TEMA 7. Resolución numérica de ecuaciones.

Análisis Matemático

Profesor: José Ángel Cid

Grao en Enxeñaría Informática
Departamento de Matemáticas
Universidad de Vigo.

Calcular los ceros de una función real (es decir, resolver la ecuación $f(x) = 0$) es un problema que se presenta con mucha frecuencia en numerosos problemas científicos.

Calcular los ceros de una función real (es decir, resolver la ecuación $f(x) = 0$) es un problema que se presenta con mucha frecuencia en numerosos problemas científicos.
Este problema no puede resolverse en general en un número finito de pasos. Los métodos que emplearemos serán de tipo iterativo, es decir, a partir de la función f y de algunos datos iniciales construiremos una sucesión $\{x_n\}$ que converge a una solución $s \in \mathbb{R}$ de la ecuación $f(x) = 0$.

Calcular los ceros de una función real (es decir, resolver la ecuación $f(x) = 0$) es un problema que se presenta con mucha frecuencia en numerosos problemas científicos.
Este problema no puede resolverse en general en un número finito de pasos. Los métodos que emplearemos serán de tipo iterativo, es decir, a partir de la función f y de algunos datos iniciales construiremos una sucesión $\{x_n\}$ que converge a una solución $s \in \mathbb{R}$ de la ecuación $f(x) = 0$.
Diremos que el orden de convergencia del método es al menos $p > 0$ si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\} \to 0$, con $\varepsilon_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $|x_n - s| \leq \varepsilon_n$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = c \neq 0.$$

Antes de aplicar un método numérico para resolver $f(x) = 0$ es importante tener garantizado que esta ecuación tiene solución. Habitualmente la existencia de solución se obtendrá aplicando el Teorema de Bolzano.

Antes de aplicar un método numérico para resolver $f(x) = 0$ es importante tener garantizado que esta ecuación tiene solución. Habitualmente la existencia de solución se obtendrá aplicando el Teorema de Bolzano.

Teorema (Existencia de solución)

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua y* $f(a)f(b) < 0$ *entonces existe al menos un valor de* $s \in (a, b)$ *tal que* $f(s) = 0$.

Si además queremos garantizar que la solución es única en el intervalo $[a, b]$ resulta muy útil el siguiente resultado, que es consecuencia del Teorema de Rolle.

Si además queremos garantizar que la solución es única en el intervalo $[a, b]$ resulta muy útil el siguiente resultado, que es consecuencia del Teorema de Rolle.

Teorema (Unicidad de solución)

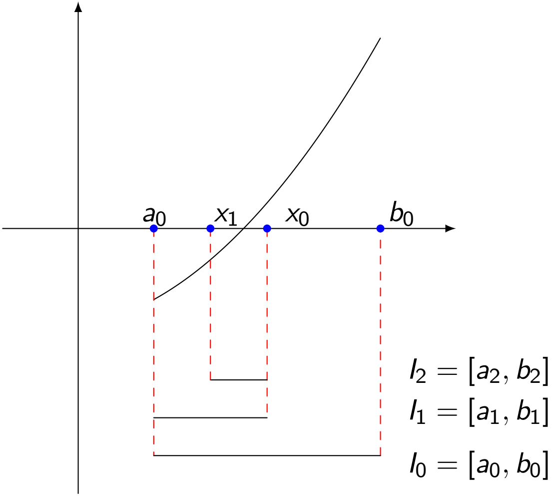
Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si además

$$f'(x) \neq 0 \quad \textit{para todo } x \in (a, b),$$

entonces existe a lo sumo un valor de $s \in (a, b)$ tal que $f(s) = 0$.

Método de Bisección

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y supongamos que $f(a)f(b) < 0$. Entonces por el teorema de Bolzano sabemos que existe $s \in (a, b)$ tal que $f(s) = 0$. La estrategia del método de bisección consiste en dividir el intervalo dado en dos partes iguales y quedarnos con el subintervalo donde se produzca el cambio de signo.


a0
x1
x0
b0
I2 = [a2, b2]
I1 = [a1, b1]
I0 = [a0, b0]

Concretamente, hacemos $a_0 = a$, $b_0 = b$ y tomamos como primera aproximación x_0 el punto medio del intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$, es decir

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2},$$

y definimos el nuevo intervalo $[a_1, b_1]$ de la siguiente forma

- si $f(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0$ es la solución y el método termina.

Concretamente, hacemos $a_0 = a$, $b_0 = b$ y tomamos como primera aproximación x_0 el punto medio del intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$, es decir

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2},$$

y definimos el nuevo intervalo $[a_1, b_1]$ de la siguiente forma

- si $f(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0$ es la solución y el método termina.
- si $f(a_0)f(x_0) < 0 \Longrightarrow a_1 = a_0$, $b_1 = x_0$.

Concretamente, hacemos $a_0 = a$, $b_0 = b$ y tomamos como primera aproximación x_0 el punto medio del intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$, es decir

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2},$$

y definimos el nuevo intervalo $[a_1, b_1]$ de la siguiente forma

- si $f(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0$ es la solución y el método termina.
- si $f(a_0)f(x_0) < 0 \Longrightarrow a_1 = a_0,\ b_1 = x_0$.
- si $f(x_0)f(b_0) < 0 \Longrightarrow a_1 = x_0,\ b_1 = b_0$.

A continuación tomamos como aproximación el punto medio de $I_1 = [a_1, b_1]$, es decir,

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

y definimos el nuevo intervalo $[a_2, b_2]$ como

- si $f(x_1) = 0 \Longrightarrow x_1$ es solución y el método termina.

A continuación tomamos como aproximación el punto medio de $I_1 = [a_1, b_1]$, es decir,

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

y definimos el nuevo intervalo $[a_2, b_2]$ como

- si $f(x_1) = 0 \Longrightarrow x_1$ es solución y el método termina.
- si $f(a_1)f(x_1) < 0 \Longrightarrow a_2 = a_1,\ b_2 = x_1$.

A continuación tomamos como aproximación el punto medio de $I_1 = [a_1, b_1]$, es decir,

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

y definimos el nuevo intervalo $[a_2, b_2]$ como

- si $f(x_1) = 0 \Longrightarrow x_1$ es solución y el método termina.
- si $f(a_1)f(x_1) < 0 \Longrightarrow a_2 = a_1,\ b_2 = x_1.$
- si $f(x_1)f(b_1) < 0 \Longrightarrow a_2 = x_1,\ b_2 = b_1.$

De nuevo tomamos como aproximación el punto medio

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2},$$

y continuamos el proceso.

De nuevo tomamos como aproximación el punto medio

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2},$$

y continuamos el proceso.
La sucesión $\{x_n\}$ generada de esta forma como los puntos medios de los intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ converge siempre a una solución s de la ecuación $f(x) = 0$. Como en cada iteración la longitud del intervalo se reduce a la mitad tenemos además la siguiente acotación del error

$$\boxed{|x_n - s| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

que nos indica además que la convergencia del método de bisección es lineal ($p = 1$).

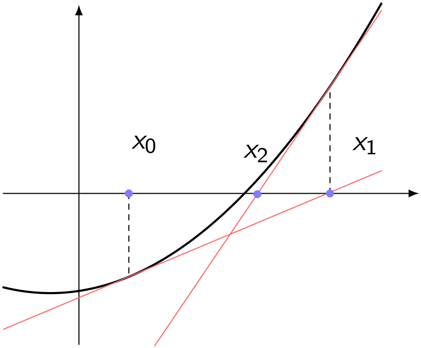
El método de bisección es muy sencillo de implementar y además genera una sucesión que siempre converge a una solución del problema. Sin embargo en la práctica se utiliza poco, debido a que existen otros métodos (como el de Newton–Raphson) que convergen mucho más rápidamente.

Método de Newton–Raphson

El método de Newton–Raphson es el método numérico más usado en la práctica para aproximar las soluciones de una ecuación $f(x) = 0$.

Método de Newton–Raphson

El método de Newton–Raphson es el método numérico más usado en la práctica para aproximar las soluciones de una ecuación $f(x) = 0$.



Se parte de una aproximación inicial a la solución $x_0 \in \mathbb{R}$ y se construye la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, cuya ecuación es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Se parte de una aproximación inicial a la solución $x_0 \in \mathbb{R}$ y se construye la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, cuya ecuación es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

El punto de corte x_1 de esta recta con el eje OX

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \Longleftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

se toma como nueva aproximación de la solución.

Repetimos ahora el procedimiento calculando la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ y su intersección con el eje OX, obteniendo

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

y continuamos el proceso.

Repetimos ahora el procedimiento calculando la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ y su intersección con el eje OX, obteniendo

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

y continuamos el proceso.
Se genera de esta forma la sucesión de soluciones aproximadas

$$x_0 \in \mathbb{R} \text{ dado}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ n \geq 0.$$

Obsérvese que para que la sucesión anterior pueda construirse es necesario que:

i) la sucesión $\{x_n\}$ esté contenida en el dominio de f;

Obsérvese que para que la sucesión anterior pueda construirse es necesario que:

i) la sucesión $\{x_n\}$ esté contenida en el dominio de f;

ii) f ha de ser derivable en x_n para todo $n \geq 0$.

Obsérvese que para que la sucesión anterior pueda construirse es necesario que:

i) la sucesión $\{x_n\}$ esté contenida en el dominio de f;

ii) f ha de ser derivable en x_n para todo $n \geq 0$.

iii) $f'(x_n) \neq 0$ para todo $n \geq 0$. Geométricamente $f'(x_n) = 0$ significa que la recta tangente a la gráfica de f en $(x_n, f(x_n))$ es horizontal y por tanto no corta al eje OX.

OBSERVACIÓN

El método de Newton–Raphson puede aplicarse también a la resolución de ecuaciones en el plano complejo. Si representamos las cuencas de atracción de las cuatro raíces de la ecuación $g(z) = z^4 - 1$ *para el método de Newton–Raphson se obtiene una imagen fractal (véase la Figura 1).*

Figura: *Cuencas de atracción de* $z^4 - 1 = 0$

Al contrario de lo que sucedía en el método de bisección, la sucesión generada por el método de Newton–Raphson no siempre es convergente, pero cuando hay convergencia ésta suele ser más rápida que en el método de bisección.

Al contrario de lo que sucedía en el método de bisección, la sucesión generada por el método de Newton–Raphson no siempre es convergente, pero cuando hay convergencia ésta suele ser más rápida que en el método de bisección.

En lo que sigue vamos a suponer que la raíz que queremos aproximar es simple, es decir $f'(s) \neq 0$. A continuación enunciamos un resultado que nos garantiza la convergencia global del método de Newton–Raphson para un punto inicial x_0 elegido de forma adecuada en un cierto intervalo $[a, b]$.

Teorema (Convergencia global del método de Newton–Raphson)

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de clase 2 satisfaciendo:*

Entonces, la ecuación $f(x) = 0$ *tiene una única solución* $s \in (a, b)$ *y si además* $x_0 \in [a, b]$ *cumple que* $f(x_0)f''(x_0) > 0$ *entonces la sucesión generada por el método de Newton–Raphson converge a* s*.*

Teorema (Convergencia global del método de Newton–Raphson)

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de clase 2 satisfaciendo:*

i) $f(a)f(b) < 0$.

Entonces, la ecuación $f(x) = 0$ *tiene una única solución* $s \in (a,b)$ *y si además* $x_0 \in [a,b]$ *cumple que* $f(x_0)f''(x_0) > 0$ *entonces la sucesión generada por el método de Newton–Raphson converge a* s.

Teorema (Convergencia global del método de Newton–Raphson)

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de clase 2 satisfaciendo:*

i) $f(a)f(b) < 0.$

ii) $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b].$

Entonces, la ecuación $f(x) = 0$ *tiene una única solución* $s \in (a, b)$ *y si además* $x_0 \in [a, b]$ *cumple que* $f(x_0)f''(x_0) > 0$ *entonces la sucesión generada por el método de Newton–Raphson converge a* s*.*

Teorema (Convergencia global del método de Newton–Raphson)

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de clase 2 satisfaciendo:*

i) $f(a)f(b) < 0$.

ii) $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

iii) $f'' \leq 0$ *ó* $f'' \geq 0$ *en* $[a, b]$.

Entonces, la ecuación $f(x) = 0$ *tiene una única solución* $s \in (a, b)$ *y si además* $x_0 \in [a, b]$ *cumple que* $f(x_0)f''(x_0) > 0$ *entonces la sucesión generada por el método de Newton–Raphson converge a* s.

Observación

Las condiciones i) y ii) implican que la ecuación $f(x) = 0$ *tiene una única solución en* (a, b), *mientras que la condición iii) nos dice que* f *es cóncava o convexa en* $[a, b]$.

En la práctica también es importante decidir cuando terminar las iteraciones del método de Newton–Raphson. Lo ideal sería detener el método al obtener una aproximación con una tolerancia prescrita $\varepsilon > 0$, es decir terminar para el menor valor de n que cumpla

$$e_n = |s - x_n| < \varepsilon.$$

En la práctica también es importante decidir cuando terminar las iteraciones del método de Newton–Raphson. Lo ideal sería detener el método al obtener una aproximación con una tolerancia prescrita $\varepsilon > 0$, es decir terminar para el menor valor de n que cumpla

$$e_n = |s - x_n| < \varepsilon.$$

En la práctica como no conocemos el error terminaremos las iteraciones en la etapa n que satisfaga

$$\boxed{|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon,}$$

y tomaremos el valor $|x_n - x_{n-1}|$ como una estimación del error cometido.