3 Jerarquía de Chomsky

3.1 Gramáticas regulares: RGs

3.1.1 Gramáticas lineales: por la derecha, por la izquierda

<u>Definición</u>: Sea $G = (N, \Sigma, P, S)$ una gramática, decimos que G es:

a) <u>Lineal por la derecha</u> sii $\forall p \in P$, "p" es de la forma $\begin{cases} A \to aB \\ \text{ó} \\ A \to a \end{cases}$

b) <u>Lineal por la izquierda</u> sii $\forall p \in P$, "p" es de la forma $\begin{cases} A \to Ba \\ \text{ó} \\ A \to a \end{cases}$

<u>Ejemplo</u>: $G = (\{Digito\}, \{\emptyset, 1, \dots, 9\}, \{Digito \to \emptyset | 1 | \dots | 9\}, Digito)$

es lineal por la derecha.

3.1.2 Gramáticas regulares: RGs

<u>Definición</u>: Una gramática $G = (N, \Sigma, P, S)$ se dice <u>regular</u> sii:

i) G es lineal por la derecha

ó

ii) G es lineal por la izquierda.

<u>NOTA</u>: En adelante identificaremos por defecto

Gramática regular $\equiv$ Gramática lineal por la derecha

3.2 Gramáticas de contexto libre: CFGs.

3.2.1 Definición de CFG. Lenguajes de contexto CFLs: CFLs

<u>Definición</u>: Una gramática $G = (N, \Sigma, P, S)$ es de <u>contexto-libre</u> sii $\forall p \in P$, "p" es de la forma $A \to \alpha$.

<u>Definición</u>: Una CFG $G = (N, \Sigma, P, S)$ se dice lineal sii

$$\forall p \in P \begin{cases} i) \ p \equiv A \to uBv \\ \quad \text{ó} \\ ii) \ p \equiv A \to w \end{cases}$$

<u>NOTA</u>: Si $u = \varepsilon$ (resp. $v = \varepsilon$) es lineal por la derecha (resp. por la izq).

3.2.2 Árboles de derivación, fronteras.

<u>Definición</u>: Un árbol orientado etiquetado T es un <u>árbol de derivación</u> para una CFG $G(S) = (N, \Sigma, P, S)$ sii:

i) La raíz de T está etiquetada por S.

ii) Si $T_1, \dots, T_k$ son subárboles de los descendientes directos de la raíz de T, y la raíz de T_i está etiquetada por S_i; entonces $S \to S_1 \dots S_k$ es una producción en P.

iii) T_i debe ser:

a) Un árbol de derivación para $G(S_i) = (N, \Sigma, P, S_i)$ si $S_i \in N$

b) Un nodo simple etiquetado S_i si $S_i \in \Sigma$

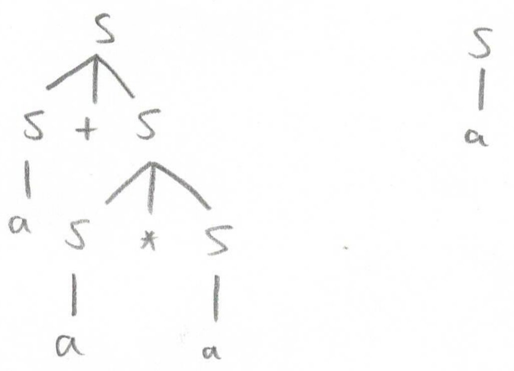
iv) En el caso de que:

a) T_1 sea el único subárbol de la raiz de T

b) T_1 está etiquetado por ε

entonces $S \to \varepsilon \in P$.

<u>Ejemplo:</u> Con la gramática de las expresiones aritméticas



<u>Definición:</u> La <u>frontera</u> de un árbol de derivación es la cadena obtenida concatenando las etiquetas de las hojas (los terminales del árbol) de izquierda a derecha.

<u>Ejemplo:</u> En el ejemplo anterior, las fronteras son respectivamente: $a + a * a$

a

<u>Definición:</u> Sea T un arbol, y sean "x" e "y" dos nodos del mismo. Decimos que "y" <u>desciende directamente</u> de "x" si "y" es un hijo de "x" en T.

<u>NOTACIÓN</u>: $x \ulcorner y$

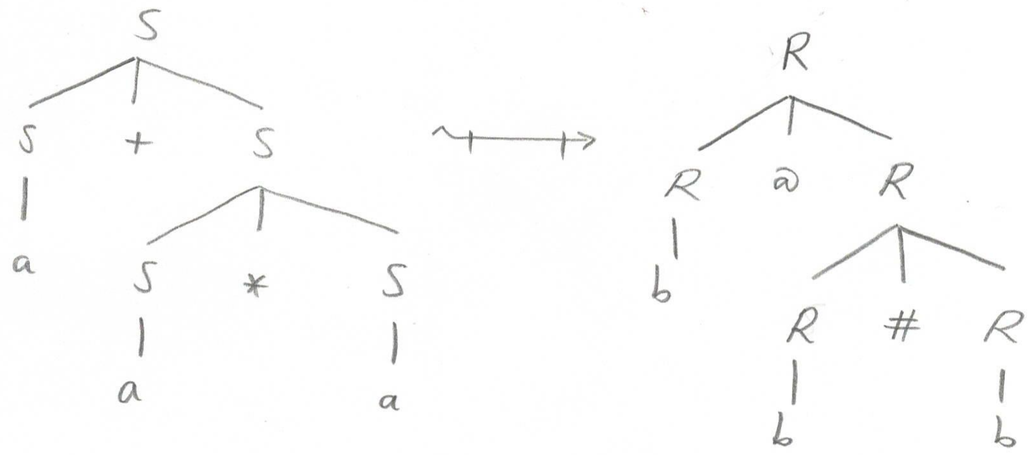
3.2.3 Isomorfismos estructurales entre árboles.

<u>Definición</u>: Dos árboles T y T' son <u>estructuralmente isomórficos</u> sii $\exists \; T \xrightarrow[x \rightsquigarrow x']{} T'$ tal que:

$$x \,\Gamma\, y \;(\text{resp. } x \,L\, y) \iff x' \,\Gamma\, y' \;(x' \,L\, y')$$

<u>NOTA</u>: Intuitivamente T y T' son idénticos salvo por su etiquetaje.

<u>Ejemplo</u>:



3.2.4 Derivaciones por la derecha (canónicas) y por la izquierda.

<u>Definición</u>: Sea $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ una CFG y sea $\alpha A \beta \Rightarrow \alpha \gamma \beta$ una derivación directa en $\mathcal{G}$, diremos que se trata de una <u>derivación por la derecha</u> (resp. <u>por la izquierda</u>) sii:

i) $A \rightarrow \gamma \in P$

b) $\beta \in \Sigma^*$ (resp. $\alpha \in \Sigma^*$).

<u>NOTACIÓN</u>: Utilizaremos la notación

$$\alpha A \beta \underset{rm}{\Rightarrow} \alpha \gamma \beta \quad (\text{resp. } \alpha A \beta \underset{lm}{\Rightarrow} \alpha \gamma \beta).$$

En ambos casos, podemos considerar los conceptos análogos en derivaciones indirectas, que notaremos:

i) $\alpha A \beta \overset{*}{\underset{rm}{\Rightarrow}} \alpha \gamma \beta$ (resp. $\alpha A \beta \overset{*}{\underset{lm}{\Rightarrow}} \alpha \gamma \beta$)

ii) $\alpha A \beta \overset{+}{\underset{rm}{\Rightarrow}} \alpha \gamma \beta$ (resp. $\alpha A \beta \overset{+}{\underset{lm}{\Rightarrow}} \alpha \gamma \beta$)

<u>Ejemplo</u>: Considerando las expresiones aritméticas, tenemos que:

$S \overset{4}{\underset{lm}{\Rightarrow}} (a+a)$, puesto que $S \underset{lm}{\Rightarrow} (S) \underset{lm}{\Rightarrow} (S+S) \underset{lm}{\Rightarrow} (a+S) \underset{lm}{\Rightarrow} (a+a)$

$S \overset{4}{\underset{rm}{\Rightarrow}} (a+a)$, puesto que $S \underset{rm}{\Rightarrow} (S) \underset{rm}{\Rightarrow} (S+S) \underset{rm}{\Rightarrow} (S+a) \underset{rm}{\Rightarrow} (a+a)$

<u>NOTA</u>: En adelante consideraremos que la notación $\alpha A \beta \overset{+}{\Rightarrow} \alpha \gamma \beta$ expresa un orden prefijado de derivación (el canónico), salvo que se indique lo contrario.

3.2.5 CFGs ambiguas y no ambiguas.

<u>Definición</u>: Una CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ es <u>ambigua</u> si $\exists\, x \in L(\mathcal{G})$ tal que $\exists$ dos derivaciones canónicas $S \overset{*}{\Rightarrow} x$.

Lema: Sea $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ una CFG, entonces:

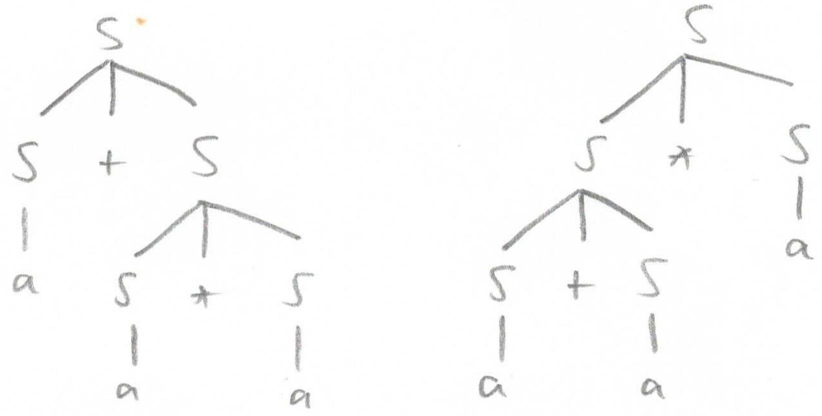
$\mathcal{G}$ es no ambigua $\Leftrightarrow$ $\forall T, T'$ árboles de derivación de S:

$$fr(T) = fr(T') \Rightarrow T = T'$$

NOTA: $fr(T) \equiv frontera(T)$

demo trivial.

Ejemplo: La gramática anteriormente considerada para las expresiones aritméticas, es ambigua:



Definición: Un CFL $\mathcal{L}$ es no ambiguo sii $\exists\ \mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ CFG no ambigua / $\mathcal{L} = L(\mathcal{G})$.

Ejemplo: El lenguaje $\mathcal{L}$ de las expresiones aritméticas es no ambiguo puesto que: $\mathcal{L} = L(\mathcal{G})$ donde $\mathcal{G}$ es una CFG no ambigua dada por las reglas:

$$E \to E+T \mid T \qquad T \to T*F \mid F \qquad F \to (E) \mid a$$