Ejercicios de la sección 7.2 Proyección ortogonal y matrices ortogonales

(Para hacer en clase: 2, 5, 7, 9, 11, 14, 18, 21, 24, 27, 29, 32, 35, 41, 46.)
(Con solución o indicaciones: 3, 6, 8, 10, 12, 13, 17, 19, 22, 23, 26, 28, 35, 40, 42, 47.)

En los ejercicios 1 a 4, demuestra que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ o $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base ortogonal respectivamente de $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ y expresa $\mathbf{x}$ como combinación lineal de las $\mathbf{u}_i$:

1. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}$.

▶2. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

▶3. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

▶5. Calcula la proyección ortogonal del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ sobre la recta cuya dirección es la del vector $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

▶6. Calcula la proyección ortogonal de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sobre la recta cuya dirección es la del vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

▶7. Sean $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$. Escribe $\mathbf{y}$ como suma de dos vectores, uno en $\operatorname{Gen}\{\mathbf{u}\}$ y otro ortogonal a $\mathbf{u}$.

▶8. Sean $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Escribe $\mathbf{y}$ como suma de dos vectores, uno en $\operatorname{Gen}\{\mathbf{u}\}$ y otro ortogonal a $\mathbf{u}$.

▶9. Sean $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcula la distancia de $\mathbf{y}$ a la recta que pasa por el origen y por $\mathbf{u}$.

▶10. Sean $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. Calcula la distancia de $\mathbf{y}$ a la recta que pasa por el origen y por $\mathbf{u}$.

En cada uno de los ejercicios 11 a 16 se da un conjunto de vectores. Averigua en qué casos es un conjunto ortogonal y en aquellos que lo sea, normaliza los vectores para obtener un conjunto ortonormal.

▶11. $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

▶12. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

▶13. $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

▶14. $\begin{pmatrix} -0'6 \\ 0'8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0'8 \\ 0'6 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{20} \\ 3/\sqrt{20} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{20} \\ -1/\sqrt{20} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

▶17. Demuestra que para toda matriz $m \times n$, U, cuyas n columnas forman un conjunto ortonormal, si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores de $\mathbf{R}^n$ entonces la aplicación lineal $\mathbf{x} \mapsto U\mathbf{x}$:

(a) Conserva el producto escalar: $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

(b) Conserva las normas: $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

(c) Conserva la perpendicularidad: $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

En los ejercicios 18 y 19 todos los vectores son de $\mathbf{R}^n$. Indica para cada afirmación si es verdadera o falsa, justificando tus respuestas.

▶18.

(a) No todo conjunto ortogonal de $\mathbf{R}^n$ es libre.

(b) Si $\mathbf{y}$ es una combinación lineal de vectores no nulos de un conjunto ortogonal, entonces los coeficientes en la combinación lineal se pueden calcular sin necesidad de realizar operaciones elementales de fila en una matriz.

(c) Si los vectores de un conjunto de vectores ortogonales no nulos se normalizan entonces puede ocurrir que el conjunto resultante ya no sea ortogonal.

(d) Una matriz con columnas ortogonales es una matriz ortogonal.

(e) Si L es una recta por el origen e $\mathbf{y}_\parallel$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre L, entonces $\|\mathbf{y}_\parallel\|$ es la distancia de $\mathbf{y}$ a L.

▶19.

(a) No todo conjunto de vectores de $\mathbf{R}^n$ linealmente independientes es ortogonal.

(b) Si un conjunto $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ tiene la propiedad de que $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ siempre que $i \neq j$, entonces S es un conjunto ortonormal.

(c) Si las columnas de una matriz $m \times n$, A, son ortonormales, entonces la aplicación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ conserva las normas.

(d) La proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre $\mathbf{v}$ es la misma que la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre $c\mathbf{v}$ para cualquier $c \neq 0$.

(e) Toda matriz ortogonal es inversible.

20. Sea W un subespacio de $\mathbf{R}^n$ generado por n vectores no nulos ortogonales. Demuestra $W = \mathbf{R}^n$.

▶21. Sea U una matriz cuadrada con columnas ortonormales. Explica por qué U es inversible.

▶22. Sea U una matriz $n \times n$ con columnas ortonormales. Demuestra que las filas de U forman una base ortonormal de $\mathbf{R}^n$.

▶23. Sean U y V matrices ortogonales. Demuestra que UV es también una matriz ortogonal (o sea, que su traspuesta es su inversa).

▶24. Dado un vector no nulo $\mathbf{u}$ de $\mathbf{R}^n$, sea $L = \operatorname{Gen}\{\mathbf{u}\}$. Demuestra que la aplicación $\mathbf{x} \mapsto \operatorname{proy}_L \mathbf{x}$ es una aplicación lineal.

Versión de 19 de enero de 2023, 13:35h.

25. Dado un vector no nulo $\mathbf{u}$ de $\mathbf{R}^n$, sea $L = \text{Gen}\{\mathbf{u}\}$. Para cada $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, la *reflexión de* $\mathbf{y}$ *en* L es el vector $\text{refl}_L\mathbf{y}$ definido por $\text{refl}_L\mathbf{y} = 2(\text{proy}_L\, \mathbf{y}) - \mathbf{y}$. Demuestra que la aplicación $\mathbf{x} \mapsto \text{refl}_L\mathbf{x}$ es una aplicación lineal.

En los ejercicios 26 y 27 se da una base ortogonal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ de $\mathbf{R}^4$.

▶**26.** $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Escribe el vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ como suma de dos vectores, uno en $\text{Gen}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y otro en $\text{Gen}\{\mathbf{u}_4\}$.

▶**27.** $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Escribe el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ como suma de dos vectores, uno en $\text{Gen}\{\mathbf{u}_1\}$ y otro en $\text{Gen}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$.

En los ejercicios 28 a 31 comprueba que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es un conjunto ortogonal y halla la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre $\text{Gen}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

▶**28.** $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

▶**29.** $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

30. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

31. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 32 a 39, sea W el espacio generado por los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Escribe $\mathbf{y}$ como suma de un vector de W y un vector ortogonal a W.

▶**32.** $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

33. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

34. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

▶**35.** $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

36. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

37. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

38. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

39. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

▶**40.** Sean $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Halla la distancia desde $\mathbf{y}$ hasta el plano de $\mathbf{R}^3$ generado por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.

▶**41.** Sean $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ como en el ejercicio 32. Halla la distancia desde $\mathbf{y}$ hasta el subespacio de $\mathbf{R}^4$ generado por $\mathbf{u}_1$, y $\mathbf{u}_2$.

▶**42.** Sean $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ y $W = \text{Gen}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Sea $U = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2]$ la matriz cuyas columnas son $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.

(a) Calcula $U^{\mathrm{T}}U$ y UU^{T}

(b) Calcula $\text{proy}_W\, \mathbf{y}$ y $(UU^{\mathrm{T}})\mathbf{y}$.

43. Sean $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ y $W = \text{Gen}\{\mathbf{u}_1\}$.

(a) Si U es la matriz cuya única columna es $\mathbf{u}_1$, calcula $U^{\mathrm{T}}U$ y UU^{T}

(b) Calcula $\text{proy}_W\, \mathbf{y}$ y $(UU^{\mathrm{T}})\mathbf{y}$.

44. Sean $\mathbf{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Observa que $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son mutuamente ortogonales pero que $\mathbf{u}_3$ no es ortogonal ni a $\mathbf{u}_1$ ni a $\mathbf{u}_2$. Se puede demostrar que $\mathbf{u}_3$ no pertenece al subespacio generado por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Usa este hecho para hallar un vector no nulo $\mathbf{v}$ de $\mathbf{R}^3$ que sea ortogonal a $\mathbf{u}_1$ y a $\mathbf{u}_2$.

45. Sean $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ los del ejercicio 44 y sea $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se puede demostrar que $\mathbf{u}_4$ no pertenece al subespacio generado por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. Usa este hecho (sin necesidad de demostrarlo) para hallar un vector no nulo $\mathbf{v}$ de $\mathbf{R}^3$ que sea ortogonal a $\mathbf{u}_1$ y a $\mathbf{u}_2$.

En los ejercicios 46 y 47 todos los vectores y subespacios están en $\mathbf{R}^n$. Indica para cada afirmación si es verdadera o falsa, justificando tus respuestas.

▶**46.**

(a) Si $\mathbf{z}$ es ortogonal a $\mathbf{u}_1$ y a $\mathbf{u}_2$ y $W = \text{Gen}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, entonces $\mathbf{z}$ pertenece a $W^{\perp}$.

(b) Para cada $\mathbf{y}$ y cada subespacio W, el vector $\mathbf{y} - \text{proy}_W\, \mathbf{y}$ es ortogonal a W.

(c) La proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre un subespacio W de $\mathbf{R}^n$ puede depender en algunos casos de la base ortogonal de W usada para calcularla.

(d) Si $\mathbf{y}$ pertenece a un subespacio W, entonces la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre W es el propio $\mathbf{y}$.

(e) Si las columnas de una matriz $n \times p$, U, son ortonormales entonces $UU^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre el espacio columna de U.

▶**47.**

(a) Si W es un subespacio de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{v}$ pertenece tanto a W como a $W^\perp$, entonces $\mathbf{v}$ es el vector cero.

(b) Si $\mathbf{y} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$, donde $\mathbf{z}_1$ está en un subespacio W y $\mathbf{z}_2$ está en $W^\perp$ entonces $\mathbf{z}_1$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre W.

(c) La aproximación óptoma de $\mathbf{y}$ por vectores de un subespacio W es el vector $\mathbf{y} - \operatorname{proy}_W \mathbf{y}$.

(d) Si las columnas de una matriz $n \times p$, U, son ortonormales entonces $UU^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

48. Si A es una matriz $m \times n$, entonces todo vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ se puede poner como suma $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{u}$ donde $\mathbf{p} \in \operatorname{Fil} A$ y $\mathbf{u} \in \operatorname{Nul} A$.

49. Sea W el subespacio de $\mathbf{R}^n$ generado por un conjunto ortogonal $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p\}$ y sea $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ una base ortogonal de $W^\perp$. ¿Por qué es $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ un conjunto ortogonal? ¿Por qué genera $\mathbf{R}^n$? Demuestra que $\dim W + \dim W^\perp = n$.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 7.2

3. Basta calcular los productos escalares $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3$ y comprobar que dan cero. $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3 = \frac{5}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$.

6. $\begin{pmatrix} 2/5 \\ -6/5 \end{pmatrix}$.

8. $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\parallel + \mathbf{y}_\perp = \begin{pmatrix} 14/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 28/5 \end{pmatrix}$.

10. 1.

12. Producto escalar es $-1 \neq 0$; no es un conjunto ortogonal.

13. Producto escalar es 0; sí es un conjunto ortogonal. El primer vector ya es unitario; la norma del segundo es $\sqrt{5}/3$ y el normalizado del segundo es $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

17. (a) $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}U\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. (b) $\|U\mathbf{x}\| = \sqrt{(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{x})} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|$. (c) Por (a).

19. (a) Un vector en el que el primer elemento no es cero no es ortogonal a $\mathbf{e}_1$, (b) Debería decir "es un conjunto ortogonal". Para ser ortonormal cada vector debe ser, además, unitario, (c) Obsérvese que la condición implica que $A^{\mathrm{T}}A = I_n$, (d) Es la proyección ortogonal sobre la recta generada por $\mathbf{v}$ si $\mathbf{v}$ no es cero y el origen en caso contrario, (e) Su inversa es su traspuesta.

22. U es una matriz ortogonal y por tanto su traspuesta también, lo que quiere decir que las columnas de su traspuesta forman una base ortonormal de $\mathbf{R}^n$.

23. $(UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1} = V^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}} = (UV)^{\mathrm{T}}$. Otra solución menos aburrida fue dada por el alumno Erik Pereira del curso 2021/22: *"Como la aplicación $\mathbf{x} \mapsto U\mathbf{x}$ conserva las normas y la ortogonalidad (ejercicio 17), las columnas de UV (que son iguales a U por las columnas de V) son ortonormales por serlo las de V."*

26. $\mathbf{x} = -\frac{8}{9}\mathbf{u}_1 - \frac{2}{9}\mathbf{u}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4$. Por tanto los vectores pedidos son:

$$\mathbf{x}_\parallel = -\frac{8}{9}\mathbf{u}_1 - \frac{2}{9}\mathbf{u}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{x}_\perp = 2\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

28. $\operatorname{proy}_{\operatorname{Gen}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

35. $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\parallel + \mathbf{y}_\perp = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

40. $\left\| \mathbf{y} - \operatorname{proy}_{\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}} \mathbf{y} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

42. (a) $U^{\mathrm{T}}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $UU^{\mathrm{T}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. (b) $\operatorname{proy}_W \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $(UU^{\mathrm{T}})\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

47. (a) Cero es el único vector ortogonal a sí mismo, (b) Basta mirar si cumple la definición *"está en W y restado de* $\mathbf{y}$ *da un vector ortogonal a W"*, (c) La aproximación óptima es la propia proyección ortogonal, (d) Sólo si U es cuadrada de forma que $\operatorname{Col} U = \mathbf{R}^n$. En general $UU^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \operatorname{proy}_{\operatorname{Col} U} \mathbf{x}$.