Análise Matemática. Curso 2021-2022.
Grao en Enxenería Informática. ESEI Ourense.
Departamento de Matemáticas. Universidade de Vigo.
Data: 03/11/2021

BLOQUE II

APELIDOS	NOME	DNI	NOTA

1. Considérese a función

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{x-1}, & \text{se } x \le 1, \\ \dfrac{\ln(x)}{x-1}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

a) f é continua en $x = 1$?

SOLUCIÓN: Calculamos $f(1) = 1\,\mathrm{e}^0 = 1$ e os límites laterais

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x\,\mathrm{e}^{x-1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} \overset{\boxed{\text{“}\frac{0}{0}\text{”, L'Hôp.}}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{1/x}{1} = 1.$$

Logo a función é continua en $x = 1$ porque existe o $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

2. f é derivable en $x = 1$?

SOLUCIÓN: Para $x \neq 1$ podemos calcular $f'(x)$ usando as regras de derivación:

$$f'(x) = \begin{cases} (1+x)\,\mathrm{e}^{x-1}, & \text{se } x < 1, \\ \dfrac{\frac{x-1}{x} - \ln(x)}{(x-1)^2}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

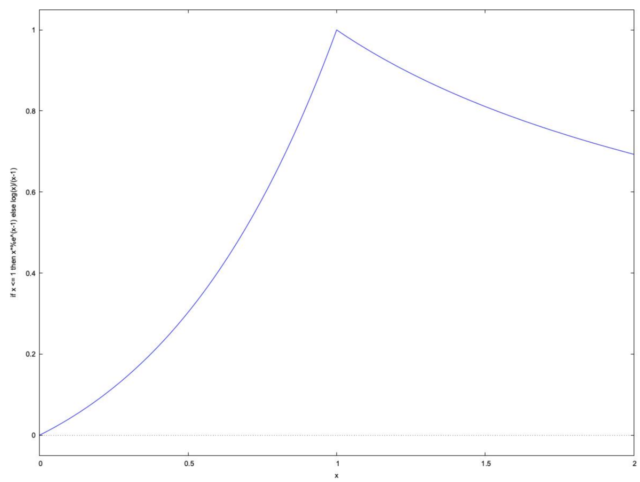
Cómo f é continua en $x = 1$ podemos calcular as derivadas laterais usando os límites laterais de f', é dicir,

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (1+x)\,\mathrm{e}^{x-1} = 2,$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x-1}{x} - \ln(x)}{(x-1)^2} \overset{\boxed{\text{“}\frac{0}{0}\text{”, L'Hôp.}}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1\cdot x-(x-1)\cdot 1}{x^2} - \frac{1}{x}}{2(x-1)},$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2} - \frac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{x-1}{2x^2(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Logo a función non é derivable en $x = 1$ porque $f'(1^-) \neq f'(1^+)$.



Gráfica de f en $[0, 2]$.

1. Calcular a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x}{3+3\,x^4}\,dx$.

   Solución: Facendo o cambio de variable $u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx$ obtense

$$\int \frac{x}{3+3x^4}dx = \frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}dx =$$

$$\frac{1}{6}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}(u) + c = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(x^2) + c.$$

2. Determinar se a integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{3+3\,x^4}\,dx$ é converxente ou diverxente.

   Solución:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{3+3\,x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{x}{3+3\,x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(x^2)\Big]_1^b =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(b^2) - \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}1\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{24},$$

   e polo tanto a integral impropia é converxente.