Ejercicios de la sección 2.1 El concepto general de aplicación y las tres cuestiones fundamentales en el estudio de una ecuación o sistema

(Clase de prácticas: 1, 2, 4, 7, 11, 13, 15, 16, 19, 20.)

►**1.** Supongamos que una aplicación $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ está definida por $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$ para alguna matriz A. ¿Cuántas filas y columnas tendrá A?

►**2.** Sea A una matriz de orden 6×5. ¿Cómo deben ser a y b para definir $T : \mathbf{R}^a \to \mathbf{R}^b$ mediante $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$?

3. ¿Cuántas filas y columnas debe tener una matriz A para que defina una aplicación de $\mathbf{R}^4$ en $\mathbf{R}^5$ mediante la ecuación $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$?

►**4.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Da una descripción geométrica de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, y definamos la aplicación $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ mediante $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$. Halla las imágenes de los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

6. Sean $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Definamos la aplicación $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ mediante $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$. Halla $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$.

En los ejercicios 7 a 10, con T definida como $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$, halla un vector $\mathbf{x}$ cuya imagen mediante T sea $\mathbf{b}$, y determina si este $\mathbf{x}$ es único.

►**7.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & -5 & -9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Para los ejercicios 11 y 12, halla todas los $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^4$ cuya imagen sea el vector cero mediante la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ para la matriz A dada.

►**11.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

►**13.** Sea $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y A la matriz del ejercicio 11. ¿Está $\mathbf{b}$ en la imagen de la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$?. ¿Por qué sí o por qué no?

14. Sea $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, y A la matriz del ejercicio 12. ¿Está $\mathbf{b}$ en la imagen de la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$?. ¿Por qué sí o por qué no?

En los ejercicios 15 a 18, usa un sistema de coordenadas rectangulares para representar gráficamente los vectores $\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, y sus imágenes bajo la transformación T dada. Describe geométricamente la acción de T sobre un vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^2$.

►**15.** $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

►**16.** $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

17. $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

18. $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 19 y 20, indica para cada enunciado si es verdadero o falso, justificando cada respuesta.

►**19.**

(a) El problema de unicidad de solución de un sistema de ecuaciones lineales es un problema de determinar si una aplicación es inyectiva.

(b) Si la aplicación matricial definida por la matriz de coeficientes de un sistema es sobreyectiva entonces se puede asegurar la existencia de solución.

(c) Una aplicación $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es sobreyectiva si a cada vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^n$ lo transforma en algún vector de $\mathbf{R}^m$.

(d) Si A es una matriz 3×2, entonces la aplicación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ no puede ser inyectiva.

(e) Si A es una matriz 4×3 entonces la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es una aplicación inyectiva de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^4$.

►**20.**

(a) Si un sistema tiene una única solución, al cambiar los términos independientes al azar, el nuevo sistema podría tener muchas soluciones.

(b) Si un sistema cumple la propiedad de existencia fuerte de solución, al cambiar los términos independientes al azar, el nuevo sistema podría dejar de cumplirla.

(c) Una aplicación $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es inyectiva si cada vector en $\mathbf{R}^n$ se transforma en un único vector en $\mathbf{R}^m$.

(d) El codominio de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

(e) Si A es una matriz 3×2, entonces la aplicación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$ no puede ser sobreyectiva.

Versión de 17 de febrero de 2022, 18:14 h.

Soluciones a ejercicios seleccionados de la sección 2.1

1. 2 filas y 5 columnas (A se multiplica por vectores de 5 elementos, por tanto necesita tener 5 columnas, y el resultado $A\mathbf{x}$ es un vector de dos elementos, por tanto A debe tener dos filas).

2. $a = 5$, $b = 6$.

4. $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$. A cambia de signo a la segunda coordenada de los vectores; geométricamente transforma cada vector en su reflexión sobre el primer eje.

7. Hay que resolver el sistema cuya matriz ampliada es $(A|\mathbf{b})$. Realizando sobre esta matriz ampliada las operaciones elementales $F_2 + 2F_1$, $F_3 - 3F_1$, $F_3 + 2F_2$, $\frac{1}{5}F_3$, $F_2 - 2F_3$ y $F_1 + 2F_3$ se obtiene la forma escalonada reducida: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de la cual se deduce que la solución es única porque el sistema no tiene variables libres y esa solución es:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

11. Necesitamos hallar la forma escalonada reducida de A. Eso se puede hacer realizando las operaciones elementales $F_3 - 2F_1$, $F_3 - 2F_2$, $F_1 + 4F_2$, tras lo cual se llega a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de donde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13. Hay que averiguar si el sistema que tiene la misma matriz A de coeficientes del ejercicio 11 pero con términos independientes el vector $\mathbf{b}$, es compatible. Para ello basta realizar sobre el vector $\mathbf{b}$ las mismas operaciones elementales que llevaban a la matriz de coeficientes a forma escalonada, es decir:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz ampliada del sistema completo es, pues, equivalente a la matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto al no haber un pivote en la última columna, el sistema es compatible.

15. $T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, T transforma cada vector en su opuesto.

16. $T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, T transforma cada vector en su mitad.

19. (a) **Verdadero** (Si la solución es única, la matriz de coeficientes tiene un pivote en cada columna y la aplicación matricial definida por ella es inyectiva. Y recíprocamente —suponiendo ser el sistema compatible.), (b) **Verdadero** (La sobreyectividad directamente significa que existe solución independientemente de cuáles sean los términos independientes.), (c) **Falso** (Eso lo cumplen todas las aplicaciones. "Sobreyectiva" significa que cada vector de $\mathbf{R}^m$ es imagen de algún vector de $\mathbf{R}^n$.), (d) **Falso** (Sí que puede. Bastaría que sus columnas fuesen dos vectores independientes de $\mathbf{R}^3$), (e) **Falso** (A podría ser la matriz nula 4×3.).

20. (a) **Falso** (Solución única implica la ausencia de variables libres, es decir un pivote en cada columna. Para que haya muchas soluciones tiene que haber alguna variable libre.), (b) **Falso** (La propiedad de existencia fuerte de solución es la de sobreyectividad de la aplicación matricial definida por la matriz de coeficientes. No depende de los términos independientes.), (c) **Falso** (Eso lo cumplen todas las aplicaciones. "Inyectiva" significa que cada vector del conjunto imagen es imagen de un único vector de $\mathbf{R}^n$.), (d) **Falso** (Sólo si la aplicación es sobreyectiva. En general es sólo el conjunto imagen.), (e) **Verdadero** (Transformación $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$. Si B es una forma escalonada de A entonces tiene al menos una fila de ceros y con $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$ el sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ es incompatible. Ese es equivalente a uno de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Este vector $\mathbf{b}$ no pertenece a la imagen de $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$.).