

## Ejercicios de la sección 3.4 Factorización L-U

(Clase de prácticas: 1, 8, 15, 16, 19, 20.)

En los ejercicios 1 a 6, resuelve la ecuación  $Ax = b$  usando la factorización LU dada para  $A$ . En los ejercicios 1 y 2 resuelve  $Ax = b$  también por el método usual de reducción.

►1.  $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & -9 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

5.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & 12 \\ 3 & 0 & 4 & -36 \\ -5 & -3 & -8 & 49 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En los ejercicios 7 a 16 halla una factorización LU de la matriz dada.

7.  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

►8.  $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$

9.  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -9 & 0 & -4 \\ 9 & 9 & 14 \end{pmatrix}$

10.  $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 10 & 2 & -5 \\ 10 & 10 & 16 \end{pmatrix}$

11.  $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 19 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

12.  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

13.  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

14.  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 20 & 6 & 31 \\ -2 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

►15.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ -6 & 3 & -13 & -3 \\ 4 & 9 & 16 & 17 \end{pmatrix}$

►16.  $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 8 & -7 \\ 6 & -5 & 14 \\ -6 & 9 & -12 \\ 8 & -6 & 19 \end{pmatrix}$

17. Para calcular la inversa de una matriz invertible  $A$ , el programa MATLAB calcula primero una factorización  $A = LU$ , luego halla las inversas de  $L$  y  $U$  y finalmente calcula  $U^{-1}L^{-1}$ . Usa este método para calcular la inversa de la matriz  $A$  del ejercicio 2.

18. Usa el método del ejercicio anterior para calcular la inversa de la matriz  $A$  del ejercicio 3.

►19. Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  triangular inferior cuyos elementos de la diagonal son todos no nulos. Demuestra que  $A$  es invertible y que su inversa también es triangular inferior.

*Sugerencia:* ¿Por qué  $A$  puede reducirse a  $I_n$  usando solamente operaciones de reemplazo progresivas y de reescalado? ¿Cuáles son las posiciones pivote? Deduce que dichas operaciones de filas transforman a  $I$  en una matriz triangular inferior.

►20. Supón que  $A$  tiene una factorización LU,  $A = LU$ . Explica por qué  $A$  puede reducirse a  $U$  usando solamente operaciones de reemplazo progresivas.

## Soluciones a ejercicios seleccionados de la sección 3.4

1. Primero resolvemos la ecuación  $Ly = b$ , es decir, en este caso:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Para ello podemos hacer dos cosas:

(a) Usando  $y_1 = -7$  despejar  $y_2$  de la segunda ecuación  $-y_1 + y_2 = 5$  obteniendo  $y_2 = -2$  y ahora usamos  $y_1$  e  $y_2$  para despejar  $y_3$  en la tercera ecuación  $2y_1 - 5y_2 + y_3 = 2$  obteniendo  $y_3 = 6$ . O bien:

(b) Aplicarle al vector  $b$  las operaciones elementales  $F_2 + F_1$ ,  $F_3 - 2F_1$  y  $F_3 + 5F_2$  con lo cual el vector  $b$  se convierte en la solución  $y = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

Para terminar sólo falta resolver la ecuación  $Ux = y$ , es decir:  $\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ . De nuevo podemos proceder de dos formas. Por el primer método:  $x_3 = -6$ ,  $2x_2 = 2 - x_3 = 2 + 6$ ,  $x_2 = 4$  y  $3x_1 = 7x_2 + 2x_3 - 7 = 7 \times 4 + 2 \times (-6) - 7 = 28 - 12 - 7$ ,  $x_1 = 3$ . O sea, la solución final es:  $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ .

8. Para  $L$  sólo hace falta hallar la primera columna reescalando la primera de  $A$ :  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Para  $U$  basta realizar sobre  $A$  la operación elemental  $F_2 - 2F_1$ , obteniéndose  $U = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

15. Mirando a  $A$ , sabemos que, si  $A$  admite factorización LU,  $L$  es de la forma  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & * & 1 \end{pmatrix}$ . Realizando sobre  $A$  las operaciones  $F_2 + 3F_1$ ,  $F_3 - 2F_1$  se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Llegados aquí ya conocemos  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  y con una operación elemental más ( $F_3 - 3F_2$ ) obtenemos

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

16. Mirando a  $A$ , sabemos que, si  $A$  admite factorización L-U,  $L$  es de la forma  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & * & 1 & 0 & 0 \\ -3 & * & * & 1 & 0 \\ 4 & * & * & * & 1 \end{pmatrix}$ . Realizando

sobre  $A$  las operaciones  $F_2 + 3F_1$ ,  $F_3 - 2F_1$  se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

lo que determina la segunda columna de  $L$ :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & * & 1 & 0 \\ 4 & 3 & * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

Con dos operaciones más de reemplazo progresivo se llega a una forma escalonada, que es la matriz  $U$ :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y de ahí:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ahora es el momento de comprobar que  $LU = A$ .)

19. La traspuesta de  $A$  es triangular superior con elementos diagonales no nulos, por tanto es una matriz escalonada y sus posiciones pivote son las de la diagonal, lo cual quiere decir que tiene un pivote en cada columna. Como es cuadrada esto implica que  $A^T$  es inversible y por ello también  $A$  es inversible. Otra forma de verlo es que haciendo solamente operaciones de reemplazo progresivas  $A$  se puede poner en forma escalonada que es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los mismos de  $A$ . Esto demuestra que  $A$  admite una factorización L-U y que la  $U$  es una matriz diagonal con todos los elementos diagonales no nulos y por tanto es inversible. Como  $L$  también es inversible,  $A = LU$  es inversible. Las operaciones de reemplazo progresivas que transforman  $A$  en  $U$ , transforman  $I_n$  en  $L^{-1}$  (que es una matriz triangular inferior porque se obtiene de  $I_n$  mediante operaciones de reemplazo progresivas). Para llegar a la forma escalonada reducida de  $A$  (que es la identidad  $I_n$ ) solo faltan por realizar a lo sumo  $n$  operaciones de reescalado, que realizadas sobre  $L^{-1}$  producen  $A^{-1}$  esto muestra que  $A^{-1}$  es triangular como consecuencia de serlo  $L^{-1}$ .

20. Porque  $L$  se puede reducir a la identidad usando solamente operaciones elementales de filas de reemplazo progresivas y esas operaciones necesariamente reducirán  $A$  a  $U$ .