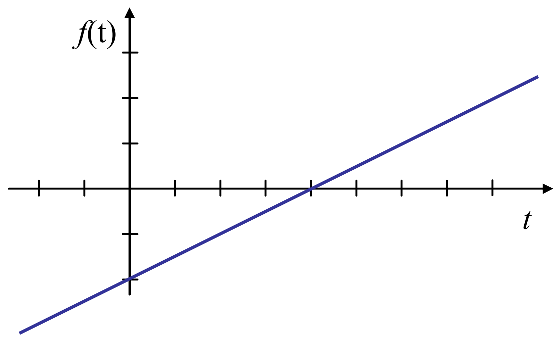
Notas sobre señales y magnitudes:

▪ Una *señal* es todo aquello que contiene información relativa a algún tipo de fenómeno físico.

Una *señal* se puede representar a nivel matemático por una *función* que depende de una o más variables independientes (en esta asignatura sólo consideramos funciones que dependen de 1 variable).

▪ Una función $f(t)$ *continua en el tiempo* o en *tiempo continuo* se caracteriza porque la variable (t) de la que depende y que en este caso representa tiempo, toma valores pertenecientes al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) (≡ conjunto infinito, pero no numerable). Otra forma de decirlo sería: Una función $f(t)$ *continua en el tiempo* se caracteriza porque su dominio es el conjunto de los números reales ($t \in \mathbb{R}$)

Ejemplo: $f(t) = 0.5t - 2$

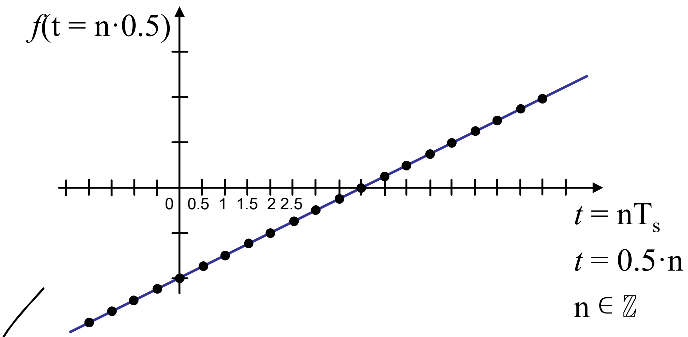


Nota: el dominio de una función $f(t)$ es el conjunto de valores que puede tomar la variable t.

▪ Una función $f\,[\mathrm{n}]$ *discreta en el tiempo* o *en tiempo discreto* se caracteriza porque la variable (n) de la que depende, toma valores pertenecientes a un conjunto de valores infinito pero numerable. Cuando se muestrea periódicamente una señal continua en el tiempo, la señal discreta $f[\mathrm{n}]$ que "se genera" se caracteriza porque n toma valores que pertenecen al conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) o bien al conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) (≡ conjuntos con un número infinito de números, pero numerables).

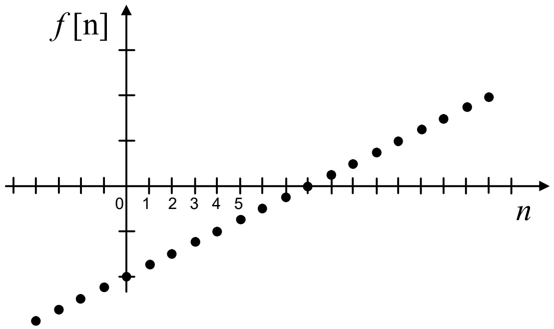
Ejemplo: si se toma una muestra de la función $f(\mathrm{t}) = 0.5 \cdot t - 2$ cada $T\mathrm{s} = 0.5$ segundos, se obtiene la señal discreta:

$$f\,[\mathrm{n}] = f\,(t = n \cdot \mathrm{T_s}) = 0.5 \cdot n \cdot \mathrm{T_s} - 2 = 0.5 \cdot n \cdot 0.5 - 2 = 0.25 \cdot n - 2, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$



t representa tiempo

Nota: la relación entre t y n es: $t = nT_s$



n representa el número de muestra

$f[n]$ representa el valor de la muestra n

[valor de $f(t)$ en el instante $t = nT_s$]

- Se define una *magnitud* como una propiedad física que puede ser medida.

Las *magnitudes continuas* se caracterizan porque toman valores pertenecientes a $\mathbb{R}$ (conjunto con un número infinito, no numerable, de valores).

Las *magnitudes discretas* se caracterizan porque toman valores pertenecientes a un conjunto con un número infinito, pero numerable de valores.

Las *magnitudes digitales* se caracterizan porque toman valores pertenecientes a un conjunto <u>finito</u> de valores distintos (todo conjunto finito es numerable).

Las *magnitudes binarias* se caracterizan porque sólo pueden tomar <u>dos</u> valores distintos.

Un *sistema* es una entidad que procesa la información que contiene una señal de entrada para generar una señal de salida. Un sistema puede estar construido con componentes eléctricos, electrónicos, mecánicos, etc. o bien puede ser un procesador ejecutando un algoritmo, el cual genera una señal de salida (discreta) a partir de una señal de entrada (discreta).

Un sistema que procesa señales continuas en el tiempo se califica como sistema continuo en el tiempo, cumpliéndose que:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=h(t)*x(t)=\int_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} h(\lambda)\cdot x(t-\lambda)\,d\lambda$$

siendo:

_ $h(t)$ la respuesta del sistema a un impulso o *delta de Dirac*

_ $*$ representa una operación de convolución continua

Un sistema que procesa señales discretas en el tiempo se califica como sistema discreto en el tiempo, cumpliéndose que:

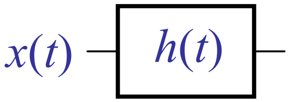
$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} h[\lambda]\cdot x[n-\lambda]$$

siendo:

_ $h[n]$ la respuesta del sistema a un impulso unitario discreto

_ $*$ representa una operación de convolución discreta

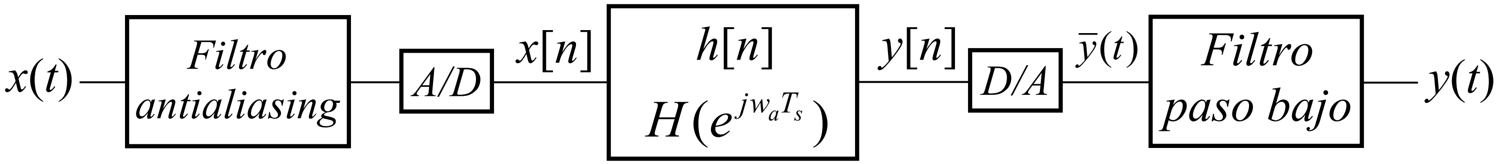
▪ Procesado *analógico* de una señal $x(t)$ continua en el tiempo y en amplitud.



$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} h(\lambda)\cdot x(t-\lambda)\,d\lambda$$

sistema que puede estar formado por componentes eléctricos, electrónicos, mecánicos, etc.

▪ Procesado *digital* de una señal $x(t)$ continua en el tiempo y en amplitud.



sistema formado por un procesador que ejecuta un algoritmo cada T_s segundos.

$x(t)$ e $y(t)$ son señales continuas en amplitud y en el tiempo.

$x[n]$ e $y[n]$ son señales digitales, discretas en el tiempo.

$\bar{y}(t)$ es una señal digital, continua en el tiempo

Nota: se supone que has resuelto las tareas y que has comprendido lo que se pide en ellas.

Notas sobre el procesado analógico de señales (analógicas):

▪ *Contenido en frecuencia de una función periódica, continua en el tiempo*: toda función *periódica* $f(t)$ que cumpla las condiciones de *Dirichlet* se puede representar como una *serie de Fourier*. Las condiciones de *Dirichlet* son:

1ª: En un periodo de la función $f(t)$ sólo puede haber un número finito de *máximos* y de *mínimos*.

2ª: En un periodo de $f(t)$ sólo puede haber un número finito de discontinuidades y estas deben ser finitas.

3ª: La función $f(t)$ debe ser absolutamente integrable. Es decir, se debe cumplir que:

$$\int_T |f(t)|\, dt < \infty$$

Nota: cualquier señal periódica que se pueda generar en un laboratorio cumple las condiciones de *Dirichlet*.

Existen varias expresiones equivalentes de la *serie de Fourier*:

a) Expresión compleja de la *serie de Fourier*: la función $f(t)$ se representa como una combinación lineal de señales *exponenciales complejas*, relacionadas armónicamente entre si [en este caso, el espectro de $f(t)$ está formado por componentes armónicas tanto de frecuencias positivas como negativas].

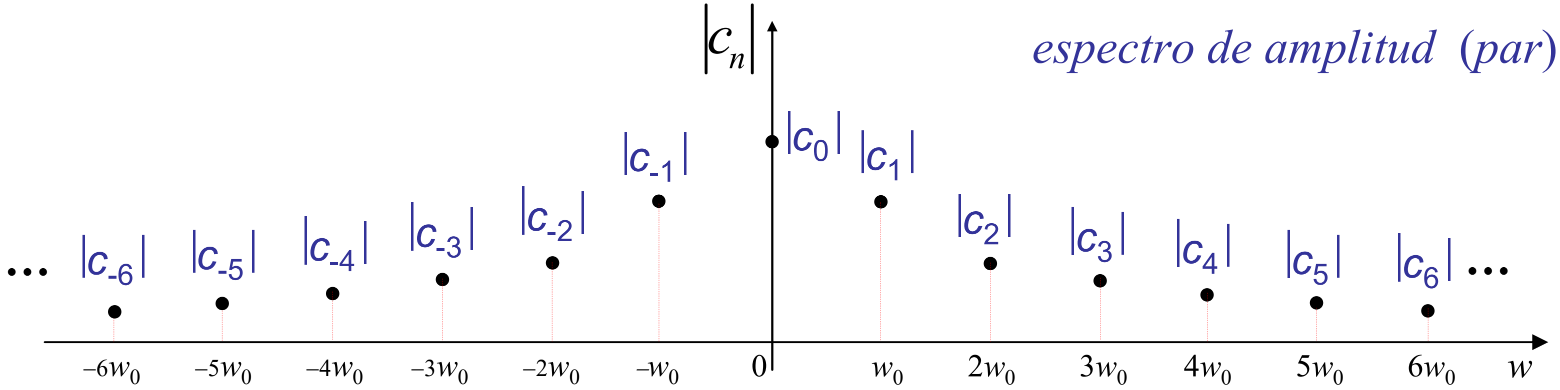
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jnw_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jn2\pi f_0 t} \qquad \textit{siendo,}$$

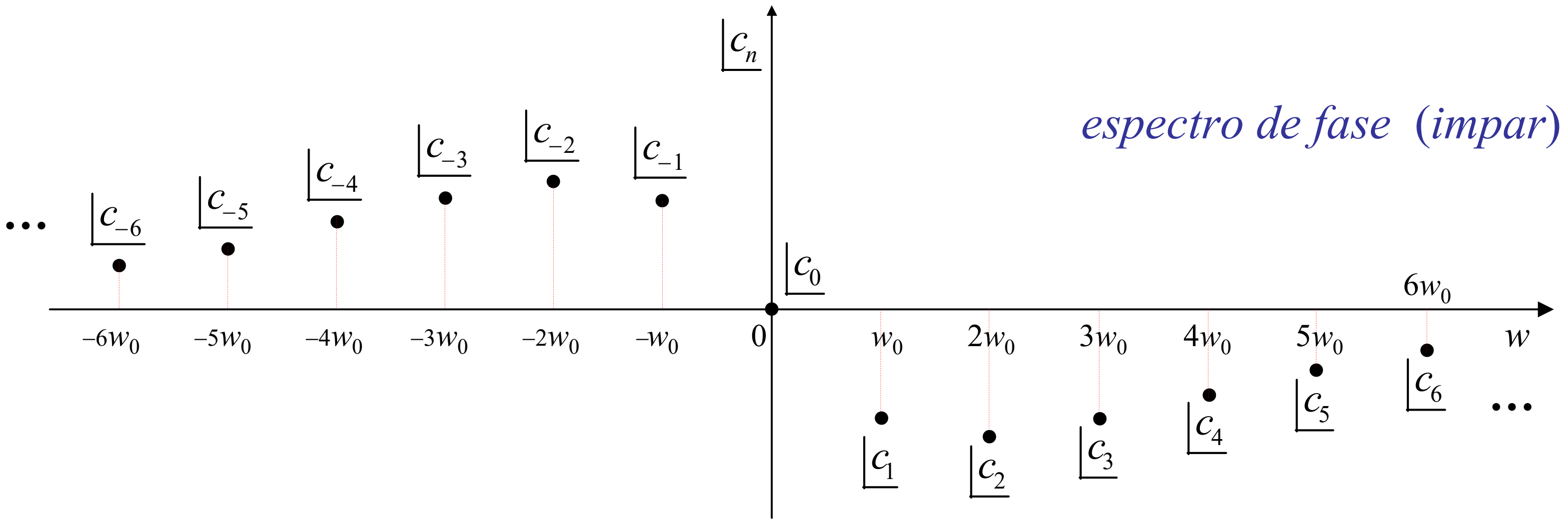
$$c_n = \frac{1}{T}\int_T x(t) \cdot e^{-jnw_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_T x(t) \cdot e^{-jn2\pi f_0 t} dt \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$w_0 = 2\cdot\pi\cdot f_0 = 2\cdot\pi/T$

siendo $T = 1/f_0$ el periodo de la señal $f(t)$.

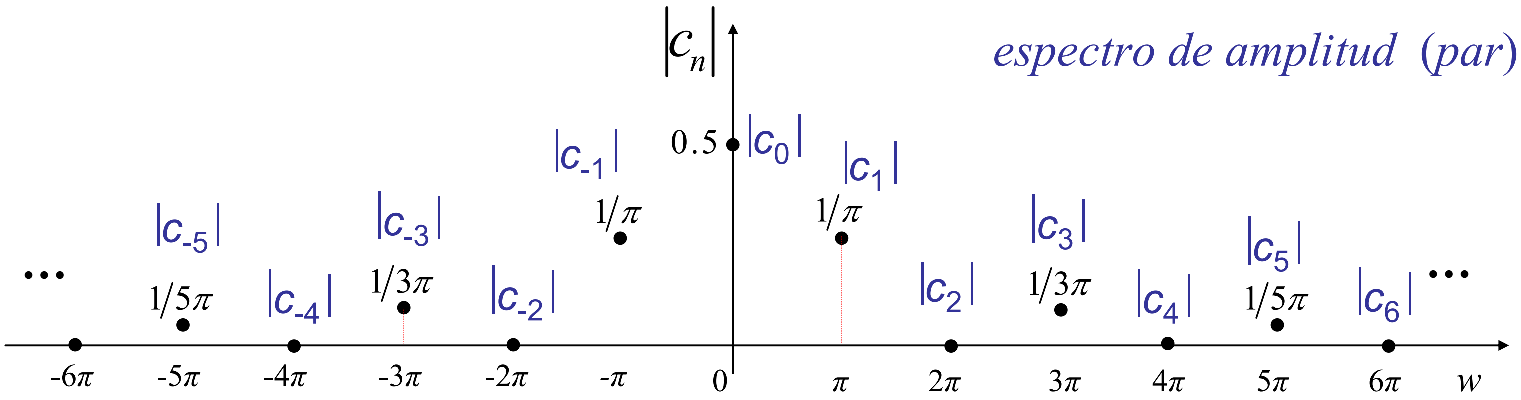
Ejemplo espectros de amplitud y de fase

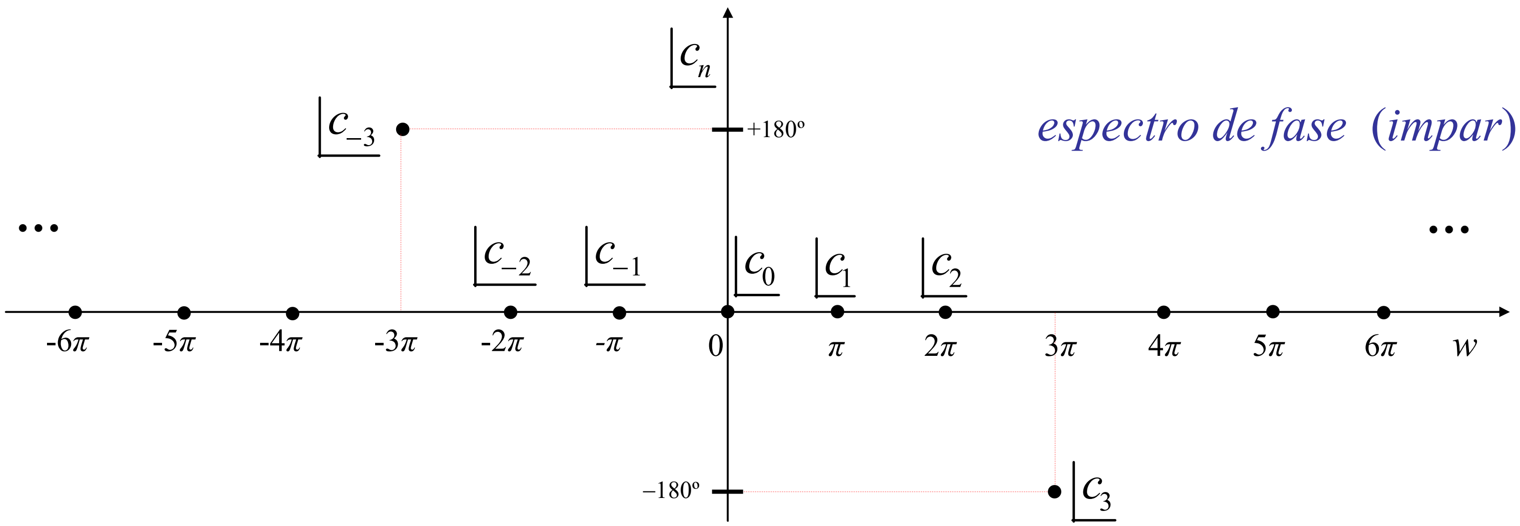




Nota: las funciones $|c_n|$ *y* $\angle c_n$ *son discretas en frecuencia*

Ejemplo espectros de amplitud y de fase



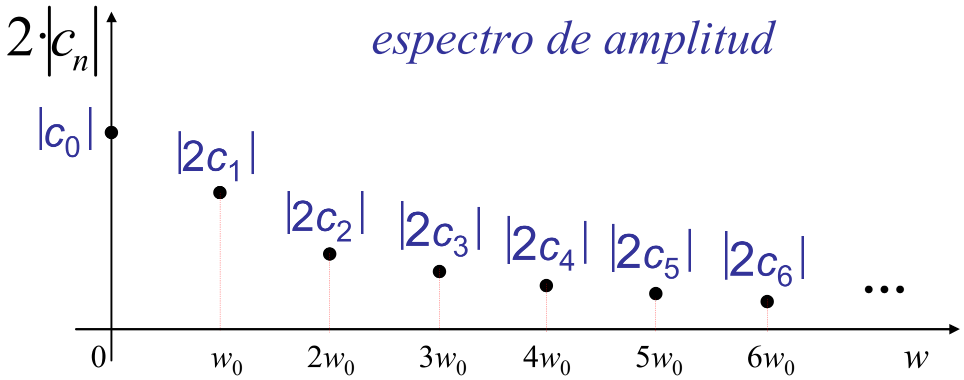


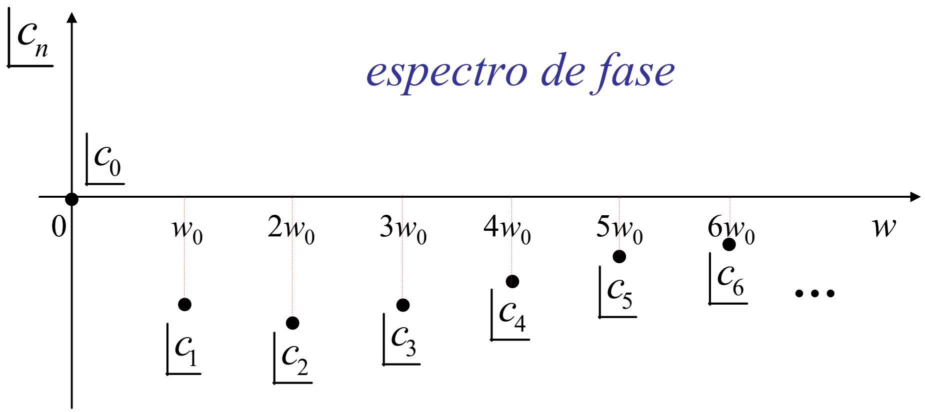
b) Expresión trigonométrica de la *serie de Fourier*: la función $f(t)$ se representa como una combinación lineal de señales senoidales relacionadas armónicamente entre si. En este caso, el espectro de $f(t)$ sólo está formado por componentes armónicas de frecuencia positivas.

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot |c_n| \cdot cos\left(n w_0 t + \angle c_n\right)$$ *siendo,*

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T f(t) e^{-jnw_0 t} dt \qquad n \in \mathbb{N}$$

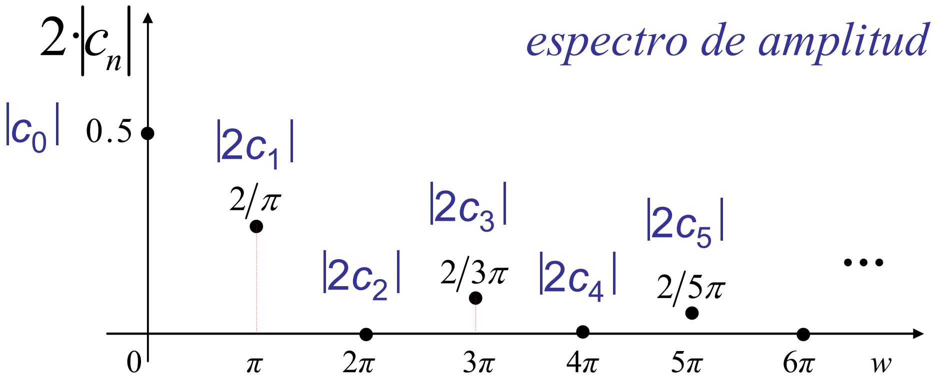
Ejemplo espectros de amplitud y de fase

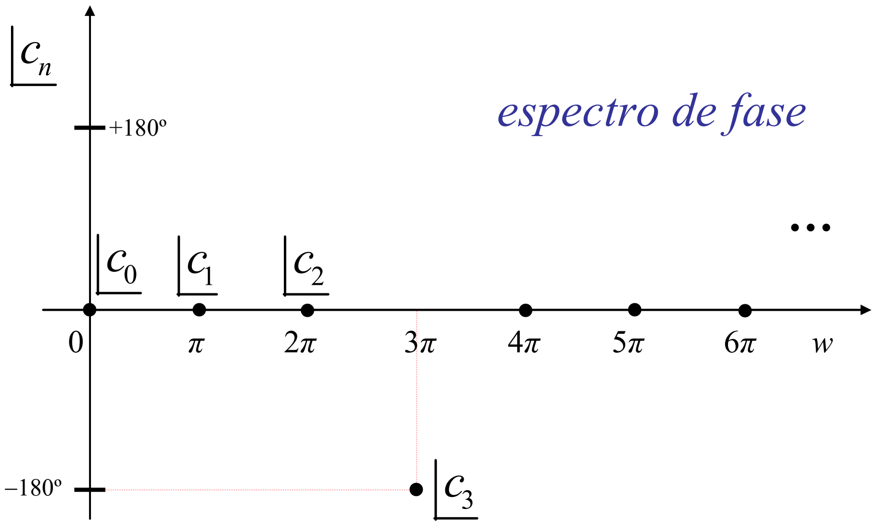




Nota: $\angle c_n = \angle 2 \cdot c_n$

Ejemplo espectros de amplitud y de fase





Nota: $\angle c_n = \angle 2\cdot c_n$

c) Otra expresión trigonométrica de la *serie de Fourier*: la función *f*(*t*) también se puede representar como una combinación lineal de funciones seno y coseno relacionadas armónicamente entre si equivalente a la anterior. El espectro de *f*(*t*) sólo está formado por componentes armónicas de frecuencia positivas.

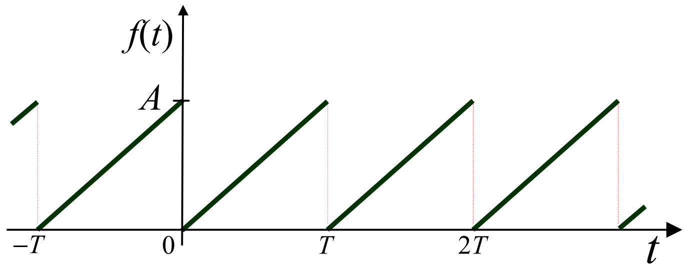
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot cos(nw_0 t) + b_n \cdot sen(nw_0 t) \right]$$

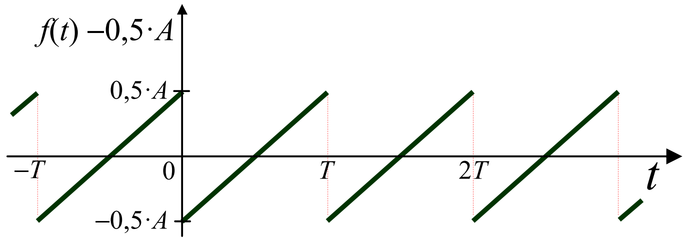
$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos(nw_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sen(nw_0 t)\, dt$$

Nota: si *f*(*t*) es *par*, entonces $b_n = 0$, ya que *f*(*t*) sólo va a tener componentes coseno. Y si *f*(*t*) es *impar*, entonces $a_n = 0$, ya que *f*(*t*) sólo va a tener componentes seno.

Ejemplo: la serie de *Fourier* de la función $f(t)$ indicada en la parte derecha se puede determinar calculando previamente la serie de *Fourier* de la función *impar* $g(t) = f(t) - 0{,}5A$





$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot cos(nw_0 t) + b_n \cdot sen(nw_0 t) \right]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos(nw_0 t)\, dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot sen(nw_0 t)\, dt = \frac{-A}{n \cdot \pi}$$

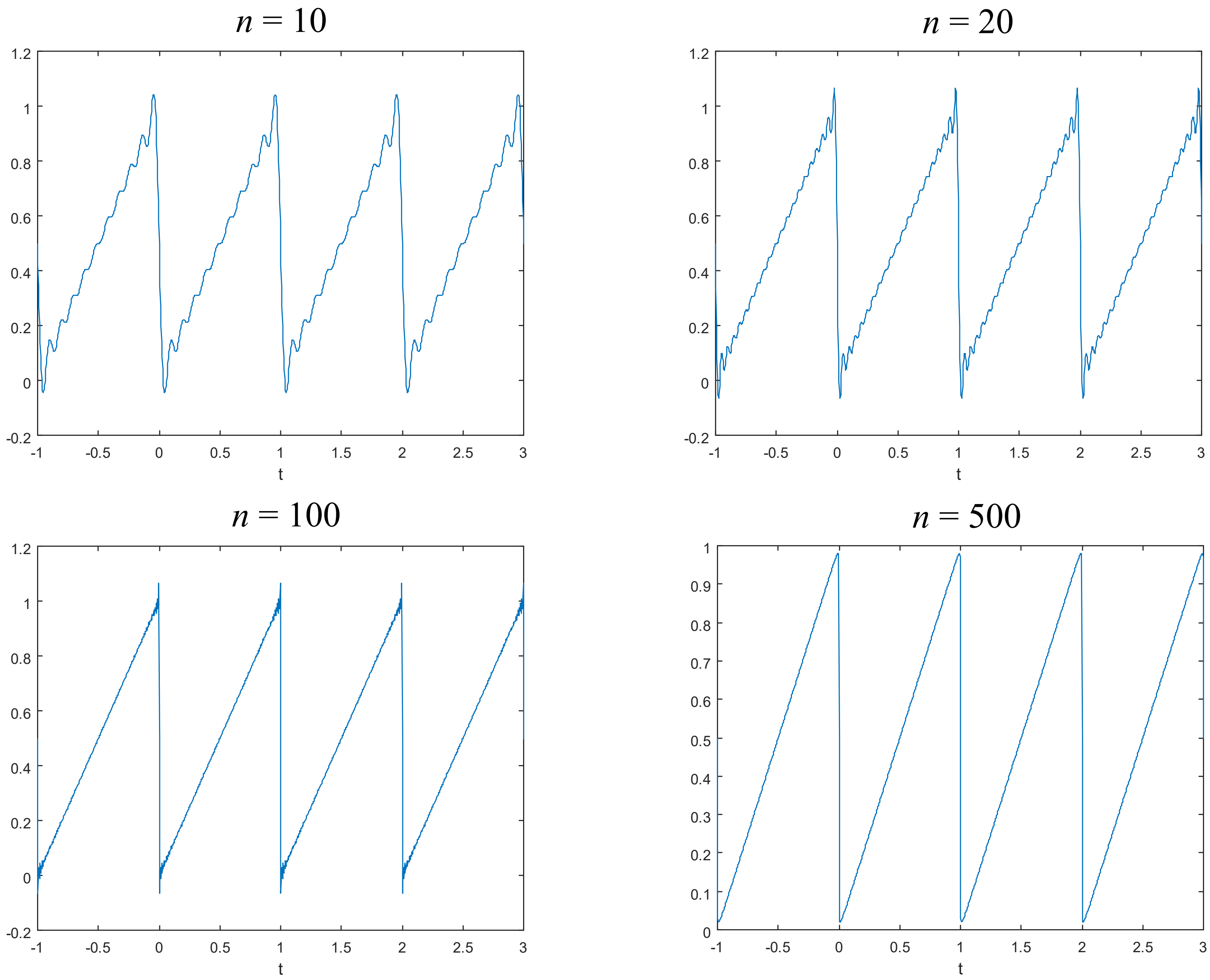
$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-A}{n \cdot \pi} \cdot sen(nw_0 t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} sen(w_0 t) - \frac{A}{2\pi} sen(2w_0 t) - \frac{A}{3\pi} sen(3w_0 t) -$$

$$- \frac{A}{4\pi} sen(4w_0 t) - \frac{A}{5\pi} sen(5w_0 t) - \cdots$$

```
% MATLAB

clear all;
hold off;

t = -1:4/1000:3;
k = input('Número de armónicos:  ');
A = 1;
T = 1;
w0 = 2*pi/T;
xn = zeros(1,length(t));
for n = 1:1:k
   theta = -A/pi/n;
   xn = xn + theta*sin(n*w0*t);
end
plot(t,xn+A/2);
xlabel('t');
```


n = 10
n = 20
n = 100
n = 500
t
t
t
t

El *valor eficaz* de una señal periódica cumple lo siguiente (*th. de Parseval*):

$$valor\ eficaz^2 = \frac{1}{T}\int_T \left[f(t)\right]^2\ dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\right|^2 = c_0^2 + 2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left|c_n\right|^2$$

siendo c_n los coeficientes complejos de *Fourier* de la señal *f*(t)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jnw_0t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jn2\pi f_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-jnw_0t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-jn2\pi f_0 t}dt \qquad n\in\mathbb{Z}$$

▪ *Contenido en frecuencia de una función no periódica, continua en el tiempo*: toda función *f*(*t*) *no periódica,* continua en el tiempo, que cumpla lo siguiente:

_ Que sea absolutamente integrable: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty$

_ Que tenga un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo de tiempo finito.

_ Que tenga un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo de tiempo finito que se considere y que las amplitudes de las discontinuidades sean finitas.

se puede representar en el *dominio de la frecuencia* calculando su *transformada de Fourier*:

$$F(w) = F(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-jwt} \cdot dt \quad w \in \mathbb{R} \;\equiv\; \textit{transformada de Fourier de } f(t)$$

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt \quad f \in \mathbb{R} \qquad f = w/2\pi \;\equiv\; \textit{transformada de Fourier de } f(t)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(w)}{2\pi} \cdot e^{jwt} \cdot dw \;\equiv\; \textit{transformada inversa de Fourier de } f(t)$$

Notas:

_ En general, la *transformada de Fourier* de una función *no periódica* $f(t)$ es una función *compleja* de la frecuencia ($w = 2\pi f$). Lo que hace que a la hora de representar su espectro resulte conveniente indicar cómo varía su módulo y su fase en función de la frecuencia (w).

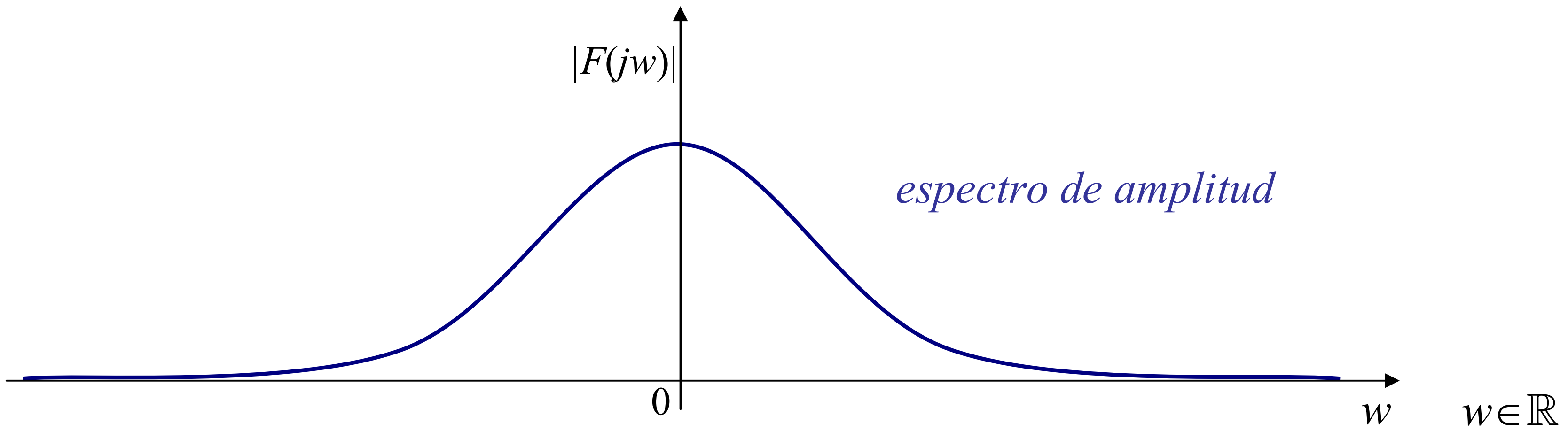
_ El espectro de amplitud de $f(t)$ es la función $|F(w)|$, la cual es *continua* en frecuencia

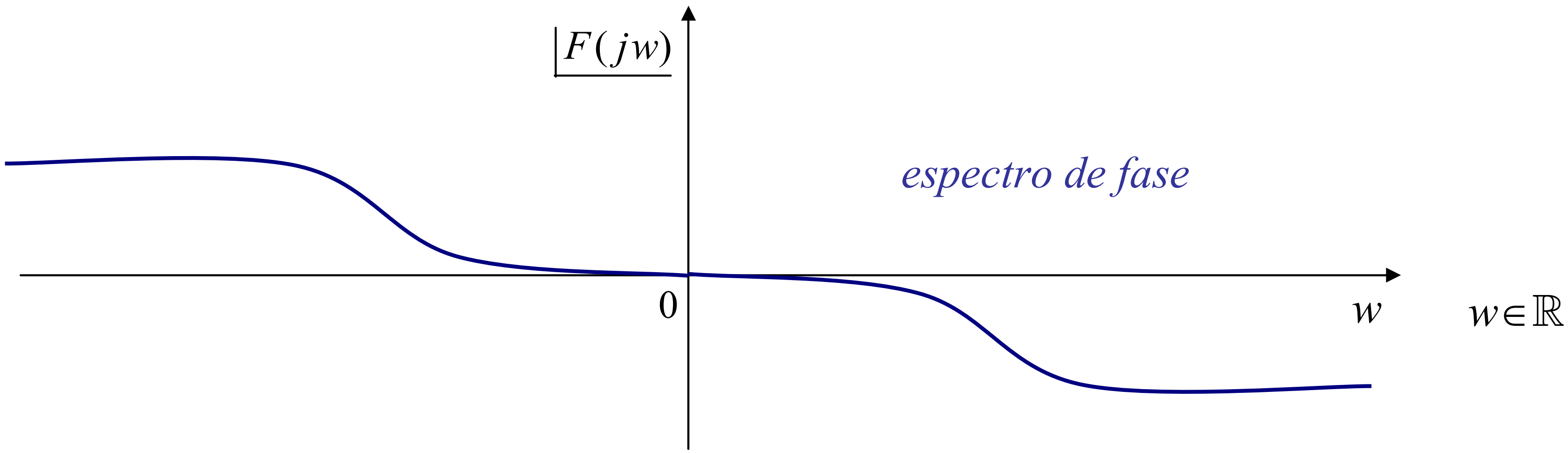
_ El espectro de fase de $f(t)$ es la función $\angle F(w)$, la cual es *continua* en frecuencia

_ Se puede demostrar que si $f(t)$ es una función real, entonces su *espectro de amplitud* es una función *par* de w y su *espectro de fase* es una función *impar* de w.

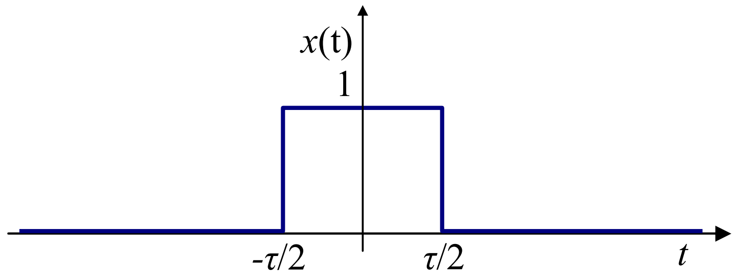
_ La relación entre la representación en el *dominio del tiempo* y la representación en el *dominio de la frecuencia* de una señal analógica (*no periódica*) lo establecen la *transformada* y la *antitransformada de Fourier* (≡ *transformada inversa de Fourier*)

Ejemplo de los espectros de amplitud y de fase de una función no periódica $f(t)$

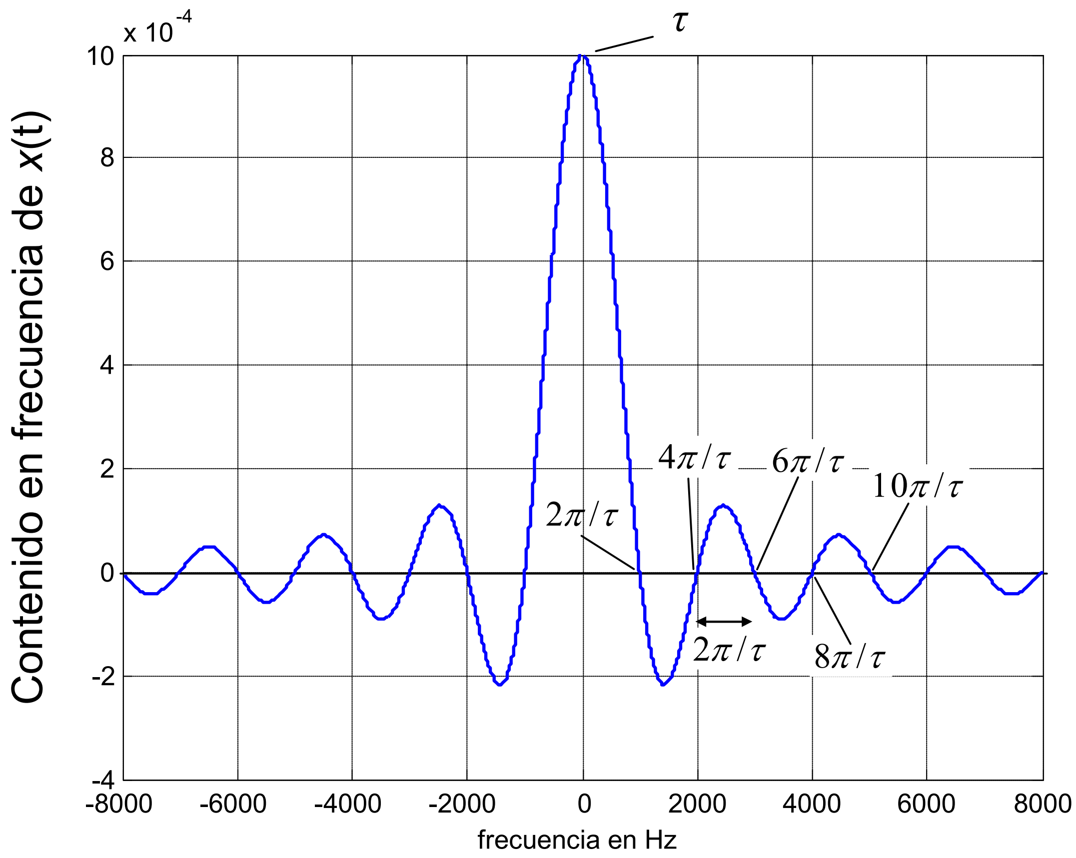




no

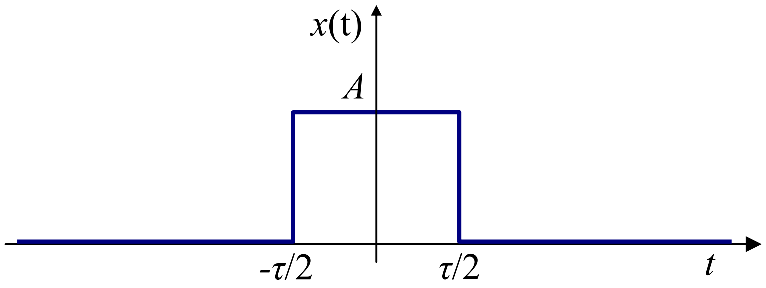


$$X(w) = 2\frac{sen(w\tau/2)}{w}$$



Nota: cuanto menor es el valor de τ, mayor es el contenido en frecuencia de $X(w)$ a altas frecuencias (es como si se 'estirara horizontalmente' el espectro de la señal. La altura de los lóbulos laterales no cambia, pero sí lo hace su contenido en frecuencia).

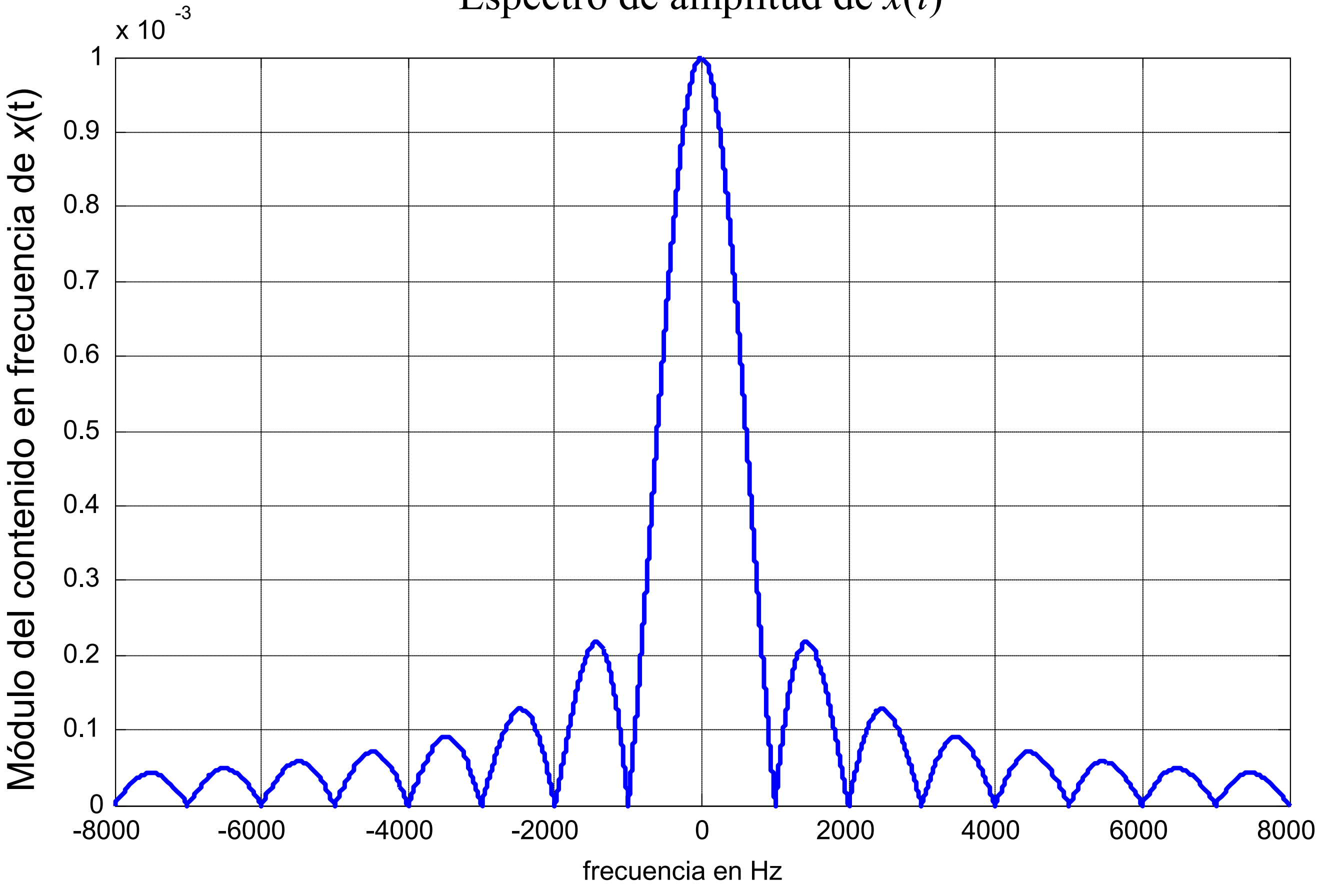
no



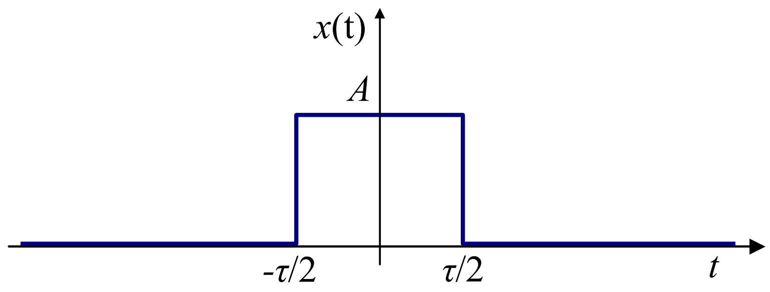
$$X(w) = 2A\frac{sen(w\tau/2)}{w}$$

Espectro de amplitud de $x(t)$

$|X(f)|$

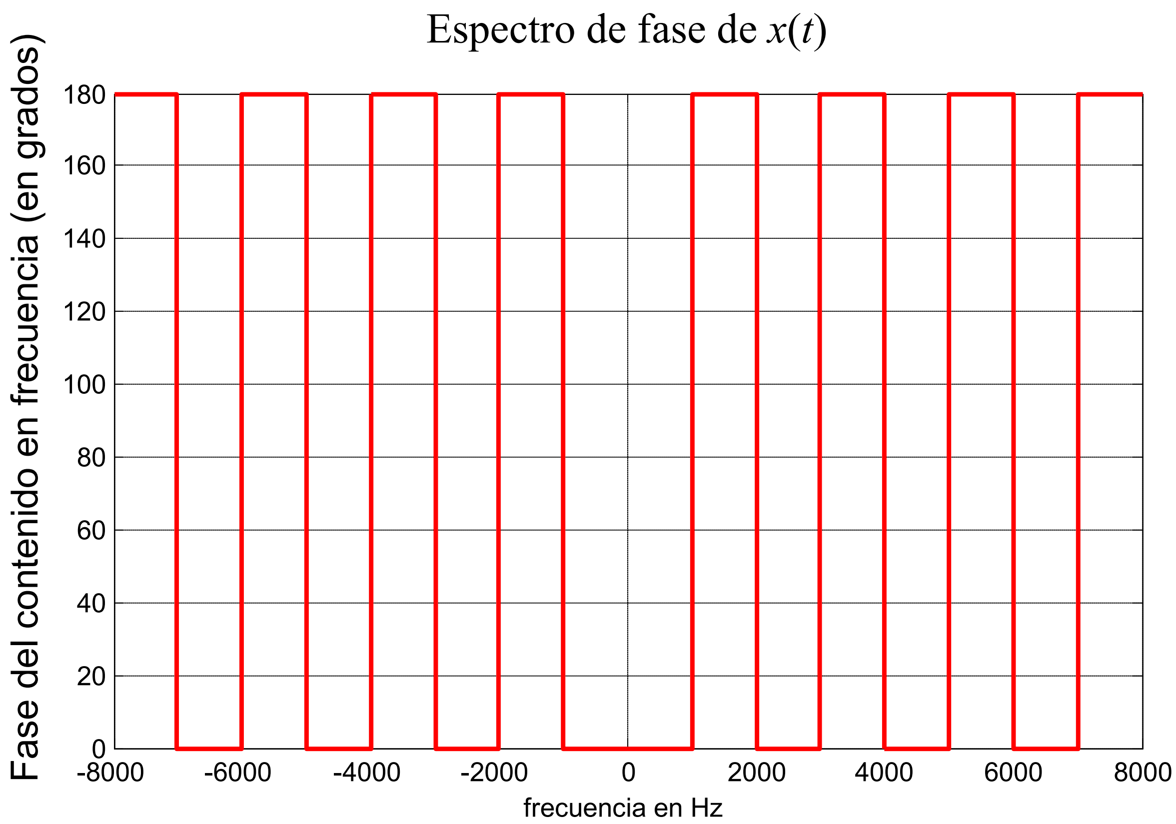


no

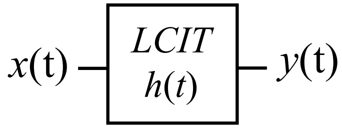


$$X(w) = 2A\frac{sen(w\tau/2)}{w}$$

$\underline{|X(w)}$



▪ La relación en el *dominio del tiempo* entre la salida y la entrada de un sistema *lineal*, *continuo* e *invariante* en el tiempo (*LCIT*) cumple lo siguiente:



$$y(t)=h(t)*x(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\cdot x(t-\lambda)\cdot d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\cdot h(t-\lambda)\cdot d\lambda$$

x(t): *señal de entrada*

y(t): *señal de salida*

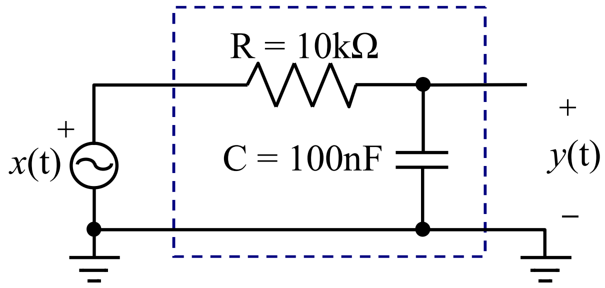
h(t): *señal de salida cuando la entrada es igual a una delta de Dirac* (*impulso unitario*)

▪ La relación en el *dominio de la frecuencia* entre la *salida* y la *entrada* de un sistema *lineal*, *continuo* e *invariante* en el tiempo (*LCIT*) cumple lo siguiente (ver tarea 4):

$$Y(w) = H(w)\cdot X(w) \rightarrow \begin{cases} |Y(w)| = |H(w)|\cdot|X(w)| \\ \angle Y(w) = \angle H(w) + \angle X(w) \end{cases}$$

$$H(w)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot e^{-jwt}\cdot dt \equiv \textit{transformada de Fourier de } h(t)$$

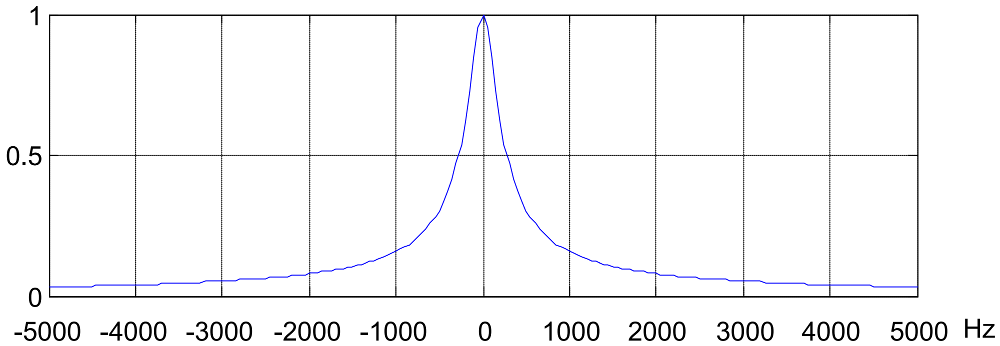
Ejemplo: se puede demostrar que la *respuesta en frecuencia* del sistema representado en la parte derecha cumple lo siguiente:



$$H(w)=\frac{y(w)}{x(w)}=\frac{1}{1+jwCR} \qquad H(f)=\frac{y(f)}{x(f)}=\frac{1}{1+j2\pi fCR}$$

Módulo de la respuesta en frecuencia en el intervalo –5000Hz : +5000Hz

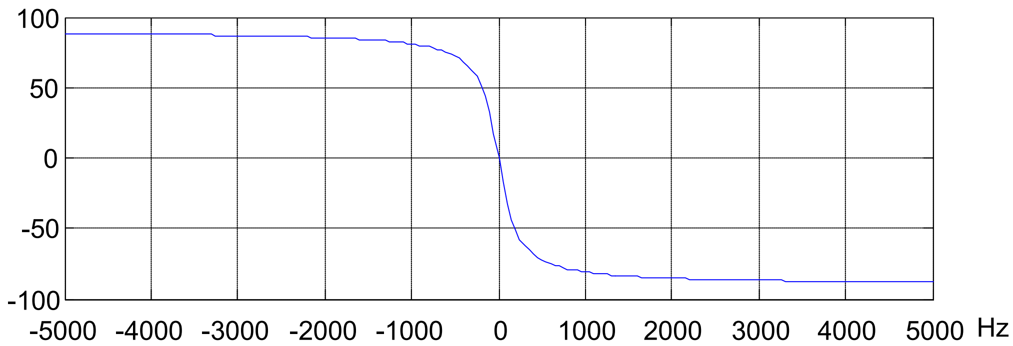
$$|H(f)|=\frac{1}{\sqrt{1+(2\pi fCR)^2}}$$



$f = w/2\cdot\pi$

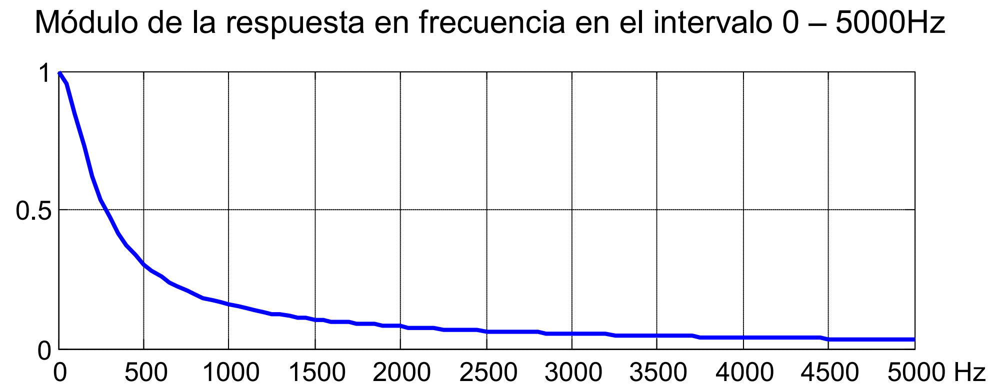
Fase de la respuesta en frecuencia (en grados)

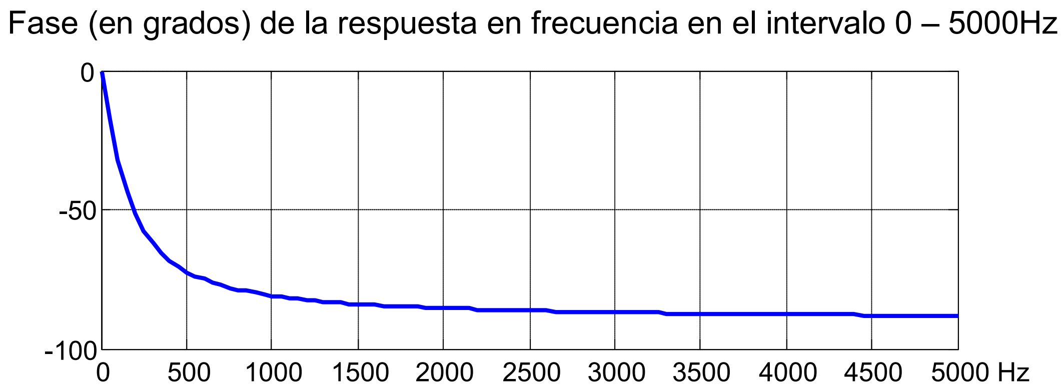
$$\underline{|H(w)}=-arctang(2\pi CR)$$



$f = w/2\cdot\pi$

Las señales con frecuencias negativas sólo existen a nivel matemático. Lo que hace que del espectro indicado en la página anterior sólo nos interese la parte correspondiente a las frecuencias no negativas.





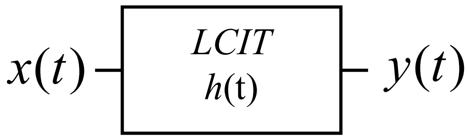
▪ *Respuesta de un sistema LCIT ante una señal de entrada senoidal*: (ver tarea 4)

$$x(t) = A\cdot\cos[w_0 t+\vartheta] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} LCIT \\ h(\mathrm{t}) \end{matrix}} \longrightarrow y(t) = |H(w_0)|\cdot A\cdot\cos\left[w_0 t+\vartheta+\angle H(w_0)\right]$$

$$H(w)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot e^{-jwt}\cdot dt$$ ≡ *transformada de Fourier* de $h(t)$

Nota: *como se puede apreciar en la expresión anterior, la frecuencia de la señal de salida es la misma que la de la señal de entrada.*

▪ *Respuesta de un sistema LCIT ante una señal de entrada x(t) periódica que cumple las condiciones de Dirichlet*:



$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot |c_n| \cdot cos\left(n w_0 t + \angle c_n\right)$$

$$y(t) = c_0 \cdot H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot |c_n| \cdot |H(n w_0)| \cdot cos\left(n w_0 t + \angle c_n + \angle H(n w_0)\right)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn w_0 t} dt$$

Nota: *si la señal de entrada x(t) de un sistema LCIT es periódica, entonces su salida y(t) también es periódica y tiene la misma frecuencia.*

Nota: *un sistema lineal cumple lo siguiente,*

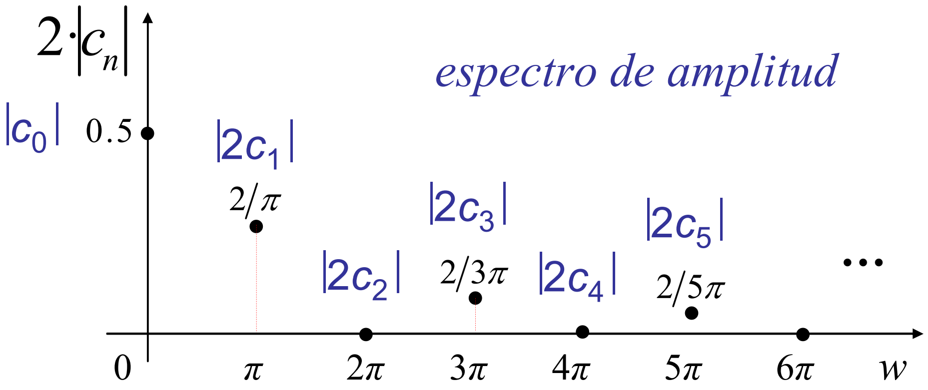
entrada $x_1(t) \leftrightarrow$ *salida* $y_1(t)$

entrada $x_2(t) \leftrightarrow$ *salida* $y_2(t)$

entrada $x_1(t) + x_2(t) \leftrightarrow$ *salida* $y_1(t) + y_2(t)$

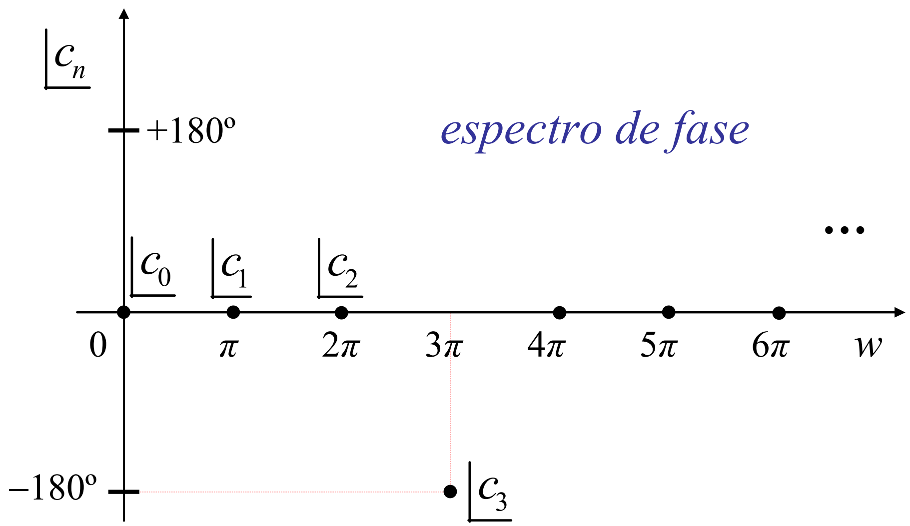
entrada $a \cdot x_1(t) \leftrightarrow$ *salida* $a \cdot y_1(t)$

Ejemplo de espectros de amplitud y de fase de una señal periódica $x(t)$

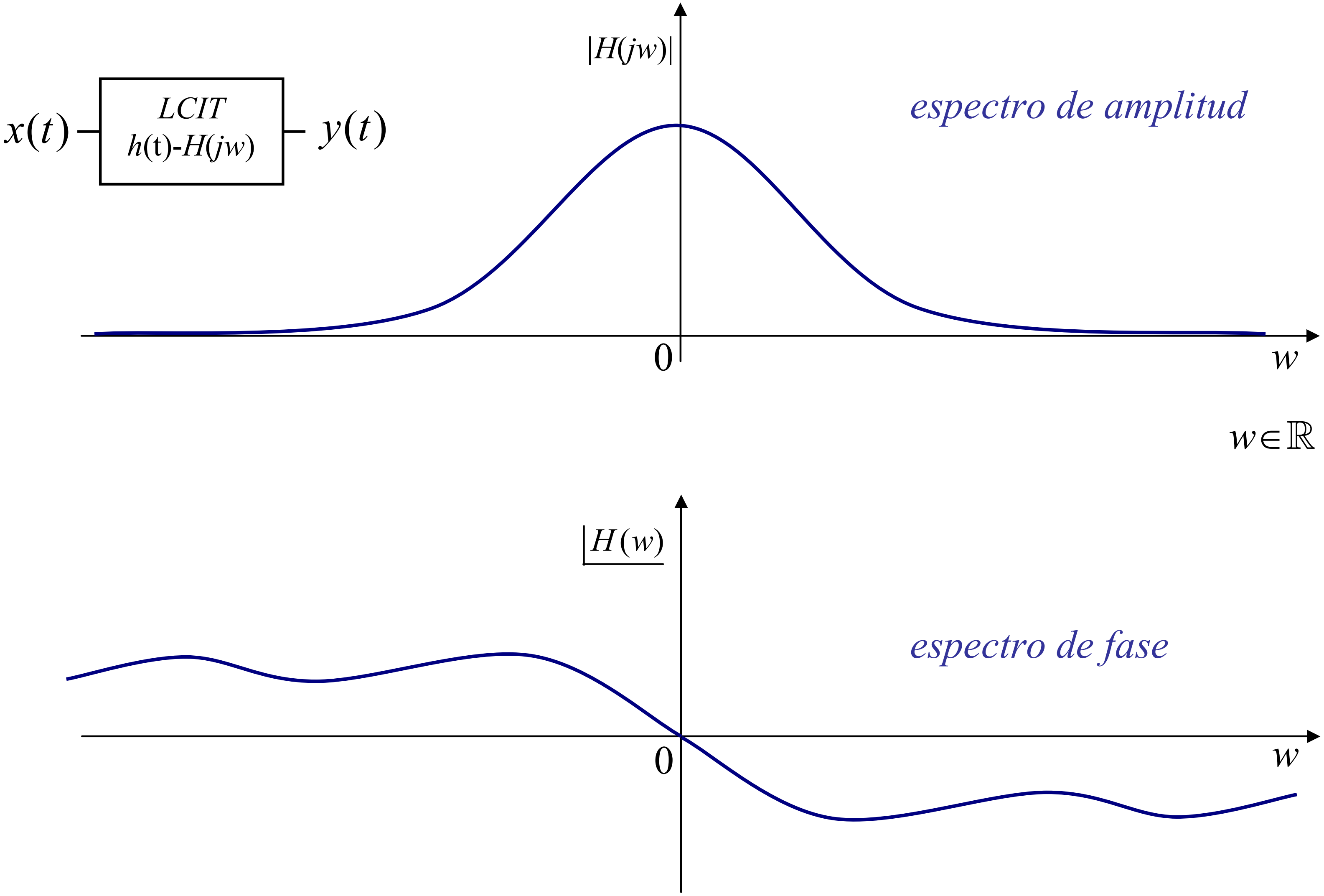


Nota: *la frecuencia fundamental de* $x(t)$ *vale* π *radianes.*

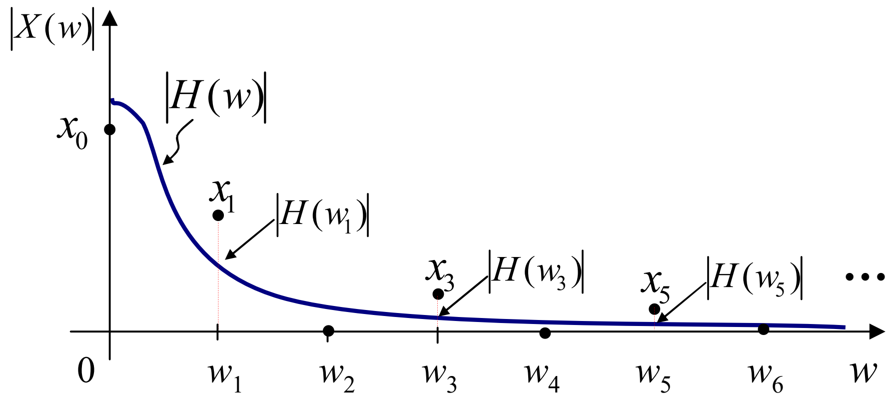
Nota: *el espectro de una señal periódica es discreto en frecuencia*



Ejemplo de la respuesta en frecuencia de un sistema LCIT con una respuesta h(t) *a un impulso unitario*



Espectros de amplitud de la entrada X(jw) y del sistema H(jw)



Dominio del tiempo

$x(t)$ — **LCIT** $h(t)$ — $y(t)$

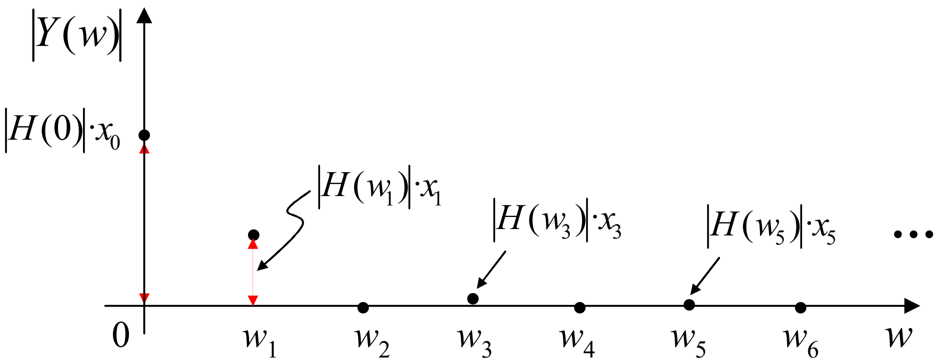
$$y(t)=h(t)*x(t)=x(t)*h(t)$$

Dominio de la frecuencia

$X(jw)$ — **LCIT** $H(jw)$ — $Y(jw)$

$$Y(w) = H(w)\cdot X(w)$$

Espectro de amplitud de la salida Y(jw)



$$|Y(w)| = |H(w)|\cdot|X(w)|$$

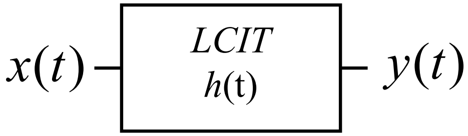
De los resultados anteriores se deduce lo siguiente:

La señal de salida $y(t)$ es periódica y sólo tiene armónicos en las mismas frecuencias (nw_0) que la señal de entrada $x(t)$, cumpliéndose que:

- $|Y(nw_0)| = |H(nw_0)| \cdot |X(nw_0)|$: el módulo del armónico de frecuencia nw_0 de $y(t)$ es igual al módulo de frecuencia nw_0 de $x(t)$ multiplicado por el módulo de $H(w = nw_0)$.
- $\angle Y(nw_0) = \angle H(nw_0) + \angle X(nw_0)$: la fase del armónico de frecuencia nw_0 de $y(t)$ es igual a la fase del armónico de frecuencia nw_0 de $x(t)$ sumada a la fase de $H(w = nw_0)$

- *Respuesta a una señal no-periódica para la que existe su transformada de Fourier*:

$$Y(w) = H(w) \cdot X(w)$$

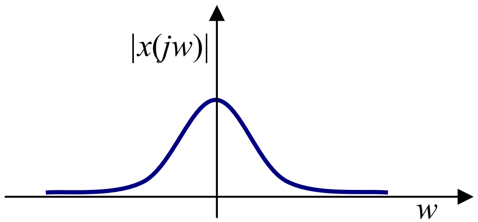


$$\left.\begin{aligned} |Y(w)| &= |H(w)| \cdot |X(w)| \\ \angle Y(w) &= \angle H(w) + \angle X(w) \end{aligned}\right\}$$

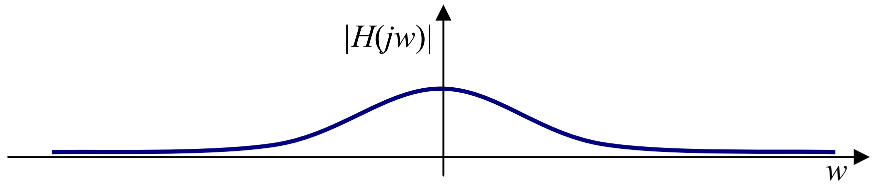
→ *estas ecuaciones indican cómo el sistema procesa la señal de entrada.*

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(w) \cdot e^{jwt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(w) \cdot X(w) \cdot e^{jwt}\, dt$$

→ *se suele utilizar una tabla de transformadas, en vez de resolver la integral*



contendido en frecuencia de la señal de entrada



respuesta en frecuencia del sistema

Notas:

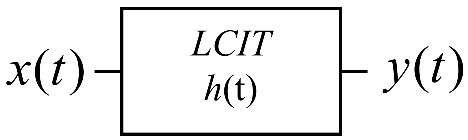
▪ Una señal *no periódica* $x(t)$ de duración finita en el tiempo tiene, en general, componentes en todas las frecuencias del espectro. Dicho de otro modo, el espectro de una señal no-periódica es continuo en frecuencia.

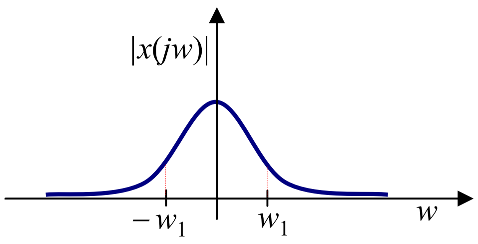
▪ Si se aplica una señal *no periódica* $x(t)$ a la entrada de un sistema lineal, su salida $y(t)$ tendrá componentes en las mismas frecuencias que la señal de entrada $x(t)$, cumpliéndose que:

$|Y(w)| = |H(w)| \cdot |X(w)|$: el *módulo* de la componente de $y(t)$ de frecuencia w es igual al producto del módulo de la componente de $x(t)$ de frecuencia w por el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema (H) a dicha frecuencia.

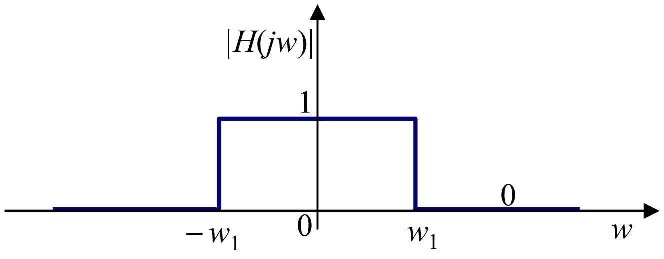
$\angle Y(w) = \angle H(w) + \angle X(w)$: la *fase* de la componente de $y(t)$ de frecuencia w es igual a la suma de la fase de la componente de $x(t)$ de frecuencia w más la fase de la respuesta en frecuencia del sistema (H) a dicha frecuencia.

Pregunta: ¿cómo es la curva de módulos del contenido en frecuencia de la señal $y(t)$ en el siguiente ejemplo?





contendido en frecuencia de la señal de entrada



respuesta en frecuencia del sistema

(de aquí pasamos a ver conceptos básicos sobre filtros IIR)

ver: 2_Resumen conceptos básicos sobre filtros IIR