Departamento de Matemáticas. Universidade de Vigo.
Análise Matemática. Grao en Enxenería Informática.
Curso 2021-2022.

Entrega 2: semana del 27 de septiembre al 01 de octubre.

1. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que se cumpla:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{a\cdot n^2} = \mathrm{e}.$$

2. Considérese la sucesión dada por recurrencia

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = 4 - \frac{2}{x_n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

   a) Probar por inducción que x_n es creciente.

   b) Suponiendo que $\{x_n\}$ está acotada justificar que es convergente y calcular su límite.

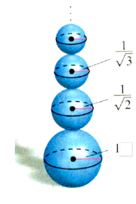
3. Justificar el carácter (convergente o no) de las siguientes series. Cuando sea posible calcular la suma de la serie:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+2)!} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+4}{n(n+3)}\right)^n \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}+5}{4^n}$$

4. Supongamos que se apila una sucesión infinita de esferas de radio $r_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, cada una encima de la anterior.

   a) ¿La altura de la pila es finita o infinita?

   b) ¿La suma de las áreas superficiales de todas las esferas es finita o infinita? (Nota: el área superficial de una esfera de radio r es $A = 4\pi r^2$).



   c) ¿La suma de los volúmenes de todas las esferas es finita o infinita? (Nota: el volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

   Indicación: escribir las series que representan la altura, el área y el volumen de la pila y usar el criterio visto en clase para la serie armónica generalizada.