Nombre y apellidos: _________ **S O L U C I O N E S** _________ DNI: ____________

Parcial 1

23 de febrero de 2018, 11:00 a 11:50h – Aula Magna

Pregunta 1

(5 pt.)

Sea M una matriz cuya primera columna es $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, una de las otras columnas es $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ y las filas no nulas de su forma escalonada reducida son las dos filas de $N = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(.5 pt.) (a) Escribe la forma escalonada reducida de M.

(.5 pt.) (b) Para cada columna de M (la primera, la segunda, etc.), indica si es una columna pivote o no.

(.5 pt.) (c) Di si el siguiente enunciado es verdadero o falso:

Las operaciones elementales de filas respetan las combinaciones lineales de las columnas, en consecuencia, como la cuarta columna de N es igual a $5 \times (\text{columna } 1) + 2 \times (\text{columna } 3)$, esto implica que también se cumple lo mismo en M.

(.5 pt.) (d) Escribe la segunda columna de M.

(.5 pt.) (e) Halla la matriz M (hay varias respuestas correctas, basta que halles una de ellas).

(1 pt.) (f) ¿Qué ecuación deben cumplir los números a, b, c para que el vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ pertenezca al espacio columna de M ($\mathbf{v} \in \operatorname{Col} M$)? es decir, para que $\mathbf{v}$ sea combinación lineal de las columnas de M.

(1.5 pt.) (g) Escribe un vector no nulo $\mathbf{b}$ tal que el sistema de ecuaciones lineales $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea compatible y escribe la solución general de ese sistema en forma paramétrica vectorial.

Solución:

(a) Por el número de elementos de $\mathbf{p}$ y de $\mathbf{q}$ vemos que la matriz M tiene 3 filas. En consecuencia su forma escalonada reducida también tiene tres filas. Por tanto la forma escalonada reducida de M es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) En la forma escalonada reducida vemos que las columnas pivote son la primera y la tercera, por tanto:

Col. 1: pivote, col. 2: no pivote, col. 3: pivote, col. 4: no pivote.

(c) Verdadero.

(d) Como la segunda columna de N es igual a $(-3) \times$ (columna 1), lo mismo ocurre en M, por lo que la segunda columna es

$$-3\,\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(e) Ya conocemos las columnas 1 y 2 de M, por tanto $\mathbf{q}$ sólo puede ser la tercera o la cuarta. Las dos posibilidades conducen a una respuesta válida diferente. Si ponemos $\mathbf{q}$ en la tercera columna, M sería

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & x \\ -2 & 6 & 3 & y \\ 1 & -3 & -6 & z \end{pmatrix}$$

y por lo dicho en el apartado (c),

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{luego} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Nombre y apellidos: ______________ S O L U C I O N E S ______________ DNI: ______________

(f) Para que sea cierto $\mathbf{v} \in \operatorname{Col} M$ el sistema $M\mathbf{x} = \mathbf{v}$ debe ser compatible. Por tanto hallamos una forma escalonada de la matriz ampliada $[M \mid \mathbf{v}]$:

$$[M \mid \mathbf{v}] = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & a \\ -2 & 6 & 3 & -4 & b \\ 1 & -3 & -6 & -7 & c \end{pmatrix} \to \text{(fase progresiva)} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & a \\ 0 & 0 & 3 & 6 & b+2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a+2(b+2a) \end{pmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible debe ser $c - a + 2(b + 2a) = 0$ o $\boxed{3a + 2b + c = 0}$.

(g) Basta elegir valores cualesquiera para a, b, c que cumplan $3a + 2b + c = 0$. Por ejemplo $a = 0$, $b = 3$, $c = -6$, o sea: $\boxed{\mathbf{b} = (0, 3, -6)}$. Para hallar la solución de $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ completamos el proceso de eliminación:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{(fase regresiva)} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto en este caso la solución general del sistema en forma paramétrica vectorial es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$