Análise Matemática. Curso 2022-2023.
Grao en Enxenería Informática. ESEI Ourense.
Departamento de Matemáticas. Universidade de Vigo.
Data: 10/11/2022

BLOQUE II

APELIDOS	NOME	DNI	NOTA

1. Considérese a función $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{3x+4}{1+x^2}$.

   a) Encontrar os intervalos de crecemento e decrecemento de f.

   SOLUCIÓN: Analizamos o signo da súa derivada

$$f'(x) = \frac{3(1+x^2)-(3x+4)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3+3x^2-6x^2-8x}{(1+x^2)^2} = \frac{-3x^2-8x+3}{(1+x^2)^2}$$

   calculando onde se anula

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow -3x^2-8x+3 = 0 \Longleftrightarrow x = -3,\ x = \frac{1}{3}$$

   e substituíndo valores nos intervalos que se forman:

$$f'(-4) < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in (-5,-3) \Longrightarrow f \textbf{ é decrecente en } (-5,-3),$$

$$f'(0) > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in \left(-3, \tfrac{1}{3}\right) \Longrightarrow f \textbf{ é crecente en } \left(-3, \tfrac{1}{3}\right),$$

$$f'(1) < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in \left(\tfrac{1}{3}, 5\right) \Longrightarrow f \textbf{ é decrecente en } \left(\tfrac{1}{3}, 5\right),$$

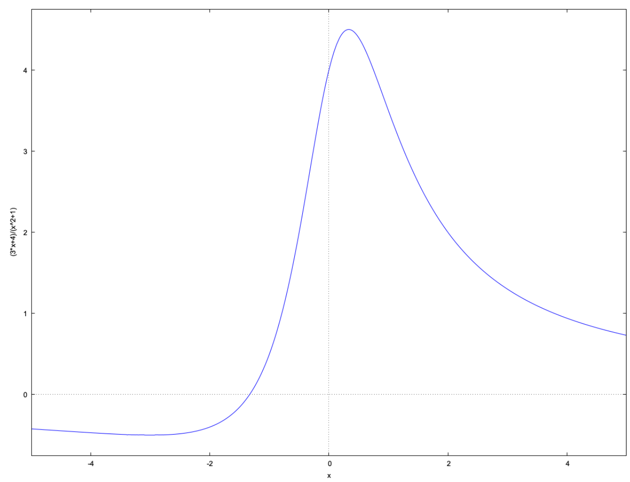
   b) Clasificar todos os extremos relativos de f en $[-5,5]$.

   Do estudo anterior sobre os intervalos de crecemento e decrecemento podemos concluir que f alcanza máximos relativos en $x = -5$ e $x = \frac{1}{3}$ e mínimos relativos en $x = -3$ e $x = 5$.

   Ademais o Teorema de Weierstrass garantiza que a función f, que é continua por ser cociente de continuas con denominador distinto de cero, alcanza o seu máximo e mínimo absolutos no intervalo pechado e acotado $[-5,5]$. Evaluando a función nos extremos relativos

$$f(-5) = -\frac{11}{26},\ f(-3) = -\frac{1}{2},\ f(1/3) = \frac{9}{2},\ f(5) = \frac{19}{26},$$

   concluimos que f alcanza o seu mínimo absoluto en $x = -3$ e o seu máximo absoluto en $x = 1/3$.



Gráfica de $f(x) = \dfrac{3x+4}{1+x^2}$ en $[-5, 5]$.

2. *a*) Calcular a integral indefinida $\displaystyle\int x\cos(x)dx$.

   SOLUCIÓN: Integrando por partes $[u = x \implies du = 1dx,\ dv = \cos(x)dx \implies v = \operatorname{sen}(x)]$, obtemos

$$\int x\cos(x)dx = x\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)dx = x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + c.$$

   b) Obter a área encerrada entre a gráfica da función $y = x\cos(x)$ o eixe OX e as rectas verticais $x = 0$, $x = \pi$.

   SOLUCIÓN: Área$=\displaystyle\int_0^\pi |x\cos(x)|\,dx$.
   Para quitar o valor absoluto que aparece dentro da integral temos que estudar o signo da función $f(x) = x\cos(x)$ no intervalo $[0, \pi]$. Como $x \geq 0$ en $[0, \pi]$ basta estudar o signo de $\cos(x)$ no intervalo:

$$\cos(x) = 0 \quad \text{en } [0, \pi] \iff x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\cos(0) = 1 > 0 \implies f(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in (0, \pi/2),$$

$$\cos(\pi) = -1 \implies f(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in (\pi/2, \pi].$$

   Logo,

$$\int_0^\pi |x\cos(x)|\,dx = \int_0^{\pi/2} x\cos(x)dx - \int_{\pi/2}^\pi x\cos(x)dx =$$

$$= \left(x\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right)\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} - \left(x\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right)\Big]_{x=\pi/2}^{x=\pi} =$$

$$= (\pi/2 - 1) - (-\pi/2 - 1) = \pi/2 - 1 + \pi/2 + 1 = \pi\, u^2.$$