Ejercicios de la sección 3.1 Álgebra de matrices

(Clase de prácticas: 1, 2, 7, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29.)

▶**1.** Dado que los vectores en $\mathbf{R}^n$ pueden ser considerados como matrices $n \times 1$, las propiedades de las traspuestas también se aplican a vectores. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcula $(A\mathbf{x})^T$, $\mathbf{x}^T A^T$, $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$, y $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$. ¿Está definido el producto $A^T\mathbf{x}^T$?

▶**2.** Sean A una matriz 4×4 y $\mathbf{x}$ un vector en $\mathbf{R}^4$. ¿Cuál es la forma más rápida de calcular $A^2\mathbf{x}$: Haciendo $A(A\mathbf{x})$ o haciendo $(A \cdot A)\mathbf{x}$?. Cuenta las multiplicaciones que hay que hacer en cada caso.

En los ejercicios 3 y 4, sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Calcula cada suma o producto si la matriz está definida. Si alguna expresión no está definida, explica por qué.

3. $-2A,\ B - 2A,\ AC,\ CD.$

4. $A + 2B,\ 3C - E,\ CB,\ EB.$

En el resto de esta serie de ejercicios y en las series que siguen, debe suponerse que cada expresión de matrices está definida. Esto es, los tamaños de las matrices (y de los vectores) involucrados "se corresponden" de manera apropiada.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ calcula $3I_2 - A$ y $(3I_2)A$.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -8 & 7 & -6 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ calcula $A - 5I_3$ y $(5I_3)A$.

En los ejercicios 7 y 8, calcula el producto AB en dos formas: (a) mediante la definición, donde $A\mathbf{b}_1$ y $A\mathbf{b}_2$ se calculan por separado, y (b) mediante la regla fila-por-columna para calcular AB.

▶**7.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

9. Si una matriz A es de orden 5×3 y el producto AB es de orden 5×7, ¿cuál es el orden de B?

10. ¿Cuántas filas tiene B si BC es una matriz de orden 3×4?.

11. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$. ¿Qué valor(es) de k, si hay, hacen que $AB = BA$?.

12. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Comprueba que $AB = AC$ a pesar de que $B \neq C$.

▶**13.** Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Calcula AD y DA. Explica cómo cambian las filas o columnas de A cuando se multiplica por D a la derecha o a la izquierda. Halla una matriz B de orden 3×3, que no sea la matriz identidad o la matriz cero, tal que $AB = BA$.

14. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Construye una matriz B de orden 2×2 tal que AB sea igual a la matriz cero. Las columnas de B no deben ser iguales entre sí y deben ser distintas de cero.

▶**15.** Sean $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_p$ vectores en $\mathbf{R}^n$, y sea Q una matriz de orden $m \times n$. Escribe la matriz $[Q\mathbf{r}_1 \ \ldots \ Q\mathbf{r}_p]$ como un producto de dos matrices sin usar una matriz identidad.

En los ejercicios 16 y 17 indica para cada uno de los enunciados si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

▶**16.**

(a) Si A y B son matrices de orden 2×2 con columnas $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, respectivamente, entonces $AB = [\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2]$.

(b) Toda columna de AB es una combinación lineal de las columnas de B usando como coeficientes los elementos de la columna correspondiente de A.

(c) La igualdad $AB + AC = A(B + C)$ se cumple para cualesquiera matrices A, B, C para las que las operaciones indicadas estén definidas.

(d) La igualdad $A^T + B^T = (A + B)^T$ se cumple para cualesquiera matrices A, B cuya suma esté definida.

(e) La traspuesta de un producto de matrices es igual al producto de sus traspuestas en el mismo orden.

▶**17.**

(a) Si A y B son matrices 3×3 y $B = [\mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2 \ \ \mathbf{b}_3]$, entonces $AB = [A\mathbf{b}_1 + A\mathbf{b}_2 + A\mathbf{b}_3]$.

(b) La segunda fila de AB es la segunda fila de A multiplicada a la derecha por B.

(c) La igualdad $(AB)C = (AC)B$ se cumple para cualesquiera matrices A, B, C para las que los productos indicados estén definidos.

(d) La igualdad $(AB)^T = A^T B^T$ se cumple para cualesquiera matrices A y B para las que el producto AB esté definido.

(e) La traspuesta de una suma de matrices es igual a la suma de sus traspuestas en el mismo orden.

18. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$, halla la primera y la segunda columna de B.

Versión de 25 de enero de 2022, 14:35h.

►**19.** Supongamos que las dos primeras columnas de B son iguales. ¿Qué puede decirse acerca de las columnas de AB (suponiendo que este producto está definido)?. ¿Por qué?

►**20.** Supongamos que la tercera columna de B es la suma de las primeras dos columnas. ¿Qué puede decirse acerca de la tercera columna de AB? ¿Por qué?

►**21.** Supongamos que la segunda columna de B es toda cero. ¿Qué puede decirse acerca de la segunda columna de AB?

►**22.** Supongamos que la última columna de AB es completamente cero, pero B por sí sola no tiene ninguna columna de ceros. ¿Qué puede decirse acerca de las columnas de A?

►**23.** Demuestra que si las columnas de B son linealmente dependientes, también lo son las columnas de AB.

►**24.** Supongamos que $CA = I_n$ (la matriz identidad $n \times n$). Demuestra que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial. Explica por qué A no puede tener más columnas que filas.

►**25.** Supongamos que $AD = I_m$, (la matriz identidad $m \times m$). Demuestra que para todo $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^m$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución. [Sugerencia: Piensa en la ecuación $AD\mathbf{b} = \mathbf{b}$.] Explica por qué A no puede tener más filas que columnas.

►**26.** Supongamos que A es una matriz de orden $m \times n$ y que existen matrices $n \times m$, C y D, tales que $CA = I_n$ y $AD = I_m$. Demuestra que $m = n$ y $C = D$. [Sugerencia: Piensa en el producto CAD).]

►**27.** Supongamos que A es una matriz de orden $3 \times n$ cuyas columnas generan $\mathbf{R}^3$. Explica cómo construir una matriz D de orden $n \times 3$ tal que $AD = I_3$.

En los ejercicios 28 y 29, considera los vectores en $\mathbf{R}^n$ como matrices $n \times 1$. Para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbf{R}^n$, el producto de matrices $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ es una matriz 1×1, llamada *producto escalar*, o *producto interno*, de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Por lo general, se escribe como un único número real sin paréntesis o corchetes. El producto de matrices $\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ es una matriz de orden $n \times n$, llamada *producto exterior* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

►**28.** Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Calcula $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$.

►**29.** Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbf{R}^n$, ¿qué relación hay entre $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$? ¿Y entre $\mathbf{u}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ y $\mathbf{v}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$?

30. Demuestra que $I_m A = A$ cuando A es una matriz de orden $m \times n$. Puedes utilizar el hecho de que $I_m\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^m$.

31. Demuestra que $AI_n = A$ cuando A es una matriz de orden $m \times n$. [Sugerencia: Usa la definición (de columnas) del producto de matrices AI_n.]

32. Halla una fórmula para $(AB\mathbf{x})^{\mathrm{T}}$, donde $\mathbf{x}$ es un vector y A y B son matrices con los tamaños apropiados.

33. Dada la matriz $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcula S^k para $k = 2, \ldots, 6$.

Los ejercicios 34 a 37 demuestran casos especiales de las propiedades de las matrices elementales. Aquí A es una matriz 3×3 e $I = I_3$.

34. Usa la ecuación $\text{fila}_i(AB) = \text{fila}_i(A) \cdot B$ para demostrar que para $i = 1, 2, 3$,

$$\text{fila}_i(A) = \text{fila}_i(I) \cdot A.$$

35. Demuestra que si las filas 1 y 2 de A se intercambian, entonces el resultado es igual a EA, donde E es la matriz elemental obtenida al intercambiar las filas 1 y 2 de I.

36. Demuestra que si la fila 3 de A se multiplica por 5, entonces el resultado es igual a EA, donde E es la matriz elemental obtenida al multiplicar la fila 3 de I por 5.

37. Demuestra que si la fila 3 de A es reemplazada por $\text{fila}_3(A) - 4\,\text{fila}_1(A)$, el resultado es igual a EA, donde E es la matriz elemental obtenida a partir de I al reemplazar la fila 3 de I por $\text{fila}_3(I) - 4\,\text{fila}_1(I)$.

38. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/6 & 0'5 & 1/3 \\ 0'5 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 5/12 \end{pmatrix}$, describe con palabras qué pasa al calcular A^5, A^{10}, A^{20} y A^{30}.
(*Para hacer con* Mathematica *en una práctica de ordenador.*)

Soluciones a ejercicios seleccionados de la sección 3.1

1. $(A\mathbf{x})^{\mathrm{T}} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 41$. El producto $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ no está definido porque el número de columnas de A^{T} (dos) no es igual al número de filas de $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ (una).

2. Para $A(A\mathbf{x})$ hay que hacer primero una operación de producto matriz por vector y después una segunda operación de producto matriz por vector. Para $(A \cdot A)\mathbf{x}$ hay que hacer primero cuatro operaciones de producto matriz por vector (para hallar $A \cdot A$) y después una quinta operación de producto matriz por vector. Por tanto la proporción de operaciones a realizar del segundo método al primero es de 5 a 2. Cada operación de producto matriz por vector implica (en este caso) 16 multiplicaciones (y 12 sumas). Por el primer método hay que hacer 32 multiplicaciones mientras que por el segundo 80.

7. (a)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \left[3\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad -2\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 3 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3+2(-2) & (-1)\cdot(-2)+2\cdot 1 \\ 5\cdot 3+4(-2) & 5\cdot(-2)+4\cdot 1 \\ 2\cdot 3-3(-2) & 2(-2)-3\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 3 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

13. $AD = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 15 \\ 2 & 12 & 25 \end{pmatrix}$, $DA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ 10 & 20 & 25 \end{pmatrix}$. Una matriz diagonal, multiplicada por la derecha de otra reescala las columnas y multiplicada por la izquierda de otra reescala las filas. Por lo anterior, una posible B que conmute con A (y con cualquier matriz 3×3) es cualquier matriz diagonal con todos los elementos diagonales iguales (cualquier múltiplo de la identidad). Por ejemplo $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

15. $[Q\mathbf{r}_1 \ \ldots \ Q\mathbf{r}_p] = Q[\mathbf{r}_1 \ \ldots \ \mathbf{r}_p]$.

16. (a) **Falso** (Debería decir $AB = [A\mathbf{b}_1 \ \ A\mathbf{b}_2]$.), (b) **Falso** (Debería decir es una combinación lineal de las columnas de A usando como coeficientes los elementos de la columna correspondiente de B.), (c) **Verdadero** (Es la propiedad distributiva del producto de matrices.), (d) **Verdadero** (Es una de las propiedades de las operaciones de matrices.), (e) **Falso** (Es el producto de las traspuestas en el orden contrario.).

17. (a) **Falso** (Debería decir $AB = [A\mathbf{b}_1 \ \ A\mathbf{b}_2 \ \ A\mathbf{b}_3]$.), (b) **Verdadero** (Esto es la regla “fila por columna”.), (c) **Falso** (No en general. Sólo se cumpliría si B y C conmutan.), (d) **Falso** (Debería decir $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.), (e) **Verdadero** (El orden es irrelevante para la suma.).

19. Las dos primeras columnas de AB también son iguales porque son el resultado respectivo del producto de A por dos vectores iguales.

20. Es igual a la suma de las dos primeras columnas de AB debido a la propiedad de linealidad del producto matriz por vector. Si las tres primeras columnas de B son $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ entonces las tres primeras columnas de AB son $A\mathbf{b}_1$, $A\mathbf{b}_2$ y $A(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = A\mathbf{b}_1 + A\mathbf{b}_2$.

21. También es toda cero porque es igual al producto de A por el vector cero.

22. Si la última columna de B es $\mathbf{b}_n$ y es distinta de cero, y si la última columna de AB es cero, tenemos $A\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$, lo cual, por ser $\mathbf{b}_n \neq \mathbf{0}$, es una relación de dependencia lineal entre las columnas de A. Luego las columnas de A son linealmente dependientes.

23. $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene al menos una solución no trivial, la cual también es una solución de $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

24. Para cualquier solución $\mathbf{x}$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se cumple $\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = CA\mathbf{x} = C\mathbf{0} = 0$. Al ser determinado el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, no tiene variables libres y por tanto A tiene un pivote en cada columna. Como esos pivotes están en distintas filas, A no puede tener menos filas que columnas.

25. Una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x} = D\mathbf{b}$. La matriz A tiene un pivote en cada fila y como esos pivotes están en columnas diferentes, A no puede tener menos columnas que filas.

26. $D = I_nD = CAD = CI_m = C$.

27. Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ las columnas de I_3. Son vectores de $\mathbf{R}^3$ y como las columnas de A generan $\mathbf{R}^3$, los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_3$ son compatibles. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ sendas soluciones de los tres sistemas. La matriz $D = [\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3]$ verifica $AD = I_3$.

28. $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = -2a + 3b - 4c = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$.

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \\ -4a & -4b & -4c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2a & 3a & -4a \\ -2b & 3b & -4b \\ -2c & 3c & -4c \end{pmatrix}.$$

29. En los dos casos se trata de un par de matrices traspuesta una de la otra. Pero en el primer caso, además, son dos matrices 1×1 todas las cuales coinciden con su traspuesta.