Universida de Vigo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

E.Superior de Enxeñería Informática
Edificio Politécnico
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 986 387 000
esei.uvigo.es

Calculo de Probabilidades y Variables aleatorias

Apelidos: **Nome:** **DNI:**

Para facilitar la corrección de la prueba, marque en la tabla la letra de la respuesta que considere correcta para cada una de las cuestiones propuestas[1].

Pregunta 1	a	b	c
Pregunta 2	a	b	c

1. *(2 puntos)* En una caja hay 2 monedas, con probabilidad de cara 0.9 y 0.1, respectivamente. El experimento consiste en elegir al azar una de las dos monedas y lanzarla 2 veces. Sea A_1 el experimento *resultado del lanzamiento de la 1ª moneda* y A_2 el experimento *resultado del lanzamiento de la 2ª moneda*. ¿Son independientes?.

   a) Si
   b) No
   c) Depende del resultado de la moneda.

   solución correcta: b)

2. *(2 puntos)* Para el diseño de un programa de verificación de disco, se asume que la probabilidad de encontrar un sector dañado es 0.01. Suponiendo que se realiza una revisión sobre un disco, chequeando sus sectores aleatoriamente, se desea saber: Si se revisan 100 sectores de disco, ¿Cuál es el valor esperado? y si se han leído 5 sectores y ninguno está dañado, ¿Cuál es la probabilidad de que se deban leer más de 7 sectores para encontrar el primer sector dañado?

   a) 1 y 0.9227
   b) 99 y 0.9999
   c) 1 y 0.9999

   solución a):

   Solución: Sea *X=nº de sectores dañados en 100 sectores*$\sim Bi(100, 0.01)$, y su valor esperado es $E(X) = n * p = 100 * 0.01 = 1$
   Sea *Y=nº de sectores leídos antes de encontrar un sector dañado*$\sim Geo(p = 0.01)$, por lo tanto $P(Y > 7) = 1 - P(Y \leq 7) = 1 - sum(dnbinom(0 : 7, size = 1, prob = 0.01)) = 0.9227$ □

1. *(3 puntos)* Se sabe que una determinada alergia infecta a un 10 % de la poblacion de una determinada localidad. Existe un test para comprobar si se es alérgico con una sensibilidad (tasa de aciertos sobre alérgicos) es 0.6 y su especificidad (tasa de aciertos sobre no alérgicos) es 0.99. Cálcular los índices predictivos positivo (probabilidad de ser alérgico si el resultado del test ha sido positivo) y predicitivo negativo (probabilidad de no ser alérgico si el test ha sido negativo).

   Solución: P(Alérgico ∩ Test Positivo) = $0.1 * 0.6 = 0.06$
   P(Test Postivo)=$0.1 * 0.6 + 0.9 * 0.01 = 0.069$
   IPP: $P\left(Alérgico/Test\ Positivo\right) = \frac{0.06}{0.069} = 0.8696$
   IPN: $P\left(No\ Alérgico/Test\ Negativo\right) = \frac{0.9*0.99}{0.9*0.99+0.1*0.4} = 0.96$ □

2. *(3 puntos)* Una canal de comunicación transmite impulsos a una tasa de 12 por microsegundo según la distribución de Poisson. La probabilidad de error en la transmisión de un impulso es 0.00013. Halle lo siguiente:

   a) La probabilidad de que en un microsegundo no haya errores. Si en el 1er microsegundo hay un error, probabilidad de que no haya errores en el siguiente. Comparar las probabilidades anteriores y justificarlas.

[1] 2 respuestas incorrectas penalizan una respuesta correcta. Las preguntas en blanco no penalizan.
No se considerarán las respuestas contestadas sin su correspondiente desarrollo.

Universida de Vigo

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

E.Superior de Enxeñería Informática
Edificio Politécnico
Campus de Ourense
E-32004 Ourense

Tel. 986 387 000
esei.uvigo.es

Solución: Sea la variable $N_{(0,t)}$ =*número de impulsos transmitidos en un intervalo* $(0,t) \sim Pois(\lambda t)$. Si $t = 1$microsegundo entonces $\lambda = 12$. Sea $p = 13 * 10^{-5}$ la probabilidad de que un impulso sea transmitido erróneamente.
Consideremos la variable Y_t =*número de impulsos transmitidos erróneamente en un intervalo* $(0,t)$. Los valores de Y_t dependen del número de impulsos transmitidos (es decir, de $N_{(0,t)}$). Si $N_{(0,t)} = n$, entonces la variable $Y_t/N_{(0,t)} = n \sim Bi\,(n,p)$ (supongamos que $t = 1$)

$$P(Y_t = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(Y_t = 0/N_{(0,t)} = n\right) P\left(N_{(0,t)} = n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{o} p^0 * (1-p)^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda}$$

Si $\lambda = 12$ y $p = 13 * 10^{-5}$ entonces $P(Y_t = 0) = 0.9984$
En el caso general con $k = 0, 1, \ldots$ tenemos que:

$$\begin{aligned} P(Y_t = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P\left(Y_t = k/N_{(0,t)} = n\right) P\left(N_{(0,t)} = n\right) &= \\ \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k * (1-p)^{n-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} &= \\ e^{-\lambda t} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^{n-k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} &= \\ e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!} &= \\ e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t p)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda t} = e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^k}{k!} \end{aligned}$$

Es decir, la variable Y_t sigue una distribución Pois$(\lambda t p)$ □

b) La probabilidad de que en un segundo no haya errores. Justifica la respuesta.

Solución: Un segundo= 10^6 microsegundos, por lo tanto $N_{(0,10^6)} = N_{(0,1)} + N_{(1,2)} + \ldots + N_{(10^6-1,10^6)} \sim Pois(10^6\lambda)$ ya que es la suma de v.a. de Poisson independientes.

$$P\left(Y_{(0,10^6)} = 0\right) = e^{-\lambda * p} = e^{-12*10^6*13*10^{-5}} = e^{-12*13*10}$$

□

c) La probabilidad de que en dos microsegundos haya al menos un error.

Solución:

$$P(\textit{Al menos un erro en 1 microsegundo}) = P(Y > 0) = 1 - e^{-\lambda * p} = q$$

Com0 en cada segundo hay independencia entonces la v.a. Z=*nº de errores en 2 microsegundos*$\sim$ $Bi\left(2, 1 - e^{-\lambda * p}\right)$. La probabilidad pedida es

$$P\,(Z = 10) = \binom{2}{1} \left(1 - e^{-\lambda * p}\right)^1 \left(1 - 1 + e^{-\lambda * p}\right)^{2-1}$$

□

d) El promedio de errores en un segundo. Justificar la respuesta.

$$E\left\{N_{(0,10^6)}\right\} = 10^6\lambda = 12 * 10^6 * 13 * 10^{-5} = 12 * 13 * 10 = 1560$$

dado que la variable es de $Pois\left(-\lambda * p\right)$ según los apartados anteriores.