Ejercicios de la sección 8.1 Diagonalización ortogonal

(Para hacer en clase: 2, 4, 5, 8, 11, 15, 18, 19, 21, 25, 28.)
(Con solución o indicaciones: 1, 3, 6, 7, 13, 16, 17, 20, 22, 23, 24, 27.)

En los ejercicios 1 a 6, averigua qué matrices son ortogonales y para las que lo sean, calcula la inversa.

▶1. $\begin{pmatrix} 0'6 & 0'8 \\ 0'8 & -0'6 \end{pmatrix}$.

▶2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

▶3. $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

▶4. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

▶5. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$.

▶6. $\begin{pmatrix} 0'5 & 0'5 & -0'5 & -0'5 \\ -0'5 & 0'5 & -0'5 & 0'5 \\ 0'5 & 0'5 & 0'5 & 0'5 \\ -0'5 & 0'5 & 0'5 & -0'5 \end{pmatrix}$.

Halla una diagonalización ortogonal de las matrices de los ejercicios 7 a 10.

▶7. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

▶8. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$

Halla una diagonalización ortogonal de las matrices de los ejercicios 11 a 16, en los que se da el espectro de la matriz.

▶11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp} = \{5, 2, -2\}$.

12. $\begin{pmatrix} -2 & -36 & 0 \\ -36 & -23 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp} = \{25, 3, -50\}$.

▶13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp} = \{7, -2\}$.

14. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp} = \{13, 7, 1\}$.

▶15. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp} = \{9, 5, 1\}$.

▶16. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp} = \{2, 0\}$.

▶17. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Demuestra que $\mathbf{v}$ es un vector propio de A, halla su autovalor y halla una diagonalización ortogonal de A.

▶18. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ y } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A y halla una diagonalización ortogonal de A.

En los ejercicios 19 y 20, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

▶19.

(a) Toda matriz ortogonalmente diagonalizable es necesariamente simétrica.

(b) Si A es una matriz simétrica y los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ satisfacen $A\mathbf{u} = 3\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v} = 4\mathbf{v}$ entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

(c) Toda matriz simétrica $n \times n$ tiene n autovalores reales distintos.

(d) Si $\mathbf{v}$ es un vector no nulo de $\mathbf{R}^n$, la matriz $\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ es una matriz de proyección.

▶20.

(a) Si $B = PDP^{-1}$ donde D es una matriz diagonal y P ortogonal, entonces B es simétrica.

(b) Toda matriz ortogonal admite una diagonalización ortogonal.

(c) La dimensión de cualquier subespacio propio de una matriz real simétrica es igual a la multiplicidad algebraica de su correspondiente autovalor.

▶21. Supongamos que A es una matriz $n \times n$ simétrica y B es una matriz $n \times m$ cualquiera. Demuestra que las matrices $B^{\mathrm{T}}AB$, $B^{\mathrm{T}}B$, BB^{T} son simétricas.

▶22. Demuestra que si A es una matriz $n \times n$ simétrica, entonces $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$ para cualesquiera vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ de $\mathbf{R}^n$.

▶23. Supongamos que A es una matriz inversible y que admite una diagonalización ortogonal. Explica por qué A^{-1} también admite una diagonalización ortogonal.

▶24. Supongamos que A y B admiten diagonalización ortogonal y que $AB = BA$. Explica por qué AB también admite una diagonalización ortogonal.

▶25. Sea $A = PDP^{-1}$ con P ortogonal y D diagonal, y sea λ un autovalor de A con multiplicidad algebraica k, de forma que λ aparece k veces en la diagonal de D. Explica por qué la dimensión del espacio propio de λ es k.

26. Sea $A = PRP^{-1}$ con P ortogonal y R triangular superior. Demuestra que si A es simétrica, entonces R es simétrica y por tanto diagonal.

Versión de 19 de enero de 2023, 14:50h.

▶**27.** Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario de $\mathbf{R}^n$ y sea $B = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$

(a) Demuestra que para cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $B\mathbf{x}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{u}$.

(b) Demuestra que B es una matriz simétrica y que $B^2 = B$.

(c) Demuestra que $\mathbf{u}$ es un vector propio de B. ¿Cuál es su autovalor?

▶**28.** Sea B una matriz $n \times n$ simétrica y tal que $B^2 = B$. Toda matriz que cumpla eso se llama una *matriz de proyección* (o una *matriz de proyección ortogonal*). Dado un vector $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, sean $\hat{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$ y $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$.

(a) Demuestra que $\mathbf{z}$ es ortogonal a $\hat{\mathbf{y}}$.

(b) Sea W el espacio columna de B. Demuestra que $\mathbf{y}$ es la suma de un vector de W y uno de $W^{\perp}$. ¿Por qué esto demuestra que $B\mathbf{y}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre el espacio columna de B?

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 8.1

1. $0'6^2 + 0'8^2 = 1$, luego las columnas son vectores unitarios. Son claramente ortogonales, luego es una matriz ortogonal. La inversa es $\frac{1}{-0'6^2-0'8^2}\begin{pmatrix} -0'6 & -0'8 \\ -0'8 & 0'6 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -0'6 & -0'8 \\ -0'8 & 0'6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'6 & 0'8 \\ 0'8 & -0'6 \end{pmatrix}$, que, como se ve, es igual a la traspuesta (como corresponde a una matriz ortogonal).

3. Las columnas no son vectores unitarios.

6. $0'5^2 + 0'5^2 + 0'5^2 + 0'5^2 = 1$, luego las columnas son vectores unitarios. Son claramente ortogonales, luego es una matriz ortogonal y su inversa es la traspuesta:

$$\begin{pmatrix} 0'5 & -0'5 & 0'5 & -0'5 \\ 0'5 & 0'5 & 0'5 & 0'5 \\ -0'5 & -0'5 & 0'5 & 0'5 \\ -0'5 & 0'5 & 0'5 & -0'5 \end{pmatrix}.$$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$. Hay que ortonormalizar la base del espacio propio del autovalor 7 y normalizar el vector propio del autovalor -2. El resultado es: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & -2/3 \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & -1/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & -2/3 \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & -1/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

16. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

17. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

20. (a) $D = D^{\mathrm{T}}$ por ser diagonal y $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ por ser ortogonal. Luego $B^{\mathrm{T}} = \left(PDP^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}P = B$. (b) Sólo si es simétrica. (c) Es equivalente a decir que toda matriz real simétrica es diagonalizable.

22. $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = (A\mathbf{y})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$.

23. Si $A = QDQ^{\mathrm{T}}$ es una diagonalización ortogonal de A, entonces D es inversible por serlo A, y $A^{-1} = (Q^{\mathrm{T}})^{-1}D^{-1}Q^{-1} = QD^{-1}Q^{\mathrm{T}}$.

24. Todo se reduce a demostrar que el producto de dos matrices simétricas que conmutan es de nuevo una matriz simétrica: $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA = AB$.

27. (a) Para ver que $B\mathbf{x} = \mathrm{proy}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{x}$ basta demostrar que $B\mathbf{x}$ es un múltiplo de $\mathbf{u}$ y que restado de $\mathbf{x}$ da un vector ortogonal a $\mathbf{u}$. Otra forma es así: $\mathrm{proy}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = B\mathbf{x}$. (b) $B^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = B$. $B^2 = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u})\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = B$. (c) $B\mathbf{u} = (\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}})\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}) = \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u}$ el autovalor es 1.