Análise Matemática. Curso 2021-2022.
Grao en Enxenería Informática. ESEI Ourense.
Departamento de Matemáticas. Universidade de Vigo.
Data: 15/12/2021

**BLOQUE III**

| APELIDOS | NOME | DNI | NOTA |
|---|---|---|---|
| | | | |

1. Queremos aplicar o método de Newton-Raphson para resolver a seguinte ecuación:
$$x+5=\mathrm{e}^{x+1}.$$
   a) Cúmprense as condicións de converxencia global no intervalo $[-1,1]$? E no intervalo $[0,1]$? Xustificar a resposta.
   b) Aproximar a solución no intervalo onde se cumpran as condicións de converxencia global realizando 3 iteracións e empezando cun valor inicial $x_0$ adecuado.

SOLUCIÓN: Definimos $f(x)=x+5-\mathrm{e}^{x+1}$ que é continua e duas veces continuamente derivable no seu dominio que é $\mathbb{R}$.

i) $f(-1)\cdot f(1)<0$, $f(0)\cdot f(1)<0$. $\boxed{\surd}$ (A primeira condición cúmprese nos dous intervalos.)

ii) $f'(x)=1-\mathrm{e}^{x+1}=0 \iff \mathrm{e}^{x+1}=1 \iff x+1=0 \iff x=-1\notin[0,1]$. $\boxed{\surd}$ (A segunda condición non se cúmpre no intervalo $[-1,1]$.)

iii) $f''(x)=-\mathrm{e}^{x+1}<0$ para todo $x\in[-1,1] \implies f(x)$ é cóncava. $\boxed{\surd}$ (A terceira condición cúmprese nos dous intervalos.)

Polo tanto xúmprense as condicións de converxencia global do método de Newton-Raphson no intervalo $[0,1]$, pero non en $[-1,1]$ porque falla a segunda condición.

Partimos dun valor $x_0\in[0,1]$ tal que $f(x_0)f''(x_0)>0$, por exemplo $x_0=1$. Entón

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1,\\
x_1 &= x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0.782588,\\
x_2 &= x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=0.749701,\\
x_3 &= x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=0.749032.
\end{aligned}$$

2. Considése a integral $I = \displaystyle\int_0^1 x\cos(x)dx$.

   *a*) Calcular o valor exacto de $I$.

   *b*) Aproximar o valor de $I$ usando a fórmula de Trapecio composta con $n = 4$. Cal é o erro cometido?

SOLUCIÓN: Os datos que nos proporciona o exercicio son

$$f(x) = x\cos(x), \quad a = 0, \quad b = 1 \quad \text{e} \quad n = 4.$$

Entón a lonxitude de cada subintervalo onde aplicaremos a fórmula de Simpson é

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25,$$

e os nodos da partición que divide ó intervalo $[0,1]$ en $n = 4$ partes iguais son

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25 \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 0.75, \text{e} \quad x_4 = 1.$$

Aplicando a fórmula a fórmula de Trapecio composta con $n = 4$ obtense o seguinte valor aproximado:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{0.25} f(x)dx + \int_{0.25}^{0.5} f(x)dx + \int_{0.5}^{0.75} f(x)dx + \int_{0.75}^{1} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{0.25}{2}(f(0)+f(0.25)) + \frac{0.25}{2}(f(0.25)+f(0.5)) + \frac{0.25}{2}(f(0.5)+f(0.75)) + \frac{0.25}{2}(f(0.75)+f(1)) =$$

$$= \frac{0.25}{2}(f(0) + f(1) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75))) = \boxed{0.374984}$$

Para calcular unha primitiva da función $f(x)$ usamos o método de integración por

partes $u = x \implies du = dx$, $dv = \cos(x)dx \implies u = \text{sen}(x)$

$$\int x\cos(x)dx = x\,\text{sen}(x) - \int \text{sen}(x)dx = x\,\text{sen}(x) + \cos(x) + c.$$

Agora, usando a regra de Barrow obtense o valor exacto

$$I = \int_0^1 x\cos(x)dx = \left. x\,\text{sen}(x) + \cos(x)\right]_{x=0}^{x=1} = \text{sen}(1) + \cos(1) - 1 = \boxed{0.381773}$$

Desta forma o erro cometido no apartado anterior é

$$\text{Erro=|ValorExacto-ValorAproximado|=}\boxed{0.006789}$$