Ejercicios de la sección 6.1 Vectores propios, autovalores y polinomio característico

(Para hacer en clase: 2, 4, 9, 16, 19, 21, 23, 26, 27, 29, 31, 32, 34, 37, 38, 41, 47, 48, 54, 58.)
(Con solución o indicaciones: 5, 6, 8, 17, 18, 20, 22, 24, 25, 28, 30, 33, 35, 40, 46, 49, 52, 57, 59.)

1. ¿Es 5 un valor propio de $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$?

►2. ¿Es $\lambda = 2$ un valor propio de $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$? ¿Por qué sí o por qué no?

3. ¿Es $\lambda = -2$ un valor propio de $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$? ¿Por qué sí o por qué no?

En los ejercicios 4 a 7 se da un vector, $\mathbf{v}$, y una matriz cuadrada, A. Averigua si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A. Si lo es halla su valor propio.

►4. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

►5. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

►6. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

7. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

►8. ¿Es $\lambda = 4$ un valor propio de $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$? Si lo es, hállale un vector propio.

►9. ¿Es $\lambda = 3$ es un valor propio de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$? Si lo es, hállale un vector propio.

En los ejercicios 10 a 17, halla una base para el espacio propio correspondiente a cada valor propio indicado.

10. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1, 5$.

11. $A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$.

12. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $\lambda = 10$.

13. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1, 5$.

14. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1, 2, 3$.

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2$.

►16. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$.

►17. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$.

Halla los valores propios de las matrices dadas en los ejercicios 18 a 20.

►18. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **►19.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **►20.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

►21. Sin hacer cálculos, halla un valor propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Justifica tu respuesta.

►22. Sin hacer cálculos, halla un valor propio y dos vectores propios linealmente independientes de $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$. Justifica tu respuesta.

En los ejercicios 23 y 24, A es una matriz $n \times n$. Indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

►23.

(a) Si $A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$ para algún vector $\mathbf{x}$, entonces λ es un autovalor de A.

(b) Una matriz A es no inversible (o *singular*) si, y sólo si, 0 es un valor propio de A.

(c) Un número c es un autovalor de A si, y sólo si, la ecuación $(A - cI)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial.

(d) Puede ser difícil encontrar un vector propio de A, pero es fácil comprobar si un vector dado es o no es un vector propio de A.

(e) Para encontrar los valores propios de A, se reduce A a una forma escalonada.

►24.

(a) Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún número no nulo λ, entonces $\mathbf{x}$ es un vector propio de A.

(b) Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A linealmente independientes, entonces corresponden a diferentes valores propios.

(c) Todo vector que no cambia cuando se le multiplica por la izquierda una matriz es un vector propio de esa matriz.

(d) Los autovalores de una matriz están en su diagonal principal.

(e) Un espacio propio de A es el espacio nulo de cierta matriz.

►25. Explica por qué una matriz 2×2 puede tener, como mucho, dos valores propios distintos. Explica por qué una matriz $n \times n$ puede tener, como mucho, n valores propios distintos.

►26. Construye una matriz 2×2 que no tenga dos valores propios distintos.

►27. Si $\mathbf{x}$ es un vector propio de A correspondiente a λ, ¿qué es $A^3\mathbf{x}$?

Versión de 19 de enero de 2023, 10:58h.

▶28. Sea λ un valor propio de una matriz inversible A. Demuestra que λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.
Sugerencia: Supón que un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero satisface $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

▶29. Demuestra que si A^2 es la matriz cero, entonces el único valor propio de A es 0.

▶30. Demuestra que λ es un valor propio de A si, y sólo si λ es un valor propio de A^T.
Sugerencia: Halla la relación entre $A - \lambda I$, y $A^T - \lambda I$.

▶31. Utiliza una propiedad de los determinantes para demostrar que A y A^T tienen el mismo polinomio característico.

▶32. Por el ejercicio anterior, toda matriz cuadrada tiene los mismos autovalores, con las mismas multiplicidades algebraicas, que su traspuesta. Demuestra que también las multiplicidades geométricas de esos autovalores son las mismas.

▶33. Considera una matriz A de orden $n \times n$ con la propiedad de que todas las sumas de fila son iguales al mismo número s. Demuestra que s es un valor propio de A.
Sugerencia: Intenta primero descubrir un vector propio evidente de A.

▶34. Considera una matriz A de orden $n \times n$ con la propiedad de que todas las sumas de columna son iguales al mismo número s. Demuestra que s es un valor propio de A.
Sugerencia: Usa los ejercicios 30 y 33.

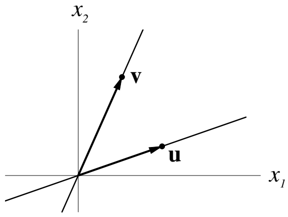
En los ejercicios 35 a 37, sea A la matriz de la transformación lineal T. Sin escribir A, halla un valor propio de A y describe el espacio propio correspondiente.

▶35. T es una reflexión de $\mathbf{R}^2$ en alguna recta que pasa por el origen.

36. T es un giro de $\mathbf{R}^3$ cuyo eje es alguna recta que pasa por el origen.

▶37. T es un cizallamiento horizontal de $\mathbf{R}^2$.

▶38. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ los vectores mostrados en la figura, y supongamos que son vectores propios de una matriz A de orden 2×2 que corresponden a los valores propios 2 y 3, respectivamente. Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la aplicación lineal dada por $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^2$, y sea $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Copia la figura y, sobre el mismo sistema de coordenadas, dibuja cuidadosamente los vectores $T(\mathbf{u})$, $T(\mathbf{v})$ y $T(\mathbf{w})$.



39. Repite el ejercicio 38, suponiendo que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de A que corresponden a los valores propios -1 y 3, respectivamente.

En los ejercicios 40 a 47, halla el polinomio característico y los valores propios de las matrices dadas.

▶40. $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ **▶41.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **43.** $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ **45.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

▶46. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ **▶47.** $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Los ejercicios 48 a 53 requieren las técnicas del cálculo de determinantes. Halla el polinomio característico de cada matriz, calculando el determinante correspondiente por el método que te parezca más adecuado.
Nota: No es fácil hallar el polinomio característico de una matriz 3×3 usando sólo operaciones elementales de filas y/o columnas, porque interviene el parámetro indeterminado λ.

▶48. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ **▶49.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **51.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

▶52. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ **53.** $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

Para cada una de las matrices de los ejercicios 54 a 56 halla sus valores propios, repetidos de acuerdo con sus multiplicidades.

▶54. $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **55.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

56. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 9 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

▶57. En la siguente matriz A halla el valor de h que hace que el espacio propio para el autovalor $\lambda = 5$ sea bidimensional:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

▶58. Sea A una matriz $n \times n$ y supongamos que A tiene n valores propios reales, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, repetidos de acuerdo con sus multiplicidades, de manera que

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Explica por qué $\det A$ es el producto de los n valores propios de A.

Observación: Este resultado es válido para cualquier matriz cuadrada cuando se consideren todas las raíces del polinomio característico, tanto reales como complejas.

En el siguiente ejercicio A es una matriz $n \times n$. Indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

►59.

(a) La multiplicidad de una raíz r de la ecuación característica de A es la multiplicidad algebraica de r como valor propio de A.

(b) Si $\lambda + 5$ es un factor del polinomio característico de A, entonces 5 es un valor propio de A.

(c) Una operación de reemplazo de filas en A no cambia los valores propios.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 6.1

5. Lo es porque $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $A\mathbf{v} = (3+\sqrt{2})\mathbf{v}$. Por tanto el autovalor es $3+\sqrt{2}$.

6. Lo es porque $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $A\mathbf{v} = \mathbf{0} = 0\,\mathbf{v}$. Por tanto el autovalor es 0.

8. $\det\begin{pmatrix} 3-4 & 0 & -1 \\ 2 & 3-4 & 1 \\ -3 & 4 & 5-4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 0$ por tanto 4 es un valor propio de la matriz dada. Un vector propio es cualquier vector no nulo del espacio nulo de esa matriz, por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

17. Hay que hallar una base del espacio nulo de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Una base es, por ejemplo, $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

18. $0, 2, -1$.

20. $2, -3, 1$.

22. Un valor propio es 0 porque las filas son iguales y eso implica $\det A = 0$. Dos vectores propios independientes son los de cualquier base del espacio nulo de A, por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

24. (a) Sólo si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, (b) Podrían pertenecer a un espacio propio de más de una dimensión, (c) El vector cero no es un vector propio, (d) Sólo es cierto para matrices triangulares; en general no lo es, (e) Es el espacio propio de la matriz obtenida al restar de cada elemento de la diagonal de A un mismo autovalor de A.

25. Porque una ecuación de grado n puede tener como mucho n soluciones distintas y los valores propios de una matriz $n \times n$ son soluciones de su ecuación característica, que es de grado n.

28. $\mathbf{x} = A^{-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$, luego $A^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$.

30. Si λI es un valor propio de A entonces $\det(A-\lambda I) = 0$, pero entonces también es $0 = \det(A-\lambda I)^{\mathrm{T}} = \det(A^{\mathrm{T}} - \lambda I)$ y por tanto λ también es un valor propio de A^{T}.

33. Cualquier vector constante no nulo $\mathbf{x} = (c, c, \ldots, c)$ es un vector propio de A y $A\mathbf{x} = (sc, sc, \ldots, sc) = s\mathbf{x}$ luego su autovalor es igual a s.

35. Un valor propio es 1 y su espacio propio es la recta dada por el origen (otro autovalor es -1 con espacio propio la recta perpendicular por el origen a la recta dada).

40. $p(x) = x^2 - 4x - 45$. Valores propios: -5 y 9.

46. $p(x) = x^2 - 9x + 4$. Valores propios: 1 y 8.

49. $p(x) = -x^3 + 14x + 12$.

52. $p(x) = -x^3 + 18x^2 - 95x + 150$.

57. Para que el espacio propio E_5 sea bidimensional, la matriz $A - 5I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ debe tener dos columnas no pivote. Para ello debe ser $h = 6$.

59. (a) Definición de multiplicidad algebraica de un autovalor, (b) El valor propio de A sería -5, (c) (La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene por autovalores 0, 2, pero si en ella se resta a la segunda fila la primera, los autovalores de la nueva matriz son 0, 1).