Definición: Sean Σ_1, Σ_2 dos alfabetos arbitrarios, entonces una **sustitución** es una aplicación:

$$s : \Sigma_1 \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma_2^*)$$

Dicho concepto puede extenderse a Σ_1^* en la forma

$$\left.\begin{array}{l} s(\varepsilon) ::= \varepsilon \\ s(xa) := s(x)s(a) \end{array}\right\}$$

También podemos extenderlo a lenguajes regulares en la forma:

$$s(L) := \bigcup_{x \in L} s(x)$$

Ejemplo: Sean $\Sigma_1 = \{0, 1\}$, $\Sigma_2 = \{a, b\}$ y $L = 0^*(0+1)1^*$.
Consideremos la sustitución dada por:

$$\left.\begin{array}{l} s(0) := a \\ s(1) := b^* \end{array}\right\} \text{ entonces}$$

$$s(010) = ab^*a$$

$$s(L) = a^*(a+b^*)(b^*)^* = (a^*a + a^*b^*)b^* =$$

$$= (a^+ + a^*b^*)b^* = a^+b^* + a^*b^*b^* = a^+b^* + a^*b^* =$$

$$= a^*b^*$$

Teorema: La clase de conj. regulares es cerrada para las sustituciones.

demo. Sean Σ_1, Σ_2 alfabetos y sea $s : \begin{array}{l}\Sigma_1 \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma_2^*) \\ a \rightsquigarrow s(a)\end{array}$ una sust.

Sea t una expr. regular en Σ_1, veremos que $s(t)$ es también expr. reg.

Haremos la demostración por inducción en el número de operadores en t, que notaremos por $|t|$.

$\underline{|\gamma| = \emptyset} \Rightarrow \begin{cases} \text{i) } \gamma = \phi \\ \quad \text{ó} \\ \text{ii) } \gamma = \varepsilon \\ \quad \text{ó} \\ \text{iii) } \gamma = a,\ a \in \Sigma_1 \end{cases}$ donde caso por caso, tenemos:

$\left.\begin{array}{l} \text{i) } s(\gamma) = \phi \\ \text{ii) } s(\gamma) = \varepsilon \\ \text{iii) } s(\gamma) = s(a) \in \mathcal{P}(\Sigma_2^*) \end{array}\right\}$ en cualquier caso, $s(\gamma)$ es una expr. reg. demostrado

$\underline{|\gamma| \leq n}$ Supuesto cierto

$\underline{|\gamma| = n+1}$ Distinguiremos tres casos, dependiendo de la forma de γ:

1º caso $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ Entonces, forzósamente el número de operadores en γ_1 y γ_2 es $\leq n$, por lo que aplicando la hipot. de inducción $s(\gamma_1)$ y $s(\gamma_2)$ son expr. regulares. Además, tenemos que:

$s(\gamma) = s(\gamma_1 + \gamma_2) = s(\gamma_1) + s(\gamma_2)$ que es una expr. regular.

demostrado

2º caso $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$

Trivial, puesto que $s(\gamma) = s(\gamma_1)\, s(\gamma_2)$ demostrado

3º caso $\gamma = \gamma_1^*$

Trivial, puesto que $s(\gamma) = s(\gamma_1)^*$ demostrado

NOTA: Es trivial ver que dada una sustitución s,

i) $s(\gamma_1 + \gamma_2) = s(\gamma_1) + s(\gamma_2)$

ii) $s(\gamma_1 \gamma_2) = s(\gamma_1)\, s(\gamma_2)$

iii) $s(\gamma_1^*) = s(\gamma_1)^*$

Corolario: La clase de conj. regulares es cerrada para los homomorf.

demo. Trivial a partir del th. anterior, puesto que todo homomorf. es por definición una sustitución, h, en la cual $h(a)$ tiene un solo elemento, $\forall a$.

Teorema: La clase de conj. regulares es cerrada bajo homomorf. inversos

demo

Sean $\begin{cases} L \text{ un conj. regular } / L = L(A),\ A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \text{ DFA} \\ h : \Delta \longrightarrow \Sigma^* \text{ homomorf.} \end{cases}$

La idea consiste en construir un DFA $A' / h^{-1}(L) = L(A')$, mediante la lectura de símbolos $a \in \Delta$ y simulando A en $h(a)$.

Formalmente, sea $A' = (Q, \Delta, \delta', q_0, F)$ donde:

$$\delta'(q, a) := \delta(q, h(a)), \quad \forall q \in Q,\ \forall a \in \Delta$$

entonces: $\underline{\delta'(q_0, x) = \delta(q_0, h(x)),\ \forall x \in \Delta^*}$

Lo haremos por inducción en $|x|$

$\underline{|x| = \emptyset} \Rightarrow x = \varepsilon \Rightarrow \delta'(q_0, x) := \delta(q_0, x)$

$\underline{|x| = 1}$ Trivial por def

$\underline{|x| \leq n}$ Supuesto cierto

$\underline{|x| = n+1} \Rightarrow \exists x' \in \Delta^*, \exists a \in \Delta / \left.\begin{array}{l} x = x'a \\ |x'| = n \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{inducción}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta'(q_0, x) = \delta'(q_0, x'a) = \delta'(\delta'(q_0 x'), a) =$

$= (\text{inducción}) = \delta'(\delta(q_0, h(x')), a) :=$

$:= \delta(\delta(q_0, h(x')), h(a)) = \delta(q_0, h(x')h(a)) =$

$$= (h \text{ es un homomorf.}) = \delta(q_0, h(x'a)) =: \delta(q_0, h(x))$$

demostrado

Esto es, $\delta'(q_0, x) \in F \iff \delta(q_0, h(x)) \in F$ por tanto:

$$x \in L(A') \iff h(x) \in L(A) \text{, esto es:}$$

$$L(A') = L(h^{-1}(L(A)))$$ demostrado

Ejemplo: Demostraremos que el conj. $L_1 = \{a^n b a^n,\ n \geq 1\}$ no es regular.

Para ello, bastará con transformar el conj. L_1 en un conj. no regular L_2, mediante operaciones que conservan el caracter regular de los conjuntos.

Como L_2 consideraremos $\{0^n 1^n,\ n \geq 1\}$ que ya hemos mostrado precedentemente que no es un conj. regular.

Consideremos los homomorfismos definidos por:

$$\begin{array}{ll} h_1(a) = a & h_2(a) = 0 \\ h_1(b) = ba & h_2(b) = 1 \\ h_1(c) = a & h_2(c) = 1 \end{array}$$

y el conj. regular definido por la expresión reg. a^*bc^*, entonces:

$$h_2(h_1^{-1}(\{a^n b a^n,\ n \geq 1\}) \cap a^*bc^*) = h_2(\{(a+c)^n b (a+c)^{n-1},\ n \geq 1\} \cap a^*bc^*) =$$

$$= h_2(\{a^n b c^{n-1},\ n \geq 1\}) =$$

$$= \{0^n 1^n,\ n \geq 1\}$$ demostrado

Definición: Sean L_1 y L_2 dos lenguajes, definimos el cociente de L_1 y L_2 como:

$$L_1/L_2 := \{ x \,/\, \exists y \in L_2,\ xy \in L_1 \}$$

Ejemplo: Sean $L_1 := 0^*10^*$ y $L_2 := 10^*1$, entonces $L_1/L_2 = \Phi$ puesto que $\left.\begin{array}{l} \forall y \in L_2, \text{"}y\text{" posee dos } 1 \\ \forall z \in L_1, \text{"}z\text{" posee un solo } 1 \end{array}\right\}$ por tanto

$\forall x,\ xy \notin L_1,\ \forall y \in L_2$.

Ejemplo: Sean $L_1 := 0^*10^*$ y $L_2 := 0^*$, entonces $L_1/L_2 = 0^*10^*$

Ejemplo: Sean $L_1 := 10^*1$ y $L_2 := 0^*$, entonces $L_1/L_2 = 10^*1$

Teorema: La clase de los conj. regulares es cerrada para el cociente con conjuntos arbitrarios.

demo. Sea un conj. regular $L_1 = L(A)$, $A_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F_1)$ DFA y sea L_2 un conj. arbitrario, veremos que L_1/L_2 es un conj. regular.

Para ello demostraremos que $\exists A_2$ DFA $/ L_1/L_2 = L(A_2)$.

Sea $A_2 := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F_2)$, donde:

$$F_2 := \{ q \in Q \,/\, \exists y \in L_2,\ \delta(q, y) \in F_1 \}$$

Entonces, trivialmente $\delta(q_0, x) \in F_2 \Leftrightarrow \exists y \in L_2 / \delta(q_0, xy) \in F_1$ esto es, $L_1/L_2 = L(A_2)$ demostrado