Tema 8

Formas cuadráticas

8.1. Diagonalización ortogonal

Lección 11, 9 may 2023

Ortogonalidad de los espacios propios de las matrices simétricas

Supongamos que A es una matriz simétrica y que $\mathbf{x}_1$ es un vector propio de A con autovalor λ_1 y $\mathbf{x}_2$ es otro vector propio con autovalor λ_2, es decir:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_1 &= \lambda_1\mathbf{x}_1, \qquad \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0} \\ A\mathbf{x}_2 &= \lambda_2\mathbf{x}_2, \qquad \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Entonces *si el producto escalar* $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$ *se multiplica por* λ_1 *el resultado es el mismo número que si se multiplica por* λ_2:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) &= (\lambda_1\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_2 = (A\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_2 \\ &= \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}(A\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 && \text{(porque } A = A^{\mathrm{T}}\text{)} \\ &= (A\mathbf{x}_2)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 \cdot (A\mathbf{x}_2) \\ &= \mathbf{x}_1 \cdot (\lambda_2\mathbf{x}_2) = \lambda_2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

La consecuencia inmediata de esta propiedad es que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$, es decir:

TEOREMA 8.1.1

Para cualquier matriz simétrica, los vectores propios correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales.

Este teorema implica que *espacios propios distintos de una matriz simétrica son ortogonales*:

$$\text{Si} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \text{entonces} \quad E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}.$$

En consecuencia, si A es una matriz simétrica $n \times n$ y elegimos una base ortonormal en cada uno de sus espacios propios, la unión de todas esas bases es un conjunto ortonormal en $\mathbf{R}^n$. Si A es diagonalizable entonces ese conjunto ortonormal es una base ortonormal de $\mathbf{R}^n$ y A tiene una diagonalización de la forma $A = PDP^{-1}$ en la que P es una matriz cuadrada con columnas ortonormales, es decir, una matriz ortogonal.

Versión de 19 de enero de 2023, 20:29 h.

Matrices ortogonalmente diagonalizables

Se dice que una diagonalización de una matriz A,

$$A = QDQ^{-1}$$

diagonalización ortogonal

es una *diagonalización ortogonal* si la matriz Q de autovectores es una matriz ortogonal, es decir si $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$. En este caso, la diagonalización toma la forma $A = QDQ^{\mathrm{T}}$.

Se dice que una matriz A es *ortogonalmente diagonalizable* si existe una diagonalización ortogonal de A. Si A es $n \times n$, eso es lo mismo que decir que $\mathbf{R}^n$ admite una base ortonormal de vectores propios de A.

Sea A una matriz diagonalizable $n \times n$ de forma que la suma de las dimensiones de sus espacios propios es n. Por lo visto más arriba, si A es simétrica sus espacios propios son ortogonales unos a otros y no hay más que escoger una base ortonormal en cada espacio propio para obtener una base ortonormal de $\mathbf{R}^n$ que proporciona una diagonalización ortogonal de A.

Recíprocamente: si la matriz diagonalizable A es ortogonalmente diagonalizable, sea $A = QDQ^{\mathrm{T}}$ una diagonalización ortogonal de A. Entonces al ser D diagonal, $D^{\mathrm{T}} = D$ y por tanto:

$$A^{\mathrm{T}} = \left(QDQ^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(Q^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} = QDQ^{\mathrm{T}} = A,$$

y en consecuencia A es una matriz simétrica. Así pues:

Una matriz diagonalizable es ortogonalmente diagonalizable si y sólo si es una matriz simétrica.

En realidad se cumple un teorema más amplio debido a que es posible demostrar el sorprendente hecho de que *toda matriz simétrica es diagonalizable*. En consecuencia, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 8.1.2

Teorema Espectral para las Matrices Reales Simétricas

Si A es una matriz real simétrica entonces:

1. *Todos los autovalores de A son números reales.*
2. *Todo autovalor de A tiene su multiplicidad algebraica igual a su multiplicidad geométrica (lo que significa que A es diagonalizable).*
3. *Los espacios propios de A correspondientes a autovalores distintos son mutuamente ortogonales.*
4. *A es ortogonalmente diagonalizable.*

Ejemplo de una diagonalización ortogonal: Consideremos la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que un autovalor es 3 porque al restar 3 de los elementos de la diagonal queda una matriz con todos los elementos iguales a 1 que, evidentemente tiene determinante igual a cero. Además la forma escalonada reducida de esa matriz de unos es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que una base del espacio propio E_3 del autovalor 3 es

$$\mathcal{B}_{E_3} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

El autovalor restante de A es claramente 6 con autovector $(1, 1, 1)$ (esto se sabe porque todas las filas de A suman 6).

Con los resultados que acabamos de obtener es facil llegar a una diagonalización de A, pero nuestro objetivo es más que eso. Como se puede observar, el vector propio del autovalor 6 es ortogonal a los dos vectores de la base del espacio propio del autovalor 3:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

y por tanto los dos espacios propios E_3 y E_6 son ortogonales uno al otro. Bastaría tener una base ortogonal de E_3 para conseguir una base ortogonal de $\mathbf{R}^3$ formada por vectores propios de A.

Para obtener una base ortogonal de E_3 basta aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B}_{E_3}$ obtenida antes, tras lo cual llegamos a la siguiente diagonalización de A con vectores ortogonales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Finalmente, a partir de esta diagonalización con autovectores ortogonales hallamos una diagonalización ortogonal de A sin más que normalizar cada autovector (columnas de P), llegándose a:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Descomposición espectral de matrices reales simétricas

Sea $A = PDP^{\mathrm{T}}$ una diagonalización ortogonal de una matriz $n \times n$ simétrica A. Sean $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ los vectores unitarios que forman las columnas de P y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus respectivos autovalores. Entonces:

$$A = PDP^{\mathrm{T}} = [\mathbf{u}_1 \ \ \ldots \ \ \mathbf{u}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^{\mathrm{T}} + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^{\mathrm{T}}.$$

Es decir, A se descompone en una suma de matrices de proyección determinadas por el espectro de A. Para cualquier vector $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$, $A\mathbf{x}$ es el resultado de proyectar ortogonalmente $\mathbf{x}$ sobre cada "eje" $\mathbf{u}_i$, después reescalar el resultado multiplicándolo por el correspondiente autovalor λ_i y finalmente sumando todos estos resultados.

Ejercicios de la sección 8.1 Diagonalización ortogonal

En los ejercicios 1 a 6, averigua qué matrices son ortogonales y para las que lo sean, calcula la inversa.

1. $\begin{pmatrix} 0'6 & 0'8 \\ 0'8 & -0'6 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 0'5 & 0'5 & -0'5 & -0'5 \\ -0'5 & 0'5 & -0'5 & 0'5 \\ 0'5 & 0'5 & 0'5 & 0'5 \\ -0'5 & 0'5 & 0'5 & -0'5 \end{pmatrix}$.

Halla una diagonalización ortogonal de las matrices de los ejercicios 7 a 10.

7. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$

Halla una diagonalización ortogonal de las matrices de los ejercicios 11 a 16, en los que se da el espectro de la matriz.

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp} = \{5, 2, -2\}$.

12. $\begin{pmatrix} -2 & -36 & 0 \\ -36 & -23 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp} = \{25, 3, -50\}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp} = \{7, -2\}$.

14. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp} = \{13, 7, 1\}$.

15. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp} = \{9, 5, 1\}$.

16. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp} = \{2, 0\}$.

17. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Demuestra que $\mathbf{v}$ es un vector propio de A, halla su autovalor y halla una diagonalización ortogonal de A.

18. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ y } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A y halla una diagonalización ortogonal de A.

En los ejercicios 19 y 20, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

19.

(a) Toda matriz ortogonalmente diagonalizable es necesariamente simétrica.

(b) Si A es una matriz simétrica y los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ satisfacen $A\mathbf{u} = 3\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v} = 4\mathbf{v}$ entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

(c) Toda matriz simétrica $n \times n$ tiene n autovalores reales distintos.

(d) Si $\mathbf{v}$ es un vector no nulo de $\mathbf{R}^n$, la matriz $\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ es una matriz de proyección.

20.

(a) Si $B = PDP^{-1}$ donde D es una matriz diagonal y P ortogonal, entonces B es simétrica.

(b) Toda matriz ortogonal admite una diagonalización ortogonal.

(c) La dimensión de cualquier subespacio propio de una matriz real simétrica es igual a la multiplicidad algebraica de su correspondiente autovalor.

21. Supongamos que A es una matriz $n \times n$ simétrica y B es una matriz $n \times m$ cualquiera. Demuestra que las matrices $B^{\mathrm{T}}AB$, $B^{\mathrm{T}}B$, BB^{T} son simétricas.

22. Demuestra que si A es una matriz $n \times n$ simétrica, entonces $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$ para cualesquiera vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ de $\mathbf{R}^n$.

23. Supongamos que A es una matriz inversible y que admite una diagonalización ortogonal. Explica por qué A^{-1} también admite una diagonalización ortogonal.

24. Supongamos que A y B admiten diagonalización ortogonal y que $AB = BA$. Explica por qué AB también admite una diagonalización ortogonal.

25. Sea $A = PDP^{-1}$ con P ortogonal y D diagonal, y sea λ un autovalor de A con multiplicidad algebraica k, de forma que λ aparece k veces en la diagonal de D. Explica por qué la dimensión del espacio propio de λ es k.

26. Sea $A = PRP^{-1}$ con P ortogonal y R triangular superior. Demuestra que si A es simétrica, entonces R es simétrica y por tanto diagonal.

27. Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario de $\mathbf{R}^n$ y sea $B = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$

(a) Demuestra que para cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $B\mathbf{x}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{u}$.

(b) Demuestra que B es una matriz simétrica y que $B^2 = B$.

(c) Demuestra que $\mathbf{u}$ es un vector propio de B. ¿Cuál es su autovalor?

28. Sea B una matriz $n \times n$ simétrica y tal que $B^2 = B$. Toda matriz que cumpla eso se llama una *matriz de proyección* (o una *matriz de proyección ortogonal*). Dado un vector $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, sean $\hat{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$ y $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$.

(a) Demuestra que $\mathbf{z}$ es ortogonal a $\hat{\mathbf{y}}$.

(b) Sea W el espacio columna de B. Demuestra que $\mathbf{y}$ es la suma de un vector de W y uno de $W^{\perp}$. ¿Por qué esto demuestra que $B\mathbf{y}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre el espacio columna de B?

8.2. Clasificación de las formas cuadráticas

Definición de formas cuadráticas en $\mathbf{R}^n$

El concepto básico que sirve para definir una forma cuadrática es el de *polinomio homogéneo de segundo grado en varias variables*. En toda esta sección sobreentenderemos que los coeficientes de esos polinomios son números reales y por tanto hablaremos solamente de *formas cuadráticas reales*. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + y^2$ define una forma cuadrática en las dos variables x, y. La *forma cuadrática* definida por dicho polinomio es la función $q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ que a cada vector $\mathbf{x} = (x, y)$ de $\mathbf{R}^2$ le asigna el número real $q(\mathbf{x}) = x^2 + y^2$. Es decir:

Una forma cuadrática es una función $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definida mediante un polinomio homogéneo de segundo grado en las n coordenadas de los vectores de $\mathbf{R}^n$.

Primera definición de forma cuadrática.

Otra forma de definir una forma cuadrática es en términos de una matriz cuadrada real, A, mediante la expresión $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$. Si se desarrolla este producto de matrices se comprobará que el resultado es un polinomio homogéneo de segundo grado en las coordenadas de $\mathbf{x}$. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\,x_1 + b\,x_2 \\ c\,x_1 + d\,x_2 \end{pmatrix} = a\,x_1^2 + (b + c)\,x_1 x_2 + d\,x_2^2.$$

Recíprocamente, cualquier polinomio homogéneo de segundo grado en n variables se puede expresar en la forma $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ donde A es una matriz $n \times n$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Por tanto, una forma cuadrática en $\mathbf{R}^n$ también se puede definir así:

definición formal de forma cuadrática.

DEFINICIÓN 8.2.1

Una forma cuadrática es una función $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definida mediante $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\,\mathbf{x}$ para alguna matriz cuadrada A.

Según esta definición a toda matriz real $n \times n$, A, le corresponde una forma cuadrática en $\mathbf{R}^n$: *la forma cuadrática asociada a A* es la función $q_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definida por:

la forma cuadrática asociada a A

$$q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\,\mathbf{x}.$$

8.2.1 Ejercicio de tarea. Escribir el polinomio homogéneo correspondiente a las formas cuadráticas en $\mathbf{R}^3$ definidas por las matrices:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución: (a) $x_1^2 + x_2^2$, (b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, (c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, (d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, (e) 0.

Propiedades de las formas cuadráticas

Es fácil escribir el polinomio homogéneo de la forma cuadrática definida por una matriz cuadrada, pero si se plantea el problema inverso habrá en general muchas soluciones porque, por ejemplo, una matriz y su traspuesta determinan el mismo polinomio (ver casos (c) y (d) del ejercicio de tarea 8.2.1). Esta es la primera propiedad de las formas cuadráticas: *A una matriz cuadrada y a su traspuesta les corresponde la misma forma cuadrática*. Además, la correspondencia entre matrices y formas cuadráticas es lineal, de forma que se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $q_{A^{\mathrm{T}}} = q_A$. Esto es: para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ se cumple $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbf{x}$.

(b) $q_{\lambda A} = \lambda q_A$. Esto es: para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ se cumple $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} (\lambda A) \mathbf{x} = \lambda (\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbf{x})$.

(c) $q_{A+B} = q_A + q_B$. Esto es: para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ se cumple $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} (A+B) \mathbf{x} = (\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}^{\mathrm{T}} B\, \mathbf{x})$.

Parte simétrica y parte antisimétrica de una matriz

Sea A una matriz cuadrada cualquiera y supongamos que B y C son dos matrices con las siguientes propiedades:

(a) B es una matriz simétrica (es decir $B^{\mathrm{T}} = B$).
(b) C es una matriz antisimétrica (es decir $C^{\mathrm{T}} = -C$).
(c) $A = B + C$.

Entonces, por las propiedades de la matriz traspuesta, $A^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}} = B - C$ y en consecuencia

$$A + A^{\mathrm{T}} = 2B \qquad \text{y} \qquad A - A^{\mathrm{T}} = 2C.$$

De lo anterior se deduce que toda matriz cuadrada admite una descomposición única como suma de una matriz simétrica (llamada la *parte simétrica* de A y denotada A_+) y una matriz antisimétrica (llamada la *parte antisimétrica* de A y denotada A_-):

$$A = A_+ + A_-$$

siendo

$$A_+ = \frac{A + A^{\mathrm{T}}}{2}, \qquad A_- = \frac{A - A^{\mathrm{T}}}{2}.$$

Teniendo en cuenta esta descomposición y las tres propiedades de las formas cuadráticas, se deduce que *la forma cuadrática asociada a cualquier matriz (cuadrada) es la misma que la asociada a la parte simétrica de esa matriz* y por tanto la forma cuadrática definida por una matriz está completamente determinada por la parte simétrica de la matriz. Por otra parte, *la forma cuadrática asociada a cualquier matriz antisimétrica es la forma cuadrática nula*:

(a) $q_{A_+} = q_A$.

(b) $q_{A_-} = 0$.

PROPOSICIÓN 8.2.1

Dos matrices cuadradas definen la misma forma cuadrática si y sólo si ambas tienen la misma parte simétrica.

Clasificación de formas cuadráticas

El prototipo de forma cuadrática es la función "cuadrado de la norma" asociada a un producto interior:

$$q(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

El caso más conocido es el de la norma euclídea definida por el producto escalar de $\mathbf{R}^n$, que es precisamente la forma cuadrática definida por la matriz identidad:

$$q(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} I \mathbf{x}.$$

Debido a esto, parte del interés del estudio de las formas cuadráticas proviene de la cuestión de en qué medida una forma cuadrática puede servir para definir una norma o medida de la longitud de los vectores del espacio en el que está definida.

Por ello, la primera clasificación de las formas cuadráticas se hace pensando hasta qué punto $q(\mathbf{x})$ puede servir para definir (el cuadrado de) una norma de $\mathbf{x}$ y por tanto lo primero que nos preguntamos de una forma cuadrática es si cumple la propiedad:

definida positiva.

$$q(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{para todo} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Una forma cuadrática con esta propiedad se llama una forma cuadrática *definida positiva*.

Hablando estrictamente, las propiedades de ser *positiva* y de ser *definida* son dos propiedades independientes. Se dice que una forma cuadrática $q(\mathbf{x})$ es *definida* si todos los valores de $q(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (son distintos de cero y) tienen el mismo signo. Por el contrario, si para algunos $\mathbf{x}$ es $q(\mathbf{x})$ positivo y para otros es negativo, es decir, si existe algún vector $\mathbf{x}$ tal que $q(\mathbf{x}) > 0$ y existe algún vector $\mathbf{y}$ tal que $q(\mathbf{y}) < 0$ entonces se dice que $q(\mathbf{x})$ es *indefinida*.

forma cuadrática definida

forma cuadrática indefinida

Una "versión débil" de la propiedad de ser definida es que *todos los valores no nulos de $q(\mathbf{x})$ tengan el mismo signo*. Una forma cuadrática que cumple esto se llama una *forma cuadrática semidefinida*. En este caso se admite la posibilidad de que pueda ser $q(\mathbf{x}) = 0$ sin que $\mathbf{x}$ sea el vector cero. Cuando esto ocurre (que q se anula en algún vector no nulo) se dice que la forma cuadrática es *isotrópica*. Así, $q(\mathbf{x})$ es una *forma cuadrática isotrópica* si existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x}) = 0$. En caso contrario ($q(\mathbf{x}) = 0$ sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) q es *no isotrópica*. Entonces, una forma cuadrática es definida positiva si y sólo si es semidefinida positiva y no isotrópica.

forma cuadrática semidefinida

forma cuadrática isotrópica

Una forma cuadrática puede ser isotrópica por dos razones muy diferentes, que se entienden mejor en términos de la matriz de la forma cuadrática. Supongamos que A es la matriz de la forma cuadrática $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, de forma que $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$. Si $q(\mathbf{x}) = 0$ para algún vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, eso puede ser debido a cualquiera de las siguientes dos cosas:

(a) Que sea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (o sea $\mathbf{x} \in \operatorname{Nul} A$, en cuyo caso A es una matriz singular, $\det A = 0$, y q se llama una *forma cuadrática degenerada*). Por ejemplo, $q(x, y) = x^2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $q(0, 1) = 0$.

(b) Que sea $A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pero que los vectores $\mathbf{x}$ y $A\mathbf{x}$ sean ortogonales. Por ejemplo $q(x, y) = x^2 - y^2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $q(1, 1) = 0$.

En general, se llama forma cuadrática degenerada *a toda forma cuadrática cuya matriz asociada sea una matriz singular, es decir, una matriz con determinante igual a cero.*

forma cuadrática degenerada

Ejemplo de clasificación de una forma cuadrática dada

El problema de clasificar una forma cuadrática es trivial si la forma cuadrática está definida mediante un polinomio que no tiene "términos de productos cruzados", es decir, que no tiene términos en los que aparezca el producto de dos variables distintas. Por ejemplo, la forma cuadrática de $\mathbf{R}^3$

$$3x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2$$

no tiene términos cruzados (que en este caso serían los de la forma x_1x_2, x_1x_3 o x_2x_3). Sólo tiene términos que contienen cuadrados de las variables. En estos casos sólo hay que mirar los signos de los coeficientes para saber si es definida positiva o no: *En una forma cuadrática sin "términos de productos cruzados" si todos los coeficientes son positivos la forma cuadrática es definida positiva. Si hay algún coeficiente positivo y alguno negativo es indefinida*. En el ejemplo es indefinida.

Si una forma cuadrática está dada mediante su matriz simétrica, el que no tenga "términos de productos cruzados" es equivalente a que la matriz sea diagonal. En este caso, para clasificarla basta mirar los signos de los elementos de la diagonal.

El problema de la clasificación se complica cuando en la forma cuadrática aparecen términos de productos cruzados (matriz no diagonal), los cuales pueden dificultar la clasificación. Por ejemplo, en las siguientes formas cuadráticas de $\mathbf{R}^3$,

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2, \qquad 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3, \tag{8.1}$$

es difícil decir a simple vista si hay algún vector no nulo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en el que se anulen o en el que tomen un valor negativo. Observando con atención la primera de ellas se puede ver que se puede reescribir en la forma

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_3^2 = y_1^2 + 3y_3^2, \tag{8.2}$$

donde $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$. Entonces resulta claro que la forma cuadrática es semidefinida positiva y que además es isotrópica porque se anula en los vectores de la forma $(x_1, x_1, 0)$. Sin embargo, para la segunda de las (8.1) no resulta tan sencillo decir si es definida o no o si es isotrópica o no.

Clasificación por diagonalización

El principal método para clasificar una forma cuadrática $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ definida por una matriz A consiste en reescribir $q(\mathbf{x})$ como un polinomio de segundo grado *sin términos de productos cruzados* como en (8.2). Esto se conoce como *diagonalización de la forma cuadrática* ya que es equivalente a hallar una matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ y una matriz inversible P tales que $A = PDP^{\mathrm{T}}$. Por supuesto, esto requiere que A sea la matriz simétrica de la forma cuadrática.

Una descomposición de A de este tipo hace que el cambio de variable $\mathbf{y} = P^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ nos permita escribir

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} PDP^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = (P^{\mathrm{T}}\mathbf{x})^{\mathrm{T}} DP^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}} D\mathbf{y} = d_1y_1^2 + \cdots + d_ny_n^2.$$

Por ejemplo, escribir la ecuación (8.2) es equivalente a dar la siguiente descomposición de la matriz que define la forma cuadrática:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es muy importante que la matriz P sea inversible para que el cambio $\mathbf{y} = P^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ se pueda "deshacer": $\mathbf{x} = \left(P^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{y}$. Esto garantizará que las dos formas cuadráticas $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} D\mathbf{y}$ "tomen los mismos valores" porque para cada $\mathbf{x}$ existirá un $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} A\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} D\mathbf{x}$ y para cada $\mathbf{y}$ existirá un $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}D\mathbf{y}$. Al tomar los mismos valores, las dos formas cuadráticas son del mismo tipo.

Hay varias formas de hallar una diagonalización de una forma cuadrática. La más importante en este curso es la diagonalización ortogonal, que veremos a continuación.

Clasificación mediante la diagonalización ortogonal

Dado que toda matriz simétrica admite una diagonalización ortogonal y toda forma cuadrática q está definida por una matriz simétrica, toda forma cuadrática $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$ ($A^{\mathrm{T}} = A$) se puede diagonalizar, $A = PDP^{\mathrm{T}}$, con una P que sea una matriz ortogonal. Supongamos que se ha hallado una diagonalización ortogonal de A, $A = PDP^{\mathrm{T}}$. Entonces el cambio de variable $\mathbf{y} = P^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ nos permite reescribir la forma cuadrática como un polinomio de segundo grado sin términos cruzados:

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\,\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(PDP^{\mathrm{T}})\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{\mathrm{T}}P)D(P^{\mathrm{T}}\mathbf{x}) = (P^{\mathrm{T}}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}D(P^{\mathrm{T}}\mathbf{x}) = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}D\mathbf{y}$$

donde $p(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}D\mathbf{y}$ es una nueva forma cuadrática cuyo polinomio no tiene términos cruzados ya que al estar definida por una matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$,

$$p(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}D\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

Este resultado se conoce como el teorema de los ejes principales:

TEOREMA 8.2.1

Teorema de los ejes principales

Para toda matriz real simétrica A $n \times n$ existe una matriz ortogonal P tal que el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ transforma la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$ en una forma cuadrática diagonal $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}D\mathbf{y}$. Los subespacios unidimensionales de $\mathbf{R}^n$ determinados por las columnas de P se conocen como los ejes principales *de la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$.*

Dado que toda matriz inversible P es la matriz de cambio de base de la base formada por sus columnas a la base canónica y dado que P^{T} es la inversa de P, el vector $\mathbf{y} = P^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ es el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a la base de $\mathbf{R}^n$ formada por las columnas de P.

Así, llegamos a la conclusión de que *la clase a la que pertenece una forma cuadrática está determinada por los signos de los autovalores de la matriz simétrica que la define*. Y, para cualquier matriz simétrica A, tenemos:

(a) Si ningún autovalor de A es negativo/positivo, la forma cuadrática q_A es *semidefinida positiva/negativa*. Si, además, todos son positivos/negativos q_A es *definida positiva/negativa*.
(b) Si algún autovalor de A es positivo y algún otro autovalor de A es negativo, entonces la forma cuadrática q_A es *indefinida*.
(c) Si algún autovalor de A es cero, la forma cuadrática q_A es *degenerada*.

Valores máximo y mínimo de una forma cuadrática en los vectores unitarios

En esta sección estudiaremos el problema de determinar el máximo y el mínimo valor que una forma cuadrática en $\mathbf{R}^n$ alcanza en el conjunto de vectores unitarios de $\mathbf{R}^n$. La idea fundamental en la que se basa la solución de este problema está contenida en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Hallar el máximo y el mínimo valor que la forma cuadrática en $\mathbf{R}^3$ $q(\mathbf{x}) = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2$ alcanza en los vectores unitarios de $\mathbf{R}^3$.

Solución: Si aumentamos los coeficientes de x_2^2 y x_3^2 para hacerlos ambos iguales al coeficiente de x_1^2, que es el mayor de todos ellos, obtendremos una nueva forma cuadrática, $9x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2$ tal que:

1. Todos los valores de la nueva forma cuadrática son claramente iguales o mayores que los correspondientes valores de la original $q(\mathbf{x})$.
2. La nueva forma cuadrática es igual a una constante (en este caso, 9) multiplicada por la forma cuadrática $\|\mathbf{x}\|^2$ y por tanto tiene un valor constante en los vectores unitarios.

En consecuencia, para cualquier vector unitario $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^3$ se verifica $q(\mathbf{x}) \leq 9$, es decir, 9 es una cota superior. Pero está claro que esta cota superior se alcanza en el vector unitario con $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$. Por tanto

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} q(\mathbf{x}) = 9.$$

De forma análoga, se puede llegar a la conclusión $\min_{\|\mathbf{x}\|=1} q(\mathbf{x}) = 3$ considerando la forma cuadrática $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2$ obtenida al disminuir los coeficientes de x_1^2 y x_2^2 para hacerlos ambos iguales al coeficiente de x_3^2, que es el menor de todos ellos.

Como se puede comprender —y quedará claro en lo que sigue— lo importante en la solución anterior no es que 9, 4 y 3 sean coeficientes de la forma cuadrática sino el hecho de que sean los autovalores de la matriz simétrica que la define. Comenzamos observando un hecho evidente:

Si $q(\mathbf{x})$ es una forma cuadrática, su valor en cualquier vector propio unitario de la matriz de $q(\mathbf{x})$ es igual al correspondiente autovalor.

Para ver por qué, sea A la matriz de $q(\mathbf{x})$ y sea $\mathbf{u}$ un vector propio unitario de A con autovalor λ. Entonces $q(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T A\mathbf{u} = \mathbf{u}^T\lambda\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}^T\mathbf{u} = \lambda$ (puesto que $\mathbf{u}$ es unitario y por tanto $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1$).

La consecuencia inmediata de lo que acabamos de ver es que *Todo autovalor de la matriz de $q(\mathbf{x})$ es el valor de $q(\mathbf{x})$ en algún vector unitario.* Esto implica que todo autovalor λ de la matriz de $q(\mathbf{x})$ está comprendido entre los valores mínimo y máximo alcanzados por $q(\mathbf{x})$ en los vectores unitarios:

$$\min_{\|\mathbf{x}\|=1} q(\mathbf{x}) \leq \lambda \leq \max_{\|\mathbf{x}\|=1} q(\mathbf{x}).$$

La siguiente observación crucial es que

El valor de cualquier forma cuadrática en un vector unitario se encuentra comprendido entre el mínimo y el máximo de los autovalores de su matriz: Si $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\lambda_{\text{mín}} \leq q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{\text{máx}}$.

Para demostrarlo podemos suponer que $q(\mathbf{x})$ es una forma cuadrática diagonal (si no lo fuese podríamos hacer un cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ con P ortogonal que la transformase en una forma cuadrática diagonal, la cual tendría el mismo conjunto imagen que q en los vectores unitarios). Así pues, $q(\mathbf{u}) = \lambda_1 u_1^2 + \cdots + \lambda_n u_n^2$ y por un razonamiento análogo al del Ejemplo en la página 10, y teniendo en cuenta que $\mathbf{u}$ es unitario, $u_1^2 + \cdots + u_n^2 = 1$:

$$\lambda_{\text{mín}} = \lambda_{\text{mín}} u_1^2 + \cdots + \lambda_{\text{mín}} u_n^2 \leq q(\mathbf{u}) \leq \lambda_{\text{máx}} u_1^2 + \cdots + \lambda_{\text{máx}} u_n^2 = \lambda_{\text{máx}}.$$

Todo lo anterior demuestra el siguiente teorema:

TEOREMA 8.2.2

Valores máximo y mínimo de una forma cuadrática en los vectores unitarios

Sea A la matriz de una forma cuadrática $q(\mathbf{x})$ en $\mathbf{R}^n$ y sean M y m respectivamente los valores máximo y mínimo que la forma cuadrática $q(\mathbf{x})$ alcanza en el conjunto de vectores unitarios de $\mathbf{R}^n$. Entonces se verifica:

1. *Todo autovalor λ de A se encuentra comprendido entre m y M: $m \leq \lambda \leq M$.*
2. *M y m son respectivamente los autovalores máximo y mínimo de A.*

Otro método de clasificación

Si la matriz (simétrica) A de la forma cuadrática es diagonal o si se conocen sus autovalores, podemos clasificarla sin dificultad. Sin embargo, para clasificarla, no es necesario conocer los autovalores de A; basta con conocer sus signos. Y los signos de los autovalores se pueden deducir de los signos de los menores principales de A porque éstos son iguales que los signos de los menores principales de D. En consecuencia tenemos el siguiente método de clasificación cuya aplicación es excesivamente engorrosa para dimensiones altas, pero que tiene cierta utilidad práctica en el caso de formas cuadráticas de dos o tres variables:

TEOREMA 8.2.3

Clasificación de formas cuadráticas por los signos de los menores principales

Sea A una matriz simétrica, sean $m_1, \ldots, m_n$ los valores de sus menores principales y sea q la forma cuadrática definida por A, $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}$.

(a) Si todos los signos de los $m_1, \ldots, m_n$ son positivos la forma cuadrática q_A es definida positiva.

(b) Si el signo de m_1 es negativo y los demás van alternando (m_2 positivo, m_3 negativo, etc.), la forma cuadrática q_A es definida negativa.

(c) En cualquier otro caso, si todos los m_i son no nulos la forma cuadrática q_A es indefinida.

(d) Si algún m_i es cero, la forma cuadrática q_A es degenerada. Si ninguno es cero, es no degenerada.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1.

Ejercicios de la sección 8.2 Formas cuadráticas

---

1. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1/3 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcula la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. (b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. (c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcula la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{x}$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. (b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. (c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

3. Halla la matriz de las siguientes formas cuadráticas $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ suponiendo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$:

(a) $10x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$

(b) $5x_1^2 + 3x_1x_2$

4. Halla la matriz de las siguientes formas cuadráticas $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ suponiendo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$:

(a) $20x_1^2 + 15x_1x_2 - 10x_2^2$ (b) x_1x_2

5. Halla la matriz de las siguientes formas cuadráticas $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ suponiendo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$:

(a) $8x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

(b) $4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$

6. Halla la matriz de las siguientes formas cuadráticas $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ suponiendo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$:

(a) $5x_1^2 - x_2^2 + 7x_3^2 + 5x_1x_2 - 3x_1x_3$

(b) $x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

7. Realiza un cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ que transforme la forma cuadrática $x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$ en una forma cuadrática en y_1, y_2 sin el producto cruzado y_1y_2. Halla P y la nueva forma cuadrática.

8. Sea A la matriz de la forma cuadrática $9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$ en $\mathbf{R}^3$. Sabiendo que los autovalores de A son 3, 9 y 15, halla una matriz ortogonal P tal que el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ transforme $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ en una forma cuadrática sin términos de productos cruzados. Escribe la nueva forma cuadrática.

Clasifica las formas cuadráticas en $\mathbf{R}^2$ de los ejercicios 9 a 14

9. $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$ **10.** $9x_1^2 - 8x_1x_2 + 3x_2^2$

11. $2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2$ **12.** $-5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$

13. $x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$ **14.** $8x_1^2 + 6x_1x_2$

15. ¿Cuál es el mayor valor posible de la forma cuadrática $5x_1^2 - 3x_2^2$ en un vector unitario de $\mathbf{R}^2$?

16. ¿Cuál es el mayor valor posible de la forma cuadrática $5x_1^2 + 8x_2^2$ en un vector unitario de $\mathbf{R}^2$?

En los ejercicios 17 y 18, las matrices son $n \times n$ y los vectores son de $\mathbf{R}^n$. Indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

17.

(a) La matriz de una forma cuadrática es una matriz simétrica

(b) Una forma cuadrática carece de términos de productos cruzados si y sólo si la matriz de la forma cuadrática es una matriz diagonal.

(c) Para toda matriz A los ejes principales de la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ son vectores propios de A.

(d) Una forma cuadrática definida positiva, Q, satisface $Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$.

(e) Si los autovalores de una matriz simétrica A son todos positivos, entonces la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ es definida positiva.

(f) El máximo valor que alcanza una forma cuadrática definida positiva es el mayor valor propio de la matriz simétrica que la define.

18.

(a) La expresión $\|\mathbf{x}\|^2$ define una forma cuadrática.

(b) Si A es una matriz simétrica y P una matriz ortogonal, entonces el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ transforma $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ en una forma cuadrática sin términos de productos cruzados.

(c) Si A es una matriz simétrica 2×2, entonces el conjunto de vectores $\mathbf{x}$ tales que $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = c$ (para un número c dado) corresponde a una circunferencia o a una elipse o a una hipérbola.

(d) Una forma cuadrática indefinida es o bien semidefinida positiva o semidefinida negativa.

(e) Si A es una matriz simétrica y todos los valores de la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$ son negativos para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces los autovalores de A son todos negativos.

(f) El máximo valor que una forma cuadrática de matriz A alcanza para $\mathbf{x}$ unitario es el mayor de los elementos diagonales de A.

19. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ y sea Q la forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x}$. Sabemos que si λ_1 y λ_2 son los autovalores de A entonces $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ y $\lambda_1\lambda_2 = \det A$. Demuestra lo siguiente:

(a) Si $\det A > 0$ y $a > 0$, entonces Q es definida positiva.

(b) Si $\det A > 0$ y $a < 0$, entonces Q es definida negativa.

(c) Si $\det A < 0$, entonces Q es indefinida.

20. Demostrar que si B es una matriz $m \times n$, entonces $B^{\mathrm{T}}B$ es una matriz semidefinida positiva y si B es $n \times n$ e inversible, entonces $B^{\mathrm{T}}B$ es una matriz definida positiva.

21. Si A es la matriz de una forma cuadrática definida positiva, entonces existe una matriz definida positiva B tal que $A = B^{\mathrm{T}}B$. *Pista:* $A = PDP^{-1}$ con P ortogonal y $D = C^{\mathrm{T}}C$ para alguna C; entonces $B = PCP^{\mathrm{T}}$ lo cumple.

22. Demuestra que si A y B son matrices simétricas del mismo orden, ambas con todos los autovalores positivos entonces los autovalores de $A+B$ son también todos positivos.

23. Demuestra que si A es la matriz de una forma cuadrática definida positiva y A es inversible, entonces la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A^{-1}\mathbf{x}$ también es definida positiva.

En los ejercicios 24 y 25 halla el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ que hace que las igualdades siguientes sean verdaderas.

24. $5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = 9y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2$.

25. $3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 5y_1^2 + 2y_2^2$.

26. ¿Cuánto vale $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$ si $\mathbf{x}$ es un autovector unitario de A con autovalor 3? ¿Y si $\mathbf{x}$ tiene norma 2 en lugar de 1?

27. Si M y m son respectivamente los valores máximo y mínimo que una forma cuadrática de matriz A toma en los vectores unitarios y λ es un autovalor de A, entonces $m \leq \lambda \leq M$. *Pista:* Halla un $\mathbf{x}$ tal que $\lambda = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$.

28. Si M y m son respectivamente los valores máximo y mínimo de una forma cuadrática Q en los vectores unitarios, entonces para cada t con $m \leq t \leq M$ existe un vector unitario $\mathbf{u}$ tal que $Q(\mathbf{u}) = t$.

Pista: M y m son autovalores de Q. Si $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son autovectores unitarios respectivos de M y m, busca una solución que sea una combinación lineal de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$.