TEMA 4. Continuidad de funciones de una variable real

Análisis Matemático

Profesor: José Ángel Cid

Grao en Enxeñaría Informática
Departamento de Matemáticas
Universidad de Vigo.

Una función

$$f : A \to B$$

consiste en dos conjuntos, el dominio

$$A = Dom(f)$$

y el rango

$$B = Rang(f),$$

y en una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento $y \in B$. Esta correspondencia se denota como $y = f(x)$ o $x \to f(x)$.

Una función

$$f : A \to B$$

consiste en dos conjuntos, el dominio

$$A = Dom(f)$$

y el rango

$$B = Rang(f),$$

y en una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento $y \in B$. Esta correspondencia se denota como $y = f(x)$ o $x \to f(x)$. Se define la imagen de f como el conjunto

$$Im(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Una función

$$f : A \to B$$

consiste en dos conjuntos, el dominio

$$A = Dom(f)$$

y el rango

$$B = Rang(f),$$

y en una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento $y \in B$. Esta correspondencia se denota como $y = f(x)$ o $x \to f(x)$. Se define la imagen de f como el conjunto

$$Im(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Si $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ son subconjuntos de números reales, se dice que $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función real de una variable real.

Definición

La función $f : A \to B$, *donde* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $B \subset \mathbb{R}$, *se dice que es:*

Definición

La función $f : A \to B$, donde $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$, se dice que es:

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

DEFINICIÓN

La función $f : A \to B$*, donde* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $B \subset \mathbb{R}$*, se dice que es:*

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. *Sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A / f(x) = y$.

Definición

La función $f : A \to B$, *donde* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $B \subset \mathbb{R}$, *se dice que es:*

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. *Sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A / f(x) = y$.
3. *Biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*

Definición

La función $f : A \to B$, *donde* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $B \subset \mathbb{R}$, *se dice que es:*

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. *Sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A / f(x) = y$.
3. *Biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*
4. *Creciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definición

La función $f : A \to B$, donde $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$, se dice que es:

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. *Sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A / f(x) = y$.
3. *Biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*
4. *Creciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
5. *Decreciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definición

La función $f : A \to B$, donde $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$, se dice que es:

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. *Sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A / f(x) = y$.
3. *Biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*
4. *Creciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
5. *Decreciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
6. *Estrictamente creciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Definición

La función $f : A \rightarrow B$, donde $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$, se dice que es:

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. *Sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A / f(x) = y$.
3. *Biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*
4. *Creciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
5. *Decreciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
6. *Estrictamente creciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
7. *Estrictamente decreciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Definición

La función $f : A \to B$, *donde* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $B \subset \mathbb{R}$, *se dice que es:*

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. *Sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A / f(x) = y$.
3. *Biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*
4. *Creciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
5. *Decreciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
6. *Estrictamente creciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
7. *Estrictamente decreciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
8. *Monótona si y sólo si es creciente o decreciente.*

Definición

La función $f : A \to B$*, donde* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $B \subset \mathbb{R}$*, se dice que es:*

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. *Sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A / f(x) = y$.
3. *Biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*
4. *Creciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
5. *Decreciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
6. *Estrictamente creciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
7. *Estrictamente decreciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
8. *Monótona si y sólo si es creciente o decreciente.*
9. *Estrictamente monótona si y sólo si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

Definición

La función $f : A \to B$, *donde* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $B \subset \mathbb{R}$, *se dice que es:*

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. *Sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A / f(x) = y$.
3. *Biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*
4. *Creciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
5. *Decreciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
6. *Estrictamente creciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
7. *Estrictamente decreciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
8. *Monótona si y sólo si es creciente o decreciente.*
9. *Estrictamente monótona si y sólo si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*
10. *Acotada superiormente* $\Leftrightarrow \exists M > 0 \,/\, f(x) \leq M \quad \forall x \in A$.

Definición

La función $f : A \to B$, *donde* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $B \subset \mathbb{R}$, *se dice que es:*

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. *Sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A / f(x) = y$.
3. *Biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*
4. *Creciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
5. *Decreciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
6. *Estrictamente creciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
7. *Estrictamente decreciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
8. *Monótona si y sólo si es creciente o decreciente.*
9. *Estrictamente monótona si y sólo si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*
10. *Acotada superiormente* $\Leftrightarrow \exists M > 0 \, / \, f(x) \leq M \quad \forall x \in A$.
11. *Acotada inferiormente* $\Leftrightarrow \exists m > 0 \, / \, m \leq f(x) \quad \forall x \in A$.

Definición

La función $f : A \to B$, donde $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$, se dice que es:

1. *Inyectiva* $\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. *Sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A / f(x) = y$.
3. *Biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.*
4. *Creciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
5. *Decreciente* $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
6. *Estrictamente creciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
7. *Estrictamente decreciente* $\Leftrightarrow x_1 < x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
8. *Monótona si y sólo si es creciente o decreciente.*
9. *Estrictamente monótona si y sólo si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*
10. *Acotada superiormente* $\Leftrightarrow \exists M > 0 \,/\, f(x) \leq M \quad \forall x \in A$.
11. *Acotada inferiormente* $\Leftrightarrow \exists m > 0 \,/\, m \leq f(x) \quad \forall x \in A$.
12. *Acotada si y sólo si es acotada superior e inferiormente.*

Definición

Dadas dos funciones $f : A \to B$ *y* $g : C \to D$ *de tal forma que* $B \subset C$ *se define la función compuesta* $g \circ f : A \to D$ *como*

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad \forall x \in A.$$

Definición

Dadas dos funciones $f : A \to B$ *y* $g : C \to D$ *de tal forma que* $B \subset C$ *se define la función compuesta* $g \circ f : A \to D$ *como*

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad \forall x \in A.$$

Definición

Dada $f : A \to B$ *se dice que* $f^{-1} : B \to A$ *es la función inversa de* f *si*

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A \quad y \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in B.$$

Definición

Dadas dos funciones $f : A \to B$ *y* $g : C \to D$ *de tal forma que* $B \subset C$ *se define la función compuesta* $g \circ f : A \to D$ *como*

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad \forall x \in A.$$

Definición

Dada $f : A \to B$ *se dice que* $f^{-1} : B \to A$ *es la función inversa de* f *si*

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A \quad y \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in B.$$

Proposición

Dada $f : A \to B$ *existe su función inversa* $f^{-1} : B \to A$ *si y sólo si* f *es biyectiva.*

Definición (**Definición de límite**)

Sean $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a,b)$. *Se dice que el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* x_0 *es igual a* $l \in \mathbb{R}$ *(se escribe* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *ó* $f(x) \to l$ *cuando* x *tiende a* x_0*) si*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \, / \, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

En otras palabras, $f(x)$ *está tan próximo del límite* l *"como nosotros queramos" siempre que* $x \neq x_0$ *esté "suficientemente próximo" a* x_0.

Definición (**Definición de límite**)

Sean $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *y* $x_0\in(a,b)$. *Se dice que el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* x_0 *es igual a* $l\in\mathbb{R}$ *(se escribe* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ *ó* $f(x)\to l$ *cuando* x *tiende a* x_0*) si*

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\,/\,0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon.$$

En otras palabras, $f(x)$ *está tan próximo del límite* l *"como nosotros queramos" siempre que* $x\neq x_0$ *esté "suficientemente próximo" a* x_0.

DEFINICIÓN (**Definición de límite**)

Sean $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a,b)$. *Se dice que el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* x_0 *es igual a* $l \in \mathbb{R}$ *(se escribe* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *ó* $f(x) \to l$ *cuando* x *tiende a* x_0*) si*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

En otras palabras, $f(x)$ *está tan próximo del límite* l *"como nosotros queramos" siempre que* $x \neq x_0$ *esté "suficientemente próximo" a* x_0.

En la definición de $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ no importa $f(x_0)$ (el valor de f en x_0), sólo importan los valores de f en los puntos x próximos a x_0, pero con $x \neq x_0$.

DEFINICIÓN (**Definición de límites laterales**)

Se definen los límites laterales por la izquierda y por la derecha, respectivamente, como

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \, / \, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN (**Definición de límites laterales**)

Se definen los límites laterales por la izquierda y por la derecha, respectivamente, como

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Definición (**Definición de límites laterales**)

Se definen los límites laterales por la izquierda y por la derecha, respectivamente, como

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Proposición

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l = \lim_{x\to x_0^+} f(x)}$$

Proposición

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l = \lim_{x\to x_0^+} f(x)}$$

Proposición

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l = \lim_{x\to x_0^+} f(x)}$$

Por tanto si no existe alguno de los límites laterales o existen pero son distintos no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Las reglas aritméticas para el cálculo de límites de funciones son las siguientes.

Proposición

Sean $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a, b)$. *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ *y* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$ *entonces:*

Las reglas aritméticas para el cálculo de límites de funciones son las siguientes.

Proposición

Sean $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a, b)$*. Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ *entonces:*

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$.

Las reglas aritméticas para el cálculo de límites de funciones son las siguientes.

Proposición

Sean $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a, b)$*. Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ *entonces:*

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$.
2. $\lim_{x \to x_0} cf(x) = c\, l_1, \forall c \in \mathbb{R}$.

Las reglas aritméticas para el cálculo de límites de funciones son las siguientes.

PROPOSICIÓN

Sean $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a, b)$. *Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ *entonces:*

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$.
2. $\lim_{x \to x_0} cf(x) = c\, l_1, \ \forall c \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$.

Las reglas aritméticas para el cálculo de límites de funciones son las siguientes.

Proposición

Sean $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a, b)$*. Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ *entonces:*

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$.
2. $\lim_{x \to x_0} cf(x) = c\, l_1, \forall c \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$.
4. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$, *siempre que* $l_2 \neq 0$.

Ejercicio

Calcular los siguientes límites:

Ejercicio

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x - x^2}{\sqrt{x}}$

Ejercicio

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - x^2}{\sqrt{x}}$
2. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - x^2}{x - \sqrt{x}}$

Asíntotas Verticales

Definición

Sean $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a,b)$. *Se dice que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \, \exists \delta = \delta(M) > 0 \, / \, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Ejercicio

Escribir las definiciones de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

Asíntotas Verticales

Diremos que la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de la función f si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ ó $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

Ejercicio

Calcular las asíntontas verticales de la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$.

Asíntotas Horizontales

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Si A no está acotado superiormente, entonces podemos estudiar el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ con $x \in A$. En tal caso, diremos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \tag{2.1}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M = M(\varepsilon) > 0 \, : \, x \in A, \, x > M \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Asíntotas Horizontales

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Si A no está acotado superiormente, entonces podemos estudiar el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ con $x \in A$. En tal caso, diremos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \tag{2.1}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M = M(\varepsilon) > 0 \,:\, x \in A,\, x > M \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Análogamente, si A no está acotado inferiormente, podemos estudiar el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to -\infty$ con $x \in A$. En tal caso, diremos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \tag{2.2}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M = M(\varepsilon) < 0 \,:\, x \in A,\, x < M \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Asíntotas Horizontales

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Si A no está acotado superiormente, entonces podemos estudiar el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ con $x \in A$. En tal caso, diremos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \tag{2.1}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M = M(\varepsilon) > 0 \, : \, x \in A, \, x > M \; \Rightarrow \; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Análogamente, si A no está acotado inferiormente, podemos estudiar el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to -\infty$ con $x \in A$. En tal caso, diremos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \tag{2.2}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M = M(\varepsilon) < 0 \, : \, x \in A, \, x < M \; \Rightarrow \; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Si se cumple (2.1) o (2.2) se dice que la recta $y = L$ es una *asíntota horizontal* de la gráfica $y = f(x)$ en la dirección $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, respectivamente.

Ejemplo

Calcular las asíntontas horizontales de las siguientes funciones:

Ejemplo

Calcular las asíntontas horizontales de las siguientes funciones:

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Ejemplo

Calcular las asíntontas horizontales de las siguientes funciones:

1. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}.$
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}.$

Asíntotas Oblicuas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, donde suponemos que A es un conjunto no acotado. Diremos que la recta $y = mx + n$, $(m \neq 0)$, es una asíntota oblicua de la gráfica $y = f(x)$ en la dirección $x \to +\infty$, si se cumple que

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - n) = 0. \tag{2.3}$$

Asíntotas Oblicuas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, donde suponemos que A es un conjunto no acotado. Diremos que la recta $y = m\,x + n$, $(m \neq 0)$, es una asíntota oblicua de la gráfica $y = f(x)$ en la dirección $x \to +\infty$, si se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - m\,x - n) = 0. \tag{2.3}$$

De (2.3) se deduce que $y = m\,x + n$ es una asíntota oblícua de la función $y = f(x)$ en la dirección $x \to +\infty$ si, y solamente si, se cumplen las siguientes condiciones

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$,

De igual forma se definen las asíntotas oblicuas en la dirección $x \to -\infty$.

Asíntotas Oblicuas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, donde suponemos que A es un conjunto no acotado. Diremos que la recta $y = m\,x + n$, $(m \neq 0)$, es una asíntota oblicua de la gráfica $y = f(x)$ en la dirección $x \to +\infty$, si se cumple que

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - m\,x - n) = 0. \tag{2.3}$$

De (2.3) se deduce que $y = m\,x + n$ es una asíntota oblícua de la función $y = f(x)$ en la dirección $x \to +\infty$ si, y solamente si, se cumplen las siguientes condiciones

1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$,
2. $m = \lim_{x \to +\infty} f(x)/x$,

De igual forma se definen las asíntotas oblicuas en la dirección $x \to -\infty$.

Asíntotas Oblicuas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, donde suponemos que A es un conjunto no acotado. Diremos que la recta $y = m\,x + n$, $(m \neq 0)$, es una asíntota oblicua de la gráfica $y = f(x)$ en la dirección $x \to +\infty$, si se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - m\,x - n) = 0. \tag{2.3}$$

De (2.3) se deduce que $y = m\,x + n$ es una asíntota oblícua de la función $y = f(x)$ en la dirección $x \to +\infty$ si, y solamente si, se cumplen las siguientes condiciones

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$,
2. $m = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x$,
3. $n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - m\,x)$.

De igual forma se definen las asíntotas oblicuas en la dirección $x \to -\infty$.

Ejemplo

Ejemplo

- *Determinar las asíntotas de la función* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Ejemplo

Ejemplo

- *Calcular las asíntotas de la función* $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Definición (Función continua)

Sean $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Se dice que f es continua en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \, / \, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Diremos que f es continua en (a, b) si es continua en cada punto $x_0 \in (a, b)$.

Intuitivamente la condición anterior nos dice $f(x)$ está "arbitrariamente próximo" a $f(x_0)$ siempre que x esté "suficientemente próximo" a x_0. La relación fundamental entre límites y continuidad se expresa en el siguiente teorema.

Teorema

$$\boxed{f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Las funciones continuas poseen las siguientes propiedades.

Teorema

$$\boxed{f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Las funciones continuas poseen las siguientes propiedades.

Proposición

Sean $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a, b)$. *Si* f *y* g *son funciones continuas en* x_0 *entonces:*

Teorema

$$\boxed{f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Las funciones continuas poseen las siguientes propiedades.

Proposición

Sean $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a, b)$. *Si* f *y* g *son funciones continuas en* x_0 *entonces:*

1. $f \pm g$ *es una función continua en* x_0.

Teorema

$$\boxed{f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Las funciones continuas poseen las siguientes propiedades.

Proposición

Sean $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in (a, b)$. *Si* f *y* g *son funciones continuas en* x_0 *entonces:*

1. $f \pm g$ *es una función continua en* x_0.
2. $f \cdot g$ *es una función continua en* x_0.

Teorema

$$\boxed{f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Las funciones continuas poseen las siguientes propiedades.

Proposición

Sean $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Si f y g son funciones continuas en x_0 entonces:

1. *$f \pm g$ es una función continua en x_0.*
2. *$f \cdot g$ es una función continua en x_0.*
3. *$\dfrac{f}{g}$ es una función continua en x_0, siempre que $g(x_0) \neq 0$.*

La composición de funciones continuas también es continua.

PROPOSICIÓN

Sean $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : (c,d) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ *y* $f((a,b)) \subset (c,d)$.
Si f *es continua en* x_0 *y* g *es continua en* $f(x_0)$ *entonces la función compuesta* $g \circ f$ *es continua en* x_0.

Observación

Todas las funciones elementales (potencias, exponenciales, logaritmos, trigonométricas, trigonométricas inversas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas) son continuas en su dominio, así como aquellas funciones que se obtienen combinando las anteriores mediante sumas, productos, cocientes (con denominador distinto de cero) y composiciones. Las principales propiedades de las funciones elementales, así como sus dominios e imágenes se suponen conocidas.

El siguiente resultado es de gran importancia en el cálculo de límites porque nos dice que si f es continua entonces podemos intercambiar la función con el límite.

Teorema (Continuidad y cálculo de límites)

Sean $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ *y* $\{x_n\}\subset(a,b)$ *tal que* $\{x_n\}\to x_0$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0).$$

Las discontinuidades de una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ en el punto $x_0 \in (a, b)$ pueden clasificarse en los siguientes tipos:

1. **Discontinuidad evitable**: existe $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, pero $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Este tipo de discontinuidad se llama evitable porque redefiniendo $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ se evita la discontinuidad (cambiando el valor de la función en un único punto la función se hace continua).

Las discontinuidades de una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ en el punto $x_0\in(a,b)$ pueden clasificarse en los siguientes tipos:

1. **Discontinuidad evitable**: existe $\lim_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}$, pero $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$. Este tipo de discontinuidad se llama evitable porque redefiniendo $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$ se evita la discontinuidad (cambiando el valor de la función en un único punto la función se hace continua).
2. **Discontinuidad esencial de primera especie**: puede ser de dos tipos.

Las discontinuidades de una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ en el punto $x_0 \in (a, b)$ pueden clasificarse en los siguientes tipos:

1. **Discontinuidad evitable**: existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, pero $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Este tipo de discontinuidad se llama evitable porque redefiniendo $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se evita la discontinuidad (cambiando el valor de la función en un único punto la función se hace continua).
2. **Discontinuidad esencial de primera especie**: puede ser de dos tipos.
    - **De salto**: existen los límites laterales, pero $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. Se dice que que el salto es **finito** si los dos límites laterales son finitos, mientras que si alguno de ellos es infinito se dice que el salto es **infinito**.

Las discontinuidades de una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ en el punto $x_0 \in (a, b)$ pueden clasificarse en los siguientes tipos:

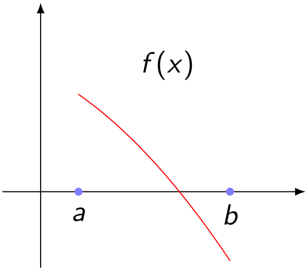
1. **Discontinuidad evitable**: existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, pero $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Este tipo de discontinuidad se llama evitable porque redefiniendo $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se evita la discontinuidad (cambiando el valor de la función en un único punto la función se hace continua).
2. **Discontinuidad esencial de primera especie**: puede ser de dos tipos.
    - **De salto**: existen los límites laterales, pero $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. Se dice que que el salto es **finito** si los dos límites laterales son finitos, mientras que si alguno de ellos es infinito se dice que el salto es **infinito**.
    - **De tipo infinito**: si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Las discontinuidades de una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ en el punto $x_0 \in (a, b)$ pueden clasificarse en los siguientes tipos:

1. **Discontinuidad evitable**: existe $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, pero $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Este tipo de discontinuidad se llama evitable porque redefiniendo $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ se evita la discontinuidad (cambiando el valor de la función en un único punto la función se hace continua).
2. **Discontinuidad esencial de primera especie**: puede ser de dos tipos.
   - **De salto**: existen los límites laterales, pero $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Se dice que que el salto es **finito** si los dos límites laterales son finitos, mientras que si alguno de ellos es infinito se dice que el salto es **infinito**.
   - **De tipo infinito**: si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ó $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.
3. **Discontinuidad esencial de segunda especie**: al menos uno de los límites laterales $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ó $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ no existe.

Teorema (Teorema de Bolzano)

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = 0$.



Como consecuencia inmediata del teorema de Bolzano se obtiene el siguiente resultado.

Corolario (Teorema del valor intermedio para funciones continuas)

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua tal que* $f(a) < c < f(b)$ *(o bien* $f(a) > c > f(b)$*). Entonces existe* $x \in (a, b)$ *tal que* $f(x) = c$*.*

Otro teorema importante sobre funciones continuas es el siguiente.

Teorema (Teorema de Weierstrass)

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua en el intervalo cerrado y acotado* $[a,b]$.

Entonces f *alcanza sus valores máximo y mínimo en el intervalo* $[a,b]$, *es decir, existen* $x_0, x_1 \in [a,b]$ *tales que*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad \forall x \in [a,b].$$