Tema 2

Aplicaciones lineales (Introducción)

2.1. El concepto general de aplicación y las tres cuestiones fundamentales en el estudio de una ecuación

Lección 3, 2 mar 2021

Cuando nos dan un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, si queremos saber si un conjunto de n números "elegidos al azar", $x_1, \ldots, x_n$, es una solución particular, tenemos que empezar evaluando todos los miembros de la iquierda de las m ecuaciones del sistema, dándole a las n incógnitas los n valores elegidos $x_1, \ldots, x_n$. El resultado de estos cálculos serán m números $y_1, \ldots, y_m$ —uno por cada ecuación— cuya comparación con los m términos independientes del sistema nos dirá si los $x_1, \ldots, x_n$ constituyen una solución o no.

m ecuaciones lineales con n incógnitas

Lo que nos interesa resaltar ahora es que el proceso de evaluación que acabamos de indicar determina una *aplicación* o "función de varias variables" de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$. En esta aplicación hay tres elementos fundamentales:

aplicación de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$

1. El conjunto "de partida" o conjunto de "datos", que en este ejemplo es el conjunto $\mathbf{R}^n$.
2. El conjunto "de llegada" o conjunto de "potenciales resultados", en este ejemplo $\mathbf{R}^m$.
3. El proceso de cálculo, que asigna a cada elemento de $\mathbf{R}^n$ (constituido por n números $x_1, \ldots, x_n$) un elemento de $\mathbf{R}^m$ (los m números calculados $y_1, \ldots, y_m$).

La definición general de aplicación o función está calcada sobre este prototipo.

DEFINICIÓN 2.1.1

Aplicación de un conjunto (*dominio*) a otro (*codominio*)

Una aplicación*, también llamada* función *o* transformación*, está determinada por tres cosas:*

1. *Un conjunto "de partida" (o conjunto de "datos") que será llamado el* dominio *de la aplicación.*
2. *Un conjunto "de llegada" (o conjunto de "potenciales resultados") que será llamado el* codominio *de la aplicación.*
3. *Un* proceso de asignación *(que puede ser una "regla", "fórmula", "algoritmo", "método", "programa", etc.) que asigne a cada elemento del dominio un elemento bien determinado del codominio.*

Una aplicación se representa simbólicamente mediante un *diagrama* de la forma:

aplicación o función

$$f : X \to Y, \tag{2.1}$$

Versión de 5 de marzo de 2021, 6:25 h.

que se lee: « f **es una aplicación de** X **a** Y ». En ese diagrama X e Y son conjuntos, f es el nombre de la aplicación, X es el dominio de f, Y es el codomino y la flecha representa el proceso de asignación. Si x es un elemento de X, entonces —imitando la práctica habitual en relación con las *funciones elementales* tales como raíz cuadrada, seno, coseno, logaritmo, etc.—, se representa por $f(x)$ el elemento de Y que f hace corresponder a x y este hecho se representa con el símbolo "$\mapsto$" (o con "$\rightsquigarrow$") así:

$$x \mapsto f(x) \qquad (\text{o } \ x \rightsquigarrow f(x)) \qquad (\text{léase « } x \text{ va a } f(x) \text{ »}).$$

Por ejemplo, en el caso de la aplicación de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ descrita al principio de esta sección, si A es la matriz de coeficientes del sistema, la aplicación estaría definida por

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

y se representaría simbólicamente mediante el diagrama

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^n &\xrightarrow{T} \mathbf{R}^m \\ \mathbf{x} &\mapsto A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Resumiendo: Las dos ideas clave del concepto de aplicación o función son:

1) que los conjuntos de partida y de llegada están fijados de antemano, y

2) que el proceso de asignación asigna un valor particular bien determinado a cada uno de los elementos del conjunto de partida sin excepción.

Esto nos lleva a la siguiente idea: *en una aplicación dada puede haber algún o algunos elementos del codominio que no sean el valor asignado a ningún elemento del dominio, pero no puede haber ningún elemento del dominio al que no se le asigne ningún valor*.

En el ejemplo de la aplicación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, podría haber algún un vector $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ que no es imagen de ningún vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, es decir, que no haya ningún $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ tal que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$; en otras palabras, que el sistema de ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tenga ninguna solución.

Composición de aplicaciones

La propiedad fundamental de las aplicaciones, la cual sirve para caracterizarlas completamente, es la de poderse « concatenar » o *componer* "bajo las condiciones adecuadas". La idea de esta « concatenación » o *composición* es exactamente la idea de que un movimiento desde X hasta Y seguido de un movimiento desde Y hasta Z da lugar a un movimiento *compuesto* desde X hasta Z. Es también la idea que hay detrás de expresiones como "seno del ángulo doble" y demás funciones compuestas del cálculo y es el concepto clave en la *regla de la cadena* del cálculo de derivadas.

La condición bajo la cual dos aplicaciones pueden componerse es la de que el dominio de una sea precisamente el codominio de la otra, es decir, que se dé una situación como la siguiente:

$$f : X \to Y, \qquad g : Y \to Z.$$

En toda situación de este tipo se puede definir una nueva aplicación $h : X \to Z$ llamada la composición de f y g, la cual —siguiendo con la práctica habitual en relación con las *funciones elementales* cuando escribimos $\operatorname{sen}(2x)$, $\cos(\ln(x))$, etc.— es denotada

$$h = g \circ f \quad \text{o simplemente} \quad h = gf.$$

Esta aplicación compuesta está definida por la regla

$$(gf)(x) = g\big(f(x)\big), \tag{2.2}$$

y usando esta definición de la composición es inmediato demostrar la

Propiedad asociativa de la composición de aplicaciones:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Evaluación, valores, imágenes y conjunto imagen

Dada una aplicación $f : X \to Y$ y un elemento x de X, hemos visto que se representa por $f(x)$ aquél elemento del codominio Y, que la aplicación hace corresponder a x. Este elemento se llama brevemente "el *valor* de f en x" y el proceso de calcular este valor, $f(x)$, a partir del "dato" x se llama *evaluar* la aplicación f en x.

valor de f en x

evaluar la aplicación f

El valor de f en x, también se llama la *imagen* de x por f. Como vimos antes en el ejemplo de las butacas vacías, en algunos casos puede haber en el codominio de una aplicación algún o algunos elementos que no son imagen de ningún elemento. Esto indica que el conjunto de todos los elementos del codominio que sí son valores o imágenes de elementos del dominio es un *subconjunto* de Y que puede no ser todo Y. Este subconjunto del codominio se llama la *imagen de* f y se denota por $\mathrm{Im}(f)$ y a veces también por $f(X)$. Por tanto, para toda aplicación $f : X \to Y$ se cumple:

imagen de un elemento

Conjunto imagen.

$$\mathrm{Im}(f) \subset B.$$

Ecuaciones como problema inverso al de evaluación

El problema de evaluar una aplicación $f : X \to Y$ en un elemento $x \in X$ de su dominio consiste en hallar el valor de la aplicación f en x, es decir, hallar el elemento y del codominio tal que $y = f(x)$. La dificultad de este problema depende de lo complicada que sea la (regla de la) aplicación f, pero el problema siempre tiene solución y ésta es única.

En el problema inverso, dada la aplicación f, nos dan un elemento $y \in Y$ de su codominio y el problema consiste en determinar todos los elementos x de X cuya imagen por f sea y. En otras palabras, *el problema inverso al de evaluar una aplicación es el de resolver una ecuación*:

el problema inverso

$$f(x) = y.$$

Una tal ecuación puede tener solución o no y decir que *tiene solución* es lo mismo que decir que *el elemento y dado en el codominio de f pertenece al conjunto imagen de f*:

$$\text{la ecuación} \quad f(x) = y \quad \text{tiene alguna solución si y sólo si} \quad y \in \mathrm{Im}(f). \tag{2.3}$$

Por «*resolver* una ecuación $f(x) = y$» se entiende el determinar todos los elementos x del dominio de f que cumplen la ecuación. Cuando nos enfrentamos con este problema hay dos cuestiones fundamentales que se pueden plantear:

resolver una ecuación $f(x) = y$

1. La cuestión de *existencia* de solución de la ecuación $f(x) = y$, para $f : X \to Y$, se puede enunciar de cualquiera de las tres formas siguientes que son equivalentes:

   existencia

   - ¿Existe alguna solución de la ecuación $f(x) = y$?
   - ¿Existe algún elemento $x \in X$ tal que $f(x)$ sea igual a y?
   - ¿Es cierto que $y \in \mathrm{Im} f$?

2. La cuestión de *unicidad* se enuncia de la siguiente forma:

   unicidad

   - La ecuación $f(x) = y$ ¿tiene solución única?

Estas dos cuestiones están relacionadas con las propiedades de sobreyectividad e inyectividad que pueden tener las aplicaciones y que se explican a continuación.

Aplicaciones sobreyectivas, inyectivas y biyectivas

Aplicaciones sobreyectivas

Aplicación sobreyectiva

Una aplicación $f : X \to Y$ es *sobreyectiva* si todo elemento del codominio Y es imagen por f de algún elemento de X, es decir, si todo elemento de Y es el valor de f en algún elemento de X. Esto ocurre justamente cuando el conjunto imagen, $\mathrm{Im}(f)$, es, no simplemente una parte propia de Y, sino todo Y, es decir cuando $\mathrm{Im}(f) = Y$ ("el conjunto imagen es todo el codominio"). En términos de ecuaciones, la propiedad de sobreyectividad de una aplicación $f : X \to Y$ nos dice que

"para todo elemento $y \in Y$ la ecuación $f(x) = y$ tiene *al menos* una solución en X".

En el ejemplo de la aplicación $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, definida por una matriz A de m filas y n columnas (como, por ejemplo la matriz de coeficientes de un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas), la aplicación T es sobreyectiva solamente en el caso de que A tenga un pivote en cada fila.

Aplicaciones inyectivas

Aplicación inyectiva

Por otro lado, se dice que una aplicación $f : X \to Y$ es *inyectiva* si elementos distintos de X tienen imágenes distintas.

En el ejemplo de la aplicación $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, definida por una matriz A, la aplicación T es inyectiva solamente en el caso de que A tenga un pivote en cada columna (ya que ello excluye la existencia de variables libres en cualquier sistema de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y al no haber variables libres la solución del sistema es única).

La relación del concepto de aplicación inyectiva con la cuestión de unicidad de soluciones es evidente ya que: $f : X \to Y$ es *inyectiva* si y sólo si

"para todo elemento $y \in Y$ la ecuación $f(x) = y$ tiene *a lo sumo* una solución en X".

Aplicaciones biyectivas

Aplicación biyectiva

Las aplicaciones que son a la vez sobreyectivas e inyectivas se llaman *aplicaciones biyectivas* y se caracterizan por el hecho de que *emparejan* completamente todos los elementos del conjunto dominio con todos los del codominio.[1]

Las versiones « fuertes » de las cuestiones de existencia y unicidad

Las propiedades de sobreyectividad y de inyectividad son equivalentes a sendas "versiones fuertes" de la propiedad de existencia de solución y de unicidad de solución que pueden tener las ecuaciones. Para explicar estas "versiones fuertes" de existencia y de unicidad, supongamos dada una aplicación $f : X \to Y$. Esto hace que para cada elemento $y \in Y$ se puede plantear una ecuación

$$f(x) = y.$$

Entonces las propiedades fuertes de existencia y unicidad son:

Existencia fuerte:

Todas las posibles ecuaciones $f(x) = y$, con $y \in Y$ tienen al menos una *solución.*

Claramente, esto se cumple si y solamente si f es sobreyectiva (es decir, $\mathrm{Im}(f) = Y$), por tanto la propiedad de existencia fuerte es equivalente a la sobreyectividad.

[1] La existencia de una aplicación biyectiva de X a Y es la condición necesaria y suficiente para que ambos conjuntos tengan el mismo *número de elementos*.

Unicidad fuerte:

Todas las posibles ecuaciones $f(x) = y$, con $y \in Y$ tienen a lo sumo una *solución.*

Como vimos más arriba, esto es equivalente a la inyectividad.

Aplicaciones matriciales

Recordemos que el producto matriz-por-vector $A\mathbf{x}$ está definido como una combinación lineal de las columnas de A cuyos coeficientes son los elementos de $\mathbf{x}$ y que esto requiere que el número de elementos del vector $\mathbf{x}$ sea igual al número de columnas de A. El resultado, $A\mathbf{x}$ (una combinación lineal de columnas de A), es un vector con el mismo número de elementos que las columnas de A, es decir con tantos elementos como filas tiene A. Resumiendo: $\mathbf{x}$ tiene tantos elementos como columnas tiene A y $A\mathbf{x}$ tiene tantos elementos como filas tiene A. Por tanto, si A es una matriz de m filas y n columnas (es decir, una matriz $m \times n$), la correspondencia $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ define una aplicación de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ que podemos denotar $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Toda aplicación definida de esta forma mediante una matriz dada se llama una *aplicación matricial*.

Si A es $m \times n$ entonces $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es una aplicación $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

aplicación matricial

Ejercicios de la sección 2.1 El concepto general de aplicación

1. Supongamos que una aplicación $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ está definida por $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$ para alguna matriz A. ¿Cuántas filas y columnas tendrá A?

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Da una descripción geométrica de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, y definamos la aplicación $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ mediante $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$. Halla las imágenes de los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

4. Sean $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Definamos la aplicación $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ mediante $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$. Halla $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$.

En los ejercicios 5 a 8, con T definida como $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$, halla un vector $\mathbf{x}$ cuya imagen mediante T sea $\mathbf{b}$, y determina si este $\mathbf{x}$ es único.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & -5 & -9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

9. Sea A una matriz de orden 6×5. ¿Cómo deben ser a y b para definir $T : \mathbf{R}^a \to \mathbf{R}^b$ mediante $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$?

10. ¿Cuántas filas y columnas debe tener una matriz A para que defina una aplicación de $\mathbf{R}^4$ en $\mathbf{R}^5$ mediante la ecuación $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$?

Para los ejercicios 11 y 12, halla todas los $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^4$ cuya imagen sea el vector cero mediante la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ para la matriz A dada.

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

13. Sea $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y A la matriz del ejercicio 11. ¿Está $\mathbf{b}$ en la imagen de la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$?. ¿Por qué sí o por qué no?

14. Sea $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, y A la matriz del ejercicio 12. ¿Está $\mathbf{b}$ en la imagen de la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$?. ¿Por qué sí o por qué no?

En los ejercicios 15 a 18, usa un sistema de coordenadas rectangulares para representar gráficamente $\mathbf{u} = \binom{5}{2}$, $\mathbf{v} = \binom{-2}{4}$, y sus imágenes bajo la transformación T dada. Describe geométricamente la acción de T sobre un vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^2$.

15. $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

16. $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

17. $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

18. $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 19 y 20, indica para cada enunciado si es verdadero o falso, justificando cada una de tus respuestas.

19.

(a) El problema de unicidad de solución de un sistema de ecuaciones lineales es un problema de determinar si una aplicación es inyectiva.

(b) Si la aplicación matricial definida por la matriz de coeficientes de un sistema es sobreyectiva entonces se puede asegurar la existencia de solución.

(c) Una aplicación $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es sobreyectiva si a cada vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^n$ lo transforma en algún vector de $\mathbf{R}^m$.

(d) Si A es una matriz 3×2, entonces la aplicación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ no puede ser inyectiva.

(e) Si A es una matriz 4×3 entonces la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es una aplicación inyectiva de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^4$.

20.

(a) Si un sistema tiene una única solución, al cambiar los términos independientes al azar, el nuevo sistema podría tener muchas soluciones.

(b) Si un sistema cumple la propiedad de existencia fuerte de solución, al cambiar los términos independientes al azar, el nuevo sistema podría dejar de cumplirla.

(c) Una aplicación $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es inyectiva si cada vector en $\mathbf{R}^n$ se transforma en un único vector en $\mathbf{R}^m$.

(d) El codominio de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

(e) Si A es una matriz 3×2, entonces la aplicación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ no puede ser sobreyectiva.

2.2. Aplicaciones lineales entre espacios $\mathbf{R}^n$

Definición de aplicación lineal y el principio de superposición

Debido a las propiedades del producto matriz por vector, toda aplicación matricial $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ goza de las siguientes propiedades

(a) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ para cualesquiera vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en el dominio de T.

(b) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ para cualesquier número c y cualquier vector $\mathbf{u}$ en el dominio de T.

Toda aplicación de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ que cumpla estas dos propiedades se llama una aplicación lineal:

DEFINICIÓN 2.2.2

Aplicación lineal

Se llama aplicación lineal *a toda aplicación $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ que cumpla estas dos propiedades:*

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ *para cualesquiera vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en $\mathbf{R}^n$.*
2. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ *para cualesquier número c y cualquier vector $\mathbf{u}$ en $\mathbf{R}^m$.*

En términos de esta definición, lo que se ha dicho al principio, puede expresarse de la siguiente forma:

Toda aplicación matricial es una aplicación lineal.

Como consecuencia de las propiedades que aparecen en la definición de aplicación lineal, toda aplicación lineal T tiene la propiedad de "conservar las combinaciones lineales de vectores" en el sentido de que, para cualquier combinación lineal $c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p$ de vectores del dominio de T, se cumple:

$$T(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p) = c_1T(\mathbf{u}_1) + \cdots + c_pT(\mathbf{u}_p). \tag{2.4}$$

Esta propiedad se conoce en Física y en Ingeniería como el *principio de superposición* y puede considerarse como una descripción física de una aplicación lineal. No sólo es esta propiedad consecuencia de la linealidad, sino que de ella se deducen las dos propiedades que definen a las aplicaciones lineales, de forma que toda aplicación que cumpla el principio de superposición es automáticamente una aplicación lineal. *principio de superposición*

2.2.1 **Ejercicio de tarea.** Demuestra que toda aplicación que cumpla el principio de superposición es una aplicación lineal.

Solución: Tomando $p = 2$, $c_1 = c_2 = 1$ en (2.4) esa ecuación toma la forma $T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)$, que es la primera propiedad. Tomando $p = 1$, en (2.4) esa ecuación toma la forma $T(c_1\mathbf{u}_1) = c_1T(\mathbf{u}_1)$, que es la segunda propiedad.

Otra consecuencia importante de la definición de aplicación lineal es que toda aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ evaluada en el vector cero de $\mathbf{R}^n$ da como resultado el vector cero de $\mathbf{R}^m$: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (esto es consecuencia directa de la segunda propiedad poniendo en ella $c = 0$).

Composición de aplicaciones lineales.

La propiedad clave de las aplicaciones lineales es el hecho de que la composición de dos aplicaciones lineales es también una aplicación lineal. Esto es un hecho muy fácil de demostrar: Si $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $S : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ son aplicaciones lineales, dado que el dominio de S (es decir, $\mathbf{R}^m$) es el mismo conjunto que el codominio de T existe una aplicación compuesta ST

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "ST"'] & \mathbf{R}^m \arrow[r, "S"] & \mathbf{R}^p \end{tikzcd}$$

definida por $ST(\mathbf{x}) = S\big(T(\mathbf{x})\big)$. Usando esta definición, se demuestran fácilmente las dos propiedades de linealidad para ST:

1. $ST(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = S\big(T(\mathbf{u} + \mathbf{v})\big) = S\big(T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})\big) = S\big(T(\mathbf{u})\big) + S\big(T(\mathbf{v})\big) = ST(\mathbf{u}) + ST(\mathbf{v})$.
2. $ST(c \cdot \mathbf{u}) = S\big(T(c \cdot \mathbf{u})\big) = S\big(c \cdot T(\mathbf{u})\big) = c \cdot S\big(T(\mathbf{u})\big) = c \cdot ST(\mathbf{u})$.

En resumen:

La aplicación compuesta de dos aplicaciones lineles es también una aplicación lineal.

Ejemplos de aplicaciones lineales.

Homotecias y simetría central del plano. Una homotecia es una transformación de un espacio vectorial en la que cada vector queda multiplicado por un número real positivo fijo llamado la constante de la homotecia. Análogamente una simetría central multiplica cada vector por un número real negativo. Es un sencillo ejercicio comprobar que estos dos tipos de transformaciones son aplicaciones lineales.

Proyección del plano sobre una recta que pasa por el origen. Los casos más sencillos son las proyecciones sobre el eje x, que es la aplicación matricial $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ definida por la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, y sobre el eje y, que es la aplicación matricial $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ definida por la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. En general, la proyección sobre la recta de múltiplos de un vector (a, b) con $a^2 + b^2 = 1$ es la aplicación matricial $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ definida por la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{smallmatrix}\right)$.

Observación: La matriz anterior es igual al producto de matrices $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} a & b \end{smallmatrix}\right)$. ¿Casualidad?

Simetrías axiales del plano. Una simetría axial del plano es una transformación lineal del plano que deja fijo cada punto de una recta llamada el *eje de simetría* y transforma cada uno de los demás puntos en el simétrico respecto de dicha recta. Los ejemplos más sencillos son las simetrías respecto a los ejes. La simetría respecto al eje x es la aplicación matricial $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ definida por la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ mientras que la simetría respecto al eje y es la aplicación matricial $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ definida por la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Giros del plano. Todo giro del plano (movimiento rígido) en torno al origen define una aplicación lineal. En el caso del giro de 180° la correspondiente aplicación lineal es también una simetría central y es la aplicación matricial $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ definida por la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) = -I$. El giro de 90° es la aplicación matricial $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ definida por la matriz $A = J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y puesto que dos giros seguidos de 90° es lo mismo que uno de 180°, se puede concluir que $J^2 = -I$, lo cual es fácil de comprobar.

2.2.2 **Ejercicio de tarea.** Demostrar que un giro de ángulo φ es la aplicación matricial $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ definida por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

La aplicación lineal definida por una operación elemental de filas

Supongamos que denotamos “op” una operación elemental de filas a realizar sobre las matrices de m filas. En particular op se puede realizar sobre matrices de m filas y una sola columna, es decir, sobre los vectores de $\mathbf{R}^m$. En consecuencia, esta operación elemental define una aplicación de $\mathbf{R}^m$ en $\mathbf{R}^m$:

$$\mathsf{op} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m. \tag{2.5}$$

Y se tiene:

El resultado de realizar una operación elemental de filas sobre una matriz A cuyas columnas son los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbf{R}^m$, es el mismo que si se realiza la operación sobre cada columna de A es decir:

$$\mathsf{op}A = [\mathsf{op}(\mathbf{a}_1) \ \cdots \ \mathsf{op}(\mathbf{a}_n)]. \tag{2.6}$$

Además:

La aplicación (2.5) determinada por una operación elemental de filas es una aplicación lineal.

Para demostrarlo supongamos que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ son vectores de $\mathbf{R}^m$ y $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de ellos:

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{b}. \tag{2.7}$$

Esto significa que los coeficientes $c_1, \ldots, c_k$ constituyen una *solución particular* de la ecuación vectorial (2.7) y por tanto también del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$[\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_k \ \mathbf{b}]$. Si realizamos sobre ésta la operación elemental de filas op obtendremos la matriz

$$\mathsf{op}[\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_k \ \mathbf{b}] = [\mathsf{op}(\mathbf{v}_1) \ \cdots \ \mathsf{op}(\mathbf{v}_k) \ \mathsf{op}(\mathbf{b})],$$

que es la matriz de un sistema equivalente al anterior y para el cual, puesto que las operaciones elementales de filas no cambian las soluciones de un sistema, esos mismos coeficientes $c_1, \ldots, c_k$ son también una solución particular. En otras palabras,

$$c_1\mathsf{op}(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_k\mathsf{op}(\mathbf{v}_k) = \mathsf{op}(\mathbf{b}).$$

Esto demuestra que op cumple el principio de superposición y por tanto es una aplicación lineal.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1, Ejercicio 2.

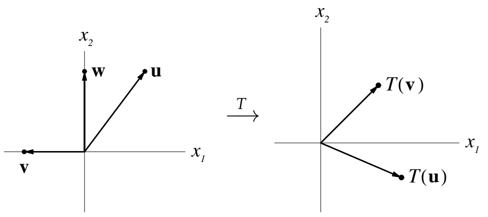
Ejercicios de la sección 2.2 Aplicaciones lineales entre espacios $\mathbf{R}^n$

1. Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una transformación lineal que transforma

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Usa el hecho de que T es lineal para encontrar las imágenes bajo T de $3\mathbf{u}$, $2\mathbf{v}$ y $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$.

2. La figura muestra los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ junto con las imágenes $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$ bajo la acción de una transformación lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Copia cuidadosamente esta figura, y luego dibuja la imagen $T(\mathbf{w})$ con tanta precisión como sea posible.



Sugerencia: Primero, escribe $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

3. Sean

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

y sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una transformación lineal que transforma $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{y}_2$. Halla las imágenes de $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

4. Sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$, y sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una transformación lineal que transforma $\mathbf{x}$ en $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2$. Encuentre una matriz tal que $T(\mathbf{x})$ sea $A\,\mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x}$.

En los ejercicios 5 y 6, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica cada una de tus respuestas.

5.

(a) Una transformación lineal es un tipo especial de función.

(b) Si A es una matriz de orden 3×5 y T una transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$, entonces el dominio de T es $\mathbf{R}^3$.

(c) Si A es una matriz de orden $m \times n$, entonces el conjunto imagen de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es $\mathbf{R}^2$.

(d) Cuando se realizan dos aplicaciones lineales una después de la otra, el efecto combinado puede no ser siempre una aplicación lineal.

(e) Una transformación T es lineal si, y sólo si, $T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$ para todo $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en el dominio de T y para todos los números c_1 y c_2.

6.

(a) Toda transformación matricial es una transformación lineal.

(b) Si $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gira los vectores del plano alrededor del origen en un ángulo φ, entonces T es una aplicación lineal.

(c) Si $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es una transformación lineal y $\mathbf{b}$ es un vector de $\mathbf{R}^m$, entonces una pregunta de unicidad es: ¿Está $\mathbf{b}$ en la imagen de T?.

(d) Una transformación lineal conserva las operaciones de suma de vectores y de multiplicación por números.

(e) El principio de superposición es una descripción física de una transformación lineal.

7. Supongamos que los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ generan $\mathbf{R}^n$ y sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal. Demuestra que si $T(\mathbf{v}_i) = 0$ para $i = 1, \dots, p$. entonces T es la transformación cero. Esto es, demuestra que si $\mathbf{x}$ es cualquier vector en $\mathbf{R}^n$, entonces $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

8. Dados $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{p}$ en $\mathbf{R}^n$, la recta que pasa por $\mathbf{p}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ tiene la ecuación paramétrica $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\,\mathbf{v}$. Demuestra que una transformación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ transforma esta recta en otra recta o en un único punto.

9. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores linealmente independientes en $\mathbf{R}^3$, y sea P el plano que pasa por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{0}$. La ecuación paramétrica de P es $\mathbf{x} = s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}$ (con s, t en $\mathbf{R}$). Demuestra que una transformación lineal $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ transforma P en un plano que pasa por $\mathbf{0}$, o en una recta que pasa por $\mathbf{0}$, o es la transformación cero que lleva todo vector de $\mathbf{R}^3$ en el origen de $\mathbf{R}^3$. ¿Qué condición deben cumplir $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$ para que la imagen de P sea un plano?

10. El segmento rectilíneo que va desde $\mathbf{0}$ hasta un vector $\mathbf{u}$ es el conjunto de puntos de la forma $t\mathbf{u}$, con $0 < t < 1$. Demuestra que una transformación lineal T lleva este segmento al segmento que que va desde $\mathbf{0}$ hasta $T(\mathbf{u})$.

11. Este ejercicio muestra que una aplicación lineal transforma una recta cualquiera en otra recta o en un punto.

(a) Demuestra que la recta que pasa por los puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ en $\mathbf{R}^n$ tiene la ecuación paramétrica $\mathbf{x} = (1-t)\mathbf{p} + t\,\mathbf{q}$ con t en $\mathbf{R}$.

(b) El segmento de recta de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ es el conjunto de puntos de la forma $(1-t)\mathbf{p} + t\,\mathbf{q}$ con $0 \leq t \leq 1$. Demuestra que una transformación lineal T transforma este segmento en otro segmento o en un único punto.

12. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en $\mathbf{R}^n$. Es posible demostrar que todos los puntos del paralelogramo P determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la forma $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ con $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$. Sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal. Explica por qué la imagen de un punto en P mediante la transformación T está en el paralelogramo determinado por $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$.

13. Definamos $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ por la fórmula $f(x) = mx + b$.

(a) Demuestra que f es una transformación lineal cuando $b = 0$.

(b) Indica una propiedad de las transformaciones lineales que se viole cuando $b \neq 0$.

(c) ¿Por qué se dice que f es una "función lineal"?

14. Una *transformación afín* $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ tiene la forma $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde A es una matriz de orden $m \times n$ y $\mathbf{b}$ es un vector en $\mathbf{R}^m$. Demuestra que si $\mathbf{b} \neq 0$ entonces T no es una transformación lineal.

15. Sean $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un conjunto ligado en $\mathbf{R}^n$. Explica por qué el conjunto $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)\}$ es también ligado.

En los ejercicios 16 a 20, los vectores se escriben como coordenadas, por ejemplo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, y $T(\mathbf{x})$ se escribe como $T(x_1, x_2)$.

16. Demuestra que la transformación T definida por $T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, 3|x_2|)$ no es lineal.

17. Demuestra que la transformación T definida por $T(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + 4, 5x_2)$ no es lineal.

18. Sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal. Demuestra que si T transforma dos vectores linealmente independientes en un conjunto ligado, entonces la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tiene alguna solución no trivial.

Sugerencia: Supongamos que u y v en $\mathbf{R}^n$ son linealmente independientes, pero que $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$ son linealmente dependientes. Entonces $c_1T(\mathbf{u}) + c_2T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para algunos pesos c_1 y c_2, donde al menos uno de ellos no es cero.

19. Sea $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación que refleja cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en el plano $x_3 = 0$, es decir: $T(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, -x_3)$. Demuestra que T es una transformación lineal.

20. Sea $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación que proyecta cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ sobre el plano $x_2 = 0$, de modo que $T(\mathbf{x}) = (x_1, 0, x_3)$. Demuestra que T es una transformación lineal.

En los ejercicios 21 y 22, la matriz dada determina una transformación lineal T. Halla todos los vectores $\mathbf{x}$ que satisfagan $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

21. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & -5 \\ -9 & 7 & -8 & 0 \\ -6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & -3 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -9 & -4 & -9 & 4 \\ 5 & -8 & -7 & 6 \\ 7 & 11 & 16 & -9 \\ 9 & -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

23. Sea $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ y A la matriz del ejercicio 21. ¿Está $\mathbf{b}$ en la imagen de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$?. En caso afirmativo, halla un $\mathbf{x}$ cuya imagen por la transformación sea $\mathbf{b}$.

24. Sea $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$ y A la matriz del ejercicio 22. ¿Está $\mathbf{b}$ en la imagen de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$?. En caso afirmativo, halla un $\mathbf{x}$ cuya imagen por la transformación sea $\mathbf{b}$.

2.3. La matriz de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$

Según vimos en la sección anterior, toda aplicación matricial $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ definida por una matriz A de m filas y n columnas es una aplicación lineal. Las aplicaciones matriciales tienen la ventaja de estar definidas mediante una fórmula sencilla como es el producto matriz por vector; pero muchas veces nos encontramos con una aplicación que sabemos que es una aplicación lineal y nos gustaría saber si es una aplicación matricial y en ese caso averiguar cuál es su matriz para poder calcularla mediante el producto matriz por vector. El hecho fundamental de esta sección es el siguiente teorema:

TEOREMA 2.3.1

La matriz canónica de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$

Toda aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es una aplicación matricial. Esto es: existe una matriz A, llamada la matriz canónica *de la aplicación lineal T, tal que para todo vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.*

Para demostrar esto tratemos de descubrir cuál podría ser la matriz A. La clave para esto es el hecho de que dado cualquier vector $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$, la matriz identidad $n \times n$ multiplicada por $\mathbf{x}$ da como resultado el propio $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

pero este producto matriz por vector es igual a la combinación lineal $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ de las columnas de la matriz identidad I_n, las cuales vamos a denotar a partir de ahora mediante $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ o sea:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, tenemos que para todo vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ se verifica:

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n = \mathbf{x}.$$

Ahora bien, como T es una aplicación lineal,

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n)$$

de forma que tenemos $T(\mathbf{x})$ expresado como una combinación lineal, la cual, a su vez, es igual a un producto matriz por vector, $A\mathbf{x}$, usando la matriz $A = [T(\mathbf{e}_1)\ \ T(\mathbf{e}_2)\ \ldots\ T(\mathbf{e}_n)]$, con lo que el teorema queda demostrado. Pero además hemos descubierto lo siguiente:

Toda aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es una aplicación matricial cuya matriz tiene por columnas los n vectores de $\mathbf{R}^m$ obtenidos al aplicar T a los vectores columna de la matriz identidad I_n:

$$T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \ldots, T(\mathbf{e}_n),$$

es decir que la matriz de T es

$$A = [T(\mathbf{e}_1)\ \ T(\mathbf{e}_2)\ \ldots\ T(\mathbf{e}_n)]$$

Esta matriz se llama la *matriz canónica de la aplicación lineal T.*

matriz canónica de la aplicación lineal T.

2.3.1 Ejercicio de tarea. Escribe la matriz canónica de la aplicación lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ que lleva cada vector $\mathbf{x}$ en el resultado de aplicar a $\mathbf{x}$ un giro de 90° en sentido horario en torno al origen.

Solución: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Matrices elementales

Según vimos al final de la sección anterior, toda operación elemental de filas que se pueda realizar sobre las matrices de m filas define una aplicación lineal $\mathtt{op} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$. La matriz canónica de esta aplicación lineal, según se ha visto, tiene por columnas los resultados $\mathtt{op}(\mathbf{e}_1), \ldots, \mathtt{op}(\mathbf{e}_m)$ de aplicar esta operación elemental a las columnas de la matriz identidad I_m. En consecuencia, usando la propiedad (2.6), tenemos que la matriz canónica de la operación elemental op es:

$$E = [\mathtt{op}(\mathbf{e}_1) \;\; \mathtt{op}(\mathbf{e}_2) \;\; \ldots \;\; \mathtt{op}(\mathbf{e}_m)] = \mathtt{op}(I_m).$$

En otras palabras: *la matriz canónica de la operación elemental* op *es la matriz obtenida cuando se realiza dicha operación elemental sobre las filas de la matriz identidad $m \times m$.* De acuerdo con esto, se da la siguiente definición:

Matriz Elemental.

DEFINICIÓN 2.3.3

Matriz elemental

Se llama matriz elemental *a toda matriz obtenida aplicando una operación elemental de filas a una matriz identidad.*

Para cualquier matriz $A = [\mathbf{a}_1 \;\; \ldots \;\; \mathbf{a}_n]$ de m filas el resultado de realizar una operación elemental op sobre las filas de A se puede expresar en términos de la matriz elemental $E = \mathtt{op}(I_m)$ que es la matriz canónica de la aplicación lineal definida por la operación elemental op:

$$\mathtt{op}(A) = \mathtt{op}[\mathbf{a}_1 \;\; \ldots \;\; \mathbf{a}_n] = [\mathtt{op}(\mathbf{a}_1) \;\; \ldots \;\; \mathtt{op}(\mathbf{a}_n)] = [E\mathbf{a}_1 \;\; \ldots \;\; E\mathbf{a}_n] = E[\mathbf{a}_1 \;\; \ldots \;\; \mathbf{a}_n] = EA.$$

Resumiendo:

Realizar una operación elemental de filas sobre una matriz A de m filas da el mismo resultado que realizar esa operación elemental sobre la matriz identidad I_m y luego multiplicar la matriz resultante por A.

$$E = \mathtt{op}(I_m), \qquad \mathtt{op}(A) = EA.$$

2.3.2 Ejercicio de tarea. Escribe la matriz elemental 2×2 correspondiente a la operación elemental de reemplazo de filas $F_2 + 3F_1$.

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Núcleo de T: El núcleo de una aplicación lineal T es el conjunto solución de $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Si A es la matriz canónica de T, entonces $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ y el núcleo de T es justamente el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que es lo que hemos llamado el espacio nulo de A. Por tanto, si $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$:

El núcleo de T es el espacio nulo de A: $\ker(T) = \operatorname{Nul} A$.

Espacio imagen de T: Evidentemente, el espacio imagen de la aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ definida por una matriz A $m \times n$ está generado por *las imágenes* de los n vectores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ de $\mathbf{R}^n$ (las columnas de la matriz identidad $n \times n$)

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Gen}\{T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)\}.$$

Pero estas imágenes $T(\mathbf{e}_1) = A\mathbf{e}_1, \ldots, T(\mathbf{e}_n) = A\mathbf{e}_n$ son precisamente las columnas de A ya que $A\mathbf{e}_1$ es igual a la primera columna de A, $A\mathbf{e}_2$ es la segunda columna de A, etc. Por ejemplo,

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad A\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Así pues, el espacio imagen de la aplicación lineal definida por A está generado por las columnas de A y por tanto, si $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$:

El espacio imagen de T es el espacio columna de A: $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Col}\, A$.

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1, Ejercicio 2.

Ejercicios de la sección 2.3 La matriz de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$

En los ejercicios 1 a 10, T es una aplicación lineal. Se pide que para cada una de ellas halles su matriz canónica.

1. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$, $T(\mathbf{e}_1) = (3, 1, 3, 1)$ y $T(\mathbf{e}_2) = (-5, 2, 0, 0)$, donde $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

2. $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $T(\mathbf{e}_1) = (1, 3)$, $T(\mathbf{e}_2) = (4, -7)$, y $T(\mathbf{e}_3) = (-5, 4)$, donde $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ son las columnas de la matriz identidad 3×3.

3. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es un giro con centro en el origen de $3\pi/2$ radianes (ángulos positivos representan giros en sentido contrario al de las agujas del reloj).

4. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es un giro con centro en el origen de $-\pi/4$ radianes (ángulos negativos representan giros en el sentido de las agujas del reloj).

Pista: $T(\mathbf{e}_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

5. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es una aplicación de cizalladura vertical que transforma $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, pero no modifica al vector $\mathbf{e}_2$.

6. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es una aplicación de cizalladura horizontal que transforma $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_1$, pero no modifica al vector $\mathbf{e}_1$.

7. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ primero gira los puntos del plano alrededor del origen un ángulo de $-3\pi/4$ radianes, y luego los refleja en el eje horizontal x_1.

Pista: $T(\mathbf{e}_1) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

8. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ primero refleja los puntos del plano sobre el eje horizontal x_1, y luego sobre la diagonal del primer y tercer cuadrante (la recta de ecuación $x_2 = x_1$).

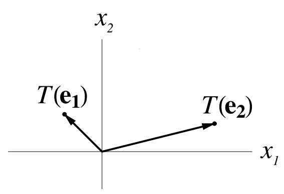
9. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ primero realiza un cizalladura horizontal que transforma $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1$ (sin modificar $\mathbf{e}_2$), y luego realiza una reflexión en la recta de ecuación $x_2 = -x_1$.

10. $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ primero realiza una reflexión sobre el eje vertical, x_2, y luego gira el plano con centro en el origen un ángulo de $\pi/2$ radianes.

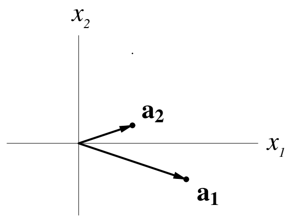
11. Una aplicación lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ primero realiza una reflexión en el eje x_1, y luego realiza una reflexión en el eje x_2. Muestra que T puede describirse como un giro y halla el ángulo de ese giro.

12. Muestra que la aplicación del ejercicio 8 es en realidad un giro con centro en el origen. ¿Cuál es el ángulo de giro?

13. Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la aplicación lineal tal que $T(\mathbf{e}_1)$ y $T(\mathbf{e}_2)$ son los vectores mostrados en la figura. Usa la figura para trazar el vector $T(2, 1)$.



14. Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una aplicación lineal con matriz canónica $A = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$, donde $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ se muestran en la figura. Usa la figura para dibujar la imagen de $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bajo la aplicación T.



En los ejercicios 15 y 16 halla los elementos desconocidos de la matriz, suponiendo que las ecuaciones se cumplen para todos los valores de las variables.

15. $\begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_3 \\ 4x_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$

En los ejercicios 17 a 20, demuestra que T es una aplicación lineal mostrando que se puede expresar como una aplicación matricial. Observa que $x_1, x_2, \ldots$ no son vectores sino números (elementos de vectores).

17. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$.

18. $T(x_1, x_2) = (2x_2 - 3x_1, x_1 - 4x_2, 0, x_1)$.

19. $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3)$.

20. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 3x_3 - 4x_4$ ($T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$).

21. Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una aplicación lineal tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 4x_1 + 5x_2)$. Halla un vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^2$ tal que $T(\mathbf{x}) = (3, 8)$.

22. Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una aplicación lineal tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -x_1 + 3x_2, 3x_1 - 2x_2)$. Halla un vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^2$ tal que $T(\mathbf{x}) = (-1, 4, 9)$.

En los ejercicios 23 y 24, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica cada una de tus respuestas.

23.

(a) Toda transformación lineal es una transformación matricial.

(b) Una aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ está completamente determinada por su efecto sobre las columnas de la matriz identidad $n \times n$.

(c) Toda aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ siempre lleva el origen de $\mathbf{R}^n$ al origen de $\mathbf{R}^m$.

(d) Si $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $S : \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^p$ son aplicaciones lineales, la composición $S \circ T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ existe si y sólo si el número de columnas de la matriz de T es igual al número de filas de la matriz de S.

(e) Toda operación elemental de filas que actúe sobre matrices de n filas determina una aplicación lineal de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$.

(f) En la matriz elemental correspondiente a una operación elemental de filas todos los elementos son iguales a 1 o a 0.

24.

(a) No toda aplicación lineal de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ tiene por qué ser una aplicación matricial.

(b) Las columnas de la matriz canónica de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ son las imágenes de las columnas de la matriz identidad $n \times n$.

(c) La matriz canónica de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ que refleja los puntos en el eje horizontal, el eje vertical o el origen tiene la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, donde a y b son ± 1.

(d) En la matriz elemental correspondiente a una operación elemental de *intercambio* de filas todos los elementos son iguales a 1 o a 0.

(e) En toda matriz elemental correspondiente a una operación elemental de *reemplazo* de filas todos los elementos de la diagonal son iguales a 1.

En los ejercicios 25 a 28, averigua si la aplicación lineal es inyectiva y si es sobreyectiva. Justifica cada respuesta.

25. La aplicación del ejercicio 17.

26. La aplicación del ejercicio 2.

27. La aplicación del ejercicio 19.

28. La aplicación del ejercicio 14.

En los ejercicios 29 y 30, usa la notación usada en los ejercicios de la sección 1.2 para describir las posibles formas escalonadas de la matriz canónica de una aplicación lineal como la indicada.

29. $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ donde T es inyectiva.

30. $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ donde T es sobreyectiva.

31. Sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una aplicación lineal cuya matriz canónica es A. Completa el siguiente enunciado para hacerlo verdadero: "T es inyectiva si, y sólo si, A tiene ________ columnas pivote". Explica por qué el enunciado es verdadero.

32. Sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una aplicación lineal cuya matriz canónica es A. Completa el siguiente enunciado para hacerlo verdadero: "T es sobreyectiva si, y sólo si, A tiene ________ columnas pivote".

33. Demuestra el siguiente teorema: *Sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ la aplicación matricial $T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ para alguna matriz B de orden $m \times n$. Si A es la matriz canónica de T, entonces $A = B$.*

Sugerencia: Muestra que A y B tienen las mismas columnas.

34. ¿Por qué la pregunta de si una aplicación lineal es sobreyectiva es una pregunta de existencia?

35. Si una aplicación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es sobreyectiva, ¿puede afirmarse que exista alguna relación entre m y n? Si T es inyectiva, ¿qué se puede decir de m y n?

36. Sean $S : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ y $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ aplicaciones lineales. Muestra que la aplicación $\mathbf{x} \mapsto T\big(S(\mathbf{x})\big)$ de $\mathbf{R}^p$ a $\mathbf{R}^m$ es una aplicación lineal.

Sugerencia: Calcula $T\big(S(c\mathbf{u} + d\mathbf{v})\big)$ para $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbf{R}^p$ y números c y d. Justifica cada paso del cálculo, y explica por qué éste conduce a la conclusión deseada.

En los ejercicios 37 a 40, sea T la aplicación lineal cuya matriz canónica es la dada. En los ejercicios 37 y 38, averigua si T es una aplicación inyectiva. En los ejercicios 39 y 40, averigua si T es una aplicación sobreyectiva. Justifica tus respuestas.

37. $\begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 & 4 \\ 8 & 3 & -4 & 7 \\ 4 & -9 & 5 & -3 \\ -3 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

38. $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 & -9 \\ 10 & 6 & 16 & -4 \\ 12 & 8 & 12 & 7 \\ -8 & -6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

39. $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 & 7 & 5 \\ 6 & -8 & 5 & 12 & -8 \\ -7 & 10 & -8 & -9 & 14 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & -6 \\ -5 & 6 & -6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

40. $\begin{pmatrix} 9 & 13 & 5 & 6 & -1 \\ 14 & 15 & -7 & -6 & 4 \\ -8 & -9 & 12 & -5 & -9 \\ -5 & -6 & -8 & 9 & 8 \\ 13 & 14 & 15 & 2 & 11 \end{pmatrix}$.

Los ejercicios 41 a 44 demuestran casos especiales de las propiedades de las matrices elementales. Aquí A es una matriz 3×3 e $I = I_3$.

41. Usa la ecuación $\text{fila}_i(AB) = \text{fila}_i(A) \cdot B$ para demostrar que para $i = 1, 2, 3$,

$$\text{fila}_i(A) = \text{fila}_i(I) \cdot A.$$

42. Demuestra que si las filas 1 y 2 de A se intercambian, entonces el resultado es igual a EA, donde E es la matriz elemental formada al intercambiar las filas 1 y 2 de I.

43. Demuestra que si la fila 3 de A se multiplica por 5, entonces el resultado es igual a EA, donde E es la matriz elemental formada al multiplicar la fila 3 de I por 5.

44. Demuestra que si la fila 3 de A es reemplazada por $\text{fila}_3(A) - 4\,\text{fila}_1(A)$, el resultado es igual a EA, donde E es la matriz elemental formada a partir de I al reemplazar la fila 3 de I por $\text{fila}_3(I) - 4\,\text{fila}_1(I)$.