Ejercicios de la sección 6.2 Matrices diagonalizables y teorema de Cayley-Hamilton

(Para hacer en clase: 2, 4, 6, 9, 16, 24, 26, 30, 33, 34, 38.)
(Con solución o indicaciones: 1, 3, 5, 7, 8, 15, 25, 27, 31, 32, 39.)

En los ejercicios 1 y 2, calcula A^4 siendo $A = PDP^{-1}$

▶**1.** $P = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

▶**2.** $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

▶**3.** Calcula A^8, siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

▶**4.** Sean $A = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comprueba que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A y utiliza esta información para diagonalizar A.

▶**5.** Sea A una matriz 4×4 cuyos distintos valores propios son 5, 3 y -2, y supongamos que el espacio propio para el autovalor 3 es bidimensional. ¿Se tiene suficiente información como para determinar si A es diagonalizable?

En los ejercicios 6 y 7, utiliza la factorización $A = PDP^{-1}$ dada para hallar una fórmula para cada elemento de A^k, donde k representa un entero positivo arbitrario.

▶**6.** $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 3(a-b) & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

▶**7.** $\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 8 y 9, la matriz A está factorizada en la forma PDP^{-1}. Usa el teorema de diagonalización para encontrar los valores propios de A y una base para cada espacio propio.

▶**8.** $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

▶**9.** $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliza las matrices de los ejercicios 10 a 23. Los valores propios para los ejercicios 14 a 19 son los siguientes: (14) $\lambda = 1, 2, 3$; (15) $\lambda = 2, 8$; (16) $\lambda = 5, 1$; (17) $\lambda = 5, 4$; (18) $\lambda = 3, 1$; (19) $\lambda = 2, 1$. Para el ejercicio 20, un valor propio es $\lambda = 5$ y un vector propio es $(-2, 1, 2)$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ▶**15.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

▶**16.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ **19.** $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{pmatrix}$ **21.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 24 y 25, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.
Sugerencia: Estudia con cuidado el teorema de diagonalización y el que nos da una condición suficiente para que una matriz sea diagonalizable antes de intentar responder a estos ejercicios.

▶**24.**

(a) A es diagonalizable si $A = PDP^{-1}$ para alguna matriz D y alguna matriz inversible P.

(b) Si A es $n \times n$ y $\mathbf{R}^n$ tiene una base de vectores propios de A, entonces A es diagonalizable.

(c) Si A es una matriz $n \times n$, entonces A es diagonalizable si, y sólo si, tiene n valores propios, contando las multiplicidades.

(d) Si A es diagonalizable, entonces es inversible.

▶**25.**

(a) Si A es una matriz $n \times n$, entonces A es diagonalizable si tiene n vectores propios.

(b) Si A es una matriz $n \times n$ y es diagonalizable, entonces tiene n autovalores distintos.

(c) Si $AP = PD$, con D una matriz diagonal, entonces las columnas no nulas de P son vectores propios de A.

(d) Si A es inversible, entonces es diagonalizable.

▶**26.** Supongamos que A es una matriz 5×5 que tiene dos valores propios (distintos). Además, el espacio propio de un autovalor es tridimensional y el del otro bidimensional. ¿Es A diagonalizable? ¿Por qué?

▶**27.** A es una matriz 3×3 con dos valores propios. Cada espacio propio es unidimensional. ¿Es A diagonalizable? ¿Por qué?

28. A es una matriz 4×4 con tres valores propios. Un espacio propio es unidimensional y uno de los otros espacios propios es bidimensional. ¿Es posible que A no sea diagonalizable? Justifica tu respuesta.

Versión de 19 de enero de 2023, 12:31 h.

29. A es una matriz 7×7 con tres valores propios. Un espacio propio es bidimensional y uno de los otros espacios propios es tridimensional. ¿Es posible que A no sea diagonalizable? Justifica tu respuesta.

▶**30.** Demuestra que si A es tanto diagonalizable como inversible, entonces también lo es A^{-1}.

▶**31.** Demuestra que si A es una matriz $n \times n$ que tiene n vectores propios linealmente independientes, también los tiene su traspuesta, A^T.
Sugerencia: Usa el teorema de diagonalización (teorema 6.1.1).

▶**32.** Construye una matriz 2×2 que sea inversible pero que no sea diagonalizable.

▶**33.** Construye una matriz 2×2 no diagonal que sea diagonalizable pero no inversible.

Para cada una de las matrices dada en los ejercicios 34 a 36 haz lo siguiente:

(a) Usa una calculadora para comprobar que los valores propios son los siguientes:

ejercicio	— a u t o v a l o r e s —				
34.		−2	−2	1	5
35.		−4	−4	1	24
36.	1	1	3	5	5

(b) Determina una base para el espacio propio de cada autovalor.

(c) Diagonaliza la matriz.

▶**34.** $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. **35.** $\begin{pmatrix} 0 & 13 & 8 & 4 \\ 4 & 9 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

36. $\begin{pmatrix} 11 & -6 & 4 & -10 & -4 \\ -3 & 5 & -2 & 4 & 1 \\ -8 & 12 & -3 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & -2 & 3 & -1 \\ 8 & -18 & 8 & -14 & -1 \end{pmatrix}$.

37. Usa el teorema de Cayley-Hamilton para demostrar que si A es una matriz $n \times n$ inversible entonces la matriz identidad I_n se puede expresar como una combinación lineal de las potencias $A, A^2, \ldots, A^n$ de A. Explica por qué de eso se deduce que la inversa de A se puede expresar como combinación lineal de $A, A^2, \ldots, A^{n-1}$. Describe los coeficientes de esta combinación lineal en términos de los coeficientes del polinomio característico de A.

▶**38.** Usa el ejercicio 37 para calcular la inversa de la matriz del ejercicio 34.

▶**39.** Usa el ejercicio 37 para calcular la inversa de la matriz del ejercicio 15.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 6.2

1. $A^4 = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 1^4 \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 15\times16-14 & 35-35\times16 \\ 6\times16-6 & 15-14\times16 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 226 & -525 \\ 90 & -209 \end{smallmatrix}\right)$.

3. Ambas filas suman 1, luego 1 es un autovalor con autovector $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. El otro autovalor es la traza menos 1, o sea, 2 y $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ es un vector propio del autovalor 2. Luego $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$ y $A^8 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^8 \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3\times2^8-2 & 3-3\times2^8 \\ 2\times2^8-2 & 3-2\times2^8 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 766 & -765 \\ 510 & -509 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Sí. Es diagonalizable hay dos vectores propios del autovalor 3 que son independientes y esos dos junto a un vector propio de 5 y uno del -2 dan lugar a una base de $\mathbf{R}^4$ formada por vectores propios de A.

7. $A^k = \begin{pmatrix} 4-3\times2^k & 12\times2^k-12 \\ 1-2^k & 4\times2^k-3 \end{pmatrix}$.

8. Valores propios: 5 y 1. Base del espacio propio del 5: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Base del espacio propio del 1: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

15. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

25. (a) Si tiene un vector propio tiene infinitos. Debía decir "si tiene n vectores propios independientes", (b) Puede ser diagonalizable teniendo todos sus autovalores iguales como la matriz identidad, (c) Si D es diagonal, la primera columna de PD es un reescalado de la primera columna de P con lo que la igualdad $AP = PD$ implica que A por la primera columna de P es un reescalado de la primera columna de P. Si, además, esta columna no es nula, es un vector propio de A, (d) La matriz cuya primera fila es (1, 1 y segunda fila es (0, 1) es inversible pero no diagonalizable).

27. No es diagonalizable porque un valor propio tendrá multiplicidad algebraica 2 pero ambos tienen multiplicidad geométrica 1.

31. Por tener A n vectores propios linealmente independientes existe una diagonalización $A = PDP^{-1}$. Pero entonces $A^{\mathrm{T}} = \left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} = P' D P'^{-1}$ con $P' = \left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$ ya que $D^{\mathrm{T}} = D$, luego A^{T} es diagonalizable y por el teorema de diagonalización tiene n vectores propios linealmente independientes.

32. Debe tener determinante no nulo, los dos autovalores iguales y la matriz característica de ese único autovalor debe tener sólo un pivote. Esto lo cumple, por ejemplo, la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

39. $p_A(x) = (2-x)^2(8-x) = -x^3 + 12x^2 - 36x + 32$. $A^{-1} = \frac{1}{32}(A^2 - 12A + 36I_3) = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$.