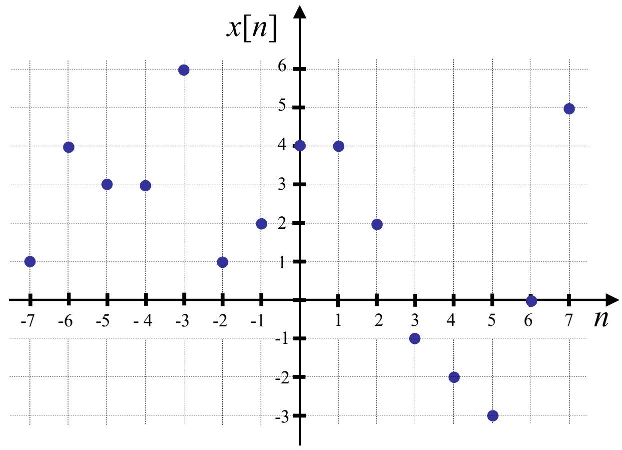
Tarea 3 correspondiente a las actividades no presenciales de la asignatura *Hardware de aplicación específica* (curso 2019-2020). Las respuestas a las siguientes cuestiones deben ser entregadas el viernes, día 6 de marzo, en el aula 2.2, a las 11:00 horas o por la tarde, en el despacho 312, antes de las 19:00 horas.

1) En la parte derecha se representa el valor de una señal discreta $x[n]$ durante un cierto intervalo de tiempo, generada al muestrear una señal continua (analógica) $x(t)$. Sabiendo que la señal $x(t)$ se ha muestreado con una frecuencia $f_s = 2.5$ Hz, se pide:



a) Indica el valor de $x[-6]$, $x[0]$ y $x[7]$.

b) Indica el valor de la señal $x[n]$ en $t = 2.4$ segundos y el valor de la señal $x(t)$ en $t = -2$ segundos. Indica la duración en segundos del intervalo de tiempo durante el que se representa el valor de la señal $x[n]$.

c) ¿Cuál es el valor de $x[n]$ en $n = 2.5$?... ¿seguro?

d) Representa la señal $x[n+2]$ (considera que $x[n]$ vale cero fuera del intervalo de tiempo representado). ¿Qué relación existe entre las señales $x[n]$ y $x[n+2]$? (en la última página hay una representación ampliada de $x[n]$)

e) Representa la señal $x[n-3]$ (considera que $x[n]$ vale cero fuera del intervalo de tiempo representado). ¿Qué relación existe entre las señales $x[n]$ y $x[n-3]$?

f) ¿La señal $x[n]$ es causal?. ¿Por qué?

g) ¿Qué representa n?. ¿Y el valor de $x[n]$?. ¿Qué relación hay entre $x[n]$ y $x(t)$?

2) *a*) ¿Por qué en los libros sobre teoría de señal se le da tanta importancia a la *respuesta del sistema a un impulso unitario* $h(t)$, cuando se trata con sistemas *lineales*, *continuos* e *invariantes en el tiempo* (LCIT)?

b) Indica la expresión que proporciona el valor de la salida $y(t)$ de un sistema <u>causal</u>, LCIT, en función de su respuesta a un impulso unitario $h(t)$, para una señal de entrada $x(t)$ que es nula para $t < 0$ (≡ señal de entrada <u>causal</u>). Supón que el sistema no tiene energía almacenada en $t = 0^-$.

c) ¿Por qué resulta tan útil conocer la *respuesta a un pulso unitario* $h([n]$ de un sistema *lineal*, *discreto* e *invariante en el tiempo* (LDIT) cuando se trata de implementar dicho sistema con un µC, un DSP o una FPGA?

d) Indica la expresión que proporciona el valor de la salida de un sistema LDIT <u>causal</u> en función de su respuesta a un pulso unitario $h([n]$, para una señal de entrada $x[n]$ que es nula para $n < 0$.

e) Analiza el siguiente desarrollo e indica si hay algún error en el mismo y dónde está dicho error (o errores)

Teniendo en cuenta que la salida y(t) de un sistema LCIT cumple que:

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \cdot x(t-\lambda) \cdot d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot h(t-\lambda) \cdot d\lambda$$

la *transformada de Fourier* de la salida y(t) cumple lo siguiente: $F\{y(t)\} = F\{h(t) * x(t)\}$ siendo:

$$F\{y(t)\} = Y(w)$$

$$F\{h(t) * x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot h(t-\lambda) \cdot d\lambda \right] \cdot e^{-jwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda) \cdot e^{-jwt} dt \right] \cdot d\lambda$$ → realizando el cambio de variable: $t - \lambda = \mu$ esta expresión se puede escribir de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) \cdot e^{-jw(\mu+\lambda)} d\mu \right] \cdot d\lambda = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot e^{-jw\lambda} d\lambda \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) \cdot e^{-jw\mu} d\mu \right] = H(w) \cdot X(w)$$ siendo $H(w)$ la *transformada de Fourier* de la respuesta h(t) del sistema a un impulso unitario y $X(w)$ la *transformada de Fourier* de la señal de entada x(t). De acuerdo con esto, se cumple que:

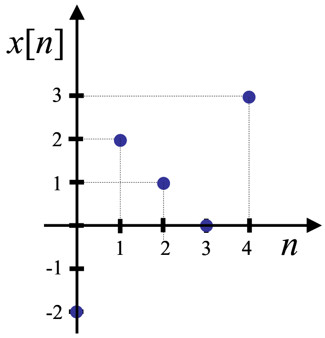
$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(w) = H(w) \cdot X(w)$$

Pregunta: ¿Si el resultado anterior fuese cierto, se podría afirmar que una *operación de convolución* (*), en el dominio del tiempo, se corresponde con un producto ($\cdot$) en el dominio de la frecuencia?. ¿Qué crees que debe ser más fácil de calcular, una *operación de convolución* en el dominio del tiempo o un *producto* en el dominio de la frecuencia?

3) Determina los 4 primeros valores de la respuesta (salida) $y[n]$ de un sistema lineal, discreto e invariante en el tiempo ante la señal de entrada $x[n]$ representada en la parte derecha, sabiendo que se trata de un sistema causal y que su respuesta $h[n]$ a un pulso unitario cumple lo siguiente:

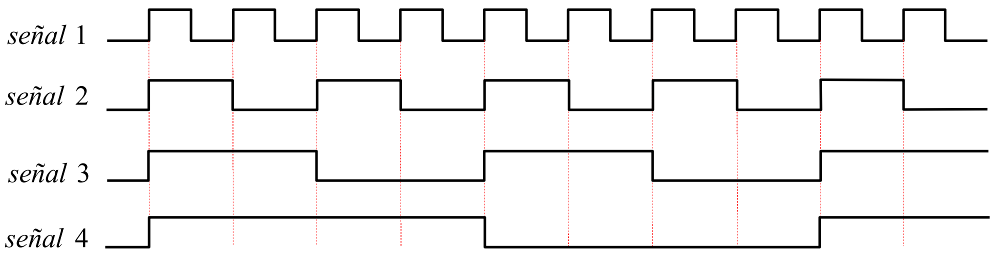
$h[0]=1,\ \ h[1]=-2,\ \ h[2]=3,\ \ h[3]=-1,\ \ h[4]=2$ y que $h[n>4]=0$

Nota 1: es suficiente con que indiques los cálculos que tendría que hacer un procesador, un µC, un DSP o una FPGA para determinar cada uno de los 4 valores pedidos de $y[n]$.

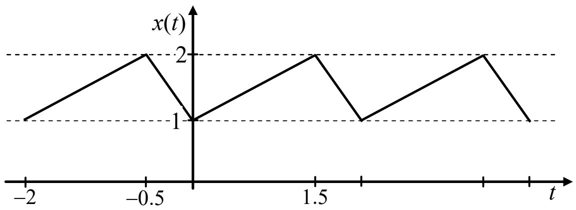


4) *a*) ¿Las señales $x(t)=sen(wt)$ e $y(t)=\cos(wt)$ son realmente dos señales distintas o sólo se trata de una misma señal desfasada (retrasada/adelantada) en el tiempo?. En el caso de que sean una misma señal indica el desfase entre ellas. [Nota: $sen(\alpha+\pi/2)=cos(\alpha)$]

b) Indica la frecuencia y el periodo de las *señales* 2, 3 y 4 representadas en el siguiente cronograma, teniendo en cuenta que el periodo de la *señal* 1 es igual a T_1,



c) Indica la *frecuencia*, el *periodo* y el *valor medio* de una señal $x(t)$ indicada en la parte derecha [Nota: si lo piensas un poco te darás cuenta de que no es necesario resolver ninguna integral para calcular en valor medio de $x(t)$]



5) ¿Por qué se caracteriza una función periódica $f(t)$ en tiempo continuo que cumpla las condiciones de *Dirichlet*?

6) *a*) Toda función periódica, continua en el tiempo, que cumpla las condiciones de *Dirichlet* se puede representar como ¿…? [la respuesta tiene que ver con *Jean Baptiste Fourier* (1768-1830)]

b) Indica la expresión exponencial compleja del *desarrollo en serie de Fourier* de una función periódica.

c) Indica dos expresiones trigonométricas distintas (pero equivalentes) del *desarrollo en serie de Fourier* de una función periódica.

7) Determinar el desarrollo en *serie de Fourier* de una función periódica $f(t)$, caracterizada porque 1 periodo T de la misma está definido por,

$$f(t)=\begin{cases} A \ \text{ para } \ \dfrac{-T}{4}<t<\dfrac{T}{4} \\ 0 \ \text{ para } \ \dfrac{T}{4}<t<\dfrac{3T}{4} \end{cases}$$

Nota: tal vez te interese fijarte en que la función $f(t)$ y la función coseno tienen simetría par.

8) Representa el *espectro de amplitud* y el *espectro de fase* de la siguiente señal:

$$x(t) = 0.5\cos(t) + \cos(4t + \pi/3) + 0.2\cos(8t + \pi/2)$$

a) Sin considerar frecuencias negativas

b) Considerando frecuencias negativas [piensa en cómo sería la forma compleja del desarrollo en serie de *Fourier* de $x(t)$ en relación a la expresión trigonométrica de $x(t)$ que se indica]

9) Representa los espectros de amplitud y de fase de la función $f(t)$ definida en el ejercicio 7).

Nota 1: con que representes el módulo y la fase de los 4 primeros armónicos <u>no nulos</u> es suficiente.

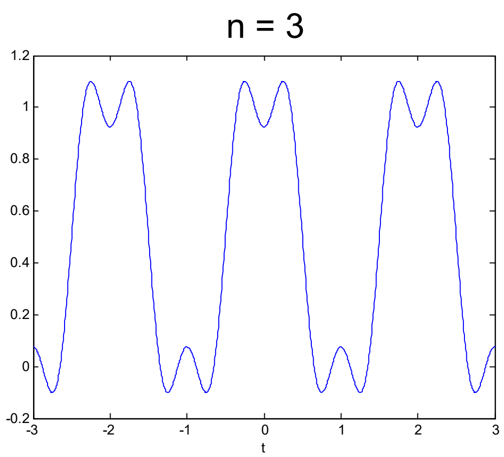
Nota 2: en muchos libros, los espectros de amplitud y de fase se definen en relación a los coeficientes de la forma compleja del *desarrollo en serie de Fourier*. Como puedes comprobar, dichos espectros están definidos tanto para frecuencias positivas como para frecuencias <u>negativas</u>. Se puede demostrar que, en este caso, los *espectros de amplitud* tienen simetría *par* y que los *espectros de fase* tienen simetría *impar*. Ahora bien, debes tener presente que en el mundo real <u>no existen</u> señales que tengan una frecuencia negativa. ¡Las frecuencias negativas sólo existen a nivel matemático!. Por otra parte, en el campo de la Electrónica los espectros de amplitud y de fase se acostumbran a definir con respecto a los coeficientes de la expresión trigonométrica del desarrollo en serie de *Fourier* (supongo que es debido a que trabajamos con analizadores de redes… unos cacharros que se usan con redes que no tienen nada que ver con las 'redes' que manejas tu). En este caso, tanto los espectros de amplitud como de fase sólo están definidos para frecuencias positivas (esas que sí existen y que se pueden medir con un analizador de espectro ≡ una de las funcionalidades típicas de un analizador de redes).

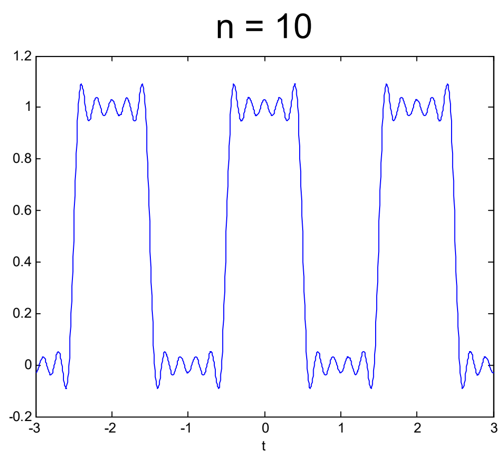
10) *a*) ¿En qué consiste el fenómeno de *Gibbs*?

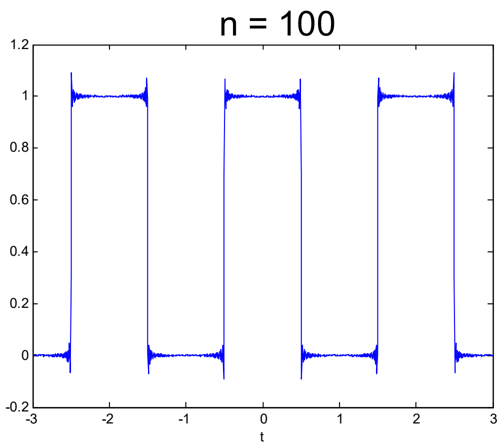
b) Si se ejecuta el siguiente código en *Matlab* para $n = 3$, 10, 100 y 500 se obtienen las figuras indicadas a continuación. Explica a qué se deben las diferencias entre las 4 figuras y por qué no se representa una señal pulsante 'perfecta'. (Nota: la tarjeta gráfica del PC en el que se han generado las figuras tiene una resolución finita… teóricamente la figura para $n = 500$ debería corresponder a una señal periódica)

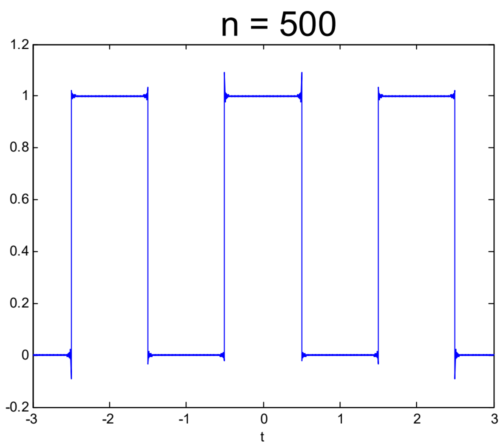
```
clear all;
hold off;
t = -3:6/1000:3;
n = input('Número de armónicos:  ');
c0 = 0.5;
w0 = pi;
xn = c0*ones(1,length(t));
for k = 1:2:n  % los armónicos pares son nulos
     theta = ((-1)^((k-1)/2)-1)*pi/2;
     xn = xn + 2/k/pi*cos(k*w0*t+theta);
end
plot(t,xn);
xlabel('t');
```

Nota: saber en qué consiste y a qué se debe el fenómeno de *Gibbs* permite comprender, por ejemplo, por qué se usan ventanas (*windows*) en los filtros discretos de tipo FIR (*finite impulse response*).









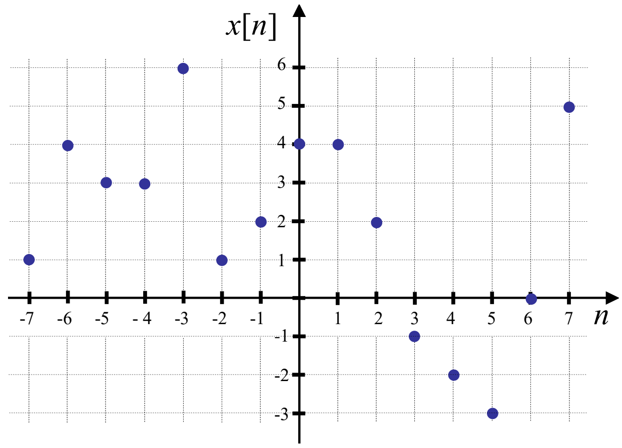
11) Las siguientes preguntas están relacionadas con las cuestiones anteriores, aunque no te lo parezca…

a) ¿Cómo se define un *decibel*? (indica la "fórmula")?. ¿Para qué vale?

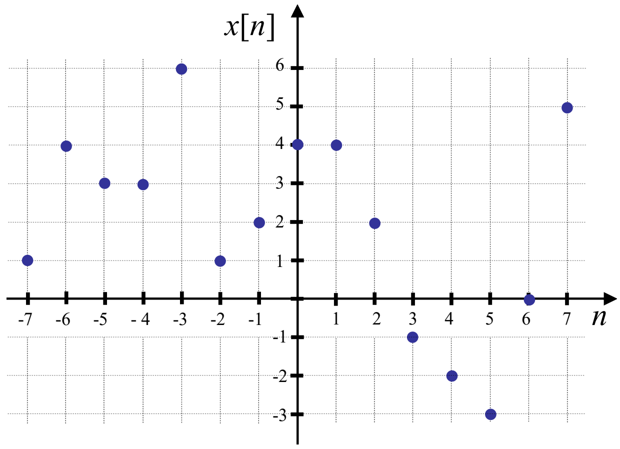
c) ¿Cómo se define un dB_m (fórmula)?, ¿y un $dB_{\mu v}$ (fórmula)?. ¿Para qué valen?

12) ***a***) ¿Por qué se caracteriza un sistema recursivo? ¿Y un sistema no recursivo?.

b) ¿Crees que es posible construir un sistema 'no causal'?. ¿Por qué?



$x[n]$
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-7 -6 -5 - 4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7
n



$x[n]$
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-7 -6 -5 - 4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7
n