Ejercicios de la sección 1.5 Conjuntos solución

(Clase de prácticas: 1, 3, 7, 15, 17, 19, 23, 25, 26, 29, 30, 31, 32, 36, 40, 41.)

►**1.** Cada una de las siguientes ecuaciones determina un plano en $\mathbf{R}^3$. ¿Se intersecan los dos planos? Si lo hacen, describe su intersección.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

2. Escribe la solución general de $10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7$ en forma vectorial paramétrica.

En los ejercicios 3 a 6, determina si el sistema tiene una solución no trivial. Trata de emplear tan pocas operaciones elementales de fila como sea posible.

►**3.**
$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} -3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0 \\ -6x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} -5x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 7 y 8, escribe en forma vectorial paramétrica la solución del sistema homogéneo dado.

►**7.**
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 0 \\ - 3x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 9 a 14, describe todas las soluciones de $A\,\mathbf{x} = 0$ en forma vectorial paramétrica, donde A sea equivalente por filas a la matriz dada.

9. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

►**15.** Supongamos que el conjunto solución de cierto sistema de ecuaciones lineales puede describirse como $x_1 = 5 + 4x_3$, $x_2 = -2 - 7x_3$, (x_3 libre). Usa vectores para describir este conjunto como una recta en $\mathbf{R}^3$.

16. Supongamos que el conjunto solución de cierto sistema de ecuaciones lineales puede describirse como $x_1 = 3x_4$, $x_2 = 8 + x_4$, $x_3 = 2 - 5x_4$, (x_4 libre). Usa vectores para describir este conjunto como una recta en $\mathbf{R}^4$.

►**17.** Describe en forma vectorial paramétrica las soluciones del siguiente sistema.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -1 \\ - 3x_2 - 6x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Da también una descripción geométrica del conjunto solución y compáralo con el del ejercicio 7.

18. Igual que en el ejercicio 17, describe las soluciones del siguiente sistema en forma paramétrica vectorial y compáralo geométricamente con el conjunto solución del ejercicio 8.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 &= -6 \end{aligned}$$

►**19.** Describe y compara los conjuntos solución de las ecuaciones $x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 0$ y $x_1 + 9x_2 - 4x_3 = -2$.

20. Describe y compara los conjuntos solución de las ecuaciones $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$ y $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4$.

En los ejercicios 21 y 22, halla la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $\mathbf{a}$ y es paralela a $\mathbf{b}$.

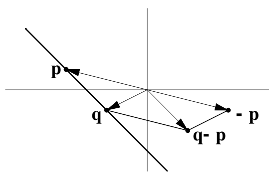
21. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 23 y 24, halla una ecuación paramétrica de la recta ℓ que pasa por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$. [Indicación: ℓ es paralela al vector $\mathbf{q} - \mathbf{p}$.]

►**23.** $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

24. $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$



En los ejercicios 25 y 26, indica para cada afirmación si es verdadera o falsa. Justifica cada respuesta.

▶**25.**

(a) Una ecuación homogénea siempre es compatible.

(b) La ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ proporciona una descripción explícita de su conjunto solución.

(c) La ecuación homogénea $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución trivial si, y sólo si, cuenta por lo menos con una variable libre.

(d) La ecuación $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\,\mathbf{v}$ describe una recta que pasa por $\mathbf{v}$ y es paralela a $\mathbf{p}$.

(e) El conjunto solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el conjunto de todos los vectores de la forma $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$, donde $\mathbf{v}$ es cualquier solución de la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

▶**26.**

(a) Si $\mathbf{x}$ es una solución no trivial de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces todos los elementos de $\mathbf{x}$ son diferentes de cero.

(b) La ecuación $\mathbf{x} = x_2\mathbf{u} + x_3\mathbf{v}$, con x_2 y x_3 arbitrarios (y con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tales que no son múltiplos entre sí), describe un plano que pasa por el origen.

(c) La ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es homogénea si el vector cero es una solución.

(d) El efecto de sumar $\mathbf{p}$ a un vector es trasladar el vector en una dirección paralela a $\mathbf{p}$.

(e) El conjunto solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se obtiene al trasladar el conjunto solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ por un vector cualquiera.

27. Los siguientes dos apartados demuestran el teorema que relaciona las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con las del sistema homogéneo asociado, a saber: *Si $\mathbf{p}$ es una solución particular de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, las soluciones de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ son precisamente los vectores la forma $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$, donde $\mathbf{v}$ es una solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

(a) Supongamos que $\mathbf{p}$ es una solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (de manera que $A\,\mathbf{p} = \mathbf{b}$) y que $\mathbf{v}$ es una solución de la ecuación homogénea $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Definamos el vector $\mathbf{w}$ como $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$. Demuestra que $\mathbf{w}$ es una solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(b) Sea $\mathbf{w}$ cualquier solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y sea $\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{p}$. Demuestra que $\mathbf{v}$ es una solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

28. Supongamos que $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución. Explica por qué la solución es única precisamente cuando $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial.

▶**29.** Supongamos que A es la matriz cero de orden 3×3 (todos los elementos iguales a cero). Describe el conjunto solución de la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

▶**30.** Si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, ¿el conjunto solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede ser un plano que pase por el origen? Explica tu respuesta.

En cada uno de los ejercicios 31 a 34 se da una matriz $m \times n$. Para cada uno de ellos contesta a las siguientes dos preguntas:

(a) ¿La ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial?.

(b) ¿La ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución para todos los vectores $\mathbf{b}$ de $\mathbf{R}^m$?.

▶**31.** A es una matriz de orden 3×3 con tres posiciones pivote.

▶**32.** A es una matriz de orden 3×3 con dos posiciones pivote.

33. A es una matriz de orden 3×2 con dos posiciones pivote.

34. A es una matriz de orden 2×4 con dos posiciones pivote.

35. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 7 & 21 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$, halla mediante inspección una solución no trivial de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. [*Sugerencia:* Piensa en la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ escrita como una ecuación vectorial.]

▶**36.** Dada $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -8 & 12 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$, halla mediante inspección una una solución no trivial de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

37. Construye una matriz A de orden 3×3, distinta de cero, tal que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea una solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

38. Construye una matriz A de orden 3×3, distinta de cero, tal que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea una solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

39. Construye una matriz A de orden 2×2 tal que el conjunto solución de la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sea la recta ℓ en $\mathbf{R}^2$ que pasa por $(4, 1)$ y el origen. Después, halla un vector $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^2$ tal que el conjunto solución de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sea una recta en $\mathbf{R}^2$ paralela a la recta ℓ. ¿Por qué esto no contradice el teorema que relaciona las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con las del sistema homogéneo asociado (ejercicio 27)?

▶**40.** Supongamos que A es una matriz de orden 3×3 e $\mathbf{y}$ un vector en $\mathbf{R}^3$ tal que la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *no* tiene solución. ¿Existe un vector $\mathbf{z}$ en $\mathbf{R}^3$ tal que la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$ tenga una solución única?.

▶**41.** Sea A una matriz de orden $m \times n$ y $\mathbf{u}$ un vector en $\mathbf{R}^n$ que satisfaga la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Demuestra que para cualquier número c, el vector $c\,\mathbf{u}$ también satisface $A\,\mathbf{x} = 0$. [Esto es, muestra que $A(c\,\mathbf{u}) = 0$.]

42. Sea A una matriz de orden $m \times n$, y sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en $\mathbf{R}^n$ con la propiedad de que $A\,\mathbf{u} = 0$ y $A\,\mathbf{v} = 0$. Explica por qué $A(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ debe ser igual al vector cero. Después explica por qué $A(c\,\mathbf{u} + d\,\mathbf{v}) = 0$ para cada par de números c y d.

Soluciones a ejercicios seleccionados de la sección 1.5

1. Los dos planos se intersecan si el sistema formado por las dos ecuaciones es compatible. La operación elemental $F_2 - 2F_1$ transforma la matriz del sistema en $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 9 \end{pmatrix}$ que es escalonada y no tiene pivote en la columna de los términos independientes, luego el sistema es compatible y los dos planos se intersecan. Para describir su intersección, hallamos la forma escalonada reducida. Las operaciones elementales $-\frac{1}{9}F_2$, $F_1 - 4F_2$ nos llevan a: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y de aquí obtenemos la solución general en forma paramétrica vectorial:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Realizando sobre la matriz de coeficientes la operación elemental $F_1 - F_3$ se obtiene una matriz con dos filas iguales: $\begin{pmatrix} -2 & -7 & 1 \\ -2 & -7 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, por tanto el sistema tiene soluciones no triviales.

7. Realizando sobre las filas de la matriz de coeficientes las operaciones elementales $F_2 + 4F_1$, $F_3 + F_2$, $F_1 - F_2$, $\frac{1}{3}F_2$, se obtiene la forma escalonada reducida $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de donde se obtienen las ecuaciones paramétricas del conjunto solución:

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

15. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}.$

17. Este sistema tiene la misma matriz de coeficientes que el del ejercicio 7 y por tanto basta realizar las mismas operaciones elementales de filas realizadas allí: $F_2 + 4F_1$, $F_3 + F_2$, $F_1 - F_2$, $\frac{1}{3}F_2$. Con ello se obtiene la siguiente matriz escalonada reducida $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de la que se deduce que una solución particular es $(-2, 1, 0)$. Por tanto podemos escribir inmediatamente la solución general en forma paramétrica vectorial sumando este vector a la solución hallada en el ejercicio 7:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

19. El conjunto solución de la primera es un plano de $\mathbf{R}^3$ que pasa por el origen. El conjunto solución de la segunda es un plano de $\mathbf{R}^3$ que pasa por el punto $(9, -1, \frac{1}{2})$ y es paralelo al anterior.

23. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$

25. (a) **Verdadero** (Tiene la solución trivial.), (b) **Falso** (Es una descripción implícita de su conjunto solución. Para hacerla explícita hay que resolver la ecuación.), (c) **Falso** (Siempre tiene solución trivial aunque no haya ninguna variable libre.), (d) **Falso** (Es una recta que pasa por $\mathbf{p}$ paralela a $\mathbf{v}$.), (e) **Falso** (Falta añadir que $\mathbf{p}$ tiene que ser una solución particular cualquiera de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.).

26. (a) **Falso** (Basta que uno lo sea.), (b) **Verdadero** (La ec. describe el subespacio generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Como $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son múltiplos entre sí, son linealmente independientes y por tanto el subespacio que generan es un plano.), (c) **Verdadero** (Pues eso implica que $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.), (d) **Verdadero** (Esto es básicamente la regla del paralelogramo.), (e) **Falso** (No, solamente al trasladarlo por una solución particular de $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.).

29. Todos los puntos de $\mathbf{R}^3$.

30. No, no es posible. Si el conjunto solución fuese un plano que pasa por el origen entonces el vector nulo, $\mathbf{0}$, sería una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, es decir que se cumpliría $A\mathbf{0} = \mathbf{b}$ y por tanto $\mathbf{b}$ no podría ser distinto de cero.

31. (a) No, pues es un sistema determinado al tener A un pivote en cada columna. (b) Sí, pues A tiene una posición pivote en cada fila.

32. (a) Sí, pues es un sistema indeterminado al tener A una columna sin pivote, lo que da lugar a una variable libre. (b) No, pues A no tiene una posición pivote en cada fila.

36. Mediante inspección se ve que todas las filas son múltiplo de la primera, luego basta hallar una solución de la primera ecuación del sistema, $4x_1 - 6x_2 = 0$, por ejemplo $\mathbf{x} = (6, 4)$.

40. Como $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ es un sistema incompatible, se deduce que A no tiene una posición pivote en cada fila. En consecuencia, como tiene el mismo número de filas que de columnas, tampoco tiene una posición pivote en cada columna, lo que implica que todo sistema con esa matriz de coeficientes tendrá al menos una variable libre. O sea: ningún sistema que tenga esa matriz de coeficientes puede ser determinado y por tanto no existe ningún vector $\mathbf{z}$ en $\mathbf{R}^3$ tal que la ecuación $A\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$ tenga una solución única.

41. Sabemos que $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces podemos calcular: $A(c\mathbf{u}) = c\,A\mathbf{u} = c \cdot 0 = 0$.