Tema 5

Espacios vectoriales

5.1. Espacios vectoriales y subespacios

Lección 6, 21 mar 2023

Repaso del concepto de espacio vectorial

Hemos visto en la sección 3 del tema 1 que las propiedades fundamentales de las operaciones de los vectores en cualquier espacio $\mathbf{R}^n$, de las cuales se deducen *todas* las demás propiedades algebraicas, son las siguientes (conocidas como *axiomas de espacio vectorial*):

(a) Propiedades de la suma de vectores ("Grupo conmutativo"):

1. Propiedad *asociativa* de la suma: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.
2. Existencia del neutro de la suma o *vector cero*: $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
3. Existencia de *opuestos* para la suma: $-\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
4. Propiedad *conmutativa* de la suma: $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

(b) Propiedades distributivas de la multiplicación de números por vectores (o reescalado):

1. Propiedad *distributiva* para la suma de vectores: $x(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = x\mathbf{u} + x\mathbf{v}$.
2. Propiedad *distributiva* para la suma de números: $(x + y)\mathbf{u} = x\mathbf{u} + y\mathbf{u}$.

(c) "Acción de los escalares":

1. Propiedad *asociativa* del producto de números por vectores: $x(y\mathbf{u}) = (xy)\mathbf{u}$.
2. Ley de *identidad*: $1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$.
   (El número 1 es neutro para la multiplicación de números por vectores.)

DEFINICIÓN 5.1.1

Espacio vectorial

Todo conjunto V de elementos que se puedan sumar entre sí y multiplicar por números (es decir, reescalar*) de tal forma que se cumplan las propiedades anteriores se llama un* espacio vectorial *y sus elementos se llaman* vectores.

Como hay distintas clases de números (entre otros: *racionales*, *reales*, *complejos*), hay distintas clases de espacios vectoriales. Los números por los que se pueden multiplicar los vectores de

Versión de 19 de enero de 2023, 20:00h.

escalares

un espacio vectorial dado se llaman los *escalares* de ese espacio. Así, los escalares de $\mathbf{R}^n$ son los números reales. Todo espacio vectorial cuyos escalares son los números reales se llama un *espacio vectorial real*. En este curso sólo estudiaremos espacios vectoriales reales.

En todo espacio vectorial V se cumplen las siguientes propiedades, que se pueden demostrar a partir de los axiomas anteriores:

Para todo vector $\mathbf{u}$ y para todo número c,

$$0\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{5.1}$$

$$c\mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{5.2}$$

$$(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \tag{5.3}$$

Ejemplos de espacios vectoriales

El espacio cero $\{\mathbf{0}\}$

El ejemplo más sencillo de espacio vectorial es el de aquél que solamente tiene un vector, el cual necesariamente debe ser el vector cero: $V = \{\mathbf{0}\}$.

Los espacios $\mathbf{R}^n$

Los principales espacios vectoriales que estudiamos en este curso son los espacios $\mathbf{R}^n$, como la recta real, $\mathbf{R}$, el plano $\mathbf{R}^2$, el espacio $\mathbf{R}^3$ y espacios de dimensiones superiores.

Las matrices de un tamaño fijo $\mathcal{M}_{m\times n}$

Otro ejemplo (que fue mencionado en el tema de operaciones de matrices) es el del conjunto de todas las matrices de un tamaño fijo $m \times n$. Éstas forman un espacio vectorial que se denota $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Aplicación lineal entre espacios vectoriales

DEFINICIÓN 5.1.2

Aplicación lineal

Si V y W son espacios vectoriales, una aplicación lineal *de V a W es una aplicación $T : V \to W$ tal que para cualesquiera vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en V y cualquier número c se verifica:*

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$,
2. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$.

Estas dos propiedades se pueden combinar en una sola que es equivalente a ellas:

$$T(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2) = c_1T(\mathbf{u}_1) + c_2T(\mathbf{u}_2).$$

Toda aplicación lineal conserva las combinaciones lineales de vectores, es decir cumple la propiedad

$$T(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n) = c_1T(\mathbf{u}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{u}_n)$$

la cual se conoce en Física como *Principio de superposición*.

Concepto de subespacio vectorial

Se dice que un subconjunto H de un espacio vectorial V es un *subespacio vectorial* de V si, *con las operaciones de* V de suma de vectores y multiplicación por escalares, el propio H es un espacio vectorial. Dicho de otra forma:

DEFINICIÓN 5.1.3

Subespacio vectorial

Un subespacio de un espacio vectorial V es un subconjunto H de V tal que:

1. *H contiene al vector cero de V.*
2. *La suma de dos vectores de H es otro vector de H.*
3. *Al multiplicar un escalar cualquiera por un vector de H se obtiene otro vector de H.*

Los subespacios cero y total

Cualquiera que sea el espacio vectorial V, podemos dar dos ejemplos triviales de subespacio vectorial de V. Uno es el subconjunto cero $\{\mathbf{0}\}$ y el otro es el propio V. Estos son los subespacios cero y total de V. El subespacio cero es el menor subespacio de V y el total, el mayor. El subespacio cero está contenido en cualquier otro subespacio y el total contiene a todo subespacio.

El subespacio generado por un subconjunto de un espacio vectorial

subespacio generado

DEFINICIÓN 5.1.4

Subespacio generado por un subconjunto de un espacio vectorial

Si S es un subconjunto de un espacio vectorial V, se llama subespacio generado por S, *y se denota por* $\operatorname{Gen} S$ *al menor subespacio vectorial de V que contiene a S.*

El ejemplo más sencillo de subespacio generado por un subconjunto es el caso en que el subconjunto S es el conjunto vacío. En este caso la definición implica que *el subespacio generado por el conjunto vacío es el subespacio cero:* $\operatorname{Gen} \varnothing = \{\mathbf{0}\}$.

Si $H = \operatorname{Gen} S$ entonces se dice que S es un *conjunto generador* de H. Fijado un subespacio H, los conjuntos generadores de H son *subconjuntos de H* que "tienden a ser grandes" en el sentido de que si se les quita algún vector pueden dejar de generar a H, pero no por ampliarlos añadiéndoles algún vector de H dejan de generar a H. Es decir: *conjunto generador*

Si S genera a H y S' es el resultado de añadirle a S algún vector de H, entonces S' también genera a H, pero si S' es el resultado de quitarle a S algún vector, entonces S' puede que ya no genere a H.

5.1.1 Ejercicio de tarea. Dar un ejemplo de un subconjunto S que genere a $\mathbf{R}^2$ y sea tal que al eliminar de S cualquier vector, el conjunto resultante siga generando a $\mathbf{R}^2$.

Solución: Nos vemos forzados a buscar un conjunto con más vectores de los necesarios para generar $\mathbf{R}^2$; por ejemplo, un conjunto que serviría es $S = \{(1,1),(1,0),(0,1)\}$.

Ejemplos de subespacios vectoriales

Ejemplo 1. El conjunto de todas las combinaciones lineales de unos vectores dados

Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ son vectores de un espacio vectorial V, el conjunto H de todas las combinaciones lineales de estos vectores es un subespacio vectorial de V ya que:

1. H contiene al vector cero de V porque $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_p$.
2. La suma de dos vectores de H es otro vector de H porque al sumar dos combinaciones lineales de los $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_p$ se obtiene otra combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_p$.
3. Al multiplicar un escalar cualquiera por un vector de H se obtiene otro vector de H porque al multiplicar k por una combinación lineal $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$ se obtiene otra combinación lineal (con cada coeficiente multiplicado por k): $kc_1\mathbf{v}_1 + \cdots + kc_p\mathbf{v}_p$.

espacio columna de una matriz

Todo subespacio vectorial de V que contenga a los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ contiene también a H, por tanto H, el conjunto de todas las combinaciones lineales de esos vectores, es el subespacio generado por el conjunto de vectores dado: $H = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$. Un caso particular de esto es el espacio columna de una matriz, que es el espacio generado por las columnas de la matriz, de forma que si A es la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (de forma que $A = [\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2 \;\; \ldots \;\; \mathbf{a}_n]$) entonces $\text{Col}\, A = \text{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$.

Ejemplo 2. El subespacio imagen de una aplicación lineal

Dada una aplicación lineal T de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W, $T : V \to W$, el conjunto H de vectores de W que son imagen de algún vector de V es un subespacio vectorial de W ya que:

1. H contiene al vector cero de W porque $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. La suma de dos vectores de H es otro vector de H porque $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$.
3. Al multiplicar un escalar cualquiera por un vector de H se obtiene otro vector de H porque $kT(\mathbf{u}) = T(k\mathbf{u})$.

subespacio imagen

Este subespacio vectorial se llama el *subespacio imagen* de T y se denota $\text{Im}\, T$. Un caso particular de esto es aquél en el que el dominio y codominio de T son espacios $\mathbf{R}^p$: $V = \mathbf{R}^n$, $W = \mathbf{R}^m$ de forma que T es una aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Si A es la matriz canónica de T entonces para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ y por tanto la imagen de cada $\mathbf{x}$ es una combinación lineal de las columnas de A. Entonces el conjunto imagen de T, $\text{Im}\, T$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A, lo cual es precisamente el espacio columna de A y por tanto, en este caso particular $\text{Im}\, T = \text{Col}\, A$.

Ejemplo 3. El conjunto solución de un sistema homogéneo

Dado un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas, si A es su matriz de coeficientes, un vector $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ es una solución del sistema si $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. El conjunto H de todas las soluciones del sistema es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$ ya que:

1. H contiene al vector cero de $\mathbf{R}^n$ porque $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
2. La suma de dos vectores de H es otro vector de H porque si $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ entonces $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
3. Al multiplicar un escalar cualquiera por un vector de H se obtiene otro vector de H porque si $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces para cualquier escalar c se tiene $A(c\mathbf{u}) = c\, A\mathbf{u} = c\, \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Dado que dicho conjunto solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lo hemos llamado el espacio nulo de A, concluimos que si A es una matriz $m \times n$, su espacio nulo es un subespacio de $\mathbf{R}^n$: $\text{Nul}\, A \subset \mathbf{R}^n$.

¡Atención! Si un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas no es homogéneo entonces su conjunto solución no es un subespacio de $\mathbf{R}^n$ —entre otras razones porque no contiene al vector $\mathbf{0}$ (si el vector $\mathbf{0}$ es una solución de un sistema, el sistema es necesariamente homogéneo).

Ejemplo 4. El subespacio núcleo de una aplicación lineal

Dada una aplicación lineal T de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W, $T : V \to W$, el conjunto H de todos los vectores $\mathbf{v}$ de V tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ es un subespacio vectorial de V ya que:

1. H contiene al vector cero de W porque $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. La suma de dos vectores de H es otro vector de H porque al ser $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, si $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ y $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ entonces también $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
3. Al multiplicar un escalar cualquiera por un vector de H se obtiene otro vector de H porque si $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ entonces $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Este subespacio vectorial se llama el núcleo de T y se denota $\ker T$. Un caso particular de esto es aquél en el que el dominio y codominio de T son espacios $\mathbf{R}^p$: $V = \mathbf{R}^n$, $W = \mathbf{R}^m$ de forma que T es una aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Si A es la matriz canónica de T entonces para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ y por tanto la condición $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ de que un vector $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$ esté en el núcleo de T es $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Entonces el núcleo de T, $\ker T$, es el espacio nulo de A y por tanto en este caso $\ker T = \operatorname{Nul} A$.

5.1.2 **Ejercicio de tarea.** Sean A y B dos matrices de m filas (es decir, cuyas columnas son vectores de $\mathbf{R}^m$), aunque no tienen por qué tener el mismo número de columnas. Demuestra que si el espacio columna de A está contenido en el espacio columna de B entonces el número de pivotes de A es menor o igual que el número de pivotes de B.

Pista: Para cada columna $\mathbf{a}_i$ de A el sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{a}_i$ es compatible. ¿Cómo son las filas de ceros de una f.e. de $(B|A)$?

5.1.3 **Ejercicio de tarea.** Sean A y B dos matrices en las condiciones del ejercicio 5.1.2. Usa la tesis de dicho ejercicio para demostrar que si A y B tienen el mismo espacio columna entonces A y B tienen el mismo número de pivotes.

La proposición 1.6.2, combinada con el resultado del ejercicio 5.1.3 nos permite demostrar que dos matrices en cada una de las cuales las columnas son independientes y que generen el mismo espacio (es decir, que ambas tienen el mismo espacio columna) necesariamente tendrán el mismo número de columnas. Esto es el objetivo del siguiente ejercicio:

5.1.4 **Ejercicio de tarea.** Sean A y B matrices de columnas independientes (es decir, con un pivote en cada columna). Demuestra que si el espacio columna de A es igual al espacio columna de B entonces A y B tienen el mismo número de filas y de columnas.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1, Ejercicio 2, Ejercicio 3, Ejercicio 4.

Ejercicios de la sección 5.1 Espacios vectoriales y subespacios

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en Nul A? ¿Está $\mathbf{u}$ en Col A? Justifica tus respuestas.

2. Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla un vector en Nul A que sea distinto de $\mathbf{0}$ y un vector en Col A que no sea ninguna columna de A.

3. Supongamos que una matriz A de orden $n \times n$ es invertible. ¿Qué puede decirse acerca de Col A? ¿Y acerca de Nul A?.

4. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$. Averigua si $\mathbf{w}$ está en el subespacio de $\mathbf{R}^3$ generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

5. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$. Averigua si $\mathbf{u}$ está en el subespacio de $\mathbf{R}^4$ generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

6. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix}$ y $A = [\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3]$ (la matriz cuyas columnas son $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$).

(a) ¿Cuántos vectores hay en $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$?
(b) ¿Cuántos vectores hay en Col A?
(c) ¿Está $\mathbf{p}$ en Col A? ¿Por qué sí o por qué no?

7. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$. Averigua si $\mathbf{p}$ está en Col A, donde $A = [\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3]$.

8. Con A y $\mathbf{p}$ como en el ejercicio 5, averigua si $\mathbf{p}$ está en Nul A.

9. Con $\mathbf{u} = (-5, 5, 3)$ y A como en ejercicio 6, averigua si $\mathbf{u}$ está en Nul A.

En los ejercicios 10 y 11, halla enteros p y q tales que Nul A sea un subespacio de $\mathbf{R}^p$ y Col A un subespacio de $\mathbf{R}^q$.

10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -5 \\ -9 & -4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 11 \end{pmatrix}$.

12. Para A como en el ejercicio 10, halla un vector no nulo en Nul A y un vector no nulo en Col A que no sea ninguna de las columnas dadas.

13. Para A como en el ejercicio 11, halla un vector no nulo en Nul A y un vector no nulo en Col A que no sea ninguna de las columnas dadas.

En los ejercicios 14 y 15 indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

14.

(a) Un subespacio de $\mathbf{R}^n$ es cualquier conjunto H tal que (i) el vector cero está en H, (ii) si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en H, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en H, y (iii) si c es un número y $\mathbf{u}$ está en H, $c\mathbf{u}$ está en H.
(b) El espacio columna de una matriz A es el subespacio imagen de la aplicación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.
(c) Si A es una matriz $m \times n$ y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible entonces el espacio columna de A es todo $\mathbf{R}^m$.
(d) El núcleo de una aplicación lineal es un espacio vectorial.
(e) Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ están en $\mathbf{R}^n$, entonces Gen$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es lo mismo que el espacio columna de la matriz $[\mathbf{v}_1 \; \ldots \; \mathbf{v}_p]$.
(f) El conjunto de todas las soluciones de un sistema de m ecuaciones homogéneas en n incógnitas es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^m$.

15.

(a) Un subconjunto H de $\mathbf{R}^n$ es un subespacio si el vector cero está en H.
(b) El espacio nulo de A es el núcleo de la aplicación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.
(c) El espacio columna de una matriz A es el conjunto de todos los vectores de la forma $A\mathbf{x}$ para algún $\mathbf{x}$.
(d) Dados los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ en $\mathbf{R}^n$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$.
(e) El espacio nulo de una matriz $m \times n$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$.
(f) El espacio columna de una matriz A es el conjunto de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

16. Construye una matriz A de orden 3×3 y un vector $\mathbf{b}$ distinto de cero en forma tal que $\mathbf{b}$ esté en Col A, pero $\mathbf{b}$ no sea igual a ninguna de las columnas de A.

17. Construye una matriz A de orden 3×3 y un vector $\mathbf{b}$ tales que $\mathbf{b}$ no esté en Col A.

18. Construye una matriz A de orden 3×3 distinta de cero y un vector $\mathbf{b}$ diferente de cero tales que $\mathbf{b}$ esté en $\operatorname{Nul} A$.

En los ejercicios 19 a 23, responde de la manera más clara que te sea posible y justifica tus respuestas.

19. Supongamos que F es una matriz de orden 5×5 cuyo espacio columna no es igual a $\mathbf{R}^5$. ¿Qué puede decirse acerca del espacio nulo $\operatorname{Nul} F$?

20. Si R es una matriz de orden 6×6 y $\operatorname{Nul} R$ no es igual al subespacio cero, $\operatorname{Nul} R \neq \{\mathbf{0}\}$, ¿qué puede decirse acerca del espacio columna $\operatorname{Col} R$?

21. Si Q es una matriz de orden 4×4 y $\operatorname{Col} Q = \mathbf{R}^4$, ¿qué puede decirse acerca de las soluciones a las ecuaciones de la forma $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^4$.

22. Si P es una matriz de orden 5×5 y $\operatorname{Nul} P$ es igual al subespacio cero, $\operatorname{Nul} P = \{\mathbf{0}\}$, ¿qué puede decirse acerca de las soluciones a las ecuaciones de la forma $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^5$?

23. ¿Qué puede decirse acerca de $\operatorname{Nul} B$ si B es una matriz de orden 5×4 con columnas linealmente independientes?

5.2. Independencia lineal y Bases

Independencia lineal de vectores en un espacio vectorial

Los conceptos de dependencia e independencia lineal se definen a continuación para un espacio vectorial V cualquiera, pero en el caso de que $V = \mathbf{R}^n$ estos conceptos coinciden con los que habíamos estudiado para $\mathbf{R}^n$.

DEFINICIÓN 5.2.5

Conjunto libre o vectores independientes

Un subconjunto S de un espacio vectorial V es libre *(o sus vectores son* linealmente independientes*) si no hay en ese conjunto ningún vector que sea combinación lineal de los demás vectores.*

El ejemplo más sencillo de conjunto que cumple esta definición es el del conjunto vacío, por tanto para todo espacio vectorial V, el subconjunto vacío, $\varnothing \subset V$ es libre. $\varnothing \subset V$ es libre

Dado un conjunto finito de vectores $S = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ en V, supongamos que la ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_p\mathbf{b}_p = \mathbf{0} \tag{5.4}$$

tiene alguna solución no trivial $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)$. Toda solución no trivial de la ecuación (5.4) se llama una *relación de dependencia lineal* entre los vectores $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$, por tanto estamos suponiendo que $\mathbf{y}$ es relación de dependencia lineal entre los vectores $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$. Esto significa que se cumple *relación de dependencia lineal*

$$y_1\mathbf{b}_1 + \cdots + y_p\mathbf{b}_p = \mathbf{0}$$

y además alguno de los y_i es distinto de cero. Podemos suponer que el que es distinto de cero es el primero (en caso contrario bastaría reordenar los términos). Pero $y_1 \neq 0$ significa que podemos dividir toda la ecuación entre y_1 y despejar el vector $\mathbf{b}_1$. Por tanto: si la ecuación (5.4) tiene alguna solución no trivial, entonces alguno de los vectores $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ es combinación lineal de los otros y el conjunto S no es libre.

Supongamos ahora, recíprocamente, que el conjunto S no es libre. Entonces, según la definición, alguno de sus vectores es combinación lineal de los otros y se cumple una ecuación del tipo

$$\mathbf{b}_1 = \alpha_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_p\mathbf{b}_p.$$

Esto implica que la ecuación (5.4) tiene al menos una solución no trivial, a saber:

$$\mathbf{x} = (-1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p).$$

Todo esto demuestra el siguiente teorema:

TEOREMA 5.2.1

Un subconjunto finito de un espacio vectorial V, $S = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$, es libre si y sólo si no existe ninguna relación de dependencia lineal entre los vectores de S, lo cual significa que la ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_p\mathbf{b}_p = \mathbf{0}$$

no tiene ninguna solución distinta de la trivial.

Los subconjuntos libres de un espacio vectorial V "tienden a ser pequeños" en el sentido de que si se les quita algún vector no dejan de ser libres, pero al ampliarlos añadiéndoles algún vector pueden dejar de serlo. Es decir:

Si S es un subconjunto libre de V y S' es el resultado de quitarle a S algún vector, entonces S' sigue siendo libre, pero si S' es el resultado de añadirle a S algún vector, entonces S' puede que ya no sea libre.

5.2.1 Ejercicio de tarea. Dar un ejemplo de un subconjunto $S \subset \mathbf{R}^2$ que sea libre y sea tal que al añadir a S cualquier vector de $\mathbf{R}^2$, el conjunto resultante ya no sea libre.

Solución: Nos vemos forzados a buscar un conjunto libre con el mayor número posible de vectores; por ejemplo, un conjunto que serviría es $S = \{(1,0),(0,1)\}$.

El siguiente teorema es útil para determinar si un conjunto no vacío de vectores es libre o no:

TEOREMA 5.2.2

Un subconjunto $S = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ de un espacio vectorial V es libre (o sus vectores son linealmente independientes) si no hay en ese conjunto ningún vector $\mathbf{b}_i$ que sea combinación lineal de los vectores $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}\}$ que le preceden.

Base de un subespacio de un espacio vectorial

DEFINICIÓN 5.2.6

Base de un espacio vectorial

Sea H un subespacio de un espacio vectorial V. Se llama base *de H a todo conjunto de vectores de V, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ que tenga estas dos propiedades:*

(a) Los vectores $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ son linealmente independientes,

(b) El subespacio de V generado por los vectores $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ es igual a H.

En particular, esta definición se aplica al caso $H = V$ en que el subespacio vectorial es todo V.

La base canónica de $\mathbf{R}^n$

base canónica de $\mathbf{R}^n$

El ejemplo más conocido de base es la llamada *base canónica* de $\mathbf{R}^n$ que es el conjunto de vectores formado por las columnas de la matriz identidad I_n y lo denotamos

$$\mathfrak{can} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}.$$

Este ejemplo de una base de $\mathbf{R}^n$ es un caso particular de otro más general que es el siguiente:

Las columnas de cualquier matriz inversible $n \times n$ forman una base de $\mathbf{R}^n$.

Según la definición de base de un espacio vectorial, dado un conjunto de vectores linealmente independientes $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ en un espacio vectorial V, ese conjunto es una base del subespacio que genera en V, es decir:

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de V entonces S es una base del subespacio $H = \operatorname{Gen}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$.

Como ejemplo de esto tenemos la base del espacio cero:

La base del espacio cero $\{\mathbf{0}\}$

El subconjunto vacío de cualquier espacio vectorial V es un conjunto libre y, además el subespacio generado por el conjunto vacío es es el subespacio cero: $\operatorname{Gen} \varnothing = \{\mathbf{0}\}$. Por tanto, en cualquier espacio vectorial V el subconjunto vacío es una base del subespacio cero.

El teorema del conjunto generador

Si $\mathcal{B}$ es una base de un subespacio H de V, entonces se puede decir que $\mathcal{B}$ es un conjunto generador de H "lo más eficiente posible" en el sentido de que genera H con el mínimo número posible de vectores. Esto quiere decir (de momento[1]) que $\mathcal{B}$ es tal que si eliminásemos de $\mathcal{B}$ un vector cualquiera, el conjunto que quedase ya no generaría H. Esto es el contenido del siguiente teorema:

TEOREMA 5.2.3

Teorema del conjunto generador

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ un conjunto de vectores de V y sea $H = \operatorname{Gen}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ el subespacio de V generado por esos vectores.

(a) Si existe en S algún vector (sea, por ejemplo, $\mathbf{v}_k$), que es combinación lineal de los demás vectores de S, al eliminar ese vector $\mathbf{v}_k$ de S, el conjunto que queda también genera H.

(b) Existe algún subconjunto de S que es una base de H.

Bases del espacio nulo y del espacio columna de una matriz

Sabemos que el espacio nulo de una matriz A es el conjunto solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. La solución general de todo sistema homogéneo como este, suponiendo que tiene k variables libres, se puede escribir en forma paramétrica vectorial con k parámetros en la forma

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k$$

[1] Más tarde veremos un significado más profundo, a saber: Que ningún subconjunto de V con menos vectores que los que tiene $\mathcal{B}$ genera a H.

donde los vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, según hemos visto anteriormente, son linealmente independientes. Como evidentemente estos vectores generan el espacio nulo de A, tenemos:

Si la matriz A tiene k columnas no pivote y la solución general del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ toma la forma

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k,$$

entonces los vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ forman una base de su espacio nulo, $\operatorname{Nul} A$.

Por ejemplo, nos planteamos hallar una base del espacio nulo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Para ello resolvemos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hallando la forma escalonada reducida de A:

$$A \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdots} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escribimos la solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y extraemos de ella los generadores:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;; \quad \text{hay dos generadores:} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El conjunto formado por estos dos vectores, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, es una base de $\operatorname{Nul} A$.

En el caso del espacio columna, dado que las columnas pivote de una matriz A son linealmente independientes y generan el espacio columna de A, tenemos:

Las columnas pivote de cualquier matriz A forman una base de su espacio columna, $\operatorname{Col} A$.

Por ejemplo, para la matriz A del ejemplo anterior, los cálculos realizados muestran que las columnas pivote de A son la primera y la tercera, por lo tanto una base del espacio columna $\operatorname{Col} A$ es el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1.

Ejercicios de la sección 5.2 Independencia lineal y Bases

Averigua cuáles conjuntos de los ejercicios 1 a 6 son bases para $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Justifica tus respuestas.

1. $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 7 a 10 se presenta una matriz A y una forma escalonada de A. Halla una base para $\operatorname{Col} A$ y una base para $\operatorname{Nul} A$.

7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -2 & -7 \\ 2 & -6 & 4 & 8 \\ 3 & -9 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 7 & 5 \\ -5 & 9 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Halla una base del subespacio de $\mathbf{R}^2$ determinado por la ecuación $y = -3x$.

12. Halla una base del subespacio de $\mathbf{R}^3$ determinado por la ecuación $x - 3y + 2z = 0$.

13. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$ y sea $H = \operatorname{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Sabiendo que $4\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ halla una base de H.

En los ejercicios 14 y 15 indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

14.

(a) Si $H = \operatorname{Gen}\{\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_p\}$ entonces el conjunto $\{\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_p\}$ es una base de H.

(b) Las columnas de una matriz inversible $n \times n$ forman una base para $\mathbf{R}^n$.

(c) Una base es un conjunto generador que tiene el mayor número posible de vectores.

(d) Las operaciones elementales de filas no afectan a las relaciones de dependencia lineal entre las columnas de una matriz.

15.

(a) Si un conjunto finito de vectores, S, genera un espacio vectorial V, entonces algún subconjunto de S es una base de V.

(b) Una base es un conjunto de vectores linealmente independientes con el mayor número posible de vectores.

(c) Al hallar la solución general de un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en forma paramétrica vectorial, los vectores generadores hallados pueden no constituir una base de $\operatorname{Nul} A$.

(d) Si B es una forma escalonada de una matriz A, entonces las columnas pivote de B forman una base para $\operatorname{Col} A$.

16. Explica por qué si $\mathbf{R}^4 = \operatorname{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es una base.

17. Explica por qué si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto libre en $\mathbf{R}^n$ entonces es una base.

18. Supongamos que las columnas $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ de la matriz $A = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_p]$ son linealmente independientes. Explica por qué esas columnas forman una base de $\operatorname{Col} A$.

19. ¿Qué puede decirse acerca del número de filas y de columnas de una matriz A de orden $m \times n$ si las columnas de A constituyen una base de $\mathbf{R}^m$?

Los ejercicios 20 y 21 muestran que toda base de $\mathbf{R}^n$ contiene exactamente n vectores.

20. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de k vectores de $\mathbf{R}^n$ con $k < n$. Indica qué resultado del tema 1 implica que S no puede ser una base de $\mathbf{R}^n$.

21. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de k vectores de $\mathbf{R}^n$ con $k > n$. Indica qué resultado del tema 1 implica que S no puede ser una base de $\mathbf{R}^n$.

Los ejercicios 22 y 23 revelan una importante conexión entre la independencia lineal y las aplicaciones lineales y son una buena práctica del uso de la definición de la independencia lineal. Sean V y W dos espacios vectoriales, sea $T : V \to W$ una aplicación lineal, y sea $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ un subconjunto de V.

22. Demuestra que si los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ son linealmente dependientes en V, entonces los vectores imagen $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_p)$ también son linealmente dependientes. (Esto significa que si los vectores $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_p)$ son independientes, también lo son los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$.)

23. Supón que T es inyectiva (o sea que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ implica $\mathbf{u} = \mathbf{v}$). Demuestra que si los vectores imagen $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_p)$ son linealmente dependientes entonces también lo son los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$. (Esto indica que toda aplicación lineal inyectiva trnasforma un conjunto de vectores independientes en otro conjunto de vectores independientes.)

5.3. Sistemas de coordenadas

Coordenadas de un vector relativas a una base

Sea V un espacio vectorial y sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ una base de V. Entonces todo vector $\mathbf{x}$ de V tiene una única expresión como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$, lo cual significa que existen unos coeficientes únicos $c_1, \ldots, c_n$ tales que

$$c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n = \mathbf{x}. \tag{5.5}$$

Estos coeficientes se llaman *las coordenadas de* $\mathbf{x}$ *relativas a la base* $\mathcal{B}$. El vector de $\mathbf{R}^n$ cuyas componentes son los coeficientes $c_1, \ldots, c_n$ se llama el *vector de coordenadas de* $\mathbf{x}$ *en la base* $\mathcal{B}$ y se denota $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, de forma que la ecuación (5.5) implica:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

5.3.1 Ejercicio de tarea. Sea $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ las columnas de la matriz identidad 2×2 y sean $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. (a) Demuestra que el conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ es una base de $\mathbf{R}^2$. (b) Halla las coordenadas de $\mathbf{e}_1$ y de $\mathbf{e}_2$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

Solución: (a) Basta ver que la matriz $[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ tiene inversa. Por ejemplo viendo que su determinante no es cero: $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) = -2$.

(b) $[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right)$, $[\mathbf{e}_2]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{smallmatrix}\right)$

En el caso especial en que V es un espacio $\mathbf{R}^n$ y que la base elegida es la base canónica de $\mathbf{R}^n$, $\mathfrak{can} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, dado que para cada vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ se tiene

$$x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n = \mathbf{x},$$

se deduce que *todo vector de* $\mathbf{R}^n$ *es su propio vector de coordenadas respecto a la base canónica*:

$$[\mathbf{x}]_{\mathfrak{can}} = \mathbf{x}.$$

La función de coordenadas

Si V es un espacio vectorial y $\mathcal{B}$ es una base de V que tiene n vectores, se llama *función de coordenadas de V en la base $\mathcal{B}$* a la función $T_{\mathcal{B}} : V \to \mathbf{R}^n$ que asigna a cada vector de V su vector de coordenadas en base $\mathcal{B}$, es decir, $T_{\mathcal{B}}$ está definida por

$$T_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Es evidente que para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ y todo escalar c se cumplen las propiedades:

$$[c\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = c[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}, \quad [\mathbf{x} + \mathbf{y}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} + [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}},$$

por lo que la aplicación $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ es una aplicación lineal.

Es también evidente que esta aplicación es la aplicación inversa de la aplicación de $\mathbf{R}^n$ en V que « reconstruye los vectores de V a partir de sus coordenadas », es decir, que asigna a cada "vector de coordenadas" $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ en $\mathbf{R}^n$ el vector $\mathbf{x} \in V$ definido por la fórmula (5.5). En consecuencia, tenemos:

TEOREMA 5.3.1

Teorema de linealidad de la función de coordenadas

Si V es un espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ es una base de V, la función de coordenadas *$\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ es una aplicación lineal biyectiva de V en $\mathbf{R}^n$.*

En un espacio vectorial V, una base de n elementos permite definir sobre V un *sistema de coordenadas*, el cual queda definido por la función de coordenadas. Debido a que ésta es una aplicación lineal biyectiva, ella y su inversa establecen entre V y $\mathbf{R}^n$ una identificación tal que permite tratar al espacio vectorial V como si fuese $\mathbf{R}^n$. En general, una aplicación lineal biyectiva entre dos espacios vectoriales permite "ver" a cada uno de ellos como si fuese el otro y por ello tal aplicación se llama un *isomorfismo*[2] *de espacios vectoriales*. En tal situación, los dos espacios vectoriales se dice que son *isomorfos*.

sistema de coordenadas

isomorfismo de espacios vectoriales

La función de coordenadas asociada con una base de V es el mejor ejemplo de *isomorfismo*. Si la base tiene n elementos entonces V es isomorfo a $\mathbf{R}^n$ y la función de coordenadas nos permite "ver" a V como si fuese $\mathbf{R}^n$.

Cálculo de las coordenadas en $\mathbf{R}^n$

Nos interesa ahora estudiar el problema de calcular las coordenadas de un vector en el caso especial en que el espacio vectorial V es uno de los espacios $\mathbf{R}^n$, es decir, calcular las coordenadas de un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ relativas a una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ de $\mathbf{R}^n$ dada.

En este caso, los vectores de la base, $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ son vectores de $\mathbf{R}^n$ y por tanto la ecuación (5.5) se puede expresar como un producto matriz por vector:

$$[\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n] \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}.$$

La matriz cuadrada que aparece en esta expresión, $[\mathbf{b}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{b}_n]$, cuyas columnas son los vectores de la base dada en $\mathbf{R}^n$, transforma (mediante el producto matriz por vector) las $\mathcal{B}$-coordenadas de un vector $\mathbf{x}$ cualquiera en el propio $\mathbf{x}$. Pero el vector $\mathbf{x}$ es su propio vector

[2]iso-morfismo, del griego, "misma forma".

de coordenadas respecto a la base canónica ($\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathtt{can}}$) y por ello dicha matriz $[\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$ transforma las $\mathcal{B}$-coordenadas de un vector $\mathbf{x}$ en las coordenadas de $\mathbf{x}$ en la base canónica, por lo que se llama la *matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a la base canónica de $\mathbf{R}^n$*. Esta matriz se denota $P_{\mathcal{B}}$ y, como hemos visto, está definida por:

matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a la base canónica de $\mathbf{R}^n$

$$P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n].$$

Su propiedad característica es que para todo vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$,

$$P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}.$$

5.3.2 Ejercicio de tarea. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ la base de $\mathbf{R}^2$ del ejercicio de tarea anterior. Halla $P_{\mathcal{B}}$.

Solución: $P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz $P_{\mathcal{B}}$ es la matriz canónica de la aplicación $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \mapsto \mathbf{x}$, en consecuencia su inversa es la matriz canónica de la aplicación $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, que no es otra que la función de coordenadas de $\mathbf{R}^n$ en la base $\mathcal{B}$, y tenemos:

> Las coordenadas de un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ relativas a una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ se calculan multiplicando la inversa de la matriz $P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$ por $\mathbf{x}$,
> $$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\mathbf{x}.$$

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1, Ejercicio 2.

Ejercicios de la sección 5.3 Sistemas de coordenadas

En los ejercicios 1 a 4, halla el vector $\mathbf{x}$ cuyo vector de coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$ dada es el vector $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ dado.

1. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$

3. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 5 a 8, halla el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto a la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$.

5. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 9 y 10, usa una matriz inversa para encontrar $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ para las $\mathbf{x}$ y $\mathcal{B}$ dadas.

9. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

10. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 11 y 12, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas. A menos que se diga lo contrario $\mathcal{B}$ es una base de un subespacio vectorial V de $\mathbf{R}^m$.

11.

(a) Si $\mathbf{x}$ está en V y si la base $\mathcal{B}$ de V tiene n vectores entonces $[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$ está en $\mathbf{R}^n$.

(b) Si $P_\mathcal{B}$ es la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a la base canónica entonces $[\mathbf{x}]_\mathcal{B} = P_\mathcal{B} \cdot \mathbf{x}$

(c) Si la base $\mathcal{B}$ de V tiene 3 elementos, entonces V y $\mathbf{R}^3$ son isomorfos.

12.

(a) Si $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\mathbf{R}^m$ entonces el vector de coordenadas de un $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^m$ relativas a $\mathcal{B}$ es el propio $\mathbf{x}$.

(b) La correspondencia $[\mathbf{x}]_\mathcal{B} \mapsto \mathbf{x}$ se llama función de coordenadas.

(c) En algunos casos, un plano en $\mathbf{R}^3$ puede ser isomorfo a $\mathbf{R}^2$.

13. Halla la matriz canónica de la aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$ que asigna a cada vector $\mathbf{x}$ su vector de coordenadas relativas a la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$; es decir, la matriz canónica de la función de coordenadas relativas a $\mathcal{B}$.

14. Para los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{x}$ dados, demuestra que $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de $H = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y halla las coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a $\mathcal{B}$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En los ejercicios 15 y 16, halla la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a la base canónica de $\mathbf{R}^n$

15. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

16. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

5.4. Dimensión de un espacio vectorial

Lección 7, 28 mar 2023

Del Teorema de linealidad de la función de coordenadas (Teorema 5.3.1, página 13), se deduce lo siguiente:

PROPOSICIÓN 5.4.1

Sea V un espacio vectorial que tiene una base de n vectores, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Si S es un subconjunto de V con más de n vectores, entonces S es ligado.

Demostración:

Supongamos que el subconjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ de V tiene más de n vectores, o sea $p > n$. Los p vectores de $\mathcal{B}$-coordenadas de los vectores de S

$$[\mathbf{v}_1]_\mathcal{B}, \ldots, [\mathbf{v}_p]_\mathcal{B}$$

son p vectores de $\mathbf{R}^n$ y por tanto son las columnas de una matriz que tiene más columnas que filas. En consecuencia esa matriz tiene alguna columna no pivote y el sistema homogéneo que tiene esa matriz de coeficientes tiene soluciones no triviales, es decir, existen coeficientes $c_1, \ldots, c_p$ no todos nulos tales que

$$c_1[\mathbf{v}_1]_\mathcal{B} + \cdots + c_p[\mathbf{v}_p]_\mathcal{B} = \mathbf{0},$$

por tanto, por la linealidad de la función de coordenadas,

$$[c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p]_\mathcal{B} = \mathbf{0}.$$

Esto dice que el vector de coordenadas del vector de V $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$ es el vector cero, por tanto este vector es cero y lo que tenemos es una relación de dependencia lineal entre los vectores de S:

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

Luego S es ligado, como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que V es un espacio vectorial que tiene una base $\mathcal{B}$ de n vectores. Entonces, por lo que acabamos de ver, todo conjunto de vectores de V que sea libre tiene a lo sumo n vectores. En particular, otra base cualquiera tiene a lo sumo n vectores. Dadas dos bases culesquiera de V ninguna puede tener más vectores que la otra y por tanto llegamos a la conclusión de que:

TEOREMA 5.4.1

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores, entonces todas las bases de V tienen n vectores.

DEFINICIÓN 5.4.7

Espacio vectorial de dimensión finita

Se llama espacio vectorial de dimensión finita *a todo espacio vectorial que tenga una base con un número finito de elementos. En un espacio vectorial de dimensión finita todas las bases tienen el mismo número de elementos y ese número se llama la* dimensión *del espacio. La dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita V se denota* $\dim V$.

Para cualquier número natural n en el espacio vectorial $\mathbf{R}^n$ conocemos una base de n vectores, a saber, la base canónica, $\mathfrak{can} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, cuyos elementos son las columnas de la matriz identidad $n \times n$. En consecuencia, $\dim \mathbf{R}^n = n$.

Si V es el espacio cero, $V = \{\mathbf{0}\}$, cuyo único elemento es el vector cero, entonces V tiene únicamente una base que es el conjunto vacío. En consecuencia, la dimensión del espacio vectorial cero es cero: $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Las dimensiones de los espacios nulo y columna de una matriz

Según se ha visto antes, las columnas pivote de una matriz forman una base de su espacio columna. Por otra parte, el número de vectores de una base del espacio nulo es igual al número de variables libres del sistema homogéneo que tiene esa matriz de coeficientes; pero ese número es igual al número de columnas no pivote de la matriz dada. En consecuencia tenemos:

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Col} A) &= \text{número de columnas pivote de } A \\ \dim(\operatorname{Nul} A) &= \text{número de columnas no pivote de } A \\ \dim(\operatorname{Col} A) + \dim(\operatorname{Nul} A) &= \text{número total de columnas de } A. \end{aligned}$$

Traducido al lenguaje de las aplicaciones lineales:

Para cualquier aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$,

$$\dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\ker T) = n.$$

En general, si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita, para cualquier aplicación lineal $T : V \to W$,

$$\dim(\operatorname{Im} T) + \dim(\ker T) = \dim V.$$

5.4.1 Ejercicio de tarea. Considera los siguientes subespacios de $\mathbf{R}^4$: H es el subespacio cuya ecuación cartesiana es $2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$, mientras que $K = \operatorname{Col} A$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcula la dimensión de H y la de K.

Solución: $\dim H = 3$, $\dim K = 2$.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1.

Ejercicios de la sección 5.4 Dimensión de un espacio vectorial

1. Determina la dimensión del subespacio H de $\mathbf{R}^3$ generado por los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. (Primero halla una base para H.)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

2. Considera la siguiente base de $\mathbf{R}^2$ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0'2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0'2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Halla $\mathbf{x}$ sabiendo que su vector de coordenadas relativas a $\mathcal{B}$ es $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. ¿Podría $\mathbf{R}^3$ contener a un subespacio cuatridimensional? Explica tu respuesta.

En los ejercicios 4 y 5, halla el vector $\mathbf{x}$ determinado por el vector de coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ dado y la base $\mathcal{B}$ dada. Explica cada respuesta con una figura.

4. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 6 a 9, el vector $\mathbf{x}$ está en un subespacio H que tiene una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Halla el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a la base $\mathcal{B}$.

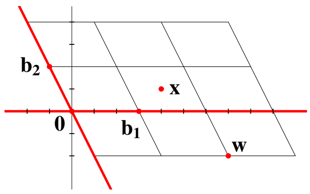
6. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$

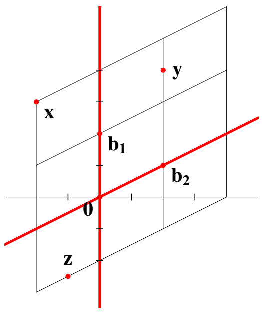
8. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

10. Sean $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Usa la figura para estimar $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$. Confirma tu estimación de $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ usando esas coordenadas junto con $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ para calcular $\mathbf{x}$.



11. Sean $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2'5 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Usa la figura para estimar $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$ y $[\mathbf{z}]_{\mathcal{B}}$. Confirma tu estimación de $[\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$ y $[\mathbf{z}]_{\mathcal{B}}$ usando esas coordenadas junto con $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ para calcular $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$.



En los ejercicios 12 a 15 se presentan una matriz A y una forma escalonada de A. Halla bases para $\operatorname{Col} A$ y $\operatorname{Nul} A$, y dí cuáles son las dimensiones de estos subespacios.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 9 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & 4 & -3 \\ -4 & 12 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 5 & -3 \\ -2 & 0 & -6 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & -9 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -8 & 4 & 3 \\ -3 & -9 & 9 & -7 & -2 \\ 3 & 10 & -7 & 11 & 7 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & -9 & -7 & 8 \\ 4 & 8 & -9 & -2 & 7 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En los ejercicios 16 y 17, halla una base para el subespacio de $\mathbf{R}^4$ que generan los vectores dados. ¿Cuál es la dimensión del subespacio?.

16. $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$.

18. Supongamos que una matriz A de orden 3×5 tiene solamente tres columnas pivote. ¿Es $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^3$? ¿Es $\operatorname{Nul} A = \mathbf{R}^2$? Explica tus respuestas.

19. Supongamos que una matriz A de orden 4×7 tiene solamente tres columnas pivote ¿Es $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^3$? ¿Cuál es la dimensión de $\operatorname{Nul} A$? Explica tus respuestas.

En los ejercicios 20 y 21, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas. Aquí A es una matriz $m \times n$.

20.

(a) Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ es una base para un subespacio H, y si $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$, entonces $c_1, \dots, c_p$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a la base $\mathcal{B}$.

(b) Cada recta en $\mathbf{R}^n$ es un subespacio vectorial unidimensional de $\mathbf{R}^n$.

(c) La dimensión de $\operatorname{Col} A$ es el número de columnas pivote de A.

(d) La suma de las dimensiones de $\operatorname{Col} A$ y $\operatorname{Nul} A$ es igual al número de columnas de A.

(e) Si un conjunto de p vectores genera un subespacio p-dimensional H de $\mathbf{R}^n$, entonces estos vectores forman una base para H.

21.

(a) Si $\mathcal{B}$ es una base para un subespacio H, entonces cada vector en H puede escribirse sólo de una forma como combinación lineal de los vectores en $\mathcal{B}$.

(b) Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ es una base para un subespacio H de $\mathbf{R}^n$, entonces la correspondencia $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ hace que H se vea y actúe igual que $\mathbf{R}^p$.

(c) La dimensión de $\operatorname{Nul} A$ es el número de variables en la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(d) Si H es un subespacio p-dimensional de $\mathbf{R}^n$, entonces todo conjunto de p vectores linealmente independientes de H es una base para H.

22. Construye una matriz A de orden 3×4 tal que $\dim \operatorname{Nul} A = 2$ y $\dim \operatorname{Col} A = 2$.

23. Sea A una matriz $n \times p$ cuyo espacio columna es p-dimensional. Explica por qué las columnas de A deben ser linealmente independientes.

24. Supongamos que los vectores $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$ generan un subespacio W, y sea $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_q\}$ cualquier subconjunto de W que contenga más de p vectores. Completa los detalles del siguiente argumento para demostrar que $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_q$ es un conjunto ligado. Primero, sean $B = [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_p]$ y $A = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_q]$

(a) Explica por qué para cada vector $\mathbf{a}_j$, existe un vector $\mathbf{c}$ en $\mathbf{R}^p$ tal que $\mathbf{a}_j = B\,\mathbf{c}_j$.

(b) Sea $C = [\mathbf{c}_1 \ \dots \ \mathbf{c}_q]$. Explica por qué existe un vector diferente de cero tal que $C\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(c) Usa B y C para demostrar que $A\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Esto demuestra que las columnas de A son dependientes.

25. Usa el ejercicio 24 para mostrar que si A y B son bases para un subespacio W de $\mathbf{R}^n$, entonces A no puede contener más vectores que B y, recíprocamente, que B no puede contener más vectores que A.

26. Con los vectores indicados a continuación, sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $H = \operatorname{Gen}\mathcal{B} = \operatorname{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Demuestra que $\mathbf{x}$ está en H y halla el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a la base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ -13 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

27. Con los vectores indicados a continuación, sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $H = \operatorname{Gen}\mathcal{B} = \operatorname{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Demuestra que $\mathbf{x}$ está en H y halla el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a la base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5.5. Espacio fila y rango de una matriz

El espacio fila de una matriz

Matriz traspuesta

Si A es una matriz real de m filas y n columnas, cada fila de A está compuesta por n números reales y por tanto se puede identificar con un vector de $\mathbf{R}^n$. Si cada fila de A se escribe como una columna entonces obtenemos una nueva matriz que tiene m columnas y n filas. Esta nueva matriz se llama la *matriz traspuesta* de A y se denota A^{T}.

matriz traspuesta

Espacio fila

Se llama *espacio fila* de una matriz A, y se denota $\operatorname{Fil} A$, al espacio columna de su matriz traspuesta. Esto es, el espacio fila de una matriz de m filas y n columnas es el subespacio de $\mathbf{R}^n$ generado por las m filas de la matriz: $\operatorname{Fil} A = \operatorname{Col} A^{\mathrm{T}}$.

espacio fila

La diferencia fundamental entre el espacio fila y el espacio columna de una matriz consiste en que, aunque la operaciones elementales de filas cambian el espacio columna de una matriz, éstas no cambian el espacio fila. Esto es evidente para las operaciones de intercambio y de reescalado, pero también para las operaciones de reemplazo porque para cualesquiera vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, el espacio generado por ellos es el mismo que el generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} + \lambda\mathbf{u}$: $\operatorname{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \operatorname{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u}\}$. En consecuencia tenemos:

TEOREMA 5.5.1

Dos matrices obtenidas una de otra mediante operaciones elementales de filas tienen el mismo espacio fila. Si una de ellas tiene forma escalonada, sus filas no nulas forman una base del espacio fila de ambas.

Para comprender este teorema es necesario observar que ninguna de las filas no nulas de una matriz escalonada puede ser combinación lineal de las siguientes. Esta observación, combinada con el teorema 5.2.2 (ver pág. 8) demuestra la independencia de las filas no nulas de una matriz escalonada y como consecuencia que forman una base del espacio que generan (el espacio fila).

Ejercicio resuelto: Hallar una base del espacio nulo, una base del espacio columna y una base del espacio fila de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución: Para hallar una base del espacio nulo necesitamos poner A en forma escalonada reducida. De camino para conseguirlo pasaremos por una forma escalonada de A de la que sacaremos la información necesaria para obtener una base del espacio columna y una base del espacio fila. Comenzamos, pues hallando una forma escalonada de A.

$$A \xrightarrow[F_2+2F_1]{F_1\leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_1]{F_3-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & -14 \\ 0 & 4 & -8 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-4F_2]{F_3-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \end{pmatrix} = B.$$

Aunque aún no hemos llegado a una forma escalonada porque falta por realizar el intercambio de las filas 3 y 4, ya podemos ver cuáles son las columnas pivote (1, 2 y 4) y por tanto dar una base de $\operatorname{Col} A$ y podemos dar también una base de $\operatorname{Fil} A$:

Base de $\operatorname{Col} A$: columnas 1, 2 y 4 de A (columnas pivote de A).

Base de $\operatorname{Fil} A$: las filas no nulas de B.

Realizamos ahora operaciones elementales de filas para obtener la forma escalonada reducida de A:

$$B \xrightarrow[-\frac{1}{4}F_3]{F_3\leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1-F_3]{F_2-2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí podemos leer la base del espacio nulo de A:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 - x_5 \\ x_2 &= 2x_3 - 3x_5 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= 5x_5 \\ x_5 &= x_5 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Base de } \operatorname{Nul} A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Método alternativo: Al igual que la base del espacio columna de A está formada por columnas de la propia A, es posible dar una base del espacio fila de A formada por filas de la propia matriz A. Para ello basta escribir la traspuesta de A y obtener una forma escalonada de A^{T} para determinar cuáles son sus columnas pivote. La base de $\operatorname{Fil} A$ está formada por las columnas pivote de A^{T}. En el ejemplo anterior podríamos hacer lo siguiente: Para empezar, y con vistas a simplificar los cálculos, intercambiamos las dos primeras filas de A, lo cual no afecta al espacio fila. A partir de ahí, escribimos la traspuesta y hallamos una forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 11 & 7 \\ -5 & 8 & -19 & -13 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 5 & -17 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3+5F_1 \\ F_4-F_1 \\ F_5-5F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & -14 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3+2F_2 \\ F_4-2F_2 \\ F_5+7F_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Incluso sin terminar de hacer la forma escalonada, podemos decir que las columnas pivote son la primera, segunda y cuarta, por lo que una base del espacio fila de A está formada por las filas 1, 2 y 4 de A. Comparando esto con el resultado anterior, se puede comprobar que

$$\operatorname{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 8 \\ 0 \\ -17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -13 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

5.5.1 Ejercicio de tarea. Sabiendo que las matrices A y B dadas a continuación son equivalentes por filas, escribe, justificando tus respuestas, (a) una base del espacio columna, (b) una base del espacio fila y (c) una base del espacio nulo de A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 7 & 5 \\ -5 & 9 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución: (a) $\{(3,-2,-5,-2),(-1,2,9,6),(3,7,3,3)\}$. (b) $\{(3,-1,7,0,6),(0,2,4,0,3),(0,0,0,1,1)\}$. (c) $\{(-3,-2,1,0,0),(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2},0,-1,1)\}$

El teorema del rango

La dimensión del espacio columna de una matriz es el número de columnas pivote de la matriz. Este número es igual al número de pivotes de la matriz. Por otra parte, la dimensión del espacio fila es igual al número de filas no nulas en una forma escalonada cualquiera de la matriz. Este número también es igual al número de pivotes de la matriz, por tanto, llegamos a la siguente conclusión:

TEOREMA 5.5.2

Teorema del Rango

El espacio columna de una matriz A tiene la misma dimensión que el espacio fila. Esta dimensión común del espacio fila y del espacio columna de A se conoce como el rango *de A y se denota por* $\operatorname{Rang} A$. *En consecuencia, si A tiene n columnas, se verifica:*

$$\operatorname{Rang} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$$

El rango y el teorema de la matriz inversible

TEOREMA 5.5.3

Teorema de la matriz inversible (continuado)

Una matriz cuadrada A de orden n es una matriz inversible si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

(i) *Las columnas de A forman una base de $\mathbf{R}^n$.*
(j) $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^n$.
(k) $\dim \operatorname{Col} A = n$.
(l) $\operatorname{Rang} A = n$.
(m) $\operatorname{Nul} A = \{\mathbf{0}\}$.
(n) $\dim \operatorname{Nul} A = 0$.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1.

Ejercicios de la sección 5.5 Espacio fila y rango

En cada uno de los ejercicios 1 a 4 se dan dos matrices, A y B. Sabiendo que en cada caso las matrices A y B son equivalentes por filas y sin realizar ningún cálculo halla el rango de A y una base del espacio fila de A, $\operatorname{Fil} A$.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -2 & -7 \\ 2 & -6 & 4 & 8 \\ 3 & -9 & -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 7 & 5 \\ -5 & 9 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix},$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sabiendo que A es una matriz 4×7 de rango 3, halla $\dim \operatorname{Nul} A$, $\dim \operatorname{Fil} A$ y $\operatorname{Rang}(A^{\mathrm{T}})$.

6. Sabiendo que A es una matriz 7×5 de rango 2, halla $\dim \operatorname{Nul} A$, $\dim \operatorname{Fil} A$ y $\operatorname{Rang}(A^{\mathrm{T}})$.

7. Suponiendo que A es una matriz 4×7 con cuatro pivotes, ¿Es $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^4$?

8. Sabiendo que A es una matriz 6×8 con cuatro pivotes, halla $\dim \operatorname{Nul} A$. ¿Es $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^4$? ¿Por qué?

9. Sabiendo que A es una matriz 4×6 cuyo espacio nulo es tridimensional, halla la dimensión del espacio columna de A. ¿Es $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^3$? ¿Por qué?

10. Si el espacio nulo de una matriz 8×7 tiene dimensión 5, ¿cuál es la dimensión de su espacio columna?

11. Si el espacio nulo de una matriz 8×5 tiene dimensión 3, ¿cuál es la dimensión de su espacio fila?

12. Si el espacio nulo de una matriz 5×4 tiene dimensión 2, ¿cuál es la dimensión de su espacio fila?

13. ¿Cuál es el máximo rango posible de una matriz 7×5? ¿Y de una matriz 5×7?

14. ¿Cuál es la máxima dimensión posible del espacio fila de una matriz 5×4? ¿Y de una matriz 4×5?

15. ¿Cuál es la mínima dimensión posible del espacio nulo de una matriz 3×7?

16. ¿Cuál es la mínima dimensión posible del espacio nulo de una matriz 7×5?

En los ejercicios 17 y 18 indica para cada enunciado si es verdadero o falso y justifica tus respuestas.

17.

(a) El espacio fila de A es el mismo que el espacio columna de A^{T}.

(b) Si B es una forma escalonada de A y si B tiene exactamente tres filas no nulas, entonces las primeras tres filas de A forman una base de $\operatorname{Fil} A$.

(c) Las dimensiones del espacio fila y del espacio columna de cualquier matriz son siempre iguales sin excepción incluso si la matriz no es cuadrada.

(d) La suma de las dimensiones del espacio fila y del espacio nulo de una matriz cualquiera A es igual al número de columnas de A.

(e) Las operaciones elementales hechas en un ordenador pueden cambiar el rango aparente de una matriz.

(f) La dimensión del espacio columna de A es $\operatorname{Rang} A$.

18.

(a) Si B es una forma escalonada de A, entonces las columnas pivote de B forman una base del espacio columna de A.

(b) Las operaciones elementales de filas conservan las relaciones de dependencia lineal que pueda haber entre las filas de una matriz.

(c) La dimensión del espacio nulo de A es el número de columnas de A que no son columnas pivote.

(d) El espacio fila de A^{T} es igual al espacio columna de A.

(e) Si A y B son matrices equivalentes por filas entonces sus espacios fila son el mismo.

19. Supongamos que las soluciones de un sistema homogéneo de cinco ecuaciones lineales con seis incógnitas son todas múltiplos de una solución no trivial. ¿Tendrá solución todo sistema que tenga los mismos coeficientes pero distintos términos independientes?

20. Supongamos que un sistema no homogéneo de seis ecuaciones lineales con ocho incógnitas es compatible y tiene dos variables libres. ¿Es posible modificar los términos independientes de forma que el nuevo sistema sea incompatible?

21. Supongamos que un sistema no homogéneo de nueve ecuaciones lineales con diez incógnitas sigue siendo compatible aunque se cambien los términos independientes como se quiera. ¿Es posible hallar dos soluciones independientes del sistema homogéneo asociado?

22. ¿Es posible que todas las soluciones de un sistema homogéneo de 10 ecuaciones lineales con 12 incógnitas sean múltiplos de una misma solución no trivial? ¿Por qué?

23. Supongamos que un sistema homogéneo de doce ecuaciones lineales con ocho incógnitas tiene dos soluciones que no son una múltiplo de la otra y toda otra solución es combinación lineal de esas dos. ¿Puede el conjunto solución ser descrito por menos de doce ecuaciones lineales? En caso afirmativo, ¿por cuántas?

24. ¿Es posible que un sistema no homogéneo de siete ecuaciones lineales con seis incógnitas sea determinado? ¿Es posible que sea determinado para cualesquiera términos independientes que se le pongan?

25. Supongamos que un sistema no homogéneo de diez ecuaciones lineales con doce incógnitas es compatible y tiene tres variables libres. ¿Seguirá siendo compatible todo sistema obtenido del anterior al cambiar los términos independientes como se quiera?

Los ejercicios 26 a 28 tratan sobre los *espacios fundamentales* asociados con una matriz A de m filas y n columnas.

26. ¿Cuántos subespacios distintos aparecen el la siguiente lista: $\operatorname{Fil} A$, $\operatorname{Col} A$, $\operatorname{Nul} A$, $\operatorname{Fil} A^{\mathrm{T}}$, $\operatorname{Col} A^{\mathrm{T}}$, $\operatorname{Nul} A^{\mathrm{T}}$? ¿Cuáles de ellos están en $\mathbf{R}^m$ y cuáles en $\mathbf{R}^n$?

27. Justifica las siguientes igualdades:

(a) $\dim \operatorname{Fil} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$

(b) $\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A^{\mathrm{T}} = m$

28. Usa el ejercicio anterior para explicar por qué la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución para todo $\mathbf{b}$ de $\mathbf{R}^m$ si y sólo si la ecuación $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial.

29. Supongamos que A es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{b}$ es un vector de $\mathbf{R}^m$. ¿Qué deben cumplir los dos números $\operatorname{Rang}[A \;\; \mathbf{b}]$ y $\operatorname{Rang} A$ para que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea compatible?

Las matrices de rango 1 tienen gran importancia en ciertos algoritmos numéricos programables en el ordenador y en ciertos contextos numéricos como es la *descomposición en valores singulares*. Se puede demostrar que una matriz A tiene rango 1 si y sólo si es de la forma $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$. Los ejercicios 30 a 32 sugieren por qué esta propiedad es cierta.

30. Si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ verifica $\operatorname{Rang}(\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}) \leq 1$.

31. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ halla un vector $\mathbf{v}$ en $\mathbf{R}^3$ tal que $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$.

32. Sea A una matriz 2×3 tal que $\operatorname{Rang} A = 1$ y sea $\mathbf{u}$ la primera columna de A. Explica por qué si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ entonces existe un vector $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ tal que $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$. ¿Qué se podría hacer si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$?

33. Sea A una matriz $m \times n$ de rango $r > 0$ y sea U una forma escalonada de A. Explica por qué existe una matriz inversible E tal que $A = EU$. Usa esta factorización para escribir A como la suma de matrices de rango 1.

(*Pista*: Piensa en un producto de matrices como un producto de matrices por bloques en el que la matriz de la izquierda está partida en sus columnas y la de la derecha en sus filas.)

5.6. Cambios de Base en un espacio vectorial

Matriz de cambio de base

Supongamos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son dos bases de un espacio vectorial V. Entonces tenemos las funciones de coordenadas

$$\mathbf{R}^n \xleftarrow{T_{\mathcal{B}}} V \xrightarrow{T_{\mathcal{C}}} \mathbf{R}^n$$

y podemos formar la aplicación lineal compuesta $T_{\mathcal{C}} \circ T_{\mathcal{B}}^{-1}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[r, "T_{\mathcal{B}}^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "T_{\mathcal{C}} \circ T_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & V \arrow[r, "T_{\mathcal{C}}"] & \mathbf{R}^n \end{tikzcd}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \mapsto \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

Esta aplicación transforma las coordenadas de un vector de V relativas a la base $\mathcal{B}$ en las coordenadas de ese mismo vector relativas a la base $\mathcal{C}$. En consecuencia, si denotamos $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ a la matriz canónica de esta aplicación lineal, para cualquier vector $\mathbf{v}$ de V se verifica:

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}},$$

por ello, esta matriz $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ se llama la *matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$.*

Existe una fórmula para calcular la matriz $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. La idea es calcular sus columnas usando el hecho de que $\mathbf{e}_i = [\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}}$. Por ejemplo, la primera columna es:

$$\left(1^{\text{a}} \text{ col. de } P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\right) = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{e}_1 = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}.$$

Aplicando el mismo razonamiento a cada una de las demás columnas, se llega a la conclusión de que la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, es:

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left[\, [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \;\; \ldots \;\; [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \,\right].$$

Las columnas de la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ son las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$ relativas a la base $\mathcal{C}$.

Evidentemente la inversa de la matriz $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ es la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{B}$:

$$(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

De todo lo dicho se deduce inmediatamente lo siguiente:

PROPOSICIÓN 5.6.2

Toda matriz inversible de orden n es la matriz de cambio de base de la base formada por sus columnas a la base canónica de $\mathbf{R}^n$.

Distintas matrices de una aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ una base de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m\}$ una base de $\mathbf{R}^m$, y sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una aplicación lineal. Se puede demostrar que existe una única matriz M, que se llama matriz de T relativa a las bases $\mathcal{B}$ (en $\mathbf{R}^n$) y $\mathcal{C}$ (en $\mathbf{R}^m$), que tiene la propiedad de que multiplicada por el vector de $\mathcal{B}$-coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ de cualquier $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ da como resultado el vector de $\mathcal{C}$-coordenadas de la imagen de $\mathbf{x}$, $T(\mathbf{x})$, es decir:

$$M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}.$$

Suponiendo que tal matriz existe es fácil deducir una fórmula para calcularla. El razonamiento es el siguiente: Si $M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}$ para cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, en particular esa igualdad será cierta cuando se toma como vector $\mathbf{x}$ cualquiera de los vectores $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ de la base $\mathcal{B}$. Pero $[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_1$, la i-ésima columna de la identidad I_n, por tanto la ecuación satisfecha por la matriz M nos dice que

$$[T(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{C}} = M[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = M\mathbf{e}_i = \text{columna } i\text{-ésima de } M.$$

Hemos averiguado, pues, cuáles son las columnas de M y podemos escribir:

$$M = \left[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \;\; \ldots \;\; [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \,\right],$$

es decir: *Las columnas de M son los vectores de coordenadas en la base $\mathcal{C}$ de las imágenes por T de los vectores de la base $\mathcal{B}$.*

Ejemplo 1: Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ una base de $\mathbf{R}^2$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ una base de $\mathbf{R}^3$ y sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$T(\mathbf{b}_1) = 3\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 + 5\mathbf{c}_3\,, \qquad T(\mathbf{b}_2) = 4\mathbf{c}_1 + 7\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3.$$

Se pide hallar la matriz M que transforma las $\mathcal{B}$-coordenadas de los vectores de $\mathbf{R}^2$ en las $\mathcal{C}$-coordenadas de sus imágenes.

Solución: Las columnas de M son los vectores de coordenadas:

$$\big[T(\mathbf{b}_1)\big]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \big[T(\mathbf{b}_2)\big]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{luego:} \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de una aplicación lineal $T : V \to W$

Se observa en el ejemplo anterior que el hecho de que los vectores $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ sean vectores de $\mathbf{R}^2$ no juega ningún papel ni en el planteamiento del problema ni en su solución, como tampoco lo juega el hecho de que los vectores $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{c}_3$ sean vectores de $\mathbf{R}^3$. En lo que concierne a este ejemplo, bien podrían haber sido $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ vectores de $\mathbf{R}^5$ o de cualquier otro espacio vectorial con dos o más dimensiones (para que pueda haber un conjunto de dos vectores independientes). Por ejemplo, un ejercicio podría decir:

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ una base de un subespacio $H \subset \mathbf{R}^5$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ una base de un subespacio $K \subset \mathbf{R}^4$ y sea $T : H \to K$ la aplicación lineal definida por:

$$T(\mathbf{b}_1) = 3\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 + 5\mathbf{c}_3\,, \qquad T(\mathbf{b}_2) = 4\mathbf{c}_1 + 7\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3.$$

Se pide hallar la matriz M que transforma las $\mathcal{B}$-coordenadas de los vectores de H en las $\mathcal{C}$-coordenadas de sus imágenes.

La solución sería idéntica a la anterior.

Yendo un poco más lejos, podemos decir que los vectores de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ ni siquiera tienen que ser vectores de espacios $\mathbf{R}^n$, sino que lo mismo se puede plantear si el papel de H y K lo toman espacios vectoriales arbitrarios V y W (pero de dimensiones 2 y 3 respectivamente), de forma que el ejercicio diría:

Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ una base de un espacio vectorial V y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ una base de un espacio vectorial W y sea $T : V \to W$ la aplicación lineal definida por:

$$T(\mathbf{b}_1) = 3\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 + 5\mathbf{c}_3\,, \qquad T(\mathbf{b}_2) = 4\mathbf{c}_1 + 7\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3.$$

Se pide hallar la matriz M que transforma las $\mathcal{B}$-coordenadas de los vectores de V en las $\mathcal{C}$-coordenadas de sus imágenes.

De nuevo la solución sería idéntica a la del primer ejemplo.

Así pues, tenemos lo siguiente:

Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m\}$ una base de un espacio vectorial W y $T : V \to W$ es una aplicación lineal, la matriz M cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{C}$-coordenadas de las imágenes $T(\mathbf{b}_i)$,

$$M = \big[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \ \ldots \ [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \,\big],$$

verifica, para cada vector $\mathbf{x} \in V$,

$$M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}.$$

La matriz de una aplicación lineal $T : V \to V$ relativa a una base de V

En el caso especial pero muy frecuente de que la aplicación lineal sea de un espacio vectorial en sí mismo, no necesitamos dos bases distintas de ese espacio vectorial para definir una matriz para la aplicación lineal. Si $T : V \to V$ es una aplicación lineal, y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base de V, llamamos *matriz de T relativa a la base $\mathcal{B}$*, y la denotamos $[T]_{\mathcal{B}}$, la matriz que verifica:

$$[T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} \quad \text{para cada vector } \mathbf{x} \in V.$$

Y según vimos en el apartado anterior la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ se calcula por la fórmula:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \big[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} \ \dots \ [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}} \,\big].$$

Ejemplo 2: Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ la base de $\mathbf{R}^2$ dada por $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, y sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la aplicación lineal definida por: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Se pide hallar la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ (matriz de T respecto a la base $\mathcal{B}$).

Solución: Sabemos que $[T]_{\mathcal{B}} = \big[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} \ \ [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} \,\big]$, luego necesitamos calcular:

$$T(\mathbf{b}_1) = A\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad T(\mathbf{b}_2) = A\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ahora tenemos que calcular los vectores de coordenadas $[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow \mathtt{can}} T(\mathbf{b}_1)$ y $[T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow \mathtt{can}} T(\mathbf{b}_2)$. Para ello necesitamos la matriz de cambio de base de la base canónica a la base $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow \mathtt{can}} = P^{-1}_{\mathtt{can}\leftarrow \mathcal{B}} = \big[\, [\mathbf{b}_1]_{\mathtt{can}} \ \ [\mathbf{b}_2]_{\mathtt{can}} \,\big]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así que finalmente,

$$[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow \mathtt{can}} \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cómo cambia la matriz de $T : V \to V$ al realizar un cambio de base en V

Suponemos ahora que tenemos una aplicación lineal $T : V \to V$ y que conocemos su matriz respecto a una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ de V. Si nos dan una segunda base de V, $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$, sabemos que las coordenadas de los vectores respecto a una base y la otra están relacionadas por la fórmula de "cambio de base" (o "cambio de coordenadas")

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}\,,$$

donde la "matriz de cambio de base", $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, está dada por:

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \big[\, [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \ \dots \ [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \,\big].$$

En estas condiciones nos preguntamos: ¿Qué relación existe entre las matrices de T respecto a las dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$?

Para contestar a esta cuestión multiplicamos la matriz de T respecto a la base $\mathcal{C}$ por las columnas de la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, que son los vectores de $\mathcal{C}$-coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}$, de forma que tenemos:

$$[T]_{\mathcal{C}}\, P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \big[\, [T]_{\mathcal{C}}[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \ \dots \ [T]_{\mathcal{C}}[\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \,\big]$$

$$= \left[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \;\ldots\; [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \,\right]$$
$$= \left[\, P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} \;\ldots\; P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}} \,\right]$$
$$= P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \left[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} \;\ldots\; [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}} \,\right] = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\, [T]_{\mathcal{B}},$$

es decir,

$$[T]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\, [T]_{\mathcal{B}}\, P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}.$$

De este resultado se deduce una consecuencia muy importante:

Las matrices respecto a distintas bases de una aplicación lineal de un espacio vectorial V en sí mismo son matrices semejantes unas a otras.

Usando este resultado se puede resolver de otra forma el ejercicio de ejemplo anterior:

5.6.1 Ejercicio de tarea. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ la base de $\mathbf{R}^2$ dada por $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$ y $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 5\\ 4\end{pmatrix}$, y sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la aplicación lineal definida por: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Se pide hallar la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ (matriz de T respecto a la base $\mathcal{B}$).

Solución: Sabemos que $[T]_{can} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, luego basta calcular: $[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow can}\,([T]_{can})\,P^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow can} = \begin{pmatrix} -4 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1.

Ejercicios de la sección 5.6 Cambios de base

---

1. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ bases de un espacio vectorial V, y supongamos que $\mathbf{b}_1 = 6\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{b}_2 = 9\mathbf{c}_1 - 4\mathbf{c}_2$.

(a) Halla la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

(b) Halla $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para $\mathbf{x} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$. (Usa el apartado (a).)

2. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ bases de un espacio vectorial V, y supongamos que $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{c}_1 + 4\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{b}_2 = 5\mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2$.

(a) Halla la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

(b) Halla $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para $\mathbf{x} = 5\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2$.

3. Sean $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bases de V, y sea P una matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas $[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{W}}$ y $[\mathbf{u}_2]_{\mathcal{W}}$. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es satisfecha por P para todo $\mathbf{x}$ en V?

(i) $[\mathbf{x}]_{\mathcal{U}} = P \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{W}}$; (ii) $[\mathbf{x}]_{\mathcal{W}} = P \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{U}}$.

4. Sean $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ bases de V, y sea $P = [[\mathbf{d}_1]_{\mathcal{A}}\, [\mathbf{d}_2]_{\mathcal{A}}\, [\mathbf{d}_3]_{\mathcal{A}}]$. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es satisfecha por P para todo $\mathbf{x}$ en V?

(i) $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = P \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$; (ii)$[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}} = P \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$.

5. Sean $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bases para un espacio vectorial V, y supongamos que $\mathbf{a}_1 = 4\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, y $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$.

(a) Halla la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

(b) Halla $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ para $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

6. Sean $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ y $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ bases para un espacio vectorial V, y supongamos que $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3$, $\mathbf{f}_2 = 3\mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3$, y $\mathbf{f}_3 = -3\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_3$.

(a) Halla la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{D}$.

(b) Halla $[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$ para $\mathbf{x} = \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3$.

En los ejercicios 7 a 10, sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ bases para $\mathbf{R}^2$. En cada ejercicio, halla la matriz de cambio de coordenadas (o cambio de base) de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

7. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

En el ejercicio 11, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases de un espacio vectorial V. Indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

11.

(a) Las columnas de la matriz de cambio de coordenadas $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ son vectores de $\mathcal{B}$-coordenadas de los vectores en $\mathcal{C}$.

(b) Si $V = \mathbf{R}^n$ y $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbf{R}^n$, entonces $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ es la matriz de la función de coordenadas $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

(c) Las columnas de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ son linealmente independientes.

(d) Si $V = \mathbf{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$, entonces la forma escalonada reducida de la matriz $[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]$ es una matriz $[I\ P]$ donde P tiene la propiedad $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para todo $\mathbf{x}$ en V.

Los ejercicios 12 y 13 sirven para demostrar que la matriz de cambio de coordenadas es única y que sus columnas son las coordenadas de los vectores de la base vieja relativos a la nueva. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ y $\mathcal{C}$ son dos bases de un espacio vectorial V. Completa la demostración para cada paso escribiendo lo que sea adecuado en el espacio indicado.

12.

(a) Dado un vector $\mathbf{v}$ en V, sabemos que exisien números $x_1, \dots, x_n$ tales que

$$\mathbf{v} = x_1\,\mathbf{b}_1 + x_2\,\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{b}_n$$

porque ______________________________.

(b) Si aplicamos la función de coordenadas $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ a $\mathbf{v}$ se obtiene

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = x_1[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + x_2[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} + \cdots + x_n[\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}$$

porque ______________________________.

(c) Esta ecuación puede escribirse en la forma

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \left[[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}\ \cdots\ [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

por la definición de __________________________.

(d) Esto muestra que para cada $\mathbf{v}$ en V, la matriz $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left[[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}\ \cdots\ [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}\right]$ cumple $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ (transforma las coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$) porque el vector en el miembro de la derecha de la ecuación (5.6) es ____________________________________.

13. Supongamos que Q es cualquier matriz que transforma las coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, es decir que cumple:

$$\boxed{\text{para cada } \mathbf{v} \text{ en } V,\ [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = Q \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}} \tag{5.7}$$

(a) Si ponemos $\mathbf{b}_1$ en lugar de $\mathbf{v}$ en la ecuación (5.7), entonces la ecuación que resulta muestra que $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}$ es la primera columna de Q porque ____________________________________.

(b) De manera similar, para $k = 2, \dots, n$, la k-ésima columna de Q es __________ porque ____________________________________.

(c) Esto muestra que la matriz

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left[[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}\ \cdots\ [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}\right]$$

es la única que satisface la ecuación (5.7).

14. Considera la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

y los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Halla una base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ tal que P sea la matriz de cambio de coordenadas de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Pista: ¿Qué representan las columnas de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$?

(b) Halla una base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ tal que P sea la matriz de cambio de coordenadas de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ a la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.

En los ejercicios 15 a 18 $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ son dos bases de un espacio vectorial V tales que $\mathbf{a}_1 = 4\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$ y $T : V \to V$ es la aplicación lineal definida por: $T(\mathbf{a}_1) = -\mathbf{a}_2$, $T(\mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $T(\mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$.

15. Halla la matriz $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ de cambio de base de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

16. Halla la matriz $[T]_{\mathcal{A}}$ de T relativa a la base $\mathcal{A}$ y la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ relativa a la base $\mathcal{B}$.

17. Halla las $\mathcal{B}$-coordenadas del vector $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

18. Calcula, para el vector $\mathbf{x}$ del ejercicio anterior, $\left[T(\mathbf{x})\right]_{\mathcal{A}}$ y $\left[T(\mathbf{x})\right]_{\mathcal{B}}$.