Ejercicios de la sección 7.4 Mínimos cuadrados

(Para hacer en clase: 1, 6, 7, 9, 13, 15, 18, 25, 27.)
(Con solución o indicaciones: 3, 5, 7, 11, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 26.)

En los ejercicios 1 a 4, halla la solución de mínimos cuadrados del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mediante la resolución de las ecuaciones normales.

▶**1.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

▶**3.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 5 y 6, describe todas las soluciones de mínimos cuadrados de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

▶**5.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

▶**6.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

▶**7.** Calcula el error asociado con la solución de mínimos cuadrados del ejercicio 3.

8. Calcula el error asociado con la solución de mínimos cuadrados del ejercicio 4.

En los ejercicios 9 a 12, halla la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Col} A$ y la solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

▶**9.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

▶**11.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 13 y 14, usa la factorización QR de A dada para hallar la solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

▶**13.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

▶**14.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 15 y 16, A es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$. Indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

▶**15.**

(a) El problema de mínimos cuadrados asociado a un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consiste en hallar un $\mathbf{x}$ que haga $A\mathbf{x}$ lo más cerca posible de $\mathbf{b}$.

(b) Una solución del problema de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un vector $\hat{\mathbf{x}}$ que satisface $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_\parallel$ donde $\mathbf{b}_\parallel$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Col} A$.

(c) Una solución del problema de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un vector $\hat{\mathbf{u}}$ tal que $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{u}}\|$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

(d) Toda solución de $A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ es una solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(e) Si las columnas de A son linealmente independientes, entonces el problema de mínimos cuadrados de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución.

▶**16.**

(a) Si $\mathbf{b}$ pertenece al espacio columna de A, entonces toda solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es una solución de mínimos cuadrados.

(b) La solución del problema de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el vector del espacio columna de A más cercano a $\mathbf{b}$.

(c) Una solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es una lista de coeficientes que, cuando se usan para formar una combinación lineal de las columnas de A, el resultado es la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Col} A$.

(d) Si $\hat{\mathbf{x}}$ es una solución del problema de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces $\hat{\mathbf{x}} = \left(A^{\mathrm{T}}A\right)^{-1}A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$.

(e) Las ecuaciones normales siempre proporcionan un método seguro para calcular soluciones de problemas de mínimos cuadrados.

(f) Si A tiene una factorización QR, $A = QR$, entonces la mejor forma de hallar la solución del problema de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es calcular $\hat{\mathbf{x}} = R^{-1}Q^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$.

▶**17.** Sea A una matriz $m \times n$. Usa los pasos que se indican a continuación para demostrar que un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ satisface $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si y sólo si $A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es decir, que $\operatorname{Nul} A = \operatorname{Nul} A^{\mathrm{T}}A$.

(a) Demuestra que si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Suponiendo $A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, explica por qué $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = 0$ y usa esto para demostrar que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Versión de 19 de enero de 2023, 14:30h.

▶**18.** Sea A una matriz $m \times n$ tal que $A^{\mathrm{T}}A$ es inversible. Demuestra que las columnas de A son linealmente independientes. (*Cuidado:* no se puede suponer que A sea inversible ni que sea siquiera cuadrada.)

▶**19.** Sea A una matriz $m \times n$ cuyas columnas son linealmente independientes.

(a) Usa el ejercicio 17 para demostrar que $A^{\mathrm{T}}A$ es una matriz inversible.

(b) Explica por qué A no puede tener menos filas que columnas.

(c) Halla el rango de A.

▶**20.** Usa el ejercicio 17 para demostrar que para cualquier matriz $m \times n$, A, $\operatorname{Rang}(A^{\mathrm{T}}A) = \operatorname{Rang}(A)$.
Pista: ¿Cuántas columnas tiene $A^{\mathrm{T}}A$? ¿Qué relación tiene esto con el rango de $A^{\mathrm{T}}A$?

▶**21.** Sea A una matriz $m \times n$ cuyas columnas son linealmente independientes y sea $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$. Usa las ecuaciones normales del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para obtener una fórmula que nos dé la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Col} A$.

Pista: Halla primero una fórmula para la solución, $\hat{\mathbf{x}}$, del problema de mínimos cuadrados $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

En los ejercicios 22 a 25 halla la ecuación $y = ax + b$ de la recta de regresión que mejor se ajuste a los puntos dados.

22. $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,2)$.

23. $(1,0)$, $(2,1)$, $(4,2)$, $(5,3)$.

24. $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$.

▶**25.** $(2,3)$, $(3,2)$, $(5,1)$, $(6,0)$.

▶**26.** Cierto experimento produjo los datos $(1, 1'8)$, $(2, 2'7)$, $(3, 3'4)$, $(4, 3'8)$, y $(5, 3'9)$ halla la función de la forma $y = \alpha x + \beta x^2$ que mejor se ajusta a esos datos.

▶**27.** Cierto experimento produjo los datos $(1, 7'9)$, $(2, 5'4)$ y $(3, -0'9)$ halla la función de la forma $y = A\cos x + B \operatorname{sen} x$ que mejor se ajusta a esos datos.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 7.4

3. $A^{\mathrm{T}}A = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{smallmatrix}\right)$, $A^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ -6 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{x} = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. $A^{\mathrm{T}}(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Resolviendo el sistema que tiene esta matriz ampliada: $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

7. $\epsilon = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = 2\sqrt{5}$.

11. Se observa que las columnas de A son ortogonales y por tanto se puede usar la fórmula de la proyección ortogonal que usa sólo productos escalares. $\operatorname{proy}_{\operatorname{Col} A} \mathbf{b} = \mathbf{b}_{\|} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Como ya se conoce la proyección ortogonal, la solución de mínimos cuadrados se puede hallar resolviendo el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_{\|}$. Solución: $\mathbf{x} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

14. $\mathbf{x} = R^{-1}Q^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \frac{1}{10}\left(\begin{smallmatrix} 29 \\ 9 \end{smallmatrix}\right)$.

16. (a) Y con error igual a cero. (b) No es ese vector, sino su vector de coordenadas respecto a las columnas de A. (c) Eso es lo que es una solución del sistema $A\mathbf{x} = \operatorname{proy}_{\operatorname{Col} A} \mathbf{b}$, la cual es una solución del problema de mínimos cuadrados por la propiedad de mínimo de la proyección ortogonal. (d) Sólo si las columnas de A son independientes, es decir, si $A^{\mathrm{T}}A$ es inversible. (e) Las ecuaciones normales son un sistema de ecuaciones lineales compatible. (f) $A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ es equivalente a $R^{\mathrm{T}}R\mathbf{x} = R^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$. Pero R (y R^{T} es inversible, por lo que la solución es la indicada)

17. (a) $A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. (b) $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{0} = 0$, por tanto $0 = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|^2$ y de aquí $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

19. (a) Como las columnas de A son linealmente independientes, $\operatorname{Nul} A = \{\mathbf{0}\}$, luego $\operatorname{Nul} A^{\mathrm{T}}A = \{\mathbf{0}\}$, luego las columnas de $A^{\mathrm{T}}A$ también son independientes y por ser cuadrada es inversible. (b) Si tuviera menos filas, sus columnas no podrían ser independientes. (c) $\operatorname{Rang} A = n$.

20. $\operatorname{Rang}(A^{\mathrm{T}}A) =$ núm cols de $A^{\mathrm{T}}A =$ núm cols de $A = n = \operatorname{Rang}(A)$.

21. Como las columnas de A son linealmente independientes, $A^{\mathrm{T}}A$ es inversible y la solución del problema de mínimos cuadrados es $\hat{\mathbf{x}} = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$. Luego la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Col} A$ es $\mathbf{b}_{\|} = A\hat{\mathbf{x}} = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$.

26. $\alpha = 1'76037$, $\beta = -0'198758$.