Ejercicios de la sección 2.2 Aplicaciones lineales entre espacios $\mathbf{R}^n$

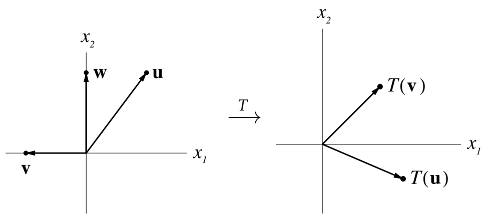
(Para hacer en clase: 3, 5, 8, 15, 16, 20, 22, 24.)
(Con solución o indicaciones: 1, 2, 4, 6, 10, 13, 17, 19, 21, 23.)

►**1.** Sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una transformación lineal que transforma

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Usa el hecho de que T es lineal para encontrar las imágenes bajo T de $3\mathbf{u}$, $2\mathbf{v}$ y $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$.

►**2.** La figura muestra los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ junto con las imágenes $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$ bajo la acción de una transformación lineal $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Copia cuidadosamente esta figura, y luego dibuja la imagen $T(\mathbf{w})$ con tanta precisión como sea posible.



Sugerencia: Primero, escribe $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

►**3.** Sean

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

y sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una transformación lineal que transforma $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{y}_2$. Halla la imágen de $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ y la de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

►**4.** Sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$, y sea $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una transformación lineal que transforma $\mathbf{x}$ en $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2$. Halla una matriz A tal que $T(\mathbf{x})$ sea $A\,\mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x}$.

En los ejercicios 5 y 6, indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica cada una de tus respuestas.

►**5.**

(a) Una transformación lineal es un tipo especial de función.

(b) Si A es una matriz de orden 3×5 y T una transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$, entonces el dominio de T es $\mathbf{R}^3$.

(c) Si A es una matriz de orden $m \times n$, entonces el conjunto imagen de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es $\mathbf{R}^2$.

(d) Cuando se realizan dos aplicaciones lineales una después de la otra, el efecto combinado puede no ser siempre una aplicación lineal.

(e) Una transformación T es lineal si, y sólo si, $T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$ para todo $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en el dominio de T y para todos los números c_1 y c_2.

►**6.**

(a) Toda transformación matricial es una transformación lineal.

(b) Si $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gira los vectores del plano alrededor del origen en un ángulo φ, entonces T es una aplicación lineal.

(c) Si $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es una transformación lineal y $\mathbf{b}$ es un vector de $\mathbf{R}^m$, entonces una pregunta de unicidad es: ¿Está $\mathbf{b}$ en la imagen de T?.

(d) Una transformación lineal conserva las operaciones de suma de vectores y de multiplicación por números.

(e) El principio de superposición es una descripción física de una transformación lineal.

7. Supongamos que los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ generan $\mathbf{R}^n$ y sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal. Demuestra que si $T(\mathbf{v}_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, p$. entonces T es la transformación cero. Esto es, demuestra que si $\mathbf{x}$ es cualquier vector en $\mathbf{R}^n$, entonces $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

►**8.** Dados $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{p}$ en $\mathbf{R}^n$, la recta que pasa por $\mathbf{p}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ tiene la ecuación paramétrica $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\,\mathbf{v}$. Demuestra que una transformación lineal $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ transforma esta recta en otra recta o en un único punto.

9. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores linealmente independientes en $\mathbf{R}^3$, y sea P el plano que pasa por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{0}$. La ecuación paramétrica de P es $\mathbf{x} = s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}$ (con s, t en $\mathbf{R}$). Demuestra que una transformación lineal $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ transforma P en un plano que pasa por $\mathbf{0}$, o en una recta que pasa por $\mathbf{0}$, o transforma todo P en el origen de $\mathbf{R}^3$. ¿Qué condición deben cumplir $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$ para que la imagen de P sea un plano? ¿Y para que sea un punto?

►**10.** El segmento rectilíneo que va desde $\mathbf{0}$ hasta un vector $\mathbf{u}$ es el conjunto de puntos de la forma $t\mathbf{u}$, con $0 \leq t \leq 1$. Demuestra que una transformación lineal T lleva este segmento al segmento que que va desde $\mathbf{0}$ hasta $T(\mathbf{u})$.

11. Este ejercicio muestra que una aplicación lineal transforma una recta cualquiera en otra recta o en un punto.

(a) Demuestra que la recta que pasa por los puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ en $\mathbf{R}^n$ tiene la ecuación paramétrica $\mathbf{x} = (1-t)\mathbf{p} + t\,\mathbf{q}$ con t en $\mathbf{R}$.

(b) El segmento de recta de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ es el conjunto de puntos de la forma $(1-t)\mathbf{p} + t\,\mathbf{q}$ con $0 \leq t \leq 1$. Demuestra que una transformación lineal T transforma este segmento en otro segmento o en un único punto.

12. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en $\mathbf{R}^n$. Es posible demostrar que todos los puntos del paralelogramo P determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la forma $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ con $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$. Sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal. Explica por qué la imagen de un punto en P mediante la transformación T está en el paralelogramo determinado por $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$.

►**13.** Definamos $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ por la fórmula $f(x) = mx + b$.

(a) Demuestra que f es una transformación lineal cuando $b = 0$.

(b) Indica una propiedad de las transformaciones lineales que se viole cuando $b \neq 0$.

(c) ¿Por qué se dice que f es una "función lineal"?

14. Una *transformación afín* $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ tiene la forma $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde A es una matriz de orden $m \times n$ y $\mathbf{b}$ es un vector en $\mathbf{R}^m$. Demuestra que si $\mathbf{b} \neq 0$ entonces T no es una transformación lineal.

►**15.** Sean $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un conjunto ligado en $\mathbf{R}^n$. Explica por qué el conjunto $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)\}$ es también ligado.

En los ejercicios 16 a 20, los vectores se escriben como coordenadas, por ejemplo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, y $T(\mathbf{x})$ se escribe como $T(x_1, x_2)$.

►**16.** Demuestra que la transformación T definida por $T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, 3|x_2|)$ no es lineal.

►**17.** Demuestra que la transformación T definida por $T(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + 4, 5x_2)$ no es lineal.

18. Sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal. Demuestra que si T transforma dos vectores linealmente independientes en un conjunto ligado, entonces la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tiene alguna solución no trivial.

Sugerencia: Supongamos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbf{R}^n$ son linealmente independientes, pero que $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$ son linealmente dependientes. Entonces $c_1T(\mathbf{u}) + c_2T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para algunos pesos c_1 y c_2, donde al menos uno de ellos no es cero.

►**19.** Sea $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación que refleja cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en el plano $x_3 = 0$, es decir: $T(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, -x_3)$. Demuestra que T es una transformación lineal.

►**20.** Sea $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la transformación que proyecta cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ sobre el plano $x_2 = 0$, de modo que $T(\mathbf{x}) = (x_1, 0, x_3)$. Demuestra que T es una transformación lineal.

En los ejercicios 21 y 22, la matriz dada determina una transformación lineal T. Halla todos los vectores $\mathbf{x}$ que satisfagan $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

►**21.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & -5 \\ -9 & 7 & -8 & 0 \\ -6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & -3 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

►**22.** $\begin{pmatrix} -9 & -4 & -9 & 4 \\ 5 & -8 & -7 & 6 \\ 7 & 11 & 16 & -9 \\ 9 & -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

►**23.** Sea $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ y A la matriz del ejercicio 21. ¿Está $\mathbf{b}$ en la imagen de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$?. En caso afirmativo, halla un $\mathbf{x}$ cuya imagen por la transformación sea $\mathbf{b}$.

►**24.** Sea $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$ y A la matriz del ejercicio 22. ¿Está $\mathbf{b}$ en la imagen de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$?. En caso afirmativo, halla un $\mathbf{x}$ cuya imagen por la transformación sea $\mathbf{b}$.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 2.2

1. $T(3\mathbf{u}) = 3T(\mathbf{u}) = 3\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}6\\3\end{smallmatrix}\right)$; $T(2\mathbf{v}) = 2T(\mathbf{v}) = 2\left(\begin{smallmatrix}-1\\3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-2\\6\end{smallmatrix}\right)$; $T(3\mathbf{u}+2\mathbf{v}) = T(3\mathbf{u}) + T(2\mathbf{v}) = \left(\begin{smallmatrix}6\\3\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}-2\\6\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}4\\9\end{smallmatrix}\right)$.

2. Observando en la gráfica que la recta que pasa por $\mathbf{w}$ y por $\mathbf{u}$ es paralela al eje x_1 y que la recta que pasa por $\mathbf{w}$ y por $\mathbf{v}$ es paralela a $\mathbf{u}$ se deduce que $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Luego, por linealidad, $T(\mathbf{w}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ y por tanto este vector se construye completando el paralelogramo.

4. $T(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = x_1\left(\begin{smallmatrix}-2\\5\end{smallmatrix}\right) + x_2\left(\begin{smallmatrix}7\\-3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-2 & 7\\5 & -3\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-2 & 7\\5 & -3\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, Luego $A = \left(\begin{smallmatrix}-2 & 7\\5 & -3\end{smallmatrix}\right)$.

6. (a) Recuérdense las propiedades del producto matriz por vector, (b) Es una aplicación matricial con matriz $\left(\begin{smallmatrix}\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi\\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\end{smallmatrix}\right)$. O también: Es lineal porque es la composición de dos reflexiones (que son aplicaciones lineales, una sobre el eje x y otra sobre la recta por el origen de pendiente $\tan\varphi/2$. O incluso: Es lineal porque es continua, conserva el origen y lleva rectas en restas), (c) Esta es una pregunta de existencia, (d) Recuérdese la definición de transformación lineal, (e) Ver la sección 2.2.

10. $T(t\mathbf{u}) = tT(\mathbf{u})$ con $0 \le t \le 1$. Esto es el segmento que que va desde $\mathbf{0}$ ($t = 0$) hasta $T(\mathbf{u})$ ($t = 1$).

13. (a) Si $b = 0$, $f(x+y) = m(x+y) = mx + my = f(x) + f(y)$ y $f(kx) = m \cdot kx = k(mx) = kf(x)$, luego f es lineal. (b) Se viola tanto la propiedad $f(x+y) = f(x) + f(y)$ como la propiedad $f(kx) = kf(x)$. (c) Porque está definida por un polinomio de primer grado (o polinomio "lineal") cuya gráfica es una línea recta.

17. $T(0,0) = (0,4,0) \neq (0,0,0)$, luego falla la propiedad $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y por tanto T no es lineal.

19. Primera propiedad:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= (x_1+y_1, x_2+y_2, -(x_3+y_3)) \\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2, -x_3-y_3) \\ &= (x_1, x_2, -x_3) + (y_1, y_2, -y_3) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Segunda propiedad:

$$\begin{aligned} T(k\mathbf{x}) &= (kx_1, kx_2, -(kx_3)) \\ &= (kx_1, kx_2, k(-x_3)) \\ &= k(x_1, x_2, -x_3) = kT(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

21. Hay que resolver un sistema homogéneo. La forma escalonada reducida de la matriz de coeficientes se puede obtener, por ejemplo, mediante las siguientes operaciones elementales: $(-1)F_1$, $F_1 + F_4$, $F_2 + 9F_1$, $F_3 + 6F_1$, $F_4 - 5F_1$, $F_3 - F_2$, $F_4 + F_2$, $F_4 - 3F_3$ (con esto se llega a una forma escalonada), $\frac{1}{4}F_3$, $F_2 - 19F_3$, $F_1 - 3F_3$, $-\frac{1}{2}F_2$ y $F_1 + F_2$. Así se obtiene: $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 & 0 & -7/2\\0 & 1 & 0 & -9/2\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ y de aquí la solución general en forma paramétrica vectorial es:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}7/2\\9/2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{o también:} \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}7\\9\\0\\2\end{pmatrix}.$$

23. Nos piden decir si el sistema con matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$ es compatible y hallar una solución particular en caso de que lo sea. Realizando sobre esta matriz las primeras ocho operaciones elementales usadas en el ejercicio 21 se llega a la siguiente matriz escalonada: $\left(\begin{smallmatrix}1 & -1 & 3 & 1 & 0\\0 & -2 & 19 & 9 & 5\\0 & 0 & 4 & 0 & 4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ en la que vemos que no hay un pivote en la columna de los términos independientes y por tanto el sistema es compatible. Por tanto $\mathbf{b}$ está en la imagen de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\,\mathbf{x}$. Para hallar un vector cuya imagen por la transformación sea $\mathbf{b}$ continuamos el proceso de reducción a forma escalonada con las restantes operaciones elementales usadas en el ejercicio 21 y llegamos a $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 & 0 & -7/2 & 4\\0 & 1 & 0 & -9/2 & 7\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ de donde obtenemos la solución particular $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix}4\\7\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$. Compruébese ahora que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.