Tarea 4 correspondiente a las actividades no presenciales de la asignatura *Hardware de aplicación específica* (curso 2019-2020). Las respuestas a esta tarea deben ser entregadas el lunes, día 16 de marzo, en el laboratorio de Electrónica, entre las 9:00 y las 11:00 horas o bien entre las 13:00 y las 15:00 horas.

1) En una tarea previa deberías haber visto que la respuesta (salida) $y(t)$ de un sistema lineal, continuo e invariante en el tiempo (LCIT) ante una entrada $x(t)$ <u>cualquiera</u> cumple lo siguiente:

$$x(\mathrm{t}) \rightarrow \boxed{\begin{matrix} LCIT \\ h(\mathrm{t}) \end{matrix}} \rightarrow y(\mathrm{t})$$

$$y(t)=h(t)*x(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\cdot x(t-\lambda)\cdot d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\cdot h(t-\lambda)\cdot d\lambda \qquad (1)$$

siendo $h(\mathrm{t})$ la respuesta (salida) del sistema a una entrada igual a un impulso unitario (*delta de Dirac*).

H1: Se supone que el sistema no tiene almacenada energía antes de que se aplique la señal $x(t)$ a su entrada

H2: La respuesta $h(t)$ del sistema a un impulso unitario es absolutamente integrable. Es decir, se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\cdot dt<\infty$$

Aunque el objetivo de este ejercicio es determinar la respuesta (salida) de un sistema LCIT correspondiente a una entrada $x(t) = A\cdot cos(w_0t+\theta)$, <u>como paso previo</u>, a continuación se va a determinar la respuesta $y_c(t)$ del sistema a una entrada exponencial compleja: $x_c(t)=Ae^{j(w_0t+\vartheta)} = A\cdot cos(w_0t+\theta) + j\cdot A\cdot sen(w_0t+\theta)$. De acuerdo con (1), se cumple lo siguiente:

$$y_c(t)=h(t)*x_c(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\cdot A\cdot e^{j[w_0(t-\lambda)+\vartheta]}\cdot d\lambda=\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\cdot e^{-jw_0\lambda}\cdot d\lambda\right]\cdot A\cdot e^{j[w_0t+\vartheta]}=\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\cdot e^{-jw_0\lambda}\cdot d\lambda\right]\cdot x_c(t)=$$

$=H(w_0)\cdot x_c(t)$, siendo $H(w_0)=H(w)\big|_{w=w_0}$ con $H(w)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\cdot e^{-jw\lambda}\cdot d\lambda$ ≡ *transformada de Fourier* de la respuesta del sistema a un impulso unitario [$h(\mathrm{t})$] o, lo que es lo mismo, $H(w) \equiv H(jw)$ es la *respuesta en frecuencia del sistema*.

Del resultado anterior se deduce que la respuesta de un sistema LCIT a una exponencial compleja de frecuencia w_0 es otra exponencial compleja <u>de la misma frecuencia</u>, modificada en su módulo y en su fase por el valor del módulo y de la fase, respectivamente, de la transformada de *Fourier* $H(w)$ de la respuesta del sistema a un impulso unitario para $w = w_0$. Es decir,

para una entrada $x_c(t)=Ae^{j(w_0t+\vartheta)}$ la salida es: $y_c(t)=|H(w_0)|\cdot A\cdot e^{j[w_0t+\vartheta+\underline{|H(w_0)}]}$ siendo $H(w_0)=|H(w_0)|\cdot e^{j\underline{|H(w_0)}}$

Si aplicamos la fórmula de *Euler* para los números complejos a la expresión de $x_c(t)$ se obtiene lo siguiente:

$$x_c(t) = A\cdot e^{j(w_0t+\vartheta)} = A\cdot cos(w_0t+\vartheta) + j\cdot A\cdot sen(w_0t+\vartheta) = x(t) + j\cdot A\cdot sen(w_0t+\vartheta)$$

El valor de $y_c(t)$ se puede expresar a partir de (1) y del valor anterior de $x_c(t)$, de la siguiente manera:

$$y_c(t)=h(t)*x_c(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\cdot[x(t-\lambda) + jAsen(w_0(t-\lambda)+\vartheta)]\cdot d\lambda$$

teniendo en cuenta que el sistema es lineal,

$$y_c(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\cdot[x(t-\lambda) + j\cdot A\cdot sen(w_0(t-\lambda)+\vartheta)]\cdot d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\cdot x(t-\lambda)\cdot d\lambda+j\cdot\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\cdot A\cdot sen(w_0(t-\lambda)+\vartheta)\cdot d\lambda=$$

$$=y(t)+j\cdot\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\cdot A\cdot sen[w_0(t-\lambda)+\vartheta]\cdot d\lambda$$

Del resultado anterior se deduce que la respuesta $y(t)$ de un sistema LCIT ante una entrada $x(t) = A\cdot cos(w_0t+\theta)$ cumple lo siguiente:

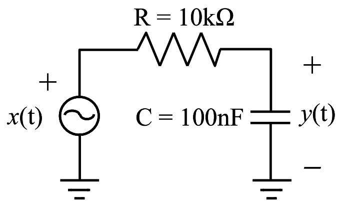
$$y(t) = \mathrm{Re}[y_c(t)] = \mathrm{Re}[H(w_0)\cdot x_c(t)] = \mathrm{Re}\left[|H(w_0)|\cdot A\cdot e^{j[w_0t+\vartheta+\underline{|H(w_0)}]}\right] = |H(w_0)|\cdot A\cdot \cos\left[w_0t+\vartheta+\underline{|H(w_0)}\right]$$

El resultado anterior demuestra que la respuesta de un sistema LCIT ante una entrada senoidal (seno ó coseno) de frecuencia w_0 es otra señal senoidal (del mismo tipo) que tiene la misma frecuencia (w_0), que está modificada en su amplitud por el valor del módulo de la respuesta en frecuencia del sistema $|H(w=w_0)|$ y en su fase por la fase de la respuesta en frecuencia del sistema $\underline{|H(w=w_0)}$

Nota: Dado un sistema LCIT con una *respuesta en frecuencia* $H(w)$ [≡ *transformada de Fourier* de la respuesta $h(t)$ del sistema a un impulso unitario], se cumple que:

- $|H(w)|$ es una función de la frecuencia w que se denomina *magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema*
- $\angle H(w)$ es una función de la frecuencia w que se denominada *fase de la respuesta en frecuencia del sistema*

Ejemplo: se puede demostrar que la respuesta en frecuencia $H(w)$ del sistema representado en la parte derecha [entrada x(t), salida y(t)] cumple lo siguiente:



$$H(w)=\frac{y(w)}{x(w)}=\frac{1}{1+jwCR}$$

Si se ejecuta el siguiente código en Matlab, en la pantalla aparecerán representadas las funciones $|H(w)|$ y $\angle H(w)$ en dos intervalos de frecuencias distintos (las curvas las puedes ver en la siguiente página):

```
R=10e3;
C=100e-9;
f=0:0.1:5;%se representan las curvas en el rango 0-5Hz
w=2*pi*f;
H=1./(1+j*w*C*R);
magH = abs(H);
angH = 180*angle(H)/pi; %la fase se representa en grados
subplot(211), plot(f,magH); %la frecuencia está en Hercios
grid;
ylabel('Módulo de la respuesta en frecuencia');
xlabel('frecuencia en Hz');
subplot(212), plot(f,angH);
grid;
ylabel('Fase de la respuesta en frecuencia (en grados)');
xlabel('frecuencia en Hz');

pause; % hay que pulsar una tecla para que se ejecuten las siguientes líneas de código

f=0:50:5000; %se representan las curvas en el rango 0-5000Hz
w=2*pi*f;
H=1./(1+j*w*C*R);
magH = abs(H);
angH = 180*angle(H)/pi; % la fase se representa en grados
subplot(211), plot(f,magH);  % la frecuencia está en Hercios
grid;
ylabel('Módulo de la respuesta en frecuencia');
xlabel('frecuencia en Hz');
subplot(212), plot(f,angH);
grid;
ylabel('Fase de la respuesta en frecuencia (en grados)');
xlabel('frecuencia en Hz');
```

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los párrafos anteriores, en relación al circuito indicado en la parte superior de esta página, tienes que determinar lo siguiente:

a) Expresión de la salida y_1(t) correspondiente a una entrada $x_1(t) = 2\cdot\cos(t + \pi/6)$.

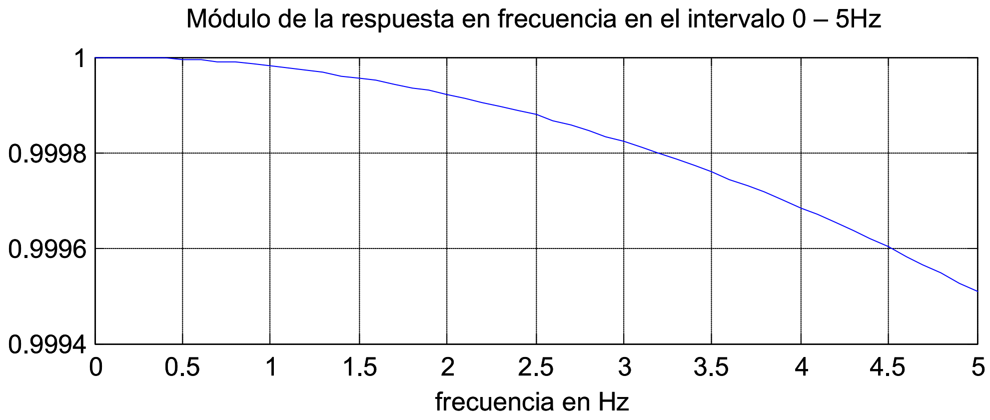
b) Expresión de la salida y_2(t) correspondiente a una entrada $x_2(t) = 4\cdot\text{sen}(10^7\cdot t + \pi/2)$.

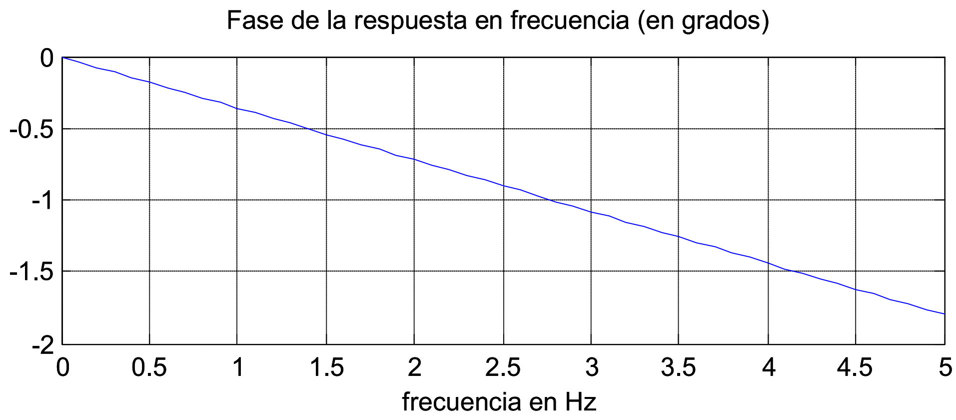
c) ¿Qué frecuencia tiene la señal de entrada x_1(t)?. ¿Y la salida y_1(t)?

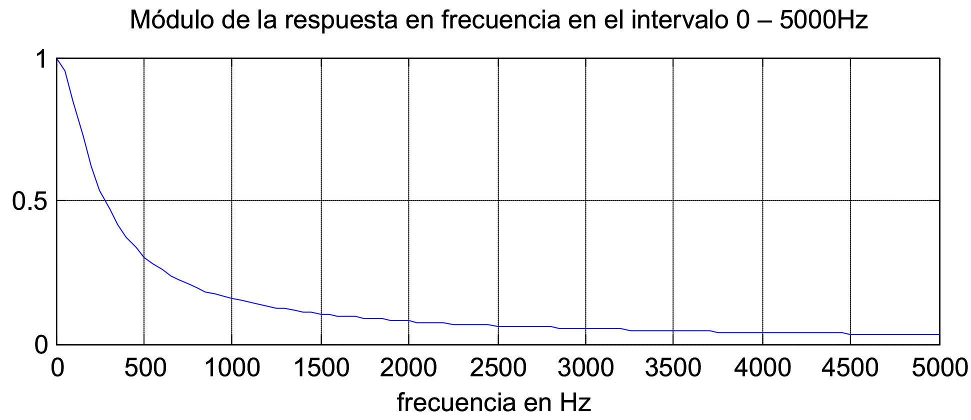
d) ¿Qué frecuencia tiene la señal de entrada x_2(t)?. ¿Y la salida y_2(t)?

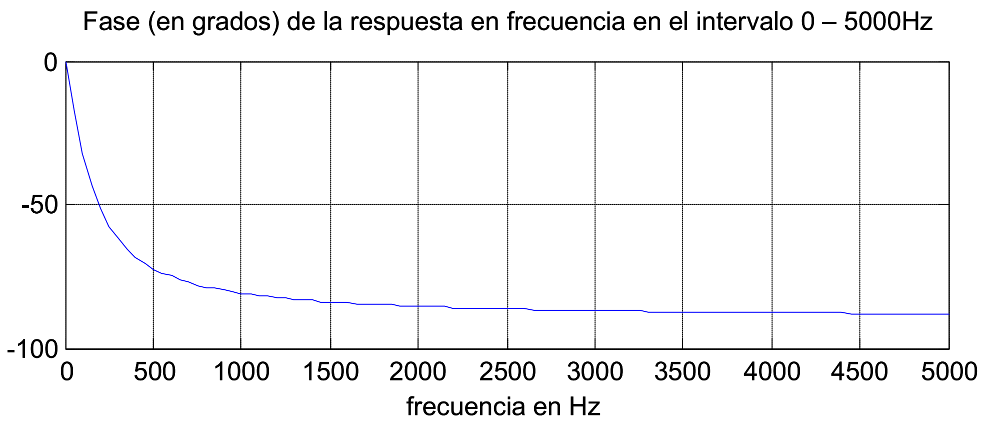
e) ¿Qué relación hay entre la salida y_1(t) y la entrada x_1(t)?. ¿Y entre la salida y_2(t) y la entrada x_2(t)?

f) Expresión de la salida y_3(t) correspondiente a una entrada $x_3(t) = 5$. ¿Cuál es la frecuencia de y_3(t)?









2) Calcula la respuesta del circuito del ejercicio de la página 4.2 a una entrada $x(\mathrm{t}) = \mathrm{sen}(10^3 t) + \cos(10^6 t)$. No olvides que el circuito representado en la página 4.2 es lineal, continuo e invariante en el tiempo.

3) En el ejercicio 1 se demostró que dado un sistema LCIT con una respuesta en frecuencia $H(w)$, la salida correspondiente a una entrada senoidal $x(t)=A\cos(w_0t+\vartheta)$ es igual a $y(t)=|H(w_0)|\cdot A\cdot\cos\left[w_0t+\vartheta+\underline{|H(w_0)}\right]$. A partir de este resultado, debería resultar evidente que con un sistema que tenga una respuesta en frecuencia $H(w)$ adecuada, se puede lograr, por ejemplo, que:

- una señal senoidal en la entrada dé lugar a una señal nula en la salida, si el valor del módulo de la respuesta en frecuencia del sistema vale 0 a la frecuencia de la senoide de entrada. (Nota: en Ingeniería también se considera como 0 un valor 'próximo' a 0…. no olvides la "*Regla de oro de la Ingeniería*")
- una señal senoidal en la entrada dé lugar a una señal senoidal en la salida igual a la señal de entrada, si la respuesta en frecuencia del sistema presenta una amplitud igual a 1 y, por ejemplo, una fase igual a 0 a la frecuencia de la senoide aplicada a la entrada.

a) ¿Qué relación habrá entre las señales de salida y de entrada del sistema si su respuesta en frecuencia presenta una amplitud igual a 1 y una fase igual a $-\phi$ radianes a la frecuencia de la senoide de entrada?.

El proceso de '*impedir el paso*' de señales senoidales del tipo $x(t)=A\cos(wt+\vartheta)$, cuya frecuencia w pertenezca a un determinado intervalo (o intervalos) de frecuencias, y el de '*permitir el paso*' de señales senoidales, sin atenuarlas o atenuándolas muy poco, cuyas frecuencias no pertenezcan a dicho intervalo (o intervalos) de frecuencias se conoce como ***filtrado***. Los sistemas que presentan esta característica se denominan ***filtros***.

Un ***filtro ideal*** es un sistema que se caracteriza por lo siguiente:

_ el módulo de su respuesta en frecuencia es igual a 1 para un determinado intervalo (o intervalos) de frecuencias denominado *banda de paso*, e igual a 0 para el resto de frecuencias (denominado banda prohibida).

_ la fase de su respuesta en frecuencia varía linealmente con la frecuencia, al menos, en el intervalo (o intervalos) de frecuencias en los que el módulo presenta un valor igual a 1.

Dicho de otra forma, un filtro ideal "*no permite el paso*" de señales senoidales del tipo $x(t)=A\cdot\cos(wt+\vartheta)$, cuyas frecuencias w pertenecen al intervalo (o intervalos) de frecuencias en el que su módulo vale 0 y "*permite el paso*" de señales senoidales (sin atenuarlas, pero pudiendo introducir un retardo) cuyas frecuencias pertenezcan al intervalo (o intervalos) de frecuencias en el que el módulo de su respuesta en frecuencia vale 1 (o un valor próximo).

De acuerdo con los párrafos anteriores, se pide:

b) Indica los tipos de filtros básicos que hay en relación al rango de frecuencias que permiten/impiden pasar (sólo hay 4 tipos básicos). Representa la magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia de cada tipo de filtro (ideal). Indica el valor o por qué se caracteriza la respuesta en frecuencia de cada tipo.

c) ¿Qué es la *banda de paso* de un filtro?

d) ¿Qué es la *banda prohibida* de un filtro?

4) ***a***) Si la respuesta en frecuencia $H(w)$ de un filtro cumple lo siguiente:

$\underline{|H(w)}=-wt_d$, siendo t_d una constante positiva, no nula y $w\in\Re$

$|H(w)| = 1$ para todo $w\in\Re$

¿qué relación hay entre una señal senoidal aplicada en la entrada del filtro y la señal presente en su salida?

Nota: se supone que al resolver la tarea 1 quedó claro que dada una señal $z(t)$, la señal $z(t-t_0)$ toma los mismos valores que $z(t)$ pero con un retraso en el tiempo de t_0 segundos ($t\in\Re$ y t_0 cte.)

b) ¿Qué característica debe presentar la respuesta en frecuencia de un filtro para que no presente *distorsión de fase* en la banda de paso?.

c) ¿Crees que será un 'problema' el que un filtro presente distorsión de fase en la banda prohibida?. ¿Por qué?

5) ***a***) Calcula la señal y(t) que aparece en la salida de un sistema LCIT, cuya respuesta en frecuencia se caracteriza por lo siguiente:

$|H(w)| = 1$ para todo $w\in\Re$

$\underline{|H(w)}=-wt_d$, siendo t_d una constante positiva, no nula y $w\in\Re$

ante una entrada $x(t)=A_0\cdot\cos(w_0t+\vartheta_0)+A_1\cdot sen(w_1t+\vartheta_1)$

b) Calcula la salida de un sistema cuya respuesta en frecuencia cumple lo siguiente:

$|H(w)| = 1$ para todo $w \in \Re$

$\underline{|H(w)} = -k$, siendo k una constante positiva, no nula y $w \in \Re$

ante una entrada $x(t) = A_0 \cdot \cos(w_0 t + \vartheta_0) + A_1 \cdot sen(w_1 t + \vartheta_1)$

6) ***a***) ¿En qué unidades se mide el ancho de banda de una señal?

b) ¿Qué condición debe cumplir la frecuencia (o el periodo) con la que se muestrea una señal $x(t)$ en relación a su ancho de banda B, para que a partir de la señal $x[n]$, que se genera muestreando $x(t)$, se pueda obtener la señal $x(t)$ utilizando un *filtro paso bajo ideal*? (teorema de *Shannon-Nyquist*)

c) ¿En qué consiste el fenómeno de *aliasing* y cómo se puede evitar?

Pista 1: Se puede demostrar que la señal $x^*(t)$, <u>continua en el tiempo</u>, generada muestreando la señal $x(t)$ cada T_s segundos cumple lo siguiente:

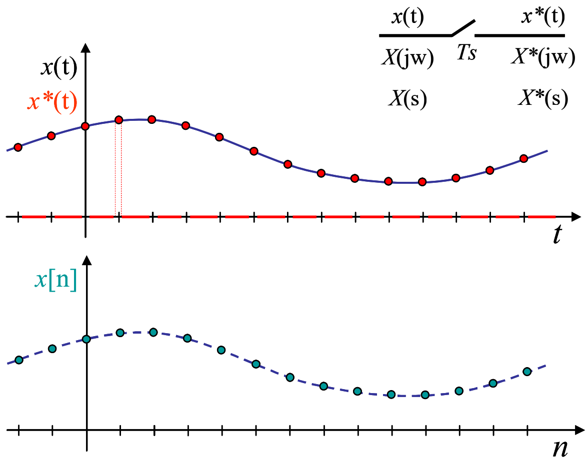
$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s)$$

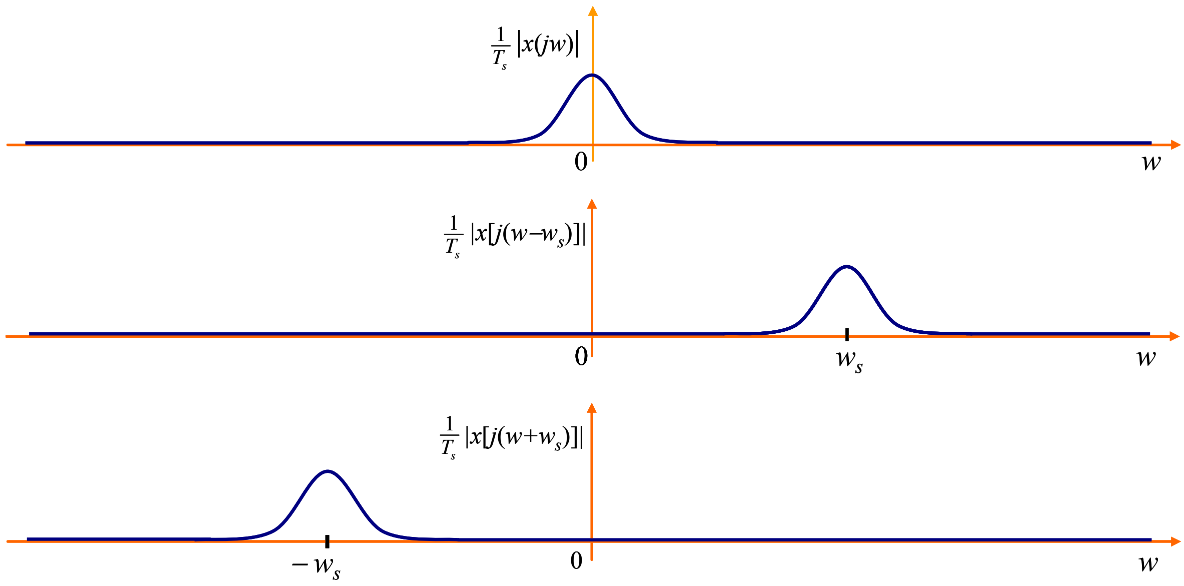
$$X^*(jw) = X^*(w) = F[x^*(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} X[j(w - nw_s)] =$$

$$= \frac{1}{T_s} X[j(w)] + \frac{1}{T_s} X[j(w - w_s)] + \frac{1}{T_s} X[j(w + w_s)] +$$

$$+ \frac{1}{T_s} X[j(w - 2w_s)] + \frac{1}{T_s} X[j(w + 2w_s)] +$$

$$+ \frac{1}{T_s} X[j(w - 3w_s)] + \frac{1}{T_s} X[j(w + 3w_s)] + \cdots$$





siendo:

· $x(t)$ la señal presente en la entrada del muestreador

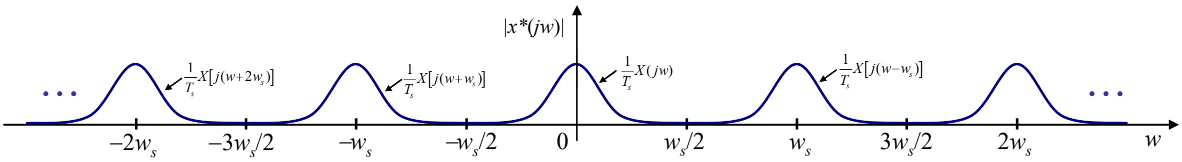
· $x^*(t)$ es una señal utilizada como aproximación <u>en el dominio del tiempo continuo</u> de una señal discreta en el tiempo $x[nT_s] \equiv x[n]$ (en este caso, la existente en la salida de un muestreador)

· $X(jw)$ es la transformada de *Fourier* de $x(t)$

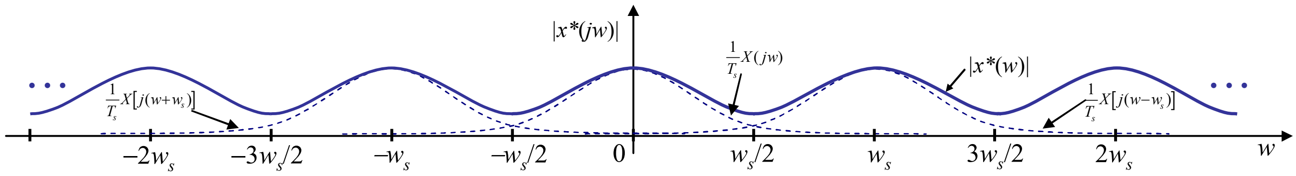
· $X^*(jw)$ es la transformada de *Fourier* de $x^*(t)$

· $w_s = 2\pi f_s = 2\pi / T_s$ es la frecuencia de muestreo en *radianes/seg*. y T_s es el periodo de muestreo (en *segundos*)

Pista 2: Si la frecuencia de muestreo w_s es mayor que el doble del *ancho de banda* de la señal $x(t)$ presente en la entrada del muestreador, entonces la representación del *espectro de amplitud* de la señal $x^*(t)$ tiene, en general, una forma similar a la indicada a continuación.



Pista 3: Si la frecuencia de muestreo w_s no es mayor que el doble del *ancho de banda* de la señal $x(t)$ presente en la entrada del muestreador, entonces la representación del espectro de amplitud de la señal $x^*(t)$ tiene, en general, una forma similar a la indicada a continuación



Dato 1: se puede demostrar que toda señal de *duración finita* en el tiempo tiene un *ancho de banda infinito*. Dado que todas las señales con las que se trabaja en Ingeniería son de duración finita, se puede afirmar que todas las señales reales tienen un ancho de banda infinito. De acuerdo con esto, si se muestrea una señal $x(t)$ de duración finita en el tiempo, no importa lo pequeño sea el periodo de muestreo, las réplicas de $X(jw)/T_s$ que presenta la respuesta en frecuencia de la señal existente en la salida del muestreador se solaparán.

Dato 2: la '*regla de oro de la Ingeniería*' dice lo siguiente: "*Una magnitud B es despreciable frente a una magnitud A, siempre que se cumpla que* $B < A/10$"

7) Representa el módulo y la fase de un sistema LCIT caracterizado por la siguiente respuesta en frecuencia (t_d es un número real, positivo):

$$H(w)=\begin{cases} e^{-jwt_d} & -B\leq w\leq B \\ 0 & w<-B,\ w>B \end{cases}$$

8) Aunque una señal de audio puede tener (y normalmente tiene) componentes en frecuencia con una amplitud no despreciable por encima de los 4kHz, las personas entendemos la reproducción de una señal de audio que ha sido filtrada para limitar su ancho de banda a 4kHz. Asumiendo una señal de audio con un ancho de banda de 4kHz, se pide:

a) ¿Cuál es el valor mínimo de la frecuencia (en radianes/segundo) con el que se puede muestrear dicha señal de audio, para que la señal presente en la salida del muestreador no presente *aliasing*?

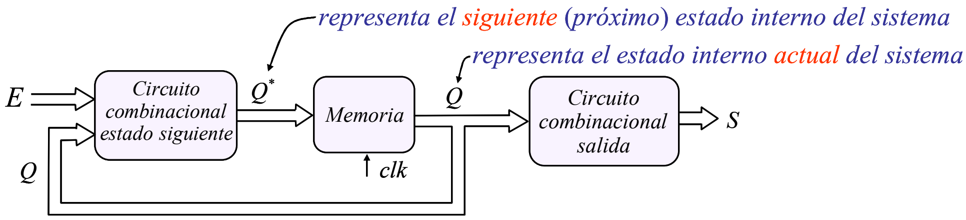
b) ¿Cuál es el tiempo máximo que puede transcurrir entre la toma de 2 muestras consecutivas?

Notas: _ La transformada de Laplace es otra transformación extraordinariamente útil a la hora de tratar con sistemas lineales, continuos en el tiempo. La existencia de la *transformada de Laplace* 'tiene sentido' una vez conocida la *transformada de Fourier*, debido a que hay muchas señales para las que su transformada de Fourier no converge (no existe), pero sí lo hace su transformada de Laplace. Por otra parte, la transformada de Laplace permite analizar la estabilidad de sistemas LCIT y proporciona herramientas e información que pueden aplicarse a casos en los que no se puede utilizar la *transformada de Fourier*.

_ La *transformada Z* es una transformación desarrollada especialmente para transformar señales, sistemas, modelos, etc. en tiempo discreto a un dominio donde su análisis resulta mucho más sencillo. En el caso de señales/sistemas en tiempo discreto, la *transformada Z* juega un papel 'similar' o 'equivalente' al que desempeña la transformada de Laplace en el caso de señales/sistemas en tiempo continuo. De la misma forma que existen ciertas relaciones entre las transformadas de *Laplace* y de *Fourier* cuando se trata con señales/sistemas en tiempo continuo, también existe un número importante de relaciones entre la *transformada Z* y la *transformada de Fourier* cuando se trata con señales/sistemas en tiempo discreto.

_ Una transformación matemática es una 'herramienta' que permite definir una señal, un sistema, un modelo, etc., que originalmente se encuentra definido en un dominio dado, en otro dominio diferente. Hay características o propiedades de una señal, de un sistema, de un modelo, etc. que son difíciles de ver, medir, detectar o resolver en un dominio dado, pero que en otro dominio pueden ser vistas, medidas o detectadas fácilmente (o por lo menos mucho más fácilmente). La *transformada de Fourier* constituye una transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

9) *El diagrama de bloques de un sistema secuencial síncrono siguiendo el modelo de Moore cumple lo siguiente*:



siendo,

E: entrada o entradas del sistema.

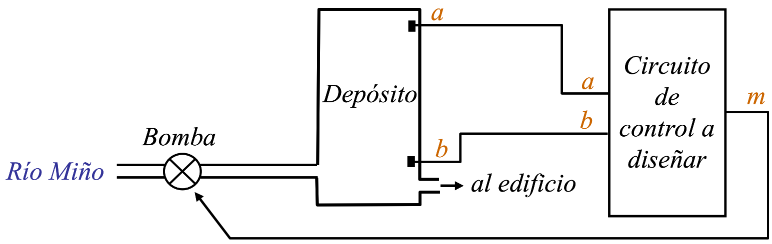
S: salida o salidas del sistema $[S = f(Q)]$

Q: estado interno actual (en el presente).

Q^*: siguiente estado interno (el siguiente valor de Q) $[Q^* = g(E, Q)]$

clk: los flancos de subida de esta señal establecen los instantes de tiempo en los que se actualiza el valor del estado interno (Q) del sistema y, como consecuencia de ello, establece los instantes en los que se actualiza la salida (o salidas) (S) del sistema.

Ejemplo *de obtención de un diagrama de flujo* (*modelo de Moore*): el sistema (secuencial) que controla el funcionamiento del motor (*bomba de agua*) debe garantizar que en todo momento el nivel del agua en el interior del depósito esté comprendido entre los niveles que establecen los sensores a y b.

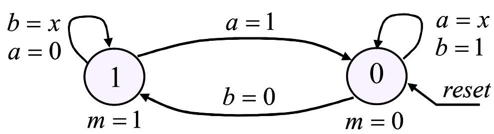


siendo,

$$a = \begin{cases} 1 & \text{si el nivel del agua supera la posición del sensor (a)} \\ 0 & \text{si el nivel del agua es inferior a la posición del sensor (a)} \end{cases}$$

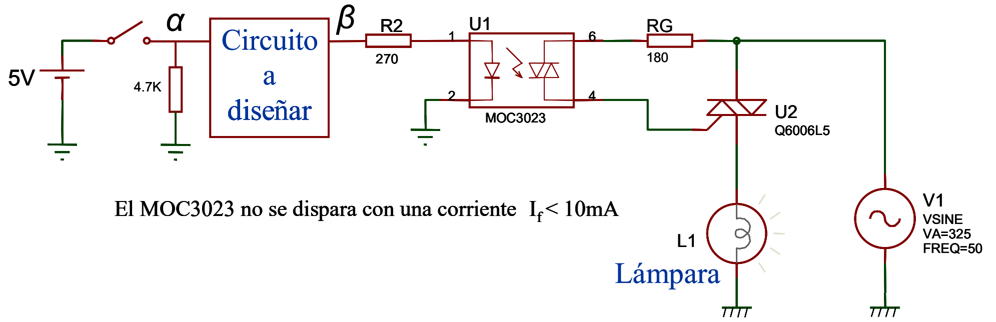
$$b = \begin{cases} 1 & \text{si el nivel del agua supera la posición del sensor (b)} \\ 0 & \text{si el nivel del agua es inferior a la posición del sensor (b)} \end{cases} \qquad m = \begin{cases} 1 & \text{el motor bombea agua al depósito} \\ 0 & \text{el motor está parado} \end{cases}$$

A continuación se indica un diagrama de flujo o de estados que describe el comportamiento del sistema secuencial que, a partir de la información proporcionada por los sensores a y b, controla el funcionamiento de la bomba de agua (*modelo de Moore*):



Explicación: en el estado 0, el motor está parado (m = 0) y el depósito se está vaciando. El sistema se mantiene en este estado mientras el nivel del agua sea superior al nivel en el que está situado el sensor b. Cuando el nivel del agua desciende por debajo de la posición del sensor b (b = 0), el sistema pasa al estado 1 y el motor se pone en funcionamiento hasta que se llene el deposito de agua (a = 1) [≡ el nivel del agua en el interior del depósito alcanza la posición del sensor a], en cuyo momento el sistema pasa al estado 0 y se detiene el motor.

Ejercicio: determina el diagrama de estados (modelo de *Moore*) que controla el estado (encendido/apagado) de una lámpara incandescente en el siguiente circuito,



El funcionamiento del circuito anterior se debe caracterizar por lo siguiente: si la lámpara está apagada, después de que alguien pulse (y suelte) el botón α, la lámpara deberá estar encendida. Análogamente, si la lámpara está encendida, después de que alguien pulse (y suelte) el botón α, la lámpara deberá estar apagada. No te preocupes de si la lámpara cambia de estado al pulsarse o al soltar el botón… preocúpate sólo de que la lámpara cambie de estado (encendida / apagada) cada vez que se pulsa y se suelta el botón α.

Las señales α y β de entrada y de salida respectivamente del sistema a modelar están definidas de la siguiente manera,

$$\alpha = \begin{cases} 1 \ \ (5\text{v}) \ \text{ si el pulsador está presionado} \\ 0 \ \ (0\text{v}) \text{ si el pulsador no está presionado} \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} 1 \ \ \text{la bombilla está encendida} \\ 0 \ \ \text{la bombilla está apagada} \end{cases}$$

Nota: pulsador ≠ interruptor