

## COMBINATORIA

La combinatoria es una parte importante de matemática discreta que se utiliza en la resolución de problemas de enumeración y de recuento.

### 1. FUNDAMENTOS DE COMBINATORIA

En esta sección estudiaremos las técnicas básicas de recuento que son fundamentales en combinatoria.

#### 1.1. Principios básicos de recuento.

**1.1.1** (*Regla del producto*). Utilizando la expresión del cardinal del producto cartesiano de dos conjuntos finitos, se obtiene la *regla del producto*:

Supongamos que una tarea se puede dividir en dos tareas consecutivas. Si hay  $n_1$  formas de realizar la primera tarea y  $n_2$  formas de hacer la segunda tarea después de que la primera haya sido realizada, entonces hay  $n_1 \cdot n_2$  formas de completar la tarea.

**Ejemplo 1.1.2.** En una sala hay 32 ordenadores. Cada ordenador tiene 24 puertos. ¿Cuántos puertos diferentes hay en la sala?

$T_1$  : seleccionar un ordenador  $\Rightarrow n_1 = 32$ .

$T_2$  : seleccionar un puerto en dicho ordenador  $\Rightarrow n_2 = 24$ .

Por la regla del producto, hay  $n_1 \cdot n_2 = 32 \cdot 24 = 768$  puertos.

**Ejemplo 1.1.3.** ¿Cuántas cadenas de bits diferentes hay con longitud 8?

$T_i$  : seleccionar un bit en la posición  $i \Rightarrow n_i = 2$ .

Por la regla del producto, hay

$$\prod_{i=1}^8 n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \cdot n_6 \cdot n_7 \cdot n_8 = 2^8 = 256$$

cadenas de bits diferentes de longitud 8.

**1.1.4** (*Regla de la suma*). Utilizando la expresión del cardinal de la unión de dos conjuntos finitos disjuntos, se obtiene la *regla de la suma*:

Si una tarea se puede realizar de  $n_1$  formas y una segunda tarea se puede realizar de  $n_2$  formas, y si las dos tareas son incompatibles, entonces hay  $n_1 + n_2$  formas de realizar una de las dos tareas.

**Ejemplo 1.1.5.** Un estudiante de la ESEI puede elegir un trabajo fin de grado de entre tres listas. Cada una de las listas contiene, respectivamente, 23, 15 y 19 propuestas de trabajo. ¿Cuántos posibles proyectos tiene el estudiante para elegir?

$$T_i : \text{seleccionar un proyecto de la lista } i \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 23 \\ n_2 = 15 \\ n_3 = 19 \end{cases}.$$

Por la regla de la suma, hay  $n_1 + n_2 + n_3 = 23 + 15 + 19 = 57$  proyectos.

**1.1.6** (*Principio del complementario*). Utilizando la expresión del cardinal del conjunto complementario de uno dado, se obtiene el *principio del complementario*:

Si una tarea se puede realizar de  $n_1$  formas y, exigiendo que cumpla una determinada propiedad se puede realizar de  $n_2$  formas (obsérvese que  $n_1 \geq n_2$ ), entonces el número de veces que se puede realizar la tarea no cumpliendo la propiedad es  $n_1 - n_2$ .

**Ejemplo 1.1.7.** Cada usuario de un ordenador tiene una contraseña, con una longitud de seis caracteres (letras mayúsculas y dígitos). Cada contraseña debe contener al menos un dígito. ¿Cuántas contraseñas distintas admite el sistema?

$$T_1 : \text{seleccionar una contraseña de longitud 6} \xRightarrow{1.1.1} n_1 = 37^6.$$

$$T_2 : \text{seleccionar una contraseña de longitud 6 que no contenga ningún dígito} \xRightarrow{1.1.1} n_2 = 27^6.$$

Por el principio del complementario, el número de contraseñas es

$$n_1 - n_2 = 37^6 - 27^6 = 2178305920$$

En el ejemplo siguiente se muestra cómo combinar la regla del producto, la regla de la suma y el principio del complementario.

**Ejemplo 1.1.8.** Cada usuario de un ordenador tiene una contraseña, con una longitud de entre seis y ocho caracteres, cada uno de los cuales es bien un dígito o bien una letra mayúscula. Cada contraseña debe contener al menos un dígito. ¿Cuántas contraseñas distintas admite el sistema?

$T_i$  : seleccionar una contraseña de long.  $i$  que contenga al menos un dígito.

Por la *regla de la suma*, la respuesta es  $n = n_6 + n_7 + n_8$ . Hallar directamente  $n_i$  no es fácil, pero observemos que, por el principio del complementario,  $n_i$  es igual al número de todas las cadenas de longitud  $i$  menos el número de cadenas de longitud  $i$  que no contienen ningún dígito.

Por la *regla del producto*, el número de cadenas de longitud  $i$  es  $37^i$  y el número de cadenas de longitud  $i$  sin ningún dígito es  $27^i$  (véase el ejemplo anterior). Con lo cual,  $n_i = 37^i - 27^i$  para cada  $i = 6, 7, 8$  y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} n &= (37^6 - 27^6) + (37^7 - 27^7) + (37^8 - 27^8) \\ &= (2565726409 - 387420489) + (94931877133 - 10460353203) + \\ &\quad (3512479453921 - 282429536481) = 3316699747290 \end{aligned}$$

Cuando dos tareas se pueden realizar simultáneamente, no se puede utilizar la regla de la suma para contar las maneras en que se puede realizar una de las dos tareas, pues estaríamos contando dos veces las tareas que se realizan simultáneamente.

**1.1.9** (*Principio de inclusión-exclusión*). Utilizando el principio de adición, se obtiene el *principio de inclusión-exclusión*:

Si una tarea se puede realizar de  $n_1$  formas y una segunda tarea se puede realizar de  $n_2$  formas, y las dos tareas se pueden realizar simultáneamente de  $n_{12}$  formas, entonces hay  $n_1 + n_2 - n_{12}$  formas de realizar una de las dos tareas.

**Ejemplo 1.1.10.** ¿Cuántas cadenas de bits hay que tengan longitud ocho y que comiencen con un 0 o terminen en 11?

$T_1$  : construir una cadena de 8 bits que comience por un 0  $\xRightarrow{1.1.1} n_1 = 2^7$

$T_2$  : construir una cadena de 8 bits que termine en 11  $\xRightarrow{1.1.1} n_2 = 2^6$

$T_1 \cap T_2$  : construir una cadena de 8 bits que comience por 0

y que termine en 11  $\xRightarrow{1.1.1} n_{12} = 2^5$

Por el principio de inclusión-exclusión hay  $n_1 + n_2 - n_{12} = 2^7 + 2^6 - 2^5 = 128 + 64 - 32 = 160$  cadenas de bits.

**Ejercicio 1.1.11.** La contraseña de la caja fuerte de una oficina bancaria tiene una longitud de entre 8 y 10 caracteres, cada uno de los cuales es un dígito de 0 a 9, \*, \$, o /. Además, al menos debe contener un dígito. Se pide:

- El número de contraseñas de longitud 8 que se pueden utilizar.
- El número de contraseñas que se pueden utilizar.
- El número de contraseñas que empiezan por 7 y terminan en \$.

## 1.2. El principio de las cajas.

**Propiedad 1.2.1** (*Principio restringido de las cajas*). Si  $k + 1$  o más objetos se colocan en  $k$  cajas existe al menos una caja que contiene dos o más objetos.

**Ejemplo 1.2.2.** En un grupo de 367 personas hay al menos 2 que nacieron el mismo día.

**Propiedad 1.2.3** (*Principio generalizado de las cajas*). Si se colocan  $n$  objetos en  $k$  cajas, existe al menos una caja que contiene  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$  o más objetos.

**Ejemplo 1.2.4.** En un grupo de 100 personas hay al menos  $\lceil \frac{100}{12} \rceil = 9$  que nacieron el mismo mes.

**Ejercicio 1.2.5.** ¿Cual es el número mínimo de individuos que debe tener una ciudad para garantizar de que al menos 10 nacieron el mismo día del año?

## 2. ESTRUCTURAS DE COMBINATORIA

En esta sección se mostrarán técnicas para contar selecciones no ordenadas de objetos y colecciones ordenadas de elementos de un conjunto finito.

## 2.1. Permutaciones.

**Definición 2.1.1.** Las *permutaciones (sin repetición)* de un conjunto  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  son todas las ordenaciones de los elementos del conjunto.

**Ejemplo 2.1.2.** Las permutaciones del conjunto  $\{1, 2, 3\}$  son:

1, 2, 3,      1, 3, 2,      2, 1, 3,      3, 2, 1,      2, 3, 1,      3, 1, 2

**Propiedad 2.1.3.** El número de permutaciones de un conjunto de  $n$  elementos es

$$P_n = n!$$

*Demostración.* Se deduce de que las permutaciones de un conjunto son todas las aplicaciones biyectivas del conjunto en sí mismo.  $\square$

**Ejemplo 2.1.4.**  $P_3 = 3! = 6$

**Ejemplo 2.1.5.** Las permutaciones del conjunto  $\{x_1, x_2, x_3\}$  son:

$x_1, x_2, x_3$     $x_1, x_3, x_2$     $x_2, x_1, x_3$     $x_2, x_3, x_1$     $x_3, x_1, x_2$     $x_3, x_2, x_1$

**Ejemplo 2.1.6.** ¿Cuántas formas hay de colocar 4 alumnos en 4 puestos de laboratorio?

$$P_4 = 4! = 24$$

¿Cuáles son?

Son todas las permutaciones del conjunto de alumnos  $\{al_1, al_2, al_3, al_4\}$ :

$al_1, al_2, al_3, al_4$	$al_1, al_2, al_4, al_3$	$al_1, al_3, al_2, al_4$	$al_1, al_3, al_4, al_2$
$al_1, al_4, al_2, al_3$	$al_1, al_4, al_3, al_2$	$al_2, al_1, al_3, al_4$	$al_2, al_1, al_4, al_3$
$al_2, al_3, al_1, al_4$	$al_2, al_3, al_4, al_1$	$al_2, al_4, al_1, al_3$	$al_2, al_4, al_3, al_1$
$al_3, al_1, al_2, al_4$	$al_3, al_1, al_4, al_2$	$al_3, al_2, al_1, al_4$	$al_3, al_2, al_4, al_1$
$al_3, al_4, al_1, al_2$	$al_3, al_4, al_2, al_1$	$al_4, al_1, al_2, al_3$	$al_4, al_1, al_3, al_2$
$al_4, al_2, al_1, al_3$	$al_4, al_2, al_3, al_1$	$al_4, al_3, al_1, al_2$	$al_4, al_3, al_2, al_1$

**Ejercicio 2.1.7.** Tenemos 10 libros distintos, de los cuales 3 son de matemáticas, 2 de física y 5 de informática.

- ¿De cuántas formas podemos colocarlos en una estantería con un espacio vacío para 10 libros?
- ¿Y si queremos que los dos más gruesos están en los extremos?
- ¿Y si queremos que estén agrupados por materias?

**Definición 2.1.8.** Las *permutaciones con repetición* son las disposiciones ordenadas de  $n$  elementos de modo que del primer tipo hay  $n_1$ , del segundo tipo  $n_2$ , ... y, del  $k$ -ésimo tipo hay  $n_k$ . Por tanto,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

Oberremos que los objetos de un determinado tipo son indistinguibles y, por lo tanto hay que evitar contar más de una vez el mismo objeto.

**Ejemplo 2.1.9.** Las cadenas distintas que se pueden formar reordenando las letras de la palabra *PAPAYA* son las permutaciones con repetición de  $P$ ,  $A$ ,  $Y$  de modo que la  $P$  se repite 2 veces, la  $A$  se repite 3 veces y la  $Y$  1 vez. Son:

$$\begin{array}{ccccccc} p, p, a, a, a, y & p, p, a, a, y, a & p, p, a, y, a, a \\ p, p, y, a, a, a & p, a, p, a, a, y & \dots & y, a, a, a, p, p \end{array}$$

**Propiedad 2.1.10.** El número de permutaciones con repetición de un conjunto de  $n$  elementos de modo que del primer tipo hay  $n_1$ , del segundo tipo  $n_2$ , ... y, del  $k$ -ésimo tipo hay  $n_k$ , es:

$$\text{PR}_n^{n_1 n_2 \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

*Demostración.* Se deduce del número de permutaciones (sin repetición) utilizando el principio del producto.  $\square$

**Ejemplo 2.1.11.** El número de cadenas distintas que se pueden formar con las letras de la palabra *PAPAYA* es

$$\text{PR}_6^{231} = \frac{6!}{2!3!1!} = 60$$

**Ejemplo 2.1.12.** En una hospital hay que distribuir 12 pacientes en 4 habitaciones a razón de 3 por habitación. ¿De cuántas formas puede hacerse?

Llamemos  $H_i$  a la habitación número  $i$ , para todo  $i = 1, 2, 3, 4$ . Suponiendo los 12 pacientes ordenados, una distribución en las habitaciones

es una cadena de 12 caracteres donde cada  $H_i$  aparece 3 veces.

$$\text{PR}_{12}^{3333} = 34650$$

**Ejercicio 2.1.13.** En la caja registradora de un establecimiento hay 1 billete de 500 euros, 2 de 100 euros, 5 de 50 euros, 15 de 20 euros y 30 de 10 euros. ¿De cuántas formas pueden ordenarse los billetes?

## 2.2. Variaciones.

**Definición 2.2.1.** Las *variaciones sin repetición* de orden  $r$  de un conjunto de  $n$  elementos son todas las ordenaciones de tamaño  $r$  de elementos del conjunto, sin que existan repeticiones.

**Ejemplo 2.2.2.** Las variaciones de orden 2 del conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  son:

1, 2   1, 3   1, 4   2, 1   2, 3   2, 4   3, 1   3, 2   3, 4   4, 1   4, 2   4, 3

**Propiedad 2.2.3.** El número de variaciones sin repetición de  $n$  elementos de orden  $r$  es:

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

*Demostración.* Se deduce del número de permutaciones (sin repetición) utilizando el principio del producto.  $\square$

**Ejemplo 2.2.4.** El número de variaciones de orden 2 del conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  es:

$$V_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$$

**Ejemplo 2.2.5.** Las variaciones de orden 2 del conjunto  $\{x_1, x_2, x_3\}$  son:

$x_1, x_2$     $x_1, x_3$     $x_2, x_1$     $x_2, x_3$     $x_3, x_1$     $x_3, x_2$

**Ejemplo 2.2.6.** Dado el conjunto de letras  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ .

- ¿Cuántas palabras diferentes de 6 letras distintas pueden formarse con las letras del conjunto?

$$V_{10,6} = \frac{10!}{4!} = 151200$$

- ¿Cuántas de las palabras del apartado anterior contienen la letra  $b$ ?

$$6 \cdot V_{9,5} = \frac{9!}{4!} = 90720$$

**Ejercicio 2.2.7.** ¿Cuántas banderas tricolores pueden hacerse con los 7 colores del arco iris?

**Definición 2.2.8.** Una *variación con repetición* de orden  $r$  de un conjunto de  $n$  elementos es una sucesión ordenada de tamaño  $r$  de elementos del conjunto, en donde los elementos pueden repetirse.

**Ejemplo 2.2.9.** Las cadenas de longitud 3 que se pueden formar con las letras  $n, o$  son:

$n, n, n \quad n, n, o \quad n, o, n \quad n, o, o \quad o, n, n \quad o, n, o \quad o, o, n \quad o, o, o$

**Propiedad 2.2.10.** El número de variaciones con repetición de orden  $r$  de un conjunto de  $n$  elementos es:

$$VR_{n,r} = n^r$$

*Demostración.* Se deduce del principio del producto. □

**Ejemplo 2.2.11.** El número de cadenas de longitud 3 que se pueden formar con las letras  $n, o$  es:

$$VR_{2,3} = 2^3 = 8$$

**Ejemplo 2.2.12.** ¿Cuántos números hexadecimales hay de tres dígitos, ninguna de ellas nulas?

$$VR_{15,3} = 15^3 = 3375$$

**Ejercicio 2.2.13.** ¿De cuántas fichas consta un juego de dominó, sabiendo que las fichas varían desde la blanca doble hasta la seis doble?

**2.3. Combinaciones.** Las permutaciones y variaciones de un conjunto se diferencian por el orden de los elementos. Sin embargo, en las combinaciones no importa el orden: dos combinaciones son diferentes si, y sólo si, tienen algún elemento distinto.

**Definición 2.3.1.** Una *combinación* de orden  $r$  de un conjunto de  $n$  elementos es un subconjunto de tamaño  $r$  del conjunto.

**Ejemplo 2.3.2.** Las combinaciones de orden 2 del conjunto  $\{1, 2, 3\}$  son:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$$



**Propiedad 2.3.3.** El número de combinaciones sin repetición de tamaño  $r$  de un conjunto de  $n$  elementos es:

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

*Demostración.* Se deduce del número de permutaciones (sin repetición) utilizando el principio del producto.  $\square$

**Ejemplo 2.3.4.** El número de combinaciones de orden 2 del conjunto  $\{1, 2, 3\}$  es

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$

**Ejemplo 2.3.5.** Las combinaciones sin repetición de tamaño 2 del conjunto  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  son

$$x_1, x_2 \quad x_1, x_3 \quad x_1, x_4 \quad x_2, x_3 \quad x_2, x_4 \quad x_3, x_4$$

**Ejemplo 2.3.6.** Determinar el número de manos de póker distintas (5 cartas) que pueden formarse con una baraja de 52 naipes.

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = 2598960$$

¿Cuántas manos contienen exactamente 3 ases?

$$C_{4,3} \cdot C_{48,2} = \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2} = 4512$$

**Ejercicio 2.3.7.** En una prueba final de FMI entran 8 temas, de los que un estudiante se sabe 4. Sabiendo que el examen consta de cuatro preguntas, una de cada tema, averiguar cuántos exámenes distintos se le pueden poner en los que:

- No se sepa ninguna pregunta.
- Se sepa dos preguntas.
- Se sepa al menos una pregunta.
- Se sepa todas las preguntas.

**Ejercicio 2.3.8.** Demuestra el Teorema del binomio:

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

**Ejercicio 2.3.9.** Demuestra la identidad de Pascal:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

**Definición 2.3.10.** Una *combinación con repetición* de orden  $r$  de un conjunto de  $n$  elementos es una colección de tamaño  $r$  de elementos del conjunto que pueden repetirse.

**Ejemplo 2.3.11.** Las formas en que se pueden seleccionar tres piezas de fruta de una cesta que contiene manzanas y peras (combinaciones con repetición de orden 3 de un conjunto de dos elementos) es:

3 manzanas, 2 manzanas y 1 pera, 1 manzana y 2 peras, 3 peras.

**Propiedad 2.3.12.** El número de combinaciones con repetición de orden  $r$  de un conjunto de  $n$  elementos es:

$$CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r}$$

**Ejemplo 2.3.13.** El número de formas de seleccionar tres piezas de fruta de una cesta que contiene manzanas y peras (combinaciones con repetición de orden 3 de un conjunto de dos elementos) es

$$CR_{2,3} = \binom{2+3-1}{3}$$

**Ejemplo 2.3.14.** En una tienda con material informático tienen monitores de cuatro marcas diferentes. ¿De cuántas maneras podemos escoger seis monitores?

Hay que escoger 6 elementos de un total de 4 de modo que el orden es irrelevante y permitiendo repetición. Por lo tanto, se trata de calcular

$$CR_{4,6} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = 84$$

**Ejercicio 2.3.15.** En una prueba final de FMI entran 8 temas, de los que un estudiante se sabe 4. Sabiendo que el examen consta de cuatro preguntas, averiguar cuántos exámenes distintos se le pueden poner en los que:

- No se sepa ninguna pregunta.
- Se sepa dos preguntas.
- Se sepa al menos una pregunta.
- Se sepa todas las preguntas.

### 3. EJERCICIOS

#### 3.1. Fundamentos de combinatoria.

1. En una universidad hay 18 estudiantes de Matemáticas y 325 de Ingeniería Informática.
  - a) ¿De cuántas maneras se pueden escoger dos representantes, de forma que uno de ellos sea estudiante de Matemáticas y el otro sea estudiante de Ingeniería Informática?
  - b) ¿De cuántas maneras se puede escoger un representante que sea de Matemáticas o Ingeniería Informática?
2. ¿Cuántas cadenas de cinco caracteres ASCII contienen el carácter @ al menos una vez?
3. ¿Cuántas cadenas de  $n$  bits comienzan por 10 y terminan por 01?
4. Hay seis compañías aéreas distintas que vuelan de Madrid a Barcelona y siete que vuelan de Barcelona a París. ¿Cuántas posibilidades distintas existen para un viaje de Madrid a París, vía Barcelona, si se escoge una compañía por cada trayecto?
5. En un lenguaje de programación, el nombre de una variable es una cadena de uno, dos o tres caracteres alfanuméricos, no distinguiéndose las letras mayúsculas y minúsculas. Además, el nombre de una variable debe empezar con una letra y debe ser diferente de las tres cadenas de dos caracteres que están reservadas por el lenguaje. ¿Cuántos nombres de variables distintos se pueden utilizar en dicho lenguaje de programación?
6. Demuestra que en un conjunto de seis clases debe haber dos que tienen lugar el mismo día, suponiendo que las clases sólo se imparten de lunes a viernes.
7. Demuestra que si en una clase hay 30 estudiantes, hay al menos dos cuyos nombres comienzan por la misma letra.
8. ¿Cuál es el menor número de estudiantes que deben matricularse en una universidad para asegurar que hay al menos 100 que vienen de la misma comunidad autónoma suponiendo que todos los estudiantes provienen de alguna de las 17 comunidades autónomas?

#### 3.2. Estructuras de combinatoria.

1. De los números con cifras distintas que pueden formarse con los dígitos  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ :

- ¿Cuántos tienen el 2 en segunda posición?
  - ¿Cuántos tienen el 1 en primera posición y el 3 en cuarta posición?
  - ¿Cuántos tienen el 1 en primera posición o el 3 en cuarta posición?
  - ¿Cuántos hay en los que el 1 no está en primera posición ni el 3 en cuarta?
  - ¿Cuántos hay en los que el 1 no está en primera posición o el 3 no está en la cuarta posición?
2. Con las letras de la palabra MATEMATICAS:
- ¿Cuántas permutaciones distintas pueden formarse?
  - ¿Cuántas de ellas empiezan por vocal?
  - ¿Cuántas de ellas empiezan por M?
  - ¿Cuántas de ellas empiezan por M y terminan por S?
3. Con los dígitos  $\{1, 2, 3, 4\}$ :
- ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse que no tengan ninguna repetida? Enuméralos.
  - ¿Cuántos de ellos son pares?
  - ¿Y si pueden repetirse las cifras?
  - ¿Cuántos de los del apartado anterior son pares?
  - ¿Cuántos de cuatro cifras distintas?
  - ¿Cuántos de cuatro cifras que contengan exactamente tres doses y un uno?
4. En una baraja de 40 cartas:
- ¿De cuántas formas puede elegirse una mano de cinco cartas?
  - ¿Cuántas de estas manos tienen exactamente dos ases?
  - ¿En cuántas hay al menos dos ases?
5. Un ayuntamiento está constituido por dos representantes del partido A, nueve del B, dos del C y tres del D. Se desea formar una comisión integrada por 4 concejales. ¿Cuántas comisiones distintas pueden formarse en cada uno de los siguientes casos?:
- La comisión tienen un representante de cada partido.
  - Al menos un representante del partido A debe formar parte de la comisión.
  - Deben formar parte de la comisión exactamente dos representantes del partido B.

6. Un comité de selección entrevista a cinco candidatos para un puesto de trabajo. El comité entrega al final una lista de las personas que propone. ¿Cuántas listas distintas puede entregar en cada uno de los siguientes casos?:
  - La lista ordena a los candidatos del 1 al 5.
  - El comité selecciona a un primer, un segundo y un tercer candidato.
  - El comité indica un subconjunto de tres candidatos aceptables.
  - El comité propone a un candidato y a un subconjunto de dos suplentes.
7. En una pastelería se sirven 6 tipos de pasteles. ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir 2 docenas de pasteles?
8. En un lote de 200 pantallas LCD se sabe que el 10 % tienen algún pixel dañado. Se selecciona una muestra de 13 pantallas de forma aleatoria para realizar un chequeo.
  - ¿Cuántas muestras contienen tres pantallas defectuosas?
  - ¿Cuántas muestras contienen al menos una pantalla defectuosa?
9. Trece personas viajan en una avioneta que tiene veinte plazas, excluidas las de la tripulación. La aerolínea es de bajo coste y los asientos no están numerados. ¿De cuántas formas se pueden sentar?
10. Seis vigilantes de seguridad tienen asignado el turno de mañana de un centro comercial. Si sólo se necesitan dos vigilantes en ese turno, ¿cuántos días se pueden cubrir sin repetir la misma pareja?
11. En una cafetería del Campus se sirven tres tipos diferentes de pizzas. Si queremos comprar 15 pizzas de forma que haya como mínimo 2 de cada tipo, ¿de cuántas maneras podemos hacerlo?

## REFERENCIAS

- [1] Bujalance, E.: *Elementos de matemática discreta*. Sanz y Torres, 1993.
- [2] Bujalance, E.: *Problemas de matemática discreta*. Sanz y Torres, 1993.
- [3] Busby, R. C.; Kolman, B.; Ross, S. C.: *Estructuras de matemáticas discretas para la computación*. Prentice Hall, 1997.
- [4] Ferrando, J. C.; Gregori, V.: *Matemática discreta*. Reverté, 1995.
- [5] García Merayo, F.: *Matemática discreta*. Paraninfo, 2005.
- [6] García Merayo, F.; Hernández Peñalver, G.; Nevot Luna, A.: *Problemas resueltos de matemática discreta*. Thomson, 2003.

- [7] García C.; López, J. M.; Puigjaner, D.: *Matemática discreta: problemas y ejercicios resueltos*. Prentice Hall, 2002.
- [8] Garnier, R.; Taylor, J.: *Discrete mathematics for new technology*. Adam Hilger, 1992.
- [9] Grassmann, W. K.: *Matemática discreta y lógica*. Prentice Hall, 1998.
- [10] Grimaldi, R. P.: *Matemáticas discreta y combinatoria: una introducción con aplicaciones*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.
- [11] Johnsonbaugh, R.: *Matemáticas discretas*. Prentice Hall, 1999.
- [12] Rosen, K. H.: *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. Mc Graw Hill, 2004.
- [13] Wilson, R. J.: *Introducción a la teoría de los grafos*. Alianza, 1983.