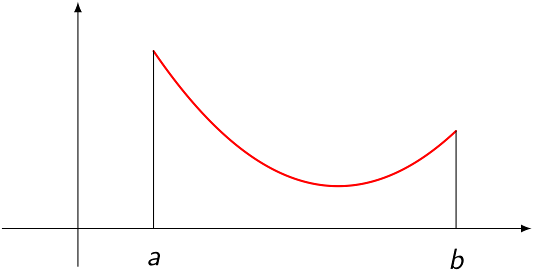
# TEMA 6. Integración de funciones reales de una variable real

## Análisis Matemático


Profesor: José Ángel Cid

Grao en Enxeñaría Informática
Departamento de Matemáticas
Universidad de Vigo.

Dada $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva, queremos definir $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ como el área comprendida entre la gráfica de la función, el eje horizontal y las rectas $x = a$ y $x = b$.



La idea es dividir el intervalo $[a, b]$ en pequeños subintervalos y aproximar el área bajo la curva por la suma de las áreas de rectángulos.

La idea es dividir el intervalo $[a, b]$ en pequeños subintervalos y aproximar el área bajo la curva por la suma de las áreas de rectángulos.

Ejemplo Visual

La idea es dividir el intervalo $[a, b]$ en pequeños subintervalos y aproximar el área bajo la curva por la suma de las áreas de rectángulos.

Ejemplo Visual

Vamos a precisar un poco más estas nociones.

## Definición

*Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Llamamos partición del intervalo $[a, b]$ a toda colección finita de puntos de $[a, b]$*

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n\} \text{ con } a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

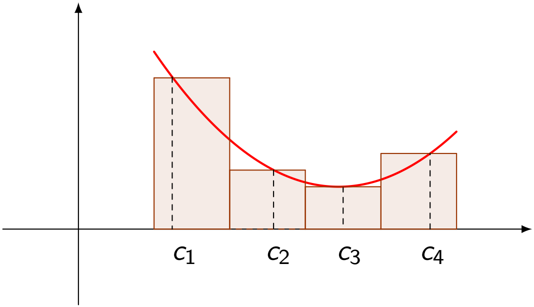
*Los intervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots n$, se llaman subintervalos de la partición $P$. Si llamamos $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ a la amplitud del subintervalo $I_k$ se define la norma de la partición $\|P\|$ como el máximo de los $\Delta_k$, $1 \leq k \leq n$.*

## Definición

*Dada una partición $P$ del intervalo $[a, b]$ se definen las sumas de Riemann de la función $f$ asociadas a la partición $P$ como*

$$SR(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}),$$

*donde $c_k$ es un punto arbitrario del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.*



## DEFINICIÓN

*Si* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de particiones del intervalo* $[a,b]$ *tales que* $\|P_n\| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$ *y* $f$ *es una función continua en* $[a,b]$ *se define*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} SR(f,P_n). \tag{2.1}$$

Se puede demostrar que cuando $f$ es continua en $[a,b]$ el límite anterior existe y es independiente de los puntos $c_k$ elegidos en las sumas de Riemann.

Cuando $P_n$ es una partición del intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos iguales, es decir, $x_k = a + k(b - a)/n$, $k = 0, 1, \cdots, n$, y tomamos $c_k = x_k$, $k = 1, 2, \cdots, n$, entonces (2.1) conduce a la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.2}$$

Una fórmula análoga se obtiene si tomamos $c_k = x_{k-1}$, $1 \leq k \leq n$. En ese caso, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.3}$$

## Proposición (Propiedades de la integral de Riemann)

*Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas en* $[a, b]$. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

## Proposición (Propiedades de la integral de Riemann)

*Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas en* $[a, b]$ . *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

## Proposición (Propiedades de la integral de Riemann)

*Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas en* $[a, b]$. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$

## Proposición (Propiedades de la integral de Riemann)

*Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas en* $[a, b]$. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$
3. *Si* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

## Proposición (Propiedades de la integral de Riemann)

*Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$
3. *Si* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$
4. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\right| dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

## Proposición (Propiedades de la integral de Riemann)

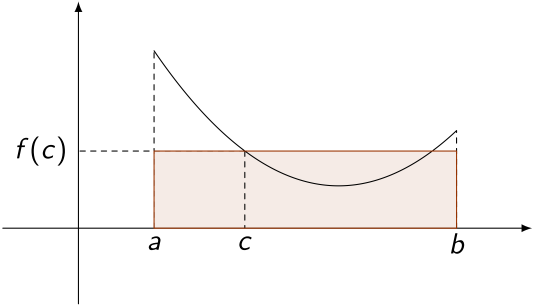
*Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$
3. *Si* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$
4. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\right| dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$
5. *Si* $a < c < b$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

## Teorema

(*Teorema del valor medio del cálculo integral*). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a). \tag{3.1}$$



El Teorema Fundamental del Cálculo, que presentamos a continuación, nos dice que los conceptos de derivada y de integral definidos independientemente el uno del otro, resultan estar íntimamente relacionados. En efecto, hablando sin mucha precisión la derivación y la integración son operaciones inversas, como la suma y la resta o el producto y la división.

El Teorema Fundamental del Cálculo, que presentamos a continuación, nos dice que los conceptos de derivada y de integral definidos independientemente el uno del otro, resultan estar íntimamente relacionados. En efecto, hablando sin mucha precisión la derivación y la integración son operaciones inversas, como la suma y la resta o el producto y la división.

## Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo)

*Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$. *Se considera la función* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a, b].$$

*Entonces se satisface que* $F$ *es derivable en* $[a, b]$ *y además*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a, b].$$

Consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo es la Regla de Barrow que nos proporciona un método práctico para el cálculo de integrales.

Consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo es la Regla de Barrow que nos proporciona un método práctico para el cálculo de integrales.

### Corolario (Regla de Barrow)

*Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es una función continua en* $[a,b]$ *y* $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es una primitiva cualquiera de* $f$ *en* $[a,b]$ *(es decir,* $G'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$*), entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

La regla de Barrow nos permite obtener un valor de $\int_a^b f(x)dx$ conocida una primitiva $F(x)$ de $f(x)$. Por ello es importante disponer de métodos que nos permitan obtener una primitiva de una función dada $f(x)$ .

# Proposición (Integrales inmediatas)

## Proposición (Integrales inmediatas)

1. $$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \;\; si \; n \neq -1.$$

## Proposición (Integrales inmediatas)

1. $$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \;\; si \; n \neq -1.$$
2. $$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(|x|) + C.$$

## Proposición (Integrales inmediatas)

1. $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ \ si\ n \neq -1.$$
2. $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$
3. $$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

## Proposición (Integrales inmediatas)

1. $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \;\; si\ n \neq -1.$$
2. $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$$
3. $$\int e^x\,dx = e^x + C.$$
4. $$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$$

## Proposición (Integrales inmediatas)

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \;\; si\; n \neq -1.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C.$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C.$
4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C.$
5. $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$

## PROPOSICIÓN (INTEGRALES INMEDIATAS)

1. $$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad si \; n \neq -1.$$
2. $$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(|x|) + C.$$
3. $$\int e^x \, dx = e^x + C.$$
4. $$\int \operatorname{sen}(x) \, dx = -\cos(x) + C.$$
5. $$\int \cos(x) \, dx = \operatorname{sen}(x) + C.$$
6. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arsen}(x) + C.$$

## Proposición (Integrales inmediatas)

1. $$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad si \; n \neq -1.$$
2. $$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(|x|) + C.$$
3. $$\int e^x \, dx = e^x + C.$$
4. $$\int \operatorname{sen}(x) \, dx = -\cos(x) + C.$$
5. $$\int \cos(x) \, dx = \operatorname{sen}(x) + C.$$
6. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arsen}(x) + C.$$
7. $$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{artg}(x) + C.$$

## Integración por partes

La fórmula de integración por partes se basa en la regla de derivación de un producto. Si $u, v$ son derivables entonces

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du.$$

# Integración por partes

La fórmula de integración por partes se basa en la regla de derivación de un producto. Si $u, v$ son derivables entonces

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du.$$

Integrando en ambos miembros y despejando se obtiene la fórmula de integración por partes

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

# Integración por partes

La fórmula de integración por partes se basa en la regla de derivación de un producto. Si $u, v$ son derivables entonces

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du.$$

Integrando en ambos miembros y despejando se obtiene la fórmula de integración por partes

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

Obviamente esta fórmula tiene interés práctico si la integral del segundo miembro resulta más sencilla o del mismo tipo que la integral dada.

## Integración por partes

La fórmula de integración por partes se basa en la regla de derivación de un producto. Si $u, v$ son derivables entonces

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du.$$

Integrando en ambos miembros y despejando se obtiene la fórmula de integración por partes

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

Obviamente esta fórmula tiene interés práctico si la integral del segundo miembro resulta más sencilla o del mismo tipo que la integral dada.
La fórmula de integración por partes se aplica, en general, cuando la función integrando sea del tipo: polinómica por exponencial, trigonométrica por exponencial,... haciendo una elección adecuada de $u$ y $dv$ en la integral dada.

## Integración por cambio de variable

La fórmula de integración por cambio de variable se basa en la regla de la cadena. Si $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ y $g(x)$ es una función derivable, aplicando la regla de la cadena se obtiene que

## Integración por cambio de variable

La fórmula de integración por cambio de variable se basa en la regla de la cadena. Si $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ y $g(x)$ es una función derivable, aplicando la regla de la cadena se obtiene que

$$d[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)dx = f(g(x))g'(x)dx,$$

y entonces

# Integración por cambio de variable

La fórmula de integración por cambio de variable se basa en la regla de la cadena. Si $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ y $g(x)$ es una función derivable, aplicando la regla de la cadena se obtiene que

$$d[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)dx = f(g(x))g'(x)dx,$$

y entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int d[F(g(x))]dx = F(g(x)) + c.$$

## Integración por cambio de variable

La fórmula de integración por cambio de variable se basa en la regla de la cadena. Si $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ y $g(x)$ es una función derivable, aplicando la regla de la cadena se obtiene que

$$d[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)dx = f(g(x))g'(x)dx,$$

y entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int d[F(g(x))]dx = F(g(x)) + c.$$

En la práctica se procede de la siguiente forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \boxed{\begin{array}{c} u = g(x) \\ du = g'(x)dx \end{array}} = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c.$$

## Integrales impropias: 1ª especie (intervalos no acotados)

1. Sea $a$ un número fijo y supongamos que la función $f$ es continua en $[a, t]$ para todo $t > a$. Entonces se define la integral impropia

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx,$$

en caso de que este límite exista. Si el límite es finito decimos que la integral impropia es convergente y si es infinito decimos que es divergente.

## Integrales impropias: 1ª especie (intervalos no acotados)

1. Sea $a$ un número fijo y supongamos que la función $f$ es continua en $[a,t]$ para todo $t > a$. Entonces se define la integral impropia

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx,$$

en caso de que este límite exista. Si el límite es finito decimos que la integral impropia es convergente y si es infinito decimos que es divergente.

2. Análogamente, sea $b$ un número fijo y supongamos que la función $f$ es continua en $[t,b]$ para todo $t < b$. Entonces se define la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx,$$

en caso de que este límite exista.

## Integrales impropias: 1ª especie (intervalos no acotados)

- Si las dos integrales impropias

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

son convergentes, entonces se define la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

## Integrales impropias: 2ª especie (funciones no acotados)

1. Si $f$ es continua en $(a, b]$, pero no está acotada, entonces se define la integral impropia

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx,$$

en caso de que este límite exista. Si el límite es finito decimos que la integral impropia es convergente y si es infinito decimos que es divergente.

# Integrales impropias: 2ª especie (funciones no acotados)

1. Si $f$ es continua en $(a, b]$, pero no está acotada, entonces se define la integral impropia

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx,$$

en caso de que este límite exista. Si el límite es finito decimos que la integral impropia es convergente y si es infinito decimos que es divergente.

2. De manera análoga, si $f$ es continua en $[a, b)$, pero no está acotada, entonces se define

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

en caso de que este límite exista.

## Integrales impropias: 2ª especie (funciones no acotados)

- Finalmente, consideramos el caso en que la función $f$ es continua para todo $t \in [a, c) \cup (c, b]$ pero no está acotada. Si las dos integrales impropias

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

son convergentes, entonces se define

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

## Integrales impropias: 3ª especie

Se trata de integrales definidas en un intervalo no acotado y en las que además la función que integramos tampoco está acotada, pero es continua salvo en un número finito de puntos.

## Integrales impropias: 3ª especie

Se trata de integrales definidas en un intervalo no acotado y en las que además la función que integramos tampoco está acotada, pero es continua salvo en un número finito de puntos. El estudio de una integral impropia de tercera especie se reduce, por la aditividad respecto al intervalo de integración, a estudiar por separado una o dos integrales de primera especie y una o varias de segunda especie.

## Integrales impropias: 3ª especie

Se trata de integrales definidas en un intervalo no acotado y en las que además la función que integramos tampoco está acotada, pero es continua salvo en un número finito de puntos. El estudio de una integral impropia de tercera especie se reduce, por la aditividad respecto al intervalo de integración, a estudiar por separado una o dos integrales de primera especie y una o varias de segunda especie. Si todas las integrales que figuran en la descomposición en sumandos de la integral original son convergentes diremos que la integral es convergente.

## Área encerrada por dos curvas

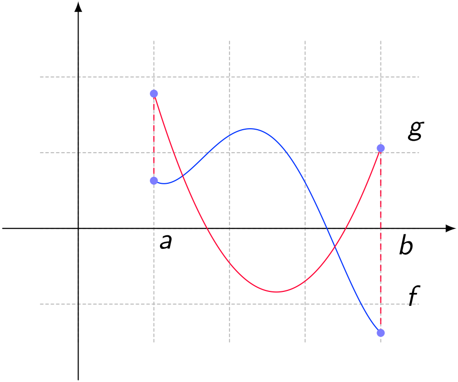
Si $f$ y $g$ son funciones continuas en $[a, b]$, entonces el área de la región plana limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ viene dada por

## Área encerrada por dos curvas

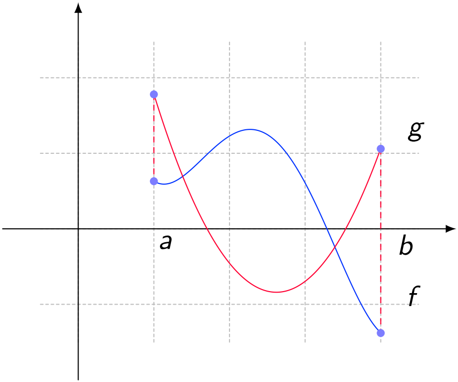
Si $f$ y $g$ son funciones continuas en $[a, b]$, entonces el área de la región plana limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ viene dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

# Área encerrada por dos curvas



## Área encerrada por dos curvas




Para calcular esta integral hemos de determinar en qué regiones se satisface $f(x) - g(x) \geq 0$ y en cuáles $f(x) - g(x) < 0$. Los puntos de separación de dichas regiones vienen dados por las soluciones de la ecuación $f(x) - g(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$.