Tema 6

Diagonalización

6.1. Vectores propios, autovalores y polinomio característico

Lección 8, 11 abr 2023

Motivación

Vamos a empezar planteando el problema de calcular una potencia elevada de una matriz cuadrada. Esto puede ser un problema muy sencillo o muy difícil, dependiendo de cómo sea la matriz. Por ejemplo, si la matriz es una matriz identidad, el problema es muy muy sencillo porque cualquiera que sea el exponente de la potencia a calcular, el resultado siempre será la misma matriz identidad. Un caso menos trivial, pero aún bastante sencillo es el caso de una matriz diagonal ya que el producto de matrices diagonales es muy sencillo de calcular:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & 0 & 0 \\ 0 & bq & 0 \\ 0 & 0 & cr \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia de esto es fácil calcular una potencia elevada de una matriz diagonal. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^{75} = \begin{pmatrix} 5^{75} & 0 \\ 0 & 10^{75} \end{pmatrix}.$$

Otra observación importante es que *si ya se conoce* la potencia n-ésima de una matriz A, entonces es un problema sencillo calcular la potencia n-ésima de cualquier matriz *semejante* a A. Recordemos que B es semejante a A si existe una matriz M tal que $B = MAM^{-1}$; en consecuencia la potencia n-ésima de B es igual a un producto de tres matrices. Por ejemplo, si $n = 4$:

$$B^4 = \left(MAM^{-1}\right)^4 = MA\cancel{M^{-1}} \cdot \cancel{M}A\cancel{M^{-1}} \cdot \cancel{M}A\cancel{M^{-1}} \cdot \cancel{M}AM^{-1} = MA^4M^{-1}.$$

y en el caso general:

$$B^n = \left(MAM^{-1}\right)^n = MAM^{-1} \cdot MAM^{-1} \cdots MAM^{-1} = MA^nM^{-1}. \tag{6.1}$$

Supongamos ahora que queremos calcular una potencia elevada de la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{smallmatrix}\right)$, por ejemplo, calcular

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}^{75}.$$

Debido a que el exponente es tan elevado, el número de operaciones necesarias resulta excesivamente grande. Y esto es aún más grave si el tamaño de la matriz fuese mayor.

Versión de 19 de enero de 2023, 20:28h.

Pero supongamos que por alguna razón hemos calculado el producto $\left(\begin{smallmatrix}7&2\\3&8\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2\\-1&3\end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{pmatrix}7&2\\3&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&20\\-5&30\end{pmatrix}.$$

Es fácil darse cuenta de que el resultado de este producto es muy parecido a la matriz que hemos usado, $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\-1&3\end{smallmatrix}\right)$, porque tiene las mismas columnas que ella pero reescaladas. Pero reescalar las columnas de una matriz es multiplicar esa matriz por una matriz diagonal. En este caso

$$\begin{pmatrix}5&20\\-5&30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&10\end{pmatrix}.$$

Así pues, tenemos,

$$\begin{pmatrix}7&2\\3&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&10\end{pmatrix}.$$

Esto implica que nuestra matriz de partida es semejante a una matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix}7&2\\3&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}^{-1}\tag{6.2}$$

(porque la matriz $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\-1&3\end{smallmatrix}\right)$ es claramente inversible). Esto se conoce como una *diagonalización* de la matriz $\left(\begin{smallmatrix}7&2\\3&8\end{smallmatrix}\right)$.

DEFINICIÓN 6.1.1

Diagonalización de una matriz cuadrada; matriz diagonalizable

Diagonalizar una matriz A es hallar una matriz inversible P y una matriz diagonal *D tales que*

$$A=PDP^{-1}.$$

Esto es equivalente a decir que A es diagonalizable *si existe P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.*

Desgraciadamente no toda matriz cuadrada es diagonalizable; ahora bien, si sabemos que $A=PDP^{-1}$ entonces, al igual que en (6.1)

$$A^2=PD\cancel{P^{-1}}\cdot\cancel{P}DP^{-1}=PD^2P^{-1}$$

y análogamente

$$A^3=PD\cancel{P^{-1}}\cdot\cancel{P}D\cancel{P^{-1}}\cdot\cancel{P}DP^{-1}=PD^3P^{-1}$$

y así sucesivamente, de forma que nuestro problema se ha reducido al de calcular un producto de tres matrices:

$$\begin{pmatrix}7&2\\3&8\end{pmatrix}^{75}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&10\end{pmatrix}^{75}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{75}&0\\0&10^{75}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}^{-1}.$$

6.1.1 Ejercicio de tarea. Termina los cálculos de la potencia 75 de la matriz $\left(\begin{smallmatrix}7&2\\3&8\end{smallmatrix}\right)$ y obtén una expresión para cada uno de sus cuatro elementos.

Solución: $\begin{pmatrix}3\times5^{74}+4\times10^{74} & -2\times5^{74}+4\times10^{74}\\ -3\times5^{74}+6\times10^{74} & 2\times5^{74}+6\times10^{74}\end{pmatrix}$.

Cálculo de la diagonalización de una matriz diagonalizable

Para descubrir cómo conseguir hallar una diagonalización $A = PDP^{-1}$ de una matriz dada, vamos a analizar las consecuencias de la existencia de esa diagonalización y vamos a ver que ello nos llevará a descubrir la forma de encontrar esa diagonalización.

Supongamos que A es una matriz $n \times n$. Lo primero que se deduce de una diagonalización $A = PDP^{-1}$ es que al ser inversible la matriz P, las columnas de ésta constituyen una base de $\mathbf{R}^n$. Además, ninguna fila ni columna de P puede ser nula, ya que si alguna lo fuera P no tendría inversa.

En segundo lugar, observamos que la descomposición $A = PDP^{-1}$ implica

$$AP = PD \tag{6.3}$$

y por tanto, si denotamos $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ a las columnas de P y denotamos $d_1, \ldots, d_n$ a los elementos de la diagonal de D, es decir:

$$P = [\mathbf{p}_1 \ \ldots \ \mathbf{p}_n], \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

entonces, por (6.3) la primera columna de AP, $A\mathbf{p}_1$, es igual a la primera columna de PD, que es P por la primera columna de D, la cual es igual a d_1 por la primera columna de la identidad $n \times n$, así que

$$A\mathbf{p}_1 = d_1\mathbf{p}_1.$$

El mismo razonamiento se aplica a cada columna de $AP = PD$ y deducimos que para todo $i = 1, \ldots, n$ se cumple

$$A\mathbf{p}_i = d_i\mathbf{p}_i.$$

Por lo tanto, las columnas de P, $\mathbf{p}_1, \ldots \mathbf{p}_n$, tienen estas dos propiedades fundamentales:

1. $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{0}$,
2. $A\mathbf{p}_i = d_i\mathbf{p}_i$.

Debido a estas propiedades se dice que cada columna de P es un *vector propio* de A, de acuerdo con la siguiente:

DEFINICIÓN 6.1.2

Vector propio o autovector de una matriz; valor propio o autovalor

Se llama vector propio *o* autovector *de una matriz cuadrada $n \times n$, A, a todo vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ tal que:*

1. $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
2. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ *para algún número* λ.

El número λ se llama el valor propio (o autovalor) *de A* correspondiente al vector propio $\mathbf{x}$.

Resulta evidente el siguiente teorema:

TEOREMA 6.1.1

Teorema de diagonalización (significado geométrico de una diagonalización)

Una matriz cuadrada $n \times n$, es diagonalizable si y sólo si existe una base de $\mathbf{R}^n$ formada por vectores propios de esa matriz. Si $A = PDP^{-1}$ es una diagonalización de A y $\mathcal{B}$ es la base de $\mathbf{R}^n$ formada por las columnas de P, entonces P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base canónica y D es la matriz relativa a la base $\mathcal{B}$ de la aplicación lineal cuya matriz canónica es A, $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

De acuerdo con este teorema se puede definir lo que es diagonalizar una matriz cuadrada de la siguiente forma:

DEFINICIÓN 6.1.3

Diagonalizar una matriz cuadrada; matriz diagonalizable

Diagonalizar *una matriz cuadrada A de orden n es hallar una base de $\mathbf{R}^n$ respecto a la cual la matriz de la aplicación lineal $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ sea una matriz diagonal. Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ es dicha base y D es la matriz de T respecto a la base $\mathcal{B}$, entonces*

$$A = P_{\mathcal{B}}\, D\, P_{\mathcal{B}}^{-1}$$

donde $P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \ \ \ldots \ \ \mathbf{b}_n]$ se llama la matriz de diagonalización.

Cálculo de los valores propios o autovalores de una matriz

La clave para calcular los vectores propios de una matriz es hallar primero los autovalores. Por la definición de autovector que tiene autovalor λ, este número tiene la propiedad de que la ecuación $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ tiene solución no trivial. Esto es decir que el sistema homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene alguna variable libre, lo cual es equivalente a decir que su matriz de coeficientes, $A - \lambda I$, tiene determinante igual a cero. Por lo tanto:

Definición de valor propio o *autovalor*.

Un número λ es un autovalor de A si y sólo si la matriz $A - \lambda I$ tiene determinante igual a cero.

El polinomio característico

Si λ es una indeterminada (como la x de un polinomio), al desarrollar el determinante de $A - \lambda I$ se obtiene siempre un polinomio en λ de grado n (el orden de la matriz A). Ese polinomio se llama *el polinomio característico de A*:

Definición de *polinomio característico*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

6.1.2 Ejercicio de tarea. ¿Cuál es el coeficiente del término de grado n en el polinomio característico de una matriz $n \times n$? ¿Y el término de grado 0 (o término independiente)?

Solución: $(-1)^n$, el determinante de la matriz.

Ejemplo 1: Polinomio característico de una matriz 2×2

Si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, el polinomio característico de A es:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$
$$= \boxed{\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)}.$$

La ecuación de grado n obtenida al igualar el polinomio característico de A a cero se llama la ecuación característica de A y por tanto, los autovalores de una matriz son las soluciones de su ecuación característica, es decir, las raices de su polinomio característico.

Observación: Vemos en el ejemplo 1 que el término independiente del polinomio característico de la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ es igual a $ad - bc$, que es el determinante de A. Si se tiene en cuenta que en cualquier polinomio el término independiente es igual al valor que toma el polinomio cuando la indeterminada toma valor cero, se ve claramente esta propiedad general:

En el polinomio característico de cualquier matriz cuadrada A, el término independiente es igual al determinante de A.

Por otra parte, vemos también en el polinomio característico de la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ que el coeficiente del término de grado 1 es la suma de los elementos de la diagonal de A cambiada de signo. Esto obedece a la siguiente propiedad general:

En el polinomio característico de cualquier matriz cuadrada A de orden n, el coeficiente del término de grado $n - 1$ es igual a la suma de los elementos de la diagonal de A cambiada de signo si n es par.

Traza de una matriz.– Se llama *traza* de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de su diagonal: Definición de *traza*

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

En términos de la traza la propiedad anterior se puede enunciar de la siguiente forma:

En el polinomio característico de cualquier matriz cuadrada A de orden n, el coeficiente de grado $n - 1$ es igual a $(-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(A)$.

Propiedades de la traza.– La traza de una matriz cuadrada de orden n tiene las siguientes propiedades que son muy fáciles de demostrar:

1. $\mathrm{Tr}\left(A^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{Tr}(A)$ (La traza de una matriz es igual a la de su traspuesta).
2. $\mathrm{Tr}(I_n) = n$ (La traza de la identidad $n \times n$ es igual a n).
3. Si A es $m \times n$ y B es $n \times m$ entonces $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
   (La traza de un producto no depende del orden de los factores).

Ejemplo 2: Autovalores de una matriz 2×2

Si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, hemos visto que el polinomio característico de A es el polinomio de segundo grado

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

En este caso, la ecuación característica de A es una ecuación de segundo grado:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \tag{6.4}$$

y los autovalores de A son las soluciones de esta ecuación, que después de simplificar se pueden escribir en la forma:

$$\lambda_1 = \frac{a + d}{2} + \sqrt{\left(\frac{a - d}{2}\right)^2 + bc}, \qquad \lambda_2 = \frac{a + d}{2} - \sqrt{\left(\frac{a - d}{2}\right)^2 + bc}.$$

En el caso particular de que A sea simétrica, b es igual a c y el radicando en ambas soluciones es una suma de cuadrados y por tanto no negativo, quedando:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + b^2}.$$

De esto se deduce que: *Toda matriz simétrica* 2×2 *tiene dos autovalores reales, los cuales son distintos a menos que A sea un múltiplo de la identidad.*

Cálculo de los vectores propios de una matriz

De lo dicho anteriormente se deduce que todo autovalor de una matriz es solución de su ecuación característica, pero además también se deduce que

Toda solución λ_i de la ecuación característica de una matriz es un autovalor de esa matriz.

Esto es debido a que $\det(A - \lambda_i I) = 0$ implica que el sistema $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es indeterminado, es decir, tiene alguna solución no nula y toda solución no nula es un vector propio de A con autovalor λ_i.

El espacio propio de un autovalor

Según acabamos de ver, los vectores propios que corresponden a un autovalor λ_i son todas las *soluciones no triviales* del sistema homogéneo

$$(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

es decir, los vectores propios que tienen ese autovalor λ_i son todos los vectores no nulos *del espacio nulo* de la matriz $A - \lambda_i I$. Este espacio nulo se llama *el subespacio propio* del autovalor λ_i.

DEFINICIÓN 6.1.4

Espacio propio

Si λ es un autovalor de una matriz A, se llama espacio propio de la matriz A correspondiente al autovalor λ al espacio nulo de la matriz $A - \lambda I$:

$$E_\lambda = \mathrm{Nul}(A - \lambda I).$$

Cálculo de una diagonalización

De todo lo anterior se deduce el siguiente método para hallar la diagonalización de una matriz A (si existe). Suponemos que A es una matriz $n \times n$, de forma que su ecuación característica es una ecuación de grado n.

1. Resolvemos la ecuación característica de A, hallando el conjunto de todas sus soluciones:

   $$\lambda_1, \ldots, \lambda_p.$$

   Este conjunto, que es el conjunto de todos los autovalores de A, se llama el *espectro* de A y se denota $\mathrm{Sp}(A)$:

   $$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} = \begin{array}{l}\text{conjunto de las distintas soluciones}\\ \text{de la ecuación característica.}\end{array}$$

Definición de subespacio propio.

2. Para cada autovalor λ_i, hallamos una base de su *subespacio propio* lo cual es sencillo porque el subespacio propio es un espacio nulo

$$E_{\lambda_i} = \mathrm{Nul}(A - \lambda_i I).$$

3. Si la unión de todas esas bases es un conjunto de n vectores, entonces este conjunto es una base de $\mathbf{R}^n$. En ese caso A es diagonalizable y la matriz P que la diagonaliza tiene como columnas los n vectores de la unión de todas esas bases.

Como cada vector propio de A tiene un único autovalor, subespacios propios correspondientes a autovalores diferentes tienen intersección cero. En consecuencia: *A es diagonalizable si y sólo si la suma de las dimensiones de sus subespacios propios es n*. Estas dimensiones reciben el nombre de *multiplicidades geométricas* de los correspondientes autovalores, así que tenemos:

Definición de *multiplicidad geométrica* de un autovalor.

DEFINICIÓN 6.1.5

Multiplicidad geométrica de un autovalor

Si λ es un autovalor de una matriz A, se llama multiplicidad geométrica *de λ a la dimensión de su espacio propio. La multiplicidad geométrica de λ se denota m.g.(λ), de forma que esta definición nos dice*

$$m.g.(\lambda) = \dim E_\lambda = \dim \mathrm{Nul}(A - \lambda I).$$

Las multiplicidades geométricas no deben confundirse con las multiplicidades que los autovalores tienen como raíces del polinomio característico, las cuales, en este contexto, se llamarán las multiplicidades algebraicas y se denotarán m.a.(λ_i).

Definición de *multiplicidad algebraica* de un autovalor.

DEFINICIÓN 6.1.6

Multiplicidad algebraica de un autovalor

Si λ es un autovalor de una matriz A, se llama multiplicidad algebraica *de λ a la multiplicidad que λ tiene como raíz del polinomio característico. La multiplicidad algebraica de λ se denota m.a.(λ).*

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1, Ejercicio 2.

Ejercicios de la sección 6.1 Vectores propios y autovalores

---

1. ¿Es 5 un valor propio de $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$?

2. ¿Es $\lambda = 2$ un valor propio de $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$? ¿Por qué sí o por qué no?

3. ¿Es $\lambda = -2$ un valor propio de $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$? ¿Por qué sí o por qué no?

En los ejercicios 4 a 7 se da un vector, $\mathbf{v}$, y una matriz cuadrada, A. Averigua si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A. Si lo es halla su valor propio.

4. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

5. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

7. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

8. ¿Es $\lambda = 4$ un valor propio de $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$? Si lo es, hállale un vector propio.

9. ¿Es $\lambda = 3$ es un valor propio de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$? Si lo es, hállale un vector propio.

En los ejercicios 10 a 17, halla una base para el espacio propio correspondiente a cada valor propio indicado.

10. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1, 5$.

11. $A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$.

12. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $\lambda = 10$.

13. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1, 5$.

14. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1, 2, 3$.

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2$.

16. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$.

17. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$.

Halla los valores propios de las matrices dadas en los ejercicios 18 a 20.

18. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **19.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. Sin hacer cálculos, halla un valor propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Justifica tu respuesta.

22. Sin hacer cálculos, halla un valor propio y dos vectores propios linealmente independientes de $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$. Justifica tu respuesta.

En los ejercicios 23 y 24, A es una matriz $n \times n$. Indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

23.

(a) Si $A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$ para algún vector $\mathbf{x}$, entonces λ es un autovalor de A.

(b) Una matriz A es no inversible (o *singular*) si, y sólo si, 0 es un valor propio de A.

(c) Un número c es un autovalor de A si, y sólo si, la ecuación $(A - cI)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial.

(d) Puede ser difícil encontrar un vector propio de A, pero es fácil comprobar si un vector dado es o no es un vector propio de A.

(e) Para encontrar los valores propios de A, se reduce A a una forma escalonada.

24.

(a) Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún número no nulo λ, entonces $\mathbf{x}$ es un vector propio de A.

(b) Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A linealmente independientes, entonces corresponden a diferentes valores propios.

(c) Todo vector que no cambia cuando se le multiplica por la izquierda una matriz es un vector propio de esa matriz.

(d) Los autovalores de una matriz están en su diagonal principal.

(e) Un espacio propio de A es el espacio nulo de cierta matriz.

25. Explica por qué una matriz 2×2 puede tener, como mucho, dos valores propios distintos. Explica por qué una matriz $n \times n$ puede tener, como mucho, n valores propios distintos.

26. Construye una matriz 2×2 que no tenga dos valores propios distintos.

27. Si $\mathbf{x}$ es un vector propio de A correspondiente a λ, ¿qué es $A^3\mathbf{x}$?

28. Sea λ un valor propio de una matriz inversible A. Demuestra que λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.

Sugerencia: Supón que un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero satisface $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

29. Demuestra que si A^2 es la matriz cero, entonces el único valor propio de A es 0.

30. Demuestra que λ es un valor propio de A si, y sólo si λ es un valor propio de A^T.

Sugerencia: Halla la relación entre $A - \lambda I$, y $A^T - \lambda I$.

31. Utiliza una propiedad de los determinantes para demostrar que A y A^T tienen el mismo polinomio característico.

32. Por el ejercicio anterior, toda matriz cuadrada tiene los mismos autovalores, con las mismas multiplicidades algebraicas, que su traspuesta. Demuestra que también las multiplicidades geométricas de esos autovalores son las mismas.

33. Considera una matriz A de orden $n \times n$ con la propiedad de que todas las sumas de fila son iguales al mismo número s. Demuestra que s es un valor propio de A.

Sugerencia: Intenta primero descubrir un vector propio evidente de A.

34. Considera una matriz A de orden $n \times n$ con la propiedad de que todas las sumas de columna son iguales al mismo número s. Demuestra que s es un valor propio de A.

Sugerencia: Usa los ejercicios 30 y 33.

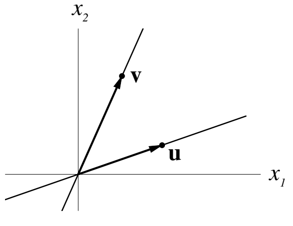
En los ejercicios 35 a 37, sea A la matriz de la transformación lineal T. Sin escribir A, halla un valor propio de A y describe el espacio propio correspondiente.

35. T es una reflexión de $\mathbf{R}^2$ en alguna recta que pasa por el origen.

36. T es un giro de $\mathbf{R}^3$ cuyo eje es alguna recta que pasa por el origen.

37. T es un cizallamiento horizontal de $\mathbf{R}^2$.

38. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ los vectores mostrados en la figura, y supongamos que son vectores propios de una matriz A de orden 2×2 que corresponden a los valores propios 2 y 3, respectivamente. Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la aplicación lineal dada por $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^2$, y sea $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Copia la figura y, sobre el mismo sistema de coordenadas, dibuja cuidadosamente los vectores $T(\mathbf{u})$, $T(\mathbf{v})$ y $T(\mathbf{w})$.



39. Repite el ejercicio 38, suponiendo que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de A que corresponden a los valores propios -1 y 3, respectivamente.

En los ejercicios 40 a 47, halla el polinomio característico y los valores propios de las matrices dadas.

40. $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ **41.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **43.** $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ **45.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ **47.** $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Los ejercicios 48 a 53 requieren las técnicas del cálculo de determinantes. Halla el polinomio característico de cada matriz, calculando el determinante correspondiente por el método que te parezca más adecuado.

Nota: No es fácil hallar el polinomio característico de una matriz 3×3 usando sólo operaciones elementales de filas y/o columnas, porque interviene el parámetro indeterminado λ.

48. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ **49.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **51.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

52. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ **53.** $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

Para cada una de las matrices de los ejercicios 54 a 56 halla sus valores propios, repetidos de acuerdo con sus multiplicidades.

54. $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **55.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

56. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 9 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

57. En la siguente matriz A halla el valor de h que hace que el espacio propio para el autovalor $\lambda = 5$ sea bidimensional:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

58. Sea A una matriz $n \times n$ y supongamos que A tiene n valores propios reales, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, repetidos de acuerdo con sus multiplicidades, de manera que

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Explica por qué $\det A$ es el producto de los n valores propios de A.

Observación: Este resultado es válido para cualquier matriz cuadrada cuando se consideren todas las raíces del polinomio característico, tanto reales como complejas.

En el siguiente ejercicio A es una matriz $n \times n$. Indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

59.

(a) La multiplicidad de una raíz r de la ecuación característica de A es la multiplicidad algebraica de r como valor propio de A.

(b) Si $\lambda + 5$ es un factor del polinomio característico de A, entonces 5 es un valor propio de A.

(c) Una operación de reemplazo de filas en A no cambia los valores propios.

6.2. Matrices diagonalizables y teorema de Cayley-Hamilton

Caracterización de matrices diagonalizables

Propiedad: *Todo conjunto de autovectores de una matriz que correspondan a autovalores diferentes es un conjunto libre.*

Demostración: Supongamos que nos dan un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ de autovectores de una matriz A y que ese conjunto no es libre. Sea $\mathbf{v}_{i+1}$ el primer vector que es combinación lineal de los anteriores (lo que implica que los anteriores, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i$, forman un conjunto libre). Entonces:

$$\mathbf{v}_{i+1} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_i\mathbf{v}_i \qquad \text{(no todos los } c \text{ son cero)}, \tag{6.5}$$

siendo los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i$ linealmente independientes. Entonces, multiplicando A por los dos miembros de esta ecuación obtenemos:

$$\lambda_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} = c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_i\lambda_i\mathbf{v}_i,$$

y restando a esta ecuación la (6.5) multiplicada por por λ_{i+1},

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_1 - \lambda_{i+1})\mathbf{v}_1 + \cdots + c_i(\lambda_i - \lambda_{i+1})\mathbf{v}_i.$$

Como los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i$ son independientes, todos los coeficientes de esta combinación lineal son cero y como algún c_j es distinto de cero, el correspondiente $(\lambda_j - \lambda_{i+1})$ es cero. Esto demuestra que *si un conjunto de autovectores de una matriz no es libre entonces sus autovalores no son todos diferentes*.

Propiedad: *Para cualquier matriz cuadrada A, si B es una matriz inversible del mismo orden entonces AB y BA tienen el mismo polinomio característico (y por tanto los mismos autovalores con las mismas multiplicidades algebraicas).*

Demostración:

$$\begin{aligned} p_{AB}(\lambda) &= \det(AB - \lambda I) = \det(AB - \lambda B^{-1}B) = \det\big((A - \lambda B^{-1})B\big) = \det\big(B(A - \lambda B^{-1})\big) \\ &= \det(BA - \lambda BB^{-1}) = \det(BA - \lambda I) = p_{BA}(\lambda). \end{aligned}$$

Corolario: *Para cualquier matriz cuadrada A, si Q es una matriz inversible entonces A y $Q^{-1}AQ$ tienen el mismo polinomio característico (y por tanto los mismos autovalores con las mismas multiplicidades algebraicas).*

Demostración: Por la propiedad anterior las matrices $(Q^{-1}A)Q$ y $Q(Q^{-1}A)$ tienen el mismo polinomio característico.

Propiedad: *Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbf{R}^n$ tal que los primeros k vectores son autovectores de A con el mismo autovalor c y Q es la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ entonces la matriz $Q^{-1}AQ$ es, por bloques, de la forma:*

$$Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{c|c} cI_k & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

y su polinomio característico es de la forma

$$p(\lambda) = (c-\lambda)^k \det(B - \lambda I).$$

Según esto, el polinomio característico de $Q^{-1}AQ$ tiene una raíz igual a c con multiplicidad al menos igual a k. Pero, según la propiedad anterior, la matriz A tiene el mismo polinomio característico que $Q^{-1}AQ$, por lo tanto llegamos a la siguiente conclusión:

COROLARIO 6.2.1

La multiplicidad geométrica no supera a la algebraica

La multiplicidad algebraica de un autovalor es al menos tan grande como su multiplicidad geométrica y por tanto la multiplicidad geométrica está comprendida entre 1 y la multiplicidad algebraica.

$$1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda).$$

COROLARIO 6.2.2

Caracterización de matrices diagonalizables

Una matriz es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad geométrica de cada autovalor coincide con su multiplicidad algebraica.

Tenemos además estos otros corolarios que se deducen del primero de esos dos Corolarios:

(1) *Para todo autovalor con multiplicidad algebraica 1 ésta coincide con la multiplicidad geométrica.*

(2) *Toda matriz $n \times n$ con n autovalores distintos es diagonalizable.*

(Ya que cada uno de los n autovalores tiene multiplicidad algebraica igual a 1 y por tanto multiplicidad geométrica igual a la algebraica.)

Propiedades de los autovalores

Autovalor cero: *El escalar cero es un autovalor de una matriz A si y sólo si el determinante de A es cero. Por tanto, A es inversible si y sólo si ningún autovalor de A es cero.*

Potencias de autovalores: *Si λ es un autovalor de A y p es un entero positivo, λ^p es un autovalor de A^p y todo autovector de A es un autovector de A^p:*

Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ entonces $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda\lambda\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$; $A^3\mathbf{x} = A(A^2\mathbf{x}) = A(\lambda^2\mathbf{x}) = \lambda^2 A\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}$; y, en general, $A^p\mathbf{x} = \lambda^p\mathbf{x}$.

Si A tiene inversa, esta propiedad se cumple también en el caso de que p sea un entero negativo. En ese caso, los autovalores de A^{-1} son los inversos de los autovalores de A.

Matrices triangulares: *Los autovalores de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.*

Propiedad del producto de autovalores: *El producto de los autovalores de A (incluidas las repeticiones) es igual al determinante de A.*

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A.$$

Esto es debido a que, por un lado, el término independiente de un polinomio cualquiera de grado n con coeficiente principal igual a 1 es igual a $(-1)^n$ multiplicado por el producto de sus n raíces:

$$p(x) = x^n + (\text{términos de grado entre 1 y } n-1) + a_0 = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$$
$$\text{luego} \quad a_0 = (-\lambda_1)\cdots(-\lambda_n) = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n,$$

mientras que, por otro lado, el polinomio característico de una matriz $n \times n$ tiene coeficiente principal igual a $(-1)^n$ y término independiente igual al determinante de la matriz, luego

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Este razonamiento general demuestra la propiedad del producto de los autovalores para todas las matrices. Sin embargo, si sólo estuviéramos interesados en demostrar esta propiedad en el caso especial de que la matriz A sea diagonalizable, se podría dar un razonamiento muy sencillo que demuestra esa propiedad para las matrices diagonalizables: Si $A = PDP^{-1}$ entonces

$$\det A = \det(PDP^{-1}) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(D)\frac{1}{\det(P)} = \det(D)$$

y en el caso, más especial todavía, de una matriz triangular, la demostración es lo más sencilla posible ya que en ese caso el determinante de la matriz es el producto de los elementos de la diagonal, y esos elementos de la diagonal son justamente los autovalores.

Propiedad de la suma de autovalores: *La suma de los autovalores de A (incluidas las repeticiones) es igual a la traza de A.*

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{Tr} A.$$

En el caso particular de una matriz triangular, la demostración de esta propiedad es trivial ya que en ese caso los elementos de la diagonal son justamente los autovalores y su suma es la traza de la matriz.

En el caso general, la propiedad de la suma de los autovalores se debe a que, por un lado, el coeficiente del término de grado $n-1$ de un polinomio mónico cualquiera de grado n, es igual a menos la suma de sus raíces:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n) \\ &= x^n + x^{n-1}(-\lambda_1) + \cdots + x^{n-1}(-\lambda_n) + (\text{términos de grado menor que } n-1) \\ &= x^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x^{n-1} + (\text{términos de grado menor que } n-1), \end{aligned}$$

mientras que, por otro lado, el polinomio característico de una matriz $n \times n$ tiene coeficiente principal igual a $(-1)^n$ y coeficiente del término de grado $n-1$ igual a $(-1)^{n-1}$ multiplicado por la traza de la matriz.

Para el caso especial de que la matriz A sea diagonalizable, se puede dar una demostración sencilla de la propieda de la suma de los autovalores. Esa demostración es consecuencia de la propiedad fundamental de la traza, que es la siguiente:

Propiedad fundamental de la traza: *Para cualesquiera matrices A y B tales que A se puede multiplicar por B y B se puede multiplicar por A (esto es, tales que cada una es del tamaño de la traspuesta de la otra) entonces ambos productos AB y BA son matrices cuadradas y tienen la misma traza:*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Como consecuencia de esta propiedad se deduce la propiedad de la suma de autovalores para todas las matrices diagonalizables de la siguiente forma:

Tomemos una diagonalización de A: $A = PDP^{-1}$, entonces

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PDP^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PD) = \mathrm{Tr}(D) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

Autovalores de AB y de BA: *Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times m$ entonces AB y BA tienen los mismos autovalores no nulos.*

Esto se debe a que si λ es un autovalor de AB y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ es un autovector de λ, de la igualdad $AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ se deduce que $B\mathbf{x}$ sólo puede ser cero si $\lambda = 0$ (ya que en caso contrario $AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ no podría ser cero por ser $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y por tanto $B\mathbf{x}$ tampoco podría ser cero). En conclusión, si λ es un autovalor no nulo de AB con autovector $\mathbf{x}$ entonces $B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y deducimos que λ es un autovalor de BA con autovector $B\mathbf{x}$ ya que: $BA(B\mathbf{x}) = B(AB\mathbf{x}) = B(\lambda\mathbf{x}) = \lambda B\mathbf{x}$.

Autovalores de una matriz partida en $k \times k$ bloques y triangular por bloques: Supongamos que A es una matriz $n \times n$ partida en $k \times k$ bloques (no necesariamente del mismo tamaño) y tal que los bloques de la diagonal, A_{ii} para $i = 1, \ldots k$, son cuadrados de tamaño $p_i \times p_i$ y los bloques debajo de la diagonal son todos matrices nulas,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & A_{kk} \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz característica de A, $A - \lambda I$ tiene la misma propiedad, por lo que su determinante es el producto de los determinantes de las matrices características de los bloques de la diagonal:

$$\det(A - \lambda I_n) = \det(A_{11} - \lambda I_{p_1}) \cdots \det(A_{kk} - \lambda I_{p_k}).$$

En otras palabras: *El polinomio característico de A es el producto de los polinomios característicos de las matrices diagonales A_{ii}.* De esto se deduce que el espectro de A es la unión de los espectros de las A_{ii} y que la multiplicidad algebraica de un autovalor cualquiera de A es la suma de sus multiplicidades como autovalor de cada una de las matrices A_{ii}.

Valor de un polinomio en una matriz y el teorema de Cayley-Hamilton

Esta sección está dedicada a enunciar un importante teorema cuya demostración está más allá del alcance de este curso, pero que ha recibido enorme atención por parte de los matemáticos, en parte por las numerosas "demostraciones" falsas o incompletas que se le han dado.

Antes de enunciar el teorema necesitamos aclarar en qué sentido se puede "evaluar" un polinomio en una matriz cuadrada.

Valor de un polinomio en una matriz

Dada una matriz cuadrada cualquiera, A es evidente que se pueden calcular todas sus potencias de exponente entero positivo:

$$A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad \text{y en general} \quad A^n = AA^{n-1}.$$

Todas las potencias de una matriz $n \times n$ son matrices $n \times n$ y lo mismo ocurre al multiplicar cualquiera de esas potencias por un número. En consecuencia, los múltiplos de esas potencias de una matriz A se pueden sumar entre sí y, además, se pueden sumar a cualquier escalar c si sustitiumos ese escalar por la correspondiente *matriz numérica* cI_n. El resultado de todo esto es que dado cualquier polinomio en una incógnita,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

y una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$, podemos evaluar la matriz

$$a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

definición de valor de un polinomio en una matriz

y el resultado es otra matriz $n \times n$. Ese resultado es, por definición de valor de un polinomio en una matriz, *el valor del polinomio $p(x)$ en la matriz A* y se escribe:

$$p(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

Autovalores de la matriz obtenida como valor de un polinomio en una matriz

De la misma forma que para cualquier matriz cuadrada A si λ es un autovalor de A entonces λ^q es un autovalor de A^q con el mismo autovector, también se verifica que cualquiera que sea el polinomio $p(x)$, $p(\lambda)$ es un autovalor de la matriz $p(A)$ con el mismo autovector.

Para comprobarlo simplemente elijamos un autovector de A con autovalor λ: $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ y tratemos de calcular $p(A)\mathbf{x}$. Si

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^q$$

entonces

$$\begin{aligned} p(A)\mathbf{x} &= (a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^q)\mathbf{x} = a_0I_n\mathbf{x} + a_1A\mathbf{x} + a_2A^2\mathbf{x} + \cdots + a_nA^q\mathbf{x} \\ &= a_0\mathbf{x} + a_1\lambda\mathbf{x} + a_2\lambda^2\mathbf{x} + \cdots + a_n\lambda^q\mathbf{x} = (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^q)\mathbf{x} \\ &= p(\lambda)\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Cuestión. ¿Puede tener la matriz $B = p(A)$ algún autovalor que no sea de la forma $p(\lambda)$ para algún autovalor λ de A?

Cuestión. Si $p_A(x)$ es el polinomio característico de A, ¿Se puede afirmar que todos los autovalores de la matriz $B = p_A(A)$ son iguales a cero?

El teorema de Cayley-Hamilton

Polinomio anulador de una matriz cuadrada.

Se dice que un polinomio $p(x)$ *anula* a una matriz $n \times n$, A o que $p(x)$ es un *polinomio anulador* de A (o que $p(x)$ se anula en A) si el valor de $p(x)$ en A es la matriz nula $n \times n$:

$$p(x) \text{ se anula } A \text{ si} \quad p(A) = \mathbf{0}$$

El teorema de Cayley-Hamilton afirma que el polonomio característico de cualquier matriz cuadrada A es un polinomio anulador de A:

TEOREMA 6.2.1

Teorema de Cayley-Hamilton

Si $p_A(x)$ es el polinomio característico de A, entonces

$$p_A(A) = \mathbf{0}.$$

Dado que el polinomio característico de A es igual al producto $p_A(x) = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x)$ donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de A (incluidas las repeticiones dadas por las multiplicidades algebraicas), otra forma de enunciar el teorema de Cayley-Hamilton es decir que el producto de las matrices características de A (incluidas las repeticiones) es la matriz cero:

$$(A - \lambda_1 I)\cdots(A - \lambda_n I) = \mathbf{0}.$$

(es fácil comprobar que este producto de matrices no depende del orden en que se multipliquen).

Ejemplo

Para comprender el alcance del teorema de Cayley-Hamilton vamos a ver lo que significa en el caso particular de una matriz cuadrada de orden 2. Sabemos que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, el polinomio característico de A es:

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

Por tanto, lo que afirma el teorema de Cayley-Hamilton en el caso $n = 2$ es que para cualesquiera números a, b, c, d se verifica:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}.$$

Esto significa que el cuadrado de cualquier matriz 2×2 es igual a una combinación lineal de esa matriz y la identidad.

En general, si A es una matriz cuadrada de orden n entonces A^n es una combinación lineal de las potencias de A con exponente menor que n. Esto tiene como consecuencia el siguiente corolario del teorema de Cayley-Hamilton: *Si A es una matriz cuadrada de orden n entonces toda potencia de A es una combinación lineal de las potencias $A^0 = I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$.*

Ejercicios de la sección 6.2 Matrices diagonalizables

En los ejercicios 1 y 2, calcula A^4 siendo $A = PDP^{-1}$

1. $P = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

3. Calcula A^8, siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Sean $A = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comprueba que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A y utiliza esta información para diagonalizar A.

5. Sea A una matriz 4×4 cuyos distintos valores propios son 5, 3 y -2, y supongamos que el espacio propio para el autovalor 3 es bidimensional. ¿Se tiene suficiente información como para determinar si A es diagonalizable?

En los ejercicios 6 y 7, utiliza la factorización $A = PDP^{-1}$ dada para hallar una fórmula para cada elemento de A^k, donde k representa un entero positivo arbitrario.

6. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 3(a-b) & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 8 y 9, la matriz A está factorizada en la forma PDP^{-1}. Usa el teorema de diagonalización para encontrar los valores propios de A y una base para cada espacio propio.

8. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

9. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliza las matrices de los ejercicios 10 a 23. Los valores propios para los ejercicios 14 a 19 son los siguientes: (14) $\lambda = 1, 2, 3$; (15) $\lambda = 2, 8$; (16) $\lambda = 5, 1$; (17) $\lambda = 5, 4$; (18) $\lambda = 3, 1$; (19) $\lambda = 2, 1$. Para el ejercicio 20, un valor propio es $\lambda = 5$ y un vector propio es $(-2, 1, 2)$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 24 y 25, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

Sugerencia: Estudia con cuidado el teorema de diagonalización y el que nos da una condición suficiente para que una matriz sea diagonalizable antes de intentar responder a estos ejercicios.

24.

(a) A es diagonalizable si $A = PDP^{-1}$ para alguna matriz D y alguna matriz inversible P.

(b) Si A es $n \times n$ y $\mathbf{R}^n$ tiene una base de vectores propios de A, entonces A es diagonalizable.

(c) Si A es una matriz $n \times n$, entonces A es diagonalizable si, y sólo si, tiene n valores propios, contando las multiplicidades.

(d) Si A es diagonalizable, entonces es inversible.

25.

(a) Si A es una matriz $n \times n$, entonces A es diagonalizable si tiene n vectores propios.

(b) Si A es una matriz $n \times n$ y es diagonalizable, entonces tiene n autovalores distintos.

(c) Si $AP = PD$, con D una matriz diagonal, entonces las columnas no nulas de P son vectores propios de A.

(d) Si A es inversible, entonces es diagonalizable.

26. Supongamos que A es una matriz 5×5 que tiene dos valores propios (distintos). Además, el espacio propio de un autovalor es tridimensional y el del otro bidimensional. ¿Es A diagonalizable? ¿Por qué?

27. A es una matriz 3×3 con dos valores propios. Cada espacio propio es unidimensional. ¿Es A diagonalizable? ¿Por qué?

28. A es una matriz 4×4 con tres valores propios. Un espacio propio es unidimensional y uno de los otros espacios propios es bidimensional. ¿Es posible que A no sea diagonalizable? Justifica tu respuesta.

29. A es una matriz 7×7 con tres valores propios. Un espacio propio es bidimensional y uno de los otros espacios propios es tridimensional. ¿Es posible que A no sea diagonalizable? Justifica tu respuesta.

30. Demuestra que si A es tanto diagonalizable como inversible, entonces también lo es A^{-1}.

31. Demuestra que si A es una matriz $n \times n$ que tiene n vectores propios linealmente independientes, también los tiene su traspuesta, A^T.

Sugerencia: Usa el teorema de diagonalización (teorema 6.1.1).

32. Construye una matriz 2×2 que sea inversible pero que no sea diagonalizable.

33. Construye una matriz 2×2 no diagonal que sea diagonalizable pero no inversible.

Para cada una de las matrices dada en los ejercicios 34 a 36 haz lo siguiente:

(a) Usa una calculadora para comprobar que los valores propios son los siguientes:

ejercicio	— a u t o v a l o r e s —				
34.		−2	−2	1	5
35.		−4	−4	1	24
36.	1	1	3	5	5

(b) Determina una base para el espacio propio de cada autovalor.

(c) Diagonaliza la matriz.

34. $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. **35.** $\begin{pmatrix} 0 & 13 & 8 & 4 \\ 4 & 9 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

36. $\begin{pmatrix} 11 & -6 & 4 & -10 & -4 \\ -3 & 5 & -2 & 4 & 1 \\ -8 & 12 & -3 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & -2 & 3 & -1 \\ 8 & -18 & 8 & -14 & -1 \end{pmatrix}$.

37. Usa el teorema de Cayley-Hamilton para demostrar que si A es una matriz $n \times n$ inversible entonces la matriz identidad I_n se puede expresar como una combinación lineal de las potencias $A, A^2, \ldots, A^n$ de A. Explica por qué de eso se deduce que la inversa de A se puede expresar como combinación lineal de $A, A^2, \ldots, A^{n-1}$. Describe los coeficientes de esta combinación lineal en términos de los coeficientes del polinomio característico de A.

38. Usa el ejercicio 37 para calcular la inversa de la matriz del ejercicio 34.

39. Usa el ejercicio 37 para calcular la inversa de la matriz del ejercicio 15.