Nombre y apellidos: ____________ **S O L U C I O N E S** ____________ DNI: ____________

PARCIAL 1

31 de marzo de 2020, 11:00 a 12:00h

Pregunta 1

(2 pt.)

Supongamos que tenemos dos sistemas de ecuaciones lineales: (I) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y (II) $B\mathbf{x} = \mathbf{d}$ y después de realizar varias operaciones elementales de filas sobre la matriz ampliada de cada uno de ellos se han obtenido las siguientes matrices:

$$\text{Para el sistema (I):} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{Para el sistema (II):} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cada uno de los dos sistemas contesta razonadamente los siguientes apartados. Si en el enunciado no hay información suficiente para poder contestar, explica por qué no hay información suficiente.

(0.25 pt.) (a) Halla el vector de términos independientes del sistema original.

(0.25 pt.) (b) La matriz que se ha obtenido ¿es una matriz escalonada? ¿es escalonada reducida?

(0.25 pt.) (c) ¿El sistema original era compatible?

(0.25 pt.) (d) Si se modificasen los términos independientes del sistema original ¿podría el sistema resultante ser incompatible?

(1 pt.) (e) Escribe la solución general de cada uno de los sistemas homogéneos $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en forma paramétrica vectorial

---

Solución:

(a) No hay información suficiente ni para (I) ni para (II) porque en ambos casos sólo se sabe que la matriz ampliada original es una de las infinitas matrices equivalentes por filas a la dada y habrá infinitos posibles vectores de términos independientes en ambos casos.

(b) En ambos casos es una matriz escalonada. En (I) no es reducida, pero en (II) sí lo es.

(c) Sí; en ambos casos es compatible. En ambos casos la matriz dada está en forma escalonada y vemos que no tiene un pivote en la columna de la derecha. De eso se deduce que el sistema original no tiene un pivote en la columna de los términos independientes y por tanto es compatible.

(d) En el sistema (I) sería imposible porque la matriz de coeficientes tiene un pivote en cada fila y por tanto las columnas generan $\mathbf{R}^4$. En el sistema (II) sí sería posible porque al haber pivote sólo en 3 de las 4 filas, las columnas de la matriz de coeficientes no generan $\mathbf{R}^4$. Entonces cualquier vector de $\mathbf{R}^4$ que no pertenezca al espacio columna de la matriz de coeficientes, al ser usado como vector de términos independientes produciría un sistema incompatible.

(e) Para el sistema (I), que tiene solamente una variable libre que es x_3, hay que hallar la forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{De dónde:} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para el sistema (II), que tiene dos variables libres que son x_3 y x_4, ya se da la forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Por tanto:} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 2

(2 pt.)

Calcula la forma escalonada reducida de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 9 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$A \xrightarrow[F_4+2F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & 8 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4+\frac{9}{2}F_2]{F_3-\frac{9}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}F_2]{F_4+4F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_3,\, F_1+7F_2]{F_1+3F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma escalonada reducida de A es: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 3

(2 pt.)

Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

Para A lo más sencillo es aplicar el algoritmo general $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$:

$$[A|I_5] \xrightarrow[F_2 - F_5, F_1 - F_5]{F_4 - F_5, F_3 - F_5} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 - 2F_4]{F_3 - 2F_4, F_1 - 2F_4} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 - 3F_3]{F_2 - 3F_3} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 9 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para B, dado que es diagonal por bloques, lo más sencillo es calcular las inversas de los bloques de la diagonal:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad 1^{-1} = 1$$

de forma que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 4

(2 pt.)

Sabiendo que las matrices A y B dadas a continuación

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & -5 \\ 2 & 8 & 0 & -7 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & -12 & -8 \\ -2 & 4 & -1 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & 9 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pueden obtener una de la otra mediante operaciones elementales de filas y siendo $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ la aplicación lineal definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, contesta a los siguientes apartados justificando tu respuesta:

(0.4 pt.) (a) ¿Es T inyectiva? ¿Es T sobreyectiva?

(0.4 pt.) (b) Escribe el conjunto de las columnas pivote de A y escribe el conjunto de las columnas pivote de B.

(0.4 pt.) (c) ¿Son compatibles todos los sistemas de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que se pueden formar eligiendo para $\mathbf{b}$ todos los vectores de $\mathbf{R}^4$?

(0.4 pt.) (d) ¿Son las columnas de A linealmente independientes? ¿Son las filas de B linealmente independientes?

(0.4 pt.) (e) ¿Tiene alguna solución no trivial el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

Solución:

Dado que B es una matriz escalonada, el enunciado implica que tiene cuatro posiciones pivote, una en cada fila y que están en las columnas 1, 2, 3 y 5.

(a) T no es inyectiva porque A no tiene un pivote en cada columna. T es sobreyectiva porque al tener un pivote en cada fila, las columnas de A generan $\mathbf{R}^4$ y por tanto $\operatorname{Im} T = \operatorname{Col} A = \mathbf{R}^4$.

(b) De A: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$. De B $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Sí, lo son porque, como vimos en el apartado (a), $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^4$.

(d) Las columnas de A no son linealmente independientes porque no todas son columnas pivote.

Las filas de B son las columnas de B^{T}, así que buscamos una forma escalonada de B^{T}:

$$B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \\ -7 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \leftrightarrow F_5} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deducimos que las filas de B son linealmente independientes.

(e) El sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene soluciones no triviales porque tiene una variable libre (correspondiente a la columna no pivote de A).

Nombre y apellidos: ____________ **S O L U C I O N E S** ____________ DNI: ____________

Pregunta 5

(2 pt.)

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & -1 \\ -2 & -9 & 5 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

(1.5 pt.) (a) Calcula la factorización LU de A (calcula la matriz L y la matriz U).

(0.5 pt.) (b) Comprueba que el producto LU es igual a A.

Solución:

(a) Hay que poner A en forma escalonada —si es posible— sin realizar intercambios de filas y utilizando únicamente reemplazos basados en la posición pivote. Si eso no es posible, la matriz no tiene factorización LU.

Empezamos, pues, realizando las operaciones elementales $F_2 + F_1$ y $F_4 + 2F_1$:

$$A \xrightarrow[F_4+2F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4+3F_2]{F_3-3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto hemos obtenido la matriz U. Para hallar L realizamos las operaciones inversas de esas en el orden opuesto sobre la matriz identidad:

$$I_4 \xrightarrow{F_4-F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+3F_2]{F_4-3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-F_1]{F_4-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hemos obtenido:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculamos:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & -1 \\ -2 & -9 & 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$