Análise Matemática. Curso 2021-2022.
Grao en Enxenería Informática. ESEI Ourense.
Departamento de Matemáticas. Universidade de Vigo.
Data: 15/12/2021

Bloque III

APELIDOS	NOME	DNI	NOTA

1. Calcular o polinomio de interpolación de Lagrange da función $y = 5^x$ nos nodos $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$. Utilizar o polinomio de interpolación para dar un valor aproximado de $\sqrt[5]{5}$ e calcular o erro cometido.

   Solución: Temos que interpolar nos nodos correspondentes os valores

$$y_0 = f(x_0) = 5^{-1} = \frac{1}{5}, \quad y_1 = f(x_1) = 5^0 = 1, \quad y_2 = f(x_2) = 5^1 = 5.$$

Os polinomios de Lagrange son:

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = 1 - x^2,$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2},$$

e polo tanto o polinomio interpolador é

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_3 L_3(x) = \frac{1}{5} L_0(x) + L_1(x) + 5L_3(x) = \frac{8x^2}{5} + \frac{12x}{5} + 1.$$

Agora tendo en conta que

$$\sqrt[5]{5} = 5^{\frac{1}{5}} = f\left(\frac{1}{5}\right) \approx p_2\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{193}{125} = \boxed{1.544}$$

sendo o valor exacto

$$\sqrt[5]{5} = \boxed{1.379730}$$

e o erro cometido

$$\text{Erro}=\left|\sqrt[5]{5} - \frac{193}{125}\right| = \boxed{0.164270}$$

2. Sexa $I = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{(2x^2-1)}\,dx$. Aplicar a fórmula de Simpson composta con $n = 2$ para aproximar o valor de I. Calcular o erro cometido.

SOLUCIÓN: Os datos que nos proporciona o exercicio son

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{(2x^2-1)}, \quad a = 0, \quad b = 1 \quad \text{e} \quad n = 2.$$

Entón a lonxitude de cada subintervalo onde aplicaremos a fórmula de Simpson é

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{2} = 1,$$

e os nodos da partición que divide o intervalo $[0, 1]$ en $n = 2$ partes iguais son

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5 \quad \text{e} \quad x_2 = 1.$$

Aplicando a fórmula de Simpson composta con $n = 2$ obtense o seguinte valor aproximado:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{0.5} f(x)dx + \int_{0.5}^1 f(x)dx \approx$$
$$\approx \frac{0.5}{6}(f(0) + 4f(0.25) + f(0.5)) + \frac{0.5}{6}(f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)) =$$
$$= \frac{0.5}{6}(f(0) + f(1) + 2f(0.5) + 4[f(0.25) + f(0.75)]) = \boxed{0.595093}$$

Para calcular unha primitiva da función $f(x)$ usamos o método de cambio de variable

$u = 2x^2 - 1 \Rightarrow du = 4xdx$,

$$\int x\,\mathrm{e}^{(2x^2-1)}dx = \frac{1}{4}\int 4\,x\,\mathrm{e}^{(2x^2-1)}dx = \frac{1}{4}\int \mathrm{e}^u\,du = \frac{1}{4}\mathrm{e}^u + c = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{(2x^2-1)} + c.$$

Agora, usando a regra de Barrow obtense o valor exacto

$$I = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{(2x^2-1)}dx = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{(2x^2-1)}\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4}(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}) = \boxed{0.587601}$$

Desta forma o erro cometido no apartado anterior é

Erro=|ValorExacto-ValorAproximado|= $\boxed{0.007492}$