Ejercicios de la sección 5.6 Cambios de Base en un espacio vectorial

(Ejercicios para hacer en clase: 2, 4, 6, 13, 15, 17.)
(Ejercicios con solución o indicaciones: 1, 3, 5, 11, 12, 14, 16, 18.)

▶**1.** Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ bases de un espacio vectorial V, y supongamos que $\mathbf{b}_1 = 6\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{b}_2 = 9\mathbf{c}_1 - 4\mathbf{c}_2$.

(a) Halla la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

(b) Halla $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para $\mathbf{x} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$. (Usa el apartado (a).)

▶**2.** Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ bases de un espacio vectorial V, y supongamos que $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{c}_1 + 4\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{b}_2 = 5\mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2$.

(a) Halla la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

(b) Halla $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para $\mathbf{x} = 5\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2$.

▶**3.** Sean $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bases de V, y sea P una matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas $[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{W}}$ y $[\mathbf{u}_2]_{\mathcal{W}}$. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es satisfecha por P para todo $\mathbf{x}$ en V?

(i) $[\mathbf{x}]_{\mathcal{U}} = P \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{W}}$; (ii) $[\mathbf{x}]_{\mathcal{W}} = P \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{U}}$.

▶**4.** Sean $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ bases de V, y sea $P = [[\mathbf{d}_1]_{\mathcal{A}}\ [\mathbf{d}_2]_{\mathcal{A}}\ [\mathbf{d}_3]_{\mathcal{A}}]$. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es satisfecha por P para todo $\mathbf{x}$ en V?

(i) $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = P \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$; (ii)$[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}} = P \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$.

▶**5.** Sean $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bases para un espacio vectorial V, y supongamos que $\mathbf{a}_1 = 4\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, y $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$.

(a) Halla la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

(b) Halla $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ para $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

▶**6.** Sean $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ y $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ bases para un espacio vectorial V, y supongamos que $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3$, $\mathbf{f}_2 = 3\mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3$, y $\mathbf{f}_3 = -3\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_3$.

(a) Halla la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{D}$.

(b) Halla $[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$ para $\mathbf{x} = \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3$.

En los ejercicios 7 a 10, sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ bases para $\mathbf{R}^2$. En cada ejercicio, halla la matriz de cambio de coordenadas (o cambio de base) de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

7. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

En el ejercicio 11, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases de un espacio vectorial V. Indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

▶**11.**

(a) Las columnas de la matriz de cambio de coordenadas $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ son vectores de $\mathcal{B}$-coordenadas de los vectores en $\mathcal{C}$.

(b) Si $V = \mathbf{R}^n$ y $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbf{R}^n$, entonces $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ es la matriz de la función de coordenadas $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

(c) Las columnas de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ son linealmente independientes.

(d) Si $V = \mathbf{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$, entonces la forma escalonada reducida de la matriz $[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]$ es una matriz $[I\ P]$ donde P tiene la propiedad $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para todo $\mathbf{x}$ en V.

Los ejercicios 12 y 13 sirven para demostrar que la matriz de cambio de coordenadas es única y que sus columnas son las coordenadas de los vectores de la base vieja relativos a la nueva. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ y $\mathcal{C}$ son dos bases de un espacio vectorial V. Completa la demostración para cada paso escribiendo lo que sea adecuado en el espacio indicado.

▶**12.**

(a) Dado un vector $\mathbf{v}$ en V, sabemos que exisien números $x_1, \ldots, x_n$ tales que
$$\mathbf{v} = x_1\,\mathbf{b}_1 + x_2\,\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{b}_n$$
porque ______________________.

(b) Si aplicamos la función de coordenadas $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ a $\mathbf{v}$ se obtiene
$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = x_1[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + x_2[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} + \cdots + x_n[\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}$$
porque ______________________.

(c) Esta ecuación puede escribirse en la forma
$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}\ \cdots\ [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1}$$
por la definición de ______________________.

(d) Esto muestra que para cada $\mathbf{v}$ en V, la matriz $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}\ \cdots\ [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}]$ cumple $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ (transforma las coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$) porque el vector en el miembro de la derecha de la ecuación (1) es ______________________.

▶**13.** Supongamos que Q es cualquier matriz que transforma las coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, es decir que cumple:
$$\boxed{\text{para cada } \mathbf{v} \text{ en } V,\ [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = Q \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}} \tag{2}$$

(a) Si ponemos $\mathbf{b}_1$ en lugar de $\mathbf{v}$ en la ecuación (2), entonces la ecuación que resulta muestra que $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}$ es la primera columna de Q porque ______________________.

(b) De manera similar, para $k = 2, \ldots, n$, la k-ésima columna de Q es ____________ porque ______________________.

(c) Esto muestra que la matriz
$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}\ \cdots\ [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}]$$
es la única que satisface la ecuación (2).

Versión de 18 de enero de 2023, 20:52h.

►14. Considera la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

y los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Halla una base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ tal que P sea la matriz de cambio de coordenadas de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
Pista: ¿Qué representan las columnas de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$?

(b) Halla una base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ tal que P sea la matriz de cambio de coordenadas de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ a la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.

En los ejercicios 15 a 18 $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ son dos bases de un espacio vectorial V tales que $\mathbf{a}_1 = 4\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$ y $T : V \to V$ es la aplicación lineal definida por: $T(\mathbf{a}_1) = -\mathbf{a}_2$, $T(\mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $T(\mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$.

►15. Halla la matriz $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ de cambio de base de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

►16. Halla la matriz $[T]_{\mathcal{A}}$ de T relativa a la base $\mathcal{A}$ y la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ relativa a la base $\mathcal{B}$.

►17. Halla las $\mathcal{B}$-coordenadas del vector $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

►18. Calcula, para el vector $\mathbf{x}$ del ejercicio anterior, $\big[T(\mathbf{x})\big]_{\mathcal{A}}$ y $\big[T(\mathbf{x})\big]_{\mathcal{B}}$.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 5.6

1. (a) $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \big[\ [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}\ \big] = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{smallmatrix}\right)$. (b) $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

3. (ii) $[\mathbf{x}]_{\mathcal{W}} = P \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{U}}$.
(Porque $P = \big[\, [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{W}} \;\; [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{W}} \,\big] = P_{\mathcal{W}\leftarrow\mathcal{U}}$.)

5. (a) $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \big[\, [\mathbf{a}_1]_{\mathcal{B}} \;\; [\mathbf{a}_2]_{\mathcal{B}} \;\; [\mathbf{a}_3]_{\mathcal{B}} \,\big] = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. (b) $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} =$

11. (a) Es al revés: Las columnas de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ son vectores de $\mathcal{C}$-coordenadas de los vectores en $\mathcal{B}$, (b) Es al revés: $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ transforma las $\mathcal{B}$-coordenadas de un vector $\mathbf{x}$ en sus $\mathcal{C}$-coordenadas (que son el propio $\mathbf{x}$), (c) Es la matriz de una aplicación lineal inversible, (d) Es al revés: P tiene la propiedad $P\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$.

12.

(a) …porque la base $\mathcal{B}$ genera V.

(b) …porque la función de coordenadas es lineal.

(c) …por la definición de producto matriz por vector.

(d) …porque el vector en el miembro de la derecha de la ecuación (1) es el vector de $\mathcal{B}$-coordenadas de $\mathbf{v}$.

14. (a) Las columnas de P han de ser los vectores de coordenadas respecto a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de los vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$. La primera columna de P son las coordenadas de $\mathbf{u}_1$, luego $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix}$. De forma análoga $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 32 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Otra forma de hacerlo es calculando la matriz $[\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \mathbf{u}_3] = [\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3]\,P$. (b) $[\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3] = [\mathbf{w}_1 \;\; \mathbf{w}_2 \;\; \mathbf{w}_3]\,P$, luego $[\mathbf{w}_1 \;\; \mathbf{w}_2 \;\; \mathbf{w}_3] = [\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3]\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 28 & 38 & 21 \\ -9 & -13 & -7 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

16. $[T]_{\mathcal{A}} = \big[\, [T(\mathbf{a}_1)]_{\mathcal{A}} \;\; [T(\mathbf{a}_2)]_{\mathcal{A}} \;\; [T(\mathbf{a}_3)]_{\mathcal{A}} \,\big] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[T]_{\mathcal{A}}P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

18. $\big[T(\mathbf{x})\big]_{\mathcal{A}} = [T]_{\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
$\big[T(\mathbf{x})\big]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$.