Capítulo 2

Sucesiones de números reales

2.1. Introducción

DEFINICIÓN 2.1.1. *Llamamos sucesión de números reales a una función* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$,

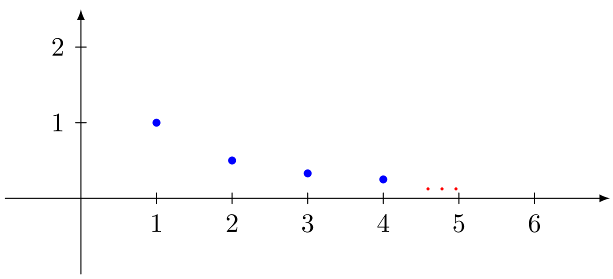
$$n \to f(n) = x_n.$$

Habitualmente denotaremos la sucesión como $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ *o simplemente por* $\{x_n\}$.

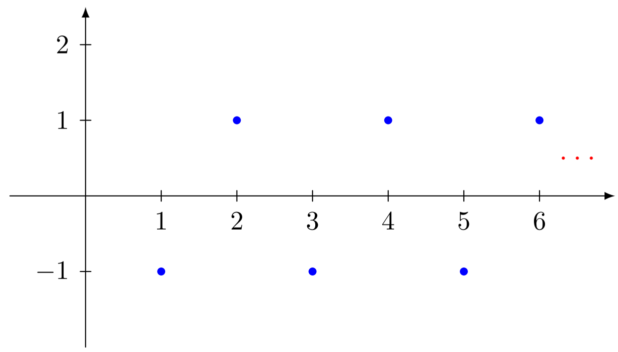
A los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, se les llama términos de la sucesión, siendo x_n el término enésimo o término general de la sucesión.

EJEMPLO 2.1.1. *A continuación presentamos varios ejemplos de sucesiones*

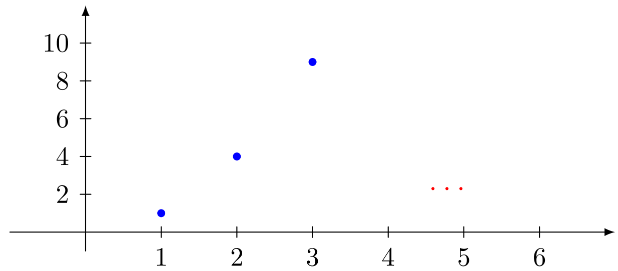
- $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right\}$



- $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$



- $\{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$



No es necesario expresar $\{x_n\}$ en función de n mediante una fórmula. Por ejemplo el conjunto de los números primos forma una sucesión

$$\{p_n\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\},$$

a pesar de que no se conoce ninguna fórmula explícita que genere $\{p_n\}$.

OBSERVACIÓN 2.1.1. *La mejor fuente de información existente sobre sucesiones de números enteros es "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences", disponible en* `http://oeis.org/`*. Un extraordinario trabajo de recopilación iniciado por el matemático N. J. A. Sloane en 1964 cuando era todavía un estudiante.*

2.2. Límite de una sucesión

DEFINICIÓN 2.2.1. *Una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ (escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ o $\{x_n\} \to x$) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ entonces*

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

En tal caso decimos que x es el límite de la sucesión $\{x_n\}$. Si una sucesión $\{x_n\}$ tiene límite se llama convergente.

Intuitivamente, "$\{x_n\}$ *converge a* $x \in \mathbb{R}$" significa que el término x_n está tan próximo "como queramos" del número real x siempre que n sea "suficientemente grande".

Como $|x_n - x| < \varepsilon$ es equivalente a $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, podemos afirmar que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ converge a x si en cualquier entorno de x se encuentran todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$, salvo quizás un número finito.

DEFINICIÓN 2.2.2. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales.*

1) Decimos que $\{x_n\} \to +\infty$ *(o* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$*), si*

$$\forall M > 0\, \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

2) Decimos que $\{x_n\} \to -\infty$ *(o* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$*), si*

$$\forall M > 0\, \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n < -M.$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ *decimos que la sucesión es divergente.*

PROPOSICIÓN 2.2.1. *Dada una sucesión* $\{x_n\}$ *se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\{x_n\} \to x \Leftrightarrow \{x_n - x\} \to 0$
2. $\{x_n\} \to 0 \ \Leftrightarrow\ \{|x_n|\} \to 0.$
3. *La sucesión* $\{y_n\} = \{x_{n+p}\}$, $p \in \mathbb{N}$ *fijado, es convergente si y sólo si* $\{x_n\}$ *es convergente, en cuyo caso el límite de ambas coincide.*

Una propiedad importante del límite de una sucesión es que si existe es único.

TEOREMA 2.2.1 (**Unicidad del límite**). *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales y supongamos que existen dos números reales,* x *e* y*, tales que* $\{x_n\} \to x$ *y también* $\{x_n\} \to y$*. Entonces* $x = y$*.*

DEFINICIÓN 2.2.3. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales y* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ *una sucesión estrictamente creciente de números naturales.*

Llamamos subsucesión o sucesión parcial de la sucesión $\{x_n\}$ *a la sucesión* $\{x_{n_k}\}$.

PROPOSICIÓN 2.2.2. *Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión convergente, entonces cualquier subsucesión de* $\{x_{n_k}\}$ *también es convergente y tiene el mismo límite.*

La proposición anterior resulta muy útil para demostrar que una sucesión no es convergente usándola de la siguiente forma: *si una sucesión admite dos subsucesiones con límites distintos o una subsucesión no convergente entonces la sucesión de partida no es convergente.*

EJEMPLO 2.2.1.

1. *Usar la definición de límite para probar que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
2. *¿La sucesión* $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ *es convergente?*
3. *Probar que la sucesión constante* $\{c, c, c, \ldots\}$ *converge a* c.

EJEMPLO 2.2.2. *El límite de la sucesión* $\{r^n\}$*, con* $r \in \mathbb{R}$*, se comporta de la siguiente manera*

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \textit{No existe el límite}, & \textit{si } r \le -1, \\ 0, & \textit{si } -1 < r < 1 \Longleftrightarrow |r| < 1, \\ 1, & \textit{si } r = 1, \\ +\infty, & \textit{si } r > 1. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 2.2.4. *Sea* $\{ x_n\}$ *una sucesión de números reales.*

1) *Se dice que* $\{x_n\}$ *está acotada superiormente si existe* $K \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x_n \le K, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.1}$$

Los números reales K *que verifican (2.2.1) se llaman cotas superiores de la sucesión* $\{x_n\}$.

2) *Se dice que* $\{x_n\}$ *está acotada inferiormente si existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$x_n \ge k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.2}$$

Los números reales k *que verifican (2.2.2) se llaman cotas inferiores de la sucesión* $\{x_n\}$.

3) *Se dice que la sucesión* $\{x_n\}$ *está acotada si existen valores* k*,* $K \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$k \le x_n \le K, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.3}$$

De la definición de límite se sigue sin demasiada dificultad el siguiente resultado.

Teorema 2.2.2. *Toda sucesión de números reales convergente está acotada.*

El recíproco del teorema anterior no es cierto (por ejemplo $\{(-1)^n\}$ es una sucesión acotada no convergente). Un recíproco parcial lo proporciona el siguiente resultado.

Proposición 2.2.3. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *Si $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, entonces $\{x_n + y_n\} \to x + y$.*

2) *Si $\{x_n\} \to 0$ e $\{y_n\}$ está acotada, entonces $\{x_n\, y_n\} \to 0$.*

3) *Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to x\, y$.*

4) *Si $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y \neq 0$, con $y_n \neq 0$, $\forall n \in N$, entonces $\{x_n/y_n\} \to x/y$.*

5) *(Regla del encaje o del sandwich). Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tienen por límite l y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$

entonces la sucesión $\{z_n\}$ también es convergente a l.

6) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to +\infty$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to +\infty$.*

7) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to -\infty$.*

8) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ $\{y_n\} \to y \neq 0$, entonces $\{x_n\, y_n\} \to +\infty$ si $y > 0$ ó $\{x_n\, y_n\} \to -\infty$ si $y < 0$.*

9) *Si $x_n \neq 0$, $\forall n \in N$, entonces $\{x_n\} \to 0 \Leftrightarrow \{1/|x_n|\} \to +\infty$.*

Hay otras operaciones que no tienen un valor definido, dependen del ejemplo concreto y se llaman "indeterminaciones". Por ejemplo: "$+\infty - \infty$", "$0 \cdot \infty$", "∞/∞", "$0/0$", "1^∞", "∞^0", "0^0".

2.3. El número e

La sucesión de números reales dada por

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\},$$

es monótona creciente y acotada, por lo que $\{x_n\}$ es una sucesión convergente. Se define el número e, en honor de Euler, como el límite de la sucesión $\{x_n\}$, es decir,

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281\cdots$$

TEOREMA 2.3.1 (**Criterio para la indeterminación "1^∞"**). *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *y* $\lim_{n\to\infty}(x_n-1)\cdot y_n = h$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \mathrm{e}^h.$$

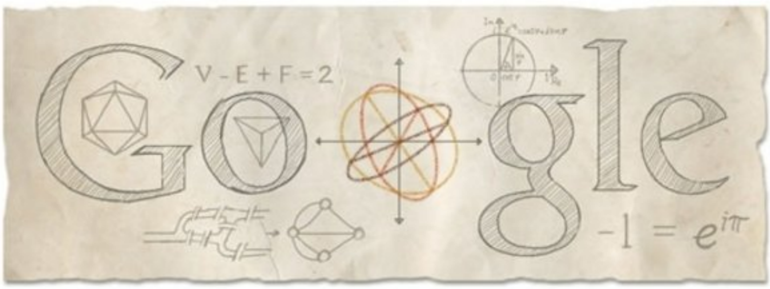


Figura 2.3.1: Doodle conmemorando el 306 aniversario del nacimiento de Euler

EJERCICIO 2.3.1. *En 2004 apareció el siguiente anuncio en diversos carteles de Silicon Valley:*

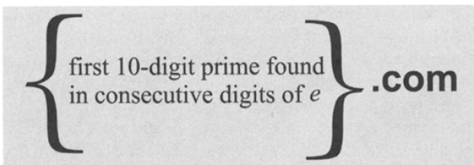


Figura 2.3.2: Anuncio aparecido en Silicon Valley

Una vez resuelto el desafío y visitando la página correspondiente se accedía a un formulario para solicitar trabajo en Google. Resuelve el problema con la ayuda de un ordenador.

2.4. Sucesiones recurrentes

DEFINICIÓN 2.4.1. *Una sucesión* $\{x_n\}$ *se dice que es una sucesión recurrente de orden* p *si cada término viene dado en función de los* p *términos anteriores, es decir*

$$x_{n+p} = g(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p-1}), \qquad n \geq 1, \tag{2.4.1}$$

siendo p *un valor fijo.*

La igualdad (2.4.1) se denomina ley de recurrencia. Para generar los términos de una sucesión recurrente de orden p es preciso conocer los p-primeros términos de la sucesión. Los valores, $x_1, x_2, \dots, x_p$, se denominan valores iniciales de la sucesión. Si partimos de una misma ley de recurrencia (2.4.1) pero con distintos valores iniciales, se generan sucesiones distintas.

OBSERVACIÓN 2.4.1. *i) La mayoría de los métodos numéricos que estudiaremos generan una sucesión recurrente con el objetivo de aproximar la solución del problema estudiado.*

ii) Para estudiar la convergencia de sucesiones recurrentes es muy útil el Principio de Inducción. En determinados casos el estudio de la convergencia se reduce a probar que la sucesión es monótona y acotada.

DEFINICIÓN 2.4.2. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales. Diremos que*

1) $\{x_n\}$ *es monótona creciente si* $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) $\{x_n\}$ *es monótona decreciente si* $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

En ambos casos se dice que $\{x_n\}$ *es una sucesión monótona. Si en las definiciones anteriores se da la desigualdad estricta diremos que la sucesión es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

TEOREMA 2.4.1. *Toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.*

EJEMPLO 2.4.1. *Demostrar que la sucesión definida como* $x_1 := 2$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *es convergente y calcular su límite.*