

Capítulo 9

Integración Numérica

9.1. Introducción

La idea para obtener fórmulas de integración numérica con el objetivo de aproximar la integral definida

$$\int_a^b f(x) dx,$$

consiste en calcular el polinomio de interpolación de la función f en algunos puntos del intervalo $[a, b]$ y aproximar el valor de la integral de la función por el valor de la integral del polinomio de interpolación.

Supongamos que conocemos los valores de la función f en $n + 1$ puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n del intervalo $[a, b]$ y sea p_n el polinomio de grado menor o igual que n que interpola a la función f en esos puntos. Entonces

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x),$$

donde $E_n(x)$ denota el error de interpolación. En tal caso,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_n(x) dx + \int_a^b E_n(x) dx.$$

El término $\int_a^b p_n(x) dx$ nos da el valor aproximado de la integral,

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b p_n(x) dx$$

mientras que $\int_a^b E_n(x) dx$ nos da el error de discretización que llamaremos $e_n(f)$.

Si utilizamos la fórmula de Lagrange para el polinomio de interpolación entonces

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x),$$

de donde,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\simeq \int_a^b p_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \right) dx \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i). \end{aligned}$$

Por tanto una fórmula de tipo interpolatorio adoptará la expresión general

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i). \quad (9.1.1)$$

Se trata de una combinación lineal apropiada de los valores de la función f en los puntos x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, donde los coeficientes a_i que figuran en (9.1.1) sólo dependen de los puntos x_i y no de la función f .

Suponiendo que $f \in C^{n+1}[a, b]$ entonces sabemos que

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

donde ξ_x es un punto intermedio entre x_0, x_1, \dots, x_n, x .

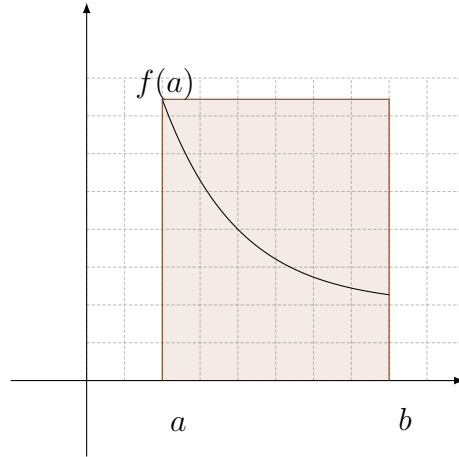
9.1.1. Fórmula del rectángulo

La fórmula de integración más sencilla es la que utiliza el valor de la función f en un sólo punto $x_0 \in [a, b]$. En este caso el polinomio de interpolación de la función f es constante, es decir $p_0(x) = f(x_0)$, por lo que

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b p_0(x) dx = \int_a^b f(x_0) dx = f(x_0)(b - a).$$

Si $x_0 = a$ se obtiene la fórmula del rectángulo izquierda dada por

$$\int_a^b f(x) dx \simeq f(a)(b - a). \quad (9.1.2)$$

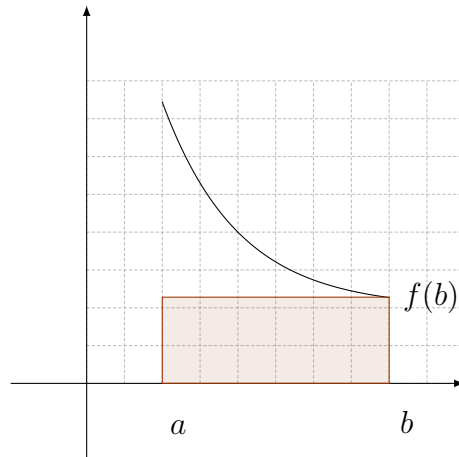


Si la función $f \in C^1[a, b]$ el error cometido al utilizar la fórmula (9.1.2) es

$$e_0(f) = \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2, \text{ con } \xi \in (a, b).$$

La fórmula del rectángulo derecha se obtiene si $x_0 = b$,

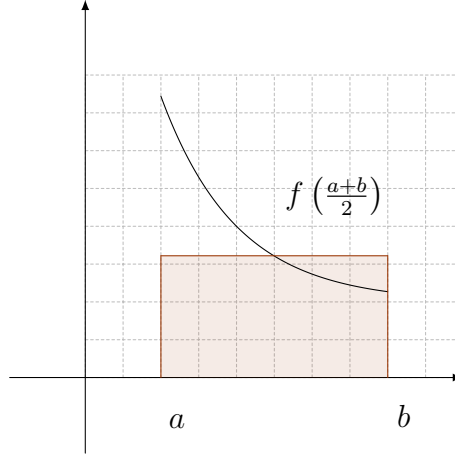
$$\int_a^b f(x) dx \simeq f(b)(b-a), \quad e_0(f) = -\frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2, \quad \xi \in (a, b).$$



Geoméricamente, si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, la fórmula del rectángulo aproxima el valor de $\int_a^b f(x) dx$ por el área del rectángulo de base $b-a$ y de altura $f(a)$ ó $f(b)$.

Si $x_0 = \frac{a+b}{2}$, se obtiene la fórmula del punto medio dada por

$$\int_a^b f(x)dx \simeq f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a). \quad (9.1.3)$$



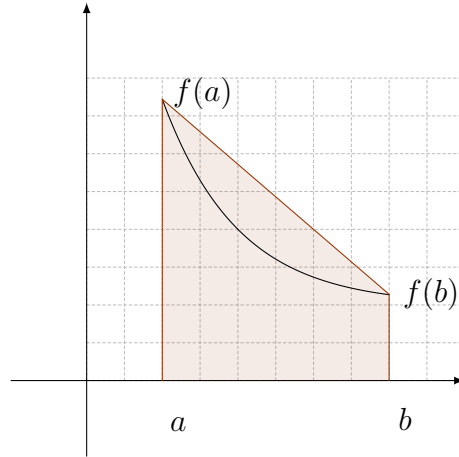
A pesar de ser una fórmula de un punto (y por tanto interpolamos a f con polinomios de grado 0), la fórmula del punto medio es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que 1. Si suponemos que la función $f \in C^2[a, b]$, se obtiene la siguiente expresión para el error en la fórmula del punto medio

$$e_0(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3, \quad \xi \in (a, b).$$

9.1.2. Fórmula del trapecio

Se trata de una fórmula de integración con dos puntos $x_0 = a$ y $x_1 = b$. En este caso el polinomio de interpolación de la función f es la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ y se obtiene la siguiente fórmula de integración numérica

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \right) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$



Geoméricamente, si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, la fórmula del trapecio aproxima el valor de $\int_a^b f(x) dx$ por el área del trapecio de base $b - a$ y de alturas $f(a)$ y $f(b)$.

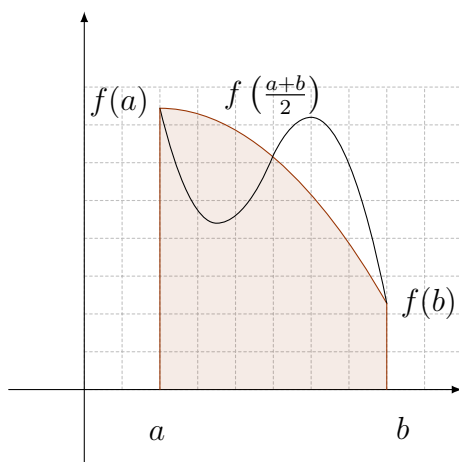
Si $f \in C^2[a, b]$ tenemos la siguiente fórmula del error

$$e_1(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3, \quad \xi \in (a, b).$$

9.1.3. Fórmula de Simpson

Se trata de una fórmula de 3 puntos (es decir, interpolamos con polinomios de grado menor o igual que 2) pero consigue exactitud para todos los polinomios de grado menor o igual que 3. Se obtiene interpolando en los puntos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$. Integrando el polinomio de interpolación se obtiene que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (9.1.4)$$



Suponiendo que $f \in C^4[a, b]$ se cumple que

$$e_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5, \quad \xi \in (a, b).$$

EJERCICIO 9.1.1. *Considérese la integral*

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

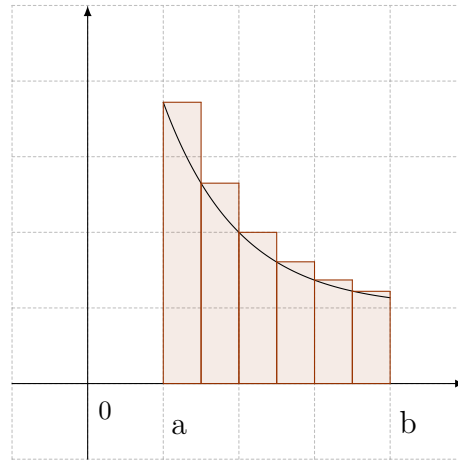
1. *Aproximar el valor de I aplicando la regla del trapecio.*
2. *Calcular de forma exacta el valor de I estimando el error cometido en el apartado anterior.*
3. *Repetir los apartados anteriores usando la regla de Simpson.*

Una comparativa visual entre diferentes métodos de integración numérica

9.2. Fórmulas de integración compuesta (Divide y vencerás)

Las fórmulas de integración numérica anteriores no son apropiadas cuando el intervalo de integración $[a, b]$ es grande, ya que el error que se comete al utilizarlas también es grande. Lo que haremos será dividir el intervalo inicial en subintervalos más pequeños y aplicar un método de integración numérica simple en cada uno de ellos. De esta forma se obtienen las llamadas fórmulas de integración numérica compuestas.

9.2. FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN COMPUESTA (DIVIDE Y VENCERÁS)7



Si llamamos $h = \frac{b-a}{n}$, entonces los puntos $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$, constituyen una partición del intervalo $[a, b]$ y, por la aditividad de la integral respecto al dominio de integración, se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx.$$

Ahora aplicaremos alguna de las fórmulas de integración numérica para aproximar la integral de la función en cada uno de los intervalos $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, de la partición.

9.2.1. Fórmula del rectángulo (izquierda) compuesta

Si utilizamos la fórmula del rectángulo izquierda para aproximar la integral en cada uno de los subintervalos $[x_j, x_{j+1}]$ obtenemos la fórmula de integración compuesta dada por

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)(x_{j+1} - x_j) = h \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j).$$

El error de truncatura o discretización será la suma de los errores cometidos en cada uno de los subintervalos. Suponiendo que la función f es de clase 1 en $[a, b]$ se tiene que

$$e(f) = \frac{(b-a)}{2} h f'(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

9.2.2. Fórmula del trapecio compuesta

Si utilizamos la fórmula del trapecio en cada subintervalo se llega a la fórmula de integración compuesta

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} (x_{j+1} - x_j) = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right).$$

Si $f \in C^2[a, b]$, el error viene dado por

$$e(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

9.2.3. Fórmula de Simpson compuesta

Finalmente, utilizando en cada subintervalo la fórmula de Simpson, obtenemos la fórmula de integración

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\simeq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{6} \left[f(x_j) + 4f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) + f(x_{j+1}) \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h}{6} \left(f(x_j) + 4f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) + f(x_{j+1}) \right) \\ &= \frac{h}{6} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Si $f \in C^4[a, b]$, el error en la fórmula de Simpson compuesta viene dado por

$$e(f) = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

EJERCICIO 9.2.1. Se sabe que la longitud de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$, viene dada por la integral elíptica completa de segunda especie

$$L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)} d\theta,$$

9.2. FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN COMPUESTA (DIVIDE Y VENCERÁS)9

siendo $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Utilizar *Maxima* para aproximar, usando la regla de Simpson compuesta, el valor de la longitud de la elipse $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$ con un error menor que 10^{-6} .