Ejercicios de la sección 5.5 Espacio fila y rango de una matriz

(Para hacer en clase: 2, 6, 7, 9, 12, 14, 17, 20, 24, 26, 29, 30, 31.)
(Con solución o indicaciones: 1, 5, 8, 10, 13, 18, 19, 22, 27, 28, 32.)

En cada uno de los ejercicios 1 a 4 se dan dos matrices, A y B. Sabiendo que en cada caso las matrices A y B son equivalentes por filas y sin realizar ningún cálculo halla el rango de A y una base del espacio fila de A, $\operatorname{Fil} A$.

▶**1.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

▶**2.** $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -2 & -7 \\ 2 & -6 & 4 & 8 \\ 3 & -9 & -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 7 & 5 \\ -5 & 9 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix},$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

▶**5.** Sabiendo que A es una matriz 4×7 de rango 3, halla $\dim \operatorname{Nul} A$, $\dim \operatorname{Fil} A$ y $\operatorname{Rang}(A^{\mathrm{T}})$.

▶**6.** Sabiendo que A es una matriz 7×5 de rango 2, halla $\dim \operatorname{Nul} A$, $\dim \operatorname{Fil} A$ y $\operatorname{Rang}(A^{\mathrm{T}})$.

▶**7.** Suponiendo que A es una matriz 4×7 con cuatro pivotes, ¿Es $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^4$?

▶**8.** Sabiendo que A es una matriz 6×8 con cuatro pivotes, halla $\dim \operatorname{Nul} A$. ¿Es $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^4$? ¿Por qué?

▶**9.** Sabiendo que A es una matriz 4×6 cuyo espacio nulo es tridimensional, halla la dimensión del espacio columna de A. ¿Es $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^3$? ¿Por qué?

▶**10.** Si el espacio nulo de una matriz 8×7 tiene dimensión 5, ¿cuál es la dimensión de su espacio columna?

11. Si el espacio nulo de una matriz 8×5 tiene dimensión 3, ¿cuál es la dimensión de su espacio fila?

▶**12.** Si el espacio nulo de una matriz 5×4 tiene dimensión 2, ¿cuál es la dimensión de su espacio fila?

▶**13.** ¿Cuál es el máximo rango posible de una matriz 7×5? ¿Y de una matriz 5×7?

▶**14.** ¿Cuál es la máxima dimensión posible del espacio fila de una matriz 5×4? ¿Y de una matriz 4×5?

15. ¿Cuál es la mínima dimensión posible del espacio nulo de una matriz 3×7?

16. ¿Cuál es la mínima dimensión posible del espacio nulo de una matriz 7×5?

En los ejercicios 17 y 18 indica para cada enunciado si es verdadero o falso y justifica tus respuestas.

▶**17.**

(a) El espacio fila de A es el mismo que el espacio columna de A^{T}.

(b) Si B es una forma escalonada de A y si B tiene exactamente tres filas no nulas, entonces las primeras tres filas de A forman una base de $\operatorname{Fil} A$.

(c) Las dimensiones del espacio fila y del espacio columna de cualquier matriz son siempre iguales sin excepción incluso si la matriz no es cuadrada.

(d) La suma de las dimensiones del espacio fila y del espacio nulo de una matriz cualquiera A es igual al número de columnas de A.

(e) Las operaciones elementales hechas en un ordenador pueden cambiar el rango aparente de una matriz.

(f) La dimensión del espacio columna de A es $\operatorname{Rang} A$.

▶**18.**

(a) Si B es una forma escalonada de A, entonces las columnas pivote de B forman una base del espacio columna de A.

(b) Las operaciones elementales de filas conservan las relaciones de dependencia lineal que pueda haber entre las filas de una matriz.

(c) La dimensión del espacio nulo de A es el número de columnas de A que no son columnas pivote.

(d) El espacio fila de A^{T} es igual al espacio columna de A.

(e) Si A y B son matrices equivalentes por filas entonces sus espacios fila son el mismo.

▶**19.** Supongamos que las soluciones de un sistema homogéneo de cinco ecuaciones lineales con seis incógnitas son todas múltiplos de una solución no trivial. ¿Tendrá solución todo sistema que tenga los mismos coeficientes pero distintos términos independientes?

▶**20.** Supongamos que un sistema no homogéneo de seis ecuaciones lineales con ocho incógnitas es compatible y tiene dos variables libres. ¿Es posible modificar los términos independientes de forma que el nuevo sistema sea incompatible?

21. Supongamos que un sistema no homogéneo de nueve ecuaciones lineales con diez incógnitas sigue siendo compatible aunque se cambien los términos independientes como se quiera. ¿Es posible hallar dos soluciones independientes del sistema homogéneo asociado?

▶**22.** ¿Es posible que todas las soluciones de un sistema homogéneo de 10 ecuaciones lineales con 12 incógnitas sean múltiplos de una misma solución no trivial? ¿Por qué?

23. Supongamos que un sistema homogéneo de doce ecuaciones lineales con ocho incógnitas tiene dos soluciones que no son una múltiplo de la otra y toda otra solución es combinación lineal de esas dos. ¿Puede el conjunto solución ser descrito por menos de doce ecuaciones lineales? En caso afirmativo, ¿por cuántas?

▶**24.** ¿Es posible que un sistema no homogéneo de siete ecuaciones lineales con seis incógnitas sea determinado? ¿Es posible que sea determinado para cualesquiera términos independientes que se le pongan?

Versión de 20 de enero de 2023, 15:34 h.

25. Supongamos que un sistema no homogéneo de diez ecuaciones lineales con doce incógnitas es compatible y tiene tres variables libres. ¿Seguirá siendo compatible todo sistema obtenido del anterior al cambiar los términos independientes como se quiera?

Los ejercicios 26 a 28 tratan sobre los *espacios fundamentales* asociados con una matriz A de m filas y n columnas.

►**26.** ¿Cuántos subespacios distintos aparecen el la siguiente lista: $\operatorname{Fil} A$, $\operatorname{Col} A$, $\operatorname{Nul} A$, $\operatorname{Fil} A^{\mathrm{T}}$, $\operatorname{Col} A^{\mathrm{T}}$, $\operatorname{Nul} A^{\mathrm{T}}$? ¿Cuáles de ellos están en $\mathbf{R}^m$ y cuáles en $\mathbf{R}^n$?

►**27.** Justifica las siguientes igualdades:

(a) $\dim \operatorname{Fil} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$

(b) $\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A^{\mathrm{T}} = m$

►**28.** Usa el ejercicio anterior para explicar por qué la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución para todo $\mathbf{b}$ de $\mathbf{R}^m$ si y sólo si la ecuación $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial.

►**29.** Supongamos que A es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{b}$ es un vector de $\mathbf{R}^m$. ¿Qué deben cumplir los dos números $\operatorname{Rang}[A \;\; \mathbf{b}]$ y $\operatorname{Rang} A$ para que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea compatible?

Las matrices de rango 1 tienen gran importancia en ciertos algoritmos numéricos programables en el ordenador y en ciertos contextos numéricos como es la *descomposición en valores singulares*. Se puede demostrar que una matriz A tiene rango 1 si y sólo si es de la forma $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$. Los ejercicios 30 a 32 sugieren por qué esta propiedad es cierta.

►**30.** Si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ verifica $\operatorname{Rang}(\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}) \leq 1$.

►**31.** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ halla un vector $\mathbf{v}$ en $\mathbf{R}^3$ tal que $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$.

►**32.** Sea A una matriz 2×3 tal que $\operatorname{Rang} A = 1$ y sea $\mathbf{u}$ la primera columna de A. Explica por qué si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ entonces existe un vector $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ tal que $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$. ¿Qué se podría hacer si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$?

33. Sea A una matriz $m \times n$ de rango $r > 0$ y sea U una forma escalonada de A. Explica por qué existe una matriz inversible E tal que $A = EU$. Usa esta factorización para escribir A como la suma de matrices de rango 1.
(*Pista*: Piensa en un producto de matrices como un producto de matrices por bloques en el que la matriz de la izquierda está partida en sus columnas y la de la derecha en sus filas.)

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 5.5

1. $\operatorname{Rang} A = 2$, Base de $\operatorname{Fil} A$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$ (filas no nulas de la forma escalonada).

5. $\dim \operatorname{Nul} A = 4$, $\dim \operatorname{Fil} A = 3$ y $\operatorname{Rang}(A^{\mathrm{T}}) = 3$.

8. $\dim \operatorname{Nul} A = 4$. $\operatorname{Col} A \neq \mathbf{R}^4$ porque $\operatorname{Col} A$ es un subespacio de $\mathbf{R}^6$ y $\mathbf{R}^4$ no.

10. $\dim \operatorname{Col} A = 2$.

13. 5 en los dos casos.

18. (a) Las operaciones de filas no siempre conservan el espacio columna de una matriz., (b) Si la fila 2 es el doble de la primera, eso ya no se cumple después de la operación $F_2 - 2F_1$., (c) Ya que es igual al número de parámetros de la solución general de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y este número es igual al número de variables libres., (d) Las filas de A^{T} son las columnas de A., (e) Las operaciones elementales de filas conservan el espacio fila..

19. Sí porque la dimensión del espacio nulo de la matriz de coeficientes es igual a 1 y entonces la matriz tiene $6 - 1 = 5$ pivotes y por tanto tiene un pivote en cada fila.

22. No es posible porque para ello la dimensión del espacio nulo de la matriz de coeficientes tendría que ser igual a 1 y entonces la matriz tendría $12 - 1 = 11$ pivotes, lo que es imposible porque sólo tiene 10 filas.

27. (a) Número de pivotes de A más número de columnas no pivote de A es igual al número total de columnas de A. (b) Número de pivotes de A^{T} más número de columnas no pivote de A^{T} es igual al número total de columnas de A^{T}.

28. Por la igualdad (b) del ejercicio anterior, la dimensión del espacio columna es m si y sólo si la dimensión del espacio nulo de la traspuesta es cero.

32. Las columnas 2 y 3 de A son necesariamente múltiplos de $\mathbf{u}$, por tanto A es de la forma $A = [\mathbf{u} \;\; h\mathbf{u} \;\; k\mathbf{u}] = \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ con $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ k \end{pmatrix}$.