Ejercicios de la sección 1.3 Combinaciones lineales de vectores en $\mathbf{R}^n$ y las ecuaciones vectoriales

(Ejercicios para hacer en clase: 7, 9, 11, 13, 17, 20, 22, 26, 27.)
(Ejercicios con solución o indicaciones: 1, 6, 8, 12, 18, 19, 25, 28.)

▶**1.** Demuestra que $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbf{R}^n$.

En los ejercicios 2 y 3, halla $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-2\mathbf{v}$.

2. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

En los ejercicios 4 y 5, representa los siguientes vectores utilizando flechas en una gráfica en el plano xy : $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $-\mathbf{v}$, $-2\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}-2\mathbf{v}$. Observa que $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ es el vértice de un paralelogramo cuyos otros vértices son $\mathbf{u}$, $\mathbf{0}$ y $-\mathbf{v}$.

4. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como en el ejercicio 2.

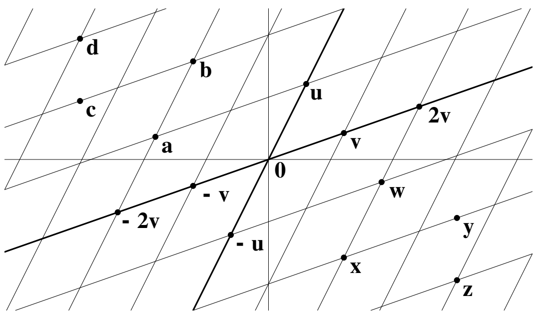
5. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como en el ejercicio 3.

En los ejercicios 6 y 7, escribe un sistema de ecuaciones que sea equivalente a la ecuación vectorial dada.

▶**6.** $x_1\begin{pmatrix}6\\-1\\5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-7\\-5\end{pmatrix}$

▶**7.** $x_1\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Usa la siguiente figura para escribir cada vector indicado en los ejercicios 8 y 9 como una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Es cada vector en $\mathbf{R}^2$ una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$?.



▶**8.** Los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$.

▶**9.** Los vectores $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$.

En los ejercicios 10 y 11, escribe una ecuación vectorial que sea equivalente al sistema de ecuaciones dado.

10.

$$\begin{aligned} x_2+5x_3&=0\\ 4x_1+6x_2-x_3&=0\\ -x_1+3x_2-x_3&=0 \end{aligned}$$

▶**11.**

$$\begin{aligned} 4x_1+x_2+3x_3&=9\\ x_1-7x_2-2x_3&=2\\ x_1+6x_2-5x_3&=15 \end{aligned}$$

En los ejercicios 12 y 13, averigua si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$.

▶**12.** $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\8\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix}$.

▶**13.** $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-5\\11\\-7\end{pmatrix}$.

En los ejercicios 14 y 15, averigua si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de los vectores formados a partir de las columnas de la matriz A.

14. $A=\begin{pmatrix}1&-4&2\\0&3&5\\-2&8&-4\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\-7\\-3\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}1&-2&-6\\0&3&7\\1&-2&5\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}11\\-5\\9\end{pmatrix}$

En los ejercicios 16 y 17, escribe cinco vectores que pertenezcan a Gen$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$. Para cada vector, indica los coeficientes usados con $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ para generar el vector e indica los tres elementos del vector. No hagas ningún bosquejo; trabaja algebraicamente.

16. $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}7\\1\\-6\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-5\\3\\0\end{pmatrix}$

▶**17.** $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$

▶**18.** Halla los valores de h para los que $\mathbf{y}$ estará en Gen$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ si

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}5\\-4\\-7\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}-4\\3\\h\end{pmatrix}$$

▶**19.** Sean $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\-3\\7\end{pmatrix}$ y $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}4\\1\\h\end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de h está $\mathbf{b}$ en el plano generado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$?.

▶**20.** Sean $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\8\end{pmatrix}$ y $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}h\\-5\\-3\end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de h está $\mathbf{b}$ en el plano generado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$?.

21. Da una descripción geométrica del subespacio Gen$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ de $\mathbf{R}^3$ para los vectores

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}8\\2\\-6\end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}12\\3\\-9\end{pmatrix}.$$

▶**22.** Da una descripción geométrica de Gen$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ para los vectores del ejercicio 17.

Versión de 17 de enero de 2023, 5:47 h.

23. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Demuestra que el vector $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ está en Gen$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ para todos los valores de h y k.

24. Construye una matriz A de 3×3, con todos los elementos distintos de cero, y un vector $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^3$ tal que $\mathbf{b}$ no esté en el conjunto generado por las columnas de A.

En los ejercicios 25 y 26, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica cada una de tus respuestas.

►25.

(a) Una notación equivalente para el vector $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ es $[-4 \;\; 3]$.

(b) Los puntos en el plano correspondientes a $(-2, 5)$ y $(-5, 2)$ están sobre una recta que pasa por el origen.

(c) Un ejemplo de una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es el vector $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1$.

(d) El conjunto solución del sistema cuya matriz ampliada es $[\mathbf{a}_1 \; \mathbf{a}_2 \; \mathbf{a}_3 \; \mathbf{b}]$ es igual al conjunto solución de la ecuación vectorial $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$.

(e) Cualesquiera que sean los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ el conjunto generado por ellos, Gen$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, siempre representa un plano que pasa por el origen.

►26.

(a) Cualquier lista de cinco números reales es un vector en $\mathbf{R}^3$.

(b) El vector $\mathbf{u}$ se obtiene cuando al vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ se le suma el vector $\mathbf{v}$.

(c) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores distintos de cero, Gen$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ contiene la recta que pasa por $\mathbf{u}$ y por el origen.

(d) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores distintos ambos no nulos, Gen$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ contiene la recta que pasa por $\mathbf{u}$ y por $\mathbf{v}$.

(e) Preguntar si el sistema correspondiente a una matriz ampliada $[\mathbf{a}_1 \; \mathbf{a}_2 \; \mathbf{a}_3 \; \mathbf{b}]$ tiene alguna solución es lo mismo que preguntar si $\mathbf{b}$ está en el conjunto generado Gen$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

►27. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Denotemos las columnas de A mediante $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, y sea $W = \text{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

(a) ¿Está $\mathbf{b}$ en W? ¿Cuántos vectores hay en W?.

(b) Demuestra que $\mathbf{a}_1$ está en W. [Indicación: No se requieren operaciones de fila.]

►28. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, sea $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, y sea W el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

(a) ¿Está $\mathbf{b}$ en W?.

(b) Demuestra que la tercera columna de A está en W.

29. Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ puntos en $\mathbf{R}^3$, y supongamos que para $j = 1, \ldots, k$ un objeto de masa m_j, se localiza en el punto $\mathbf{v}_j$. Los físicos llaman a tales objetos masas puntuales. La masa total del sistema es

$$m = m_1 + \cdots + m_k$$

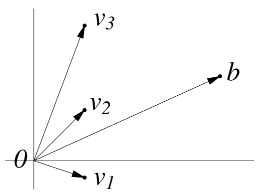
El centro de gravedad (o centro de masa) del sistema es

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + \cdots + m_k\mathbf{v}_k}{m}.$$

Calcula el centro de gravedad del sistema constituido por las siguientes masas puntuales:

Punto	Masa
$\mathbf{v}_1 = (5, -4, 3)$	2 g
$\mathbf{v}_2 = (4, 3, -2)$	5 g
$\mathbf{v}_3 = (-4, -3, -1)$	2 g
$\mathbf{v}_4 = (-9, 8, 6)$	1 g

30. Considera los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^2$ que se muestran en la figura. La ecuación vectorial $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$, ¿tiene alguna solución?. En caso afirmativo, ¿es única?. Utiliza la figura para explicar tus respuestas.



31. Usa los vectores $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ para verificar las siguientes propiedades algebraicas de $\mathbf{R}^n$.

(a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$,

(b) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ para cada número c.

32. Usa el vector $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ para verificar las siguientes propiedades algebraicas de $\mathbf{R}^n$.

(a) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = 0$,

(b) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ para cualesquiera números c y d.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 1.3

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+u_1 \\ \vdots \\ v_n+u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$.

6. El sistema es:

$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 &= -7 \\ 5x_1 &= -5 \end{aligned}$$

8. $\mathbf{a} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{u} - \frac{7}{2}\mathbf{v}$, $\mathbf{d} = 3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$.

12. Basta poner la matriz $[\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3\ \ \mathbf{b}]$ en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma escalonada no tiene un pivote en la columna de los términos independientes (la de la derecha), luego el sistema es compatible y el vector $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$.

18. El vector $\mathbf{y}$ estará en $\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ si y sólo si el sistema de matriz $[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3\ \ \mathbf{y}]$ es compatible. Ponemos esa matriz en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & h \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & h-8 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-5 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible si y sólo si $h = 5$ por tanto el único valor de h para el que $\mathbf{y}$ está en $\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es $h = 5$.

19. Basta poner la matriz $[\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{b}]$ en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & h \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 3 & h+8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & h+17 \end{pmatrix}.$$

Para que no haya pivote en la columna de la derecha tiene que ser $h = -17$.

25. (a) La notación equivalente es $(-4, 3)$, (b) Estos puntos no están alineados con el origen porque no son uno múltiplo del otro, (c) El coeficiente de $\mathbf{v}_2$ es cero, (d) Recuérdese la definición del producto matriz por vector, (e) Es una recta si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son proporcionales y no ambos nulos y es un punto si ambos son nulos.

28. (a) Basta poner la matriz $(A|\mathbf{b})$ en forma escalonada para averiguar si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible. En este caso se obtiene que sí lo es por lo que $\mathbf{b}$ sí está en W. (b) Si llamamos $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ a las columnas de A, se cumple $\mathbf{a}_3 = 0\,\mathbf{a}_1 + 0\,\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, luego es combinación lineal de las columnas de A, luego está en W.