

CONJUNTOS Y FUNCIONES

Las estructuras discretas son fundamentales en el modelado y resolución de problemas y, en particular, en almacenamiento, comunicación y manipulación de datos. La estructura discreta fundamental, sobre la que se construyen todas las demás, son los conjuntos.

1. CONJUNTOS

1.1. Definiciones.

Definición 1.1.1. Un *conjunto* es una colección desordenada de objetos. Los objetos de un conjunto se llaman *elementos* del conjunto.

Denotaremos los conjuntos por letras mayúsculas y los elementos de un conjunto por letras minúsculas.

Si A es un conjunto y a un elemento de dicho conjunto, se dice que a *pertenece a* A y se usa la notación $a \in A$. Y para expresar que un elemento a no pertenece a un conjunto A escribiremos $a \notin A$.

Los miembros de un conjunto se escribirán entre llaves $\{\dots\}$ y separados por comas.

Ejemplo 1.1.2. Son conjuntos:

- El conjunto de las vocales del alfabeto $V = \{a, e, i, o, u\}$.
- El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

1.1.3. Hay varias formas de *describir un conjunto*:

- Por enumeración de sus elementos: se usa cuando es posible enumerar todos los elementos del conjunto.
- Por enumeración parcial de sus elementos: cuando sin poder enumerar todos, el patrón general de los elementos es obvio. Sólo se enumeran algunos y se usan los tres puntos suspensivos para representar los demás.

- Por comprensión: cuando es posible describir los elementos mediante una propiedad común a todos ellos.

Ejercicio 1.1.4. Enumera los elementos de estos conjuntos:

- $\{x/x \text{ es un número real tal que } x^2 = 2\}$
- $\{x/x \text{ es un número primo menor que } 30\}$
- $\{x/x \text{ es un número entero tal que } x^2 = x\}$

Ejercicio 1.1.5. Da una descripción de los siguientes conjuntos: $\{0, 3, 6, 9, 12\}$, $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Ejercicio 1.1.6. Determina si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa:

- $3 \in \{3\}$
- $\{3\} \in \{\{3\}\}$
- $\{3\} \subset \{3, \{3\}\}$
- $\{3\} \in \{3, \{3\}\}$

Definición 1.1.7. Dos conjuntos A y B son *iguales* si, y sólo si, tienen los mismos elementos. Se denota $A = B$.

Ejercicio 1.1.8. Determina si cada uno de estos pares de conjuntos son iguales:

- $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}$, $\{5, 3, 1\}$.
- $\{\{1\}\}$, $\{1, \{1\}\}$.

Definición 1.1.9. El *conjunto vacío* es el conjunto que no tiene elementos. Se denota \emptyset o también $\{\}$.

Ejemplo 1.1.10.

$$\{x \in \mathbb{Z}/x > 0, x > x^2\} = \emptyset$$

Definición 1.1.11. El *conjunto universal* contiene todos los elementos en consideración. Se representará por la letra U .

Ejemplo 1.1.12. Si U es el conjunto de los números enteros, A puede ser el conjunto de todos los números pares.

1.1.13 (Representación gráfica de conjuntos). Los conjuntos se pueden representar gráficamente mediante diagramas de Venn. En los diagramas de Venn, el conjunto universal U se representa por un rectángulo. Dentro del rectángulo se utilizan círculos para representar los conjuntos y puntos para representar los elementos particulares de un conjunto.

Cuando el conjunto universal no sea significativo se omitirá en la representación gráfica.

Ejemplo 1.1.14. El conjunto de las vocales V se representa gráficamente:

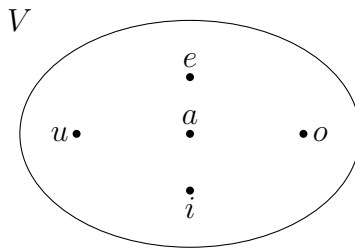


Figura 1: Diagrama de Venn de V

Definición 1.1.15. Sean A y B dos conjuntos. Se dice que A es un subconjunto de B si, y sólo si, todo elemento de A es un elemento de B . Se denota $A \subseteq B$.

Ejemplo 1.1.16. $\{\text{alumnos de FMI}\} \subseteq \{\text{alumnos de la ESEI}\}$

Proposición 1.1.17. Para cualquier conjunto S se verifica que:

1. $\emptyset \subseteq S$
2. $S \subseteq S$

Demostración. Trivial. □

Definición 1.1.18. Sean A y B dos conjuntos. Se dice que A es un subconjunto propio de B si A es un subconjunto de B pero $A \neq B$. Se denota $A \subset B$.

Ejemplo 1.1.19. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Observación 1.1.20. Para demostrar que dos conjuntos A y B son iguales, basta probar que cada uno es subconjunto del otro, es decir que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$.

Ejemplo 1.1.21. $\{1, 3, 5\} = \{5, 3, 1\}$

Definición 1.1.22. Sea S un conjunto.

- Si hay exactamente n elementos distintos en S , donde n es un número natural, se dice que S es un *conjunto finito* y n es el *cardinal de S* . El cardinal de S se denota $\text{card}(S)$ o $|S|$. El cardinal del conjunto vacío es $\text{card}(\emptyset) = 0$.
- Si S no es un conjunto finito se dice que es *infinito*.

Ejemplo 1.1.23. Algunos ejemplos de cardinal de un conjunto son:

- Si A es el conjunto de los enteros positivos impares menores que 10, entonces $\text{card}(A) = 5$.
- \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} son conjuntos infinitos.

Ejercicio 1.1.24. ¿Cuál es el cardinal de los siguientes conjuntos?

- | | |
|------------------|--------------------------------|
| • $\{3\}$ | • $\{\{3\}\}$ |
| • $\{2, 3\}$ | • $\{\{2, 3\}\}$ |
| • $\{3, \{3\}\}$ | • $\{3, \{3\}, \{2, \{3\}\}\}$ |

1.2. Partes de un conjunto. En muchos problemas hay que probar todas las combinaciones posibles de elementos de un conjunto para ver si satisfacen una propiedad determinada. Para ello, se construye el conjunto de partes del conjunto.

Definición 1.2.1. Dado un conjunto S , el *conjunto de las partes de S* es el conjunto de todos los subconjuntos de S . Se denota $\mathcal{P}(S)$.

$$\mathcal{P}(S) = \{A/A \subseteq S\}$$

Ejemplo 1.2.2. Si $S = \{1, 2, 3\}$, entonces:

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Ejercicio 1.2.3. Halla el conjunto de partes de los siguientes conjuntos:

- | | |
|--------------------|-------------------|
| • $\{1\}$ | • $\{\{1\}\}$ |
| • $\{1, 2\}$ | • \emptyset |
| • $\{1, 2, 3, 4\}$ | • $\{\emptyset\}$ |

Teorema 1.2.4. Si S es un conjunto tal que $\text{card}(S) = n$, entonces:

$$\text{card}(\mathcal{P}(S)) = 2^n$$

Ejercicio 1.2.5. Demuestra el resultado anterior utilizando inducción matemática.

Ejemplo 1.2.6. Si A es un conjunto con $\text{card}(A) = 5$, entonces:

$$\text{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^5 = 32$$

1.3. Operaciones con conjuntos.

Definición 1.3.1. Sean A y B dos conjuntos. La *unión de los conjuntos* A y B , denotada por $A \cup B$ es el conjunto que contiene los elementos que están en A o bien en B , o en ambos.

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

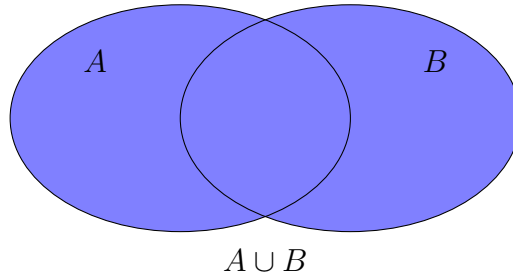


Figura 2: Diagrama de Venn de la unión $A \cup B$

En general, la *unión de una colección de conjuntos* es el conjunto que contiene aquellos elementos que son miembros de al menos uno de los conjuntos de la colección. La unión de los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , se denota por:

$$\cup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

Ejemplo 1.3.2. Algunos ejemplos de unión de conjuntos son:

- $\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}$
- La unión del conjunto de los estudiantes de la Universidad de Vigo matriculados en Física y el conjunto de los alumnos de la Universidad de Vigo matriculados en Ingeniería Informática es el conjunto formado por los alumnos de la Universidad de Vigo que están matriculados en alguna de estas carreras.
- Si $A_i = \{i, i + 1, i + 2, \dots\}$, entonces $\cup_{i=1}^n A_i = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Definición 1.3.3. Sean A y B dos conjuntos. La *intersección de los conjuntos A y B* , denotada por $A \cap B$, es el conjunto que contiene los elementos que están en A y en B .

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

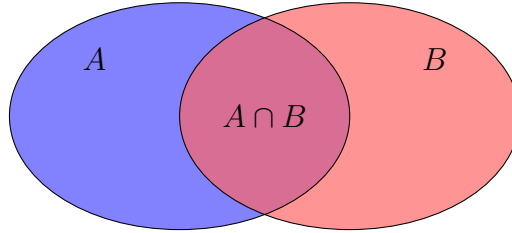


Figura 3: Diagrama de Venn de la intersección $A \cap B$

En general, la intersección de una colección de conjuntos es el conjunto que contiene aquellos elementos que son miembros de todos los conjuntos de la colección. La intersección de los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , se denota por $\cap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

Ejemplo 1.3.4. Algunos ejemplos de intersección de conjuntos son:

- $\{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$
- La intersección del conjunto de los estudiantes de la Universidad de Vigo matriculados en Física y el conjunto de los alumnos de la Universidad de Vigo matriculados en Ingeniería Informática es el conjunto formado por los alumnos de la Universidad de Vigo que están matriculados en ambas carreras a la vez.
- Si $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$, entonces $\cap_{i=1}^n A_i = \{n, n+1, n+2, \dots\}$.

Definición 1.3.5. Dos conjuntos A y B son *disjuntos* si $A \cap B = \emptyset$.

Ejemplo 1.3.6. Los conjuntos $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ son disjuntos, ya que:

$$\{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10\} = \emptyset$$

Propiedad 1.3.7. Si A y B son dos conjuntos finitos disjuntos, entonces:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

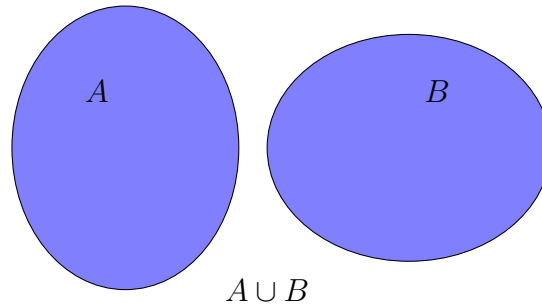


Figura 4: Diagrama de Venn de la unión disjunta $A \cup B$

Ejemplo 1.3.8.

$$\begin{aligned} \text{card}(\{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}) &= \text{card}(\{1, 3, 5, 7, 9\}) \\ &+ \text{card}(\{2, 4, 6, 8, 10\}) = 5 + 5 = 10 \end{aligned}$$

Definición 1.3.9. Sean A y B os conjuntos. La *diferencia de A y B* , denotada por $A - B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están en A , pero no en B .

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ejemplo 1.3.10. Algunos ejemplos de diferencia de conjuntos son:

- $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$
- La diferencia del conjunto de los estudiantes de la Universidad de Vigo matriculados en Física y el conjunto de los alumnos de la Universidad de Vigo matriculados en Ingeniería Informática es el conjunto formado por los alumnos de la Universidad de Vigo que están matriculados en Física pero no en Ingeniería Informática.

Definición 1.3.11. Sea U el conjunto universal y A un conjunto cualquiera. El *conjunto complementario de A* , denotado por \overline{A} , es $U - A$.

$$\overline{A} = \{x/x \notin A\}$$

Ejemplo 1.3.12. Algunos ejemplos de conjunto complementario son:

- Si el conjunto universal es \mathbb{N} , entonces $\overline{\{0\}} = \mathbb{N}^+$.
- Si el conjunto universal son todos los estudiantes de la Universidad de Vigo, el complementario del conjunto de los alumnos de la

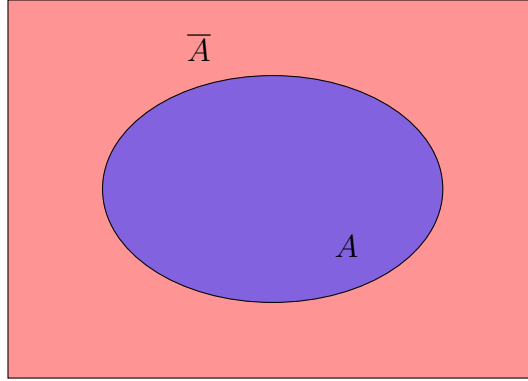


Figura 5: Diagrama de Venn del complementario \overline{A}

Universidad de Vigo matriculados en Ingeniería Informática es el conjunto formado por los alumnos de la Universidad de Vigo que no están matriculados en Ingeniería Informática.

Propiedad 1.3.13. Supongamos que el conjunto universal U es finito y sea A un conjunto cualquiera. Entonces:

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(U) - \text{card}(A)$$

Ejemplo 1.3.14. Si el universo es el conjunto A de las letras del alfabeto, C el conjunto de las consonantes y V el conjunto de las vocales, entonces:

$$\text{card}(C) = \text{card}(\overline{V}) = \text{card}(A) - \text{card}(V) = 27 - 5 = 22$$

Definición 1.3.15. Sean A y B conjuntos. La *diferencia simétrica* de A y B , denotada por $A \oplus B$, es el conjunto formado por los elementos que bien están en A o bien están en B , pero no en ambos.

$$A \oplus B = \{x/x \in A \oplus x \in B\}$$

Ejemplo 1.3.16. Algunos ejemplos de diferencia simétrica de conjuntos son:

- $\{1, 3, 5\} \oplus \{1, 2, 3\} = \{5, 2\}$

- La diferencia simétrica del conjunto de los estudiantes de la Universidad de Vigo matriculados en Física y el conjunto de los alumnos de la Universidad de Vigo matriculados en Ingeniería Informática es el conjunto formado por los alumnos de la Universidad de Vigo que están matriculados o bien en Física o bien en Ingeniería Informática, pero no en ambas titulaciones.

Ejercicio 1.3.17. Sean U (universo) el conjunto de estudiantes del Campus, A el conjunto de estudiantes que viven a más de 2 km del Campus y B el conjunto de los estudiantes que van andando a clase. Describe estos conjuntos: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \oplus B$, $A - B$, $B - A$, \overline{A} , \overline{B} ; y dibuja sus diagramas de Venn.

Propiedades 1.3.18. Dados A y B dos conjuntos se verifica que:

- $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$
- $A - B = A \cap \overline{B}$
- $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Ejercicio 1.3.19. Demuestra las propiedades anteriores.

Propiedades 1.3.20. Sea U el conjunto universal y A y B dos conjuntos. Se verifican las siguientes propiedades:

$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	Leyes de identidad
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Leyes de dominación
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Leyes idempotentes
$\overline{(\overline{A})} = A$	Ley de complementación
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Leyes conmutativas
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Leyes asociativas
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Leyes distributivas
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Leyes de De Morgan

$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Leyes de absorción
$A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$	Leyes de complemento

Tabla 1: Propiedades de las operaciones de conjuntos

Ejercicio 1.3.21. Demuestra las propiedades anteriores.

Definición 1.3.22. El *producto cartesiano* de dos conjuntos A y B , denotado por $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b)/a \in A \wedge b \in B\}$$

En general, el producto cartesiano de los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , denotado por $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, es el conjunto de las n -uplas (a_1, a_2, \dots, a_n) , donde a_i pertenece a A_i , para $i = 1, 2, \dots, n$.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)/a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}$$

Ejemplo 1.3.23. Algunos ejemplos de producto cartesiano de conjuntos son:

- Si $A = \{1, 2\}$ y $\{a, b, c\}$, entonces:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

- Si A es el conjunto de todos los estudiantes de la Universidad de Vigo y B es el conjunto de todas las asignaturas ofertadas en la universidad, entonces $A \times B = \{(a, b)/a \text{ es un estudiante de la universidad, } b \text{ asignatura ofertada en la universidad}\}$. El conjunto $A \times B$ se puede utilizar para representar todas las posibles matriculas de estudiantes en asignaturas de la universidad.

Propiedad 1.3.24. Supongamos que A y B son dos conjuntos finitos. Entonces:

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B)$$

Ejercicio 1.3.25. Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{y, z\}$. Obtén $A \times B$ y $B \times A$.

1.4. Principio de inclusión-exclusión.

Proposición 1.4.1 (Principio de adición). *Si A y B son dos conjuntos finitos, entonces:*

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (B - A) \xRightarrow[\text{unión disjunta}]{} \\ \text{card}(A \cup B) &= \text{card}(A) + \text{card}(B - A) \quad (1) \\ B &= (B - A) \cup (B \cap A) \xRightarrow[\text{unión disjunta}]{} \\ \text{card}(B) &= \text{card}(B - A) + \text{card}(B \cap A) \Rightarrow \\ \text{card}(B - A) &= \text{card}(B) - \text{card}(B \cap A) \quad (2) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\text{card}(A \cup B) \underset{(1)}{=} \text{card}(A) + \text{card}(B - A) \underset{(2)}{=} \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(B \cap A)$$

□

Ejemplo 1.4.2. Algunos ejemplos de aplicación del Principio de adición son:

- $\text{card}(\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\}) = \text{card}(\{1, 3, 5\}) + \text{card}(\{1, 2, 3\}) - \text{card}(\{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\}) = 3 + 3 - 2 = 4$
- Si el número de estudiantes de la Universidad de Vigo matriculados en Física es 250, el número alumnos de la Universidad de Vigo matriculados en Ingeniería Informática es 920 y el número de alumnos matriculados en ambas carreras es 8, entonces el número de alumnos de la Universidad de Vigo que están matriculados en al menos una de las dos carreras es $250 + 920 - 8 = 1162$.

Ejercicio 1.4.3. Supongamos que hay 1807 estudiantes de primer curso en tu universidad. De ellos, 453 han comenzado la carrera de Ingeniería Informática, 567 han comenzado la carrera de Historia y 299 han comenzado ambas carreras. ¿Cuántos alumnos de primer curso no estudian ni Ingeniería Informática ni Historia?

Proposición 1.4.4 (Principio de adición para tres conjuntos). Sean A , B y C tres conjuntos finitos. Entonces:

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) = & \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ & - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) \\ & + \text{card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.4.5. Demuestra el principio de adición para tres conjuntos utilizando el principio de adición para dos conjuntos. *Idea:* $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Proposición 1.4.6 (Principio de adición generalizado o Principio de inclusión-exclusión). Si $\{A_i\}_{i=1}^n$ una colección de conjuntos finitos, entonces:

$$\begin{aligned} \text{card}(\cup_{i=1}^n A_i) = & \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \text{card}(A_i \cap A_j) \\ & + \dots + (-1)^{n+1} \text{card}(\cap_{i=1}^n A_i) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.4.7. Demuestra la proposición anterior utilizando inducción matemática.

1.5. Partición de un conjunto.

Definición 1.5.1. Una *partición* de un conjunto A es una colección de subconjuntos distintos dos a dos y no vacíos de A tales que su unión es todo A .

Es decir, la colección de subconjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ (I es un conjunto de índices) forma una partición de A si, y sólo si, se verifican las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} A_i &\neq \emptyset, \forall i \in I \\ A_i \cap A_j &= \emptyset, \forall i \neq j \\ \cup_{i \in I} A_i &= A \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.2. Algunos ejemplos de partición de conjuntos son:

- Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La colección de conjuntos $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$ y $A_3 = \{6\}$ es una partición de A .
- Sea A el conjunto de los estudiantes de la Universidad de Vigo. Si A_1 es el conjunto de los estudiantes de la Universidad de Vigo con

edad inferior o igual 20, A_2 es el conjunto de los estudiantes de la Universidad de Vigo con edad superior a 20 e inferior o igual a 30 y A_3 es el conjunto de los estudiantes de la Universidad de Vigo con edad superior a 30, entonces A_1 , A_2 y A_3 forman una partición de A .

Ejercicio 1.5.3. ¿Cuáles de estas colecciones de subconjuntos son particiones de $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$?

- $\{-3, -2, 2, 3\}, \{-1, 1\}$
- $\{x \in A/x \text{ es par}\}, \{x \in A/x \text{ es impar}\}$

2. FUNCIONES

Las funciones permiten relacionar elementos de dos conjuntos.

2.1. Definiciones.

Definición 2.1.1. Sean A y B conjuntos. Una *función o aplicación f de A en B* es una asignación de exactamente un elemento de B a cada elemento de A .

Normalmente, usaremos las letras f, g, h, \dots para denotar las funciones.

Si f es una función de A en B se escribe $f: A \rightarrow B$ ó $A \xrightarrow{f} B$. El conjunto A se dice que es el *dominio de f* y B el *codominio*.

Si b es el único elemento de B asignado por la función f al elemento a , se escribe

$$f(a) = b$$

Se dice que b es la *imagen* de a y que a es la *pre-imagen* o *anti-imagen* de b .

2.1.2. Las funciones se pueden *describir* de muchas formas:

- Explícitamente, mediante asignaciones.
- Mediante una expresión.
- Mediante un programa de ordenador.

Ejemplo 2.1.3. Algunos ejemplos de funciones son:

- Sea $A = \{Marta, Isabel, Natalia, Andrea\}$ y B el alfabeto. Llamamos f a la función que asigna a cada nombre su letra inicial.

Entonces:

$$\begin{aligned} f(Marta) &= M, & f(Isabel) &= I, \\ f(Natalia) &= N, & f(Andrea) &= A \end{aligned}$$

- Sea $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la función que asigna el cuadrado de un entero a ese entero. Entonces $g(x) = x^2$.
- La función *abs* de Maxima asigna el valor absoluto de un número real a ese número real.

Definición 2.1.4. La *imagen de una función* $f: A \rightarrow B$ es el subconjunto de B formado por todas las imágenes de elementos de A . Se denota $\text{Im}(f)$ o $f(A)$.

$$\text{Im}(f) = \{f(a)/a \in A\} \subset B$$

Si S es un subconjunto de A , la *imagen de S mediante f* es el conjunto $f(S) = \{f(s)/s \in S\} \subset \text{Im}(f)$.

Ejemplo 2.1.5. En el ejemplo anterior:

- $\text{Im}(f) = \{M, I, N, A\}$, $f(\{Isabel, Natalia\}) = \{I, N\}$
- $\text{Im}(g) = \{n \in \mathbb{N}/n \text{ cuadrado}\} \subset \mathbb{N}$, $g(\{-1, 1\}) = \{1\}$

Ejercicio 2.1.6. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^2$. Halla:

- La pre-imagen de los siguientes elementos: 8, -10, 162.
- $f(\mathbb{Z})$, $f(\mathbb{N})$, $f(\mathbb{R})$, $f(\{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\})$

2.2. Operaciones con funciones.

Definición 2.2.1. Sea A un conjunto y $f_1, f_2: A \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. La *suma* y la *multiplicación* de f_1 y f_2 son las funciones $f_1 + f_2$ y $f_1 \cdot f_2$ definidas respectivamente por:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x), \forall x \in A \\ (f_1 \cdot f_2)(x) &= f_1(x) \cdot f_2(x), \forall x \in A \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.2. Sean $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x - x^2$.

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(x) &= x^2 + (x - x^2) = x, \forall x \in \mathbb{R} \\ (f_1 \cdot f_2)(x) &= x^2 \cdot (x - x^2) = x^3 - x^4, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Definición 2.2.3. Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: C \rightarrow D$ dos funciones tales que $f(A) \subset C$. La *composición* de las funciones f y g es la función $g \circ f$ definida por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in A$$

Ejemplo 2.2.4. Algunos ejemplos de composición de funciones son:

- Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f: A \rightarrow A$ la función definida por $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ y $g: A \rightarrow B$ la función dada por $g(a) = 3$, $g(b) = 2$, $g(c) = 1$. La composición de f y g es la función $g \circ f: A \rightarrow B$ definida por:

$$(g \circ f)(a) = 2, (g \circ f)(b) = 1, (g \circ f)(c) = 3$$

La composición de g y f no está definida ya que $g(A) \not\subset A$.

- Sean $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ las funciones definidas por $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 3x + 2$. Entonces $g \circ f$ y $f \circ g$ son las funciones definidas por:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$

$$f \circ g(x) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7, \forall x \in \mathbb{Z}$$

Obsérvese que $g \circ f \neq f \circ g$.

Ejercicio 2.2.5. Calcula $f + g$, $f \cdot g$, $g \circ f$ y $f \circ g$ donde $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x + 2$ son funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

2.3. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Definición 2.3.1. Una función $f: A \rightarrow B$ es *inyectiva* si, y sólo si,

$$\forall a, a' \in A / f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

Equivalentemente, por paso al contrareciproco, f es inyectiva, si, y sólo si,

$$\forall a, a' \in A / a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

Ejemplo 2.3.2. En este ejemplo estudiamos la inyectividad de las siguientes funciones:

- La función $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dada por $f(a) = 4$, $f(b) = 5$, $f(c) = 1$ $f(d) = 3$ es inyectiva, ya que las imágenes de los elementos de A son distintas entre sí.
- La función $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = x^2$ no es inyectiva, ya que $g(1) = g(-1)$.

- La función $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $h(x) = x + 1$ es inyectiva:

$$h(x) = h(y) \Leftrightarrow x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y, \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

Definición 2.3.3. Una función $f: A \rightarrow B$ es *sobreyectiva*, si y sólo si,

$$\forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b$$

Equivalentemente, f es sobreyectiva, si, y sólo si,

$$\text{Im}(f) = B$$

Ejemplo 2.3.4. En el Ejemplo 2.3.2:

- La función f no es sobreyectiva, ya que el 2 no tiene pre-imagen.
- La función $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $g(x) = x^2$ no es sobreyectiva ya que -1 no tiene pre-imagen.
- La función $h(x) = x + 1$ es sobreyectiva, ya que, $\forall y \in \mathbb{Z}$, $h(y - 1) = y$:

$$h(x) = y \Leftrightarrow x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1 \in \mathbb{Z}$$

Definición 2.3.5. Una función $f: A \rightarrow B$ es *biyectiva* si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva. Es decir, si y sólo si, para cada elemento $b \in B$ existe un único elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Ejemplo 2.3.6. En el Ejemplo 2.3.2:

- La función f no es biyectiva, ya que no es sobreyectiva.
- La función g no es biyectiva, ya que no es inyectiva (ni sobreyectiva).
- La función $h(x) = x + 1$ es biyectiva, ya que es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo 2.3.7. Dado A un conjunto, se llama *función identidad de A* a $1_A: A \rightarrow A$ definida por $1_A(x) = x$. Se verifica que 1_A es biyectiva.

Propiedad 2.3.8. Si $f: A \rightarrow B$ es una función, entonces:

$$1_B \circ f = f, \quad f \circ 1_A = f$$

Propiedades 2.3.9. Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ dos aplicaciones. Entonces:

- Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
- Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
- Si $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

- Si A y B son dos conjuntos finitos tales que $\text{card}(A) = \text{card}(B)$. La función f es inyectiva si, y sólo si, es sobreyectiva y si, y sólo si, es biyectiva.

Ejercicio 2.3.10. Demuestra las propiedades anteriores.

Definición 2.3.11. Sea $f: A \rightarrow B$ una *función biyectiva*. La *función inversa de f* es la función que asigna a cada elemento $b \in B$ el único elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Se denota por $f^{-1}: B \rightarrow A$ y con esta notación $f^{-1}(b) = a$.

Ejemplo 2.3.12. En el Ejemplo 2.3.2:

- Las funciones f y g no tienen inversa ya que no son biyectivas.
- La función h es biyectiva y, por lo tanto, tiene inversa $h^{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ y está definida por $h^{-1}(x) = x - 1$:

$$h(x) = y \Leftrightarrow x + 1 = y \Leftrightarrow x = y - 1$$

y, por lo tanto, $h^{-1}(y) = y - 1$.

Propiedades 2.3.13. Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ dos aplicaciones biyectivas Entonces:

- $f \circ f^{-1} = 1_B$ y $f^{-1} \circ f = 1_A$
- $(1_A)^{-1} = 1_A$
- $g \circ f$ es biyectiva y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Propiedad 2.3.14. Si $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow A$ son dos aplicaciones tales que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$, entonces f y g son aplicaciones biyectivas y cada una es inversa de la otra.

Ejercicio 2.3.15. Sea la aplicación $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + \pi$. Demuestra que es biyectiva y halla su inversa.

2.4. Algunas funciones importantes en informática.

Definición 2.4.1. Sea U el conjunto universal y A un subconjunto de U . La *función característica* de A es la función $\chi_A: U \rightarrow \{0, 1\}$ definida por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Ejemplo 2.4.2. Dado $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, la función característica de $A = \{4, 7, 9\}$, χ_A , tiene los siguientes valores:

$$\chi_A(4) = \chi_A(7) = \chi_A(9) = 1,$$

$$\chi_A(1) = \chi_A(2) = \chi_A(3) = \chi_A(5) = \chi_A(6) = \chi_A(8) = \chi_A(10) = 0$$

Definición 2.4.3. Sea n un número natural positivo fijo. La función $\text{mód} : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ asigna a cada número natural z el resto de la división z entre n . Es decir:

$$z = k \cdot n + r, \quad k, r \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq r < n \Rightarrow \quad \text{mód}(z) = r$$

Habitualmente se usa la notación $z \equiv r \pmod{n}$.

Observación 2.4.4. Las funciones Hashing con frecuencia utilizan alguna función módulo.

Ejemplo 2.4.5. Sea $n = 5$. Entonces:

$$\begin{array}{llllll} 0 \equiv 0 \pmod{5} & 1 \equiv 1 \pmod{5} & 2 \equiv 2 \pmod{5} & 3 \equiv 3 \pmod{5} \\ 4 \equiv 4 \pmod{5} & 5 \equiv 0 \pmod{5} & 6 \equiv 1 \pmod{5} & 7 \equiv 2 \pmod{5} \\ 8 \equiv 3 \pmod{5} & 9 \equiv 4 \pmod{5} & 10 \equiv 0 \pmod{5} & \dots \\ 1024 \equiv 4 \pmod{5} & 1373 \equiv 3 \pmod{5} & 10198485676 \equiv 1 \pmod{5} \end{array}$$

Definición 2.4.6. La función *factorial* $! : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ asigna a cada número natural n su factorial $n!$, es decir:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Definición 2.4.7. La *parte entera por exceso* de un número real x es el menor entero mayor o igual que x . Se denota $\lceil x \rceil$.

La *parte entera por defecto* de un número real x es el mayor entero menor o igual que x . Se denota $\lfloor x \rfloor$.

Ejemplo 2.4.8. $\lceil 0.6 \rceil = 1$, $\lfloor 0.6 \rfloor = 0$, $\lceil -0.9 \rceil = 0$, $\lfloor -0.9 \rfloor = -1$

3. EJERCICIOS

3.1. Conjuntos.

1. Enumera los miembros de estos conjuntos:

- $\{x/x \text{ es un número real positivo tal que } x^2 = 1\}$
- $\{x/x \text{ es un número entero positivo menor que } 12\}$

- $\{x/x \text{ es el cuadrado de un entero y } x < 100\}$
 - $\{x/x \text{ es un número entero tal que } x^2 = 2\}$
2. Da una descripción de los siguientes conjuntos: $\{0, 3, 6, 9, 12\}$, $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
 3. Determina si cada uno de estos pares de conjunto son iguales:
 - $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}, \{5, 3, 1\}$
 - $\{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}$
 - $\emptyset, \{\emptyset\}$
 4. Determina si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa:

• $\emptyset \in \{\emptyset\}$	• $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
• $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$	• $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
• $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	• $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
• $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$	• $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 5. ¿Cuál es el cardinal de estos conjuntos?

• $\{a\}$	• $\{a, \{a\}\}$
• $\{\{a\}\}$	• $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
 6. Obtén el conjunto de partes de estos conjuntos:

• $\{a\}$	• $\{a, b\}$
• $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	• $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
 7. ¿Cuántos elementos tienen estos conjuntos?
 - $\mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\})$
 - $\mathcal{P}(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$
 - $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$
 8. ¿Cuál es el producto cartesiano $A \times B \times C$, donde A es el conjunto de las líneas aéreas y B y C son el conjunto de todas las capitales europeas?
 9. En el conjunto de los estudiantes de la ESEI, supongamos que A es el conjunto de los estudiantes de segundo curso y B el conjunto de estudiantes de FMI. Expresa los siguientes conjuntos en términos de A y B .
 - El conjunto de estudiantes de segundo curso matriculados en FMI.
 - El conjunto de estudiantes de segundo curso no matriculados en FMI.

- El conjunto de estudiantes que bien son de segundo curso o bien están matriculados en FMI.
 - El conjunto de estudiantes que bien no son de segundo curso o bien no están matriculados en FMI.
10. Halla los conjuntos A y B , si $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$ y $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.
11. Sean A y B conjuntos. Demuestra que:
- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| • $(A \cap B) \subseteq A$ | • $A \subseteq (A \cup B)$ |
| • $A - B \subseteq A$ | • $A \cap (B - A) = \emptyset$ |
| • $A \cup (B - A) = A \cup B$ | • $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ |
12. Halla la diferencia simétrica de $\{1, 3, 5\}$ y $\{1, 2, 3\}$.
13. Sea $A_i = \{1, 2, \dots, i\}$ para $i=1, 2, 3, \dots$. Halla $\cup_{i=1}^n A_i$ y $\cap_{i=1}^n A_i$.
14. Un total de 1232 estudiantes han asistido a un curso de inglés, 879 han asistido a un curso de francés y 114 han asistido a un curso de alemán. Además, 103 han asistido a los cursos de inglés y francés, 23 han asistido a los cursos de inglés y alemán y 14 han asistido a los cursos de francés y alemán. Si 2092 estudiantes han asistido a alguno de estos cursos de idiomas, ¿cuántos estudiantes han asistido a los tres cursos?
15. En una encuesta sobre 270 estudiantes universitarios se obtiene que a 64 les gustan las coles de bruselas, a 94 les gusta el brécol, a 58 la coliflor, a 26 les gusta el brécol y las coles de bruselas, a 28 les gusta la coliflor y las coles de bruselas, a 22 les gusta el brécol y la coliflor y a 14 les gustan las tres verduras. ¿A cuántos de los 270 estudiantes no les gusta ninguna de las tres verduras?
16. Da una partición del conjunto $\{1, 2, \dots, 50\}$.
17. ¿Cuáles de estas colecciones de subconjuntos son particiones del conjunto de cadenas de bits de longitud 4?
- El conjunto de las cadenas de bits que empiezan por 0, el conjunto de las cadenas de bits que empiezan por 11 y el conjunto de las cadenas de bits que empiezan por 10.
 - El conjunto de las cadenas de bits que contienen la cadena 00, el conjunto de las cadenas de bits que contienen la cadena 01, el conjunto de las cadenas de bits que contienen la cadena 10 y el conjunto de las cadenas de bits que contienen la cadena 11.

- El conjunto de las cadenas de bits que terminan en 000, el conjunto de las cadenas que terminan en 110 y el conjunto de las cadenas que terminan en 11.

3.2. Funciones.

1. ¿Por qué f no es una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} si

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(x) = \sqrt{x+1}, \quad f(x) = \pm\sqrt{x^2-1} ?$$

Halla el dominio en cada uno de los casos.

2. Determina si f es una función del conjunto de las cadenas de bits al conjunto de los enteros si:
 - $f(C)$ es la posición de un bit 1 en C .
 - $f(C)$ es el número de bits 0 en C .
3. Halla el dominio y la imagen de estas funciones:
 - La función que asigna a cada entero no negativo su primera cifra.
 - La función que asigna el entero anterior a un entero positivo.
 - La función que asigna a una cadena de bits el número de bits 0 de la cadena.
 - La función que asigna a una cadena de bits el número de bits de la cadena.
4. Estudia si cada una de las siguientes funciones del conjunto $\{a, b, c, d\}$ en sí mismo son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
 - $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = d$
 - $f(a) = b, f(b) = b, f(c) = d, f(d) = c$
 - $f(a) = d, f(b) = b, f(c) = c, f(d) = d$
5. Estudia si las siguientes correspondencias son funciones biyectivas del conjunto \mathbb{R} en sí mismo. En caso afirmativo, calcula su inversa.

• $f(x) = -3x + 4$	• $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$
• $f(x) = -3x^2 + 7$	• $f(x) = x^5 + 1$
6. Dadas las aplicaciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 4x - 5$ y $g(x) = x^2 - 3$, calcula:
 - $f + g, g \cdot f$
 - $g(f(5))$
 - $f(g(a-1))$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$.
 - $f \circ g, g \circ f$

- Estudia si las funciones f , g , $f \circ g$, $g \circ f$ son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.
7. Sea $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x, y) = x - y$ se define $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ como $g(x) = (x, -x)$.
- Averigua de qué tipo es cada una de ellas.
 - Halla, si es posible, las aplicaciones $f \circ g$ y $g \circ f$ indicando de qué tipo es cada una.
8. Sean $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ dos aplicaciones. Demuestra que:
- $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva.
 - $g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow g$ sobreyectiva.
 - $g \circ f$ inyectiva y f sobreyectiva $\Rightarrow g$ inyectiva.
9. Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación y $A, B \subset X$. Demuestra que:
- $A \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \neq \emptyset$
 - $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
 - De $A \subset B$ e $A \neq B$ no se puede deducir que $f(A) \subset f(B)$ y $f(A) \neq f(B)$.
10. Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación, y $A, B \subset X$. Demuestra que:
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
 - $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
 - $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$
11. Calcula estos valores:
- $$[1.1] \quad [-0.1] \quad [1.1] \quad [-0.1] \quad \left[\frac{1}{2} + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil\right]$$
12. Sea $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$. Halla $f(S)$ si:
- $f(x) = 1$
 - $f(x) = \left\lceil \frac{x}{5} \right\rceil$
 - $f(x) = 2x + 1$
 - $f(x) = \left\lfloor \frac{(x^2+1)}{3} \right\rfloor$
13. Estudia si cada una de las siguientes funciones del conjunto \mathbb{Z} en sí mismo son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
- $$f(n) = n - 1, \quad f(n) = n^2 + 1, \quad f(n) = n^3, \quad f(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$
14. Sea C un conjunto y $V, W \subset C$. Indica de qué conjunto es función característica cada una de las siguientes funciones:
- $1 - \chi_V$
 - $\chi_V \cdot \chi_W$
 - $1 + \chi_V$
 - $\chi_V + \chi_W - \chi_V \cdot \chi_W$
15. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ y $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la aplicación dada por $f(r) = r \pmod n$. Determina:

- $f(\mathbb{N})$
- $f^{-1}(m)$ para $m \in \mathbb{N}$.

REFERENCIAS

- [1] Bujalance, E.: *Elementos de matemática discreta*. Sanz y Torres, 1993.
- [2] Bujalance, E.: *Problemas de matemática discreta*. Sanz y Torres, 1993.
- [3] Busby, R. C.; Kolman, B.; Ross, S. C.: *Estructuras de matemáticas discretas para la computación*. Prentice Hall, 1997.
- [4] Ferrando, J. C.; Gregori, V.: *Matemática discreta*. Reverté, 1995.
- [5] García Merayo, F.: *Matemática discreta*. Paraninfo, 2005.
- [6] García Merayo, F.; Hernández Peñalver, G.; Nevot Luna, A.: *Problemas resueltos de matemática discreta*. Thomson, 2003.
- [7] García C.; López, J. M.; Puigjaner, D.: *Matemática discreta: problemas y ejercicios resueltos*. Prentice Hall, 2002.
- [8] Garnier, R.; Taylor, J.: *Discrete mathematics for new technology*. Adam Hilger, 1992.
- [9] Grassmann, W. K.: *Matemática discreta y lógica*. Prentice Hall, 1998.
- [10] Grimaldi, R. P.: *Matemáticas discreta y combinatoria: una introducción con aplicaciones*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.
- [11] Johnsonbaugh, R.: *Matemáticas discretas*. Prentice Hall, 1999.
- [12] Rosen, K. H.: *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. Mc Graw Hill, 2004.
- [13] Wilson, R. J.: *Introducción a la teoría de los grafos*. Alianza, 1983.