8. Conjuntos Regulares

8.1 Sus generadores y sus reconocedores.

8.1.1 Equivalencia de conj. regulares y RGs: Teorema de Chomsky-Miller

Lema: Sea L un conj. regular, entonces $\exists\, \mathcal{G}$ gramática regular $/ \; L = L(G)$.

demo.

L conj. regular $\Leftrightarrow$: $\exists\, A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA $/ \; L = T(A)$

La idea consiste en construir una RG a partir del DFA A, donde los no terminales sean los estados y los terminales sean los símbolos de entrada. Esto es, definamos $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, q_0)$, donde:

$$\begin{cases} V = \Sigma \cup Q \\ P = \{ q \to a\,\delta(q,a) \;/\; (q,a) \in Q \times \Sigma \} \cup \{ q \to \varepsilon \;/\; q \in F \} \end{cases}$$

NOTA: Trivialmente podemos suponer que $\Sigma \cap Q = \emptyset$, sino renombraríamos los estados.

$\mathcal{G}$ es regular   Trivial

$L = L(G)$

Veremos antes que

$$\boxed{\forall y \in T(A),\; \dot{\exists}\; q_0 \overset{*}{\Rightarrow} yq \;/\; \begin{matrix} q \in Q \\ q = \delta(q_0, y) \end{matrix}}$$

La prueba será una consecuencia inmediata del hecho de que "y" determina un único camino a través del autómata. Lo haremos por inducción en $|y|$.

$\underline{|y| = 0}$ $\Leftrightarrow y = \varepsilon$, por tanto podemos tomar $q := q_0$ puesto que:

$$q_0 \in Q$$
$$\delta(q_0, y) = \delta(q_0, \varepsilon) = q_0 = q$$

$\underline{|y| \leq n}$ Supuesto cierto

$\underline{|y| = n+1}$ $\Rightarrow \exists w \in \Sigma^* \Big/ \begin{array}{l} |w| = n \\ y = wa,\ a \in \Sigma \end{array}$

$$\left.\begin{array}{l} |w| = n \Rightarrow (\text{inducción}) \Rightarrow \dot{\exists}\, q_0 \overset{*}{\Rightarrow} wq \Big/ \begin{array}{l} q \in Q \\ q = \delta(q_0, w) \end{array} \\ \text{Por construcción del DFA } A,\ \delta(q_0, w) \to a\,\delta(\delta(q_0, w), a) \in P \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow\ q_0 \overset{*}{\Rightarrow} w\,\delta(q_0, w) \Rightarrow wa\,\delta(\delta(q_0, w), a) \\ \delta(\delta(q_0, w), a) = \delta(q_0, wa) \\ wa = y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $q_0 \overset{*}{\Rightarrow} y\,\delta(q_0, y)$, además de forma única. demostrado

$$\Leftarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Como consecuencia tendremos que } \left[q_0 \overset{*}{\Rightarrow} y\,\delta(q_0, y) \Rightarrow y\right] \Leftrightarrow \delta(q_0, y) \to \varepsilon \in P \\ \text{Por construcción del DFA } A,\ \delta(q_0, y) \to \varepsilon \in P \Leftrightarrow \delta(q_0, y) \in F \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[q_0 \overset{*}{\Rightarrow} y \Leftrightarrow \delta(q_0, y) \in F\right] \Rightarrow \left[y \in L(G) \Leftrightarrow y \in T(A) = L\right]$$

demostrado

Además la G es determinista!

Corolario: Sea L un conj. regular $\Rightarrow$ L es un lenguaje de contexto libre, no ambiguo.

demo.

$$\frac{L \text{ lenguaje de contexto libre}}{L \text{ lenguaje no ambiguo}}$$

Trivial por def. una regular

Trivial por la unicidad de las derivaciones.

demostrado.

Lema: Sea $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ una gramática regular, entonces $L(\mathcal{G})$ es un conj. regular.

demo.

La idea consiste en definir un DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a partir de $\mathcal{G}$, en forma inversa a como lo hemos hecho en el lema anterior. Sean:

$Q := N \cup \{q\} \ / \ q \notin N \cup \Sigma$

$F := \{q\}$

$\delta := \{(q_i, u, q_j) \ / \ q_i \to u q_j \in P\} \cup \{(q_i, u, q) \ / \ q_i \to u \in P\}$

$q_0 := S$

NOTA: (q_i, u, q_j) denota la transición $\delta(q_i, u) = q_j$.

iv) $\left.\begin{array}{l} q'_{n-1} := q_n \\ u'_n := u_{n+1} \\ q'_{n-1} \to u'_n \in P \end{array}\right\} \Rightarrow q_n \to u_{n+1} \in P$ demostrado

demostrado

"$\Leftarrow$" Trivial

Teniendo ahora en cuenta el resultado obtenido, tendríamos que:

$w \in L(G) :\Leftrightarrow S \overset{*}{\Rightarrow} w \Leftrightarrow$ (iii) iv)) $\Leftrightarrow w \in L(A)$. demostrado

Teorema (de Chomsky-Miller): L es un leng. regular $\Leftrightarrow$ L es un conj. regular

demo. Trivial por los dos lemas anteriores.

Teorema: La familia de los lenguajes regulares es un subconjunto propio de la familia de los lenguajes de contexto-libre.

demo. Sea $L = \{a^i b^i / i \geq 0\}$, entonces $L = L(G)$ donde G viene dada por las producciones $\left\{\begin{array}{l} S \to aSb \\ S \to \varepsilon \end{array}\right.$

Trivialmente L es un lenguaje de contexto-libre, pero ya habíamos visto que L no es un conj. regular y por tanto L no es un lenguaje regular. demostrado