Universidade Vigo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

Fac. CC. Económicas e Empresariais
Campus de Vigo
E-36310 Vigo

Tel. 986 812 440
Fax 986 812 401
webs.uvigo.es/depc05
depc05@uvigo.es

Calculo de Probabilidades y Variables aleatorias

Apellidos: **Nombre:** **DNI:**

Para facilitar la corrección de la prueba, marque en la tabla la letra de la respuesta que considere correcta para cada una de las cuestiones propuestas[1].

Pregunta 1	a	b	c
Pregunta 2	a	b	c

1. *(2 puntos)* Al bus de datos de un computador, se encuentran conectados cinco (5) dispositivos. Se sabe que la probabilidad de que un dispositivo cualquiera utilice el bus es $p = 0.05$. Si se sabe que las probabilidades de utilización del bus son independientes entre sí, se desea conocer la probabilidad de los eventos: A = *Ningún dispositivo utiliza el bus* y B = *Exactamente 2 dispositivos acceden al bus*. (solución redondeado a 3 decimales)

   a) 0.226 y 0.021
   b) 0.774 y 0.021
   c) 0.25 y 0.002

   solución: b) X=*nº de dispositivos conectado al bus* $\sim Bi(n = 5, p = 0.05)$
   $P(A) = P(X = 0) = \binom{5}{0}0.05^0(1 - 0.05)^5 = dbinom(0, size = 5, prob = 0.05) = 0.7737809$
   $P(B) = P(X = 2) = \binom{5}{2}0.05^2(1 - 0.05)^3 = dbinom(2, size = 5, prob = 0.05) = 0.02143438$

2. *(2 puntos)* Un componente electrónico de un sistema puede provenir de uno cualquiera de tres fabricantes con probabilidades $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.50$, $p_3 = 0.25$. Las probabilidades de que el componente funcione correctamente durante un periodo de tiempo especificado son iguales a 0.1, 0.2 y 0.4, respectivamente, para los tres fabricantes. Calcular la probabilidad de que un componente elegido aleatoriamente funcione durante el periodo de tiempo especificado.

   a) 0.766
   b) 0.233
   c) 0.225

   solución correcta: c) $P\left(funcione\right) = P\left(funcione/F_1\right) P\left(F_1\right) + P\left(funcione/F_2\right) P\left(F_2\right) + P\left(funcione/F_3\right) P\left(F_3\right) = 0.25 * 0.1 + 0.5 * 0.2 + 0.25 * 0.4 = 0.225$

1. *(2 puntos)* Entre dos sistemas A y B se establece un canal de comunicación. El canal es propenso a errores con una frecuencia del 10 %. Los mensajes son enviados desde A hasta B con un código desconocido para B, el cual tratará de descifrar. Si el mensaje llega sin errores, existe una probabilidad de 0.75 de que pueda ser decodificado. Si el mensaje llega con algún error, puede ser que éste sea detectado, en este caso la probabilidad de decodificar el mensaje es 0.50. Si no se detecta el error la probabilidad de decodificar el mensaje es 0.05. Cuando ocurre un error, éste se detecta con probabilidad 0.30. Si se descifra con éxito el mensaje, ¿cuál es la probabilidad de que se haya detectado un error de transmisión?. Nota: Se habla de detección de errores sólo cuando éstos ocurren.

2. *(2 puntos)* En una colección de 10 vídeos, de duración de 60 minutos, por accidente se dañaron los vídeos en algunos puntos, de modo que, en promedio, hay un error cada 10 minutos siguiendo una distribución Poisson. Una persona toma uno de los vídeos al azar para reproducir un trozo de 8 minutos de duración.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya errores a lo largo de la reproducción de ese trozo?

   Solución: Sea X_t =*nº de errores en la reproducción en un intervalo* $(0, t) \sim Poiss(\lambda = 0.1 * t)$. Entonces

   $$P(X_8 = 0) = \exp 0.8 \frac{0.8^0}{0!} = \exp 0.8 = dpois(0, lambda = 0.8) = 0.4493$$

   □

[1] 2 respuestas incorrectas penalizan una respuesta correcta. Las preguntas en blanco no penalizan.
No se considerarán las respuestas contestadas sin su correspondiente desarrollo.

Universidade Vigo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

Fac. CC. Económicas
e Empresariais
Campus de Vigo
E-36310 Vigo

Tel. 986 812 440
Fax 986 812 401
webs.uvigo.es/depc05
depc05@uvigo.es

b) ¿Cuál debería ser la duración del vídeo, para que no haya errores a lo largo de ésta, con un porcentaje de certeza superior a 75 %?

Solución: Sea $X_t =$*nº de errores en la reproducción en un intervalo* $(0,t) \sim Poiss(\lambda = 0.1 * t)$. Entonces

$$P(X_t = 0) = \exp -0.1t \frac{(-0.1t)^0}{0!} = \exp 0.1t \geq 0.95$$

por lo tanto,

$$\log \exp -0.1t = -0.1t \geq \log 0.75 = -0.2877t \geq 2.877$$

es decir, la duración no debería ser superior a 3 minutos. □

c) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de dos vídeos contengan cada uno más de cinco errores?

Solución: Sea $Y =$*nº de videos con más de cuatro errores* $\sim Bi(10, p)$, con $p = P(X_{60} > 5) = 1 - ppois(5, lambda = 6) = 0.5543$. Entonces

$$P(Y < 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - sum(dbinom(0:1, size = 10, prob = 0.5543)) = 0.9958$$

□

UniversidadeVigo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

Fac. CC. Económicas
e Empresariais
Campus de Vigo
E-36310 Vigo

Tel. 986 812 440
Fax 986 812 401
webs.uvigo.es/depc05
depc05@uvigo.es

Cálculo de Probabilidades y Variables aleatorias

Apellidos:	**Nombre:**	**DNI:**

Para facilitar la corrección de la prueba, marque en la tabla la letra de la respuesta que considere correcta para cada una de las cuestiones propuestas[2].

Pregunta 1	a	b	c
Pregunta 2	a	b	c
Pregunta 3	a	b	c

1. *(2 puntos)* Se sabe que aproximadamente el 90 % de los matriculados en cierta Ingeniería son hombres. La probabilidad de que en un grupo de cinco estudiantes escogidos al azar haya alguna chica y la probabilidad de que en una clase de 40 personas, menos del 20 % sean mujeres es:

   a) 0.4095 y 0.9489

   b) 0.4095 y 0.9580

   c) 0.9999 y 0.9489

   solución: 0.4095 y 0.9580 $P(algunachica) = 1 - P(todochicos) = 1 - P(Bi(5, 0.9) = 5) = 1 - 0.95 \times 0.1 = 0.4095$ // $P(Bi(40, .9) > 32) = sum(dbinom(33 : 40, size = 40, prob = 0.9)) = 0.9580981$

2. *(2 puntos)* Suponiendo que la probabilidad de que un cliente sea atendido en un servicio telefónico es de 0.75, la probabilidad de que un cliente necesite tres llamadas para ser atendido y el número esperado de llamadas para ser atendido es:

   a) 0.0117 y 0.3333

   b) 0.0117 y 1.3333

   c) 0.0469 y 1.3333

   Solución: Sea *Y=nº de llamadas de teléfono para ser atendido=X+1* donde *X=nº de intentos antes de ser atendido* $\sim Geomtrica(p = 0.75)$

   $$P(Y = 3) = P(X = 2) = 0.25^2 0.75$$

   El número esperado de llamadas es: $E(Y) = E(X) + 1 = \frac{0.25}{0.75} + 1$ □

---

1. *(3 puntos)* 5. En una empresa local, se tienen 4 clientes C1, C2, C3, C4 conectados en red a un servidor. El porcentaje de requerimientos que envían los clientes al servidor es de 20 %, el 15 %, el 15 % y el 50 % respectivamente. El software entre los clientes y servidores (comúnmente llamado middleware) no es a prueba de fallos y cierta cantidad de los requerimientos enviados se pierden antes de llegar al servidor, a saber: el 1 %, el 2 %, el 5 % y el 5 % respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que un requerimiento cualquiera elegido al azar se pierda antes de llegar al servidor?.

2. *(3 puntos)* Un test contiene 10 preguntas con 4 respuestas alternativas posibles de las que sólo una es cierta. Si se contesta completamente al azar, calcular:

   a) Probabilidad de aprobar si cada pregunta acertada es un punto. Puntuación total media.

   Solución: Sea X= *Nº de pregintas acertadas* $\sim Bi\,(n = 10, p = 0.25)$, y en esta situación coincide con la nota del examen. Por lo tanto,

   $$P\,(X \geq 5) = \sum_{i=5}^{10} \binom{10}{i} 0.25^i (1 - 0.25)^{10-i} = sum(dbinom(5 : 10, size = 10, prob = 0.25)) = 0.07813$$

   Su valor esperado es $E(X) = np = 10 * 0.25 = 2.5$ □

[2]2 respuestas incorrectas penalizan una respuesta correcta. Las preguntas en blanco no penalizan. No se considerarán las respuestas contestadas sin su correspondiente desarrollo.

Universida de Vigo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

Fac. CC. Económicas
e Empresariais
Campus de Vigo
E-36310 Vigo

Tel. 986 812 440
Fax 986 812 401
webs.uvigo.es/depc05
depc05@uvigo.es

b) Ahora se penaliza cada pregunta restandole 0.5 puntos, probabilidad de aprobar y puntación total media. Suponer que la puntuación está acotada inferiormente a 0 y que no se pueden dejar preguntas en blanco.

Solución: Sea Z= *Nº de puntos sin la restricción de valores no negativos*, entonces los valores de Z son

Z	
0-10*0.5=	-5
1-9*0.5=	-3.5
2-8*0.5=	-2
3-7*0.5=	-0.5
4-6*0.5=	1
5-5*0.5=	2.5
6-4*0.5=	4
7-3*0.5=	5.5
8-2*0.5=	7
9-1*0.5=	8.5
10-0*0.5=	10

Por lo tanto la variable Z_+ tiene probabilidad $P(Z_+ = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = sum(dbinom(0 : 3, size = 10, prob = 0.25))$
$P(Z_+ = 1) = P(X = 4) = dbinom(4, size = 10, prob = 0.25)$
$P(Z_+ = 2.5) = P(X = 5) = dbinom(5, size = 10, prob = 0.25)$
$P(Z_+ = 4) = P(X = 6) = dbinom(6, size = 10, prob = 0.25)$
$P(Z_+ = 5.5) = P(X = 7) = dbinom(7, size = 10, prob = 0.25)$
$P(Z_+ = 7) = P(X = 8) = dbinom(8, size = 10, prob = 0.25)$
$P(Z_+ = 8.5) = P(X = 9) = dbinom(9, size = 10, prob = 0.25)$
$P(Z_+ = 10) = P(X = 10) = dbinom(10, size = 10, prob = 0.25)$
Su valor esperado es $E(Z_+) = \sum_i z_i * P(Z_+ = z_i) = 0 * 0.7758751 + 1 * 1.459980e - 01 + 2.5 * 5.839920e - 02 + 4 * 1.622200e - 02 + 5.5 * 3.089905e - 03 + 7 * 3.862381e - 04 + 8.5 * 2.861023e - 05 + 10 * 9.536743e - 07 = 0.3768349$ □