Análise Matemática. Curso 2022-2023.
Grao en Enxenería Informática. ESEI Ourense.
Departamento de Matemáticas. Universidade de Vigo.
Data: 10/11/2022

BLOQUE II

APELIDOS	NOME	DNI	NOTA

1. Considérese a función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}, & \text{se } x < 0, \\[2ex] x + \ln(x^2 + \mathrm{e}), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) f é continua en $x = 0$?

SOLUCIÓN: Calculamos $f(0) = \ln(\mathrm{e}) = 1$ e os límites laterais

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \overset{\boxed{\text{“}\frac{0}{0}\text{”, L'Hôp.}}}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos(x)}{1} = 1,$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + \ln(x^2 + \mathrm{e}) = 1.$$

Logo a función é continua en $x = 0$ porque existe o $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

2. f é derivable en $x = 0$?

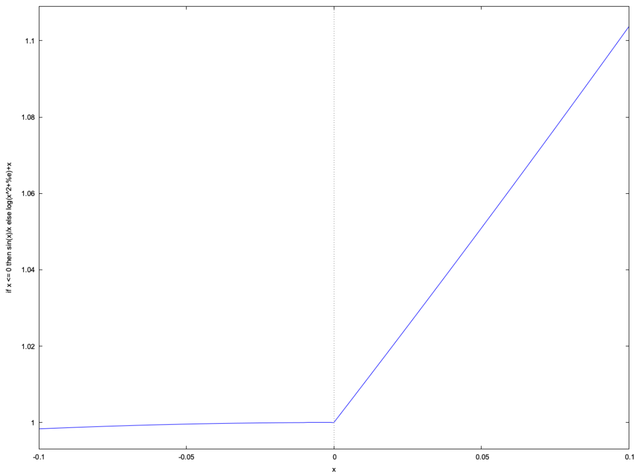
SOLUCIÓN: Para $x \neq 0$ podemos calcular $f'(x)$ usando as regras de derivación:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}, & \text{se } x < 0, \\[2ex] 1 + \dfrac{2x}{x^2 + \mathrm{e}}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Cómo f é continua en $x = 0$ podemos calcular as derivadas laterais usando os límites laterais de f', é dicir,

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2} \overset{\boxed{\text{“}\frac{0}{0}\text{”, L'Hôp.}}}{=}$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos(x) - x\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2} = \frac{0}{2} = 0,$$
$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 + \frac{2x}{x^2 + \mathrm{e}} = 1 + \frac{0}{\mathrm{e}} = 1,$$

Logo a función non é derivable en $x = 0$ porque $f'(0^-) \neq f'(0^+)$.



Gráfica de f en $[-0.1, 0.1]$.

1. Calcular a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x}{1+9\,x^4}\,dx$.

   SOLUCIÓN: Facendo o cambio de variable $u = 3x^2 \Longrightarrow du = 6xdx$ obtense

$$\int \frac{x}{1+9\,x^4} tdx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{1+(3x^2)^2} dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+u^2} du =$$

$$= \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(u) + c = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(3x^2) + c.$$

2. Determinar se a integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+9\,x^4}\,dx$ é converxente ou diverxente.

   SOLUCIÓN:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+9\,x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} \frac{x}{1+9\,x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(3x^2)\right]_0^b =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(3b^2) - \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg} 0\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}\cdot 0 = \frac{\pi}{12},$$

   e polo tanto a integral impropia é converxente.