

Matrices

3.1. Álgebra de matrices

Lección 4,
9 mar 2021

Suma, resta y multiplicación por escalares

Las matrices *de un mismo tamaño* se pueden sumar entre sí. Esta operación de sumar se puede definir de dos formas ligeramente distintas aunque equivalentes: La primera forma de calcular la suma de dos matrices es operando elemento a elemento. Por ejemplo, consideremos las siguientes dos matrices del mismo tamaño (2×3):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

operar elemento a elemento es poner:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+7 & 2-1 & 3+0 \\ 4-4 & 5+1 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

La segunda forma de calcular la suma de dos matrices es operando columna a columna. En el caso anterior, operar columna a columna es considerar las columnas de $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ y $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3]$, es decir:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

y sumar la primera columna de A con la primera de B , etc.:

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

y entonces

$$A + B = [\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3] = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Evidentemente el resultado es el mismo que operando elemento a elemento. También se podría definir la suma de matrices operando fila a fila, pero esto no aportaría nada nuevo.

¿Qué ventaja hay en definir la suma de matrices de una forma u otra? La ventaja de operar elemento a elemento es la sencillez del procedimiento a la hora de calcular una suma a mano como en el ejemplo anterior. Por otra parte, la ventaja de *pensar* en la suma columna a columna es que permite hacer demostraciones más sencillas de las propiedades de matrices.

Igual que ocurre con la suma de matrices, la multiplicación de números por matrices se puede definir elemento a elemento o por columnas. Por ejemplo, si queremos multiplicar por 3 la matriz B anterior, podemos poner:

$$3B = \begin{pmatrix} 3 \times 7 & 3 \times (-1) & 3 \times 0 \\ 3 \times (-4) & 3 \times 1 & 3 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -3 & 0 \\ -12 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

o podemos multiplicar por 3 cada columna de B :

$$3\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 21 \\ -12 \end{pmatrix}, 3\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, 3\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad y \quad 3B = [3\mathbf{b}_1 \quad 3\mathbf{b}_2 \quad 3\mathbf{b}_3] = \begin{pmatrix} 21 & -3 & 0 \\ -12 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Usando cualquiera de esas definiciones de suma y multiplicación por números no tiene ninguna dificultad el demostrar que estas operaciones de las matrices de un tamaño fijo $m \times n$ cumplen los axiomas de espacio vectorial donde la *matriz cero* $m \times n$, denotada $\mathbf{0}$, es aquella todos cuyos elementos son cero y la matriz opuesta, $-A$, de una matriz A es aquella cuyos elementos son los opuestos de los de A :

(a) Propiedades de la suma de matrices $m \times n$ ("Grupo conmutativo"):

1. Propiedad *asociativa* de la suma: $A + (B + C) = (A + B) + C$.
2. Matriz cero: $\mathbf{0} + A = A + \mathbf{0} = A$.
3. Opuesta de una matriz: $-A + A = A + (-A) = \mathbf{0}$.
(abreviación: en lugar de $A + (-B)$ se suele escribir por brevedad $A - B$).
4. Propiedad *conmutativa* de la suma: $B + A = A + B$.

(b) Propiedades distributivas de la multiplicación de matrices $m \times n$ por números:

1. Propiedad *distributiva* para la suma de matrices: $x(A + B) = xA + xB$.
2. Propiedad *distributiva* para la suma de números: $(x + y)A = xA + yA$.

(c) "Acción de los escalares" sobre las matrices $m \times n$:

1. Propiedad *asociativa* del producto de números por matrices: $x(yA) = (xy)A$.
2. Ley de *identidad*: $1A = A$.
(El número 1 es neutro para la multiplicación de números por matrices.)

Además, se deben tener presentes las siguiente propiedades, las cuales se pueden deducir de las anteriores, aunque también se pueden demostrar directamente a partir de la definición del producto de un número por una matriz:

1. Toda matriz $m \times n$ multiplicada por el número cero da la matriz cero $m \times n$: $0A = \mathbf{0}$.
2. Todo múltiplo de la matriz cero $m \times n$ es la matriz cero $m \times n$: $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
3. Multiplicar una matriz por -1 da la matriz opuesta: $(-1)A = -A$.

Producto de matrices

Si multiplicamos una matriz A por un vector \mathbf{x} el resultado es el vector $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ que es la imagen de \mathbf{x} por la aplicación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Supongamos ahora que tenemos otra matriz, B , que se puede multiplicar por \mathbf{b} y que calculamos el vector $B\mathbf{b} = B(A\mathbf{x})$. Problema: ¿Qué matriz hay que multiplicar por \mathbf{x} para obtener directamente el vector $B(A\mathbf{x})$? En otras palabras: ¿Cuál es la matriz canónica de la aplicación lineal compuesta $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \mapsto B(A\mathbf{x})$?

Para contestar a esto basta recordar que el producto $A\mathbf{x}$ es la combinación lineal de las columnas de A que tiene por coeficientes los elementos de \mathbf{x} ($A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$) y que

la operación de producto de una matriz por un vector es una aplicación lineal, por lo que el producto $B(x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n)$ es igual a una combinación lineal de los vectores $B\mathbf{a}_1, \dots, B\mathbf{a}_n$

$$B(A\mathbf{x}) = B(x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n) = x_1 B\mathbf{a}_1 + \dots + x_n B\mathbf{a}_n.$$

Por otra parte, toda combinación lineal puede escribirse como un producto matriz por vector; en este caso el producto de la matriz $C = [B\mathbf{a}_1 \ B\mathbf{a}_2 \ \dots \ B\mathbf{a}_n]$ por el vector \mathbf{x} ,

$$B(A\mathbf{x}) = [B\mathbf{a}_1 \ B\mathbf{a}_2 \ \dots \ B\mathbf{a}_n] \mathbf{x} = C\mathbf{x}.$$

En consecuencia, la matriz de la aplicación compuesta $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \mapsto B(A\mathbf{x})$ es la matriz C que tiene por columnas los productos de B por las columnas de A :

$$C = [B\mathbf{a}_1 \ B\mathbf{a}_2 \ \dots \ B\mathbf{a}_n].$$

Esta matriz es, por definición, el producto de B por A .

Definición del producto de matrices.

DEFINICIÓN 3.1.1

Definición del producto de matrices

El producto de una matriz A por una matriz $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$ es la matriz, denotada AB , cuyas columnas son el resultado de multiplicar A por cada columna de B . Es decir: cada columna del producto AB es el producto de A por la correspondiente columna de B :

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ \dots \ A\mathbf{b}_n] \quad \text{o sea:} \quad \text{col}_j(AB) = A \cdot \text{col}_j(B). \quad (3.1)$$

Según esta definición, cada columna del producto AB , al ser un producto matriz por vector, $A\mathbf{b}_i$, es, a su vez, una combinación lineal de las columnas de A usando como coeficientes los elementos de la correspondiente columna de B .

La propiedad característica del producto así definido es que para cualquier vector \mathbf{x} que tenga tantos elementos como columnas tiene B , se cumple

propiedad característica del producto

$$(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}).$$

Dicho de otra forma: La propiedad característica del producto de matrices es la siguiente: El producto de dos matrices es la matriz de la composición de las aplicaciones lineales definidas por las matrices dadas: AB es la matriz de la aplicación compuesta $T_A \circ T_B$. O también:

$$T_{AB} = T_A \circ T_B \quad \mathbf{R}^n \xrightarrow{T_B} \mathbf{R}^m \xrightarrow{T_A} \mathbf{R}^p.$$

T_{AB}

La regla “fila por columna”: Suponiendo que las columnas de B son $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$ y que para calcular AB calculamos cada uno de los productos $A\mathbf{b}_j$ por la regla “fila \times columna”, llegamos a la conclusión de que cada fila del producto AB es igual a la correspondiente fila de A multiplicada por B :

$$\text{fila}_i(AB) = \text{fila}_i(A) \cdot B \quad (3.2)$$

3.1.1 Ejercicio de tarea. Usa las ecuaciones (3.1) y (3.2) como corresponda para calcular la columna 2 y la fila 3 del producto AB y lo mismo para el producto BA , donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\dim(\mathbf{R}^n) = \begin{pmatrix} 3 \times 3 \\ 3 \times 3 \\ 3 \times 3 \end{pmatrix}, \quad \dim(\mathbf{R}^m) = \begin{pmatrix} 1 \times 3 \\ 1 \times 3 \\ 1 \times 3 \end{pmatrix}, \quad \dim(\mathbf{R}^p) = \begin{pmatrix} 2 \times 3 \\ 2 \times 3 \\ 2 \times 3 \end{pmatrix}, \quad \dim(\mathbf{R}^q) = \begin{pmatrix} 2 \times 1 \\ 2 \times 1 \\ 2 \times 1 \end{pmatrix}.$$

Propiedades del producto de matrices

Se llama *matriz escalar* a toda matriz que sea un múltiplo escalar de una matriz identidad (o sea, que sea de la forma λI_k para algún número λ). Las matrices escalares son matrices diagonales con diagonal constante. Por ejemplo si tomamos $\lambda = 5$ y $k = 3$, la correspondiente matriz escalar es:

$$5I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

A continuación se presenta la lista de las propiedades de la multiplicación de matrices. Aquí λ es un número cualquiera e I_k denota la matriz identidad $k \times k$.

Propiedades:

1. $A(BC) = (AB)C$ (propiedad asociativa).
2. $A(B + C) = AB + AC$ (propiedad distributiva por la izquierda).
3. $(B + C)A = BA + CA$ (propiedad distributiva por la derecha).

En las propiedades (4) y (5) se supone que A tiene m filas y n columnas.

4. $I_m A = A = A I_n$.

(Las matrices identidad son neutros por la derecha y por la izquierda.)

5. $(\lambda I_m)A = \lambda A = A(\lambda I_n)$.

(Multiplicar una matriz a derecha o izquierda por una matriz escalar tiene el mismo efecto que multiplicar dicha matriz por un número.)

De ésta, junto con la propiedad asociativa, se puede deducir la siguiente, de la cual ésta es un caso particular:

6. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

(Multiplicar una matriz por la derecha o por la izquierda por un múltiplo escalar de otra es lo mismo que multiplicar ese escalar por el producto de las dos matrices ¡en el mismo orden!.)

3.1.2 Ejercicio de tarea. Demuestra que la propiedad (6) se deduce de las propiedades (1) y (5).

$$\text{Demostración: } (\lambda \forall)B = ((\lambda I^m)\forall)B = (\lambda I^m)(\forall B) = \lambda(\forall B) = (\forall B)(\lambda I^m) = \forall(B(\lambda I^m)) = \forall(B(\lambda I^m)) = \forall(\lambda B).$$

Sobre la no-conmutatividad del producto de matrices y otras advertencias.

1. **No conmutatividad:** En general $AB \neq BA$. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{mientras que} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (11).$$

Pero la razón de la no-conmutatividad *no* es que los resultados puedan ser matrices de distinto tamaño, pues en general $AB \neq BA$ incluso para matrices cuadradas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 5 \\ * & * \end{pmatrix} \quad \text{mientras que} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 4 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

2. **Divisores de cero:** Un producto de matrices igual a cero no implica que algún factor sea cero, es decir, si $AB = 0$, en general no se puede concluir que $A = 0$ o $B = 0$. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

3. **Matrices nilpotentes:** Existen matrices $A \neq \mathbf{0}$ tales que $A^2 = \mathbf{0}$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **No se cumple la Ley de cancelación:** De $AB = AC$, en general no se puede deducir $B = C$. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Traspuesta de una matriz y sus propiedades.

Para cualquier vector (o matriz de una sola columna) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta es la *matriz fila* que tiene los mismos elementos que \mathbf{a} :

$$\mathbf{a}^T = (a_1 \quad \dots \quad a_m).$$

Para una matriz general de varias columnas $A = [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n]$, la traspuesta es la matriz cuyas *filas* son las traspuestas de las columnas de A :

$$A^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{bmatrix}.$$

De esta definición se deduce que la traspuesta de una matriz $m \times n$ es una matriz $n \times m$.

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

La operación de calcular la matriz traspuesta tiene las siguientes propiedades cuya demostración es un ejercicio que debe hacer el estudiante:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$ (¡cambian de orden!)

Potencias de una matriz cuadrada

El producto de dos matrices cuadradas del mismo tamaño vuelve a ser otra matriz cuadrada del mismo tamaño que las iniciales. Esto implica que si A es una matriz cuadrada entonces existe el producto de A por sí misma y el resultado es otra matriz cuadrada del mismo tamaño se puede multiplicar de nuevo por A . En consecuencia A puede multiplicarse por sí misma cualquier número finito, k , de veces. El resultado se conoce como la potencia k -ésima de A y se denota A^k :

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ factores}}$$

Si A es una matriz cuadrada *no nula* es posible dar significado incluso a la potencia A^0 , es decir, el producto de A por sí misma ninguna vez. Para ello, supongamos que A es de orden n (es decir, tiene n filas y n columnas) e imaginemos que \mathbf{x} es un vector cualquiera de \mathbf{R}^n . Si pensamos que en general $A^k \mathbf{x}$ es el resultado de multiplicar A por la izquierda de \mathbf{x} k veces, entonces debemos pensar que $A^0 \mathbf{x}$ es el resultado de multiplicar A por la izquierda de \mathbf{x} ninguna vez, lo cual significa no alterar \mathbf{x} y por tanto llegamos a que para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ debe ser $A^0 \mathbf{x} = \mathbf{x}$. La única matriz que cumple esto para todo \mathbf{x} es la matriz identidad y por tanto llegamos a la conclusión de que si A es una matriz cuadrada $n \times n$:

$$\text{Si } A \neq \mathbf{0} \text{ entonces } A^0 = I_n.$$

La salvedad de que A sea no nula es necesaria porque en el caso $A = \mathbf{0}$ no hay un criterio único para dar significado a la potencia $\mathbf{0}^0$. Por ejemplo, el criterio de que al multiplicar A por la izquierda de \mathbf{x} cero veces debe dar \mathbf{x} choca con el hecho de que para cualquier $k \geq 1$ se cumple $A^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: [Ejercicio 1](#), [Ejercicio 2](#).

Ejercicios de la sección 3.1 Álgebra de matrices

1. Dado que los vectores en \mathbf{R}^n pueden ser considerados como matrices $n \times 1$, las propiedades de las traspuestas también se aplican a vectores. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcula $(A\mathbf{x})^T$, $\mathbf{x}^T A^T$, $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$, y $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$. ¿Está definido el producto $A^T \mathbf{x}^T$?

2. Sean A una matriz 4×4 y \mathbf{x} un vector en \mathbf{R}^4 . ¿Cuál es la forma más rápida de calcular $A^2 \mathbf{x}$: Haciendo $A(A\mathbf{x})$ o haciendo $(A \cdot A)\mathbf{x}$? Cuenta las multiplicaciones que hay que hacer en cada caso.

En los ejercicios 3 y 4, sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Calcula cada suma o producto si la matriz está definida. Si alguna expresión no está definida, explica por qué.

3. $-2A$, $B - 2A$, AC , CD .

4. $A + 2B$, $3C - E$, CB , EB .

En el resto de esta serie de ejercicios y en las series que siguen, debe suponerse que cada expresión de matrices está definida. Esto es, los tamaños de las matrices (y de los vectores) involucrados "se corresponden" de manera apropiada.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ calcula $3I_2 - A$ y $(3I_2)A$.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -8 & 7 & -6 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ calcula $A - 5I_3$ y $(5I_3)A$.

En los ejercicios 7 y 8, calcula el producto AB en dos formas: (a) mediante la definición, donde $A\mathbf{b}_1$ y $A\mathbf{b}_2$ se calculan por separado, y (b) mediante la regla fila-por-columna para calcular AB .

$$7. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Si una matriz A es de orden 5×3 y el producto AB es de orden 5×7 , ¿cuál es el orden de B ?

10. ¿Cuántas filas tiene B si BC es una matriz de orden 3×4 ?

3. Matrices

11. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$. ¿Qué valor(es) de k , si hay, hacen que $AB = BA$?

12. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Comprueba que $AB = AC$ a pesar de que $B \neq C$.

13. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Calcula AD y DA . Explica cómo cambian las filas o columnas de A cuando se multiplica por D a la derecha o a la izquierda. Halla una matriz B de orden 3×3 , que no sea la matriz identidad o la matriz cero, tal que $AB = BA$.

14. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Construye una matriz B de orden 2×2 tal que AB sea igual a la matriz cero. Las columnas de B no deben ser iguales entre sí y deben ser distintas de cero.

15. Sean $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p$ vectores en \mathbf{R}^n , y sea Q una matriz de orden $m \times n$. Escribe la matriz $[Q\mathbf{r}_1 \dots Q\mathbf{r}_p]$ como un producto de dos matrices sin usar una matriz identidad.

Los ejercicios 16 y 17 tratan de matrices arbitrarias A , B y C para las cuales las sumas y productos indicados están definidos. Indica para cada una de las siguientes afirmaciones si es verdadera o falsa. Justifica tus respuestas.

- 16.
- Si A y B son matrices de orden 2×2 con columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ y $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, respectivamente, entonces $AB = [\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 \ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2]$.
 - Toda columna de AB es una combinación lineal de las columnas de B usando como coeficientes los elementos de la columna correspondiente de A .
 - $AB + AC = A(B + C)$
 - $A^T + B^T = (A + B)^T$
 - La traspuesta de un producto de matrices es igual al producto de sus traspuestas en el mismo orden.

17.

- Si A y B son matrices 3×3 y $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3]$, entonces $AB = [A\mathbf{b}_1 + A\mathbf{b}_2 + A\mathbf{b}_3]$.
- La segunda fila de AB es la segunda fila de A multiplicada a la derecha por B .
- $(AB)C = (AC)B$
- $(AB)^T = A^T B^T$
- La traspuesta de una suma de matrices es igual a la suma de sus traspuestas.

18. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$, halla la primera y la segunda columna de B .

19. Supongamos que las dos primeras columnas de B son iguales. ¿Qué puede decirse acerca de las columnas de AB (suponiendo que este producto está definido)? ¿Por qué?

20. Supongamos que la tercera columna de B es la suma de las primeras dos columnas. ¿Qué puede decirse acerca de la tercera columna de AB ? ¿Por qué?

21. Supongamos que la segunda columna de B es toda cero. ¿Qué puede decirse acerca de la segunda columna de AB ?

3.1. Álgebra de matrices

22. Supongamos que la última columna de AB es completamente cero, pero B por sí sola no tiene ninguna columna de ceros. ¿Qué puede decirse acerca de las columnas de A ?

23. Demuestra que si las columnas de B son linealmente dependientes, también lo son las columnas de AB .

24. Supongamos que $CA = I_n$ (la matriz identidad $n \times n$). Demuestra que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial. Explica por qué A no puede tener más columnas que filas.

25. Supongamos que $AD = I_m$ (la matriz identidad $m \times m$). Demuestra que para todo \mathbf{b} en \mathbf{R}^m , la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución. [Sugerencia: Piensa en la ecuación $ADB = \mathbf{b}$.] Explica por qué A no puede tener más filas que columnas.

26. Supongamos que A es una matriz de orden $m \times n$ y que existen matrices $n \times m$, C y D , tales que $CA = I_n$ y $AD = I_m$. Demuestra que $m = n$ y $C = D$. [Sugerencia: Piensa en el producto CAD .]

27. Supongamos que A es una matriz de orden $3 \times n$ cuyas columnas generan \mathbf{R}^3 . Explica cómo construir una matriz D de orden $n \times 3$ tal que $AD = I_3$.

En los ejercicios 28 y 29, considera los vectores en \mathbf{R}^n como matrices $n \times 1$. Para \mathbf{u} y \mathbf{v} en \mathbf{R}^n , el producto de matrices $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$ es una matriz 1×1 , llamada *producto escalar*, o *producto interno*, de \mathbf{u} y \mathbf{v} . Por lo general, se escribe como un único número real sin paréntesis o corchetes. El producto de matrices $\mathbf{u} \mathbf{v}^T$ es una matriz de orden $n \times n$, llamada *producto exterior* de \mathbf{u} y \mathbf{v} .

28. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Calcula $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$, $\mathbf{v}^T \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \mathbf{v}^T$, $\mathbf{v} \mathbf{u}^T$.

29. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} están en \mathbf{R}^n , ¿qué relación hay entre $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$ y $\mathbf{v}^T \mathbf{u}$? ¿Y entre $\mathbf{u} \mathbf{v}^T$ y $\mathbf{v} \mathbf{u}^T$?

30. Demuestra que $I_m A = A$ cuando A es una matriz de orden $m \times n$. Puedes utilizar el hecho de que $I_m \mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todo \mathbf{x} en \mathbf{R}^m .

31. Demuestra que $AI_n = A$ cuando A es una matriz de orden $m \times n$. [Sugerencia: Usa la definición (de columnas) del producto de matrices AI_n .]

32. Halla una fórmula para $(AB\mathbf{x})^T$, donde \mathbf{x} es un vector y A y B son matrices con los tamaños apropiados.

33. Dada la matriz $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcula S^k para $k = 2, \dots, 6$.

34. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/6 & 0/5 & 1/3 \\ 0/5 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 5/12 \end{pmatrix}$, describe con palabras qué pasa al calcular A^5 , A^{10} , A^{20} y A^{30} . (Para hacer con Mathematica en una práctica de ordenador.)

3.2. Matrices inversas

Inversa por la derecha

inversa por la derecha

Se llama matriz *inversa por la derecha* de una matriz A a toda matriz C tal que $AC = I$. Si A tiene m filas y n columnas tal matriz C debe tener n filas por ser multiplicable por la derecha de A y debe tener tantas columnas como el resultado del producto AC , que es I_m , es decir, C tendrá m columnas: *toda inversa por la derecha de una matriz $m \times n$ es una matriz $n \times m$.*

Algunas matrices no tienen ninguna inversa por la derecha, pero hay matrices que tienen muchas inversas por la derecha distintas.

Si una matriz A $m \times n$ tiene una inversa por la derecha, entonces todo sistema $Ax = b$ será compatible cualquiera que sea $b \in \mathbb{R}^m$ ya que, si C es una inversa por la derecha de A , al menos el vector $x = Cb$ será una solución (como se comprueba haciendo el cálculo $Ax = ACb = I_m b = b$). Por tanto:

Si una matriz A $m \times n$ tiene una inversa por la derecha, entonces las columnas de A generan \mathbb{R}^m ($\text{Col } A = \mathbb{R}^m$), la aplicación lineal $T(x) = Ax$ es sobreyectiva, A tiene un pivote en cada fila y A no puede tener más filas que columnas: $m \leq n$.

Recíprocamente: *Si A tiene un pivote en cada una de sus m filas, entonces A tiene al menos una inversa por la derecha.*

La razón de ello es que en ese caso las columnas de A generan \mathbb{R}^m y por tanto, si e_1, \dots, e_m son las columnas de la matriz identidad $m \times m$, los m sistemas $Ax = e_1, \dots, Ax = e_m$ son compatibles. Elijiendo vectores c_1, \dots, c_m que sean respectivas soluciones de dichos sistemas, la matriz $C = [c_1 \ \dots \ c_m]$ verifica $AC = I$ y por tanto es una inversa por la derecha de A .

Inversa por la izquierda

inversa por la izquierda

Se llama matriz *inversa por la izquierda* de A a toda matriz B tal que $BA = I$. Si B es una inversa por la izquierda de A entonces, evidentemente, A es una inversa por la derecha de B y si A tiene m filas y n columnas, B será una matriz $n \times m$.

Si una matriz A $m \times n$ tiene una inversa por la izquierda, el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene solución única (el vector 0 es la única solución porque para cualquier solución x , se cumple $x = Ix = BAx = B0 = 0$). Como $Ax = 0$ tiene solución única, representa un sistema que no tiene variables libres. Por tanto:

Si A tiene una inversa por la izquierda, las columnas de A son linealmente independientes, todo sistema compatible de la forma $Ax = b$ tiene solución única, la aplicación lineal $T(x) = Ax$ es inyectiva, A tiene un pivote en cada columna y A no puede tener menos filas que columnas: $m \geq n$.

Recíprocamente: *Si A tiene un pivote en cada columna entonces A tiene una inversa por la izquierda.*

La razón de ello es que en ese caso, como toda matriz tiene el mismo número de pivotes que su traspuesta, A^T tiene un pivote en cada fila, lo que implica —por lo visto más arriba— que tiene una inversa por la derecha. La traspuesta de esa inversa por la derecha de A^T es una inversa por la izquierda de A .

Matriz inversible e inversa de una matriz inversible

matriz inversible

Una matriz A se llama *inversible* si tiene una inversa por la derecha y una inversa por la izquierda. En tal caso, es un sencillo ejercicio de la propiedad asociativa del producto de matrices demostrar que la inversa por la izquierda es la misma matriz que la inversa por la derecha¹.

¹Si $AC = I_m$ y $BA = I_n$ entonces $C = (BA)C = B(AC) = B$.

(llamándose entonces simplemente *la matriz inversa de A*). Por lo dicho antes, la matriz A es necesariamente una matriz cuadrada (al igual que su inversa). Por tanto una matriz es inversible si y sólo si existe una matriz B tal que

$$BA = I \quad \text{y} \quad AB = I.$$

Toda matriz inversible es una matriz cuadrada. La matriz inversa de A se denota por A^{-1} .

Se llama matriz singular a toda matriz cuadrada que no sea inversible.

matriz singular

3.2.1 Ejercicio de tarea. Suponiendo que M es una inversa de A por la izquierda y que N es una inversa de A por la derecha, demuestra:

- (a) $M = N$.
- (b) M y N tienen el mismo número de filas y columnas que la traspuesta de A .
- (c) A es una matriz cuadrada.

(c) Por tener inversa por la derecha, A tiene un pivote en cada fila y por tener inversa por la izquierda lo tiene en cada columna. Como AN es una matriz cuadrada: n_0 columnas de $A = n_0$ columnas de AN y n_0 filas de $AN = n_0$ filas de A .
 (b) Como MA es una matriz cuadrada: n_0 filas de $M = n_0$ filas de $MA = n_0$ columnas de $MA = n_0$ columnas de A .
 Solución: (a) $M = MI = M(AN) = (MA)N = IN = N$.

3.2.2 Ejercicio de tarea. Demostrar que si A es una matriz cuadrada entonces basta que tenga una inversa por un lado para que sea inversible.

Pista: Tener una inversa por la derecha es tener un pivote en cada fila. Tener un pivote en cada columna es tener inversa por la izquierda.

Propiedades de la inversa

$$(a) \quad (A^{-1})^{-1} = A. \quad (b) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (c) \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

De la segunda de estas propiedades se deduce que el producto de varias matrices inversibles de tamaño $n \times n$ es de nuevo una matriz inversible y su inversa es el producto de las inversas en el orden opuesto:

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Inversa de una matriz 2×2

Dada una matriz cuadrada de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, consideremos la matriz $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ que se obtiene al intercambiar las posiciones de los elementos de la diagonal y cambiar de signo a los otros dos. Esta matriz tiene la propiedad de que conmuta con A y que el producto de ambas es un múltiplo de la identidad

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De este cálculo se deduce que la matriz A tiene inversa si y sólo si $ad - bc \neq 0$, en cuyo caso la inversa es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Uso de la inversa en la resolución de sistemas

Para aquellos sistemas de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en los que la matriz de coeficientes, A , sea una matriz invertible existe automáticamente solución única y esa solución está dada por

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Evidentemente esto sólo se aplica a sistemas con el mismo número de ecuaciones que incógnitas.

Los casos en los que esta fórmula para la solución tiene mayor utilidad son los de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, en los cuales es muy sencillo ver si la matriz de coeficientes tiene inversa y apenas es nada costoso el calcular la inversa.

Ejemplo: El sistema

$$3x_1 + 4x_2 = 3$$

$$5x_1 + 6x_2 = 7$$

tiene matriz de coeficientes invertible y su inversa es la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{18-20} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

por tanto la solución del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Las inversas de las matrices elementales

Toda matriz elemental tiene inversa y su inversa es otra matriz elemental: La correspondiente a la operación elemental inversa. En consecuencia, es muy sencillo escribir la matriz inversa de una matriz elemental.

Por ejemplo, la matriz $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz elemental de la operación de intercambio de las filas 1 y 2 en matrices de dos filas. Como la inversa de una matriz de intercambio es ella misma, la inversa de E también es ella misma:

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz elemental de la operación de reemplazo en matrices de tres filas que consiste en sumar a la fila 2 la fila 3 multiplicada por λ , por tanto su matriz inversa es la que corresponde a la operación de reemplazo que consiste en restar a la fila 2 la fila 3 multiplicada por λ , es decir:

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, una matriz elemental que corresponda a una operación de reescalado tal como “multiplicar la segunda fila por k ” tiene por inversa la que corresponde a la operación de

reescalado de “multiplicar la segunda fila por $\frac{1}{k}$ ”, por tanto, poniendo como ejemplo las matrices de operaciones elementales sobre matrices de tres filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las inversas de las matrices diagonales

Una matriz diagonal todos cuyos elementos diagonales sean distintos de cero es igual a un producto de matrices elementales de reescalado porque es el resultado de realizar reescalados de filas en una matriz identidad. En consecuencia, la inversa de una matriz diagonal todos cuyos elementos diagonales sean distintos de cero es otra matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los inversos de los de la matriz original.

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

En general, si d_1, \dots, d_n son todos distintos de cero,

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Ejercicio de tarea. Explica por qué una matriz diagonal que tenga alguno de los elementos de la diagonal igual a cero no es inversible.

Guía de respuesta: ¿Cumple la condición de tener inversa por la derecha? ¿Por qué esa consideración es suficiente?

Algoritmo para averiguar si una matriz es inversible y calcular su inversa

TEOREMA 3.2.1

Una matriz cuadrada A es inversible si y sólo si es equivalente por filas a la correspondiente matriz identidad. En ese caso, cualquier sucesión de operaciones elementales de filas que reduzcan A a la identidad I también reducen I a la inversa de A .

Demostración: Cada paso de la reducción corresponde a la multiplicación por la izquierda por una matriz elemental:

$$A \sim E_1 A \sim E_2 E_1 A \sim \dots \sim E_p (E_{p-1} \dots E_1) A = I$$

por tanto $(E_p \dots E_1) A = I$, lo que significa que A es inversible y su inversa es ese producto de matrices elementales:

$$A^{-1} = E_p \dots E_1.$$

COROLARIO 3.2.1

Sea A una matriz cuadrada. Si A es inversible entonces su forma escalonada reducida es la matriz identidad del mismo tamaño que A y la forma escalonada reducida de $(A|I)$ es $(I|A^{-1})$. Recíprocamente, si la forma escalonada reducida de $(A|I)$ es $(I|M)$ entonces A es inversible y $A^{-1} = M$.

De esto se deduce que la forma escalonada reducida de la matriz por bloques formada por una fila de dos bloques en la que el primero es la matriz A y el segundo la matriz identidad, es la que tiene como primer bloque la identidad y segundo la inversa de A :

$$(A|I) \sim \dots \sim (I|A^{-1})$$

En otras palabras: Las mismas operaciones elementales que transforman una matriz inversible en la matriz identidad, transforman la matriz identidad en la inversa de la matriz.

Cómo calcular solamente una columna (o fila) particular de la matriz inversa. Para calcular la columna j de A^{-1} basta resolver el sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$$

donde \mathbf{e}_j es la columna j de la matriz identidad. En consecuencia, otra forma de calcular la matriz inversa de una matriz inversible A de n filas y n columnas es resolver cada uno de los siguientes n sistemas de ecuaciones:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n.$$

Para calcular la fila i de A^{-1} basta calcular la columna i de $(A^T)^{-1}$, para lo cual, según lo dicho antes, basta resolver el sistema

$$A^T \mathbf{x} = \mathbf{e}_i.$$

Caracterizaciones de las matrices inversibles**TEOREMA 3.2.2****Teorema de la matriz inversible**

Una matriz cuadrada A de orden n es una matriz inversible si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

- (a) A tiene una inversa por la derecha.
- (b) A tiene una inversa por la izquierda.
- (c) El sistema homogéneo representado por la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es determinado (no tiene más solución que la trivial).
- (d) A tiene n columnas pivote (tantos pivotes como columnas).
- (e) La forma escalonada reducida de A es la matriz identidad de orden n .
- (f) Para todo $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ el sistema representado por la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible.
- (g) Las columnas de A generan \mathbf{R}^n .
- (h) A^T es una matriz inversible.

Aplicaciones lineales inversibles

Se llama aplicación inversible a toda aplicación $f : A \rightarrow B$ tal que existe una aplicación $g : B \rightarrow A$ tal que

$$f \circ g = 1_B \quad \text{y} \quad g \circ f = 1_A.$$

En general, una aplicación es inversible si y sólo si es biyectiva, es decir inyectiva y sobreyectiva.

Si una aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ es inyectiva entonces el sistema correspondiente a la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tiene solución única $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y esto implica que la matriz canónica de T tiene una inversa por la izquierda. Si, además, T es sobreyectiva entonces para todo $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ el sistema correspondiente a la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ es compatible, lo que implica que la matriz canónica de T tiene una inversa por la derecha. En consecuencia, si T es una aplicación lineal biyectiva su matriz canónica es inversible.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: [Ejercicio 1](#), [Ejercicio 2](#), [Ejercicio 3](#).

Ejercicios de la sección 3.2 Matrices inversas

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Construye una matriz C de 2×3

(mediante ensayo y error) usando sólo los números 1, -1 y 0 como elementos, de tal forma que $CA = I_2$. Calcula AC y observa que $AC \neq I_3$.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Construye una matriz D de 4×2 usando sólo los números 1 y 0 como elementos, de tal forma que $AD = I_2$. ¿Es posible que $CA = I_4$ para alguna matriz C de orden 4×2 ? ¿Por qué sí o por qué no?

En los ejercicios 3 a 6 halla las inversas de las matrices dadas.

3. $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$.

7. Usa la inversa de la matriz del ejercicio 3 para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 4x_2 &= -1 \end{aligned}$$

8. Usa la inversa de la matriz del ejercicio 5 para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 &= -9 \\ -7x_1 - 5x_2 &= 11 \end{aligned}$$

9. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- (a) Halla A^{-1} y utilízala para resolver las cuatro ecuaciones

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_4$$

- (b) Las cuatro ecuaciones del apartado (a) pueden resolverse con el mismo conjunto de operaciones de fila, puesto que la matriz de coeficientes es la misma en cada caso. Resuelve las cuatro ecuaciones del apartado (a) reduciendo por filas la matriz ampliada $[A \ \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4]$ para hallar su forma escalonada reducida.

10. Usa el álgebra de matrices para mostrar que si A es inversible y D satisface $AD = I$, entonces $D = A^{-1}$.

En los ejercicios 11 y 12, indica para cada afirmación si es verdadera o falsa. Justifica tus respuestas.

11.

- (a) Para que una matriz B sea inversa de A , ambas ecuaciones $AB = I$ y $BA = I$ deben ser ciertas.
 (b) Si A y B son matrices $n \times n$ inversibles, entonces $A^{-1}B^{-1}$ es la inversa de AB .
 (c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, y $ab - cd = 0$, entonces A es inversible.
 (d) Si A es una matriz inversible $n \times n$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible para toda \mathbf{b} en \mathbf{R}^n .
 (e) Toda matriz elemental es inversible.

12.

- (a) Un producto de matrices $n \times n$ inversibles es inversible, y la inversa del producto es el producto de sus inversas en el mismo orden.
 (b) Si A es inversible, entonces la inversa de A^{-1} es la propia A .

- (c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, y $ad = bc$, entonces A no es inversible.
- (d) Si A se puede reducir por filas a la matriz identidad, entonces A es inversible.
- (e) Si A es una matriz inversible $n \times n$, entonces las operaciones elementales de filas que reducen A a la identidad I_n también reducen A^{-1} a I_n .

13. Sea A una matriz inversible de $n \times n$ y sea B una matriz $n \times p$. Demuestra que la ecuación $AX = B$ tiene una única solución $A^{-1}B$.

14. Sea A una matriz inversible $n \times n$, y sea B una matriz $n \times p$. Explica por qué $A^{-1}B$ puede calcularse mediante reducción por filas:

$$\text{Si } [A \ B] \sim \dots \sim [I \ X] \text{ entonces } X = A^{-1}B$$

Observación: Si A tiene orden más grande que 2×2 , entonces la reducción por filas de $[A \ B]$ es mucho más rápida (requiere menos operaciones) que calcular A^{-1} y luego el producto $A^{-1}B$.

15. Supongamos que $AB = AC$, donde B y C son matrices $n \times p$ y A es inversible. Demuestra que $B = C$. ¿Es esto cierto en general si A no es inversible?

16. Supongamos $(B - C)D = 0$, donde B y C son matrices $m \times n$ y D es inversible. Demuestra que $B = C$.

17. Supongamos que A , B y C son matrices inversibles $n \times n$. Demuestra que ABC también es inversible construyendo una matriz D tal que $(ABC)D = I$ y $D(ABC) = I$.

18. Supongamos que A y B son matrices $n \times n$, y que AB es inversible. Demuestra que A y B son inversibles.

Sugerencia: Pon $C = AB$ deduce qué se debe multiplicar a derecha/izquierda de C^{-1} para obtener las inversas requeridas y luego demuestra que efectivamente son las inversas requeridas...

19. Despeja A en la ecuación $AB = BC$ suponiendo que A , B y C son cuadradas y que B es inversible.

20. Supongamos que P es inversible y $A = PBP^{-1}$. Halla B en términos de A .

21. Si A , B y C son matrices inversibles $n \times n$, la ecuación $C^{-1}(A + X)B^{-1} = I_n$ ¿tiene alguna solución para X ? Si es así, hálala.

22. Supongamos que A , B y X son matrices $n \times n$ con A , X , y $A - AX$ inversibles, y supongamos que

$$(A - AX)^{-1} = X^{-1}B \quad (3.4)$$

- (a) Explica por qué B es inversible.
- (b) Resuelve la ecuación (3.4) en X . Si es necesario usar la inversa de una matriz, explique por qué dicha matriz es inversible.

23. Explica por qué las columnas de una matriz A de $n \times n$ son linealmente independientes cuando A es inversible.

24. Explica por qué las columnas de una matriz A de orden $n \times n$ generan \mathbf{R}^n cuando A es inversible.

25. Supongamos que A es $n \times n$ y que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial. Explica por qué A tiene n columnas pivote y es equivalente por filas a I_n . *Observación:* Esto implica que A debe ser inversible.

26. Supongamos que para una matriz cuadrada A de orden n la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución para todo \mathbf{b} en \mathbf{R}^n . Explica por qué A debe ser inversible.

Sugerencia: Piensa si A es equivalente por filas a I_n

Los ejercicios 27 y 28 demuestran el teorema que dice:

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces A es inversible sólo si $ad - bc \neq 0$ y en ese caso su inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

27. Demuestra que si $ad - bc = 0$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene más de una solución. ¿Por qué implica esto que A no es inversible?

Sugerencia: Primero, considera el caso $a = b = 0$. Después, si a y b no son ambos cero, considera el vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

28. Demuestra que si $ad - bc \neq 0$, la fórmula para A^{-1} es correcta.

Halla las inversas de las matrices dadas en los ejercicios 29 a 32, caso de que existan. Usa el algoritmo explicado en clase consistente en hallar la forma escalonada reducida de la matriz ampliada $[A \ I]$.

29. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

33. Usa el algoritmo explicado en clase para hallar las inversas de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para cada una de las inversas halladas verifica que efectivamente es la inversa comprobando que cumple $AB = I$.

34. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Halla la tercera columna de A^{-1} sin calcular las otras columnas.

35. Si existe, halla la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.3. Matrices por bloques

En la introducción de matrices como tablas de números que representaban sistemas de ecuaciones y en el método de las operaciones elementales para su resolución predominaba la idea de matriz como conjunto de filas, una para cada ecuación. Por otra parte, la definición del producto de matrices y de la matriz traspuesta se ha basado en considerar una matriz como un conjunto ordenado de columnas y no simplemente como un rectángulo de números. En otras palabras, hemos estado considerando una matriz como una fila de matrices columna. Esto se podría llamar “una descomposición de una matriz en bloques-columna”. En esta sección vamos a ver que la descomposición de las matrices en otros tipos de bloques puede ser enormemente útil. En general, podemos partir tanto las filas como las columnas de una matriz $m \times n$, A , para obtener una descomposición de A en submatrices A_{IJ} , donde $I = 1, 2, \dots, p$ y $J = 1, 2, \dots, q$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \\ n_1 & n_2 & \dots & n_q \end{matrix}$$

donde la submatriz A_{IJ} tiene m_I filas y n_J columnas, es decir tamaño $m_I \times n_J$.

Esta descomposición se llama *descomposición por bloques* de la matriz A . Los números m_1, m_2, \dots, m_p y n_1, n_2, \dots, n_q que indican los tamaños de los bloques verifican, evidentemente, que

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = m \quad \text{y} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_q = n.$$

La submatriz A_{IJ} es el bloque IJ de esta descomposición por bloques de A .

Operaciones con matrices por bloques

Lo interesante de operar con matrices por bloques es que podemos actuar como si cada bloque fuese un número. Entonces las operaciones con matrices por bloques se reducen a las operaciones con matrices que ya conocemos, excepto que hay que asegurarse de que cuando vayamos a sumar o multiplicar dos bloques sus tamaños sean compatibles para la operación que queremos realizar.

Multiplicación por escalares El caso de multiplicación de una matriz por bloques por un escalar no ofrece dificultad ya que todo bloque, independientemente de su tamaño, se puede multiplicar por cualquier número.

Suma de matrices por bloques Para poder sumar dos matrices por bloques, es necesario no sólo que sean matrices del mismo tamaño sino también que estén divididas en bloques de la misma forma de tal manera que bloques correspondientes sean del mismo tamaño y se puedan sumar.

Producto de matrices por bloques Para hallar el producto AB de dos matrices por bloques se puede usar la regla usual de “fila por columna” siempre que el número de bloques en cada “fila de bloques” de A sea igual al número de bloques en cada “columna de bloques” de B y además que los bloques en esa fila de bloques de A sean compatibles para multiplicación por los bloques de la columna de bloques de B .

Una de las consecuencias de la multiplicación de matrices por bloques es la siguiente alternativa a la regla “fila por columna” para la multiplicación de matrices:

Regla columna por fila: Sean $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ las columnas de A y sean $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ las filas de B . Entonces el producto matricial $\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1$ es una matriz con tantas filas como A y tantas columnas como B . Lo mismo ocurre con los demás productos $\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$ y el producto de matrices AB es igual a la suma:

$$AB = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n$$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

una matriz cuadrada de orden $2n$ descompuesta en cuatro bloques $n \times n$, A_1, A_2, A_3, A_4 . Se trata de encontrar una matriz

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}$$

con P_1, P_2, P_3, P_4 bloques $n \times n$, verificando que el producto PA intercambie la primera y la segunda fila de bloques de la matriz A , es decir, tal que

$$PA = \begin{pmatrix} A_3 & A_4 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Dado que el intercambio de filas es una operación elemental, basta realizar esta operación sobre la matriz identidad por bloques:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto PA por bloques obtenemos

$$P_1 A_1 + P_2 A_3 = 0A_1 + IA_3 = A_3$$

$$P_1 A_2 + P_2 A_4 = 0A_2 + IA_4 = A_4$$

$$P_3 A_1 + P_4 A_3 = IA_1 + 0A_3 = A_1$$

$$P_3 A_2 + P_4 A_4 = IA_2 + 0A_4 = A_2$$

y se verifica lo pedido.

3.3.1 Ejercicio de tarea. En las condiciones del ejemplo anterior hállese:

- Una matriz P tal que PA sea igual al resultado de multiplicar la primera fila de bloques de A por la izquierda por una matriz inversible X de orden n .
- Una matriz P tal que PA sea igual al resultado de sumar a la segunda fila de bloques de A la primera fila de bloques multiplicada por la izquierda por una matriz cuadrada X de orden n .

Inversa de una matriz por bloques

En general no es sencillo calcular la inversa de una matriz por bloques realizando solamente operaciones por bloques, pero hay un caso especial en el que sí es posible: Es el caso de una matriz partida en 2×2 bloques, que sea triangular por bloques y tal que los bloques en la diagonal sean cuadrados.

Sean A y C matrices cuadradas (no necesariamente del mismo tamaño) y sea B una matriz con el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que C , de forma que se puede formar la matriz por bloques $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, que resulta ser una matriz cuadrada. Entonces

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ \mathbf{0} & C^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Es sencillo demostrar la fórmula (3.5) por medio de la multiplicación directa, es decir, calculando el producto

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ \mathbf{0} & C^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Ejercicio de tarea. Usando las propiedades de la traspuesta deduce la siguiente fórmula a partir de (3.5):

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

3.3.3 Ejercicio de tarea. Usa las fórmulas (3.5) y (3.6) según convenga para calcular la siguiente matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Solución: $\begin{pmatrix} -33 & 8 & -21 & -3 & 5 \\ 13 & -4 & 12 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 30 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: [Ejercicio 1](#), [Ejercicio 2](#), [Ejercicio 3](#).

Ejercicios de la sección 3.3 Matrices por bloques

En los ejercicios siguientes en los que aparezcan productos de matrices por bloques, se debe suponer que las matrices están partidas en bloques conformes para la multiplicación por bloques.

Calcula los productos indicados en los ejercicios 1 a 4.

1. $\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ E & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$

2. $\begin{bmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}.$

8. $\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix}.$

3. $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ I & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$

4. $\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ -E & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}.$

En los ejercicios 5 a 8 halla fórmulas para X , Y y Z en términos de A , B y C .

5. $\begin{bmatrix} A & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ Z & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$

6. $\begin{bmatrix} X & \mathbf{0} \\ Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}.$

9. Sabiendo que

la inversa de $\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & I & \mathbf{0} \\ B & D & I \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P & I & \mathbf{0} \\ Q & R & I \end{bmatrix},$

halla P , Q y R .

En los ejercicios 10 y 11 indica para cada enunciado si es verdadero o falso.

10. (a) Si $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$ con A_1 y A_2 de los mismos tamaños respectivos que B_1 y B_2 , entonces $A + B = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \end{bmatrix}$.
- (b) Si $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ entonces las particiones de A y B son conformes para la multiplicación por bloques.
11. (a) Sean A_1, A_2, B_1 , y B_2 matrices $n \times n$ y $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$. Entonces el producto BA está definido pero el producto AB no lo está.
- (b) La transpuesta de la matriz $A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$ es la matriz $A^T = \begin{bmatrix} P^T & R^T \\ Q^T & S^T \end{bmatrix}$.
12. Sea $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ donde B y C son matrices cuadradas. Demuestra que A es invertible si y sólo si tanto B como C son invertibles.
13. (a) Comprueba que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $A^2 = I$.
- (b) Usa el producto de matrices por bloques para demostrar que $M^2 = I$ siendo
- $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
14. Calcula la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3.4. Factorización L-U

Supongamos que necesitamos resolver varios sistemas de ecuaciones que tienen la misma matriz de coeficientes A y sólo se diferencian en los términos independientes. Si se conocen dos matrices L, U tales que L es una matriz *unitriangular* inferior, es decir, triangular inferior con unos en la diagonal, U es una matriz escalonada y son tales que $LU = A$, entonces el sistema $Ax = b$ o $L(Ux) = b$ se puede resolver en dos pasos muy sencillos: Primero resolvemos el sistema

$$Ly = b$$

$$Ux = y.$$

Una descomposición de una matriz, $A = LU$, como producto de dos matrices como las descritas más arriba se conoce como una *factorización L-U* (del inglés “Lower-Upper”) de A (leído: «factorización “L” “U” »).

Existencia y unicidad

No toda matriz admite una factorización L-U, pero, como se verá más abajo, una matriz A la admitirá siempre que sea posible obtener una forma escalonada de A sin realizar operaciones elementales de intercambio de filas y de tal forma que, cuando se está realizando la eliminación sobre una columna dada, se realicen únicamente operaciones de reemplazo basadas en la posición pivote de esa columna. Esto significa que en cada paso de eliminación, suponiendo que la posición pivote en ese paso está en la fila i , se realicen únicamente operaciones de reemplazo en las que a una fila se le suma un múltiplo de la fila i y no de otra.

Recíprocamente, si A admite una factorización L-U, entonces es evidente que L , por ser una matriz triangular inferior, se puede poner en forma escalonada utilizando únicamente operaciones de reemplazo basadas en la posición pivote del paso correspondiente (obteniéndose una matriz identidad!). Esas operaciones que transforman L en I transformarán A en U y por

Una matriz se llama unitriangular si es una matriz triangular y todos los elementos de su diagonal son iguales a 1.

tanto A se puede poner en forma escalonada utilizando en cada paso de eliminación únicamente operaciones de reemplazo basadas en la posición pivote de ese paso. En consecuencia:

PROPOSICIÓN 3.4.1

Existencia de la factorización L-U.

La factorización L-U de una matriz A existe si y sólo si A se puede poner en forma escalonada utilizando en cada paso de eliminación únicamente operaciones de reemplazo basadas en la posición pivote de ese paso.

En general, la factorización L-U de una matriz no es única, como muestra el siguiente ejemplo. Sean

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Evidentemente L_1 y U constituyen una factorización L-U de su producto L_1U e igualmente L_2 y U constituyen una factorización L-U de su producto L_2U . Por otra parte, es fácil comprobar que $L_1U = L_2U$, por consiguiente tenemos aquí dos factorizaciones L-U de la misma matriz.

La razón por la que falla la unicidad en el caso anterior es que la matriz A tiene rango menor que el número de filas menos 1. En el caso de matrices cuadradas inversibles es fácil demostrar que la factorización L-U sí es única:

PROPOSICIÓN 3.4.2

Unicidad de la factorización L-U para matrices cuadradas inversibles.

Si A es una matriz cuadrada inversible que admite factorización L-U, ésta es única.

3.4.1 Ejercicio de tarea. Demostrar la proposición anterior.

Primer: $\Gamma_{-1}^T \Gamma^T = \Gamma^T \Gamma_{-1}^T$ implica, por la forma de las Γ y Γ_{-1} que $\Gamma^T \Gamma_{-1}^T = I = \Gamma_{-1}^T \Gamma^T$.

Algoritmo de la factorización L-U

- Se reduce A a una forma escalonada, U , mediante una sucesión de operaciones de reemplazo basadas en la posición pivote si ello es posible. Si no es posible, la matriz A no tiene factorización L-U.
- Se colocan los elementos bajo la diagonal de unos de L de forma que la misma sucesión de operaciones elementales usadas en el paso anterior reduzcan L a la matriz identidad.

Entonces

$$(E_p \cdots E_1)A = U \quad \text{y} \quad (E_p \cdots E_1)L = I.$$

De aquí se deduce

$$A = (E_p \cdots E_1)^{-1}U = LU, \quad L = (E_p \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_p^{-1}.$$

En conclusión, para hallar L basta realizar sobre la matriz identidad las operaciones inversas de las usadas para hallar U en el orden opuesto:

$$I \xrightarrow{E_p^{-1}} \cdots \xrightarrow{E_1^{-1}} L.$$

Ejemplo

Calcular la factorización L-U de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & -1 \\ -2 & -9 & 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Empezamos realizando las operaciones elementales $F_2 + F_1$ y $F_4 + 2F_1$ y continuamos como se muestra:

$$A \xrightarrow[\substack{F_2 + F_1 \\ F_4 + 2F_1}]{\substack{F_3 - 3F_2 \\ F_4 + 3F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 - 3F_2 \\ F_4 + 3F_2}]{\substack{F_4 + F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como ya hemos llegado a una matriz escalonada, hemos obtenido la matriz U . Para hallar L realizamos las operaciones inversas de esas en el orden opuesto sobre la matriz identidad:

$$I_4 \xrightarrow{F_4 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_4 - 3F_2 \\ F_3 + 3F_2}]{\substack{F_4 - 2F_1 \\ F_2 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_4 - 2F_1 \\ F_2 - F_1}]{\substack{F_4 - F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hemos obtenido:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Método abreviado para calcular la matriz L

En el proceso de calcular una factorización L-U de una matriz A , se cumple siempre que los elementos bajo la diagonal de L son exactamente los opuestos de los multiplicadores usados en las operaciones elementales con las que se redujo A a U .

Por ejemplo, si A tiene tres filas y para pasar de A a U se usaron las operaciones $F_2 + aF_1$, $F_3 + bF_1$ y $F_3 + cF_2$ entonces

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto que acabamos de decir puede usarse para determinar la matriz L paralelamente al cálculo de la matriz U . Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo

Vamos a calcular la factorización L-U de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

La primera columna de L es la primera columna pivote de A dividida por el primer elemento:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 & 0 \\ -3 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente, las operaciones elementales que produzcan ceros en la primera columna de A también producirán ceros en la primera columna de L . Ahora intentamos hallar una forma escalonada de A utilizando solamente operaciones de reemplazo. Después de crear ceros en la primera columna, el problema ha sido reducido a uno con una fila y una columna menos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -9 & -3 & -4 & 10 \\ 12 & 4 & 12 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{de donde} \quad L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & & 1 \end{pmatrix}.$$

En el siguiente paso realizamos en A' las operaciones elementales $F_2 + 3F_1$ y $F_3 - 4F_1$:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -9 & -3 & -4 & 10 \\ 12 & 4 & 12 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{de donde} \quad L'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y, puesto que $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = U.$$

¡Atención! Cuidado con este error.— Obsérvese que si sobre la matriz A' hubiésemos realizado las operaciones elementales $F_3 + \frac{4}{3}F_2$ y $F_2 + 3F_1$ hubiésemos obtenido

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -9 & -3 & -4 & 10 \\ 12 & 4 & 12 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} & \frac{25}{3} \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{20}{3} & \frac{25}{3} \end{pmatrix} \quad \text{de donde} \quad L'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{10}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & \frac{10}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

que es una matriz L errónea. Esto nos enseña que para usar este método simplificado para hallar la matriz L es esencial realizar operaciones de reemplazo basadas en el elemento pivote.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: [Ejercicio 1](#).

Ejercicios de la sección 3.4 Factorización L-U

En los ejercicios ejercicios 1 a 6, resuelve la ecuación $Ax = b$ usando la factorización LU dada para A . En los ejercicios 1 y 2 resuelve $Ax = b$ también por el método usual de reducción.

$$1. A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & -9 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & 12 \\ 3 & 0 & 4 & -36 \\ -5 & -3 & -8 & 49 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En los ejercicios 7 a 16 halla una factorización LU de la matriz dada.

$$7. \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$8. \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$$

$$9. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -9 & 0 & -4 \\ 9 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

$$10. \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 10 & 2 & -5 \\ 10 & 10 & 16 \end{pmatrix}$$

$$11. \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 19 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$12. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$13. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$14. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 20 & 6 & 31 \\ -2 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$15. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ -6 & 3 & -13 & -3 \\ 4 & 9 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$16. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 8 & -7 \\ 6 & -5 & 14 \\ -6 & 9 & -12 \\ 8 & -6 & 19 \end{pmatrix}$$

17. Para calcular la inversa de una matriz invertible A , el programa MATLAB calcula primero una factorización $A = LU$, luego halla las inversas de L y U y finalmente calcula $U^{-1}L^{-1}$. Usa este método para calcular la inversa de la matriz A del ejercicio 2.

18. Usa el método del ejercicio anterior para calcular la inversa de la matriz A del ejercicio 3.

19. Sea A una matriz triangular inferior $n \times n$ cuyos elementos de la diagonal son todos no nulos. Demuestra que A es invertible y que su inversa también es triangular inferior.

Sugerencia: Piensa por qué A puede reducirse a I usando solamente operaciones de reescalado y de reemplazo progresivas. ¿Cuáles son las posiciones pivote? Explica por qué las mismas operaciones de fila que reducen A a I transforman I en una matriz triangular inferior.

20. Supón que A tiene una factorización LU, $A = LU$. Explica por qué A puede reducirse a U usando solamente operaciones de reemplazo progresivas.