Ejercicios de la sección 8.2 Clasificación de las formas cuadráticas

(Para hacer en clase: 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17, 19, 21, 24, 26, 28.)
(Con solución o indicaciones: 2, 4, 6, 8, 10, 16, 18, 20, 22, 23, 25, 27.)

▶**1.** Sea
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1/3 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcula la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. (b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. (c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

▶**2.** Sea
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcula la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. (b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. (c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

▶**3.** Halla la matriz de las siguientes formas cuadráticas $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ suponiendo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$:
(a) $10x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$
(b) $5x_1^2 + 3x_1x_2$

▶**4.** Halla la matriz de las siguientes formas cuadráticas $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ suponiendo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$:

(a) $20x_1^2 + 15x_1x_2 - 10x_2^2$ (b) x_1x_2

▶**5.** Halla la matriz de las siguientes formas cuadráticas $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ suponiendo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$:
(a) $8x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$
(b) $4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$

▶**6.** Halla la matriz de las siguientes formas cuadráticas $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ suponiendo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$:
(a) $5x_1^2 - x_2^2 + 7x_3^2 + 5x_1x_2 - 3x_1x_3$
(b) $x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

▶**7.** Realiza un cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ que transforme la forma cuadrática $x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$ en una forma cuadrática en y_1, y_2 sin el producto cruzado y_1y_2. Halla P y la nueva forma cuadrática.

▶**8.** Sea A la matriz de la forma cuadrática $9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$ en $\mathbf{R}^3$. Sabiendo que los autovalores de A son 3, 9 y 15, halla una matriz ortogonal P tal que el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ transforme $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ en una forma cuadrática sin términos de productos cruzados. Escribe la nueva forma cuadrática.

Clasifica las formas cuadráticas en $\mathbf{R}^2$ de los ejercicios 9 a 14

▶**9.** $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$ ▶**10.** $9x_1^2 - 8x_1x_2 + 3x_2^2$

11. $2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2$ **12.** $-5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$

13. $x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$ **14.** $8x_1^2 + 6x_1x_2$

▶**15.** ¿Cuál es el mayor valor posible de la forma cuadrática $5x_1^2 - 3x_2^2$ en un vector unitario de $\mathbf{R}^2$?

▶**16.** ¿Cuál es el mayor valor posible de la forma cuadrática $5x_1^2 + 8x_2^2$ en un vector unitario de $\mathbf{R}^2$?

En los ejercicios 17 y 18, las matrices son $n \times n$ y los vectores son de $\mathbf{R}^n$. Indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

▶**17.**
(a) La matriz de una forma cuadrática es una matriz simétrica
(b) Una forma cuadrática carece de términos de productos cruzados si y sólo si la matriz de la forma cuadrática es una matriz diagonal.
(c) Para toda matriz A los ejes principales de la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ son vectores propios de A.
(d) Una forma cuadrática definida positiva, Q, satisface $Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo vector $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$.
(e) Si los autovalores de una matriz simétrica A son todos positivos, entonces la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ es definida positiva.
(f) El máximo valor que alcanza una forma cuadrática definida positiva es el mayor valor propio de la matriz simétrica que la define.

▶**18.**
(a) La expresión $\|\mathbf{x}\|^2$ define una forma cuadrática.
(b) Si A es una matriz simétrica y P una matriz ortogonal, entonces el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ transforma $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ en una forma cuadrática sin términos de productos cruzados.
(c) Si A es una matriz simétrica 2×2, entonces el conjunto de vectores $\mathbf{x}$ tales que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = c$ (para un número c dado) corresponde a una circunferencia o a una elipse o a una hipérbola.
(d) Una forma cuadrática indefinida es o bien semidefinida positiva o semidefinida negativa.
(e) Si A es una matriz simétrica y todos los valores de la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ son negativos para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces los autovalores de A son todos negativos.
(f) El máximo valor que una forma cuadrática de matriz A alcanza para $\mathbf{x}$ unitario es el mayor de los elementos diagonales de A.

▶**19.** Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ y sea Q la forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Sabemos que si λ_1 y λ_2 son los autovalores de A entonces $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ y $\lambda_1\lambda_2 = \det A$. Demuestra lo siguiente:
(a) Si $\det A > 0$ y $a > 0$, entonces Q es definida positiva.
(b) Si $\det A > 0$ y $a < 0$, entonces Q es definida negativa.
(c) Si $\det A < 0$, entonces Q es indefinida.

▶**20.** Demostrar que si B es una matriz $m \times n$, entonces $B^T B$ es una matriz semidefinida positiva y si B es $n \times n$ e inversible, entonces $B^T B$ es una matriz definida positiva.

▶**21.** Si A es la matriz de una forma cuadrática definida positiva, entonces existe una matriz definida positiva B tal que $A = B^T B$. *Pista:* $A = PDP^{-1}$ con P ortogonal y $D = C^T C$ para alguna C; entonces $B = PCP^T$ lo cumple.

Versión de 19 de enero de 2023, 17:21 h.

►**22.** Demuestra que si A y B son matrices simétricas del mismo orden, ambas con todos los autovalores positivos entonces los autovalores de $A+B$ son también todos positivos.

►**23.** Demuestra que si A es la matriz de una forma cuadrática definida positiva y A es inversible, entonces la forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A^{-1}\mathbf{x}$ también es definida positiva.

En los ejercicios 24 y 25 halla el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ que hace que las igualdades siguientes sean verdaderas.

►**24.** $5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = 9y_1^2 + 6y_2^2 + 3y_3^2$.

►**25.** $3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 5y_1^2 + 2y_2^2$.

►**26.** ¿Cuánto vale $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$ si $\mathbf{x}$ es un autovector unitario de A con autovalor 3? ¿Y si $\mathbf{x}$ tiene norma 2 en lugar de 1?

►**27.** Si M y m son respectivamente los valores máximo y mínimo que una forma cuadrática de matriz A toma en los vectores unitarios y λ es un autovalor de A, entonces $m \leq \lambda \leq M$. *Pista:* Halla un $\mathbf{x}$ tal que $\lambda = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$.

►**28.** Si M y m son respectivamente los valores máximo y mínimo de una forma cuadrática Q en los vectores unitarios, entonces para cada t con $m \leq t \leq M$ existe un vector unitario $\mathbf{u}$ tal que $Q(\mathbf{u}) = t$.
Pista: M y m son autovalores de Q. Si $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son autovectores unitarios respectivos de M y m, busca una solución que sea una combinación lineal de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 8.2

2. (a) $4x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$. (b) 21. (c) 5.

4. (a) $\begin{pmatrix} 20 & 15/2 \\ 15/2 & -10 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. (a) $\begin{pmatrix} 5 & 5/2 & 3/2 \\ 5/2 & -1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $P = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. $\qquad 9y_1^2 + 15y_2^2 + 3y_3^2$.

10. Definida positiva (autovalores 11, y 1).

16. Si $x_1^2 + x_2^2 = 1$, entonces $5x_1^2 + 8x_2^2 \leq 8x_1^2 + 8x_2^2 = 8(x_1^2 + x_2^2) = 8$.

18. (a) Cumple $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}I\mathbf{x}$. (b) Sólo si P es la matriz de cambio de una diagonalización ortogonal de A. (c) Sólo si A es definida positiva y $c > 0$ o definida negativa y $c < 0$ o indefinida y $c \neq 0$. En otros casos puede ser una recta o un par de rectas o un punto o el conjunto vacío. (d) Una forma cuadrática indefinida no es ni definida ni semidefinida. (e) Todo autovalor de A es igual a $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}A\mathbf{u}$ para algún vector propio unitario $\mathbf{u}$ correspondiente a ese autovalor. (f) Debería decir el mayor de los autovalores de A.

20. La forma cuadrática $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}B\mathbf{x}$ es igual a $\|B\mathbf{x}\|^2$, que es siempre ≥ 0. $\|B\mathbf{x}\|^2 = 0$ implica $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y si B es inversible esto implica $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

22. La suma de dos formas cuadráticas dadas definidas positivas es claramente otra forma cuadrática definida positiva cuya matriz es la suma de las matrices de las formas cuadráticas dadas.

23. Los autovalores de A^{-1} son los inversos de los de A; por tanto, si los de A son positivos, los de A^{-1} también.

25. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

27. Sea $\mathbf{x}$ un vector unitario del espacio propio del autovalor λ, de forma que $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 1$ y $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Entonces, por hipótesis $m \leq \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} \leq M$, pero $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \lambda$.