Nombre y apellidos: ________ **S O L U C I O N E S** ________ DNI: ____________

Evaluación continua 2 – Grupo B

2 de nov de 2016, 11:00 a 12:00h – Aula B003

Pregunta 1

(3.5 pt.)

Considera los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, y la matriz N siguientes:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1 pt.) (a) Escribe una matriz de la cual la primera columna sea $\mathbf{a}_1$, una de las otras sea $\mathbf{a}_2$ y tal que las filas no nulas de su forma escalonada reducida sean las de N.

(1 pt.) (b) Sea A una matriz que cumple las condiciones del apartado anterior. Escribe un vector $\mathbf{b}_1$ tal que el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ sea incompatible y razona tu respuesta.

(1.5 pt.) (c) Escribe un vector no nulo $\mathbf{b}_2$ tal que el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ sea compatible y escribe la solución general de ese sistema en forma paramétrica vectorial.

Solución:

(a) Como $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ tienen tres filas, A tiene que tener tres filas. Viendo N, deducimos que A sólo tiene dos columnas pivote, que se pueden tomar como las dos columnas dadas ya que no son una múltiplo de la otra. Por tanto lo que nos han dado es la factorización de rango máximo de A y A es, en consecuencia, el producto de la matriz cuyas columnas sean los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ multiplicada por N.

$$A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

(b) Basta elegir $\mathbf{b}_1$ con el tercer elemento distinto de cero y los demás cero. Esto dará lugar a un pivote en la columna de la derecha de la matriz ampliada $(A|\mathbf{b}_1)$ lo cual implica sistema incompatible.

(c) Para conseguir un sistema compatible basta elegir como vector $\mathbf{b}_2$ cualquier columna no nula de A. Por ejemplo, si cogemos $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1$, la matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & 3 & -4 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & -7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y su forma escalonada reducida es:} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto en este caso la solución general del sistema en forma paramétrica vectorial es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Álgebra Lineal (1º Teleco)– **Evaluación continua 2 – Grupo B** Curso 2016/17

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 2

(3.5 pt.)

Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -6 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(1.5 pt.) (a) Halla la factorización LU de A.

(1 pt.) (b) Usa la factorización LU de A para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hallando primero un vector $\mathbf{y}$ tal que $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y luego resolviendo $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(1 pt.) (c) Halla $L + L^{\mathrm{T}}$, $L - L^{\mathrm{T}}$, LL^{T} y $\det\left(LL^{\mathrm{T}}L\right)$.

Solución:

(a) Si la factorización existe, L tiene la forma $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$.

Realizamos operaciones elementales de reemplazo en A para ponerla en forma escalonada:

$$A \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como hemos podido escalonar, la factorización existe y es $A = LU$ con

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) El vector $\mathbf{y}$ es la solución de $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Por tanto $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $-4 + y_3 = -4$; $y_3 = 0$ y $\mathbf{x}$ es la solución del sistema con matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con un reescalado ya obtenemos la forma escalonada reducida y con ello la solución general:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) $L + L^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $L - L^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $LL^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$,

$\det\left(LL^{\mathrm{T}}L\right) = \det L \cdot \det L^{\mathrm{T}} \cdot \det L = 1 \times 1 \times 1 = \boxed{1}$.

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 3

(3 pt.)

Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1.5 pt.) (a) Calcula $A^4\mathbf{x}$.

(1.5 pt.) (b) Calcula $\det\left(A^4\right)$.

Solución:

(a) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A^3\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A^4\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$.

(b) $\det A = -2$, $\det\left(A^4\right) = (-2)^4 = 16$.