TEMA 3. Series de números reales

Análisis Matemático

Profesor: José Ángel Cid

Grao en Enxeñaría Informática
Departamento de Matemáticas
Universidad de Vigo.

Intuitivamente una serie es una "suma infinita"

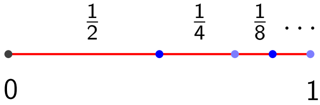
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Intuitivamente una serie es una “suma infinita”

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Por ejemplo, es fácil convencerse del siguiente hecho,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$



Sin embargo, no resulta tan claro qué significado tiene la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Sin embargo, no resulta tan claro qué significado tiene la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-1+\dots$$

Para definir de forma rigurosa el concepto de serie consideramos la sucesión de sumas parciales

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\vdots$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

$$\vdots$$

y pasamos al límite.

Definición

Una serie de números reales $\sum a_n$ *se dice que es convergente o sumable cuando la sucesión de sumas parciales* $\{s_n\}$ *es convergente.*

Definición

Una serie de números reales $\sum a_n$ se dice que es convergente o sumable cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es convergente.

Definición

Una serie de números reales $\sum a_n$ *se dice que es convergente o sumable cuando la sucesión de sumas parciales* $\{s_n\}$ *es convergente.*

Al límite de la sucesión $\{s_n\}$ *lo llamaremos suma de la serie y lo denotaremos como* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definición

Una serie de números reales $\sum a_n$ *se dice que es convergente o sumable cuando la sucesión de sumas parciales* $\{s_n\}$ *es convergente.*

Al límite de la sucesión $\{s_n\}$ *lo llamaremos suma de la serie y lo denotaremos como* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Si $\{s_n\} \to \pm\infty$ *diremos que la serie* $\sum a_n$ *es divergente.*

Definición

Una serie de números reales $\sum a_n$ *se dice que es convergente o sumable cuando la sucesión de sumas parciales* $\{s_n\}$ *es convergente.*

Al límite de la sucesión $\{s_n\}$ *lo llamaremos suma de la serie y lo denotaremos como* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Si $\{s_n\} \to \pm\infty$ *diremos que la serie* $\sum a_n$ *es divergente.*

Por tanto, estudiar la convergencia de una serie de números reales consiste en estudiar la convergencia de su sucesión de sumas parciales. Como no siempre será posible hallar explícitamente la expresión de s_n nos interesará disponer de criterios de convergencia para series que dependan del término general $\{a_n\}$.

El siguiente resultado nos dice que para estudiar el carácter de una serie (convergencia o divergencia) no importa eliminar un número finito de términos.

Teorema

Sea $k \in \mathbb{N}$ fijado. La serie $\sum a_n$ es convergente si y sólo si la serie $\sum a_{n+k}$ es convergente, en cuyo caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}.$$

Teorema (Condición necesaria de convergencia de series)

Si $\sum a_n$ *es una serie de números reales convergente, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Observación

Observación

1. *El recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, la serie* $\sum 1/n$*, (serie armónica) de término general* $a_n = 1/n$*, cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

y, sin embargo, no es convergente (es fácil comprobar que $s_{2^n} > \dfrac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$*).*

Observación

1. *El recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, la serie* $\sum 1/n$, *(serie armónica) de término general* $a_n = 1/n$, *cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

y, sin embargo, no es convergente (es fácil comprobar que $s_{2^n} > \dfrac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$*).*

2. *El teorema anterior resulta de gran utilidad para probar que una serie no es convergente usándolo de la siguiente manera: si* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *entonces la serie* $\sum a_n$ *no converge.*

Ejercicio

Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *no converge.*

PROPOSICIÓN (**Propiedades de las series**)

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de números reales y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se cumplen las siguientes propiedades:

PROPOSICIÓN (**Propiedades de las series**)

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de números reales y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes, entonces la serie $\sum (a_n + b_n)$ es también convergente y su suma viene dada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Proposición (Propiedades de las series)

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de números reales y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes, entonces la serie $\sum (a_n + b_n)$ es también convergente y su suma viene dada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

2. *Si $\sum a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum (\lambda\, a_n)$ es también convergente y su suma viene dada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda\, a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Calcular el valor de una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente consiste en calcular el límite de la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales. En general el cálculo de este límite no es fácil. En esta sección estudiaremos un tipo particular de series para las cuales es posible obtener una expresión del término general de la sucesión $\{s_n\}$ y calcular explícitamente su límite.

Las series geométricas son series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, donde $|r| < 1$. En este caso la expresión de s_n viene dada por

$$s_n = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n.$$

Las series geométricas son series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, donde $|r| < 1$. En este caso la expresión de s_n viene dada por

$$s_n = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por r, se obtiene

$$r\, s_n = r^2 + r^3 + \ldots + r^n + r^{n+1}.$$

Las series geométricas son series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, donde $|r| < 1$. En este caso la expresión de s_n viene dada por

$$s_n = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por r, se obtiene

$$r\, s_n = r^2 + r^3 + \ldots + r^n + r^{n+1}.$$

Restando ambas expresiones de deduce que

$$(1 - r)s_n = r - r^{n+1},$$

y por tanto

Las series geométricas son series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, donde $|r| < 1$. En este caso la expresión de s_n viene dada por

$$s_n = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por r, se obtiene

$$r\, s_n = r^2 + r^3 + \ldots + r^n + r^{n+1}.$$

Restando ambas expresiones de deduce que

$$(1 - r)s_n = r - r^{n+1},$$

y por tanto

$$s_n = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Finalmente, como $|r| < 1$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{r}{1-r}.$$

Finalmente, como $|r| < 1$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{r}{1-r}.$$

Entonces, si $|r| < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es convergente y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}. \tag{2.1}$$

Ejemplo

La siguiente demostración visual ejemplifica la suma de la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots$$

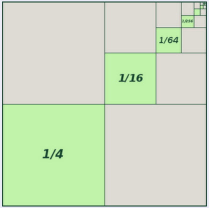


Figura: *¿Cuánto suma la serie?*

A partir del dibujo queda claro que

Ejemplo

La siguiente demostración visual ejemplifica la suma de la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

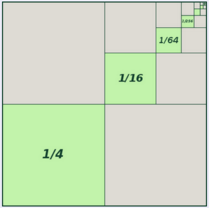


Figura: *¿Cuánto suma la serie?*

A partir del dibujo queda claro que

Ejemplo

La siguiente demostración visual ejemplifica la suma de la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

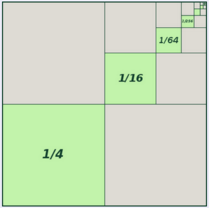


Figura: *¿Cuánto suma la serie?*

A partir del dibujo queda claro que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

EJERCICIO (DESARROLLOS DECIMALES PERIÓDICOS)

Calcula la fracción irreducible que le corresponde al número racional $0.\widehat{08}$ *sumando la serie geométrica correspondiente. ¿Cuál le correspondería a* $0.\widehat{9}$*?*

Definición

Diremos que la serie $\sum a_n$ es una serie de términos positivos si se cumple que $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Definición

Diremos que la serie $\sum a_n$ es una serie de términos positivos si se cumple que $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Observación

Definición

Diremos que la serie $\sum a_n$ *es una serie de términos positivos si se cumple que* $a_n \geq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Observación

1. *Una serie de términos positivos o bien es convergente o bien tiende a* $+\infty$, *puesto que su sucesión de sumas parciales es monótona creciente.*

Definición

Diremos que la serie $\sum a_n$ es una serie de términos positivos si se cumple que $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Observación

1. *Una serie de términos positivos o bien es convergente o bien tiende a $+\infty$, puesto que su sucesión de sumas parciales es monótona creciente.*
2. *Las series de términos negativos ($a_n \leq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$) se estudian de igual forma sin más que cambiar el signo para pasar a una serie de términos positivos.*

Definición

Diremos que la serie $\sum a_n$ es una serie de términos positivos si se cumple que $a_n \geq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Observación

1. *Una serie de términos positivos o bien es convergente o bien tiende a $+\infty$, puesto que su sucesión de sumas parciales es monótona creciente.*
2. *Las series de términos negativos ($a_n \leq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$) se estudian de igual forma sin más que cambiar el signo para pasar a una serie de términos positivos.*
3. *Se pueden tratar como series de términos positivos aquellas cuyos términos son positivos a partir de un término en adelante.*

Una serie $\sum a_n$ de términos positivos es convergente si y sólo si la sucesión $\{s_n\}$ está acotada.

Una serie $\sum a_n$ de términos positivos es convergente si y sólo si la sucesión $\{s_n\}$ está acotada.

Este resultado se satisface porque la sucesión $\{s_n\}$ es monótona creciente, ya que

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0.$$

Por tanto, $\{s_n\}$ es convergente si y sólo si está acotada.

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0. \tag{3.2}$$

Entonces se cumple que:

1. *$\sum a_n$ divergente $\Rightarrow \sum b_n$ divergente.*

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0. \tag{3.2}$$

Entonces se cumple que:

1. *$\sum a_n$ divergente $\Rightarrow \sum b_n$ divergente.*
2. *$\sum b_n$ convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente.*

Observación

A la hora de usar en la práctica el criterio de comparación es importante conocer el carácter de la serie armónica generalizada $\sum 1/n^{\alpha}$, $\alpha > 0$, *que es convergente para* $\alpha > 1$ *y divergente para* $0 < \alpha \leq 1$.

Criterio de comparación en el límite

Sean $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si* $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, *las series* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *tienen el mismo carácter, es decir, son ambas convergentes o ambas divergentes.*

Criterio de comparación en el límite

Sean $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si* $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, *las series* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *tienen el mismo carácter, es decir, son ambas convergentes o ambas divergentes.*
2. *Si* $L = 0$ *y además*

Criterio de comparación en el límite

Sean $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si* $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, *las series* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *tienen el mismo carácter, es decir, son ambas convergentes o ambas divergentes.*
2. *Si* $L = 0$ *y además*
    - $\sum b_n$ *es convergente entonces* $\sum a_n$ *es convergente.*

Criterio de comparación en el límite

Sean $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si* $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, *las series* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *tienen el mismo carácter, es decir, son ambas convergentes o ambas divergentes.*
2. *Si* $L = 0$ *y además*
   - $\sum b_n$ *es convergente entonces* $\sum a_n$ *es convergente.*
   - $\sum a_n$ *es divergente entonces* $\sum b_n$ *es divergente.*

Criterio de comparación en el límite

Sean $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si* $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, *las series* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *tienen el mismo carácter, es decir, son ambas convergentes o ambas divergentes.*
2. *Si* $L = 0$ *y además*
   - $\sum b_n$ *es convergente entonces* $\sum a_n$ *es convergente.*
   - $\sum a_n$ *es divergente entonces* $\sum b_n$ *es divergente.*
3. *Si* $L = +\infty$ *y además*

Criterio de comparación en el límite

Sean $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si* $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, *las series* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *tienen el mismo carácter, es decir, son ambas convergentes o ambas divergentes.*
2. *Si* $L = 0$ *y además*
   - $\sum b_n$ *es convergente entonces* $\sum a_n$ *es convergente.*
   - $\sum a_n$ *es divergente entonces* $\sum b_n$ *es divergente.*
3. *Si* $L = +\infty$ *y además*
   - $\sum b_n$ *es divergente entonces* $\sum a_n$ *es divergente.*

Criterio de comparación en el límite

Sean $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si* $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, *las series* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *tienen el mismo carácter, es decir, son ambas convergentes o ambas divergentes.*
2. *Si* $L = 0$ *y además*
   - $\sum b_n$ *es convergente entonces* $\sum a_n$ *es convergente.*
   - $\sum a_n$ *es divergente entonces* $\sum b_n$ *es divergente.*
3. *Si* $L = +\infty$ *y además*
   - $\sum b_n$ *es divergente entonces* $\sum a_n$ *es divergente.*
   - $\sum a_n$ *es convergente entonces* $\sum b_n$ *es convergente.*

Criterio del cociente

Sea $\sum a_n$ *una serie de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si* $L < 1$*, la serie* $\sum a_n$ *es convergente.*

Criterio del cociente

Sea $\sum a_n$ *una serie de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si* $L < 1$, *la serie* $\sum a_n$ *es convergente.*
2. *Si* $L > 1$, *la serie* $\sum a_n$ *es divergente.*

Criterio del cociente

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente.*
2. *Si $L > 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente.*
3. *Si $L = 1$ estamos en un caso dudoso (el criterio no decide).*

Criterio de la raíz

Sea $\sum a_n$ *una serie de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si* $L < 1$*, la serie* $\sum a_n$ *es convergente.*

Criterio de la raíz

Sea $\sum a_n$ *una serie de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si* $L < 1$, *la serie* $\sum a_n$ *es convergente.*
2. *Si* $L > 1$, *la serie* $\sum a_n$ *es divergente.*

Criterio de la raíz

Sea $\sum a_n$ *una serie de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

1. *Si* $L < 1$, *la serie* $\sum a_n$ *es convergente.*
2. *Si* $L > 1$, *la serie* $\sum a_n$ *es divergente.*
3. *Si* $L = 1$ *estamos ante un caso dudoso (el criterio no decide).*