

Capítulo 3

Series de números reales

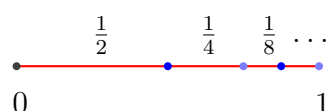
3.1. Introducción

Intuitivamente una serie es una “suma infinita”

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Por ejemplo, es fácil convencerse del siguiente hecho,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$



Sin embargo, no resulta tan claro qué significado tiene la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Para definir de forma rigurosa el concepto de serie consideramos la sucesión de sumas parciales

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\vdots$$

$$1$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

$$\vdots$$

y pasamos al límite.

DEFINICIÓN 3.1.1. Una serie de números reales $\sum a_n$ se dice que es convergente o sumable cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es convergente.

Al límite de la sucesión $\{s_n\}$ lo llamaremos suma de la serie y lo denotaremos como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Si $\{s_n\} \rightarrow \pm\infty$ diremos que la serie $\sum a_n$ es divergente.

Por tanto, estudiar la convergencia de una serie de números reales consiste en estudiar la convergencia de su sucesión de sumas parciales. Como no siempre será posible hallar explícitamente la expresión de s_n nos interesará disponer de criterios de convergencia para series que dependan del término general $\{a_n\}$.

El siguiente resultado nos dice que para estudiar el carácter de una serie (convergencia o divergencia) no importa eliminar un número finito de términos.

TEOREMA 3.1.1. Sea $k \in \mathbb{N}$ fijado. La serie $\sum a_n$ es convergente si y sólo si la serie $\sum a_{n+k}$ es convergente, en cuyo caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}.$$

TEOREMA 3.1.2 (Condición necesaria de convergencia de series).

Si $\sum a_n$ es una serie de números reales convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

OBSERVACIÓN 3.1.1. 1. El recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, la serie $\sum 1/n$, (serie armónica) de término general $a_n = 1/n$, cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

y, sin embargo, no es convergente (es fácil comprobar que $s_{2^n} > \frac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

2. El teorema anterior resulta de gran utilidad para probar que una serie no es convergente usándolo de la siguiente manera: si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum a_n$ no converge.

EJERCICIO 3.1.1. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ no converge.

PROPOSICIÓN 3.1.1 (**Propiedades de las series**). Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de números reales y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se cumplen las siguientes propiedades:

- 1) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes, entonces la serie $\sum (a_n + b_n)$ es también convergente y su suma viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

- 2) Si $\sum a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum (\lambda a_n)$ es también convergente y su suma viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

3.2. Suma de algunos tipos especiales de series

Calcular el valor de una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente consiste en calcular el límite de la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales. En general el cálculo de este límite no es fácil. En esta sección estudiaremos un tipo particular de series para las cuales es posible obtener una expresión del término general de la sucesión $\{s_n\}$ y calcular explícitamente su límite.

3.2.1. Series geométricas

Las series geométricas son series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, donde $|r| < 1$. En este caso la expresión de s_n viene dada por

$$s_n = r + r^2 + r^3 + \dots + r^n.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por r , se obtiene

$$r s_n = r^2 + r^3 + \dots + r^n + r^{n+1}.$$

Restando ambas expresiones se deduce que

$$(1 - r)s_n = r - r^{n+1},$$

y por tanto

$$s_n = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Finalmente, como $|r| < 1$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{r}{1 - r}.$$

Entonces, si $|r| < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es convergente y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1 - r}. \quad (3.2.1)$$

EJERCICIO 3.2.1 (Desarrollos decimales periódicos). *Calcula la fracción irreducible que le corresponde al número racional $0.\widehat{08}$ sumando la serie geométrica correspondiente. ¿Cuál le correspondería a $0.\widehat{9}$?*

OBSERVACIÓN 3.2.1. *El siguiente chiste*

<http://gaussianos.com/cervezas-geometricas>

ejemplifica el concepto de serie geométrica. También es interesante la siguiente página

<http://gaussianos.com/la-singular-belleza-de-las-demostraciones-visuales>

donde se presentan interpretaciones visuales de ciertas series geométricas.

3.3. Series de términos positivos

DEFINICIÓN 3.3.1. *Diremos que la serie $\sum a_n$ es una serie de términos positivos si se cumple que $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

OBSERVACIÓN 3.3.1. 1. *Una serie de términos positivos o bien es convergente o bien tiende a $+\infty$, puesto que su sucesión de sumas parciales es monótona creciente.*

2. *Las series de términos negativos ($a_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$) se estudian de igual forma sin más que cambiar el signo para pasar a una serie de términos positivos.*

3. *Se pueden tratar como series de términos positivos aquellas cuyos términos son positivos a partir de un término en adelante.*

3.3.1. Criterios de convergencia para series de términos positivos

Una serie $\sum a_n$ de términos positivos es convergente si y sólo si la sucesión $\{s_n\}$ está acotada.

Este resultado se satisface porque la sucesión $\{s_n\}$ es monótona creciente, ya que

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0.$$

Por tanto, $\{s_n\}$ es convergente si y sólo si está acotada.

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \quad (3.3.1)$$

Entonces se cumple que:

- 1) $\sum a_n$ divergente $\Rightarrow \sum b_n$ divergente.
- 2) $\sum b_n$ convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente.

OBSERVACIÓN 3.3.2. A la hora de usar en la práctica el criterio de comparación es importante conocer el carácter de la serie armónica generalizada $\sum 1/n^\alpha$, $\alpha > 0$, que es convergente para $\alpha > 1$ y divergente para $0 < \alpha \leq 1$.

EJERCICIO 3.3.1 (La cuerda elástica). Una oruga se encuentra en un extremo de una cuerda de goma que tiene 1 kilómetro de largo. La oruga va reptando a lo largo de la cuerda con una marcha regular de 1 centímetro por segundo. Transcurrido el primer segundo la cuerda elástica es estirada, haciendo ahora que mida un kilómetro más. Transcurrido otro segundo la cuerda vuelve a alargarse hasta medir un kilómetro más, y así sucesivamente. ¿Llegará la oruga a alcanzar el otro extremo de la cuerda? (Sorprendentemente la respuesta es sí).

Indicación: estamos suponiendo que la cuerda se estira uniformemente como una cinta de goma, lo que significa que la oruga es arrastrada hacia delante durante el alargamiento. Para resolver el problema se recomienda expresar el avance de la oruga tras cada segundo como una fracción de la longitud total de la cuerda.

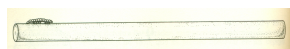


Figura 3.1: Una oruga que reptaba sobre una cuerda de goma que se va estirando más y más.

Criterio de comparación en el límite

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos y supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

- 1) Si $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo carácter, es decir, son ambas convergentes o ambas divergentes.
- 2) Si $L = 0$ y además
 - $\sum b_n$ es convergente entonces $\sum a_n$ es convergente.
 - $\sum a_n$ es divergente entonces $\sum b_n$ es divergente.
- 3) Si $L = +\infty$ y además
 - $\sum b_n$ es divergente entonces $\sum a_n$ es divergente.
 - $\sum a_n$ es convergente entonces $\sum b_n$ es convergente.

Criterio del cociente

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

- 1) Si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente.
- 2) Si $L > 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente.
- 3) Si $L = 1$ estamos en un caso dudoso (el criterio no decide).

Criterio de la raíz

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Entonces se cumple que:

- 1) Si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente.
- 2) Si $L > 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente.
- 3) Si $L = 1$ estamos ante un caso dudoso (el criterio no decide).