia, si una elección particular de valores de los parámetros da como resultado la solución cero:

$$\mathbf{0} = t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k$$

entonces para estos valores *todas las incógnitas de la ecuación son cero*, incluidas las variables libres, que son iguales cada una a uno de los parámetros. En consecuencia los valores que se habían dado a los parámetros son todos cero y la única combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ que es igual a cero es la trivial. Es decir:

Los vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ son linealmente independientes y forman conjunto generador del espacio nulo de A.

Un conjunto generador de un espacio formado por vectores idependientes se llama una *base* de ese espacio.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1, Ejercicio 2.

Ejercicios de la sección 1.6 Dependencia e independencia lineal

---

En los ejercicios 1 a 4, sean

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

1. Para cada uno de los conjuntos $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{z}\}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{v}, \mathbf{z}\}$ y $\{\mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ indica razonadamente si es libre (vectores linealmente independientes) o ligado (vectores linealmente dependientes).

2. La respuesta al ejercicio 1, ¿implica que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ es libre (vectores linealmente independientes)?.

3. Para determinar si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ es ligado, ¿es prudente verificar si $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{z}$?.

4. ¿Es el conjunto de vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ libre o ligado?

En los ejercicios 5 a 8, determina si los vectores son linealmente independientes. Justifica cada una de tus respuestas.

5. $\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\2\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\4\\8\end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}.$

En los ejercicios 9 a 12, determina si las columnas de la matriz dada son linealmente independientes. Justifica cada una de tus respuestas.

9. $\begin{pmatrix}0 & -8 & 5\\3 & -7 & 4\\-1 & 5 & -4\\1 & -3 & 2\end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix}-4 & -3 & 0\\0 & -1 & 4\\1 & 0 & 3\\5 & 4 & 6\end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix}1 & 4 & -3 & 0\\-2 & -7 & 5 & 1\\-4 & -5 & 7 & 5\end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix}1 & -3 & 3 & -2\\-3 & 7 & -1 & 2\\0 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix}.$

En los ejercicios 13 y 14 se pide: (a) ¿para qué valores de h está $\mathbf{v}_3$ en Gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$?, y (b) ¿para qué valores de h es $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un conjunto ligado (vectores linealmente dependientes). Justifica cada una de tus respuestas.

13. $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-3\\9\\-6\end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}5\\-7\\h\end{pmatrix}.$

14. $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-2\\10\\6\end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\-9\\h\end{pmatrix}.$

En los ejercicios 15 a 18, halla el o los valores de h para los cuales los vectores son linealmente dependientes. Justifica cada una de tus respuestas.

15. $\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\5\\h\end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\7\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\h\\4\end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-9\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\h\\-9\end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\h\end{pmatrix}.$

Determina por inspección si los vectores en los ejercicios 19 a 24 son linealmente independientes. Justifica cada una de tus respuestas.

19. $\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-3\\9\end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\5\\4\end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix}-8\\12\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

En los ejercicios 25 y 26, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica cada respuesta después de hacer una lectura cuidadosa del texto.

25.

(a) Las columnas de una matriz A son linealmente independientes si la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene la solución trivial.

(b) Si S es un conjunto de vectores ligado (los vectores de S son linealmente dependientes), entonces cada vector de S es una combinación lineal de los otros vectores en S.

(c) Las columnas de cualquier matriz de orden 4×5 son linealmente dependientes.

(d) Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son linealmente independientes, y si $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ es un conjunto ligado (los vectores son linealmente dependientes), entonces $\mathbf{z}$ está en Gen$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.

26.

(a) Dos vectores son linealmente dependientes si, y sólo si, están en una misma recta que pasa por el origen.

(b) Si un conjunto de vectores contiene menos vectores que coordenadas tiene cada uno de los vectores, entonces el conjunto es libre (los vectores son linealmente independientes).

(c) Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son linealmente independientes y $\mathbf{z}$ está en $\text{Gen}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, entonces el conjunto $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ es ligado.

(d) Si un conjunto de vectores de $\mathbf{R}^n$ es ligado (los vectores son linealmente dependientes), entonces el conjunto contiene más vectores que coordenadas tiene cada vector.

En los ejercicios 27 a 30, describe las posibles formas escalonadas de la matriz. Utiliza el símbolo de punto, "$\bullet$", para representar un elemento no nulo y el de asterisco, "$*$", para representar un elemento que puede ser cero o no.

27. A es una matriz de orden 3×3 con columnas linealmente independientes.

28. A es una matriz de orden 2×2 con columnas linealmente dependientes.

29. A es una matriz de orden 4×2 cuyas columnas son los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ (es decir, $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$) y $\mathbf{a}_2$ no es múltiplo de $\mathbf{a}_1$.

30. A es una matriz de orden 4×3 cuyas columnas son los vectores $\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ (es decir, $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$), tal que $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ es libre (vectores linealmente independientes) y $\mathbf{a}_3$ no está en $\text{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$.

31. ¿Cuántas columnas pivote debe tener una matriz de orden 7×5 si sus columnas son linealmente independientes?. ¿Por qué?

32. ¿Cuántas columnas pivote debe tener una matriz de orden 5×7 si sus columnas generan a $\mathbf{R}^5$? ¿Por qué?

33. Construye dos matrices A y B de orden 3×2 tales que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tenga únicamente la solución trivial, y $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tenga una solución no trivial.

34. (a) Llena el espacio en blanco de la siguiente afirmación: Si A es una matriz de orden $m \times n$, entonces las columnas de A son linealmente independientes si, y sólo si, A tiene ________ columnas pivote.

(b) Explica por qué la afirmación en (a) es verdadera.

Los ejercicios 35 y 36 deben resolverse sin realizar operaciones de filas.

Sugerencia: Escribe $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ como una ecuación vectorial.

35. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, observa que la tercera columna es la suma de las dos primeras columnas. Halla una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

36. Dada $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ -7 & 5 & 3 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, observa que la primera columna más dos veces la segunda es igual a la tercera. Halla una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

En los ejercicios 37 a 42 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, y $\mathbf{v}_4$ son vectores de $\mathbf{R}^4$. Cada enunciado es o bien verdadero (siempre se cumple) o bien falso (hay algún caso en que no se cunple). Si la afirmación es falsa, da un ejemplo que demuestre que el enunciado no siempre es cierto (tal ejemplo se llama un *contraejemplo* del enunciado). Si la afirmación es verdadera, da una justificación (un ejemplo particular *no sirve* para explicar por qué una afirmación siempre es cierta)

37. Si $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es ligado (vectores linealmente dependientes).

38. Si $\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es ligado (vectores linealmente dependientes).

39. Si $\mathbf{v}_2$ no es un múltiplo de $\mathbf{v}_1$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es libre (vectores linealmente independientes).

40. Si $\mathbf{v}_3$ no es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es libre (vectores linealmente independientes).

41. Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es un conjunto ligado (vectores linealmente dependientes), entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ también es ligado (vectores linealmente dependientes).

42. Si $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ son linealmente independientes entonces $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ también son linealmente independientes.

Sugerencia: Piensa en $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + 0 \cdot \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$.

43. Supongamos que A es una matriz de orden $m \times n$ con la propiedad de que para cada $\mathbf{b}$ *en*$\mathbf{R}^m$ la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene cuando mucho una solución. Utiliza la definición de independencia lineal para explicar por qué las columnas de A deben de ser linealmente independientes.

44. Supongamos que una matriz A de orden $m \times n$ tiene n columnas pivote. Explica por qué para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^m$ la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene cuando mucho una solución. [Indicación: Explica por qué $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no puede tener infinidad de soluciones.]

En los ejercicios 45 y 46, usa tantas columnas de A como sea posible para construir una matriz B con la propiedad de que la ecuación $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tenga solamente la solución trivial. Resuelve $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ como comprobación.

45. $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 & -7 & 2 \\ -9 & 4 & 5 & 11 & -7 \\ 6 & -2 & 2 & -4 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$

46. $A = \begin{pmatrix} 12 & 10 & -6 & -3 & 7 & 10 \\ -7 & -6 & 4 & 7 & -9 & 5 \\ 9 & 9 & -9 & -5 & 5 & -1 \\ -4 & -3 & 1 & 6 & -8 & 9 \\ 8 & 7 & -5 & -9 & 11 & -8 \end{pmatrix}.$

47. Con A y B como las del ejercicio 45, elige una columna $\mathbf{v}$ de A que no se haya usado en la construcción de B, y determina si $\mathbf{v}$ está en el conjunto generado por las columnas de B.

48. Repite el ejercicio 47 con las matrices A y B del ejercicio 46. Explica tus resultados, suponiendo que B se construyó de la manera indicada.