# Capítulo 4

# Funciones reales de variable real: límites y continuidad

## 4.1. Funciones reales de variable real

### 4.1.1. Introducción

Una función

$$f : A \to B$$

consiste en dos conjuntos, el *dominio*

$$A = Dom(f)$$

y el *rango*

$$B = Rang(f),$$

y en una *regla* que asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento $y \in B$. Esta correspondencia se denota como $y = f(x)$ o $x \to f(x)$.

Se define la imagen de $f$ como el conjunto

$$Im(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Si $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ son subconjuntos de números reales, se dice que $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real de una variable real.

DEFINICIÓN 4.1.1. *La función $f : A \to B$, donde $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$, se dice que es:*

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

2. *Sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A / f(x) = y$.

3. *Biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*

4. *Creciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

5. *Decreciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

6. *Estrictamente creciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

7. *Estrictamente decreciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

8. *Monótona si y sólo si es creciente o decreciente.*

9. *Estrictamente monótona si y sólo si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

10. *Acotada superiormente* $\Leftrightarrow \exists M > 0 \,/\, f(x) \leq M \quad \forall x \in A$.

11. *Acotada inferiormente* $\Leftrightarrow \exists m > 0 \,/\, m \leq f(x) \quad \forall x \in A$.

12. *Acotada si y sólo si es acotada superior e inferiormente.*

DEFINICIÓN 4.1.2. *Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ de tal forma que $B \subset C$ se define la función compuesta $g \circ f : A \to D$ como*

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad \forall x \in A.$$

DEFINICIÓN 4.1.3. *Dada $f : A \to B$ se dice que $f^{-1} : B \to A$ es la función inversa de $f$ si*

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A \quad y \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in B.$$

PROPOSICIÓN 4.1.1. *Dada $f : A \to B$ existe su función inversa $f^{-1} : B \to A$ si y sólo si $f$ es biyectiva.*

### 4.1.2. Límite de una función real de variable real

DEFINICIÓN 4.1.4 (**Definición de límite**). *Sean $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Se dice que el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $x_0$ es igual a $l \in \mathbb{R}$ (se escribe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ ó $f(x) \to l$ cuando $x$ tiende a $x_0$) si*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

*En otras palabras, $f(x)$ está tan próximo del límite $l$ "como nosotros queramos" siempre que $x \neq x_0$ esté "suficientemente próximo" a $x_0$.*

En la definición de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ no importa $f(x_0)$ (el valor de $f$ en $x_0$), sólo importan los valores de $f$ en los puntos $x$ próximos a $x_0$, pero con $x \neq x_0$.

DEFINICIÓN 4.1.5 (**Definición de límites laterales**). *Se definen los límites laterales por la izquierda y por la derecha, respectivamente, como*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

PROPOSICIÓN 4.1.2. $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)}$

*Por tanto si no existe alguno de los límites laterales o existen pero son distintos no existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.*

Las reglas aritméticas para el cálculo de límites de funciones son las siguientes.

PROPOSICIÓN 4.1.3. *Sean $f, g : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a,b)$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ entonces:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c\, l_1,\ \forall c \in \mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$.

*4.* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$, *siempre que* $l_2 \neq 0$.

Ejercicio 4.1.1. *Calcular los siguientes límites:*

*1.* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - x^2}{\sqrt{x}}$

*2.* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - x^2}{x - \sqrt{x}}$

## 4.2. Asíntotas de funciones

### 4.2.1. Asíntotas verticales

Definición 4.2.1. *Sean* $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a, b)$. *Se dice que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\, \exists \delta = \delta(M) > 0 \,/\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Ejercicio 4.2.1. *Escribir las definiciones de* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ *y* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

Diremos que la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de la función $f$ si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ ó $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

Ejercicio 4.2.2. *Calcular las asíntontas verticales de la función* $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + x - 2}$.

### 4.2.2. Asíntotas horizontales

Ejemplo 4.2.1. *Calcular las asíntontas horizontales de las siguientes funciones:*

*a)* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

*b)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$.

### 4.2.3. Asíntotas oblicuas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, donde suponemos que $A$ es un conjunto no acotado. Diremos que la recta $y = m\,x + n$, $(m \neq 0)$, es una *asíntota oblicua* de la gráfica $y = f(x)$ en la dirección $x \to +\infty$, si se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - m\,x - n) = 0. \tag{4.2.1}$$

De (4.2.1) se deduce que $y = m\,x + n$ es una asíntota oblícua de la función $y = f(x)$ en la dirección $x \to +\infty$ si, y solamente si, se cumplen las siguientes condiciones

I) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$,

II) $m = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x$,

III) $n = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - m\,x)$.

De igual forma se definen las asíntotas oblicuas en la dirección $x \to -\infty$.

Ejemplo 4.2.2.

- *Determinar las asíntotas de la función* $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Ejemplo 4.2.3.

- *Calcular las asíntotas de la función* $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

## 4.3. Continuidad de funciones de una variable real

Definición 4.3.1 (**Función continua**). *Sean $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Se dice que $f$ es continua en $x_0$ si*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

*Diremos que $f$ es continua en $(a, b)$ si es continua en cada punto $x_0 \in (a, b)$.*

Intuitivamente la condición anterior nos dice $f(x)$ está "arbitrariamente próximo" a $f(x_0)$ siempre que $x$ esté "suficientemente próximo" a $x_0$. La relación fundamental entre límites y continuidad se expresa en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.3.1. $\boxed{f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

Las funciones continuas poseen las siguientes propiedades.

PROPOSICIÓN 4.3.1. *Sean $f$, $g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Si $f$ y $g$ son funciones continuas en $x_0$ entonces:*

1. *$f \pm g$ es una función continua en $x_0$.*
2. *$f \cdot g$ es una función continua en $x_0$.*
3. *$\dfrac{f}{g}$ es una función continua en $x_0$, siempre que $g(x_0) \neq 0$.*

La composición de funciones continuas también es continua.

PROPOSICIÓN 4.3.2. *Sean $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : (c, d) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ y $f((a, b)) \subset (c, d)$.*

*Si $f$ es continua en $x_0$ y $g$ es continua en $f(x_0)$ entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en $x_0$.*

OBSERVACIÓN 4.3.1. *Todas las funciones elementales (potencias, exponenciales, logaritmos, trigonométricas, trigonométricas inversas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas) son continuas en su dominio, así como aquellas funciones que se obtienen combinando las anteriores mediante sumas, productos, cocientes (con denominador distinto de cero) y composiciones. Las principales propiedades de las funciones elementales, así como sus dominios e imágenes se suponen conocidas.*

El siguiente resultado es de gran importancia en el cálculo de límites porque nos dice que si $f$ es continua entonces podemos intercambiar la función con el límite.

TEOREMA 4.3.2 (**Continuidad y cálculo de límites**). *Sean $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ y $\{x_n\} \subset (a, b)$ tal que $\{x_n\} \to x_0$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0).$$

### 4.3.1. Clasificación de las discontinuidades

Las discontinuidades de una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ en el punto $x_0 \in (a, b)$ pueden clasificarse en los siguientes tipos:

1. **Discontinuidad evitable**: existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, pero $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Este tipo de discontinuidad se llama evitable porque redefiniendo $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se evita la discontinuidad (cambiando el valor de la función en un único punto la función se hace continua).

2. **Discontinuidad esencial de primera especie**: puede ser de dos tipos.

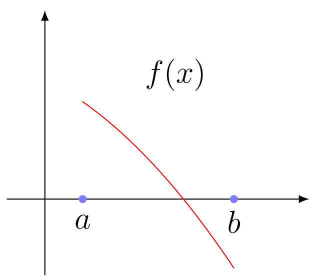
   **De salto**: existen los límites laterales, pero $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. Se dice que que el salto es **finito** si los dos límites laterales son finitos, mientras que si alguno de ellos es infinito se dice que el salto es **infinito**.

   **De tipo infinito**: si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

3. **Discontinuidad esencial de segunda especie**: al menos uno de los límites laterales $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ó $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ no existe.

### 4.3.2. Dos teoremas fundamentales sobre funciones continuas

TEOREMA 4.3.3 (**Teorema de Bolzano**). *Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = 0$.*



Ejercicio 4.3.1. *Un alumno de la ESEI (que no ha cursado AM) necesita probar que el siguiente polinomio tiene alguna raíz real*

$$p(x) = -3x^4 + \bullet x^3 + \bullet x^2 + \bullet x + 7,$$

*es decir, que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p(\alpha) = 0$. Sin embargo unas inoportunas manchas de tinta han ocultado varios de los coeficientes del polinomio, por lo que no sabe cómo resolver la tarea. Ayudar al alumno demostrando que el resultado que necesita se deduce del Teorema de Bolzano sin necesidad de conocer los coeficientes ocultos.*

Ejemplo 4.3.1. *Una aplicación curiosa del Teorema de Bolzano:*

`http://gaussianos.com/una-de-humor-matematico-ii/`

Como consecuencia inmediata del teorema de Bolzano se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.3.1 (Teorema del valor intermedio para funciones continuas). *Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) < c < f(b)$ (o bien $f(a) > c > f(b)$). Entonces existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.*

Otro teorema importante sobre funciones continuas es el siguiente.

Teorema 4.3.4 (**Teorema de Weierstrass**). *Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$.*

*Entonces $f$ alcanza sus valores máximo y mínimo en el intervalo $[a, b]$, es decir, existen $x_0$, $x_1 \in [a, b]$ tales que*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad \forall x \in [a, b].$$

Ejercicio 4.3.2. *Encontrar ejemplos de funciones $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no alcancen sus valores máximo y mínimo y que además cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$A$ es un intervalo acotado y $f$ es continua.*
2. *$A$ es un intervalo cerrado y $f$ es continua.*
3. *$A$ es un intervalo cerrado y acotado y $f$ es continua salvo en un punto de $A$.*
4. *$f$ es continua y acotada.*

*En cada caso, ¿que hipótesis del Teorema de Weierstrass no se cumple?*