8.3.2 Teorema de Iteración en conj. regulares

Probaremos una condición necesaria, a cumplir por las cadenas pertenecientes a un conj. regular. Este resultado será un útil importante para la demostración de la NO pertenencia de un conj. a dicha familia.

Teorema (de Iteración):

Sea $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DAF $/ |Q| = n$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} w \in L(A) \\ |w| = m \geq n \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x, y, z \in \Sigma^* \Big/ \begin{array}{l} w = xyz \\ y \neq \varepsilon \\ xy^k z \in L(A),\ \forall k \geq \emptyset \end{array}$$

demo.

Sea $w = a_1 \dots a_m$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{Q} = \{ \delta(q_0, a_1 \dots a_i) \ / \ \emptyset \leq i \leq m \} \\ \\ A \text{ es un DFA} \end{array}\right\} \Rightarrow |\tilde{Q}| = m+1 > n = |Q| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\ \emptyset \leq p < r \leq n \ / \ q_p = q_r$, donde $q_i = \delta(q_0, a_1 \dots a_i)$

Sean entonces:
$$\left.\begin{array}{l} x := a_1 \cdots a_p \\ y := a_{p+1} \cdots a_r \\ z := a_{r+1} \cdots a_m \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} w = xyz,\ y \neq \varepsilon \\ \delta(q_0, x) = \delta(q_0, xy) \\ (\text{puesto que } q_p = q_r) \end{array}\right.$$

Demostraremos que $\underline{\delta(q_0, x) = \delta(q_0, xy^k),\ \forall k \geq \emptyset}$

Lo haremos por inducción en k:

$\underline{k = \emptyset}$ Trivial $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, xy^\emptyset)$

<u>$k \leq n$</u> Supuesto cierto

<u>$k = n+1$</u>

$$\delta(q_0, xy^{n+1}) = \delta(\delta(q_0, xy^n), y) = \text{(por hipótesis de inducción)} =$$

$$= \delta(\delta(q_0, x), y) = \delta(q_0, xy) = \delta(q_0, x) \quad \underline{\text{demostrado}}$$

Sea entonces $w = xyz$, tenemos que:

$$\Rightarrow \quad \delta(q_0, w) = \delta(q_0, xyz) = \delta(\delta(q_0, xy), z) = \delta(\delta(q_0, xy^k), z) =$$

$w = xyz$

$$\left.\begin{array}{l} = \delta(q_0, xy^k z) \\ w \in L(A) \end{array}\right\} \Rightarrow xy^k z \in L(A), \; \forall k \geq 0$$

<u>demostrado.</u>

<u>NOTA</u>: Este teorema suele conocerse también bajo el nombre de "The Pumping Lemma" (Lema del Bombeo).

<u>Corolario</u>: Sea G el diagrama de estados de un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ / $|Q| = n$. Entonces cualquier trayectoria de longitud $m \geq n$ en G tiene un ciclo.

<u>demo.</u> Trivial

Ejemplo: Veremos que el conjunto $L = \{ \emptyset^n 1^n / n \geq 1 \}$ no es un conj. regular.

Supongamos que L es un conj. regular, entonces por el Lema del Bombeo, $\exists n \geq 1 / w = \emptyset^n 1^n = xyz \,/\, \begin{cases} y \neq \varepsilon \\ xy^k z \in L, \ \forall k \geq \emptyset. \end{cases}$

Intentaremos buscar un caso en contradicción con lo expuesto:

$$\left.\begin{array}{l} y \neq \varepsilon \\ xyz = \emptyset^n 1^n \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} y \in \emptyset^+ \\ \text{ó} \\ y \in 1^+ \end{array}\right\} \Rightarrow xz = xy^0 z \notin L \\ \text{ó} \\ y \in \emptyset^+ 1^+ \Rightarrow xyyz \notin L \end{array}\right\} \ \underline{\text{absurdo}}$$

8.3.3 Propiedades de cierre de los conj. regulares.

Definición: Sea A un conj. arbitrario, decimos que es <u>cerrado</u> para una operación n-aria O sii $O(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A \Leftarrow a_i \in A, \ \forall 1 \leq i \leq n.$

Ejemplo: Los números enteros son cerrados para la suma y la resta.

Teorema: Los conj. regulares son cerrados bajo unión, concatenación y cierre de Kleene.

demo. Trivial por def. de expresión reg.

Teorema: La clase de los conj. regulares es cerrada para el complemento.

Esto es, $\left.\begin{array}{l} L \text{ es un conj. regular} \\ L \subseteq \Sigma^* \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma^* \setminus L$ es un conj. regular.

demo.

Sea $L \subseteq \Sigma^* / L = L(A_1)$, $A_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta, q_0, F)$ un DFA, donde $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ es el conj. de terminales de Σ utilizados para formar L.

Sea $d \notin Q_1$, lo definiremos como un estado pozo, en la forma $\delta(d, a) := d$, $\forall a \in \Sigma$

$\delta(q, a) := d$, $\forall q \in Q_1$, $\forall a \in \Sigma / \nexists\, \delta(q,a)$ en A_1

Entonces, si $Q := Q_1 \cup \{d\}$, tenemos que $L = L(A) / A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

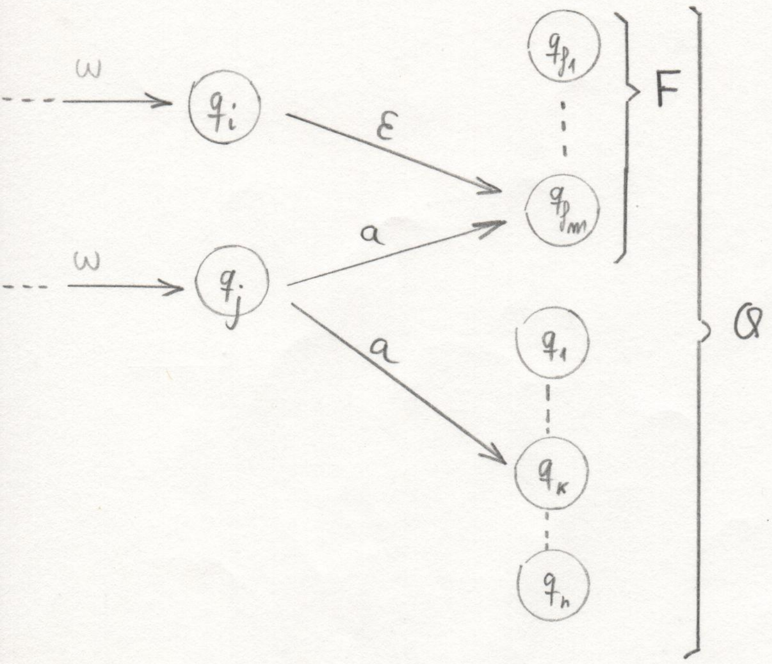
donde podemos suponer sin pérdida de generalidad que A no contiene transiciones ε.

Sea $\left.\begin{array}{l} \tilde{A} := (Q, \Sigma, q_0, \{Q \setminus F\} \cup \{d\}) \\ \tilde{A} \text{ determinista} \\ \tilde{A} \text{ sin } \varepsilon\text{-transiciones} \end{array}\right\} \Rightarrow L(\tilde{A}) = \Sigma^* \setminus L$

demostrado.

NOTA: La hipótesis de que A es determinista y sin transiciones ε, es fundamental para asegurar que $L(\tilde{A}) = \Sigma^* \setminus L$.

En efecto, supongamos la situación genérica dada por el siguiente gráfico de estados:



Supongamos que $wa \in L$, $\delta(q_0, w) = q_j$ entonces deberíamos tener que $wa \notin L(\tilde{A})$ cosa que con este diagrama no es cierta.

En la misma línea, supongamos que $w \in L$, $\delta(q_0, w) = q_i$ deberíamos tener que $w \notin L(\tilde{A})$, lo cual tampoco es cierto.

<u>NOTACIÓN</u>: Notaremos $\Sigma^* \setminus L$ como $\overline{L}$.

<u>Teorema</u>: La clase de los conj. regulares es cerrada para la intersección.

<u>demo.</u> Sean $\left.\begin{array}{l} L_1 = L(A_1) \\ L_2 = L(A_2) \end{array}\right/ A_i,\ i=1,2$ DFAs. Entonces:

$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ y por tanto el resultado es trivial a partir de los th. anteriores. <u>demostrado</u>

<u>NOTA</u>: La demostración puede hacerse directamente, construyendo el correspondiente DFA.

Intuitivamente, si $A_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_{0i}, F_i)$, $i=1,2$; el autómata buscado viene dado por:

$$A = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_{01}, q_{02}), F_1 \times F_2)$$

donde la función de transición δ viene definida por:

$$\delta((q_1, q_2), a) := (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)), \ \forall a \in \Sigma, \ \forall q_1 \in Q_1, \ \forall q_2 \in Q_2$$