Ejercicios de la sección 4.2 Propiedades y métodos de cálculo de los determinantes

(Ejercicios para hacer en clase: 2, 4, 6, 14, 16, 18, 20, 23, 29, 34, 35, 37, 41.)
(Ejercicios con solución o indicaciones: 1, 3, 5, 15, 17, 19, 21, 22, 25, 30, 33, 36, 42, 45.)

En los siguientes enunciados se utilizan las barras verticales para representar un determinante, es decir, se usa la notación $|A| = \det A$. En el caso del determinante de una matriz dada explícitamente por sus elementos las barras verticales sustituyen a los paréntesis que normalmente delimitan los elementos de la matriz. Cada una de las ecuaciones que aparecen en los ejercicios 1 a 4 ilustra una propiedad de los determinantes. Enuncia la propiedad que corresponda.

▶1. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

▶2. $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

▶3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix}$

▶4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 5 a 9 halla los determinantes indicados mediante reducción a forma escalonada.

▶5. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$

▶6. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 13 & -7 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Halla los determinantes de los ejercicios 10 a 15 combinando los métodos de la traspuesta, reducción por filas y desarrollo por cofactores, según sea más apropiado.

10. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 4 & 10 & -4 & -1 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

▶14. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

▶15. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Halla los determinantes de los ejercicios 16 a 21 sabiendo que

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 7.$$

▶16. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$

▶17. $\begin{vmatrix} a & 3b & c \\ d & 3e & f \\ g & 3h & i \end{vmatrix}$

▶18. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

▶19. $\begin{vmatrix} b & c & a \\ h & i & g \\ e & f & d \end{vmatrix}$

▶20. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

▶21. $\begin{vmatrix} a+d & b+e & 2(c+f) \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{vmatrix}$

▶22. Usa determinantes para establecer cuáles de las siguientes matrices son inversibles:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

Utiliza determinantes para averiguar si las matrices dadas en los ejercicios 23 a 25 son inversibles.

▶23. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

▶25. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Utiliza determinantes para averiguar si los conjuntos de vectores dados en los ejercicios 26 a 28 son linealmente independientes.

26. $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Versión de 18 de enero de 2023, 12:45h.

28. $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 29 y 30, A y B son matrices $n \times n$. Indica para cada enunciado si es verdadero o falso y justifica tus respuestas.

►**29.**

(a) Una operación de reemplazo de filas no afecta al determinante de una matriz.

(b) El determinante de A es el producto de los pivotes presentes en cualquier forma escalonada U de A, multiplicado por $(-1)^r$, donde r es el número de intercambios de fila realizados durante la reducción por filas de A a U.

(c) Si las columnas de A son linealmente dependientes, entonces $\det A = 0$.

(d) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

►**30.**

(a) Si se realizan dos intercambios sucesivos de fila, entonces el nuevo determinante es igual al determinante antiguo.

(b) El determinante de A es el producto de los elementos diagonales de A.

(c) Si $\det A$ es cero, entonces dos filas o dos columnas son iguales, o una fila o una columna es cero.

(d) $\det A^T = (-1) \det A$.

31. Halla $\det B^5$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

32. Utiliza las propiedades de los determinantes sobre cómo les afectan las operaciones elementales por filas para demostrar que si dos filas de una matriz cuadrada A son iguales, entonces $\det A = 0$. Esto se cumple también para dos columnas. ¿Por qué?

►**33.** Demuestra: Si A es inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

►**34.** Halla una fórmula para $\det(rA)$ cuando A es una matriz $n \times n$.

►**35.** Sean A y B matrices cuadradas. Demuestra que aunque AB y BA no sean iguales, siempre es cierto que $\det(AB) = \det(BA)$.

►**36.** Sean A y P matrices cuadradas, con P inversible. Demuestra que $\det(PAP^{-1}) = \det A$.

►**37.** Sea U una matriz cuadrada tal que $U^T U = I$. Demuestra que $\det U = \pm 1$.

38. Supongamos que A es una matriz cuadrada tal que $\det(A^4) = 0$. Explica por qué A no puede ser inversible.

Comprueba que $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ para las matrices de los ejercicios 39 y 40.

39. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

40. $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

►**41.** Sean A y B matrices 3×3, con $\det A = 4$ y $\det B = -3$. Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular:

(a) $\det(A^5)$. (b) $\det(5A)$. (c) $\det(B^T)$.
(d) $\det(A^{-1})$. (e) $\det(A^3)$.

►**42.** Sean A y B matrices de 4×4, con $\det A = -1$ y $\det B = 2$. Halla:

(a) $\det(AB)$. (b) $\det(B^5)$. (c) $\det(2A)$.
(d) $\det(A^T A)$. (e) $\det(B - AB)$.

43. Comprueba que $\det A = \det B + \det C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} e & f \\ c & d \end{pmatrix}$$

44. Demuestra que $\det A = \det B + \det C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b & u_1 + v_1 \\ c & d & u_2 + v_2 \\ e & f & u_3 + v_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & u_1 \\ c & d & u_2 \\ e & f & u_3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} a & b & v_1 \\ c & d & v_2 \\ e & f & v_3 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, observa que A *no es igual* a $B + C$.

►**45.** Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Demuestra que $\det(A + B) = \det A + \det B$ si, y sólo si, $a + d = 0$.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 4.2

1. Un intercambio de filas cambia el signo del determinante.

3. Una operación elemental de reemplazo no cambia el valor de un determinante.

5. 3.

15. 9.

17. 21.

19. -7.

21. 14.

22. (a) $\det = 36 \neq 0$, inversible. (b) $\det = 20 \neq 0$, inversible. (a) $\det = 0$, no inversible.

25. Determinante es cero. No es inversible.

30. (a) Cada intercambio le cambia el signo al determinante, luego dos intercambios lo dejan igual, (b) Sólo si A es triangular, (c) El determinante puede ser cero por otras razones, por ejemplo que una fila sea un múltiplo de otra, (d) El determinante de A^{T} es igual al de A.

33. $(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I = 1$.

36. $\det(PAP^{-1}) = (\det P)(\det A)(\det P^{-1})$
$= (\det A)(\det P)(\det P^{-1}) = (\det A)(\det P)(\det P)^{-1}$
$= \det A$.

42. (a) -2. (b) 2^5. (c) -2^4. (d) 1. (e) $2\det(I-A)$.

45. Calculamos separadamente los dos miembros:
$\det(A+B) = \det\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} = (a+1)(d+1) - bc = 1 + a + d + ad - bc$.
$\det A + \det B = 1 + ad - bc$.
La diferencia de ambos resultados es cero si y sólo si $a + d = 0$.