Análise Matemática. Curso 2021-2022.
Grao en Enxenería Informática. ESEI Ourense.
Departamento de Matemáticas. Universidade de Vigo.
Data: 06/10/2021

Bloque I

APELIDOS	NOME	DNI	NOTA

1. Representar gráficamente os seguintes conxuntos e determinar, se existen, as cotas superiores e inferiores e o supremo, ínfimo, máximo e mínimo:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 + x - x^2 < 1\} \cap [0, +\infty)$ *b*) $B = [-2, 0) \cup [1, 3)$

Solución: *a*) Primeiro estudamos o conxunto

$$\{x \in \mathbb{R} : 3 + x - x^2 < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 2 + x - x^2 < 0\}.$$

Calculamos as solucións da ecuación $y(x) = 2 + x - x^2 = 0 \iff x = -1$ ou $x = 2$. Logo a función ten signo constante nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ e $(2, +\infty)$ e para determinar o seu signo basta obter o valor de $y(x)$ nun punto x calqueira de cada intervalo:

$$x = -2 \Longrightarrow y(-2) = -4 < 0 \Longrightarrow y(x) < 0 \text{ para todo } x \in (-\infty, -1),$$

$$x = 0 \Longrightarrow y(0) = 2 > 0 \Longrightarrow y(x) > 0 \text{ para todo } x \in (-1, 2),$$

$$x = 3 \Longrightarrow y(4) = -10 < 0 \Longrightarrow y(x) < 0 \text{ para todo } x \in (2, +\infty).$$

Logo

$$\{x \in \mathbb{R} : 3 + x - x^2 < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 2 + x - x^2 < 0\} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty),$$

e polo tanto $A = [(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)] \cap [0, +\infty) = (2, +\infty)$ sendo a súa representación gráfica

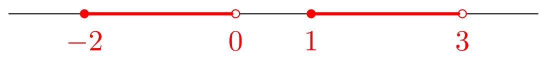
Como A non está acotado superiormente tense que $M(A) = \emptyset$ e polo tanto non existen $\max(A)$ e $\sup(A)$. Por outro lado,

$$m(A) = (-\infty, 2],$$

$$A \cap m(A) = \emptyset \implies \text{non existe} \min(A),$$

$$\inf(A) := \max(m(A)) = 2.$$

b) Representamos gráficamente o conxunto



$$M(A) = [3, +\infty),$$
$$A \cap M(A) = \emptyset \implies \text{non existe}\, \text{máx}(A),$$
$$\sup(A) := \text{mín}(M(A)) = 3.$$

$$m(A) = (-\infty, -2],$$
$$A \cap m(a) = \{-2\} \implies \text{mín}(A) = -2,$$
$$\text{ínf}(A) := \text{máx}(m(A)) = -2.$$

2. Xustificar se as seguintes series son converxentes ou non:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n! \cdot n^3} \qquad\qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

SOLUCIÓN: *a*) Satisfaise que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n! \cdot n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot n!}{n! \cdot n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Na última suma aparecen dúas series armónicas xeneralizadas: ambas converxentes por ser $\alpha = 2 > 1$ e $\alpha = 3 > 1$, respectivamente. Entón a serie de partida $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n-1)!n^3}$ é **converxente**.

b) Como $a_n = \dfrac{n!}{n^n} > 0$ trátase dunha serie de termos positivos. Usaremos o criterio do cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \frac{(n+1)\, n!\, n^n}{(n+1)\, (n+1)^n\, n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Entón,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \overset{\text{“}1^\infty\text{”}}{=} \mathrm{e}^h,$$

sendo

$$h = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} - 1\right) n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-n-1}{n+1}\right) n = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n+1} = -1.$$

Polo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} = L < 1,$$

e polo criterio do cociente dedúcese que a serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$ é **converxente**.