Tema 4

Determinantes

4.1. Definición y propiedades básicas de los determinantes

Lección 5, 7 mar 2023

Definición y propiedades básicas de los determinantes

Para entender lo que es el determinante de una matriz cuadrada tenemos que entender primero cómo elegir un elemento de cada columna de la matriz *de forma que no tomemos dos de la misma fila*, como por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{6} & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 9 & 7 & 5 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 8 & 6 & 4 & \boxed{2} \\ 3 & 6 & \boxed{9} & 7 & 4 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

(Obsérvese que esto es lo mismo que elegir un elemento de cada fila de forma que no tomemos dos de la misma columna.)

Esos elementos elegidos hay que multiplicarlos entre sí y después hay que "equilibrar" el producto hallado, lo cual consiste en decidir si ese producto particular va a conservar su signo o si hay que cambiárselo (sigue leyendo para aprender cómo se toma esa decisión). Así pues "elegir elementos", "multiplicarlos" y "equilibrar el producto" son las tres operaciones básicas que hay que realizar para obtener un *término* del determinante de la matriz. Para conocer el determinante es necesario calcular todos los términos posibles y sumarlos; es decir, hay que realizar *todas las elecciones posibles*, para cada una hallar el correspondiente término equilibrado y finalmente sumar todos los términos.

término del determinante de la matriz

4.1.1 Ejercicio de tarea. (a) ¿Cuál es el número total de términos del determinante de una matriz de tamaño 2×2? (b) ¿Y de una matriz 3×3? (c) ¿Cuál es la fórmula general que nos da el número de términos para una matriz de orden n?

Solución: (a) 2. (b) 6. (c) $n!$

¿Cómo se realiza el "equilibrado" de un término? Para equilibrar un término de un determinante mantenemos su signo o se lo cambiamos según cómo se hayan elegido los elementos que entran en ese término. Concretamente, el equilibrado depende del número p de intercambios de filas y/o columnas que sería necesario realizar para que todos los elementos de ese término quedasen en la diagonal.

Versión de 23 de enero de 2023, 11:07 h.

Por ejemplo, para el producto de los elementos elegidos en (4.1), el número de intercambios de filas o columnas es $p = 3$ ya que se necesitan tres intercambios:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{6} & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 9 & 7 & 5 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 8 & 6 & 4 & \boxed{2} \\ 3 & 6 & \boxed{9} & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} \boxed{6} & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & \boxed{2} & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 8 & 6 & 4 & \boxed{2} \\ 3 & 6 & \boxed{9} & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_5} \begin{pmatrix} \boxed{6} & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & \boxed{2} & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & \boxed{9} & 7 & 4 \\ 0 & 8 & 6 & 4 & \boxed{2} \\ 9 & 7 & 5 & \boxed{3} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \leftrightarrow F_5} \begin{pmatrix} \boxed{6} & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & \boxed{2} & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & \boxed{9} & 7 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 8 & 6 & 4 & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

La regla de equilibrado es la siguiente:

Si ese número p de intercambios es par, el producto conserva su signo, pero si p es impar se le cambia el signo. Dicho de otra forma: después de hallar p, el producto de los elementos se equilibra multiplicándolo por $(-1)^p$.

De acuerdo con esto, el *término equilibrado* correspondiente a la elección hecha en (4.1) es:

$$(-1)^3 \times 6 \times 2 \times 9 \times 3 \times 2 = -648.$$

En cualquier matriz cuadrada, uno de los posibles productos que se pueden formar en los que hay un elemento de cada fila y de cada columna es el producto de los elementos de la diagonal, al estar ya todos los elementos sobre la diagonal no hay que hacer ningún intercambio, es decir para ese término es $p = 0$ y el producto de los elementos no se cambia de signo.

Por ejemplo, en la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

el producto de los elementos de la diagonal es $(-1) \times (-5) \times 8 = 40$. Para equilibrar este término no hace falta cambiarle el signo, luego en esta matriz el término equilibrado correspondiente a los elementos de la diagonal es 40.

DEFINICIÓN 4.1.1

Determinante de una matriz cuadrada

El determinante *de una matriz cuadrada es la suma de todos los posibles* términos equilibrados *obtenidos de la matriz. Esto significa que el determinante es la* suma equilibrada *de todos los posibles productos que se pueden formar eligiendo un elemento de cada columna de forma que no haya dos de la misma fila (o un elemento de cada fila de forma que no haya dos de la misma columna).*

4.1.2 Ejercicio de tarea. Calcula los seis términos equilibrados y el determinante de la matriz (4.2).

Solución: Términos: 40, 54, -64, 84, 108, 105. Determinante: 327.

Determinantes 2×2

El ejemplo general no trivial más sencillo de cálculo de determinantes es el del determinante de una matriz 2×2, $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. En este caso sólo hay dos productos posibles: ad y bc. El primero conservará su signo y al segundo se le cambiará, por tanto:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Determinantes 3×3 y la regla de Sarrus

En una matriz 3×3 hay seis posibles elecciones de elementos, las cuales se indican a continuación gráficamente junto con el número de permutaciones necesarias para su equilibrado:

$$\underset{\substack{p=0\\(-1)^p=+1}}{\begin{pmatrix}\bullet&&\\&\bullet&\\&&\bullet\end{pmatrix}},\ \underset{\substack{p=2\\(-1)^p=+1}}{\begin{pmatrix}&\bullet&\\&&\bullet\\\bullet&&\end{pmatrix}},\ \underset{\substack{p=2\\(-1)^p=+1}}{\begin{pmatrix}&&\bullet\\\bullet&&\\&\bullet&\end{pmatrix}},\ \underset{\substack{p=1\\(-1)^p=-1}}{\begin{pmatrix}&\bullet&\\\bullet&&\\&&\bullet\end{pmatrix}},\ \underset{\substack{p=1\\(-1)^p=-1}}{\begin{pmatrix}\bullet&&\\&&\bullet\\&\bullet&\end{pmatrix}},\ \underset{\substack{p=1\\(-1)^p=-1}}{\begin{pmatrix}&&\bullet\\&\bullet&\\\bullet&&\end{pmatrix}}$$

En consecuencia el determinante de una matriz 3×3 se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + dhc - bdi - afh - ceg$$

la cual se conoce como *regla de Sarrus*. *regla de Sarrus*

Cálculo del determinante por desarrollo de cofactores de una fila o columna

Según la definición, para calcular el determinante de una matriz, necesitamos calcular todos los posibles productos que se pueden formar eligiendo un elemento de cada fila y de cada columna y con ellos todos los posibles términos. Debido a la creciente complicación de esta tarea cuando el orden de la matriz aumenta, es necesario seguir un método ordenado para asegurarse de obtener todos los términos sin olvidar ninguno.

Una forma sencilla de llegar a un método válido se basa en las siguientes observaciones: Supongamos que empezamos formando todos los términos en los que aparece el primer elemento de la primera columna, a_{11}. Puesto que a_{11} es un factor común a todos esos términos, la suma de ellos es igual a a_{11} multiplicado por una suma de términos sacados de la submatriz A_{11} que se obtiene al eliminar en la matriz original la primera fila y la primera columna:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Esa suma de términos sacados de la submatriz A_{11} es justamente el determinante de la matriz A_{11}, de forma que tenemos

$$\det A = a_{11} \det A_{11} + \cdots$$

Si a continuación formamos todos los productos en los que interviene el segundo elemento de la primera columna, a_{21}, la suma equilibrada de estos productos tiene a a_{21} como factor común y la suma de ellos es igual a a_{21} multiplicado por una suma de términos sacados de la submatriz A_{21} que se obtiene al eliminar en la matriz original la fila y la columna de a_{21}:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Esa suma de términos sacados de A_{21} no es exactamente el determinante de A_{21} porque todos sus términos tienen signo contrario al de los términos de $\det A_{21}$. Pero justamente esto nos dice que dicha suma de términos sacados de A_{21} es justamente igual a $-\det A_{21}$, así que de momento tenemos

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + \cdots$$

Continuando de esta manera se obtiene que el determinante de la matriz A se puede expresar como una suma de productos de los elementos a_{i1} de la primera columna, cada uno de ellos multiplicado por el determinante de una matriz de un orden menor que la dada:

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + \cdots \pm a_{n1} \det A_{n1}.$$

En esta igualdad, los signos de los términos de la suma del miembro de la derecha se van alternando y por tanto el signo del último término es positivo si n es impar y negativo si n es par, o sea el signo del último término es $(-1)^{n+1}$:

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1} \tag{4.3}$$

Por ejemplo: para una matriz 3×3 la fórmula (4.3) quedaría:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Para entender perfectamente la fórmula (4.3) es útil introducir algunos conceptos:

Menor de un elemento. Dada una matriz A, se llama *menor del elemento que ocupa la posición (i, j) (es decir, fila i, columna j) y se denota A_{ij} a la matriz obtenida al eliminar toda la fila i y toda la columna j de la matriz dada.*

Cofactor de un elemento. Dada una matriz cuadrada A, se llama *cofactor del elemento que ocupa la posición (i, j) al determinante* $\det A_{ij}$ *del menor de ese elemento multiplicado por $+1$ o -1 dependiendo de si $i + j$ es par o impar.*

Así, el cofactor del elemento (i, j) de la matriz A se calcula por la fórmula:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Usando cofactores, la fórmula (4.3) se puede escribir:

$$\det A = a_{11}C_{11} + \cdots + a_{n1}C_{n1}$$

Los cofactores de los elementos de una fila o columna nos permiten calcular el determinante de una matriz cuadrada mediante la fórmula de *expansión del determinante por los cofactores de una fila o columna*. La expansión del determinante de una matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})$ por la columna j es:

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

La expansión del determinante de la misma matriz por la fila i es:

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1, Ejercicio 2.

Ejercicios de la sección 4.1 Definición y propiedades básicas de los determinantes

Halla los determinantes de los ejercicios 1 a 8 mediante un desarrollo por cofactores en la fila o columna según te parezca mejor. Indica claramente cuál es la fila o columna utilizada.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

Halla los determinantes de los ejercicios 9 a 11 mediante un desarrollo por cofactores eligiendo en cada paso una fila o columna que implique realizar el menor número posible de operaciones.

9. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 12 a 15 usa la regla de Sarrus para calcular los determinantes indicados. ***Atención:*** *Esta regla sólo es válida para matrices* 3×3 *y no tiene ninguna generalización razonable para matrices* 4×4 *o mayores.*

12. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ **13.** $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ **15.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 16 a 21 investiga el efecto de una operación elemental de filas sobre el valor del determinante de una matriz. En cada caso, indica la operación elemental realizada y explica cómo afecta al determinante.

16. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ kc & kd \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5+3k & 6+4k \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 8 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k & k & k \\ -3 & 8 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Halla los determinantes de las matrices elementales dadas en los ejercicios 22 a 27.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **26.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **27.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Usa los ejercicios 22 a 27 para contestar razonadamente las preguntas de los ejercicios 28 y 29.

28. ¿Cuál es el determinante de una matriz elemental de reemplazo de filas?

29. ¿Cuál es el determinante de una matriz elemental de reescalado que tiene el número k en la diagonal?

En los ejercicios 30 a 33, comprueba que $\det(EA) = (\det E)(\det A)$, donde E es la matriz elemental que se muestra y $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

30. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **31.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

32. $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **33.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.

34. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula $5A$. ¿Es $\det(5A) = 5 \det A$?

35. Sean $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ y k un número. Halla una fórmula que relacione $\det(kA)$ con k y $\det A$.

36. Sea A una matriz $n \times n$. Para cada una de las siguientes afirmaciones indica si es verdadera o falsa. Justifica tus respuestas.

(a) Un determinante de una matriz $n \times n$ puede calcularse usando determinantes de submatrices de orden $(n-1) \times (n-1)$.

(b) El cofactor (i, j) de una matriz A es la matriz A_{ij} que se obtiene al eliminar de A su i-ésima fila y su j-ésima columna.

(c) El desarrollo por cofactores de A bajando por una columna da un resultado opuesto al que se obtiene mediante el desarrollo por cofactores a lo largo de una fila.

(d) El determinante de una matriz triangular es la suma de los elementos de su diagonal principal.

37. Sean $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Calcula el área del paralelogramo cuyos vértices son $\mathbf{0}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, y $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Halla el determinante de la matriz $[\mathbf{u}\ \mathbf{v}] = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. ¿Qué diferencia hay entre los dos resultados? Reemplaza el primer elemento de $\mathbf{v}$ por un número indeterminado x, y repite el problema. Haz un dibujo que explique tus resultados.

38. Sean $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ y $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ donde a, b y c son positivos (por simplificar). Calcula el área del paralelogramo cuyos vértices son $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, y $\mathbf{0}$. Halla los determinantes de las matrices $[\mathbf{u}\ \mathbf{v}]$ y $[\mathbf{v}\ \mathbf{u}]$. Haz un dibujo que explique tus resultados.

4.2. Propiedades y métodos de cálculo de los determinantes

Consecuencias inmediatas de la definición

En el determinante de cualquier matriz identidad el único término que no es igual a cero es el producto de los elementos de la diagonal, pues todos los demás términos tienen algún elemento de fuera de la diagonal y por tanto son cero. Por tanto, la primera propiedad de los determinantes es:

1. Matriz identidad. *El determinante de cualquier matriz identidad es 1.* Si I_n es la matriz identidad de orden n,

$$\det I_n = 1\,, \qquad \det(-I_n) = (-1)^n.$$

Casi igual de sencillo es demostrar la siguiente propiedad:

2. Matriz diagonal. Igual que en una matriz identidad, en una matriz diagonal el producto de los elementos de la diagonal es el único producto de elementos elegidos de distintas filas y columnas que no da cero. Por lo tanto:

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} = d_1 \cdots d_n.$$

3. Determinante de la matriz traspuesta. *Dado que la definición de determinante es simétrica respecto a las filas y columnas, el valor del determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.*

$$\det(A^{\mathrm{T}}) = \det A.$$

Consecuencia: Toda propiedad de los determinantes enunciada en términos de filas y columnas se cumple también al sustituir cada ocurrencia de la palabra “fila” por “columna” y cada ocurrencia de la palabra “columna” por “fila”.

4. Matriz con una fila o columna de ceros. *Si todos los elementos de una fila o de una columna son cero el determinante es cero.* (Puesto que en cada uno de los productos hay un factor igual a cero.)

Por ejemplo:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

5. Efecto de un intercambio de filas o columnas. *Si se intecambian las posiciones de dos filas o de dos columnas de una matriz, se cambia el signo de su determinante* (ya que se cambia el signo de cada sumando en la "suma equilibrada").

Consecuencia 1: Si $E = P_{jk}$ es la matriz elemental que intercambia las filas j y k,

(a) $\det(EA) = -\det A$.

(b) $\det E = -1$.

(c) $\det(EA) = \det E \cdot \det A$.

Consecuencia 2: *Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es cero* (ya que intercambiando esas dos filas o columnas el determinante no cambia y a la vez cambia de signo). Por ejemplo:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{pmatrix} = 0.$$

6. Efecto de un reescalado de una fila o columna. *Si se multiplican todos los elementos de una fila o de una columna de una matriz por un número, se multiplica su determinante por ese número.*

Consecuencia 1: Si E_λ es una matriz elemental de reescalado por el escalar λ,

(a) $\det(E_\lambda A) = \lambda \det A$.

(b) $\det E_\lambda = \lambda$.

(c) $\det(E_\lambda A) = \det E_\lambda \cdot \det A$.

Consecuencia 2: *Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas que son una múltiplo de la otra, su determinante es cero* (ya que es un múltplo del determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales).

Por ejemplo:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & 3a \\ d & e & 3d \\ g & h & 3g \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{pmatrix} = 0.$$

7. Múltiplo escalar de una matriz. *Si una matriz cuadrada de orden n la multiplicamos por un número p, todas las columnas quedan multiplicadas por p, luego el determinante de la matriz queda multiplicado por p n veces, es decir, el determinante queda multiplicado por p^n.*

Esta propiedad nos permite contestar a la siguiente pregunta:

4.2.1 Ejercicio de tarea. Sea A una matriz 4×4. Sabiendo que $\det A = 20$ calcula $\det(3A)$.

Solución: $\det(3A) = 3^4 \times 20 = 1620$

8. Matriz triangular. *Si todos los elementos encima o debajo de la diagonal son cero, todos los productos en los que intervenga un elemento fuera de la diagonal son cero y el determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal.*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{mm} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Consecuencias no tan inmediatas de la definición

1. Efecto de descomponer una fila o columna como suma de dos. *Si en una matriz cuadrada se descompone una fila o columna como suma de dos, su determinante se descompone en suma de dos* (esto se demuestra desarrollando el determinante por los elementos de dicha fila o columna).

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b & c+p \\ d & e & f+q \\ g & h & k+r \end{pmatrix} &= (c+p)C_{13} + (f+q)C_{23} + (k+r)C_{33} \\ &= (cC_{13} + fC_{23} + kC_{33}) \ + \ (pC_{13} + qC_{23} + rC_{33}) \\ &= \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Efecto de sumar o restar a una fila otra fila o a una columna otra columna. *Si en una matriz cuadrada se le suma o resta a una fila otra fila o a una columna otra columna, su determinante no cambia.*

Por ejemplo:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c+b \\ d & e & f+e \\ g & h & k+h \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & b & b \\ d & e & e \\ g & h & h \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}.$$

3. Efecto de una operación de reemplazo de una fila o columna. *Si a una fila o columna se le suma otra multiplicada por un escalar el determinante de la matriz no cambia.*

Por ejemplo:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c+3a \\ d & e & f+3d \\ g & h & k+3g \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}.$$

Consecuencia: Si A es una matriz cuadrada y E es una matriz elemental de reemplazo del mismo tamaño que A,

(a) $\det(EA) = \det A$.

(b) $\det E = 1$.

(c) $\det(EA) = \det E \cdot \det A$.

Con lo anterior se completan las consecuencias de los efectos que tiene sobre el determinante de una matriz el realizar operaciones elementales de filas. En los tres casos se llega a la conclusión de que el determinante de una matriz elemental E por A es igual al producto de los determinantes, por tanto dichas consecuencias se pueden resumir en una sola:

Si E es una matriz elemental cualquiera y A es una matriz cuadrada del mismo orden, entonces

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A. \tag{4.4}$$

Cálculo de un determinante por reducción a forma escalonada

De las propiedades enunciadas en la sección anterior se deduce que si una matriz A se transforma, mediante operaciones elementales de filas, en una matriz escalonada U y solamente se han usado operaciones de reemplazo y de intercambio (o sea, sin usar operaciones de reescalado, lo cual, por otra parte, siempre es posible), entonces el determinante de la matriz escalonada U es igual al determinante de A multiplicado por ± 1 dependiendo de si el número de operaciones de intercambio ha sido par o impar. En otras palabras, si U es una forma escalonada de A obtenida sin operaciones de reescalado y con r operaciones de intercambio, entonces

$$\det A = (-1)^r \det U.$$

Al aplicar esta técnica de cálculo de un determinante no es necesario limitarse a operaciones elementales de filas. Se pueden realizar operaciones elementales de filas y de columnas mezcladas según convenga, teniendo cuidado de contabilizar en r el número total de intercambios de filas y columnas.

Puesto que toda matriz cuadrada escalonada es triangular, el determinante de U es igual al producto de todos los elementos de su diagonal y en consecuencia, el determinante de A es igual a $(-1)^r$ multiplicado por todos los elementos de la diagonal de U. Si A no es inversible (es decir, es *singular*) entonces la matriz escalonada U tiene algún elemento de la diagonal igual a cero y en consecuencia su determinante es cero. Recíprocamente si U tiene determinante cero, algún elemento de su diagonal es cero y su número de pivotes es menor que el número de columnas. Esto implica que A es necesariamente singular, Por tanto tenemos:

PROPOSICIÓN 4.2.1

Una matriz es singular (no tiene inversa) si y sólo si su determinante es igual a cero:

$$\det A = 0 \quad \textit{si y sólo si} \quad A \textit{ es singular}.$$

Teorema fundamental del cálculo de determinantes

TEOREMA 4.2.1

Teorema fundamental del cálculo de determinantes

(a) Para toda matriz elemental E y toda matriz A del mismo tamaño se verifica

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A. \tag{4.5}$$

(b) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo tamaño,

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B. \tag{4.6}$$

Demostración: Basta demostrar (b) ya que el apartado (a) se ha justificado ampliamente más arriba por los efectos que tiene sobre el determinante de una matriz el realizar operaciones elementales de filas. En el caso de que A no es inversible entonces AB tampoco lo es y, por la proposición de la sección anterior, ambos miembros de la ecuación son iguales a cero.

Si A es inversible entonces es igual a un producto de matrices elementales: $A = E_1 \cdots E_k$ y en consecuencia:

$$\det(AB) = \det(E_1)\det(E_2 \cdots E_k B) = \cdots = \det E_1 \cdots \det E_k \det B = \det(E_1 \cdots E_k)\det B = \det A \, \det B.$$

COROLARIO 4.2.1

Si A es una matriz inversible, entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}. \tag{4.7}$$

COROLARIO 4.2.2

Si A y B son dos matrices semejantes (esto es, existe una matriz inversible, M, tal que $A = MBM^{-1}$) entonces,

$$\det A = \det B.$$

Determinantes de matrices por bloques

En general no es sencillo reducir el determinante de una matriz por bloques a los determinantes de los bloques, pero hay un caso especial en el que sí es sencillo: Es el caso de una matriz partida en 2×2 bloques, que sea *triangular por bloques* y tal que los bloques en la diagonal sean *cuadrados*.

Sean A y C matrices cuadradas (no necesariamente del mismo tamaño) y sea B una matriz con el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que C, de forma que se puede formar la matriz por bloques $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{smallmatrix}\right)$. Entonces

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C. \tag{4.8}$$

Esto es una sencilla consecuencia del teorema fundamental (ver ecuación (4.6)) combinado con la siguiente identidad que se demuestra realizando el producto de matrices por bloques:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}.$$

Usando las propiedades de la traspuesta es muy sencillo deducir de (4.8) su versión "traspuesta":

$$\det \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C. \tag{4.9}$$

La fórmula (4.8) (y análogamente la (4.9)) sigue siendo cierta en un caso más general. Supongamos que A es una matriz $n \times n$ partida en $k \times k$ bloques (no necesariamente del mismo tamaño) y tal que los bloques de la diagonal, A_{ii} para $i = 1, \ldots k$, son cuadrados (donde, para cada i, el bloque A_{ii} es de tamaño $p_i \times p_i$) y los bloques debajo de la diagonal son todos matrices nulas,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & A_{kk} \end{pmatrix}$$

Entonces el determinante de A es el producto de los determinantes de las matrices de la diagonal:

$$\det(A) = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22}) \cdots \det(A_{kk}). \tag{4.10}$$

Esta fórmula puede deducirse de (4.8) por el método de inducción ya que (4.8) implica

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1k} \\ \mathbf{0} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{33} & \dots & A_{3k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A_{kk} \end{pmatrix} = \det(A_{11}) \cdot \det \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2k} \\ \mathbf{0} & A_{33} & \dots & A_{3k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A_{kk} \end{pmatrix},$$

y siguiendo de esta manera se llega a (4.10).

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1.

Ejercicios de la sección 4.2 Propiedades y métodos de cálculo de los determinantes

En los siguientes enunciados se utilizan las barras verticales para representar un determinante, es decir, se usa la notación $|A| = \det A$. En el caso del determinante de una matriz dada explícitamente por sus elementos las barras verticales sustituyen a los paréntesis que normalmente delimitan los elementos de la matriz. Cada una de las ecuaciones que aparecen en los ejercicios 1 a 4 ilustra una propiedad de los determinantes. Enuncia la propiedad que corresponda.

1. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 5 a 9 halla los determinantes indicados mediante reducción a forma escalonada.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 13 & -7 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Halla los determinantes de los ejercicios 10 a 15 combinando los métodos de la traspuesta, reducción por filas y desarrollo por cofactores, según sea más apropiado.

10. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 4 & 10 & -4 & -1 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Halla los determinantes de los ejercicios 16 a 21 sabiendo que

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 7.$$

16. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$ **17.** $\begin{vmatrix} a & 3b & c \\ d & 3e & f \\ g & 3h & i \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$ **19.** $\begin{vmatrix} b & c & a \\ h & i & g \\ e & f & d \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} a+d & b+e & 2(c+f) \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{vmatrix}$

22. Usa determinantes para establecer cuáles de las siguientes matrices son inversibles:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

Utiliza determinantes para averiguar si las matrices dadas en los ejercicios 23 a 25 son inversibles.

23. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Utiliza determinantes para averiguar si los conjuntos de vectores dados en los ejercicios 26 a 28 son linealmente independientes.

26. $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ **27.** $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 29 y 30, A y B son matrices $n \times n$. Indica para cada enunciado si es verdadero o falso y justifica tus respuestas.

29.

(a) Una operación de reemplazo de filas no afecta al determinante de una matriz.

(b) El determinante de A es el producto de los pivotes presentes en cualquier forma escalonada U de A, multiplicado por $(-1)^r$, donde r es el número de intercambios de fila realizados durante la reducción por filas de A a U.

(c) Si las columnas de A son linealmente dependientes, entonces $\det A = 0$.

(d) $\det(A+B) = \det A + \det B$.

30.

(a) Si se realizan dos intercambios sucesivos de fila, entonces el nuevo determinante es igual al determinante antiguo.

(b) El determinante de A es el producto de los elementos diagonales de A.

(c) Si $\det A$ es cero, entonces dos filas o dos columnas son iguales, o una fila o una columna es cero.

(d) $\det A^T = (-1) \det A$.

31. Halla $\det B^5$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

32. Utiliza las propiedades de los determinantes sobre cómo les afectan las operaciones elementales por filas para demostrar que si dos filas de una matriz cuadrada A son iguales, entonces $\det A = 0$. Esto se cumple también para dos columnas. ¿Por qué?

33. Demuestra: Si A es inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

34. Halla una fórmula para $\det(rA)$ cuando A es una matriz $n \times n$.

35. Sean A y B matrices cuadradas. Demuestra que aunque AB y BA no sean iguales, siempre es cierto que $\det(AB) = \det(BA)$.

36. Sean A y P matrices cuadradas, con P inversible. Demuestra que $\det(PAP^{-1}) = \det A$.

37. Sea U una matriz cuadrada tal que $U^TU = I$. Demuestra que $\det U = \pm 1$.

38. Supongamos que A es una matriz cuadrada tal que $\det(A^4) = 0$. Explica por qué A no puede ser inversible.

Comprueba que $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ para las matrices de los ejercicios 39 y 40.

39. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

40. $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

41. Sean A y B matrices 3×3, con $\det A = 4$ y $\det B = -3$. Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular:

(a) $\det(A^5)$. (b) $\det(5A)$. (c) $\det(B^T)$.
(d) $\det(A^{-1})$. (e) $\det(A^3)$.

42. Sean A y B matrices de 4×4, con $\det A = -1$ y $\det B = 2$. Halla:

(a) $\det(AB)$. (b) $\det(B^5)$. (c) $\det(2A)$.
(d) $\det(A^TA)$. (e) $\det(B - AB)$.

43. Comprueba que $\det A = \det B + \det C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} e & f \\ c & d \end{pmatrix}$$

44. Demuestra que $\det A = \det B + \det C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b & u_1 + v_1 \\ c & d & u_2 + v_2 \\ e & f & u_3 + v_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & u_1 \\ c & d & u_2 \\ e & f & u_3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} a & b & v_1 \\ c & d & v_2 \\ e & f & v_3 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, observa que A *no es igual* a $B + C$.

45. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Demuestra que $\det(A + B) = \det A + \det B$ si, y sólo si, $a + d = 0$.

4.3. Regla de Cramer y fórmula de la matriz inversa

La regla de Cramer es un método que nos permite escribir una fórmula para cada incógnita de un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es una matriz inversible. Dichas fórmulas nos permiten calcular la solución de dicho sistema por medio de determinantes. Para explicar la fórmula que corresponde a cada incógnita es necesario comprender una operación especial que se puede realizar sobre una matriz de m filas y que consiste en sustituir una columna determinada por un vector dado de $\mathbf{R}^m$.

La operación de sustituir una columna de una matriz por un vector dado

Supongamos que A es una matriz de m filas y n columnas, y que $\mathbf{b}$ es un vector de $\mathbf{R}^m$. Denotamos $A_{(j \leftarrow \mathbf{b})}$ la matriz obtenida a partir de A al sustituir la columna j de A por el vector $\mathbf{b}$. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

entonces

$$A_{(1 \leftarrow \mathbf{b})} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 4 \\ c & 9 \end{pmatrix}, \quad A_{(2 \leftarrow \mathbf{b})} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ 5 & c \end{pmatrix}.$$

En relación con esta operación de matrices el cálculo de determinantes tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $\mathbf{x}$ es el vector de componentes $(x_1, \ldots, x_n)$, entonces

$$\det\left(I_{(j\leftarrow \mathbf{x})}\right) = x_j.$$

Por ejemplo:

$$\text{Si} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{entonces} \quad \det\left(I_{(3\leftarrow \mathbf{x})}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} = x_3 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_3.$$

(b) Para cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, el producto de A por la matriz $I_{(j\leftarrow \mathbf{x})}$ es:

$$A\, I_{(j\leftarrow \mathbf{x})} = A_{(j\leftarrow A\mathbf{x})}.$$

Por ejemplo:

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad A\, I_{(2\leftarrow \mathbf{x})} = A\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = \left[A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & A\mathbf{x} \\ 5 & \end{pmatrix} = A_{(2\leftarrow A\mathbf{x})}$$

Combinando esta propiedad con la anterior se deduce:

$$\boxed{\det\left(A_{(j\leftarrow A\mathbf{x})}\right) = x_j \det A.} \tag{4.11}$$

(c) Si A es una matriz cuadrada de orden n y $\mathbf{e}_j$ es la columna j de la matriz identidad I_n, entonces el cofactor del elemento (j, i) de A es:

$$C_{ji} = \det\left(A_{(i\leftarrow \mathbf{e}_j)}\right).$$

Por ejemplo,

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad A_{(3\leftarrow \mathbf{e}_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\det\left(A_{(3\leftarrow \mathbf{e}_2)}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = -\det A_{23} = C_{23}.$$

La Regla de Cramer

En términos de la operación estudiada más arriba, la regla de Cramer se enuncia así:

Regla de Cramer. Si A es una matriz $n \times n$ inversible y $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$, entonces el vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ cuyos elementos están definidos por:

$$x_j = \frac{\det\left(A_{(j\leftarrow \mathbf{b})}\right)}{\det A}$$

es la solución única del sistema compatible determinado $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Demostración: Si A es una matriz inversible y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entonces $A_{(j\leftarrow \mathbf{b})} = A_{(j\leftarrow A\mathbf{x})}$. Tomando determinantes y usando (4.11): $\det A_{(j\leftarrow \mathbf{b})} = x_j \det A$.

Una fórmula para la matriz inversa

Si A es una matriz inversible $n \times n$, la columna j de A^{-1} es un vector $\mathbf{x}_j$ que satisface el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ (donde, igual que antes, usamos la notación $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ para las columnas de la matriz identidad de orden n). En consecuencia, por la regla de Cramer, $\mathbf{x}_j$ está dado por

$$\mathbf{x}_j = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det\left(A_{(1\leftarrow \mathbf{e}_j)}\right) \\ \vdots \\ \det\left(A_{(n\leftarrow \mathbf{e}_j)}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{j1} \\ \vdots \\ C_{jn} \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, la columna de cofactores que aparece en esta fórmula tiene por elementos los de la *fila* j de la matriz de cofactores de A. En conclusión,

La matriz inversa de A es igual al inverso del determinante de A multiplicado por la traspuesta *de la matriz de cofactores de A (la cual recibe el nombre de matriz adjunta de A)*: matriz adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A).$$

4.3.1 Ejercicio de tarea. Demostrar que en el caso de una matriz 2×2, esta fórmula se convierte en:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Pista: Basta comprobar $C_{11} = d$, $C_{22} = a$, $C_{12} = -c$, $C_{21} = -b$.

Los determinantes como áreas y volúmenes

TEOREMA 4.3.1

Si A es una matriz 2×2, entonces el área del paralelogramo determinado por los vectores columna de A es igual al valor absoluto del determinante de A:

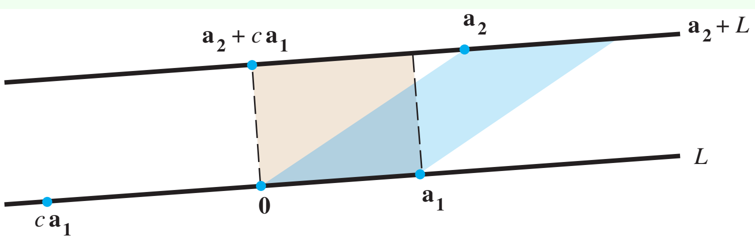
$$\textit{área} = |\det A|.$$

Análogamente, si A es una matriz 3×3, entonces el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores columna de A es igual al valor absoluto del determinante de A:

$$\textit{volumen} = |\det A|.$$

La idea clave en la que se basa este teorema en el caso del plano es la siguiente:

Si $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son dos vectores independientes de $\mathbf{R}^2$ y c es un escalar cualquiera, el área del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ es igual al área del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_1$.



La demostración en el caso del espacio es similar.

4.3.2 Ejercicio de tarea. Calcula el área del paralelogramo cuyos vértices son los puntos del plano con coordenadas $(-2,-2)$, $(0,3)$, $(4,-1)$ y $(6,4)$.

Solución: 28.

Los determinantes y las aplicaciones lineales

TEOREMA 4.3.2

El determinante es el factor por el que las aplicaciones lineales multiplican los volúmenes

Si $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es la aplicación lineal determinada por la matriz 2×2 A y T transforma una región R de $\mathbf{R}^2$ en la región $T(R)$, entonces

$$\text{área de } T(R) = |\det A| \cdot \text{área de } R.$$

Análogamente, si $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ es la aplicación lineal determinada por la matriz 3×3 A y T transforma una región R de $\mathbf{R}^3$ en la región $T(R)$, entonces

$$\text{volumen de } T(R) = |\det A| \cdot \text{volumen de } R.$$

Enlaces a los ejercicios de tarea de esta sección

Usa los siguientes enlaces para visualizar cada uno de los ejercicios de tarea que aparecen en esta sección:

Enlaces: Ejercicio 1, Ejercicio 2.

Ejercicios de la sección 4.3 Regla de Cramer y fórmula de la matriz inversa

Usa la regla de Cramer para resolver los sistemas de los ejercicios 1 a 6.

1. $\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 7 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 7 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -5 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} -5x_1 + 3x_2 &= 9 \\ 3x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ -3x_1 + x_3 &= -8 \\ x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$

En los ejercicios 7 a 10 determina el valor o valores del parámetro s que hagan que el sistema dado tenga solución única y halla la solución.

7. $\begin{aligned} 6sx_1 + 4x_2 &= 5 \\ 9x_1 + 2sx_2 &= -2 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 3sx_1 - 5x_2 &= 3 \\ 9x_1 + 5sx_2 &= 2 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} sx_1 - 2sx_2 &= -1 \\ 3x_1 + 6sx_2 &= 4 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 2sx_1 + x_2 &= 1 \\ 3sx_1 + 6sx_2 &= 2 \end{aligned}$

11. Suponiendo que todos los elementos de A son enteros y que $\det A = 1$, explica por qué se sabe que todos los elementos de la inversa, A^{-1} son también enteros.

12. Halla el área del paralelogramo cuyos vértices tienen las coordenadas:

$$(-1,0),\ (0,5),\ (1,-4),\ (2,1).$$

13. Halla el volumen del paralelepípedo que tiene un vértice en el origen y los tres vértices adyacentes a éste tienen coordenadas $(1, 0, -2)$, $(1, 2, 4)$ y $(7, 1, 0)$.

14. Sea S el paralelogramo de $\mathbf{R}^2$ determinado por los vectores $\mathbf{b}_1 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ y $\mathbf{b}_2 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ y sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Calcula el área de la imagen de S bajo la aplicación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

15. Halla una fórmula para el área de un triángulo en $\mathbf{R}^2$ cuyos vértices son $\mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

16. Usa el resultado del ejercicio anterior para demostrar que si R es el triángulo de $\mathbf{R}^2$ cuyos vértice tienen las coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), entonces su área es:

$$\text{área de } R = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pista: Traslada R de forma que tenga un vértice en el origen. Para ello resta de cada vértice el que vaya a quedar en el origen.