Análise Matemática. Curso 2022-2023.
Grao en Enxenería Informática. ESEI Ourense.
Departamento de Matemáticas. Universidade de Vigo.
Data: 06/10/2022

Bloque I

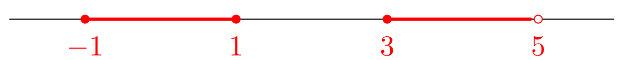
APELIDOS	NOME	DNI	NOTA

1. Representar gráficamente os seguintes conxuntos e determinar, se existen, as cotas superiores e inferiores e o supremo, ínfimo, máximo e mínimo:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\} \cup [3, 5)$ *b*) $B = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \text{ y } 5 - x^2 + 2x > 2\right\}$

   Solución: *a*) Representamos gráficamente o conxunto tendo en conta que

$$|x| \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$



$$\begin{gathered} M(A) = [5, +\infty), \\ A \cap M(A) = \emptyset \implies \text{non existe} \max(A), \\ \sup(A) := \min(M(A)) = 5. \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} m(A) = (-\infty, -1], \\ A \cap m(a) = \{-1\} \implies \min(A) = -1, \\ \inf(A) := \max(m(A)) = -1. \end{gathered}$$

b) Primeiro estudamos o conxunto

$$\{x \in \mathbb{R} : 5 - x^2 + 2x > 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 < 0\}.$$

Calculamos as solucións da ecuación $y(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$. Logo a función ten signo constante nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ e $(3, +\infty)$ e para determinar o seu signo basta obter o valor de $y(x)$ nun punto x calqueira de cada intervalo:

$$\begin{gathered} x = -2 \Longrightarrow y(-2) = 5 > 0 \Longrightarrow y(x) > 0 \text{ para todo } x \in (-\infty, -1), \\ x = 0 \Longrightarrow y(0) = -3 < 0 \Longrightarrow y(x) < 0 \text{ para todo } x \in (-1, 3), \\ x = 4 \Longrightarrow y(4) = 5 > 0 \Longrightarrow y(x) > 0 \text{ para todo } x \in (3, +\infty). \end{gathered}$$

Logo

$$\{x \in \mathbb{R} : 5 - x^2 + 2x > 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 < 0\} = (-1, 3),$$

e polo tanto $A = (-1, 3) \cap (-\infty, 0] = (-1, 0]$ sendo a súa representación gráfica

$$M(A) = [0, +\infty),$$
$$A \cap M(A) = 0 \implies \text{máx}(A) = 0,$$
$$\sup(A) := \text{mín}(M(A)) = 0.$$

$$m(A) = (-\infty, -1],$$
$$A \cap m(A) = \emptyset \implies \text{non existe mín}(A),$$
$$\text{ínf}(A) := \text{máx}(m(A)) = -1.$$

2. Xustificar se as seguintes series son converxentes ou non:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{4^n} \qquad\qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot n^4}$$

a) Como $a_n = \dfrac{(n+1)^2}{4^n} > 0$ trátase dunha serie de termos positivos. Usaremos o criterio do cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+2)^2}{4^{n+1}}}{\dfrac{(n+1)^2}{4^n}} = \frac{(n+2)^2\, 4^n}{(n+1)^2\, 4^{n+1}} = \frac{(n+2)^2\, 4^n}{(n+1)^2\, 4^n \cdot 4} = \frac{(n+2)^2}{4(n+1)^2}$$

Entón,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{4(n+1)^2} = \frac{1}{4} < 1,$$

xa que os polinomios do numerador e do denominador teñen o mesmo grado, e polo criterio do cociente dedúcese que a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{4^n}$ é **converxente**.

b) Simplificamos o termo xeral

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot n^4} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot n^4} = \frac{(n+1) \cdot n}{n^4} = \frac{n^2 + n}{n^4} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}.$$

Entón,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

e ambas series son series armónicas xeneralizadas converxentes porque $\alpha = 2 > 1$ e $\alpha = 3 > 1$, respectivamente. Polo tanto, a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot n^4}$ é **converxente** por ser suma de series converxentes.