

## Ejercicios de la sección 1.3 Combinaciones lineales de vectores en $\mathbb{R}^n$ y las ecuaciones vectoriales

(Clase de prácticas: 1, 2, 7, 9, 13, 19, 25, 26.)

- 1. Demuestra que  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  para todos los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en  $\mathbb{R}^n$ .

- 2. Halla los valores de  $h$  para los que  $\mathbf{y}$  estará en  $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  si

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$$

En los ejercicios 3 y 4, halla  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  y  $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ .

3.  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

4.  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 5 y 6, representa los siguientes vectores utilizando flechas en una gráfica en el plano  $xy$ :  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{v}, -2\mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}$  y  $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ . Observa que  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  es el vértice de un paralelogramo cuyos otros vértices son  $\mathbf{u}, \mathbf{0}$  y  $-\mathbf{v}$ .

5.  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  como en el ejercicio 3.

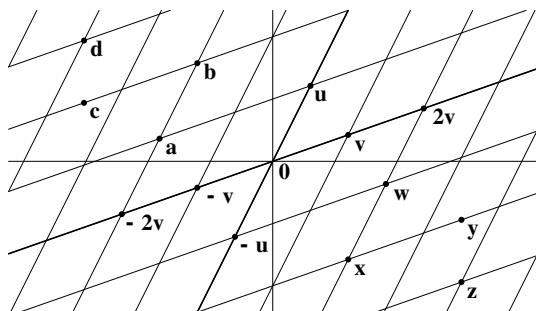
6.  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  como en el ejercicio 4.

En los ejercicios 7 y 8, escribe un sistema de ecuaciones que sea equivalente a la ecuación vectorial dada.

►7.  $x_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$

8.  $x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Usa la siguiente figura para escribir cada vector indicado en los ejercicios 9 y 10 como una combinación lineal de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . ¿Es cada vector en  $\mathbb{R}^2$  una combinación lineal de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ ?



- 9. Los vectores  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$ .

10. Los vectores  $\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$ .

En los ejercicios 11 y 12, escribe una ecuación vectorial que sea equivalente al sistema de ecuaciones dado.

11.

$$\begin{aligned} x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 15 \end{aligned}$$

En los ejercicios 13 y 14, averigua si  $\mathbf{b}$  es una combinación lineal de  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  y  $\mathbf{a}_3$ .

►13.  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

14.  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 15 y 16, averigua si  $\mathbf{b}$  es una combinación lineal de los vectores formados a partir de las columnas de la matriz  $A$ .

15.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

16.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 17 y 18, escribe cinco vectores que pertenezcan a  $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ . Para cada vector, indica los coeficientes usados con  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  para generar el vector e indica los tres elementos del vector. No hagas ningún bosquejo; trabaja algebraicamente.

17.  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

18.  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

- 19. Sean  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}$ . ¿Para qué valores de  $h$  está  $\mathbf{b}$  en el plano generado por  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$ ?

20. Sean  $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ . ¿Para qué valores de  $h$  está  $\mathbf{b}$  en el plano generado por  $\mathbf{a}_1$  y  $\mathbf{a}_2$ ?

21. Da una descripción geométrica del subespacio  $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  de  $\mathbf{R}^3$  para los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

22. Da una descripción geométrica de  $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  para los vectores del ejercicio 18.

23. Sean  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Demuestra que el vector  $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$  está en  $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  para todos los valores de  $h$  y  $k$ .

24. Construye una matriz  $A$  de  $3 \times 3$ , con todos los elementos distintos de cero, y un vector  $\mathbf{b}$  en  $\mathbf{R}^3$  tal que  $\mathbf{b}$  no esté en el conjunto generado por las columnas de  $A$ .

En los ejercicios 25 y 26, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica cada una de tus respuestas.

►25.

- Una notación equivalente para el vector  $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$  es  $[-4 \ 3]$ .
- Los puntos en el plano correspondientes a  $(-2, 5)$  y  $(-5, 2)$  están sobre una recta que pasa por el origen.
- Un ejemplo de una combinación lineal de los vectores  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  es el vector  $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1$ .
- El conjunto solución del sistema cuya matriz ampliada es  $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{b}]$  es igual al conjunto solución de la ecuación vectorial  $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ .
- Cualesquiera que sean los vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  el conjunto generado por ellos,  $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ , siempre representa un plano que pasa por el origen.

►26.

- Cualquier lista de cinco números reales es un vector en  $\mathbf{R}^5$ .
- El vector  $\mathbf{u}$  se obtiene cuando al vector  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  se le suma el vector  $\mathbf{v}$ .
- Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores distintos de cero,  $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  contiene la recta que pasa por  $\mathbf{u}$  y por el origen.
- Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores distintos ambos no nulos,  $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  contiene la recta que pasa por  $\mathbf{u}$  y por  $\mathbf{v}$ .
- Preguntar si el sistema correspondiente a una matriz ampliada  $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{b}]$  tiene alguna solución es lo mismo que preguntar si  $\mathbf{b}$  está en el conjunto generado  $\text{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ .

27. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Denotemos las columnas de  $A$  mediante  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ , y sea  $W = \text{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ .

- ¿Está  $\mathbf{b}$  en  $W$ ? ¿Cuántos vectores hay en  $W$ ?
- Demuestra que  $\mathbf{a}_1$  está en  $W$ . [Indicación: No se requieren operaciones de fila.]

28. Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ , sea  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ , y sea  $W$  el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de  $A$ .

- ¿Está  $\mathbf{b}$  en  $W$ ?
- Demuestra que la tercera columna de  $A$  está en  $W$ .

29. Sean  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  puntos en  $\mathbf{R}^3$ , y supongamos que para  $j = 1, \dots, k$  un objeto de masa  $m_j$ , se localiza en el punto  $\mathbf{v}_j$ . Los físicos llaman a tales objetos masas puntuales. La masa total del sistema es

$$m = m_1 + \dots + m_k$$

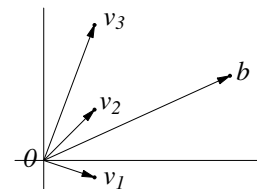
El centro de gravedad (o centro de masa) del sistema es

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + \dots + m_k\mathbf{v}_k}{m}.$$

Calcula el centro de gravedad del sistema constituido por las siguientes masas puntuales:

Punto	Masa
$\mathbf{v}_1 = (5, -4, 3)$	2 g
$\mathbf{v}_2 = (4, 3, -2)$	5 g
$\mathbf{v}_3 = (-4, -3, -1)$	2 g
$\mathbf{v}_4 = (-9, 8, 6)$	1 g

30. Considera los vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  y  $\mathbf{b}$  en  $\mathbf{R}^2$  que se muestran en la figura. La ecuación vectorial  $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ , ¿tiene alguna solución? En caso afirmativo, ¿es única? Utiliza la figura para explicar tus respuestas.



31. Usa los vectores  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  y  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  para verificar las siguientes propiedades algebraicas de  $\mathbf{R}^n$ .

- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ,
- $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$  para cada número  $c$ .

32. Usa el vector  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  para verificar las siguientes propiedades algebraicas de  $\mathbf{R}^n$ .

- $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,
- $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$  para cualesquiera números  $c$  y  $d$ .

## Soluciones a ejercicios seleccionados de la sección 1.3

$$1. \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ \vdots \\ v_n + u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

2. El vector  $\mathbf{y}$  estará en  $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  si y sólo si el sistema de matriz  $[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{y}]$  es compatible. Ponemos esa matriz en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & h-8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-5 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible si y sólo si  $h = 5$  por tanto el único valor de  $h$  para el que  $\mathbf{y}$  está en  $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  es  $h = 5$ .

7. El sistema es:

$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 &= -7 \\ 5x_1 &= -5 \end{aligned}$$

$$9. \mathbf{a} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v}, \mathbf{b} = 2\mathbf{u} - 2\mathbf{v}, \mathbf{c} = 2\mathbf{u} - \frac{7}{2}\mathbf{v}, \mathbf{d} = 3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}.$$

13. Basta poner la matriz  $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{b}]$  en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma escalonada no tiene un pivote en la columna de los términos independientes (la de la derecha), luego el sistema es compatible y el vector  $\mathbf{b}$  es una combinación lineal de  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  y  $\mathbf{a}_3$ .

19. Basta poner la matriz  $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{b}]$  en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & 3 & h+8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & h+17 \end{pmatrix}.$$

Para que no haya pivote en la columna de la derecha tiene que ser  $h = -17$ .

25. (a) **Falso** (La notación equivalente es  $(-4, 3)$ .), (b) **Falso** (Estos puntos no están alineados con el origen porque no son uno múltiplo del otro.), (c) **Verdadero** (El coeficiente de  $\mathbf{v}_2$  es cero.), (d) **Verdadero** (Por definición del producto matriz por vector.), (e) **Falso** (Es una recta si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son proporcionales y no ambos nulos y es un punto si ambos son nulos.).

26. (a) **Falso** (Es de  $\mathbb{R}^5$ .), (b) **Verdadero** ( $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ .), (c) **Verdadero** ( $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  contiene todos los múltiplos de  $\mathbf{u}$ , y esos, si  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , forman la recta que pasa por  $\mathbf{u}$  y por el origen.), (d) **Verdadero** (Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores distintos,  $\mathbf{x} = t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v}$  es la ec. paramétrica de recta que pasa por  $\mathbf{u}$  y por  $\mathbf{v}$ . Los vectores de esa recta son combinaciones lineales de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , luego pertenecen a  $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ .), (e) **Verdadero** (Por la definición de combinación lineal y conjunto generado.).