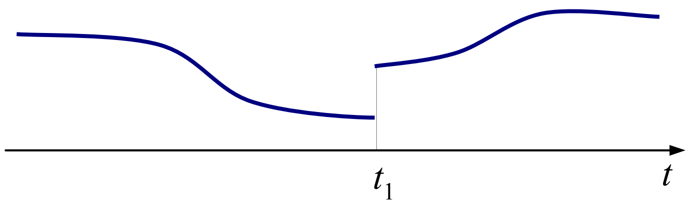
Notas sobre el procesado de señales digitales:

· En general, los sensores generan señales analógicas (≡ señales continuas en el tiempo y en amplitud).

· El procesado de las señales analógicas se puede realizar de forma *analógica* o bien de forma *digital*.

· Para *procesar digitalmente* una señal analógica es necesario generar una señal digital, discreta en el tiempo, a partir de dicha señal analógica. La señal digital generada debe representar la misma información que la señal analógica (ver *teorema de Shannon-Nyquist*). El proceso de digitalización (en amplitud) y de discretización (en el tiempo) de una señal analógica se consigue con la ayuda de un convertidor A/D. Dicho proceso consiste en muestrear el valor de la señal analógica periódicamente (cada T_s segundos). El convertidor AD genera automáticamente una señal digital al cuantificar y codificar los valores de las muestras mediante un número finito de bits, y genera una señal en tiempo discreto al realizar las conversiones periódicamente.

▪ Una función $x(t)$ continua en el tiempo (o en tiempo continuo) se caracteriza porque la variable (t) de la que depende toma valores pertenecientes a $\mathbb{R}$.



Nota: continua en el tiempo ≠ continua en amplitud

▪ Una función $x[n]$ discreta en el tiempo (o en tiempo discreto) se caracteriza porque la variable (n) de la que depende toma valores pertenecientes a $\mathbb{N}$ o a $\mathbb{Z}$.

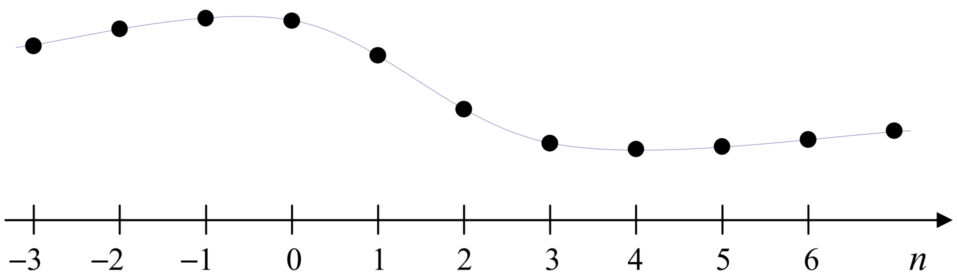
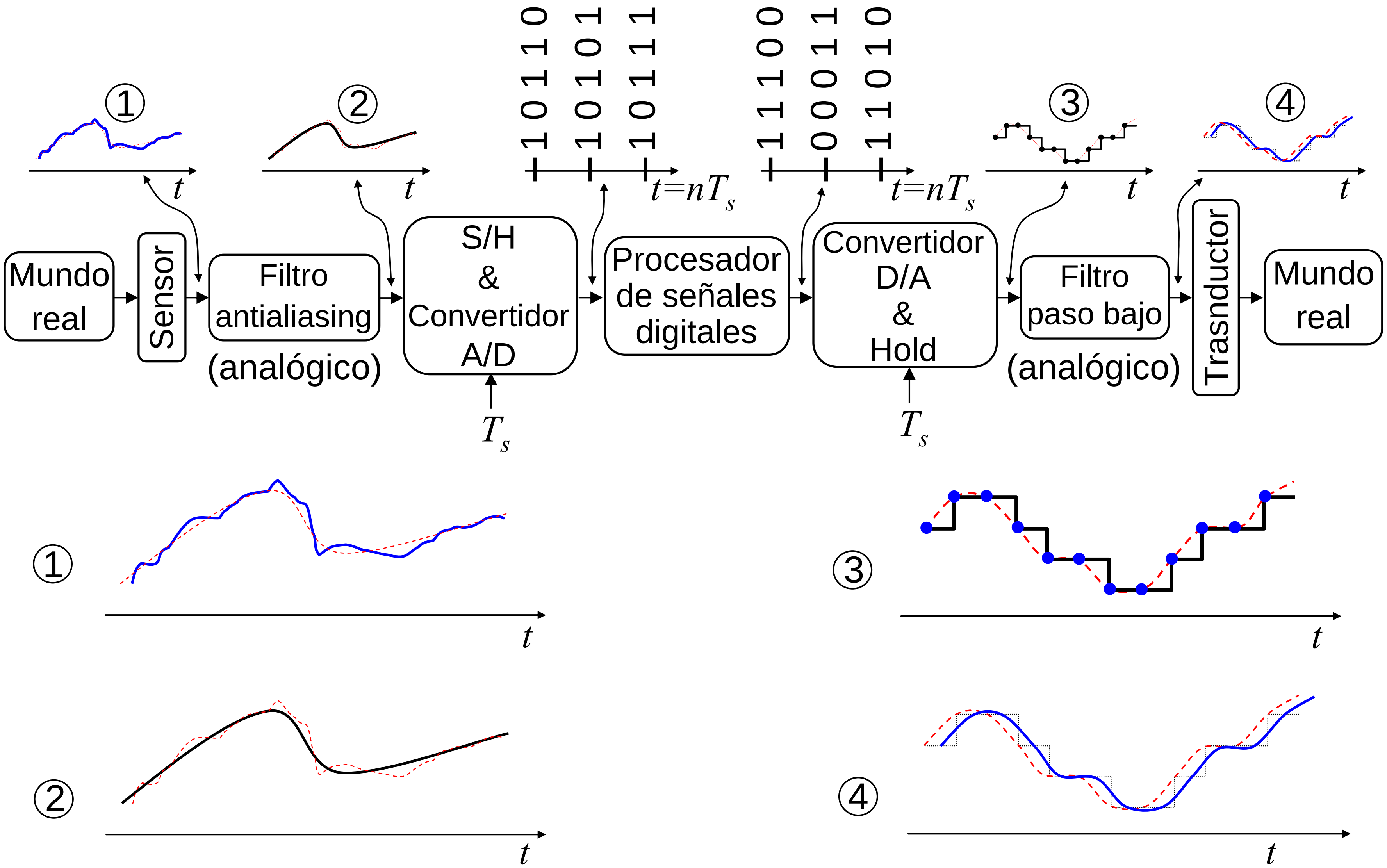
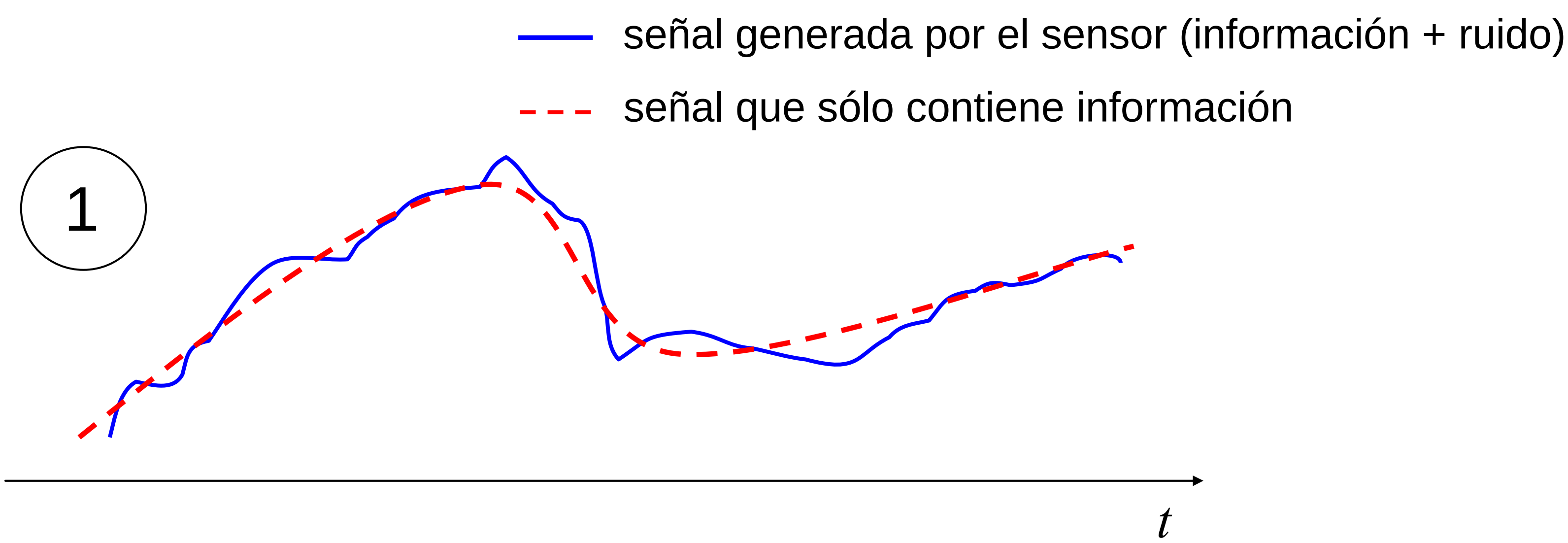
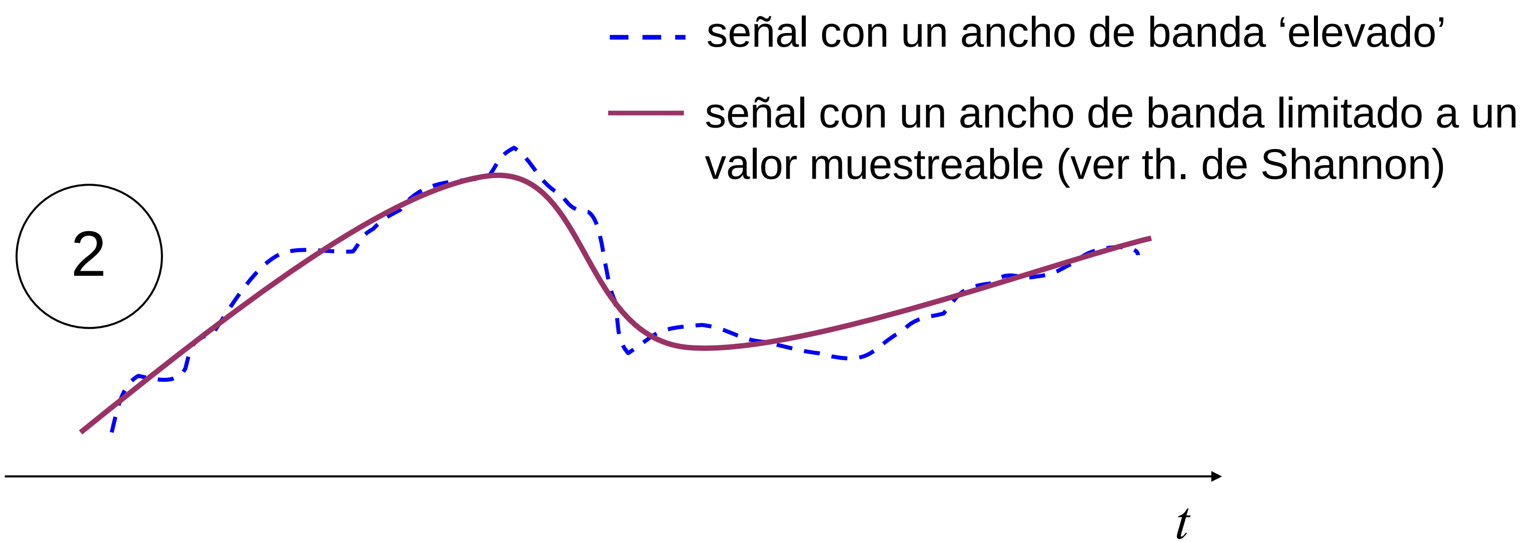
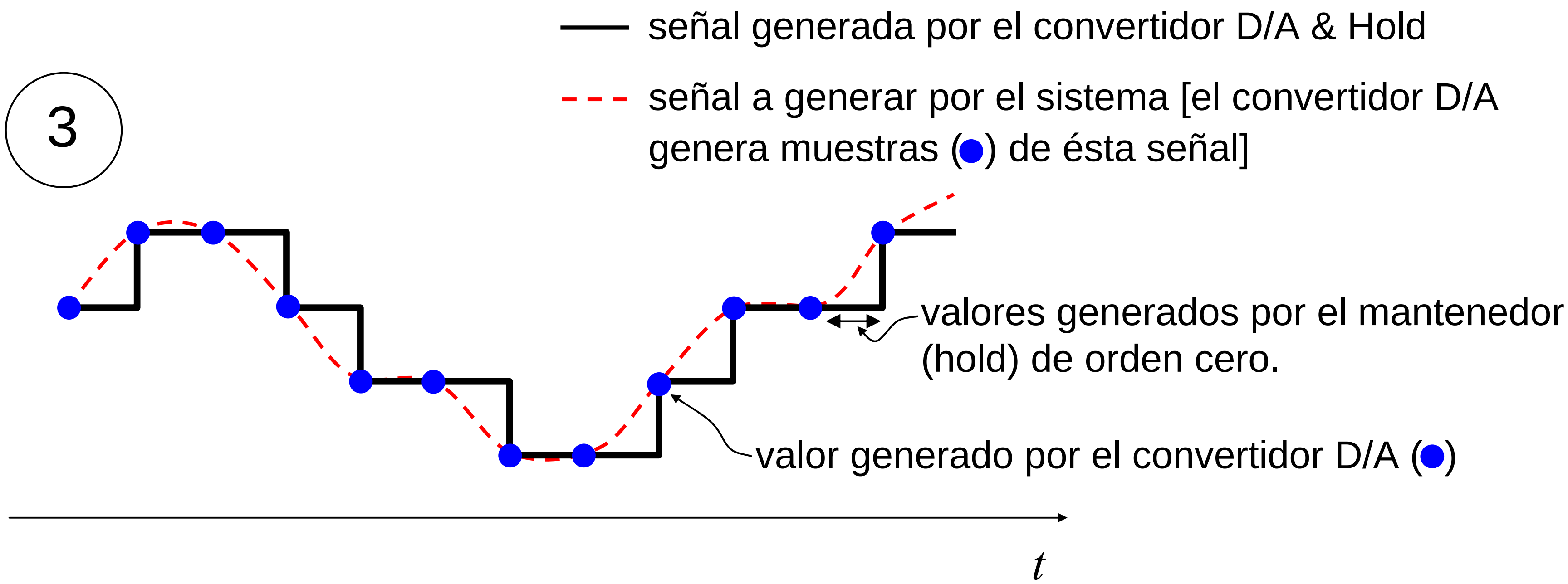


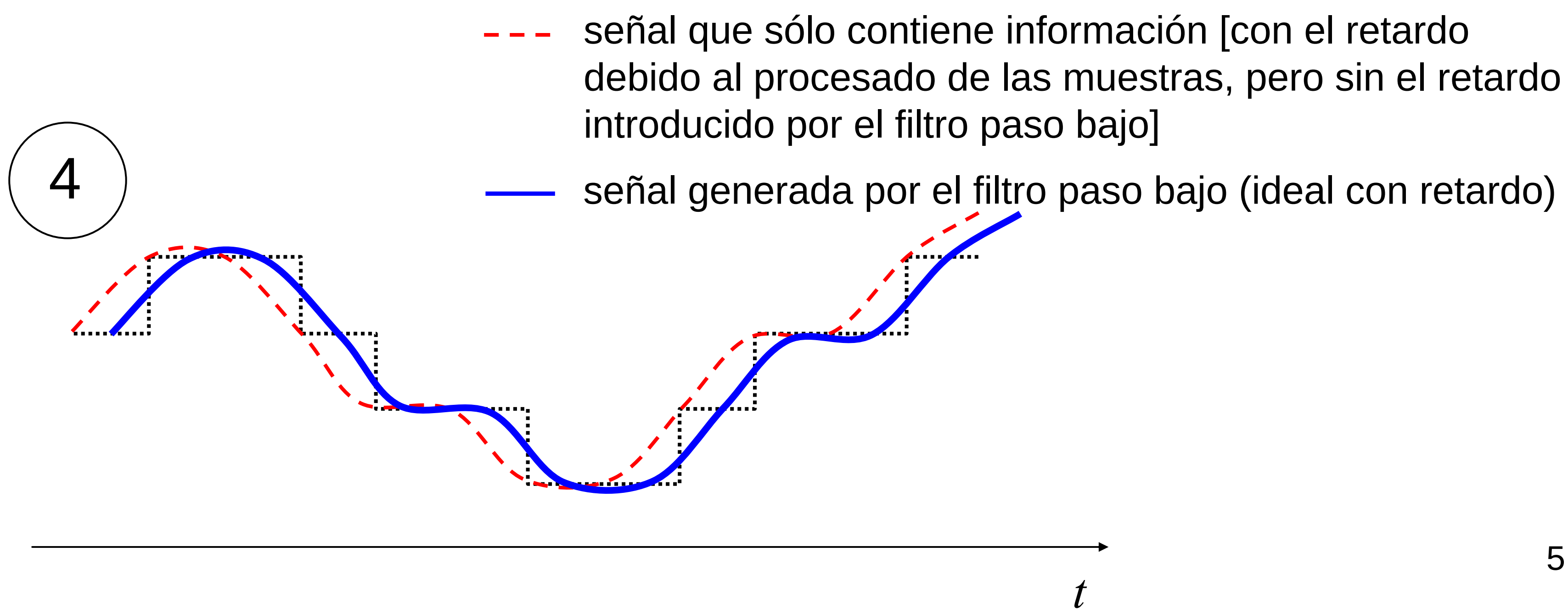
Diagrama de bloques de un sistema procesador de señales digitales




señal generada por el sensor (información + ruido)
señal que sólo contiene información
1
t


señal con un ancho de banda ‘elevado’
señal con un ancho de banda limitado a un valor muestreable (ver th. de Shannon)
2
t


señal generada por el convertidor D/A & Hold
3
señal a generar por el sistema [el convertidor D/A genera muestras (●) de ésta señal]
valores generados por el mantenedor (hold) de orden cero.
valor generado por el convertidor D/A (●)
t

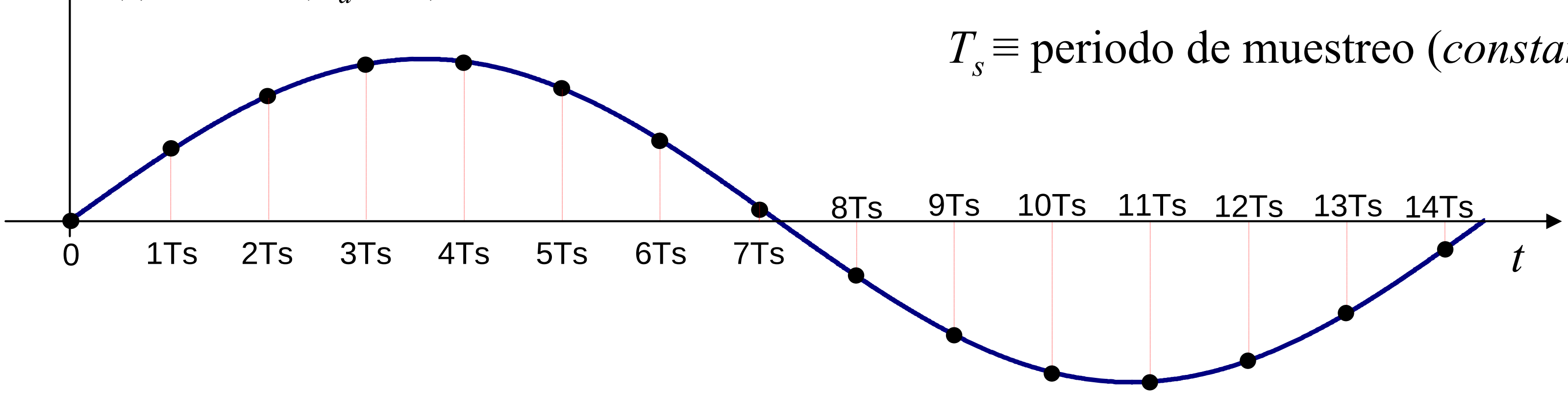

señal que sólo contiene información [con el retardo debido al procesado de las muestras, pero sin el retardo introducido por el filtro paso bajo]
4
señal generada por el filtro paso bajo (ideal con retardo)
t

· *Frecuencia digital*: para explicar este concepto a continuación se va a discretizar una señal senoidal.

$$x(t) \xrightarrow[T_s]{} x[n] = x(t = nT_s)$$

$T_s \equiv$ periodo de muestreo (*constante*)

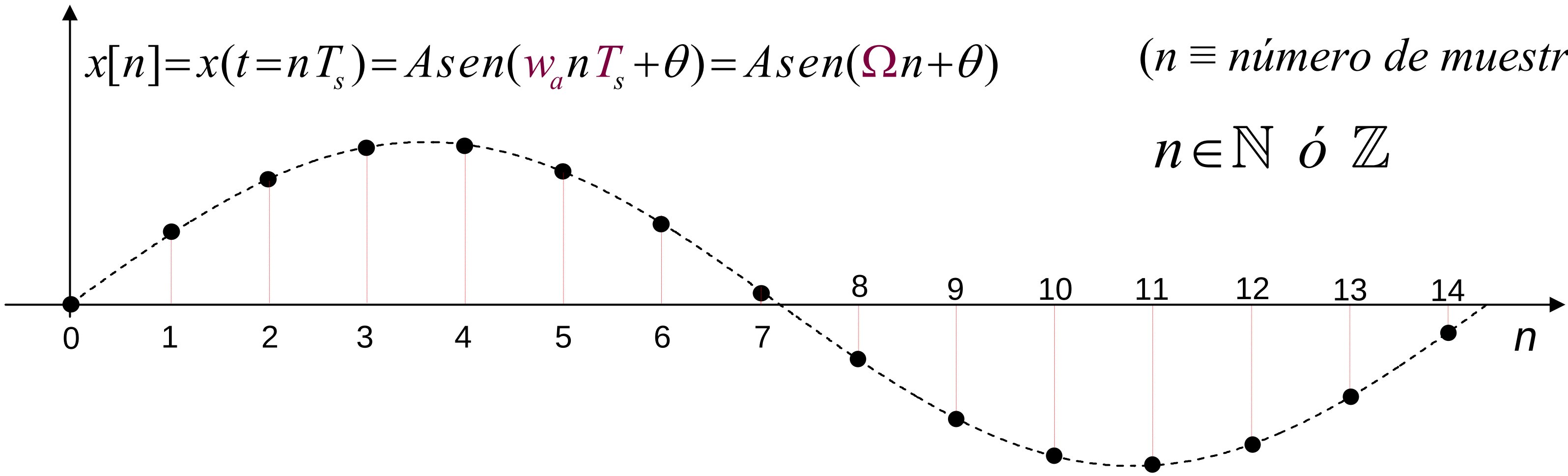
$x(t) = Asen(w_a t + \theta)$



$x[n] = x(t = nT_s) = Asen(w_a n T_s + \theta) = Asen(\Omega n + \theta)$

($n \equiv$ *número de muestra*)

$n \in \mathbb{N}$ *ó* $\mathbb{Z}$



$$\Omega = w_a \cdot T_s = \frac{w_a}{f_s} = w_a \cdot \frac{2\pi}{w_s}$$ ≡ *frecuencia digital* en *radianes/muestra* ≡

≡ *frecuencia normalizada* o relativa (tiene unidades de *ángulo*)

$$f_d = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{f_a}{f_s}$$ ≡ *frecuencia digital* en *ciclos/muestra* ≡

≡ *frecuencia normalizada* o relativa (es adimensional)

θ ≡ *fase* en *radianes*

$$w_a = 2\pi f_a = \frac{2\pi}{T_a}$$ ≡ *frecuencia analógica* en *radianes*/segundo

$$f_a = \frac{1}{T_a} = \frac{w_a}{2\pi}$$ ≡ *frecuencia analógica* en *ciclos*/segundo ≡ *Hercios* (*Hz*)

$$T_a = \frac{2\pi}{w_a} = \frac{1}{f_a}$$ ≡ *periodo analógico* en *segundos*

Propiedades:

▪ El *teorema de muestreo de Shannon-Nyquist* establece que la frecuencia w_s con la que hay que muestrear una señal con un ancho de banda B debe cumplir que $w_s > 2 \cdot B$, si se quiere que la señal discreta generada tenga la misma información que la señal continua muestreada. De acuerdo con esto, el mayor valor que puede tomar una *frecuencia digital* normalizada Ω es:

$$w_a = 2\pi \cdot f_a = \frac{\Omega}{T_s} < \frac{w_s}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega < \frac{w_s \cdot T_s}{2} = \pi \quad \text{ó} \quad f_d < \frac{1}{2}$$

Nota: valores de Ω próximos a cero corresponderán a *bajas frecuencias* y valores de Ω próximos a π corresponderán a *altas frecuencias* (digitales).

Nota: se dice que una señal $x(t)$ tiene un ancho de banda B si su transformada de *Fourier* cumple que $X(jw) = 0 \quad \forall\ w > B$

▪ Una sinusoide discreta $x[n] = \mathrm{sen}(2\pi f_d n+\theta)$ es periódica, de periodo N (muestras), si y sólo si su frecuencia f_d es un número racional ≡ su valor se puede expresar como un cociente de dos números enteros. Dem.:

$$x[n] = x[n+N] \Leftrightarrow sen(2\pi f_d n+\theta) = sen\left[2\pi f_d (n+N)+\theta\right]$$

esta igualdad es cierta si existe un número entero k, para el que se cumple lo siguiente:

$$2\pi f_d (n+N) = 2\pi f_d n + k2\pi \Leftrightarrow f_d = \frac{k}{N} \;,\quad \Omega = 2\pi \frac{k}{N} \qquad k, N \in \mathbb{N}$$

$$Ejem.: \quad f_{d1} = \frac{31}{55} \Rightarrow N_1 = 55 \qquad f_{d2} = \frac{20}{60} \Rightarrow N_2 = 3$$

Nota: la duración de un periodo de x[n] es $t = NT_s$

▪ Todas las sinusoides en tiempo discreto cuyas frecuencias digitales difieran en un múltiplo entero de 2π son idénticas.

$$\cos\left[(\Omega+2\pi)\cdot n+\theta\right] = \cos\left[\Omega\cdot n+2\pi\cdot n+\theta\right] = \cos\left[\Omega\cdot n+\theta\right] \qquad n \in \mathbb{Z}$$

generan la misma secuencia de números

▪ Las señales sinusoidales discretas, cuya frecuencia digital (normalizada) cumpla lo siguiente: $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ ó $-0.5 \leq f_d \leq 0.5$ son únicas.

▪ La secuencia de valores que se obtiene al muestrear una señal senoidal de frecuencia $|\Omega| > \pi$ ó $|f_d| > 0.5$ también se puede obtener muestreando una señal senoidal de frecuencia $|\Omega| < \pi$ ó $|f_d| < 0.5$. Lo que hace que, en la práctica, sólo sea necesario considerar señales senoidales de frecuencia $|\Omega| < \pi$ ó $|f_d| < 0.5$

▪ De acuerdo con el *teorema de Shannon-Nyquist*, la mayor frecuencia que puede tener una señal senoidal, continua en el tiempo, que se va a muestrear con un periodo de muestreo $T_s = 1/f_s$ es: $w_a \leq w_s/2$ ó $f_a \leq f_s/2$

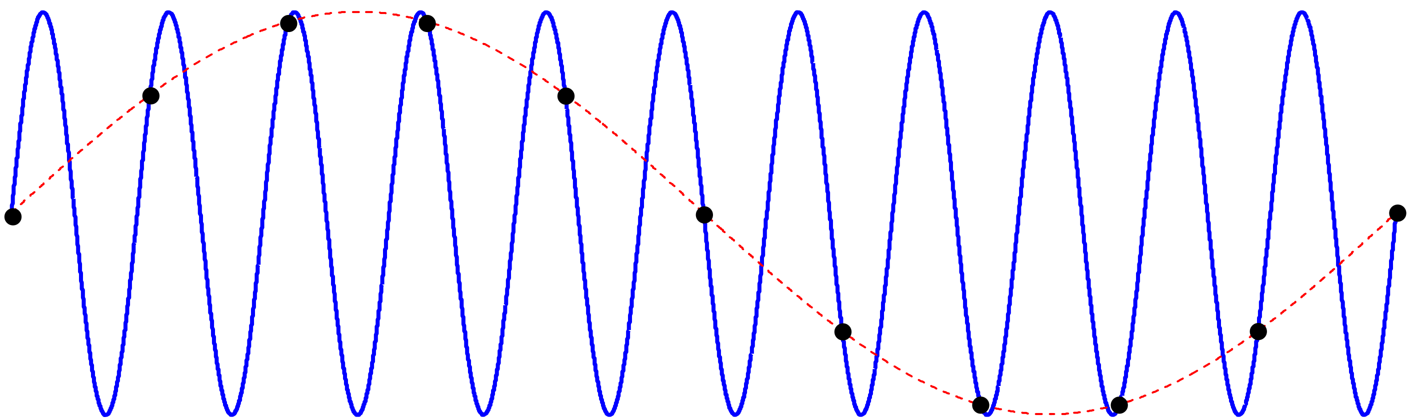
Si no se cumple la condición anterior, se producirá *aliasing*. Lo que hará que el sistema que procese las muestras interprete que la senoide muestreada tiene una frecuencia inferior a la que realmente tiene (ver tarea 4).

Ejemplo: Sea $x_1(t) = \cos(2\pi\cdot 10\cdot t)$, $x_2(t) = \cos(2\pi\cdot 50\cdot t)$ y $f_s = 40\text{Hz}$, $T_s = 1/40$

$x_1[n] = \cos(2\pi\cdot 10\cdot n/40) = \cos(\pi\cdot n/2)$ (se cumple el th. de Shannon)

$x_2[n] = \cos(2\pi\cdot 50\cdot n/40) = \cos(5\pi\cdot n/2) = \cos(\pi\cdot n/2 + 2\pi\cdot n) = \cos(\pi\cdot n/2) = x_1[n]$ (no se cumple el th de Shannon y se genera una señal discreta igual a la que se obtiene si se muestrea una señal con una frecuencia de $f_a - f_s = 50 - 40 = 10\text{Hz}$)

Pregunta: ¿Si sólo conocieras las muestras indicadas (•), qué senoide dirías que se ha muestreado, la de color azul o la de color rojo?. ¿Por cierto, qué senoide tiene una menor frecuencia?. ¿Qué relación hay entre las frecuencias de dichas senoides?

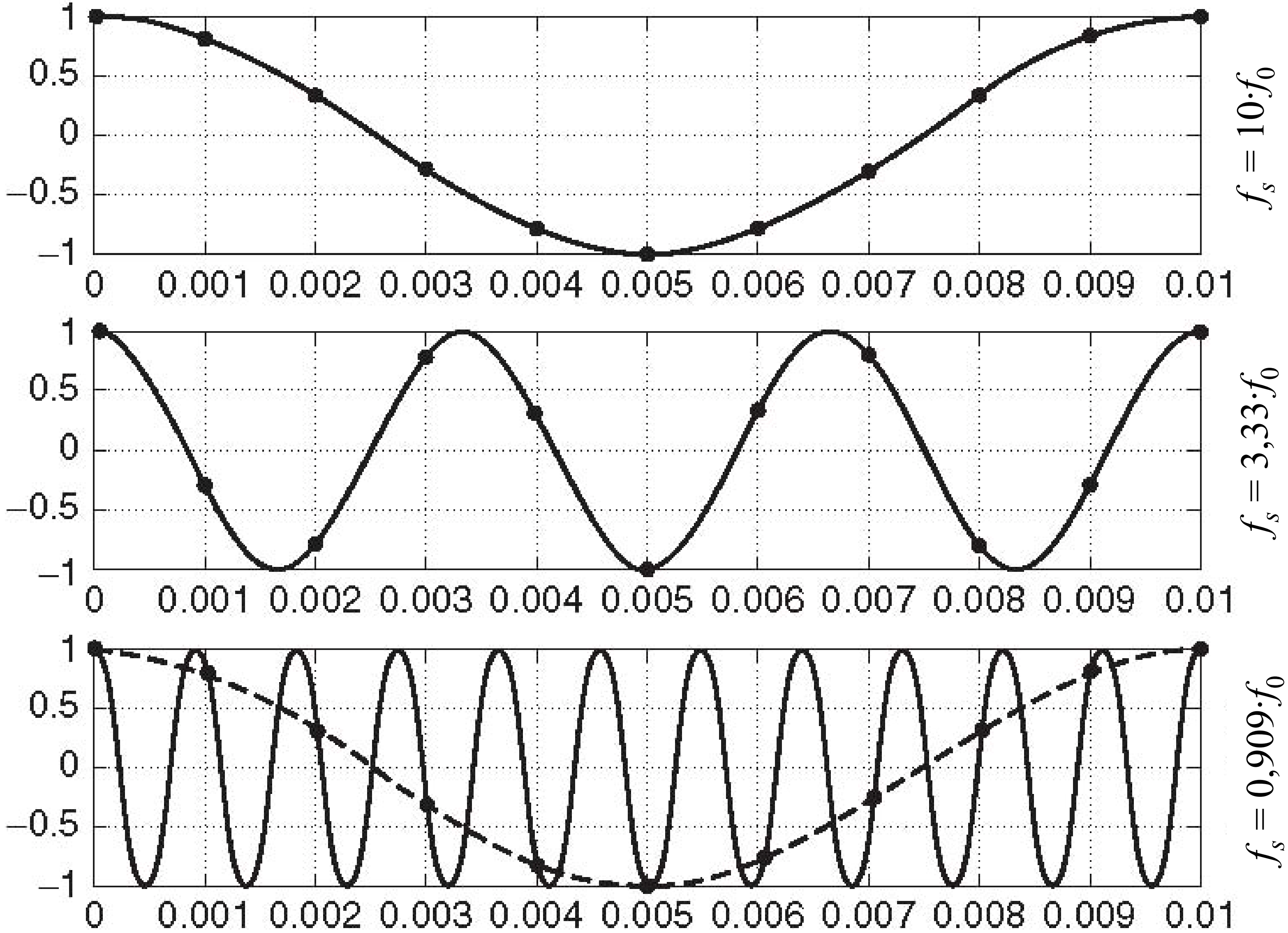


Solución:

$T = 11T$

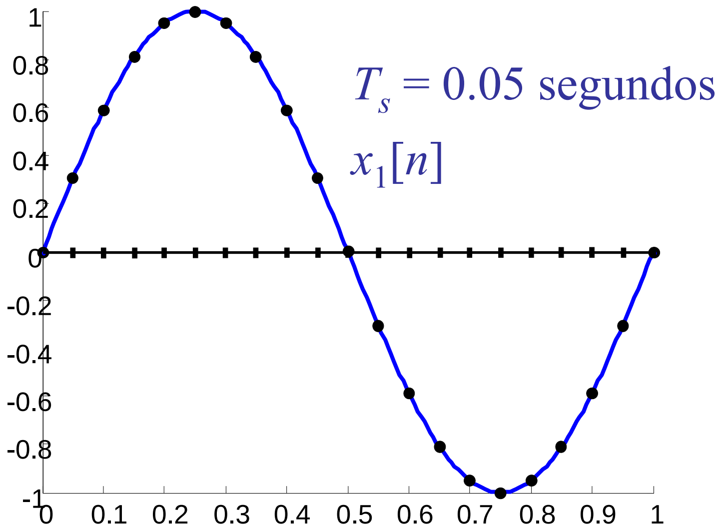
$5T_s = 5.5T \rightarrow T_s = 1.1T \rightarrow f_s = f/1.1 = 0.9 \cdot f$

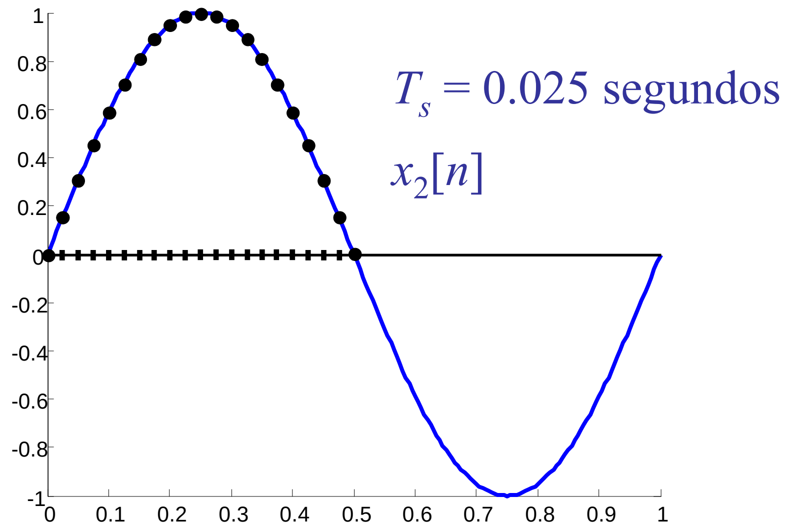
Pregunta: ¿Las señales discretas generadas al muestrear las siguientes señales senoidales presentarán problemas de *aliasing*?



▪ Se pueden obtener *diferentes* señales discretas muestreando una *misma* señal analógica, si se utilizan *periodos de muestreo distintos*.

Ejemplo: se toman 21 muestras de la señal $x(t) = \mathrm{sen}(2\pi t)$ con un periodo de muestreo de 0.05 segundos y con un periodo de 0.025 segundos, obteniéndose lo siguiente:



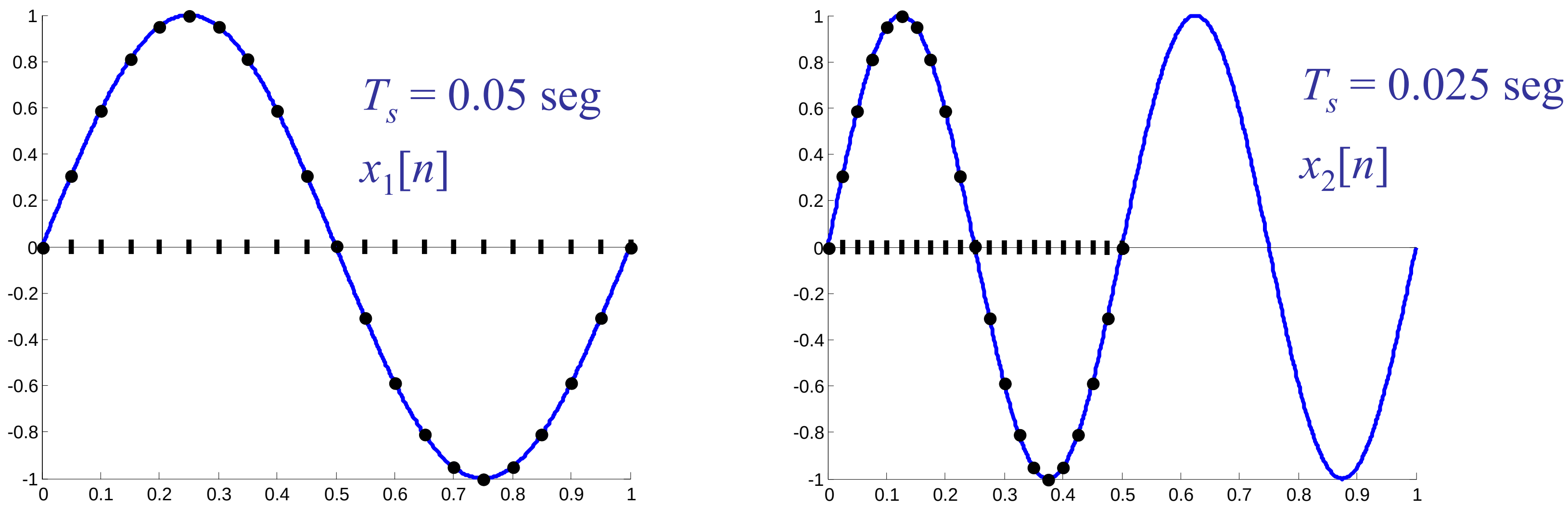


$x_1[n]$= [0.00, 0.30, 0.58, 0.80, 0.95, 1.00, 0.95, 0.80, 0.58, 0.30, 0.00, -0.30, -0.58, -0.80, -0.95, -1.00, -0.95, -0.80, -0.58, -0.30, -0.0]

$x_2[n]$= [0.00, 0.15, 0.30, 0.45, 0.58, 0.70, 0.80, 0.89, 0.95, 0.98, 1.00, 0.98, 0.95, 0.89, 0.80, 0.70, 0.58, 0.45, 0.30, 0.15, 0.00]

▪ Utilizando diferentes periodos de muestreo, se puede obtener una *misma* señal discreta muestreando dos señales analógicas *distintas*.

Ejemplo: se toman 21 muestras de la señal $x_1(t) = \text{sen}(2\pi t)$ con $T_s = 0.05$ seg. y otras 21 muestras de la señal $x_2(t) = \text{sen}(4\pi t)$ con $T_s = 0.025$seg., obteniéndose lo siguiente:



$x_1[n] = x_2[n] = [0.00, 0.30, 0.58, 0.80, 0.95, 1.00, 0.95, 0.80, 0.58, 0.30, 0.00, -0.30, -0.58, -0.80, -0.95, -1.00, -0.95, -0.80, -0.58, -0.30, -0.00]$

▪ *Contenido en frecuencia de una señal periódica, discreta en el tiempo*

Las componentes en frecuencia de una señal periódica, continua en el tiempo, de periodo T, están separadas $2\pi/T$ *rad*/*seg* o bien $1/T$ *Hz*. Y dado que la frecuencia puede tomar valores en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, el número de componentes en frecuencia que puede tener una señal periódica continua en el tiempo es infinito.

Anteriormente se ha demostrado que el rango de valores que puede tomar la frecuencia (digital) de una señal discreta en el tiempo está limitado a un intervalo de longitud 2π [por ejemplo, $(-\pi, +\pi)$ ó $(0, 2\pi)$]. De acuerdo con esto, una señal periódica, discreta en el tiempo, de periodo *N muestras o* NT_s *segundos*, tendrá sus componentes en frecuencia separadas $\Omega = 2\pi/N$ radianes o $f_d = 1/N$ ciclos. Esto hace que el contenido en frecuencia de una señal periódica, discreta en el tiempo, tenga como máximo N componentes en frecuencia en un periodo.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \qquad \equiv \text{serie de } \textit{Fourier} \text{ en tiempo discreto}$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Los coeficientes c_k con $k = 0, 1, 2, \ldots, N{-}1$ proporcionan una descripción de $x[n]$ en el dominio de la frecuencia, ya que cada coeficiente c_k representa la amplitud y la fase asociadas a la componente en frecuencia: $e^{j2\pi nk/N}$ (≡ componente de frecuencia $\Omega \cdot k = 2\pi k/N$)

Los coeficientes c_k son una secuencia periódica de periodo fundamental N. Lo que implica que el espectro de una señal periódica $x[n]$, de periodo N, es una secuencia periódica de periodo N. Por lo que N muestras consecutivas cualesquiera de $x[n]$ o de su espectro proporcionan una descripción completa de la señal $x[n]$ tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

Nota: $c_k = c_{k+N}$ (por ser periódica)

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & si \quad a = 1 \\ \dfrac{1-a^N}{1-a} & si \quad a \neq 1 \end{cases}$$

El *valor eficaz* de una señal discreta, periódica, cumple lo siguiente (*th. de Parseval*):

$$valor\ eficaz^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x[n]^2\right| = \sum_{k=0}^{N-1}\left|c_k\right|^2$$

siendo c_k los coeficientes complejos de *Fourier* de la señal $x[n]$

Si $x[n]$ es una señal *real*, entonces:

para *N par*: $k = 0, 1, 2, \ldots, N/2 \rightarrow$ $x[n] = c_0 + 2\sum_{k=1}^{N/2}\left|c_k\right| \cdot cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \angle c_k\right)$

para *N impar*: $k = 0, 1, 2, \ldots, (N-1)/2 \rightarrow$ $x[n] = c_0 + 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2}\left|c_k\right| \cdot cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \angle c_k\right)$

▪ *Contenido en frecuencia de una señal no periódica, discreta en el tiempo*

La relación entre la representación de una señal discreta $x[n]$, *no periódica*, en el *dominio del tiempo* y su representación $X(\Omega)$ en el *dominio de la frecuencia* viene dada por la *transformada de Fourier de* $x[n]$ (*DTFT*: *Discrete time Fourier Transform*) :

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega}$$

≡ *transformada de Fourier de una señal discreta* $x[n]$

≡ *Discrete Time Fourier Transform* (*DTFT*)

$$X(f_d) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n] \cdot e^{-jn2\pi f_d} \qquad f_d = \Omega/(2\pi)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\Omega) \cdot e^{jn\Omega} d\Omega$$

≡ *transformada de Fourier inversa de una señal discreta* $x[n]$

≡ *Inverse discrete time Fourier transform*

$$x[n] = \int_{-1/2}^{+1/2} X(f_d) \cdot e^{jn2\pi f_d} df_d \qquad f_d = \Omega/(2\pi)$$

La *transformada de Fourier en tiempo discreto* $X(\Omega)$ de una señal discreta en el tiempo x[n] se caracteriza por lo siguiente:

· $X(\Omega)$ representa el *contenido en frecuencia* de $x[n]$

· Existe $X(\Omega)$ si se cumple que $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |x[n]| < \infty$ (condición suficiente)

· $X(\Omega)$ es una función *continua* en frecuencia ($\Omega \in \mathrm{R}$)

· $X(\Omega)$ es una función *periódica*, de periodo 2π. Lo que hace que quede completamente determinada conociendo su valor en cualquier intervalo de longitud 2π.

$$x(\Omega + 2\pi) = x(\Omega) \qquad -\infty \leq \Omega \leq +\infty$$

· En general, $X(\Omega)$ es una función *compleja* de la variable real Ω ($\equiv$ *frecuencia digital*), por lo que se acostumbra a expresar en su forma polar o rectangular.

$$X(\Omega) = |X(\Omega)| \cdot e^{j \cdot \underline{|X(\Omega)}} = Re[X(\Omega)] + j \cdot Imag[X(\Omega)]$$

▪ Si $x[n]$ es *real*, entonces se puede demostrar que:

· $|X(\Omega)|$ tiene simetría par

· $\angle X(\Omega)$ tiene simetría impar

A partir de las propiedades de simetría anteriores se deduce que el rango de frecuencias para señales discretas *reales, no periódicas*, puede limitarse a $0 \leq \Omega \leq \pi$ (la mitad del periodo). Dicho de otra manera, la descripción de una señal discreta *real*, en el dominio de la frecuencia, está completamente especificada por su espectro en el intervalo $0 \leq \Omega \leq \pi$ (rad) ó $0 \leq f_d \leq 1/2$ (Hz) $\equiv$ $0 \leq f_a \leq f_s/2$ (Hz)

Nota: valores de Ω próximos a 0 corresponden a bajas frecuencias, mientras que valores de Ω próximos a π corresponden a altas frecuencias.

Análogamente, valores de f_d próximos a 0 corresponden a bajas frecuencias, mientras que valores de f_d próximos a 1/2 corresponden a altas frecuencias.

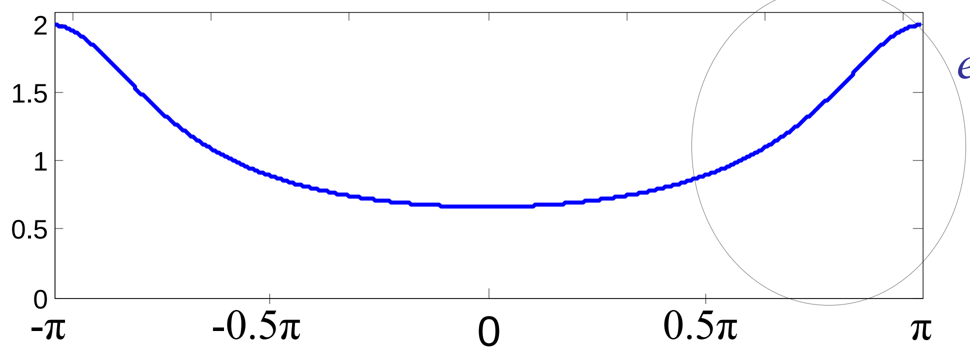
Ejemplo: Se puede demostrar que la trasformada de *Fourier* de $x[\mathrm{n}] = (-0.5)^{n} \cdot u[n]$ es igual a $X(\Omega) = 1/(1+0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})$, cumpliéndose que:

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1.25+\cos(\Omega)}} \equiv \textit{espectro de amplitud}$$

$$\angle X(\Omega) = -arctang\left(\frac{-0.5sen(\Omega)}{1+0.5cos(\Omega)}\right) \equiv \textit{espectro de fase}$$

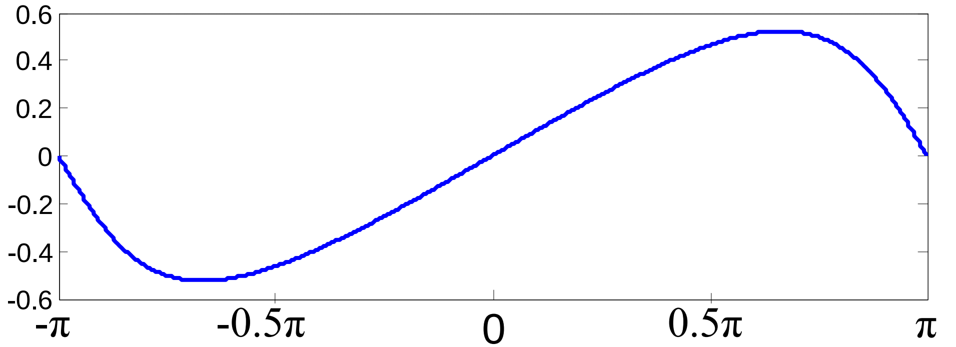
Nota: *el contenido espectral de* $x[n]$ *está concentrado fundamentalmente a altas frecuencias.*

$|X(\Omega)|$



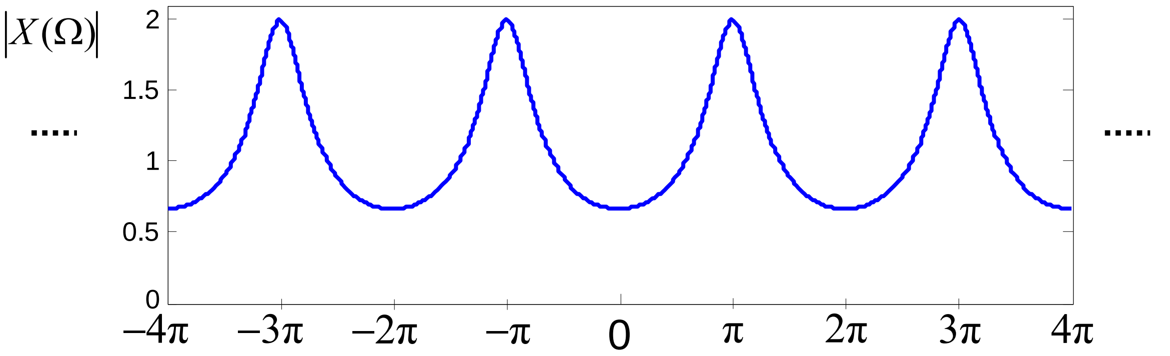
espectro de amplitud

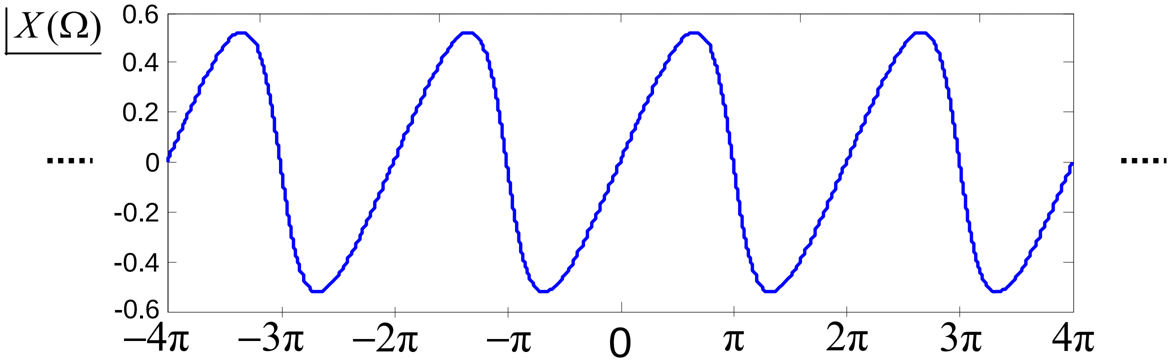
$\angle X(\Omega)$



espectro de fase

Para ver que el espectro de $x[n]$ es periódico, con un periodo igual a 2π, sólo hay que representar un intervalo de frecuencias mayor:

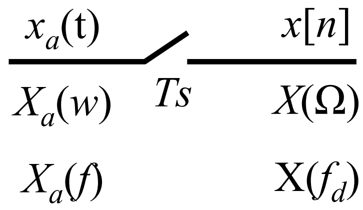


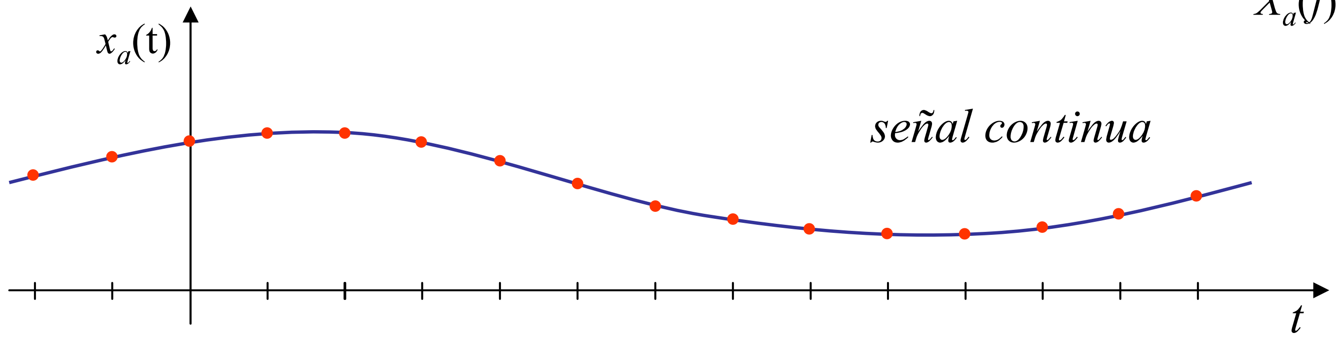


- Relación entre la *transformada de Fourier* y la *transformada Z*:

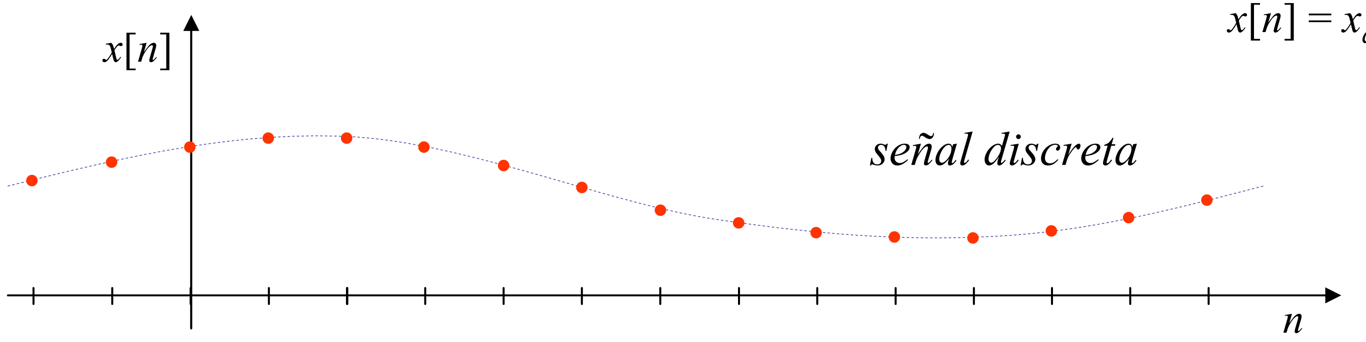
$$\left.\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n]\cdot z^{-n} \\ X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n]\cdot e^{-jn\Omega} \end{aligned}\right\} \Rightarrow X(\Omega) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$

▪ Relación entre los contenidos en frecuencia de las señales presentes en la entrada y en la salida de un muestreador ideal.

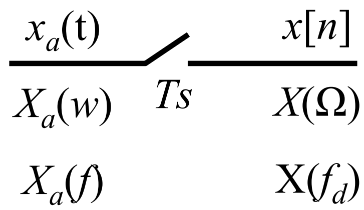




$$x[n] = x_a(t = nT_s)$$



$$X_a(w)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-jwt}\cdot dt \quad w\in\mathbb{R} \quad \equiv \textit{transformada de Fourier de } x(t)$$



$$X_a(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j2\pi ft}\cdot dt \quad f\in\mathbb{R} \quad \equiv \textit{transformada de Fourier de } x(t)$$

Se puede demostrar que:

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[w-kw_s] \equiv \textit{transformada de Fourier de } x[n] \equiv \textit{DTFT} \text{ de } x[n]$$

$$X(f_d) = \frac{1}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[f-kf_s] \equiv \textit{transformada de Fourier de } x[n] \equiv \textit{DTFT} \text{ de } x[n]$$

$$\Omega = w\cdot T_s = \frac{w}{f_s} = w\cdot\frac{2\pi}{w_s} \quad \rightarrow \quad w=\Omega\cdot\frac{w_s}{2\pi}$$

$$f_d = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{f}{f_s}$$

De las expresiones anteriores se deduce que:

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[w-kw_s] = \frac{1}{T_s}\cdot\{X_a(w)+X_a[w-w_s]+X_a[w+w_s]+X_a[w-2w_s]+X_a[w+2w_s]+\cdots\}$$

$$X(f_d) = \frac{1}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f-kf_s) = \frac{1}{T_s}\cdot\{X_a(f)+X_a[f-f_s]+X_a[f+f_s]+X_a[f-2f_s]+X_a[f+2f_s]+\cdots\}$$

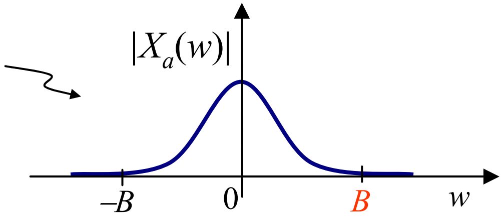
en la página siguiente se muestra un ejemplo de la relación entre los espectros de amplitud de una señal discreta $x[n]$ presente en la salida de un muestreador y la señal continua $x(t)$ presente en su entrada.

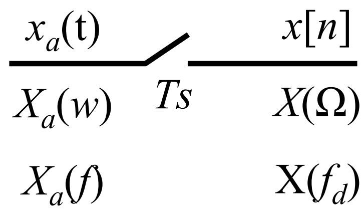
Nota:

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[w-kw_s] = \frac{1}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left[\left(\frac{\Omega}{2\pi}-k\right)w_s\right]$$

$$\Omega = w\cdot T_s = \frac{w}{f_s} = w\cdot\frac{2\pi}{w_s} \rightarrow w = \Omega\cdot\frac{w_s}{2\pi} \qquad f_d = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{f}{f_s}$$

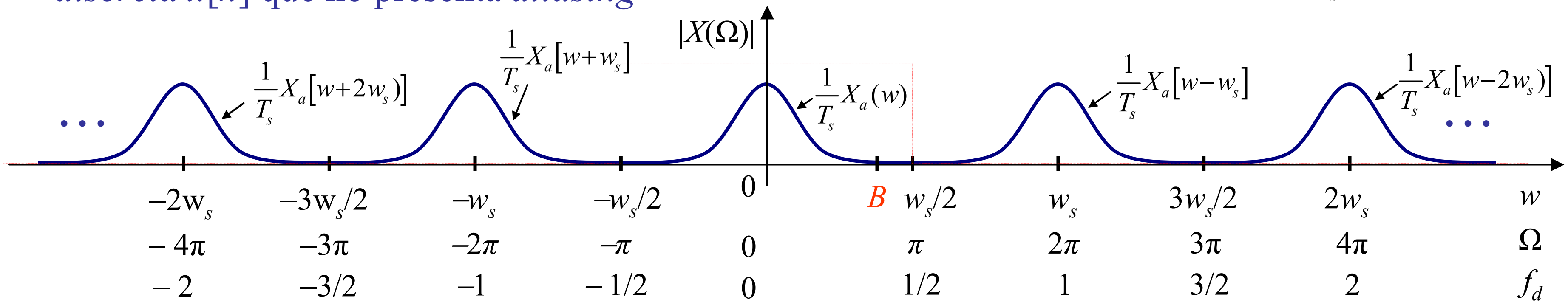
Espectro de amplitud de una señal continua $x(t)$





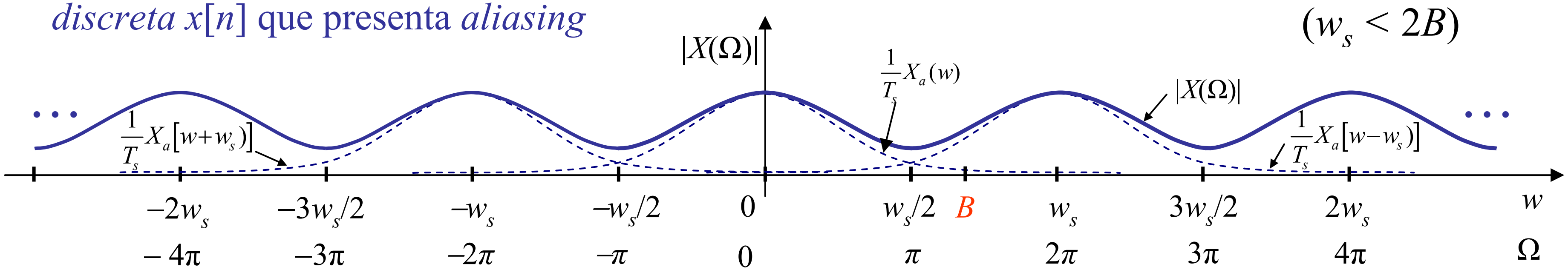
Espectro de amplitud de una señal discreta $x[n]$ que no presenta *aliasing*

$(w_s \geq 2B)$



Espectro de amplitud de una señal discreta $x[n]$ que presenta *aliasing*

$(w_s < 2B)$



De los resultados anteriores se deduce lo siguiente:

· Si la frecuencia de muestreo de una señal continua $x(t)$ cumple que $w_s > 2B$ ($\equiv$ no hay *aliasing*), entonces el espectro de amplitud de una señal discreta $x[n]$, en el intervalo $|w| < w_s/2 \;\; \Leftrightarrow \;\; |\Omega| < \pi$, $|f_d| < 1/2$, es igual al espectro de la señal continua $x(t)$, multiplicado por una constate $(1/T_s)$.

· El espectro $X(\Omega)$ de una señal discreta $x[n]$ es una función periódica, de periodo 2π, continua en frecuencia ($\Omega \in \mathbb{R}$).

Nota:

B ancho de banda de $x(t)$

w_s frecuencia de muestreo de $x(t)$ en *rad/seg*

Notas:

· Una señal continua en el tiempo, periódica, tiene un espectro discreto en frecuencia, no periódico.

· Una señal continua en el tiempo, no periódica, tiene un espectro continuo en frecuencia, no periódico.

· Una señal discreta en el tiempo periódica, de periodo N, tiene un espectro discreto en frecuencia periódico, de periodo N.

· Una señal discreta en el tiempo, no periódica, tiene un espectro continuo en frecuencia periódico, de periodo 2π radianes.

* Las señales periódicas (continuas o discretas) tienen espectros discretos, mientras que las señales no periódicas (continuas o discretas) tienen espectros continuos.

* Las señales discretas (periódicas y no periódicas) tienen espectros periódicos

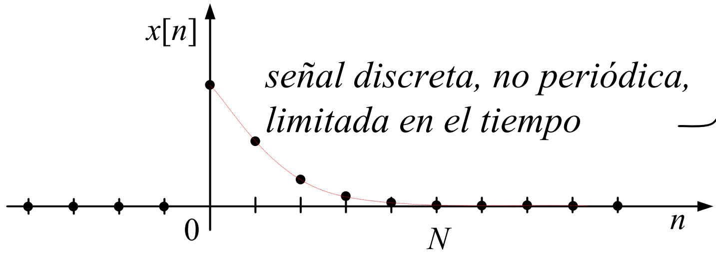
▪ *Transformada de Fourier discreta* (*DFT*: *Discrete Fourier Transform*)

El contenido en frecuencia $X(\Omega)$ de una señal discreta en el tiempo x[n] es una función dependiente de una variable continua ($\Omega \in$ R, *frecuencia digital*). El cálculo de $X(\Omega)$ requiere tomar un número infinito de muestras, además de realizar un número infinito de operaciones, lo que hace que resulte un poco *complicado* determinar su valor utilizando hardware.

Para poder utilizar la DTFT en el procesado de señales digitales lo que se hace es calcular el valor de un número finito N de ***muestras*** de $X(\Omega)$ espaciadas 2π/N *rad* a lo largo de su periodo fundamental (de longitud 2π). Este planteamiento da lugar a la siguiente definición de *transformada de Fourier discreta* (*discrete Fourier transform*):

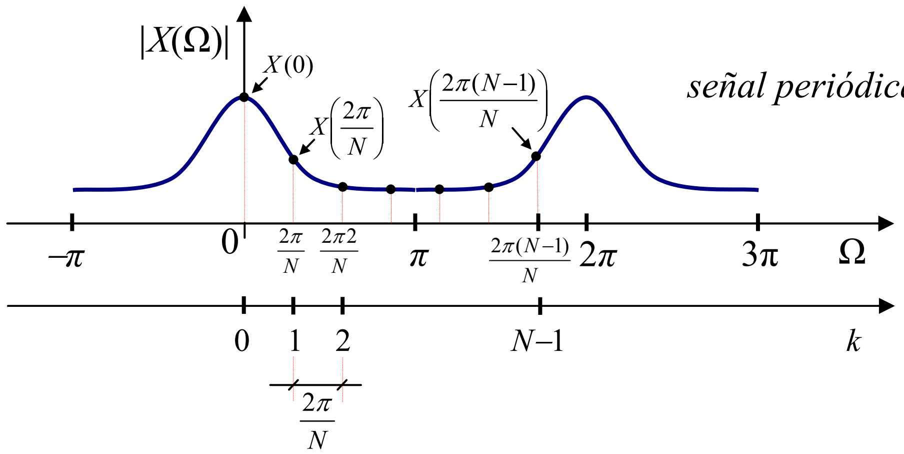
Dada una señal $x[n]$ discreta, *no periódica*, que se caracteriza porque $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq N$, se define su *transformada de Fourier discreta* (DFT) de N puntos de como:

$$X[k] = X(\Omega)\Big|_{\Omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{n=N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,2,\ldots, N-1$$

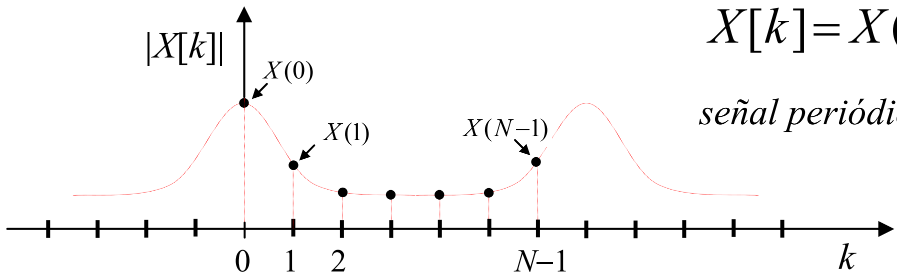


señal discreta, no periódica, limitada en el tiempo

$$x[n]=\begin{cases} 0 \quad para \quad n<0 \\ 0 \quad para \quad n\geq N \\ ¿? \quad para \quad 0\leq n<N \end{cases}$$



señal periódica, continua en frecuencia



$$X[k]=X(\Omega)\Big|_{\Omega=2\pi k/N}$$

señal periódica, discreta

· La DFT de una señal discreta $x[n]$ también se suele expresar de la siguiente manera:

$$X(k) = X(\Omega)\big|_{\Omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{n=N-1} x[n]\cdot e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{n=N-1} x[n]\cdot W_N^{kn} \qquad 0 \le k,\ n \le N-1$$

siendo $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j\cdot sen\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \qquad 0 \le k,\ n \le N-1$ $\equiv$ *factor de giro*

· $X(k)$ es una función dependiente de una variable discreta k ($k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$).

· La transformada de Fourier discreta (DFT) $X(k)$ está completamente definida por los N valores: $X(k = 0)$, $X(k = 1)$, $X(k = 2)$, … , $X(k = N-1)$

· Se define la transformada de Fourier discreta inversa (IDFT) como:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{k=N-1} X(k)\cdot e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0,1,2,\ldots, N-1$$

$x[n]$ tiene una longitud $L \le N$

· La DFT de $x[n]$ proporciona N muestras de su espectro [≡ N muestras de X(Ω) ≡ N muestras de la DTFT de $x[n]$]. Se puede considerar que dichas muestras constituyen el espectro de una señal discreta *periódica* $x_p[n]$ definida de la siguiente manera:

$$x_p[n] = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} x[n-\alpha N]$$

la señal $x_p[n]$ se obtiene repitiendo $x[n]$ cada N muestras, lo que hace que $x_p[n]$ sea periódica de periodo N

· La señal discreta $x_p[n]$ se puede generar a partir de las N muestras del espectro $X(\Omega)$ de $x[n]$ de la siguiente manera:

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{k=N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\cdot e^{j2\pi kn/N} \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$$

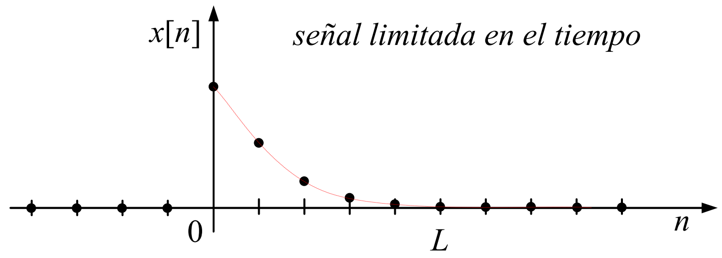
· El que se pueda determinar una señal discreta periódica $x_p[n]$ a partir de N muestras del espectro $X(\Omega)$ de la señal discreta $x[n]$, no implica necesariamente que a partir de las N muestras de $X(\Omega)$ se pueda determinar $x[n]$ o su espectro completo $X(\Omega)$. Dado que $x_p[n]$ es una extensión periódica de $x[n]$,

$$x_p[n] = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} x[n-\alpha N]$$

para que se pueda recuperar $x[n]$ a partir de $x_p[n]$ es necesario que $x_p[n]$ no presente *aliasing* en el dominio del tiempo. Lo que equivale a que $x[n]$ esté limitada en el tiempo a una duración inferior al periodo N de $x_p[n]$.

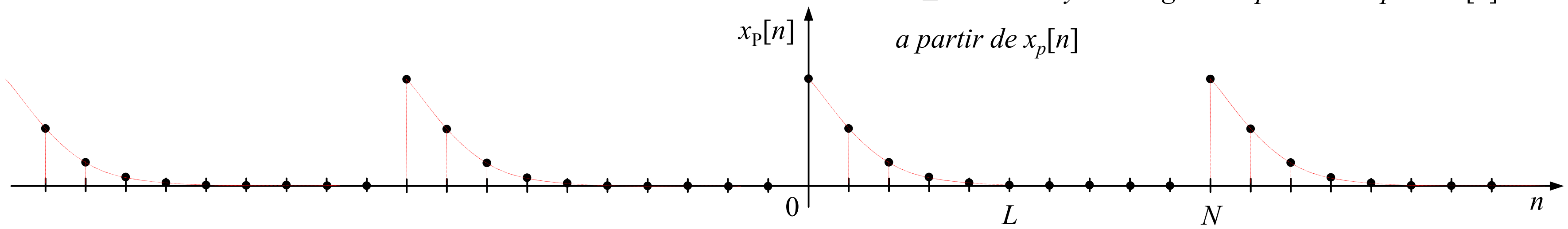
En la página siguiente se muestran dos ejemplos de la relación entre $x[n]$ y $x_p[n]$. En un caso, la duración L de $x[n]$ es inferior al número N de muestras que se toman de $X(\Omega)$, mientras que en el caso inferior L es superior a N, lo que hace que $x_p[n]$ presente *aliasing*.

señal limitada en el tiempo



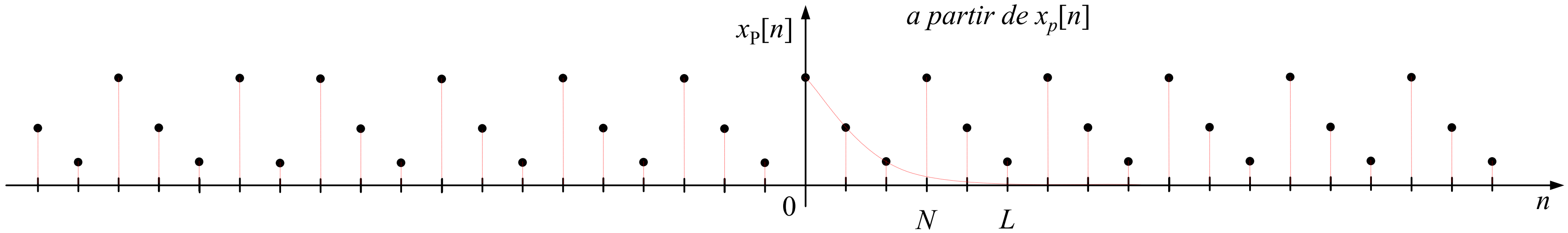
$N \geq L \Rightarrow$ no hay aliasing $\Rightarrow$ se puede recuperar $x[n]$

a partir de $x_p[n]$



$N < L \Rightarrow$ hay aliasing $\Rightarrow$ no se puede recuperar $x[n]$

a partir de $x_p[n]$



Corolario: el espectro $X(\Omega)$ de una señal discreta $x[n]$, no periódica, de duración finita L, se puede recuperar a partir de N muestras de $X(\Omega)$ si y sólo si $N \geq L$

La DFT y la IDFT son herramientas muy importantes en muchas aplicaciones de procesado de señales digitales como: el *análisis espectral*, el *filtrado lineal*, etc. La importancia práctica de la DFT y de la IDFT se debe a que existen varios algoritmos que permiten calcular la DFT y la IDFT de forma muy eficiente (≡ hay que realizar muy pocas operaciones matemáticas y utilizar muy poca memoria). Dichos algoritmos se conocen genéricamente como FFT (*Fast Fourier Transform*) e IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*)

Nota: los algoritmos FFT se diferencian unos de otros en cuanto a la complejidad del código, el número de operaciones a realizar y las necesidades de memoria.