8. Conjuntos Regulares

8.1 Sus generadores y sus reconocedores.

8.1.1 Equivalencia de conj. regulares y RGs: Teorema de Chomsky-Miller

Lema: Sea L un conj. regular, entonces $\exists\ \mathcal{G}$ gramática regular / $L = L(G)$.

demo.

L conj. regular $\Leftrightarrow$: $\exists\ \mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA / $L = T(A)$

La idea consiste en construir una RG a partir del DFA $\mathcal{A}$, donde los no terminales sean los estados y los terminales sean los símbolos de entrada. Esto es, definamos $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, q_\emptyset)$, donde:

$$\begin{cases} V = \Sigma \cup Q \\ P = \{ q \to a\,\delta(q,a) \;/\; (q,a) \in Q \times \Sigma \} \cup \{ q \to \varepsilon \;/\; q \in F \} \end{cases}$$

NOTA: Trivialmente podemos suponer que $\Sigma \cap Q = \emptyset$, sino renombraríamos los estados.

$\mathcal{G}$ es regular Trivial

$L = L(G)$

Veremos antes que

$$\boxed{\forall y \in T(A),\ \dot{\exists}\ q_0 \overset{*}{\Rightarrow} yq \;/\; \begin{matrix} q \in Q \\ q = \delta(q_0, y) \end{matrix}}$$

La prueba será una consecuencia inmediata del hecho de que "y" determina un único camino a través del autómata. Lo haremos por inducción en $|y|$.

$\underline{|y| = 0}$ $\Leftrightarrow y = \varepsilon$, por tanto podemos tomar $q := q_0$ puesto que:

$$q_0 \in Q$$
$$\delta(q_0, y) = \delta(q_0, \varepsilon) = q_0 = q$$

$\underline{|y| \leq n}$ Supuesto cierto

$\underline{|y| = n+1}$ $\Rightarrow \exists w \in \Sigma^* \Big/ \begin{array}{l} |w| = n \\ y = wa,\ a \in \Sigma \end{array}$

$$\left.\begin{array}{l} |w| = n \Rightarrow (\text{inducción}) \Rightarrow \exists!\, q_0 \overset{*}{\Rightarrow} wq \Big/ \begin{array}{l} q \in Q \\ q = \delta(q_0, w) \end{array} \\ \text{Por construcción del DFA } A,\ \delta(q_0, w) \rightarrow a\,\delta(\delta(q_0, w), a) \in P \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow\ q_0 \overset{*}{\Rightarrow} w\,\delta(q_0, w) \Rightarrow wa\,\delta(\delta(q_0, w), a) \\ \delta(\delta(q_0, w), a) = \delta(q_0, wa) \\ wa = y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow q_0 \overset{*}{\Rightarrow} y\,\delta(q_0, y)$, además de forma única. $\underline{\text{demostrado}}$

$$\Leftarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Como consecuencia tendremos que } [q_0 \overset{*}{\Rightarrow} y\,\delta(q_0, y) \Rightarrow y] \Leftrightarrow \delta(q_0, y) \rightarrow \varepsilon \in P \\ \text{Por construcción del DFA } A,\ \delta(q_0, y) \rightarrow \varepsilon \in P \Leftrightarrow \delta(q_0, y) \in F \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow [q_0 \overset{*}{\Rightarrow} y \Leftrightarrow \delta(q_0, y) \in F] \Rightarrow [y \in L(G) \Leftrightarrow y \in T(A) = L]$$

$\underline{\text{demostrado}}$

Además la G es determinista!

Corolario: Sea L un conj. regular $\Rightarrow$ L es un lenguaje de contexto libre, no ambiguo.

demo.

$$\frac{L \text{ lenguaje de contexto libre}}{L \text{ lenguaje no ambiguo}}$$

Trivial por def. una regular

Trivial por la unicidad de las derivaciones.

demostrado.

Lema: Sea $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ una gramática regular, entonces $L(\mathcal{G})$ es un conj. regular.

demo.

La idea consiste en definir un DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a partir de $\mathcal{G}$, en forma inversa a como lo hemos hecho en el lema anterior. Sean:

$Q := N \cup \{q\} \;/\; q \notin N \cup \Sigma$

$F := \{q\}$

$\delta := \{(q_i, u, q_j) \;/\; q_i \to u q_j \in P\} \cup \{(q_i, u, q) \;/\; q_i \to u \in P\}$

$q_0 := S$

NOTA: (q_i, u, q_j) denota la transición $\delta(q_i, u) = q_j$.

$\mathcal{A}$ es un FA   Trivial

$\mathcal{A}$ es un DFA   Trivial

$L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{A})$

Ante todo, demostraremos el siguiente resultado intermedio:

Sea $r \geq 1$, entonces:

$$S = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_r = w \in L(\mathcal{G}) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \emptyset \leq i \leq r, \ \exists u_i \in \Sigma^* \\ \forall \emptyset \leq i < r, \ \exists q_i \in Q \end{cases}, \text{tal que}$$

i) $w_i = u_1 \cdots u_i q_i$, $\forall \emptyset \leq i < r$

ii) $w_r = u_1 \cdots u_r$

iii)' $(q_i, u_{i+1}, q_{i+1}) \in \delta$, $\forall \emptyset \leq i < r-1$

iv)' $(q_{r-1}, u_r, q) \in \delta$

"$\Rightarrow$" Haremos la demostración por inducción en "r":

$r=1$ En este caso, tendremos que demostrar que $\exists u_1 \in \Sigma^*, \exists q_0 \in Q /$

i) $w_0 = q_0$

ii) $w_1 = u_1$

iii)' $(q_0, u_1, q_1) \in \delta$ o lo que es lo mismo $q_0 \rightarrow u_1 q_1 \in P$

iv)' $(q_0, u_1, q) \in \delta$ " " " " $q_0 \rightarrow u_1 \in P$

donde:

i) $w_0 := S := q_0$

iii)' $w_0 \Rightarrow w_1 :\Leftrightarrow \exists w_0 \rightarrow w_1 \in P \Leftrightarrow$ (por construcción) $\Leftrightarrow q_0 \rightarrow u_1 q_1 \in P / w_1 = u_1 q_1$

iv)' puesto que por hipotesis $w_1 \in L(\mathcal{G})$; $q_1 = \varepsilon$ con lo que $w_1 = u_1$

ii) trivial por iv)'

$\underline{t \leq n}$ Supuesto cierto

$\underline{t = n+1}$ Por hipótesis:

$$\left. \begin{array}{l} S = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{n+1} = w \in L(\mathcal{G}) := \{x \in \Sigma^* / S \overset{*}{\Rightarrow} x\} \\ \mathcal{G} \text{ regular} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |w| = n+1 \Rightarrow \exists w'_n \in L(\mathcal{G}), \exists a \in \Sigma \Big/ \begin{array}{l} w = a w'_n \\ |w'_n| = n \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \mathcal{G} \text{ regular} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists w'_i \in (N \cup \Sigma)^*, i \in \{\emptyset, 1, \ldots, n\} / S = w'_0 \Rightarrow w'_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w'_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S \Rightarrow a w'_0 \Rightarrow a w'_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow a w'_n = w \Rightarrow (\text{a fortiori}) \Rightarrow \begin{cases} w_i = a w'_{i-1}, \ \forall 1 \leq i < n+1 \\ w_0 = S \end{cases} \\ (\text{por inducción}) \begin{cases} \tilde{i}) \ w'_i = u'_1 \cdots u'_i q'_i, \ \forall \emptyset \leq i < n+1 \\ \tilde{ii}) \ w'_n = u'_1 \cdots u'_n \\ \tilde{iii}) \ q'_i \to u'_{i+1} q'_{i+1} \in P, \ \forall \emptyset \leq i < n \\ \tilde{iv}) \ q'_{n-1} \to u'_n \in P \end{cases} \end{cases}$$

Entonces tenemos; que si $\begin{cases} u_i := u'_{i-1}, \ \forall 2 \leq i < n+1 \\ q_i := q'_{i-1}, \ \forall 1 \leq i < n \\ q_0 := S, \ u_1 := a \end{cases}$

i) $\left. \begin{array}{l} w_i = a w'_{i-1} = a u'_1 \cdots u'_{i-1} q'_{i-1}, \ \forall 1 \leq i < n+1 \\ w_0 := q_0 := S \end{array} \right\}$ <u>demostrado</u>

ii) $w_{n+1} = a w'_n = a u'_1 \cdots u'_n$ <u>demostrado</u>

iii) $q'_i \to u'_{i+1} q'_{i+1} \in P, \ \forall \emptyset \leq i < n \Rightarrow q_i \to u_{i+1} q_{i+1} \in P, \ \forall 1 \leq i < n+1$

además $q_0 := S \Rightarrow w_1 := a w_0 \Rightarrow \exists \ q_0 \to a w'_0 = a q'_0 := u_1 q_1$

<u>demostrado</u>

iv) $\left.\begin{array}{l} q'_{n-1} := q_n \\ u'_n := u_{n+1} \\ q'_{n-1} \to u'_n \in P \end{array}\right\} \Rightarrow q_n \to u_{n+1} \in P$ demostrado

demostrado

"$\Leftarrow$" Trivial

Teniendo ahora en cuenta el resultado obtenido, tendríamos que:

$w \in L(G) :\Leftrightarrow S \overset{*}{\Rightarrow} w \Leftrightarrow$ (iii) iv)) $\Leftrightarrow w \in L(A)$. demostrado

Teorema (de Chomsky-Miller): L es un leng. regular $\Leftrightarrow$ L es un conj. regular

demo. Trivial por los dos lemas anteriores.

Teorema: La familia de los lenguajes regulares es un subconjunto propio de la familia de los lenguajes de contexto-libre.

demo. Sea $L = \{a^i b^i / i \geq 0\}$, entonces $L = L(G)$ donde G viene dada por las producciones $\left\{\begin{array}{l} S \to aSb \\ S \to \varepsilon \end{array}\right.$.

Trivialmente L es un lenguaje de contexto-libre, pero ya habíamos visto que L no es un conj. regular y por tanto L no es un lenguaje regular. demostrado