Ejercicios de la sección 7.1 Producto escalar y ortogonalidad

(Para hacer en clase: 5, 7, 10, 14, 15, 19, 21, 23, 26, 27, 29.)
(Con solución o indicaciones: 6, 8, 11, 13, 16, 20, 22, 25, 27, 30.)

En los ejercicios 1 a 8, calcula las cantidades indicadas usando los siguientes vectores:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix},\ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ y $\dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.

2. $\dfrac{1}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u}$.

3. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}$ y $\dfrac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$.

4. $\dfrac{1}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\mathbf{w}$.

►**5.** $\left(\dfrac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}\right)\mathbf{x}$.

►**6.** $\left(\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\right)\mathbf{v}$.

►**7.** $\|\mathbf{w}\|$.

►**8.** $\|\mathbf{x}\|$.

En los ejercicios 9 a 12, halla un vector unitario en la dirección del vector dado:

9. $\begin{pmatrix} -30 \\ 40 \end{pmatrix}$.

►**10.** $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

►**11.** $\begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 8/3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

►**13.** Calcula la distancia entre los vectores

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

►**14.** Calcula la distancia entre los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

En los ejercicios 15 a 18 averigua si los dos vectores dados son ortogonales:

►**15.** $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

►**16.** $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

17. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

18. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 15 \\ -7 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 19 y 20 todos los vectores son de $\mathbf{R}^n$. Indica para cada afirmación si es verdadera o falsa, justificando tus respuestas.

►**19.**

(a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$.

(b) Para cualquier escalar c, se cumple $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

(c) Si la distancia de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ es igual a la distancia de $\mathbf{u}$ a $-\mathbf{v}$ entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

(d) Para cualquier matriz cuadrada A, los vectores de Col A son ortogonales a los de Nul A.

(e) Si los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ generan un subespacio W y si $\mathbf{x}$ es ortogonal a cada $\mathbf{v}_j$ para $j = 1, \ldots, p$ entonces $\mathbf{x}$ pertenece a $W^\perp$.

►**20.**

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$.

(b) Para cualquier escalar c, se cumple $\|c\mathbf{v}\| = c\|\mathbf{v}\|$.

(c) Si $\mathbf{x}$ es ortogonal a cada vector de un subespacio W, entonces $\mathbf{x}$ pertenece a $W^\perp$.

(d) Si $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$ entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

(e) Para cualquier matriz $m \times n$ A, los vectores del espacio nulo de A son ortogonales a los vectores del espacio fila de A.

►**21.** Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Explica por qué $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$. ¿En qué caso se cumpliría $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$?

►**22.** Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Calcula $\|\mathbf{u}\|^2$, $\|\mathbf{v}\|^2$, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Explica los resultados.

►**23.** Demuestra la *ley del paralelogramo* para vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbf{R}^n$:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2.$$

24. Describe geométricamente el conjunto H de los vectores $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ que son perpendiculares a un vector dado $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ en $\mathbf{R}^2$. Considera separadamente los casos $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

►**25.** Sea $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ y sea W el conjunto de todos los vectores $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^3$ tales que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$. Describe W geométricamente. ¿Cuál es la matriz de la que W es el espacio nulo?

►**26.** Supongamos que $\mathbf{y}$ es un vector ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$. Demuestra que $\mathbf{y}$ es ortogonal a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

►**27.** Supongamos que $\mathbf{y}$ es un vector ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$. Demuestra que $\mathbf{y}$ es ortogonal a todo vector $\mathbf{w}$ de Gen$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

28. Supongamos que $\mathbf{x}$ es un vector ortogonal a cada uno de los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$. Demuestra que $\mathbf{x}$ es ortogonal a todo vector $\mathbf{w}$ de $W = $ Gen$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$.

Versión de 19 de enero de 2023, 12:11 h.

▶**29.** Sea W un subespacio de $\mathbf{R}^n$ y sea $W^\perp$ su *complemento ortogonal* (conjunto de todos los vectores ortogonales a W). Sigue los siguientes pasos para demostrar que $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbf{R}^n$:

(a) Sea $\mathbf{z} \in W^\perp$ y sea $\mathbf{u}$ un vector cualquiera de W. Entonces $\mathbf{z} \cdot \mathbf{u} = 0$. Si c es un escalar, demuestra que $c\mathbf{z}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$. (Puesto que $\mathbf{u}$ es arbitrario, esto demuestra que $c\mathbf{z}$ pertenece a $W^\perp$.)

(b) Sean $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in W^\perp$ y sea $\mathbf{u}$ un vector cualquiera de W. Demuestra que $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$ es ortogonal a $\mathbf{u}$. (¿Qué se deduce de esto acerca de $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$.)

(c) Completa la demostración de que $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbf{R}^n$.

▶**30.** Demuestra que si $\mathbf{x}$ pertenece a W y a $W^\perp$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 7.1

6. $\begin{pmatrix} 8/13 \\ 12/13 \end{pmatrix}$.

8. $\|\mathbf{x}\| = 7$.

11. $\begin{pmatrix} 7/\sqrt{69} \\ 2/\sqrt{69} \\ 4/\sqrt{69} \end{pmatrix}$.

13. $\sqrt{185}$.

16. Lo son porque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

20. (a) Recuérdese la propiedad de simetría del producto escalar, (b) Sólo si c no es negativo. Debía decir $\|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|$, (c) Recuérdese la definición del espacio ortogonal a W, (d) Piénsese en el recíproco del teorema de Pitágoras, (e) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ implica que cada fila de A es ortogonal a $\mathbf{x}$.

22. $\|\mathbf{u}\|^2 = 30$, $\|\mathbf{v}\|^2 = 101$, $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = 131$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Los resultados cumplen $30 + 101 = 131$. La explicación es el teorema de Pitágoras: Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales y se cumple $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$.

25. Es el plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta de los múltiplos de $\mathbf{u}$. W es el espacio nulo de la matriz de una fila $\mathbf{u}^T$.

27. $\mathbf{w} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$, $\mathbf{y} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{y} \cdot (x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}) = x_1\mathbf{y} \cdot \mathbf{u} + x_2\mathbf{y} \cdot \mathbf{v} = 0 + 0 = 0$.

30. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ por se el producto escalar de un vector de W por un vector de $W^\perp$.