TEMA 8. Interpolación.

Análisis Matemático

Profesor: José Ángel Cid

Grao en Enxeñaría Informática
Departamento de Matemáticas
Universidad de Vigo.

Dados los valores de una función f en $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$ del intervalo $[a, b]$ queremos encontrar un polinomio p de grado menor o igual que n cumpliendo

$$p(x_i) = f(x_i)\,, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n\,.$$

Éste es el problema de interpolación polinomial de Lagrange.

Existencia y unicidad de solución

Si escribimos el polinomio p en la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

e imponemos las condiciones de interpolación se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n & = & f(x_0), \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n & = & f(x_1), \\ \cdots & & \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n & = & f(x_n). \end{array} \right.$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j) \right),$$

se llama determinante de Vandermonde y es distinto de cero porque todos los puntos x_i, $i = 0, 1, \cdots, n$, son distintos.

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j) \right),$$

se llama determinante de Vandermonde y es distinto de cero porque todos los puntos x_i, $i = 0, 1, \cdots, n$, son distintos. Por tanto, el sistema tiene solución única para cualesquiera valores $f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$, lo que nos garantiza que existe un único polinomio de grado menor o igual que n que satisface las condiciones de interpolación.

Método de Lagrange

Se basa en la construcción de los polinomios de Lagrange, $L_i(x)$, $i=0,1,\cdots,n$, que satisfacen

$$L_i(x_i) = 1\,, \quad L_i(x_j) = 0 \quad si\ i \neq j. \tag{1.1}$$

Método de Lagrange

Se basa en la construcción de los polinomios de Lagrange, $L_i(x)$, $i = 0, 1, \cdots, n$, que satisfacen

$$L_i(x_i) = 1\,, \quad L_i(x_j) = 0 \quad si\ i \neq j. \tag{1.1}$$

La expresión de los polinomios de Lagrange viene dada por

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$i = 0, 1, \cdots, n\,.$

Método de Lagrange

Se basa en la construcción de los polinomios de Lagrange, $L_i(x)$, $i=0,1,\cdots,n$, que satisfacen

$$L_i(x_i) = 1\,, \quad L_i(x_j) = 0 \quad si\ i \neq j. \tag{1.1}$$

La expresión de los polinomios de Lagrange viene dada por

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$i=0,1,\cdots,n$. Una vez calculados los polinomios $L_i(x)$, $i=0,1,\cdots,n$, el polinomio de interpolación viene dado por

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x)\,. \tag{1.2}$$

El método de Lagrange es conveniente si queremos resolver varios problemas de interpolación con los mismos nodos x_i, porque una vez calculados los polinomios $L_i(x)$, sólo tendríamos que modificar los valores de $f(x_i)$.

El método de Lagrange es conveniente si queremos resolver varios problemas de interpolación con los mismos nodos x_i, porque una vez calculados los polinomios $L_i(x)$, sólo tendríamos que modificar los valores de $f(x_i)$. Sin embargo si añadimos algún dato más de interpolación debemos calcular otra vez los polinomios $L_i(x)$.

Ejercicio

Consideremos la siguiente tabulación

x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
$J_0(x)$	0.2239	0.1666	0.1104	0.0555	0.0025	-0.0484

de la función de Bessel de orden cero definida por

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} t)\,dt.$$

Utilizar un polinomio de interpolación cuadrático para encontrar los valores $J_0(2{,}15)$, $J_0(2{,}25)$ *y* $J_0(2{,}35)$.

Error de interpolación

Consideremos una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y supongamos que hemos calculado el polinomio $p_n(x)$ que interpola a la función f en $n + 1$ puntos distintos, x_i, $i = 0, 1, \cdots, n$, del intervalo $[a, b]$.

Error de interpolación

Consideremos una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y supongamos que hemos calculado el polinomio $p_n(x)$ que interpola a la función f en $n + 1$ puntos distintos, x_i, $i = 0, 1, \cdots, n$, del intervalo $[a, b]$.
Si estimamos $f(x)$ mediante el valor del polinomio de interpolación $p_n(x)$ se produce un error que llamaremos error de interpolación

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) .$$

Suponiendo que $f \in C^{n+1}[a, b]$ se satisface que

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

donde ξ es un punto intermedio entre $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x$.

Suponiendo que $f \in C^{n+1}[a,b]$ se satisface que

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

donde ξ es un punto intermedio entre $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x$.
La fórmula anterior no nos sirve para calcular el error exacto porque no conocemos cuál es el punto ξ, pero sí que nos proporciona una estimación del error

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\max\limits_{t\in[a,b]} \left| f^{n+1)}(t) \right|}{(n+1)!} \left| (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \right|.$$

Interpolación con splines cúbicos

Supongamos ahora que queremos construir una curva que se ajuste por ejemplo al perfil de un pato.

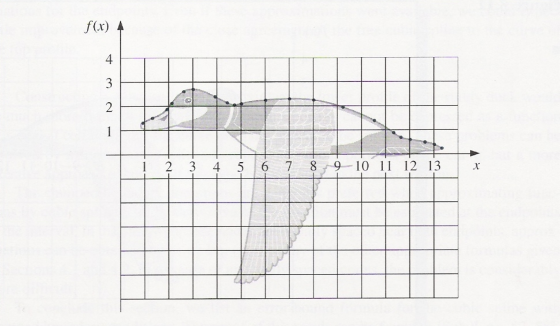

Figura: Silueta de un pato

Seleccionamos una serie de puntos sobre la silueta y los interpolamos mediante un polinomio como hemos visto en la sección anterior

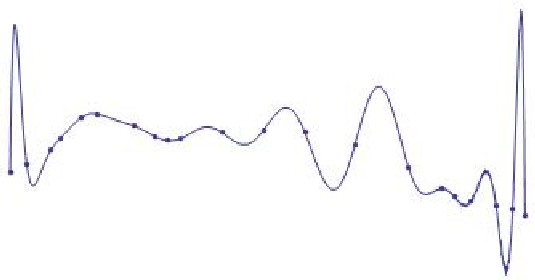

Figura: Interpolación con un polinomio

Seleccionamos una serie de puntos sobre la silueta y los interpolamos mediante un polinomio como hemos visto en la sección anterior

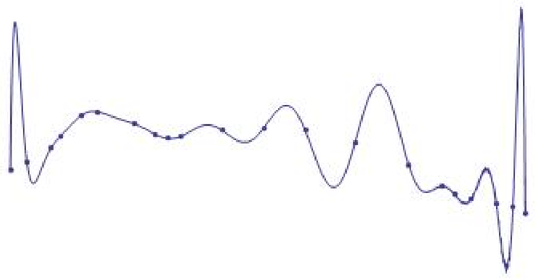

Figura: Interpolación con un polinomio

Como se observa gráficamente, cuando el número de datos de interpolación es grande la interpolación polinomial no es adecuada.

Una alternativa para subsanar este inconveniente es utilizar funciones polinómicas a trozos que llamaremos splines.

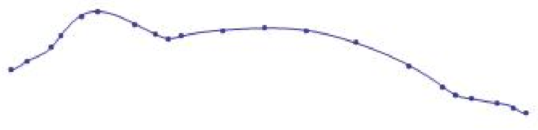

Figura: Interpolación con un spline cúbico natural

Una alternativa para subsanar este inconveniente es utilizar funciones polinómicas a trozos que llamaremos splines.

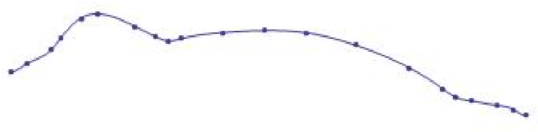

Figura: Interpolación con un spline cúbico natural

En particular el resultado de interpolar en el ejemplo anterior con un spline cúbico natural proporciona un resultado satisfactorio

Un spline es simplemente una función polinómica a trozos, más concretamente, diremos que una función $s(x)$ es un spline en el intervalo $[a, b]$, si existe una partición del intervalo $[a, b]$,

$$P = \{a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b\}$$

de tal forma que $s(x)$ es un polinomio en $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Los puntos x_i, $i = 1, \cdots, n-1$, se llaman nodos del spline.

La interpolación lineal a trozos es el ejemplo más simple de interpolación con funciones splines. En este caso, la clase de funciones interpolantes son funciones continuas que restringidas a cada intervalo de la partición P son rectas.

La interpolación lineal a trozos es el ejemplo más simple de interpolación con funciones splines. En este caso, la clase de funciones interpolantes son funciones continuas que restringidas a cada intervalo de la partición P son rectas. Gráficamente, el spline s que interpola linealmente a la función f en los puntos $x_0, x_1, \cdots, x_n$, es la poligonal que une los puntos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Si llamamos $s_i(x)$ a la restricción de $s(x)$ al intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, entonces se tiene que

$$s_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), \qquad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Si llamamos $s_i(x)$ a la restricción de $s(x)$ al intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, entonces se tiene que

$$s_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), \qquad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

En muchas aplicaciones este spline, muy fácil de calcular y de evaluar, es suficiente para obtener una buena aproximación de la función f.

El inconveniente que presenta la interpolación lineal a trozos es que la función que se obtiene no es en general derivable en los nodos x_i.

El inconveniente que presenta la interpolación lineal a trozos es que la función que se obtiene no es en general derivable en los nodos x_i.

Para obtener curvas suaves suelen utilizarse splines cúbicos de clase 2, es dedir dada una partición

$$P = \{\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

interpolamos con funciones de clase 2 que restringidas a los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ son polinomios de grado 3.

El inconveniente que presenta la interpolación lineal a trozos es que la función que se obtiene no es en general derivable en los nodos x_i.
Para obtener curvas suaves suelen utilizarse splines cúbicos de clase 2, es dedir dada una partición

$$P = \{\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

interpolamos con funciones de clase 2 que restringidas a los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ son polinomios de grado 3.
Si llamamos $s_i(x)$ a la restricción del spline $s(x)$ al intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, entonces

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad i = 0, 1, \cdots, n-1,$$

por lo que tenemos $4n$ incógnitas a determinar. Por otra parte, el spline tiene que cumplir las siguientes condiciones:

(i) Condiciones de interpolación:

$$s_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \qquad s_{n-1}(x_n) = f(x_n).$$

(i) Condiciones de interpolación:

$$s_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \qquad s_{n-1}(x_n) = f(x_n).$$

(ii) Condiciones de continuidad (en nodos interiores):

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}), \qquad i = 0, \cdots, n-2.$$

(i) Condiciones de interpolación:

$$s_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \qquad s_{n-1}(x_n) = f(x_n).$$

(ii) Condiciones de continuidad (en nodos interiores):

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}), \qquad i = 0, \cdots, n-2.$$

(iii) Condiciones de suavidad (en nodos interiores):

$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}), \qquad i = 0, \cdots, n-2.$$

$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}), \qquad i = 0, \cdots, n-2.$$

Observemos que se obtienen en total $4n-2$ ecuaciones, lo que significa que para determinar el spline $s(x)$ de forma única necesitamos imponer 2 condiciones adicionales. Dichas condiciones suelen imponerse sobre los extremos del intervalo siendo las más habituales

$$s_0''(a)=0, \quad s_{n-1}''(b)=0, \quad \text{(spline cúbico natural).}$$

Ejercicio

Calcular el spline cúbico natural $s(x)$ *que interpola los datos* $\{(0,0),(1,-2),(4,8)\}$.

SOLUCIÓN: El spline cúbico natural será de la forma:

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ s_1(x) = a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Ahora imponemos las distintas condiciones que debe cumplir el spline para obtener sus coeficientes:

1. Condiciones de interpolación:

$$s(0) = 0 \iff s_0(0) = 0 \iff \boxed{a_0 = 0} \quad \text{(ec. 1)}$$

$$s(1) = -2 \iff s_1(1) = -2 \iff \boxed{a_1 = -2} \quad \text{(ec. 2)}$$

$$s(4) = 8 \iff s_1(4) = 8 \iff \boxed{a_1 + 3b_1 + 9c_1 + 27d_1 = 8} \quad \text{(ec. 3)}$$

1. Condiciones de interpolación:

$$s(0) = 0 \iff s_0(0) = 0 \iff \boxed{a_0 = 0} \quad \text{(ec. 1)}$$

$$s(1) = -2 \iff s_1(1) = -2 \iff \boxed{a_1 = -2} \quad \text{(ec. 2)}$$

$$s(4) = 8 \iff s_1(4) = 8 \iff \boxed{a_1 + 3b_1 + 9c_1 + 27d_1 = 8} \quad \text{(ec. 3)}$$

2. Condiciones de continuidad:

$$s(1^-) = s(1^+) \iff s_0(1) = s_1(1) \iff \boxed{a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = a_1} \text{(ec. 4)}$$

1. Condiciones de interpolación:

$$s(0) = 0 \iff s_0(0) = 0 \iff \boxed{a_0 = 0} \quad \text{(ec. 1)}$$

$$s(1) = -2 \iff s_1(1) = -2 \iff \boxed{a_1 = -2} \quad \text{(ec. 2)}$$

$$s(4) = 8 \iff s_1(4) = 8 \iff \boxed{a_1 + 3b_1 + 9c_1 + 27d_1 = 8} \quad \text{(ec. 3)}$$

2. Condiciones de continuidad:

$$s(1^-) = s(1^+) \iff s_0(1) = s_1(1) \iff \boxed{a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = a_1} \text{(ec. 4)}$$

3. Condiciones de clase 1 (continuidad de la primera derivada):

$$s'(1^-) = s'(1^+) \iff s_0'(1) = s_1'(1) \iff \boxed{b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1} \quad \text{(ec. 5)}$$

1. Condiciones de interpolación:

$$s(0) = 0 \iff s_0(0) = 0 \iff \boxed{a_0 = 0} \quad \text{(ec. 1)}$$

$$s(1) = -2 \iff s_1(1) = -2 \iff \boxed{a_1 = -2} \quad \text{(ec. 2)}$$

$$s(4) = 8 \iff s_1(4) = 8 \iff \boxed{a_1 + 3b_1 + 9c_1 + 27d_1 = 8} \quad \text{(ec. 3)}$$

2. Condiciones de continuidad:

$$s(1^-) = s(1^+) \iff s_0(1) = s_1(1) \iff \boxed{a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = a_1} \text{(ec. 4)}$$

3. Condiciones de clase 1 (continuidad de la primera derivada):

$$s'(1^-) = s'(1^+) \iff s_0'(1) = s_1'(1) \iff \boxed{b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1} \quad \text{(ec. 5)}$$

4. Condiciones de clase 2 (continuidad de la segunda derivada):

$$s''(1^-) = s''(1^+) \iff s_0''(1) = s_1''(1) \iff \boxed{2c_0 + 6d_0 = 2c_1} \quad \text{(ec. 6)}$$

1. Condiciones de interpolación:

$$s(0) = 0 \iff s_0(0) = 0 \iff \boxed{a_0 = 0} \quad \text{(ec. 1)}$$

$$s(1) = -2 \iff s_1(1) = -2 \iff \boxed{a_1 = -2} \quad \text{(ec. 2)}$$

$$s(4) = 8 \iff s_1(4) = 8 \iff \boxed{a_1 + 3b_1 + 9c_1 + 27d_1 = 8} \quad \text{(ec. 3)}$$

2. Condiciones de continuidad:

$$s(1^-) = s(1^+) \iff s_0(1) = s_1(1) \iff \boxed{a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = a_1} \text{(ec. 4)}$$

3. Condiciones de clase 1 (continuidad de la primera derivada):

$$s'(1^-) = s'(1^+) \iff s_0'(1) = s_1'(1) \iff \boxed{b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1} \quad \text{(ec. 5)}$$

4. Condiciones de clase 2 (continuidad de la segunda derivada):

$$s''(1^-) = s''(1^+) \iff s_0''(1) = s_1''(1) \iff \boxed{2c_0 + 6d_0 = 2c_1} \quad \text{(ec. 6)}$$

5. Condiciones de frontera:

$$s''(0) = 0 \iff s_0''(0) = 0 \iff \boxed{2c_0 = 0} \quad \text{(ec. 7)}$$

$$s''(4) = 0 \iff s_1''(4) = 0 \iff \boxed{2c_1 + 18d_1 = 0} \quad \text{(ec. 8)}$$

Resolviendo el sistema lineal formado por las 8 ecuaciones anteriores (usando por ejemplo el método de reducción de Gauss) obtenemos el valor de los coeficientes,

$$a_0 = 0, b_0 = -8/3, c_0 = 0, d_0 = 2/3,$$

$$a_1 = -2, b_1 = -2/3, c_1 = 2, d_1 = -2/9,$$

Resolviendo el sistema lineal formado por las 8 ecuaciones anteriores (usando por ejemplo el método de reducción de Gauss) obtenemos el valor de los coeficientes,

$$a_0 = 0, b_0 = -8/3, c_0 = 0, d_0 = 2/3,$$

$$a_1 = -2, b_1 = -2/3, c_1 = 2, d_1 = -2/9,$$

y por tanto el spline cúbico natural que interpola los datos del problema es:

$$s(x) = \begin{cases} -\dfrac{8x}{3} + \dfrac{2x^3}{3}, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ -2 - \dfrac{2(x-1)}{3} + 2(x-1)^2 - \dfrac{2(x-1)^3}{9}, & \text{si } 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$