Nombre y apellidos: ______________________________ DNI: ____________

(2 pt.) **1.** Supongamos que tenemos dos sistemas de ecuaciones lineales: (I) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y (II) $B\mathbf{x} = \mathbf{d}$ y después de realizar varias operaciones elementales de filas sobre la matriz ampliada de cada uno de ellos se han obtenido las siguientes matrices:

$$\text{Para el sistema (I):} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{Para el sistema (II):} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cada uno de los dos sistemas contesta razonadamente los siguientes apartados. Si en el enunciado no hay información suficiente para poder contestar, explica por qué no hay información suficiente.

(0.25 pt.) (a) Halla el vector de términos independientes del sistema original.

(0.25 pt.) (b) La matriz que se ha obtenido ¿es una matriz escalonada? ¿es escalonada reducida?

(0.25 pt.) (c) ¿El sistema original era compatible?

(0.25 pt.) (d) Si se modificasen los términos independientes del sistema original ¿podría el sistema resultante ser incompatible?

(1 pt.) (e) Escribe la solución general de cada uno de los sistemas homogéneos $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en forma paramétrica vectorial

---

(2 pt.) **2.** Calcula la forma escalonada reducida de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 9 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

(2 pt.) **3.** Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2 pt.) **4.** Sabiendo que las matrices A y B dadas a continuación

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & -5 \\ 2 & 8 & 0 & -7 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & -12 & -8 \\ -2 & 4 & -1 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & -5 \\ 0 & 9 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pueden obtener una de la otra mediante operaciones elementales de filas y siendo $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ la aplicación lineal definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, contesta a los siguientes apartados justificando tu respuesta:

(0.4 pt.) (a) ¿Es T inyectiva? ¿Es T sobreyectiva?

(0.4 pt.) (b) Escribe el conjunto de las columnas pivote de A y escribe el conjunto de las columnas pivote de B.

(0.4 pt.) (c) ¿Son compatibles todos los sistemas de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que se pueden formar eligiendo para $\mathbf{b}$ todos los vectores de $\mathbf{R}^4$?

(0.4 pt.) (d) ¿Son las columnas de A linealmente independientes? ¿Son las filas de B linealmente independientes?

(0.4 pt.) (e) ¿Tiene alguna solución no trivial el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

(2 pt.) **5.** Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & -1 \\ -2 & -9 & 5 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

(1.5 pt.) (a) Calcula la factorización LU de A (calcula la matriz L y la matriz U).

(0.5 pt.) (b) Comprueba que el producto LU es igual a A.
