Análise Matemática. Curso 2021-2012.
Grao en Enxenería Informática. ESEI Ourense.
Departamento de Matemáticas. Universidade de Vigo.
Data: 06/10/2021

BLOQUE I

APELIDOS	NOME	DNI	NOTA

1. Considérese a sucesión definida por recurrencia: $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

   a) Probar por indución que a sucesión $\{x_n\}$ é crecente (explicando claramente os distintos pasos, cal é a hipótese de indución, onde se utiliza...)

   SOLUCIÓN:

   - Paso base $\boxed{\text{n=1}}$: $x_1 = 2 < \sqrt{6} = \sqrt{2^2 + 2} = \sqrt{x_1^2 + x_1} = x_2$ $\boxed{\surd}$

   - Paso de indución: supoñemos que $\boxed{x_k < x_{k+1}}$ **(H.I.)** e temos que probar entón que $x_{k+1} < x_{k+2}$.

     Pola fórmula de recurrencia sabemos que $x_{k+1} = \sqrt{x_k^2 + x_k}$ e pola hipótese de indución
     $$x_k < x_{k+1} \Longrightarrow x_k^2 < x_{k+1}^2.$$
     Entón
     $$x_k^2 + x_k < x_{k+1}^2 + x_{k+1} \Longrightarrow \sqrt{x_k^2 + x_k} < \sqrt{x_{k+1}^2 + x_{k+1}},$$
     é dicir,
     $$x_{k+1} = \sqrt{x_k^2 + x_k} < \sqrt{x_{k+1}^2 + x_{k+1}} = x_{k+2}. \quad \boxed{\surd}$$

   b) Supoñendo que existe $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ determinar cal sería o valor de l.
   A sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é converxente? (Xustificar as respostas).

   SOLUCIÓN: Supoñendo que existe $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$, o número l é solución da seguinte ecuación que se obtén tomando límites nos dous lados da fórmula de recurrencia:
   $$l = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n^2 + x_n} = \sqrt{l^2 + l}.$$
   Entón
   $$l = \sqrt{l^2 + l} \Longrightarrow l^2 = l^2 + l \Longrightarrow l = 0.$$
   Logo se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ fose converxente o seu límite tería que ser $l = 0$, pero iso no pode ser porque a sucesión é crecente e $x_1 = 2$ (o cal implica que se existe $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ entón $l \geq 1$). Polo tanto o límite de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ non existe e a sucesión non é converxente.

2. Xustificar se as seguintes series son converxentes ou non:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n-1)!\cdot n^2} \qquad\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(n+1)!}$$

SOLUCIÓN: *a*) Calculamos o límite do termo xeral

$$a_n=\frac{(n+1)!}{(n-1)!\cdot n^2}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!\cdot n^2}=\frac{(n+1)\cdot n}{n^2}=\frac{n^2+n}{n^2}.$$

Entón,

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2}=1\neq 0,$$

onde no último límite tívose en conta que se trata dun cociente de polinomios do mesmo grado. Polo tanto, non se cumple a condición necesaria de converxencia e a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n-1)!\cdot n^2}$ **non converxe**.

b) Como $a_n=\dfrac{n\cdot 3^n}{(n+1)!}>0$ trátase dunha serie de termos positivos. Usaremos o criterio do cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{(n+2)!}}{\dfrac{n\cdot 3^n}{(n+1)!}}=\frac{(n+1)(n+1)!\,3^{n+1}}{n(n+2)!3^n}=\frac{(n+1)(n+1)!\,3^n\cdot 3}{n(n+2)(n+1)!3^n}=\frac{3(n+1)}{n(n+2)}=\frac{3n+3}{n^2+2n}.$$

Entón,

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3n+3}{n^2+2n}=0<1,$$

xa que o polinomio do denominador ten maior grado, e polo criterio do cociente dedúcese que a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(n+1)!}$ é **converxente**.