Análise Matemática. Curso 2022-2023.
Grao en Enxenería Informática. ESEI Ourense.
Departamento de Matemáticas. Universidade de Vigo.
Data: 06/10/2022

BLOQUE I

APELIDOS	NOME	DNI	NOTA

1. Calcular os seguintes límites:

$$a) \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+3n^2+2}-\sqrt{n^4+2}\right) \qquad b) \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^{2n}}{(n+1)^{2n}}$$

SOLUCIÓN: *a*)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+3n^2+2}-\sqrt{n^4+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4+3n^2+2}-\sqrt{n^4+2}\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+3n^2+2}+\sqrt{n^4+2}\right)}{\left(\sqrt{n^4+3n^2+2}+\sqrt{n^4+2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+3n^2+2-(n^4+2)}{\sqrt{n^4+3n^2+2}+\sqrt{n^4+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{\sqrt{n^4+3n^2+2}+\sqrt{n^4+2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}}=\frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{3}{2}.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^{2n}}{(n+1)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}=\mathrm{e}^h$$

porque se trata dunha indeterminación do tipo "1^∞", onde

$$h=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}-1\right)\cdot 2n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1-n-1}{n+1}\right)\cdot 2n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-4n}{n+1}\right)=-4,$$

por ser polinomios do mesmo grado e polo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^{2n}}{(n+1)^{2n}}=\mathrm{e}^h=\mathrm{e}^{-4}.$$

2. Xustificar se as seguintes series son converxentes ou non:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+2)!} \qquad\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{(n!)\cdot n^3}$$

SOLUCIÓN:

SOLUCIÓN: $a)$ Como $a_n = \dfrac{n^3}{(n+2)!} > 0$ trátase dunha serie de termos positivos. Usaremos o criterio do cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^3}{(n+3)!}}{\dfrac{n^3}{(n+2)!}} = \frac{(n+1)^3\,(n+2)!}{n^3\,(n+3)!} = \frac{(n+1)^3\,(n+2)!}{n^3\,(n+3)(n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{n^3\,(n+3)}.$$

Entón, como o grado do denominador (4) é maior que o grado do numerador (3), dedúcese que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 = L < 1,$$

e polo criterio do cociente a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+2)!}$ é **converxente**.

$a)$ Satisfaise que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{(n!)\cdot n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)(n!)}{(n!)\cdot n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{n^3} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} + 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Na última suma aparecen tres series armónicas xeneralizadas: a primeira diverxe porque $\alpha = 1 \leq 1$ e as dúas últimas son converxentes por ser $\alpha = 2 > 1$ e $\alpha = 3 > 1$, respectivamente. Entón a serie de partida $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{(n!)\cdot n^3}$ é **diverxente**.