7. Minimización de DFAs.

7.1 Un corolario del th. de Myhill-Nerode: existencia y unicidad salvo isomorfismo (renombramiento de estados) del DFA minimal.

<u>Teorema</u>: Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA, entonces $\dot{\exists}\, A'$ DFA minimal / $T(A) = T(A')$.

<u>demo.</u>

Sea $L = T(A)$, por el th. de Myhill-Nerode, existe A' / $L = T(A')$. Veremos que A' es el DFA minimal buscado.

<u>$T(A) = T(A')$</u> Trivial $T(A) = L = T(A')$

<u>A' es el DFA minimal / $T(A') = T(A)$</u>

Sea A'' / $T(A) = T(A'')$, veremos que $|A''| \geq |A'|$.

Sean $\left.\begin{matrix} R_{m''} \\ R_{L'} \end{matrix}\right\}$ las relaciones de equivalencia construidas según el th. de Myhill-Nerode e inducidas por A'' y A',

entonces trivialmente $|A''| \geq |A'|$ (apartado $b) \Rightarrow c)$).

<u>A' es el único DFA minimal</u>

Supongamos que $\exists\, A''$ DFA minimal / $T(A'') = T(A)$.

Entonces $|A''| = |A'|$. Veremos que se puede establecer un isomorf entre ambos:

$$Q'' \xrightarrow{\ f\ } Q'$$
$$q'' \rightsquigarrow \delta'(q_0', x) \,/\, \delta''(q_0'', x) = q''$$

<u>f bien def.</u> $\delta''(q_0'', x) = \delta''(q_0'', y) = q'' \Leftrightarrow x R_{L'} y \Leftrightarrow \delta'(q_0', x) = \delta'(q_0', y)$

además $\exists\, x / \delta''(q_0'', x) = q''$, sino q'' no accesible y A'' no minimal.

7.2 Algoritmo de minimización de Huffman-Moore.

Definición: Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un FA, y sean $q, q_1, q_2 \in Q$ / $q_1 \neq q_2$. Entonces:

a) $x \in \Sigma^*$ distingue q_1 de q_2 sii:

i) $(q_1, x) \vdash^* (q_3, w)$

ii) $(q_2, x) \vdash^* (q_4, w)$

iii) q_3 XOR q_4 $\in F$

b) q_1 y q_2 son k-indistinguibles sii $\nexists x \in \Sigma^*, |x| \leq k$ / / x distingue a q_1 de q_2.

NOTACION: $q_1 \overset{k}{\equiv} q_2$

c) q_1 y q_2 son indistinguibles sii $\forall k \geq 0$, q_1 es k-indistinguible de q_2.

NOTACION: $q_1 \equiv q_2$

d) $q \in Q$ se dice inaccesible sii $\nexists x \in \Sigma^* / (q_0, x) \vdash^* (q, \varepsilon)$

" " " " inútil sii $\nexists x \in \Sigma^* / (q, x) \vdash^* (q_f, \varepsilon)$, $q_f \in F$

e) A se dice un autómata reducido o mínimo sii:

i) $\nexists q \in Q$ / q inaccesible

ii) $\nexists q_1, q_2 \in Q$ / $q_1 \neq q_2$, q_1 y q_2 sean indistinguibles.

iii) $\nexists q \in Q$ / q inútil

Lema: Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA, entonces dados $p, q \in Q$ es posible determinar si son indistinguibles en un tiempo $O(kn^2) \Big/ \begin{array}{l} |Q| = n \\ |\Sigma| = k \end{array}$

demo

Consideremos el algoritmo dado por el pseudocódigo siguiente:

```
     BEGIN
(1)      FOR (p∈F AND q∈Q\F) DO distinguible(p,q):=T;
(2)      FOR (p,q) ∈ (F×F OR (Q\F)×(Q\F)) DO
(3)          IF [∃a∈Σ / distinguible(δ(p,a), δ(q,a))=T] THEN
               BEGIN
(4)              distinguible(p,q):=T;
(5)              WHILE lista(p,q) DO BEGIN
                      distinguible((CAAR(lista(p,q)), CADAR(lista(p,q))):=T;
                      lista(p,q) := CDR(lista(p,q));
                 END
             ELSE  /* Ningún par (δ(p,a), δ(q,a)) es distinguible */
(6)            FOR EACH a∈Σ DO
(7)                IF δ(p,a) ≠ δ(q,a) THEN
                       lista(δ(p,a), δ(q,a)) := CONS((p,q), lista(δ(p,a),δ(q,a)))
     END
```

Nos podemos arreglar para que este test no sea un bucle.

Lema: Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un FA, entonces es posible eliminar sus estados inaccesibles en un tiempo $O(kn^2)$ / $|Q| = n$, $|\Sigma| = k$

demo.

Consideremos el algoritmo siguiente:

```
(1)  lista_estados_a_estudiar := (q0);
(2)  estado_accesible (q0) := T;
(3)  UNTIL lista_estados_a_estudiar DO BEGIN
         q := CAR (lista_estados_a_estudiar);
         lista_estados_a_estudiar := CDR (lista_estados_a_estudiar);
(4)      FOR EACH p ∈ Q / ∃a ∈ Σ, δ(q,a) = p
                          estado_accesible (p) ≠ T     DO
           BEGIN
             lista_estados_a_estudiar := CONS (p, lista_estados_a_estudiar);
             estado_accesible (p) := T;
           END
     END
```

Teorema (de Huffman-Moore): Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA, entonces el DFA reducido construido a partir de los dos últimos lemas, es el DFA mínimo para $T(A)$.

demo.

Sea $A' = (Q', \Sigma, \delta', [q_0], F')$ el DFA construido, esto es:

$$\begin{cases} Q' = \{[q] \,/\, q \text{ es accesible a partir de } q_0\} \\ F' = \{[q] \,/\, q \in F\} \end{cases}$$

donde $\delta'([q], a) := [\delta(q, a)]$

δ' bien definida

Sean $p, q \in Q \,/\, p \equiv q$, veremos que $\delta(p,a) \equiv \delta(q,a)$, $\forall a \in \Sigma$, lo cual es trivial por definición de $\equiv$.

A' es el DFA mínimo / $T(A') = T(A)$

Veremos que $T(A') = T(A)$

$$x \in T(A') :\Leftrightarrow \delta'([q_0], x) = [\delta(q_0, x)] \in F' \Leftrightarrow \delta(q_0, x) \in F \Leftrightarrow x \in T(A)$$

Veremos que $|Q'| = |R_{L(A)}|$

Dado que la relación $R_{L(A)}$ define el DFA minimal $\Rightarrow |Q'| \geq |R_{L(A)}|$

Supongamos que $|Q'| > |R_{L(A)}| \Rightarrow \exists\, p, q \in Q, \exists\, x, y \in \Sigma^* \,/\, \delta(q_0, x) = q$, $\delta(q_0, y) = p$, $[p] \not\equiv [q]$, $x R_{L(A)} y$

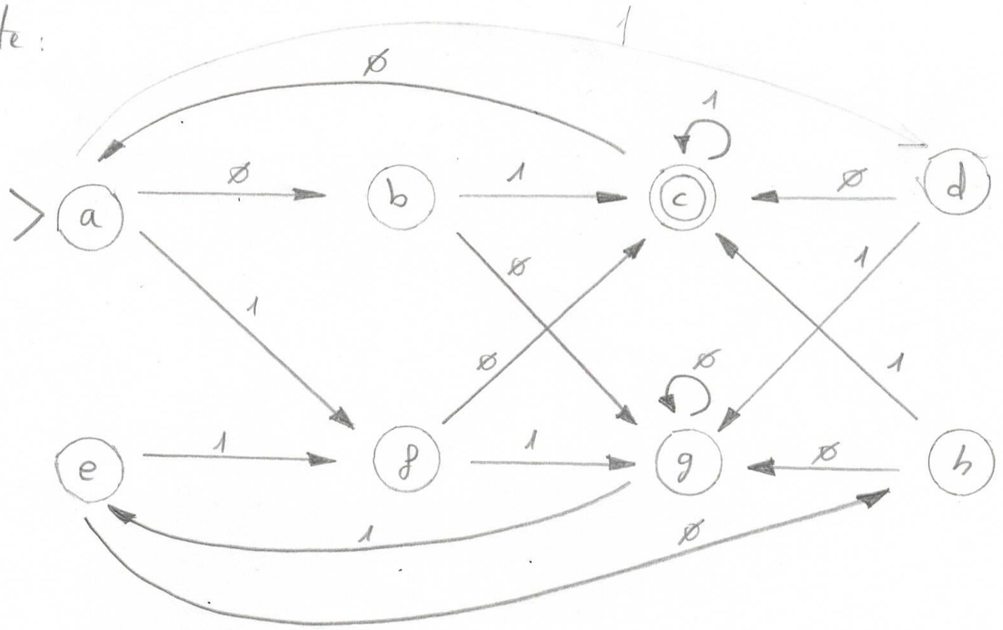
donde $[p] \not\equiv [q] \Rightarrow: \exists\, w \in \Sigma^* \,/\, \delta(p, w) \not\equiv \delta(q, w) \Rightarrow \delta(q_0, xw) \not\equiv \delta(q_0, yw) \Rightarrow xw \cancel{R_{L(A)}} yw$

$x R_{L(A)} y \Rightarrow: xw\, R_{L(A)}\, yw$

ABSURDO   demostrado

Ejemplo: Dado el DFA representado por el grafo de transiciones siguiente:

(pag 131, Hopcroft)



se trata de eliminar los estados equivalentes e inaccesibles, para obtener el DFA canónico correspondiente.

Para ello seguiremos los lemas indicados anteriormente con este fin.

Eliminación de estados inaccesibles

d es inaccesible y podrían eliminarse, pero ilustraremos el proceso incluyéndolo

Eliminación de estados equivalentes

Construimos una tabla con una entrada para cada par de estados, marcamos como distinguibles cada par en $F \times (Q \setminus F)$.

	a	b	c	d	e	f	g
b							
c	X	X					
d			X				
e			X				
f			X				
g			X				
h			X				

Ahora para cada par de estados (p,q) no todavía marcados, consideramos $\forall a \in \Sigma$, $r = \delta(p,a)$, $s = \delta(q,a)$

Si $r, s \in Q$ son distinguibles, también lo serán $p, q \in Q$.

Si $r, s \in Q$ no están aún marcados, entonces incluimos (p,q) en la lista lista(r,s). Si en el futuro, marcásemos (r,s), también marcaríamos todos los pares de dicha lista.

Consideraremos ahora uno a uno, los pares todavía no marcados.

(a,b) $\quad (\delta(b,1), \delta(a,1)) = (c,f)$ marcado $\Rightarrow$ (a,b) marcado

(a,d) $\quad (\delta(a,0), \delta(d,0)) = (b,c)$ " $\Rightarrow$ (a,d) "

(a,e) $\quad (\delta(a,0), \delta(e,0)) = (b,h)$ no marcado $\Rightarrow$ lista $(b,h) = ((a,e))$

<u>NOTA</u>: $(\delta(a,1), \delta(e,1)) = (f,f)$

(a,f) $\quad (\delta(a,0), \delta(f,0)) = (b,c)$ marcado $\Rightarrow$ (a,f) marcado

no hace falta $\quad (\delta(a,1), \delta(f,1)) = (f,g)$ no marcado $\Rightarrow$ lista $(f,g) = ((a,f))$

(a,g) $\quad (\delta(a,0), \delta(g,0)) = (b,g)$ no marcado $\Rightarrow$ lista $(b,g) = ((a,g))$

$\quad (\delta(a,1), \delta(g,1)) = (f,e)$ " " $\Rightarrow$ lista$(f,e) = ((a,g))$

(a,h) $\quad (\delta(a,0), \delta(h,0)) = (b,g)$ " " $\Rightarrow$ lista $(b,g) = ((a,g),(b,g))$

$\quad (\delta(a,1), \delta(h,1)) = (f,c)$ marcado $\Rightarrow$ (a,h) marcado

En estos momentos, nuestra tabla viene dada por:

b	X						
c	X	X					
d	X		X				
e			X				
f	X		X				
g			X				
h	X		X				
	a	b	c	d	e	f	g

El proceso se continúa ahora con los restantes pares inexplorados, veremos en particular que:

(b,g) $\quad (\delta(b,1), \delta(g,1)) = (c,e)$ marcado $\Rightarrow (b,g)$ marcado $\Rightarrow$

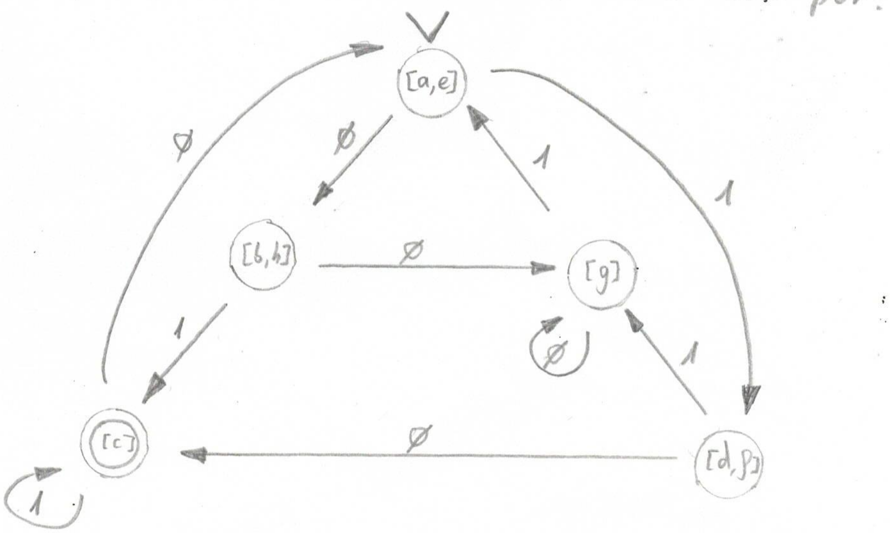
$\Rightarrow$ lista(b,g) marcada $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a,g)$ marcado

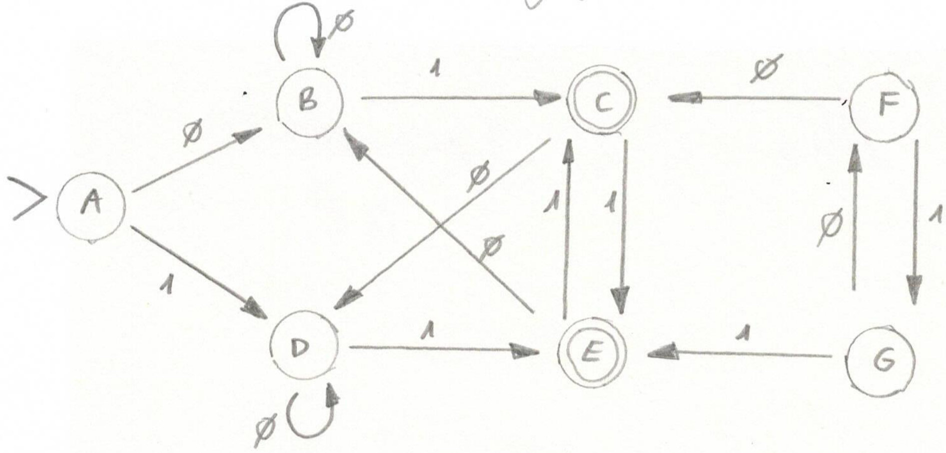
El resultado final es el dado por:

b	X						
c	X	X					
d	X	X	X				
e		X	X	X			
f	X	X	X		X		
g	X	X	X	X	X	X	
h	X		X	X	X	X	X
	a	b	c	d	e	f	g

Esto es, $\left.\begin{array}{l} a \equiv e \\ b \equiv h \\ d \equiv f \end{array}\right\}$ con lo que el DFA canónico viene dado por:



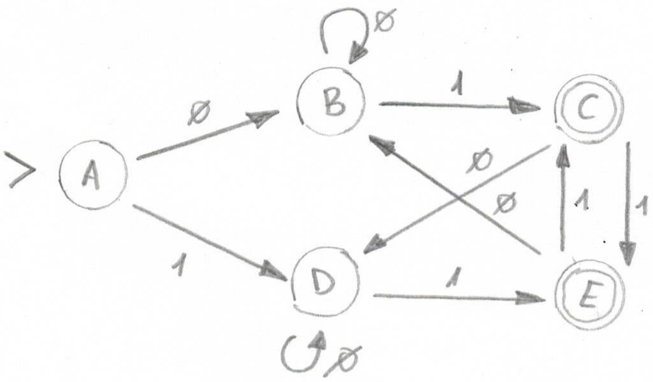
<u>Ejemplo</u>: Sea el DFA dado por el grafo de transiciones que sigue:



vamos a reducirlo.

<u>Primero buscaremos los posibles estados inaccesibles.</u>

F y G inaccesibles, con lo que nuestro DFA se reduce por el momento al grafo de transiciones:



Buscamos ahora los estados equivalentes, obteniendo:

	A	B	C	D
B	X			
C	X	X		
D	X		X	
E	X	X		X

Esto es, el DFA reducido viene dado por el grafo de transiciones: