Ejercicios de la sección 1.6 Dependencia e independencia lineal

(Ejercicios para hacer en clase: 6, 10, 14, 15, 20, 24, 25, 28, 29, 31.)
(Ejercicios con solución o indicaciones: 1, 2, 3, 4, 9, 13, 19, 21, 22, 23, 26, 27, 30, 32.)

En los ejercicios 1 a 4, sean

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

►**1.** Para cada uno de los conjuntos $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{u},\mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{u},\mathbf{z}\}$, $\{\mathbf{v},\mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{v},\mathbf{z}\}$ y $\{\mathbf{w},\mathbf{z}\}$ indica razonadamente si es libre (vectores linealmente independientes) o ligado (vectores linealmente dependientes).

►**2.** La respuesta al ejercicio 1, ¿implica que $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z}\}$ es libre (vectores linealmente independientes)?.

►**3.** Para determinar si $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z}\}$ es ligado, ¿es prudente verificar si $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{z}$?.

►**4.** ¿Es el conjunto de vectores $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z}\}$ libre o ligado?

En los ejercicios 5 a 8, determina si los vectores son linealmente independientes. Justifica cada una de tus respuestas.

5. $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$

►**6.** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$

En los ejercicios 9 a 12, determina si las columnas de la matriz dada son linealmente independientes. Justifica cada una de tus respuestas.

►**9.** $\begin{pmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \\ -1 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

►**10.** $\begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -4 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 \\ -3 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$

En los ejercicios 13 y 14 se pide: (a) ¿para qué valores de h está $\mathbf{v}_3$ en $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$?, y (b) ¿para qué valores de h es $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ un conjunto ligado (vectores linealmente dependientes). Justifica cada una de tus respuestas.

►**13.** $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{pmatrix}.$

►**14.** $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ h \end{pmatrix}.$

En los ejercicios 15 a 18, halla el o los valores de h para los cuales los vectores son linealmente dependientes. Justifica cada una de tus respuestas.

►**15.** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ h \end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ h \\ 4 \end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ h \\ -9 \end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}.$

Determina por inspección si los vectores en los ejercicios 19 a 24 son linealmente independientes. Justifica cada una de tus respuestas.

►**19.** $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

►**20.** $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

►**21.** $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

►**22.** $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

►**23.** $\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

►**24.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 25 y 26, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica cada respuesta después de hacer una lectura cuidadosa del texto.

►**25.**

(a) Las columnas de una matriz A son linealmente independientes si la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene la solución trivial.

(b) Si S es un conjunto de vectores ligado (los vectores de S son linealmente dependientes), entonces cada vector de S es una combinación lineal de los otros vectores en S.

(c) Las columnas de cualquier matriz de orden 4×5 son linealmente dependientes.

(d) Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son linealmente independientes, y si $\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\}$ es un conjunto ligado (los vectores son linealmente dependientes), entonces $\mathbf{z}$ está en $\text{Gen}\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$.

►**26.**

(a) Dos vectores son linealmente dependientes si, y sólo si, están en una misma recta que pasa por el origen.

(b) Si un conjunto de vectores contiene menos vectores que coordenadas tiene cada uno de los vectores, entonces el conjunto es libre (los vectores son linealmente independientes).

Versión de 17 de enero de 2023, 11:46 h.

(c) Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son linealmente independientes y $\mathbf{z}$ está en $\text{Gen}\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$, entonces el conjunto $\{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\}$ es ligado.

(d) Si un conjunto de vectores de $\mathbf{R}^n$ es ligado (los vectores son linealmente dependientes), entonces el conjunto contiene más vectores que coordenadas tiene cada vector.

En los ejercicios 27 a 30, describe las posibles formas escalonadas de la matriz. Utiliza el símbolo de punto, "•", para representar un elemento no nulo y el de asterisco, "$*$", para representar un elemento que puede ser cero o no.

▶**27.** A es una matriz de orden 3×3 con columnas linealmente independientes.

▶**28.** A es una matriz de orden 2×2 con columnas linealmente dependientes.

▶**29.** A es una matriz de orden 4×2 cuyas columnas son los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ (es decir, $A=[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$) y $\mathbf{a}_2$ no es múltiplo de $\mathbf{a}_1$.

▶**30.** A es una matriz de orden 4×3 cuyas columnas son los vectores $\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ (es decir, $A=[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$), tal que $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\}$ es libre (vectores linealmente independientes) y $\mathbf{a}_3$ no está en $\text{Gen}\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\}$.

▶**31.** ¿Cuántas columnas pivote debe tener una matriz de orden 7×5 si sus columnas son linealmente independientes?. ¿Por qué?

▶**32.** ¿Cuántas columnas pivote debe tener una matriz de orden 5×7 si sus columnas generan a $\mathbf{R}^5$? ¿Por qué?

33. Construye dos matrices A y B de orden 3×2 tales que $A\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tenga únicamente la solución trivial, y $B\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tenga una solución no trivial.

34. (a) Llena el espacio en blanco de la siguiente afirmación: Si A es una matriz de orden $m\times n$, entonces las columnas de A son linealmente independientes si, y sólo si, A tiene ______ columnas pivote.

(b) Explica por qué la afirmación en (a) es verdadera.

Los ejercicios 35 y 36 deben resolverse sin realizar operaciones de filas.
Sugerencia: Escribe $A\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ como una ecuación vectorial.

35. Dada $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5\\ -5 & 1 & -4\\ -3 & -1 & -4\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, observa que la tercera columna es la suma de las dos primeras columnas. Halla una solución no trivial de $A\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

36. Dada $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6\\ -7 & 5 & 3\\ 9 & -3 & 3\end{pmatrix}$, observa que la primera columna más dos veces la segunda es igual a la tercera. Halla una solución no trivial de $A\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

En los ejercicios 37 a 42 $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, y $\mathbf{v}_4$ son vectores de $\mathbf{R}^4$. Cada enunciado es o bien verdadero (siempre se cumple) o bien falso (hay algún caso en que no se cunple). Si la afirmación es falsa, da un ejemplo que demuestre que el enunciado no siempre es cierto (tal ejemplo se llama un *contraejemplo* del enunciado). Si la afirmación es verdadera, da una justificación (un ejemplo particular *no sirve* para explicar por qué una afirmación siempre es cierta)

37. Si $\mathbf{v}_3=2\,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ es ligado (vectores linealmente dependientes).

38. Si $\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$, entonces $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ es ligado (vectores linealmente dependientes).

39. Si $\mathbf{v}_2$ no es un múltiplo de $\mathbf{v}_1$, entonces $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ es libre (vectores linealmente independientes).

40. Si $\mathbf{v}_3$ no es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4$, entonces $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ es libre (vectores linealmente independientes).

41. Si $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ es un conjunto ligado (vectores linealmente dependientes), entonces $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ también es ligado (vectores linealmente dependientes).

42. Si $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ son linealmente independientes entonces $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ también son linealmente independientes.
Sugerencia: Piensa en $x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+x_3\,\mathbf{v}_3+0\cdot\mathbf{v}_4=\mathbf{0}$.

43. Supongamos que A es una matriz de orden $m\times n$ con la propiedad de que para cada $\mathbf{b}$ *en*$\mathbf{R}^m$ la ecuación $A\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tiene cuando mucho una solución. Utiliza la definición de independencia lineal para explicar por qué las columnas de A deben de ser linealmente independientes.

44. Supongamos que una matriz A de orden $m\times n$ tiene n columnas pivote. Explica por qué para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^m$ la ecuación $A\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tiene cuando mucho una solución. [Indicación: Explica por qué $A\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$ no puede tener infinidad de soluciones.]

En los ejercicios 45 y 46, usa tantas columnas de A como sea posible para construir una matriz B con la propiedad de que la ecuación $B\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tenga solamente la solución trivial. Resuelve $B\,\mathbf{x}=\mathbf{0}$ como comprobación.

45. $A=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 & -7 & 2\\ -9 & 4 & 5 & 11 & -7\\ 6 & -2 & 2 & -4 & 4\\ 5 & -1 & 7 & 0 & 10\end{pmatrix}$.

46. $A=\begin{pmatrix} 12 & 10 & -6 & -3 & 7 & 10\\ -7 & -6 & 4 & 7 & -9 & 5\\ 9 & 9 & -9 & -5 & 5 & -1\\ -4 & -3 & 1 & 6 & -8 & 9\\ 8 & 7 & -5 & -9 & 11 & -8\end{pmatrix}$.

47. Con A y B como las del ejercicio 45, elige una columna $\mathbf{v}$ de A que no se haya usado en la construcción de B, y determina si $\mathbf{v}$ está en el conjunto generado por las columnas de B.

48. Repite el ejercicio 47 con las matrices A y B del ejercicio 46. Explica tus resultados, suponiendo que B se construyó de la manera indicada.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 1.6

1. Ninguno es ligado; todos son libres porque en cada caso tenemos dos vectores no nulos que no son uno múltiplo del otro.

2. No.

3. No. La forma de hacerlo es averiguar si existe una relación de dependencia lineal entre los cuatro, es decir una solución no trivial del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A = [\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}\ \ \mathbf{z}]$, es decir, si ese sistema tiene alguna variable libre. Y para averiguar eso basta averiguar si A tiene alguna columna en que no haya una posición pivote.

4. Es ligado porque la matriz $A = [\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}\ \ \mathbf{z}]$ no tiene bastantes filas como para que pueda haber una posición pivote en cada columna.

9. Hallamos una forma escalonada de la matriz dada. Si hacemos las operaciones elementales $F_1 \leftrightarrow F_4$, $F_2 - 3F_1$, $F_3 + F_1$, $F_3 - F_2$, $F_4 + 4F_2$, $F_3 \leftrightarrow F_4$ la matriz dada se transforma en:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde vemos que hay tres posiciones pivote, una en cada columna y por tanto el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es determinado, no tiene ninguna solución no trivial; entre las columnas de la matriz dada no existe ninguna relación de dependencia lineal, son linealmente independientes.

13. (a) Para los valores que hagan que el sistema $[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2]\mathbf{x} = \mathbf{v}_3$ sea compatible. Para responder ponemos la matriz ampliada de ese sistema, $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & h \end{pmatrix}$. Realizando las operaciones elementales $F_2 + 3F_1$, $F_3 - 2F_1$ se obtiene la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & h-10 \end{pmatrix}$ que indica un sistema incompatible independientemente del valor de h. En consecuencia, no hay ningún valor de h que haga que $\mathbf{v}_3$ esté en $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(b) Como $\mathbf{v}_2$ es un múltiplo de $\mathbf{v}_1$ ($\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_1$), independientemente del valor de h el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es ligado (para todo valor de h es ligado).

19. No son independientes porque son más de dos vectores de $\mathbf{R}^2$.

21. No son independientes porque el segundo es un múltiplo del primero (igual al primero multiplicado por $\frac{3}{2}$).

22. No son independientes porque uno de los vectores es el vector nulo.

23. Son independientes porque son sólo dos vectores y ninguno es múltiplo del otro.

26. (a) La recta es única si no son ambos nulos. En caso contrario vale cualquier recta por el origen, (b) Podría ser uno un múltiplo de otro, (c) El sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es $[\mathbf{x}\ \ \mathbf{y}\ \ \mathbf{z}]$ es indeterminado... incluso si $\mathbf{z}$ es igual a $\mathbf{x}$ o a $\mathbf{y}$, (d) Dos vectores de $\mathbf{R}^3$ que sean múltiplo uno del otro son linealmente dependientes.

27. $\begin{pmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

32. Cinco, porque debe tener una posición pivote en cada una de sus 5 filas, lo que implica cinco columnas con pivote.