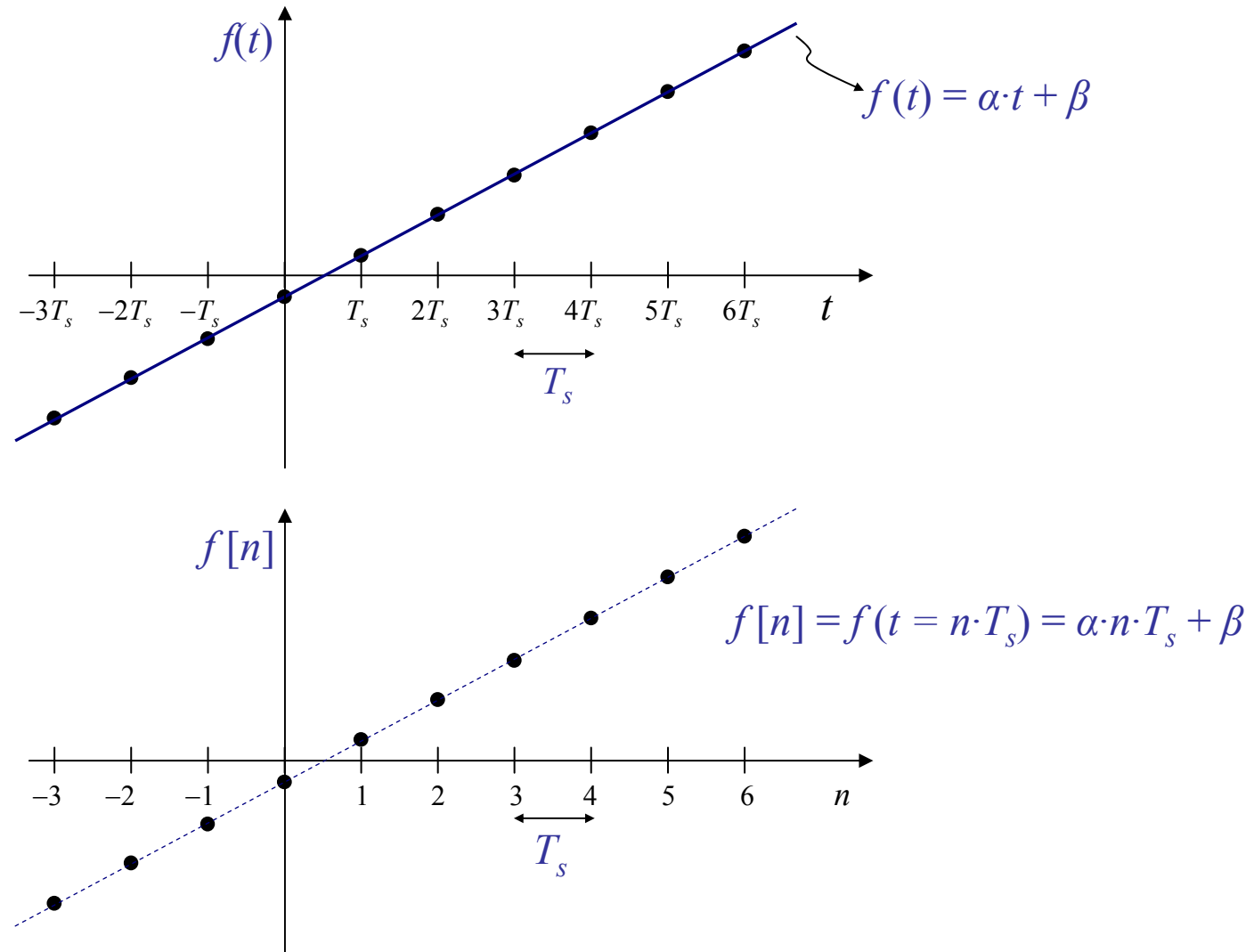
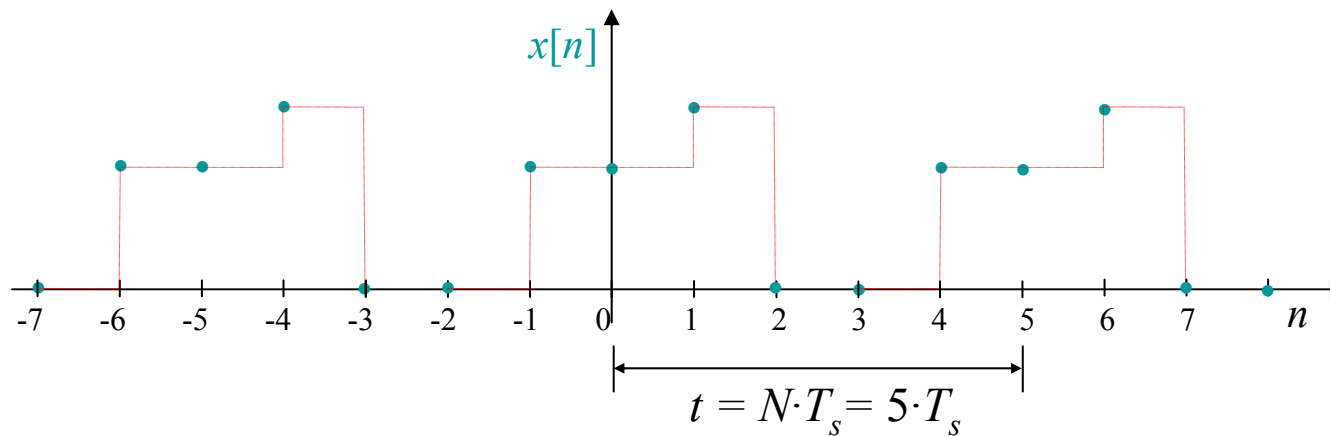


Repaso de algunos conceptos sobre procesamiento de señales digitales, previos al diseño de filtros IIR y FIR

- Relación entre una señal $x(t)$ en tiempo continuo y una señal $x[n]$ en tiempo discreto, generada al muestrear la señal en tiempo continuo $x(t)$:



- Una señal discreta $x[n]$ es *periódica* si existe una constante N entera, positiva, no nula para la que se cumple que: $x[n] = x[n+N] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$



$$x[n] = x[n+N], \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad N=5$$

ejem.: $x[1] = x[1+5] = x[6]$

Un periodo de la señal discreta $x[n]$ dura $NT_s=5T_s$ segundos

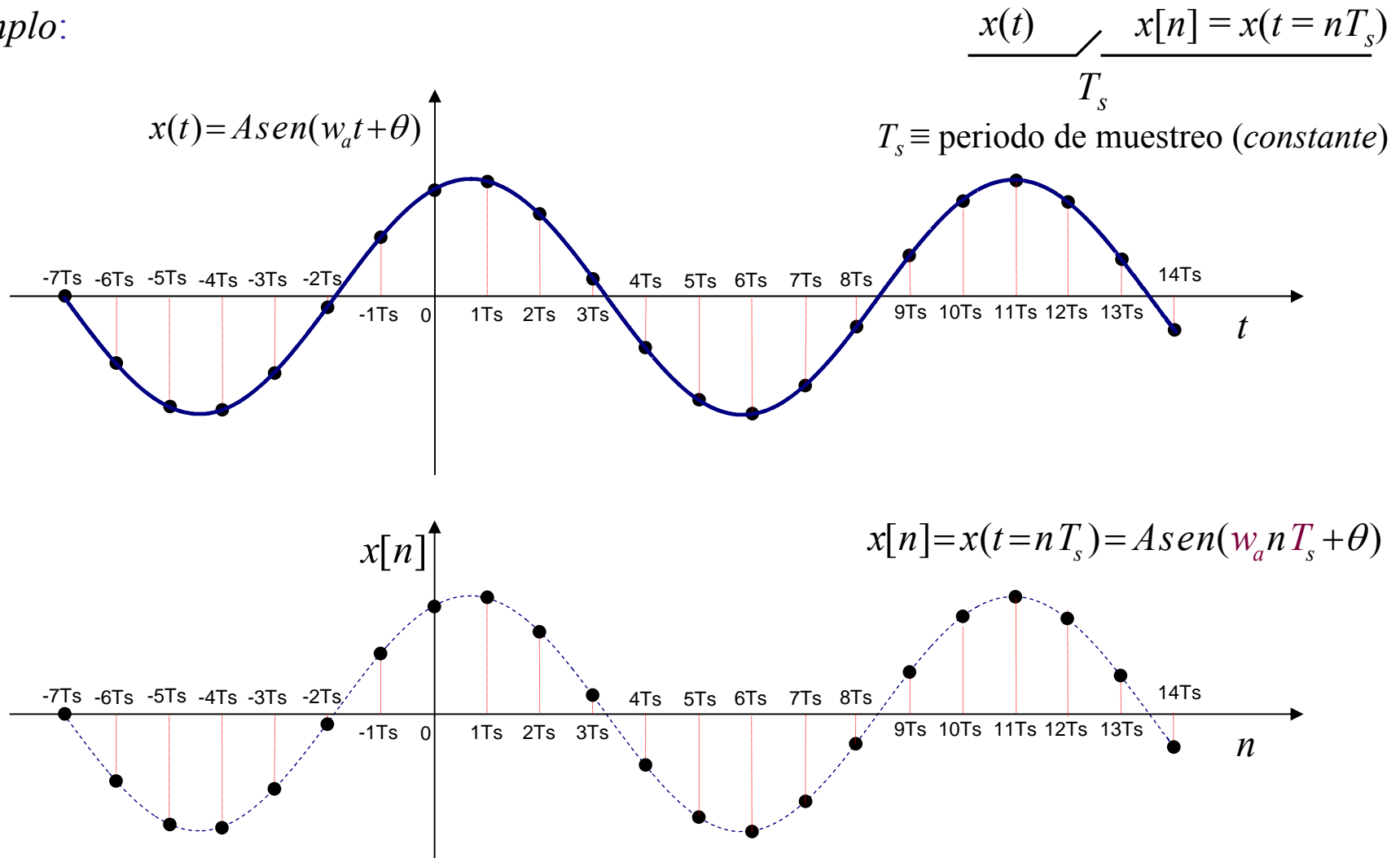
▪ Al muestrear una señal periódica, la señal discreta que se genera no tiene por qué ser necesariamente periódica. Así, por ejemplo, si se muestrea una señal senoidal $x(t) = \text{sen}(w_a \cdot t + \theta) = \text{sen}(2 \cdot \pi \cdot f_a \cdot t + \theta)$, con una frecuencia de muestreo $w_s = 2\pi f_s$, la señal discreta resultante $x[n] = x(t = nT_s) = A \text{sen}(\textcolor{red}{w}_a n \textcolor{red}{T}_s + \theta)$ sólo va a ser periódica, si existen dos números enteros, positivos, no nulos, k y N , para los que se cumple que:

$$\frac{w_a}{w_s} = \frac{f_a}{f_s} = \frac{T_s}{T_a} = \frac{k}{N} \rightarrow kT_a = NT_s$$

es decir, la señal discreta generada $x[n]$ es periódica si la relación entre la frecuencia de la señal muestreada $x(t)$ y la frecuencia de muestreo es un número racional (\equiv se puede representar como el cociente de dos números enteros)

Nota: $n \equiv \text{número de muestra}$ $n \in \mathbb{N} \text{ ó } \mathbb{Z}$

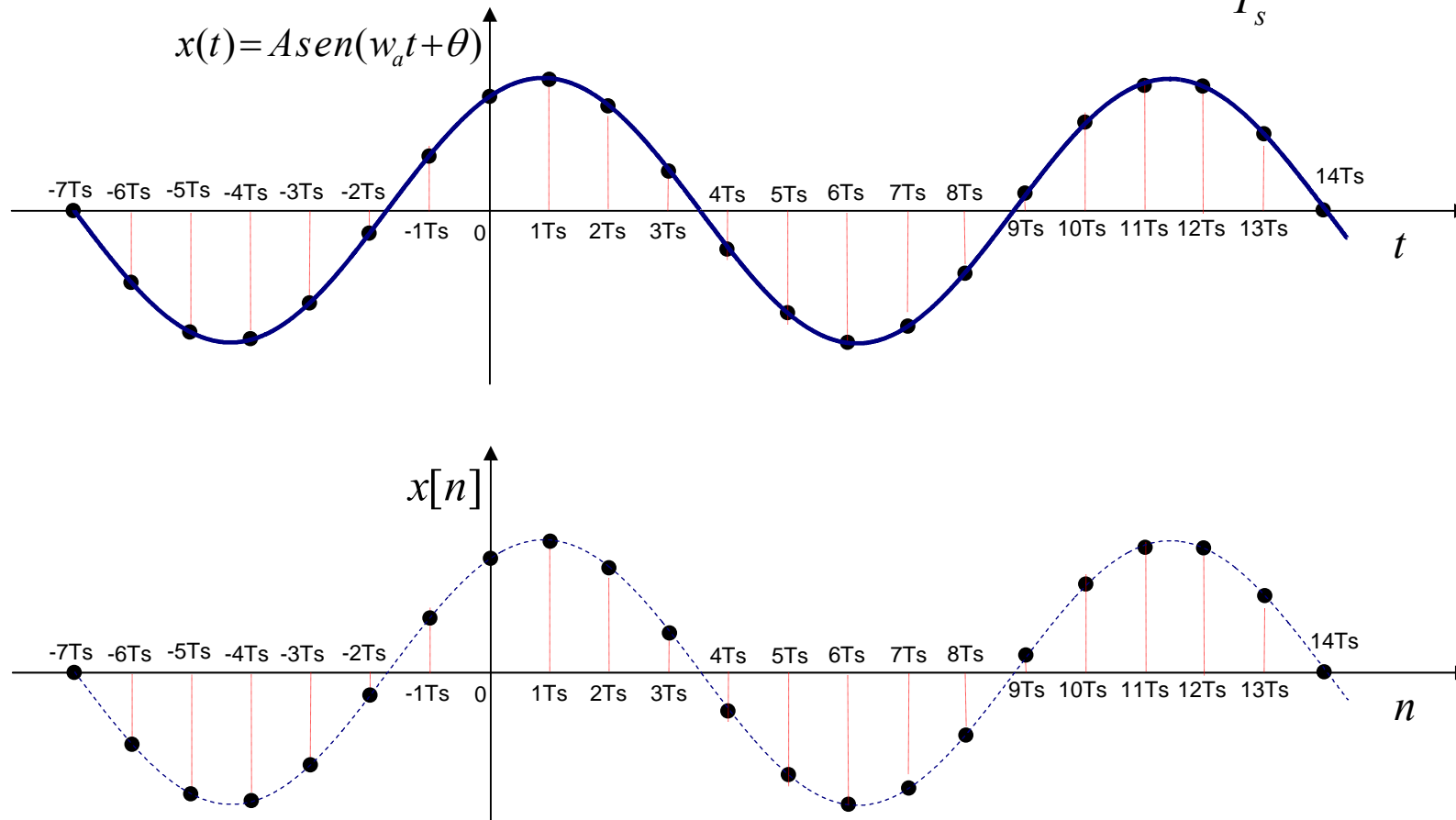
Ejemplo:



La señal discreta $x[n]$ no es periódica, ya que no existen dos números enteros positivos k y N para los que se cumpla que $N \cdot \omega_a = k \cdot \omega_s$ o si se prefiere $N \cdot T_s = k \cdot T_a$

Ejemplo:

$$\frac{x(t)}{T_s} \quad x[n] = x(t = nT_s)$$



La señal $x[n]$ es periódica, ya que se cumple que $21 \cdot T_s = 2 \cdot T_a$. Dicho de otro modo, $x[n]$ es periódica porque existen dos números enteros positivos $k=2$ y $N=21$ para los que se cumple que $k/N = \omega_a/\omega_s = f_a/f_s = T_s/T_a$.

- *Frecuencia digital*

$$\frac{x(t)}{T_s} \quad \frac{x[n] = x(nT_s)}{T_s}$$

$x(t) = A \cos(w_a t + \theta)$ (señal *analógica*: continua en el tiempo y en amplitud)

$$x[n] = x(t = nT_s) = A \cos(w_a nT_s + \theta) = A \cos(w_d n + \theta) \quad (n \equiv \text{número de muestra})$$

$$w_d = w_a \cdot T_s = \frac{2\pi w_a}{w_s} = \frac{2\pi f_a}{f_s} \equiv \text{frecuencia digital en radianes/muestra } (w_d \text{ tiene unidades de ángulo, no de frecuencia})$$

$$f_d = \frac{w_d}{2\pi} = \frac{f_a}{f_s} \equiv \text{frecuencia digital en ciclos/muestra (es adimensional)}$$

Nota: la relación entre el tiempo (t) y el número de muestra $[n]$ es $t = n \cdot T_s$, siendo T_s el periodo de muestreo ($f_s = 1/T_s$: frecuencia con la que se toman las muestras)

- Una senoide discreta $x[n] = \cos(2\pi f_d n + \theta)$ es periódica, de periodo N , si y sólo si su frecuencia (digital) $w_d = 2\pi f_d$ es un número racional \equiv su valor se puede expresar como un cociente de dos números enteros.

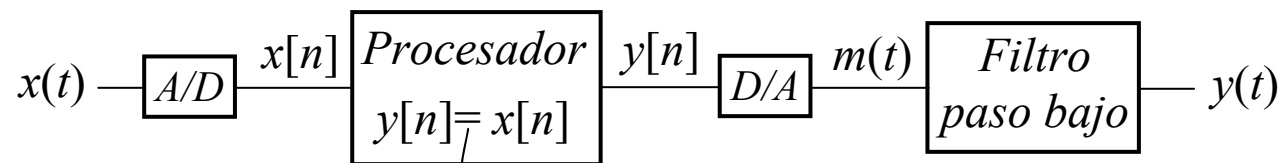
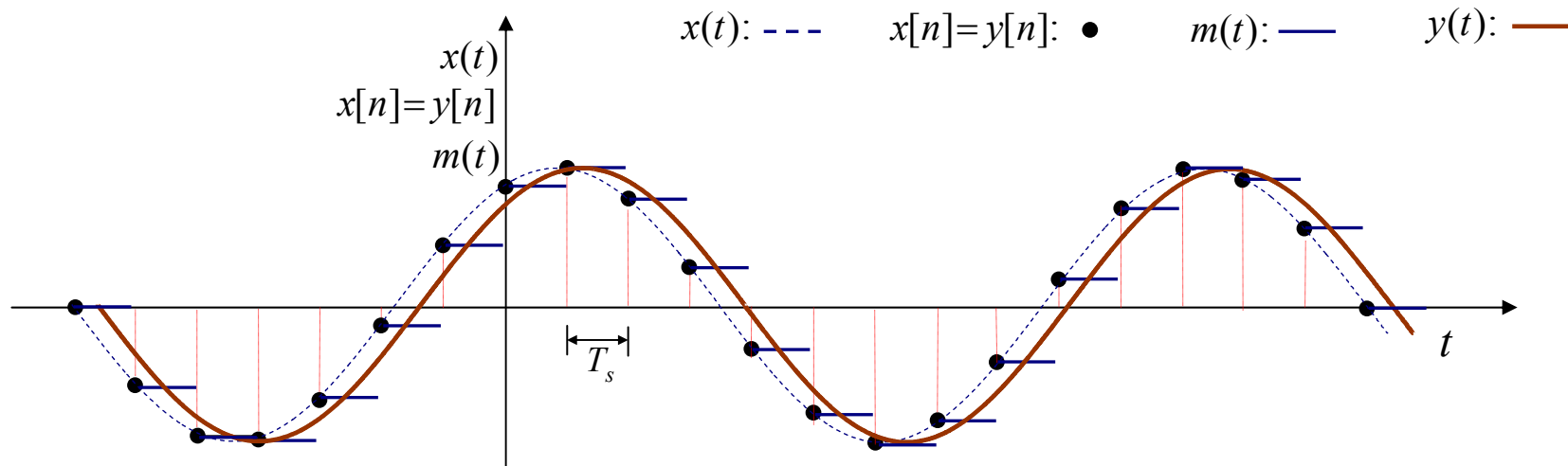
$$x[n] = x[n+N] \Leftrightarrow \cos(2\pi f_d n + \theta) = \cos[2\pi f_d (n+N) + \theta]$$

esta igualdad sólo es cierta si existe un número entero k , para el que se cumple que:

$$2\pi f_d (n+N) = 2\pi f_d n + k2\pi \Leftrightarrow f_d = \frac{k}{N} \quad k, N \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Ejem.:} \quad f_d = \frac{31}{55} \Rightarrow N=55 \quad f_{d2} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \Rightarrow N=3 \rightarrow w_d = 2\pi f_d = 2\pi \frac{k}{N} = 2\pi \frac{1}{3}$$

Importante: cuando una señal discreta periódica $x[n]$, con una frecuencia digital $w_d = w_a T_s$ se convierte en una señal continua (*D/A + filtro paso bajo*), la señal generada tiene una frecuencia $w_a = w_d / T_s$



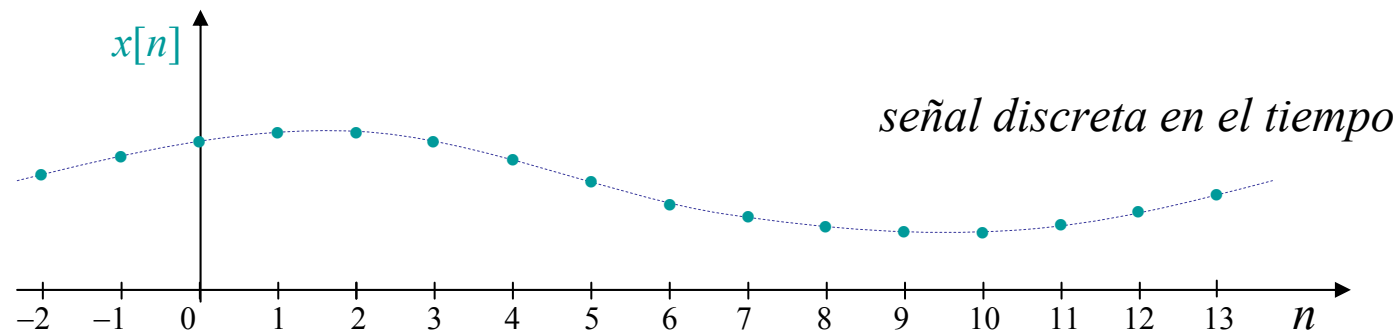
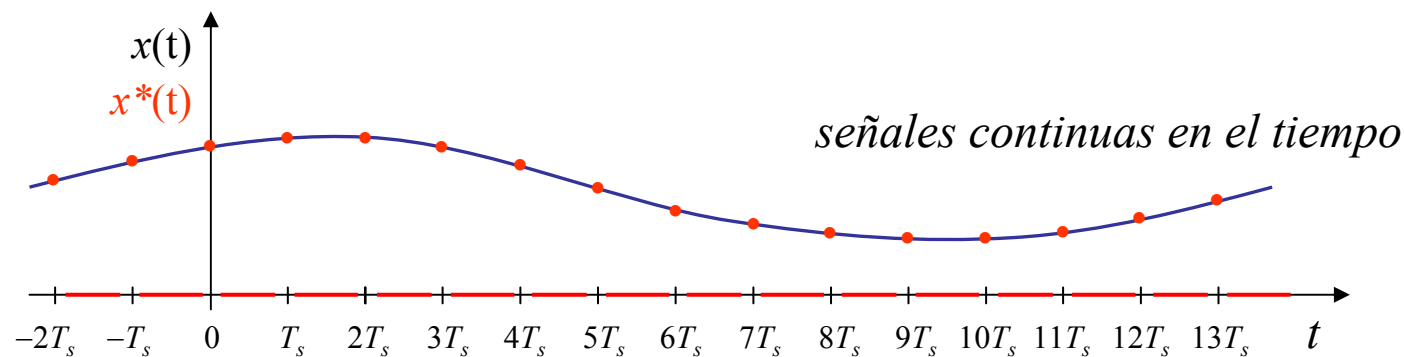
en este ejemplo el procesador no modifica los valores de las muestras ($y[n] = x[n]$). La señal de salida $y(t)$ es igual a la señal de entrada $x(t)$ con un cierto retraso introducido por el filtro paso bajo)

Contenido en frecuencia de una señal discreta: a nivel matemático, se puede considerar que la señal presente en la salida de un muestreador es igual a $x^*(t)$. Se puede demostrar que la transformada de *Fourier* de dicha señal es igual a $X^*(j\omega)$, siendo:

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s)$$

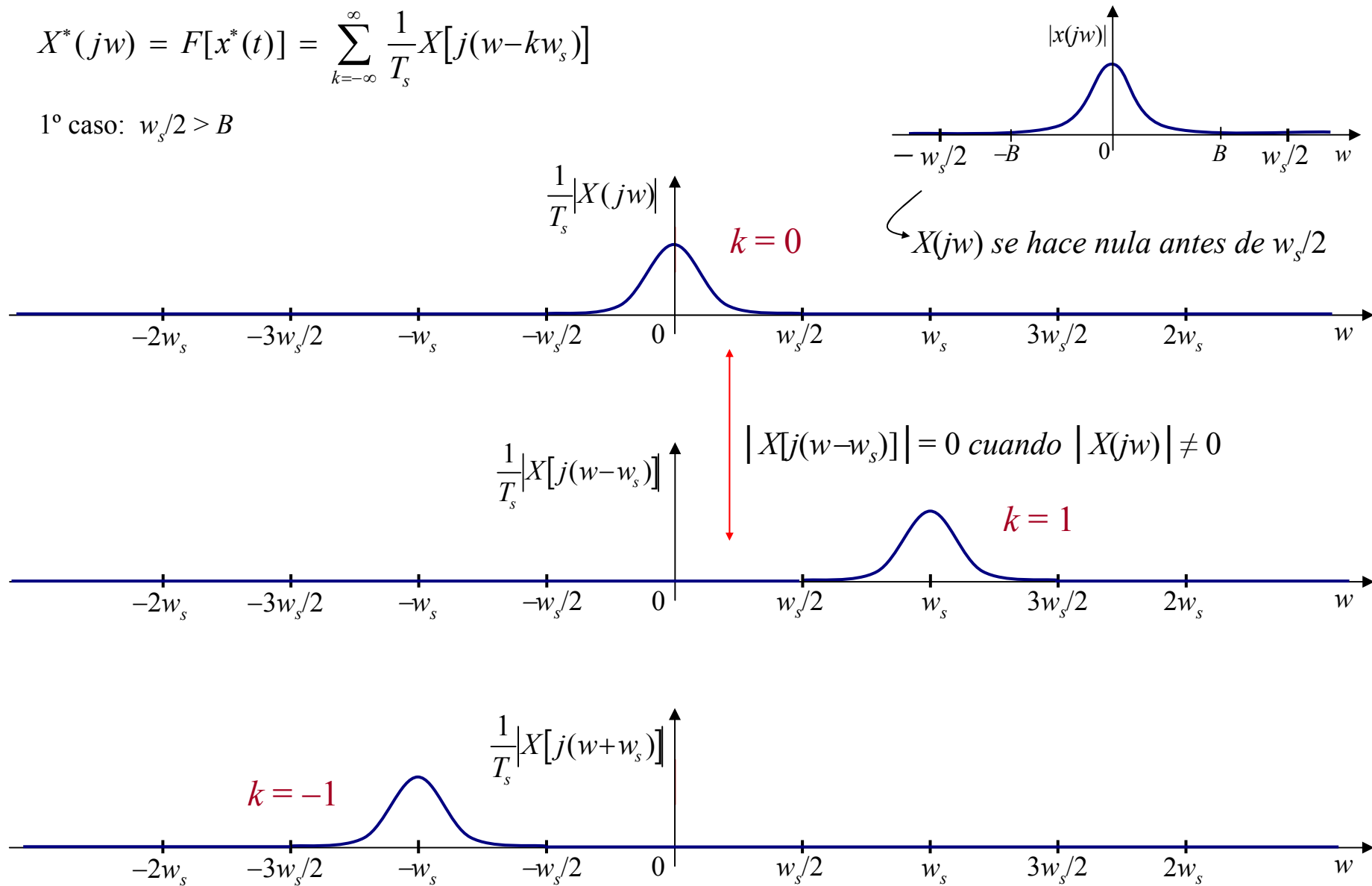
$$X^*(j\omega) = F[x^*(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} X[j(\omega - k\omega_s)]$$

$\frac{x(t)}{X(j\omega)}$	$\swarrow Ts$	$\frac{x[n]}{x^*(t)}$
$X(s)$		$X^*(j\omega)$
		$X^*(s)$
		$X(z)$



$$X^*(j\omega) = F[x^*(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} X[j(\omega - k\omega_s)]$$

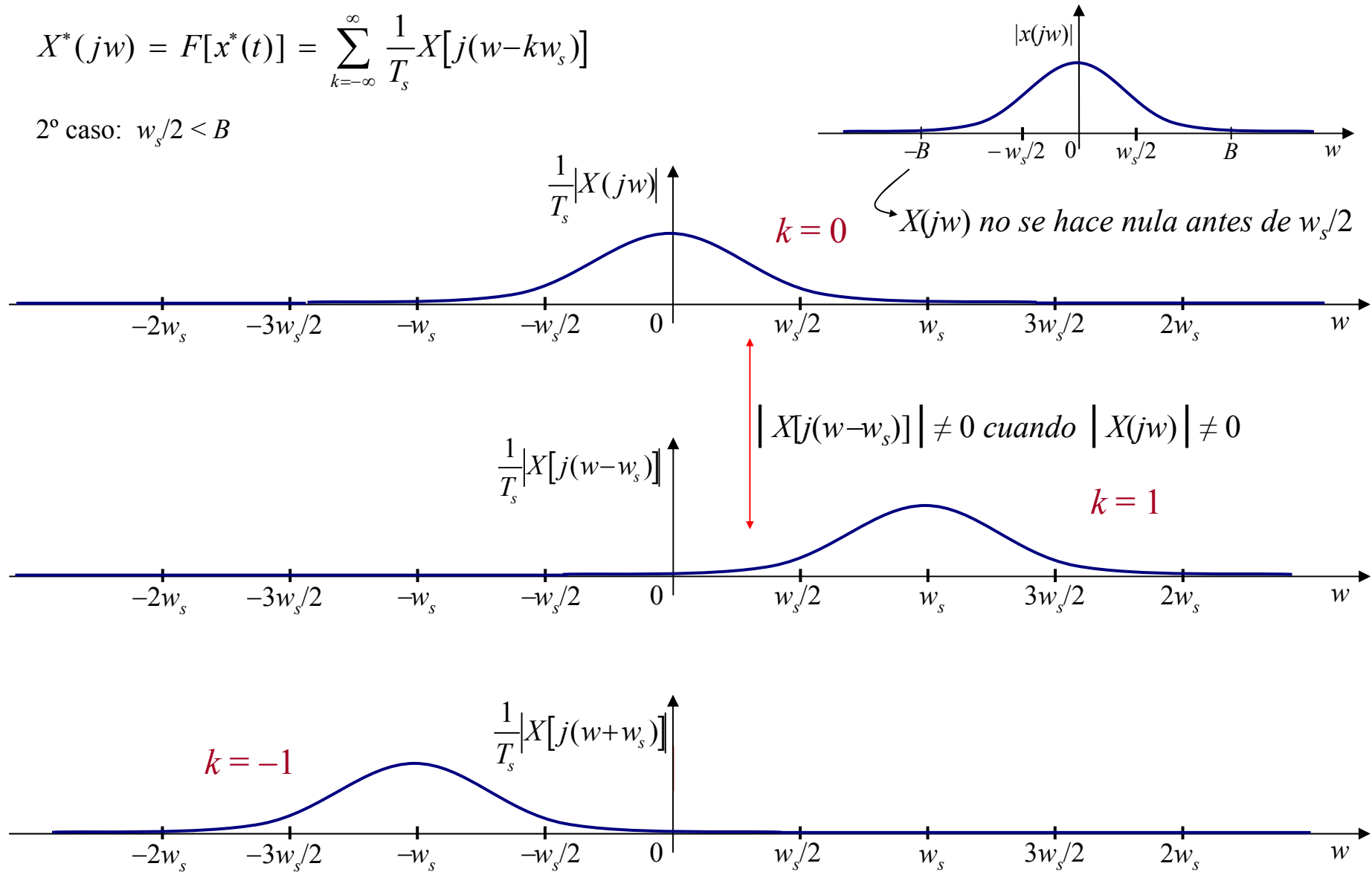
1º caso: $\omega_s/2 > B$



Conclusión: en el intervalo $-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$ se cumple que: $X^*(j\omega) = X(j\omega)/T_s$

$$X^*(j\omega) = F[x^*(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} X[j(\omega - k\omega_s)]$$

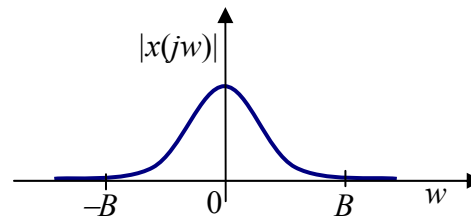
2º caso: $\omega_s/2 < B$



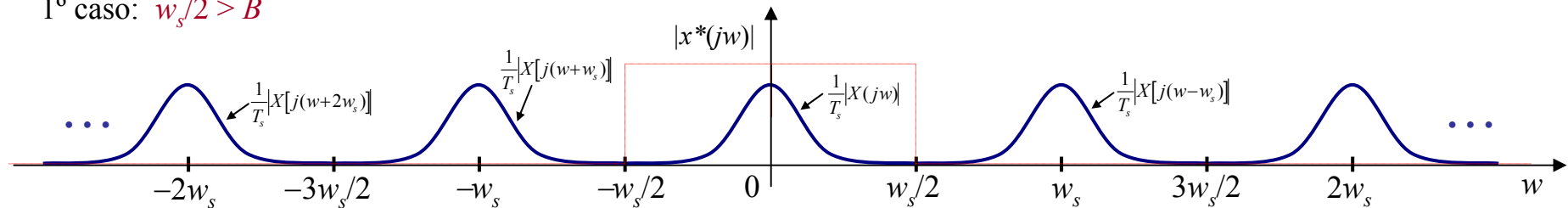
Conclusión: en el intervalo $-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$ se cumple que: $X^*(j\omega) \neq X(j\omega)/T_s$

$$X^*(j\omega) = F[x^*(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} X[j(\omega - k\omega_s)]$$

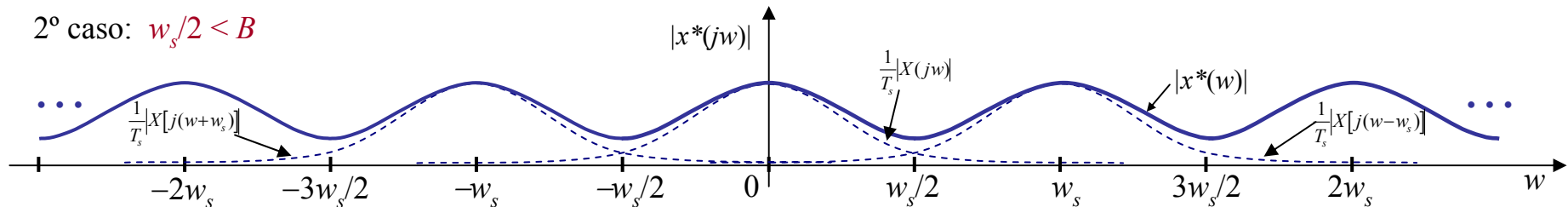
$x(t)$	\swarrow	$x[n]$
$X(j\omega)$	T_s	$x^*(t)$
$X(s)$		$X^*(j\omega)$
		$X^*(s)$
		$X(z)$



1º caso: $\omega_s/2 > B$



2º caso: $\omega_s/2 < B$



Conclusión: en el 1º caso, se puede determinar $x(j\omega)$ a partir de $x^*(j\omega)$ utilizando un filtro paso bajo, mientras que en el 2º caso no es posible (se producirá *aliasing*).

- El *teorema de muestreo de Shannon-Nyquist* establece que la frecuencia w_s con la que hay que muestrear una señal continua con un ancho de banda B debe cumplir que $w_s > 2 \cdot B$, si se quiere que la señal discreta generada tenga la misma información que la señal continua muestreada. Es decir, se debe cumplir que:

$$B = w_{a-max} = 2\pi \cdot f_{a-max} < \frac{w_s}{2} \Leftrightarrow w_s > 2B = 2w_{a-max} \quad , \quad \frac{B}{w_s} < \frac{1}{2}$$

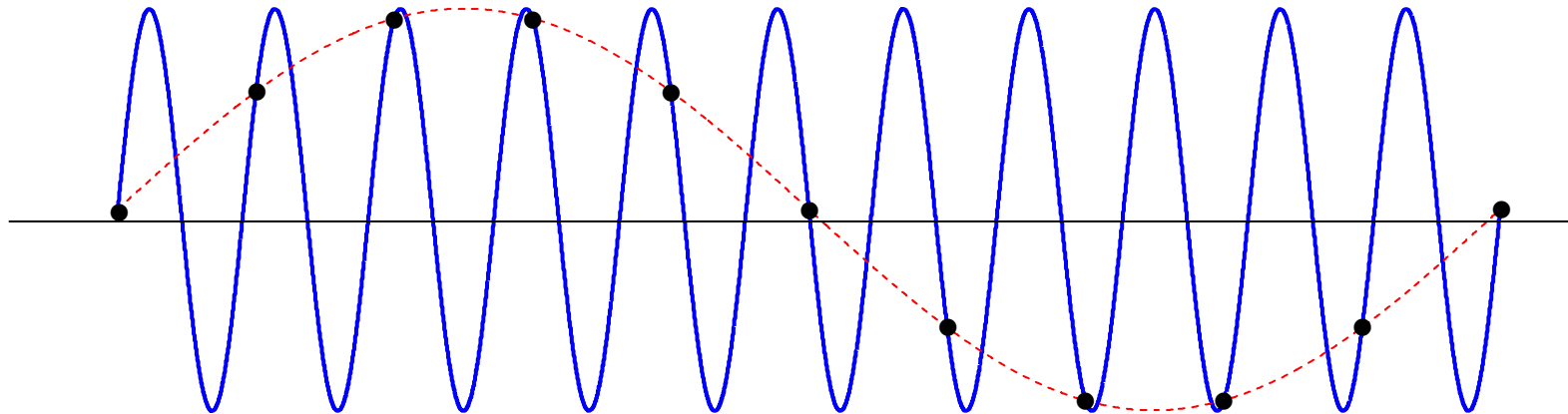
De acuerdo con esto, el mayor valor que puede tomar una *frecuencia digital* normalizada w_d es:

$$w_d = \frac{2 \cdot \pi \cdot w_a}{w_s} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_a}{f_s} \Rightarrow w_{d-max} = \frac{2 \cdot \pi \cdot w_{a-max}}{w_s} = \frac{2 \cdot \pi \cdot B}{w_s} < \pi \quad \text{ó} \quad f_{d-max} < \frac{1}{2}$$

Nota: valores de w_d próximos a **cero** corresponden a *bajas frecuencias* y valores de w_d próximos a π corresponden a *altas frecuencias* (digitales).

Nota: se dice que una señal $x(t)$ tiene un ancho de banda B si su transformada de *Fourier* cumple que $X(jw) = 0 \quad \forall w > B$

Pregunta: ¿Si sólo conocieras los valores de las muestras (●) indicadas en la parte inferior, a qué senoide dirías que corresponden, a la de color rojo o la de color azul?. ¿Por cierto, qué senoide tiene una menor frecuencia?. ¿Qué relación hay entre las frecuencias de dichas senoides?



$$T_{\text{rojo}} = 11T_{\text{azul}} \leftarrow T_s = 1.1T_{\text{azul}} \leftarrow f_s = f_{\text{azul}} / 1.1 = 0.9 \cdot f_{\text{azul}}$$

Solución:

- Todas las sinusoides en tiempo discreto cuyas frecuencias digitales difieran en un múltiplo entero de 2π son idénticas.

$$\cos[(w_d + 2\pi) \cdot n + \theta] = \cos[w_d \cdot n + 2\pi \cdot n + \theta] = \cos[w_d \cdot n + \theta] \quad n \in \mathbb{N}$$

generan la misma secuencia de números

- Las señales sinusoidales discretas cuya frecuencia (digital) w_d cumpla que $-\pi \leq w_d \leq \pi$ ó $-0.5 \leq f_d \leq 0.5$ son únicas.

Es decir, para toda señal sinusoidal de frecuencia $w_d > \pi$ existe una señal sinusoidal de frecuencia $w_d < \pi$ que tiene la misma secuencia de valores.

$$x[n] = \cos[(3\pi/2) \cdot n] = \cos[-(\pi/2) \cdot n] = \cos[(\pi/2) \cdot n] \quad \rightarrow \quad w_d = 3\pi/2 \equiv \pi/2$$

▪ La secuencia de valores que se obtiene al muestrear una señal senoidal de frecuencia $\omega_a > 0.5\omega_s = \pi / T_s$, siendo $T_s = 1/f_s$ el periodo de muestreo, también se puede obtener muestreando una señal senoidal de frecuencia $\omega_a < 0.5\omega_s = \pi/T_s$. Dicho de otro modo, la mayor frecuencia que puede tener una señal senoidal, continua en el tiempo, que se va a muestrear con un periodo de muestreo $T_s=1/f_s$ es: $\omega_a \leq \omega_s/2$ ó $f_a \leq f_s/2$

Si se muestrea una señal con una frecuencia $\omega_a > 0.5\omega_s$, se producirá *aliasing*. Lo que hará que el sistema que procesa las muestras interprete que la señal muestreada tiene una frecuencia inferior a la que realmente tiene (ver tarea 4).

Ejem.: Si se muestrean las señales $x_1(t) = \cos(2\pi \cdot 10 \cdot t)$ y $x_2(t) = \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)$ con una frecuencia de muestreo $f_s = 40\text{Hz}$, se obtienen las siguientes señales discretas:

$$x_1[n] = \cos(2\pi \cdot 10 \cdot n/40) = \cos(\pi \cdot n/2)$$

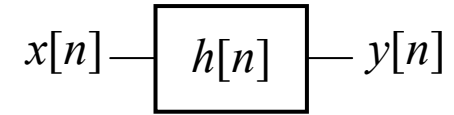
$$x_2[n] = \cos(2\pi \cdot 50 \cdot n/40) = \cos(5\pi \cdot n/2) = \cos(\pi \cdot n/2 + 2\pi \cdot n) = \cos(\pi \cdot n/2) = x_1[n]$$

Respuesta en frecuencia de un sistema discreto

La *respuesta en frecuencia* es una de las características más importantes de un sistema discreto en el tiempo. Aunque no describe completamente el comportamiento del sistema tal como lo hace una *ecuación en diferencias*, la *respuesta a un pulso unitario* o una *función de transferencia*, la respuesta en frecuencia proporciona información muy importante sobre el comportamiento del sistema en *régimen permanente*.

La *respuesta en frecuencia* de un sistema lineal, discreto en el tiempo, es el valor de su salida en régimen permanente correspondiente a una señal de entrada senoidal discreta $x[n] = \text{sen}(w_a T_s n) = \text{sen}(w_d n)$ con $n \in \mathbb{N}$ ó \mathbb{Z} . Para determinar el valor de la salida de un sistema ante una entrada $x[n] = \text{sen}(w_d n)$ resulta más sencillo determinar previamente la salida del sistema ante una entrada $x[n] = e^{jw_d n} = e^{jw_a T_s n}$

Sea $x[n] = e^{j\omega_d n} = e^{j\omega_a T_s n}$ la señal presente en la entrada de un sistema lineal, discreto en el tiempo definido por su respuesta a un pulso unitario $h[n]$. La salida $y[n]$ de dicho sistema se puede determinar de la siguiente manera:



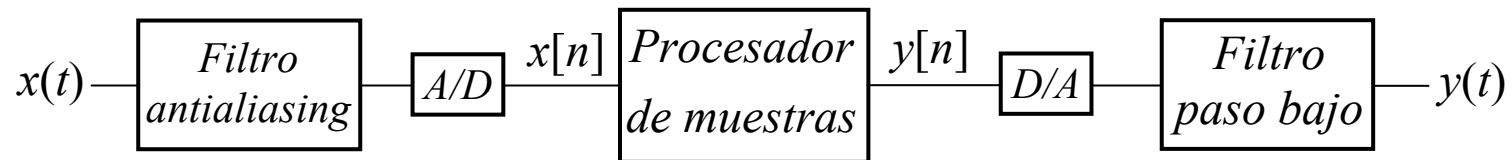
$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{j\omega_d (n-k)} = e^{j\omega_d n} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{-j\omega_d k} = \\
 &= x[n] \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{-j\omega_d k} = x[n] \cdot H(e^{j\omega_d}) \quad \text{siendo} \quad H(e^{j\omega_d}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{-j\omega_d k} \quad \text{la respuesta} \\
 &\text{en frecuencia del sistema.}
 \end{aligned}$$

De acuerdo con el resultado anterior, la respuesta $y[n]$ de un sistema lineal, discreto en el tiempo, ante una entrada senoidal discreta $x[n] = \text{sen}(\omega_a T_s n) = \text{sen}(\omega_d n)$ cumple que:

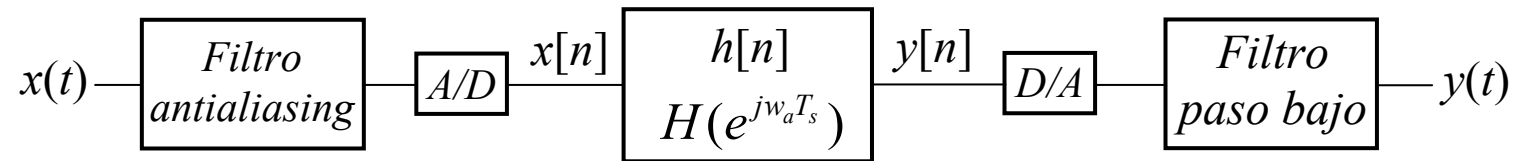
$$y[n] = |H(e^{j\omega_d})| \text{sen} \left[\omega_d n + \angle H(e^{j\omega_d}) \right] = |H(e^{j\omega_a T_s})| \text{sen} \left[\omega_a T_s n + \angle H(e^{j\omega_a T_s}) \right]$$

Importante: una frecuencia digital $w_d = w_a T_s$ tiene unidades de ángulo (*rad/muestra*). La *respuesta en frecuencia* de un sistema lineal, discreto es una función compleja periódica de periodo 2π , por lo que sólo interesa su representación gráfica en un intervalo de frecuencias $-\pi < w_d < \pi$ ó $0 < w_d < 2\pi$.

Cuando una senoide discreta $y[n]$ de frecuencia digital w_d se convierte en una senoide continua en el tiempo con la ayuda de un convertidor D/A y de un filtro paso bajo, la frecuencia de la senoide continua generada es igual a $w_a = w_d/T_s$ (*rad/seg*). De acuerdo con esto, a la hora de determinar o de analizar la respuesta en frecuencia de un sistema discreto nos interesa expresar la respuesta en frecuencia en función de una frecuencia analógica $w_a = w_d/T_s$ en vez de en función de una frecuencia digital w_d . Ya que de esta manera podemos ver más fácilmente cómo el sistema discreto modifica la amplitud y la fase las distintas señales senoidales continuas que forman la señal $x(t)$ presente en la entrada (ver pág. siguiente).



De acuerdo con lo anterior, la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega_d})$ de un sistema discreto se va a representar habitualmente como $H(e^{j\omega_a T_s})$, de modo que la respuesta $y(t)$ de dicho sistema a una señal senoidal (continua) de entrada $x(t)$ cumple lo siguiente:



$$x(t) = \text{sen}(\omega_a t)$$

$$x[n] = \text{sen}(\omega_a n) = \text{sen}(\omega_a T_s n) \quad (\text{se supone que el filtro antialiasing no introduce ningún tipo de distorsión})$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = |H(e^{j\omega_d})| \text{sen} \left[\omega_d n + \underbrace{|H(e^{j\omega_d})|}_{\theta} \right] = |H(e^{j\omega_a T_s})| \text{sen} \left[\omega_a T_s n + \underbrace{|H(e^{j\omega_a T_s})|}_{\theta} \right]$$

$$y(t) = |H(e^{j\omega_a T_s})| \text{sen} \left[\omega_a T_s + \underbrace{|H(e^{j\omega_a T_s})|}_{\theta} \right] \quad (\text{se supone que el filtro paso bajo introduce un desfase de } \theta \text{ radianes})$$

Transformada Z:

$$\mathbb{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

Si la señal $x[n]$ es ‘causal’ entonces la transformada Z se reduce a:

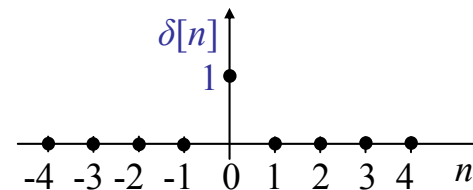
$$\mathbb{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} = x[0] + x[1] \cdot z^{-1} + x[2] \cdot z^{-2} + x[3] \cdot z^{-3} + \dots$$

Nota: la transformada Z tiene muchas propiedades que se pueden consultar en cualquier libro sobre fundamentos de procesamiento de señales digitales o sobre diseño de sistemas de control digital. A continuación se indican algunas de sus propiedades:

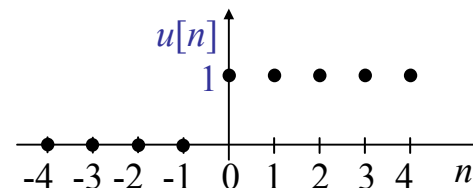
<i>Funciones en el dominio del tiempo</i>	<i>Funciones en el dominio de la frecuencia</i>
$h[n]$	$H(z)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k]$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$
$x[n-k]$	$z^{-k} X(z)$
$n \cdot x[n]$	$-z \cdot \frac{dX(z)}{dz}$

Ejemplos de aplicación de la *transformada Z*:

$$\delta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta[n] \cdot z^{-n} = \delta[0] \cdot z^{-0} = 1$$



$$u(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \sum_{n=0}^{n=\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 + z^{-1}}$$



se supone que $|z^{-1}| < 1$

Ejemplo de aplicación de la *antitransformada Z*:

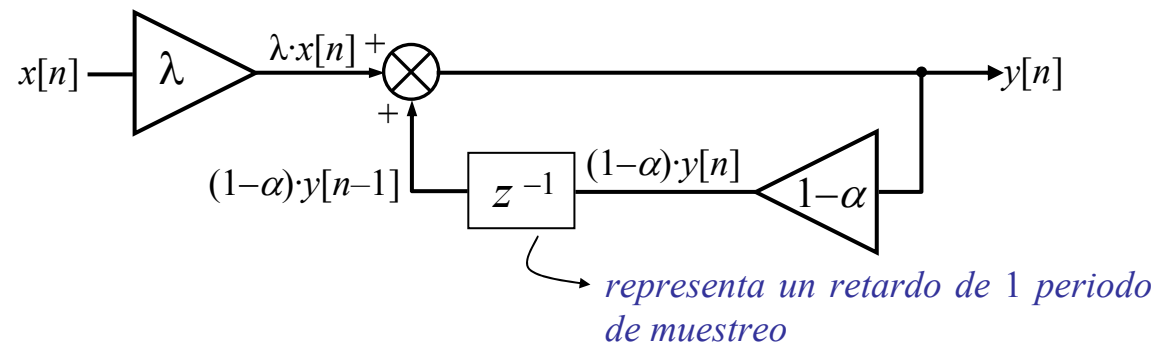
$$\frac{y(z)}{x(z)} = \frac{\lambda}{1 - (1-\alpha)z^{-1}} \rightarrow y(z)[1 - (1-\alpha)z^{-1}] = x(z) \cdot \lambda \rightarrow y(z) = \lambda \cdot x(z) + (1-\alpha)z^{-1}y(z)$$

función de transferencia (discreta)

si aplicamos la transformada Z inversa a la igualdad anterior, se obtiene la siguiente *ecuación en diferencias* (ver tabla pág. 22):

$$y[n] = \lambda \cdot x[n] + (1-\alpha)y[n-1]$$

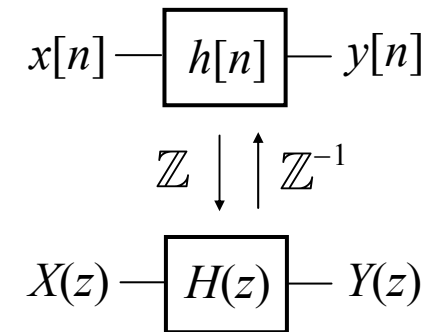
a partir de la cual se puede plantear la siguiente estructura:



La estabilidad de un sistema *lineal, discreto e invariante en el tiempo (LDIT)* se analiza en el plano complejo Z . Se puede obtener la representación $H(z)$ de un sistema *LDIT* en dicho plano calculando la transformada Z de su respuesta $h[n]$ a un pulso unitario, cumpliéndose que:

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad \xrightleftharpoons{Z} \quad Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

siendo



$$H(z) = Z\{h[n]\} = \sum_{n=0}^{n=\infty} h[n] \cdot z^{-n} \quad \text{la función de transferencia del sistema (causal)}$$

Se puede demostrar que la relación entre la *respuesta en frecuencia* $H(e^{j\omega_d})$ de un sistema discreto y su función de transferencia $H(z) = Z\{h[n]\}$ cumple lo siguiente:

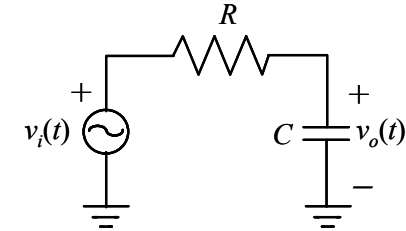
$$H(e^{j\omega_d}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega_d}} \quad \omega_d \text{ en rad/muestra}$$

$$H(e^{j\omega_a T_s}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega_a T_s}} \quad \omega_a \text{ en rad/seg} \quad \omega_d = \omega_a \cdot T_s = \frac{2\pi f_a}{f_s}$$

$$H(e^{j2\pi f_d}) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f_d}} \quad f_d \text{ es adimensional}$$

$$H(e^{j2\pi f_a/f_s}) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f_a/f_s}} \quad f_a \text{ y } f_s \text{ en Hz}$$

Ejemplo: Sabiendo que la respuesta del circuito de la derecha a un impulso unitario es $h(t) = e^{-t} \cdot u(t)$ para $R \cdot C = 1$. Se pide:



a) Determinar la función de transferencia de un sistema discreto cuya respuesta $h[n]$ a un pulso unitario cumpla que $h[n] = h(t)$, con $t = nT_s$.

b) Determinar la respuesta en frecuencia del discreto determinado en el apartado a) para $T_s = 0.1$ seg. y para $T_s = 1$ seg.

Solución:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{1+s}\right\}$$

a) $h[n] = h(t=nT_s) = e^{-nT_s} \cdot u[nT_s] = (e^{-T_s})^n \cdot u[n]$

$$\frac{v_o(z)}{v_i(z)} = H(z) = \mathbb{Z}\{h[n]\} = \mathbb{Z}\{(e^{-T_s})^n \cdot u[n]\} = \frac{1}{1 - e^{-T_s} \cdot z^{-1}} \equiv \text{función de transferencia}$$

$$v_o(z) = \left(\frac{1}{1 - e^{-T_s} \cdot z^{-1}} \right) \cdot v_i(z) \Rightarrow v_o(z) (1 - e^{-T_s} \cdot z^{-1}) = v_i(z) \rightarrow \text{aplicando la antitransformada Z se obtiene la siguiente ecuación en diferencias (pág. siguiente) 27}$$

$$v_o(z)(1 - e^{-T_s} \cdot z^{-1}) = v_i(z) \Rightarrow v_o[n] - e^{-T_s} v_o[n-1] = v_i[n] \equiv \text{ecuación en diferencias}$$

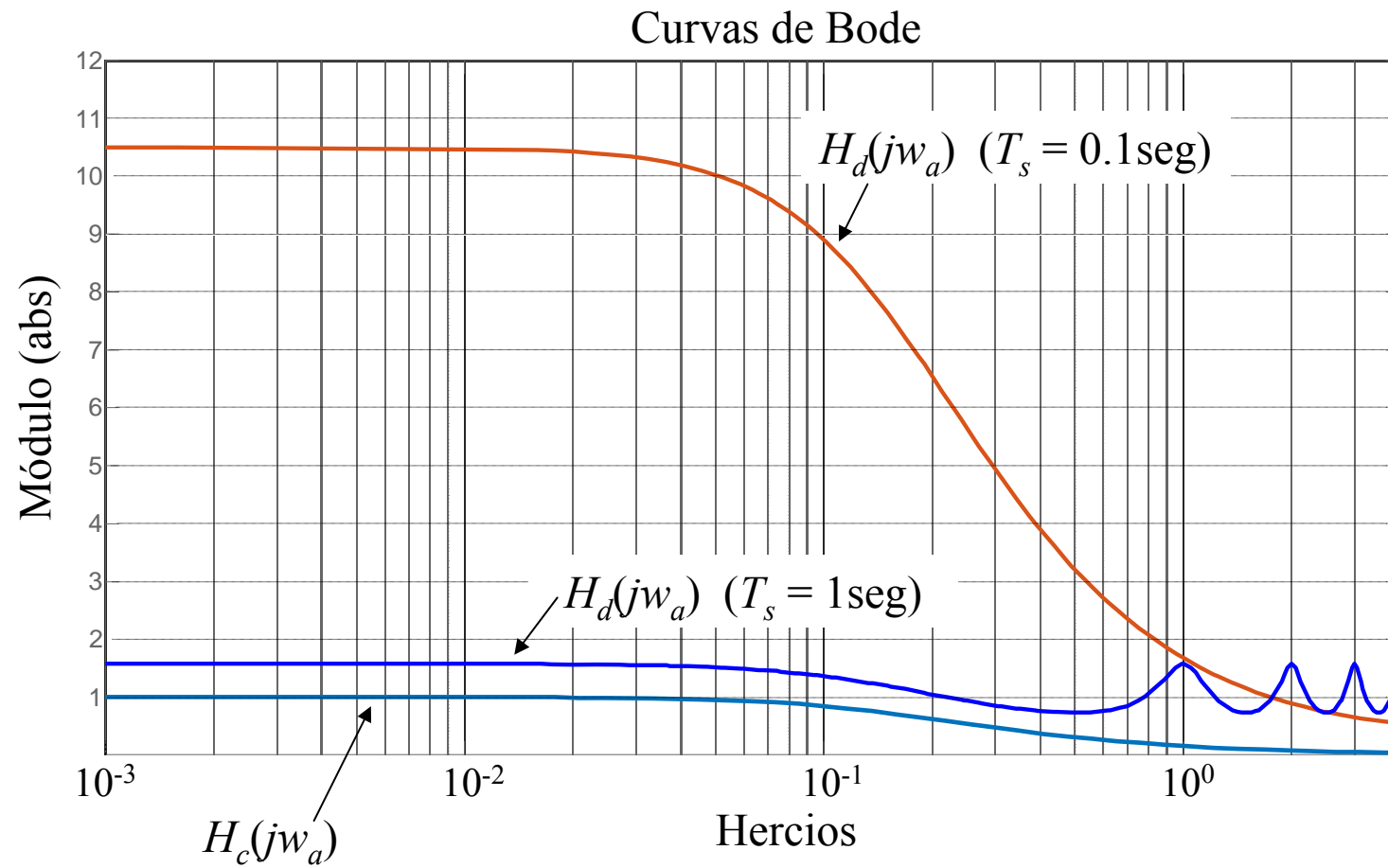
b) La *respuesta en frecuencia* del sistema discreto se puede obtener a partir de su *función de transferencia* $H(z)$ teniendo en cuenta que se cumple que:

$$H_d(e^{j\omega_a T_s}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega_a T_s}} = \frac{1}{1 - e^{-T_s} e^{-j\omega_a T_s}} \quad \text{siendo } \omega_a T_s = \omega_d$$

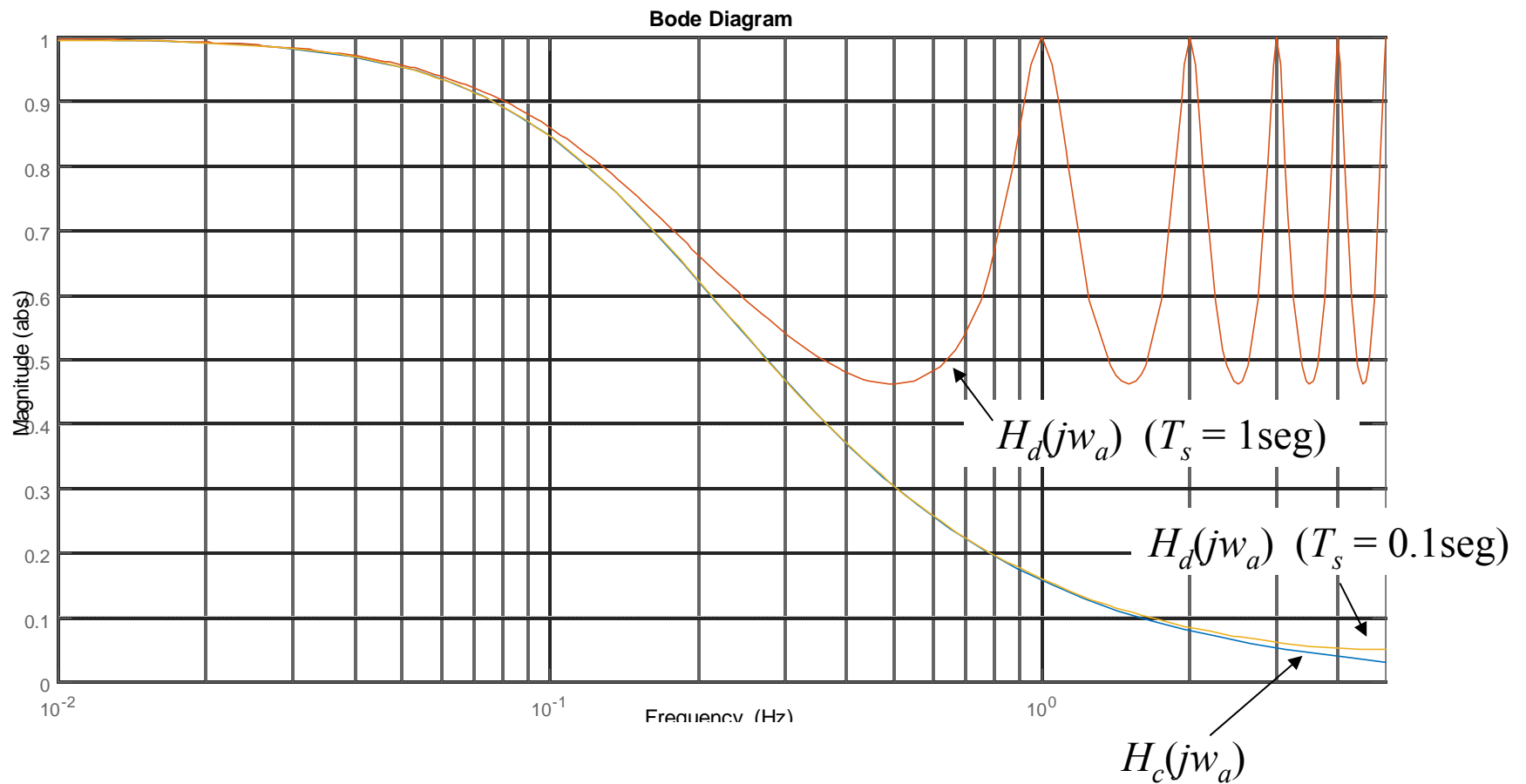
Nota: se puede demostrar que la *respuesta en frecuencia* del sistema continuo, para $R \cdot C = 1$, cumple lo siguiente ($\omega_a = \omega_c$):

$$H_c(j\omega_c) = \frac{1}{1 + j\omega_c RC} = \frac{1}{1 + j\omega_c}$$

En la siguiente página se representa el módulo de la *respuesta en frecuencia* del *sistema continuo* así como la del *sistema discreto* para $T_s = 0.1 \text{ seg.}$ y para $T_s = 1 \text{ seg.}$



Si se modifican las ganancias en continua de las respuestas en frecuencia discretas de modo que tengan la misma ganancia a bajas frecuencias que el sistema continuo, se obtienen las siguientes representaciones de las magnitudes de las respuestas en frecuencia



```
% Código para Matlab ( $s = j\omega_a$ )
```

```
clear all;  
hold off;
```

```
s = tf('s');
```

```
Ts = 1;  
Hd1 = 1/(1-exp(-Ts)*exp(-s*Ts));
```

```
Ts = 0.1;  
Hd2 = 1/(1-exp(-Ts)*exp(-s*Ts));
```

```
Hc = 1/(1+s);
```

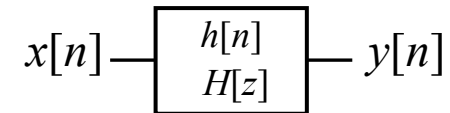
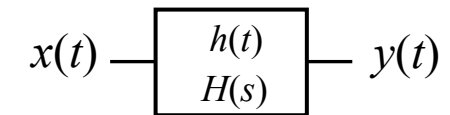
```
ltiview;
```

Discretización de un sistema continuo:

Se puede demostrar que la relación entre un punto z del plano Z y un punto s del plano S cumple lo siguiente:

$$z = e^{sT_s} \Leftrightarrow s = \frac{1}{T_s} \ln(z)$$

de acuerdo con esto, dado un sistema continuo $H(s)$, con una entrada $x(t)$ y con una salida $y(t)$, el sistema discreto $H(z)$ que proporciona una salida $y[n] = y(t = nT_s)$ ante una entrada $x[n] = x(t = nT_s)$, cumple lo siguiente:

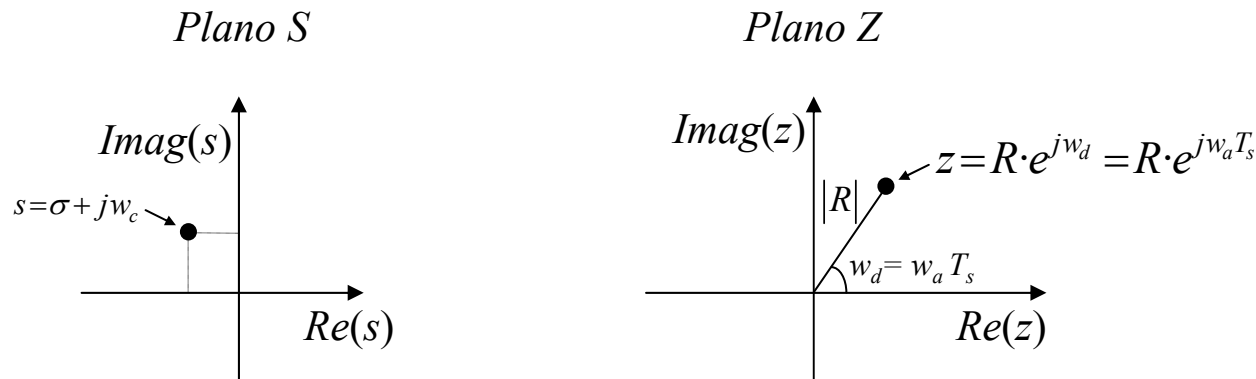


$$H(z) = H(s) \Big|_s = \frac{1}{T_s} \ln z$$

Debido a la relación no lineal existente entre un punto z en el plano Z y un punto s en el plano S , no es posible determinar una expresión racional de $H(z)$ a partir de $H(s)$. Sin embargo, se pueden plantear *aproximaciones* a la función $s = \ln(z)/T_s$ que sí permiten obtener una expresión racional como, por ejemplo:

$$s = \frac{1}{T_s} \ln(z) \approx \frac{2}{T_s} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \equiv \text{transformada de Tustin (integración trapezoidal)}$$

Para ver cómo la *transformada de Tustin* relaciona los puntos del plano complejo S con los puntos del plano complejo Z se va a considerar que un punto en el plano Z está definido de la siguiente manera: $z = R e^{jw_d} = R e^{jw_a T_s}$



Nota: w_d representa una frecuencia digital, aunque tiene unidades de ángulo.

De acuerdo con la *transformada de Tustin*, a un punto $z = Re^{jw_d} = Re^{jw_d T_s}$ en el plano Z le corresponde un punto s en el plano S definido por:

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{2}{T_s} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{2}{T_s} \cdot \left[\frac{Re^{jw_d} - 1}{Re^{jw_d} + 1} \right] = \frac{2}{T_s} \cdot \left[\frac{R \cdot \cos(w_d) + jR \cdot \sin(w_d) - 1}{R \cdot \cos(w_d) + jR \cdot \sin(w_d) + 1} \right] = \\
 &= \frac{2}{T_s} \frac{[(R \cdot \cos(w_d) - 1) + jR \cdot \sin(w_d)] [(R \cdot \cos(w_d) + 1) - jR \cdot \sin(w_d)]}{[(R \cdot \cos(w_d) + 1) + jR \cdot \sin(w_d)] [(R \cdot \cos(w_d) + 1) - jR \cdot \sin(w_d)]} = \\
 &= \frac{2}{T_s} \left[\frac{R^2 - 1}{R^2 + 2R \cdot \cos(w_d) + 1} + j \frac{2R \cdot \sin(w_d)}{R^2 + 2R \cdot \cos(w_d) + 1} \right] = \sigma + jw_c = s
 \end{aligned}$$

siendo:

$$\sigma = \frac{2}{T_s} \frac{R^2 - 1}{R^2 + 2R \cdot \cos(w_d) + 1} \qquad w_c = \frac{2}{T_s} \frac{2R \cdot \sin(w_d)}{R^2 + 2R \cdot \cos(w_d) + 1}$$

Del resultado anterior se deduce que:

- Los puntos del plano Z correspondientes a $R > 1$ son puntos situados fuera de la circunferencia de radio 1, centrada en el origen. Dichos puntos corresponden a puntos situados en el semiplano derecho del plano S ($\sigma > 0$).
- Los puntos del plano Z correspondientes a $R < 1$ son puntos situados en el interior de la circunferencia de radio 1, centrada en el origen. Dichos puntos corresponden a puntos situados en el semiplano izquierdo del plano S ($\sigma < 0$).
- Los puntos del plano Z pertenecientes a una circunferencia centrada en el origen, de radio 1 ($R = 1$), corresponden a puntos situados en el eje imaginario del plano S ($\sigma = 0$). La relación entre dichos puntos establece la correspondencia entre una frecuencia digital w_d (plano Z) y una frecuencia analógica w_c (plano S), cumpliéndose que:

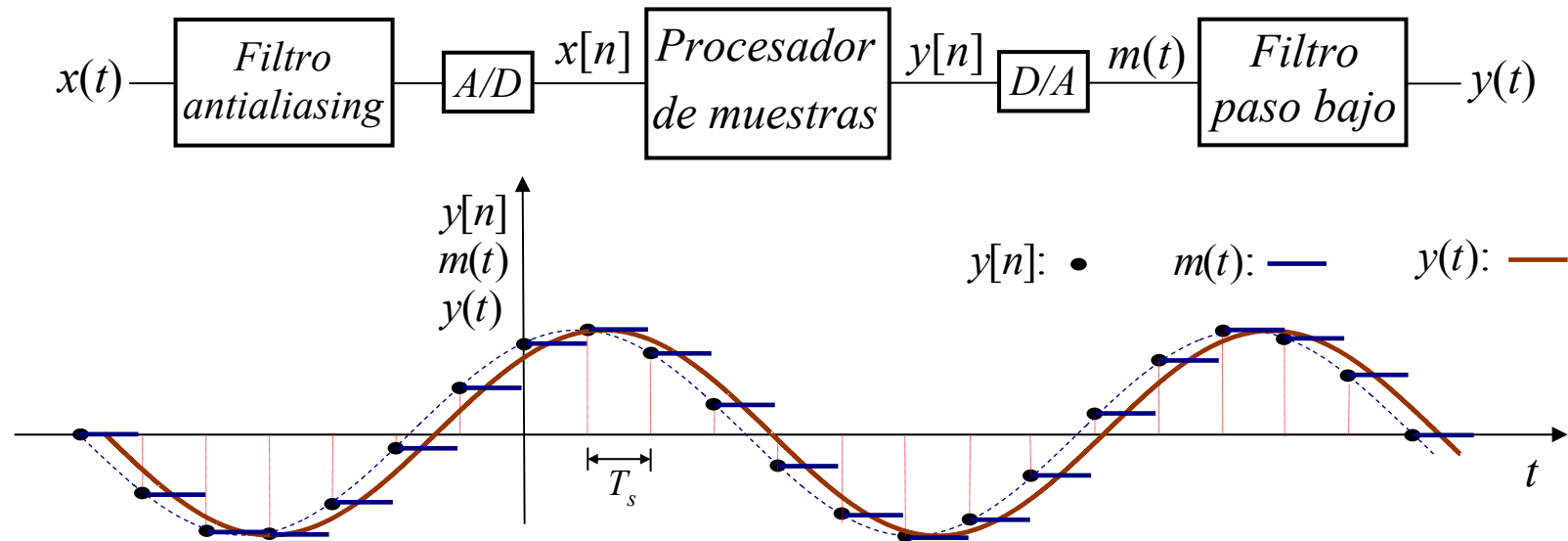
$$w_c = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{2 \cdot \text{sen}(w_d)}{2 + 2 \cdot \cos(w_d)} = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{\text{sen}(w_d)}{1 + \cos(w_d)} = \frac{2}{T_s} \text{tang}\left(\frac{w_d}{2}\right) \quad (\alpha)$$

$$w_d = 2 \arctang\left(\frac{w_c \cdot T_s}{2}\right) \quad (\beta)$$

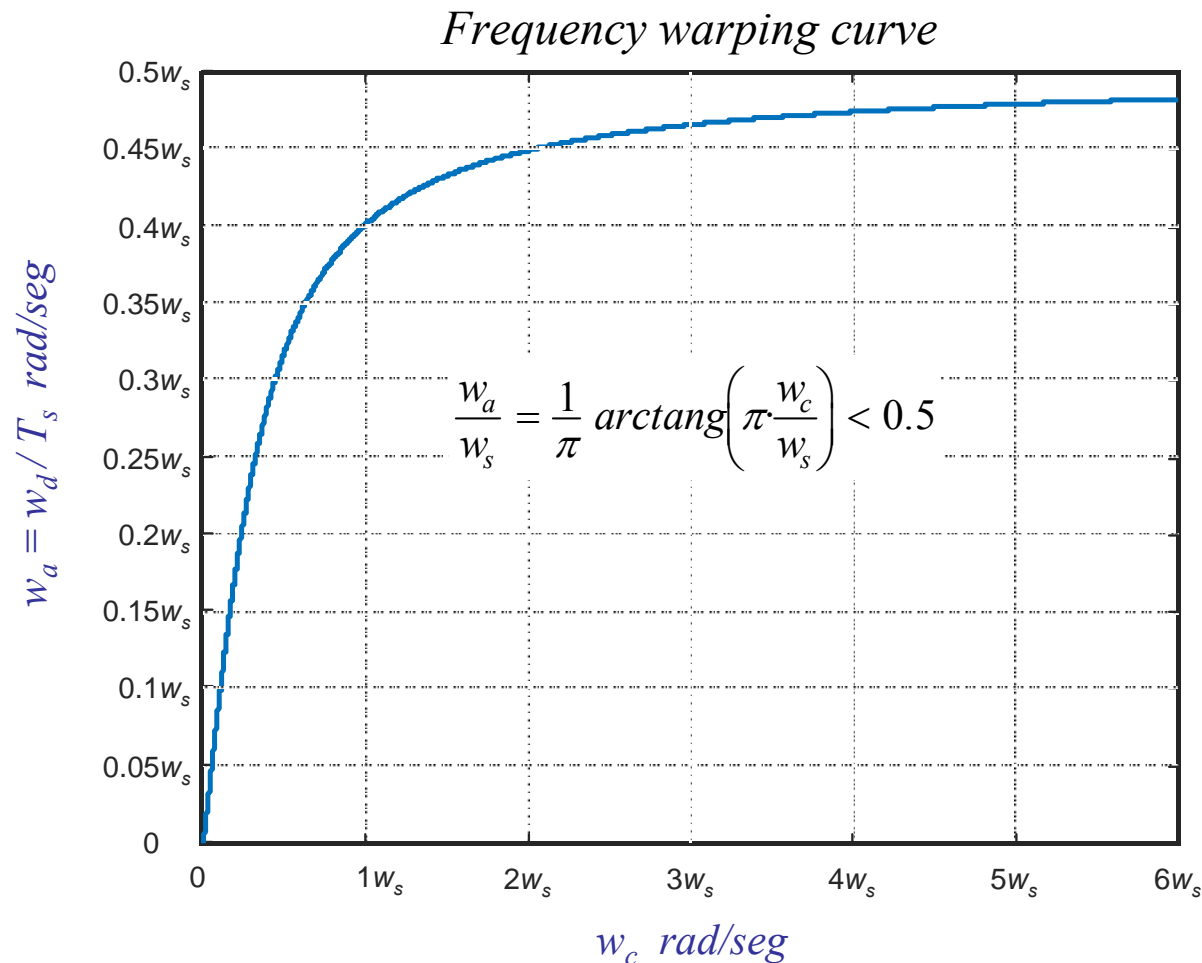
Si en las expresiones anteriores (α) y (β) se sustituye la frecuencia digital w_d por la frecuencia analógica $w_a = w_d/T_s$ que presentaría una señal senoidal digital de frecuencia w_d , una vez convertida en una señal continua en el tiempo y filtrada (ver figura en la parte inferior), se obtiene lo siguiente:

$$w_c = \frac{2}{T_s} \operatorname{tang}\left(\frac{w_a T_s}{2}\right) \quad w_a, w_c \text{ en rad/seg}$$

$$w_a = \frac{2}{T_s} \operatorname{arctang}\left(\frac{w_c \cdot T_s}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{w_a}{w_s} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctang}\left(\pi \frac{w_c}{w_s}\right)$$

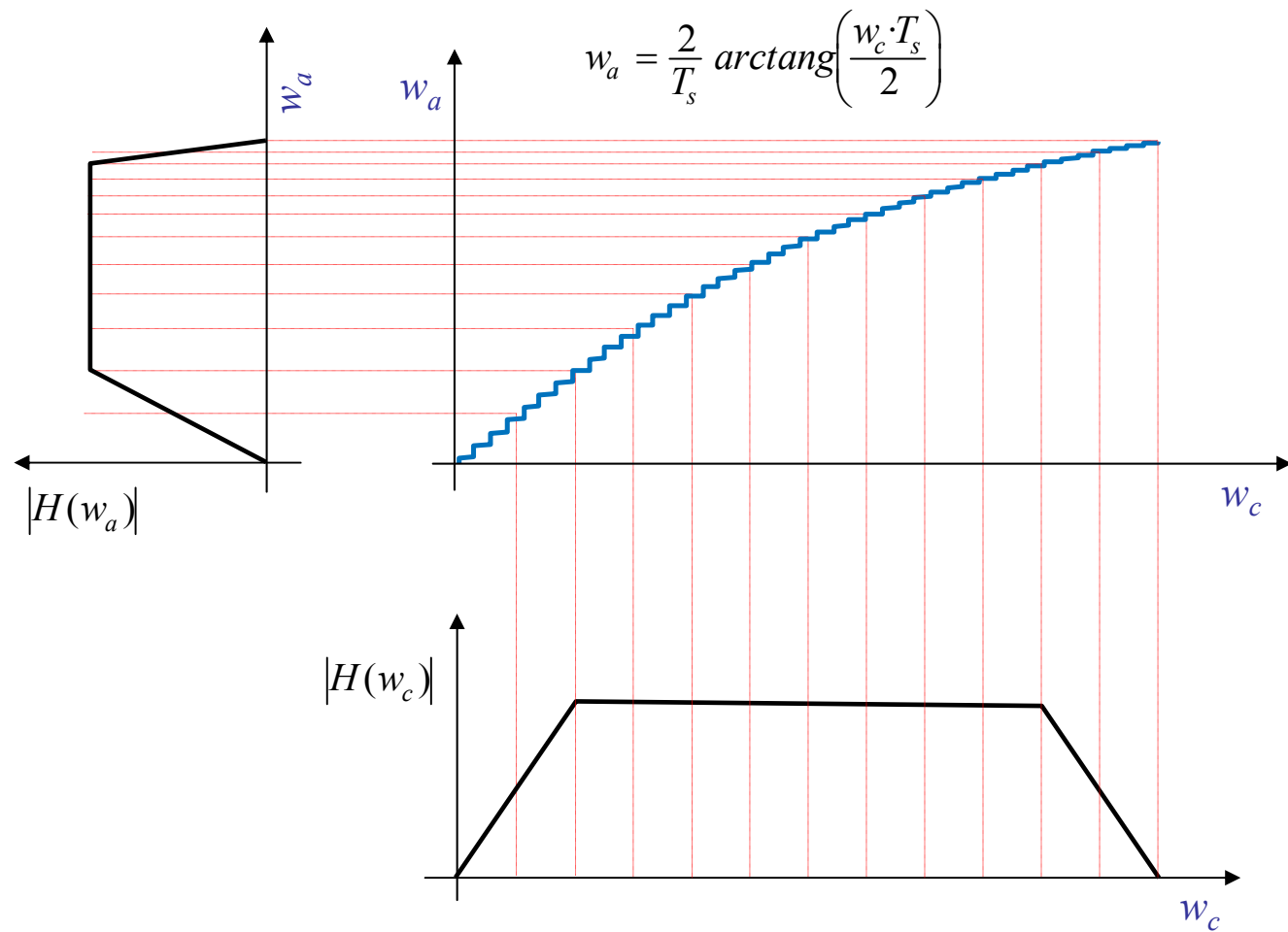


A continuación se representa gráficamente la relación entre el valor de una frecuencia analógica w_c en el plano S y la frecuencia analógica $w_a = w_d/T_s$ correspondiente a una frecuencia digital w_d en el plano Z que establece la *transformada de Tustin*. Como se puede observar en la figura, dichas frecuencias no son iguales y su relación no es lineal.



```
clear all;
hold off;
beta = 0:1/1000:6;
%beta=wc/ws
alfa = (1/pi)*atan(pi*beta);
%alfa=wa/ws
plot(beta,alfa);
grid;
```

El hecho de que la relación entre las frecuencias w_c y w_a sea no lineal da lugar a que, por ejemplo, si se diseña un filtro en el plano S y se utiliza la *transformada de Tustin* para determinar la función de transferencia equivalente en el plano Z, la respuesta en frecuencia del filtro digital que se obtenga va a ser distinta de la respuesta en frecuencia del filtro analógico (\equiv serán filtros distintos). En la siguiente página se muestra un ejemplo de como la *transformada de Tustin* provoca un cambio en una de las frecuencias de corte de un filtro, así como en el ancho de una banda de transición.



Note: frequency warping \equiv frequency compression

Dado que, en general, las frecuencias que hace corresponder la *transformada de Tustin* en los planos S y Z son distintas ($w_c \neq w_a = w_d/T_s$), a la hora de determinar el modelo matemático de un sistema digital discretizando un sistema analógico hay que proceder de la siguiente manera:

1º paso: A partir de las frecuencias características que debe presentar el sistema digital una vez construido, determinar las frecuencias características que debe tener el sistema analógico a diseñar utilizando la siguiente expresión (*predistorsión* \equiv *prewarping*):

$$w_c = \frac{2}{T_s} \operatorname{tang}\left(\frac{w_a T_s}{2}\right) \Leftrightarrow f_c = \frac{f_s}{\pi} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi f_a}{f_s}\right)$$

2º paso: Diseñar el sistema analógico de modo que tenga las frecuencias características determinadas en el paso anterior.

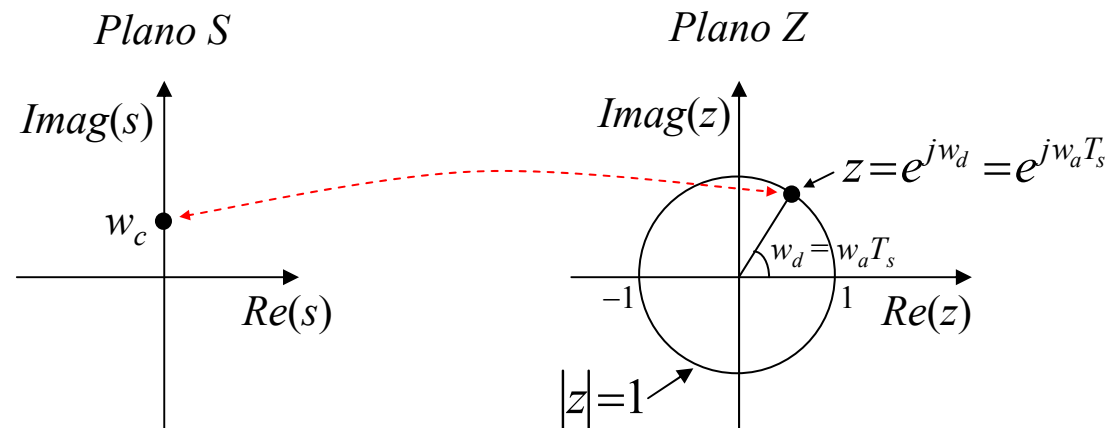
3º paso: Determinar la función de transferencia $H(z)$ del sistema discreto a partir de la función de transferencia $H(s)$ del sistema continuo utilizando la *transformada de Tustin*:

$$s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$$

Importante: el método indicado en la página anterior no hace que la respuesta en frecuencia del sistema digital sea exactamente igual a la respuesta en frecuencia del sistema analógico. Las respuestas en frecuencia de ambos sistemas van a ser parecidas, con la particularidad de que las frecuencias “características” de ambos sistemas son iguales.

Nota: sólo para (aprox.) $\omega_c \leq 0.1 \cdot \omega_s$ se cumple que:

$$\omega_a = \frac{2}{T_s} \arctan\left(\frac{\omega_c \cdot T_s}{2}\right) \approx \frac{2}{T_s} \frac{\omega_c \cdot T_s}{2} = \omega_c$$



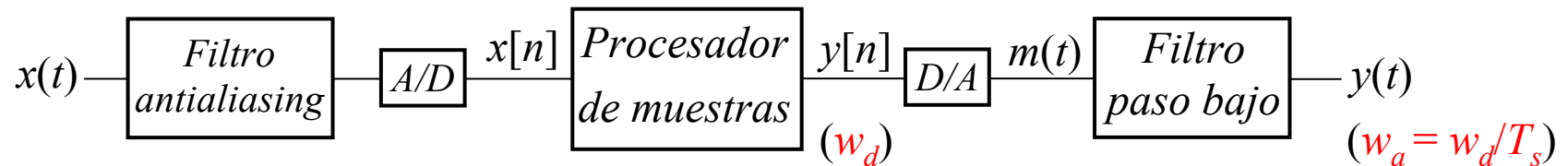
Resumen y definiciones:

w_c : frecuencia característica del sistema analógico (en *rad/seg*)

w_a : frecuencia característica (en *rad/seg*) presente en la salida (analógica) del sistema digital correspondiente a una frecuencia digital $w_d = w_a T_s$ (en *rad/muestra*) presente en la salida del procesador de señales digitales.

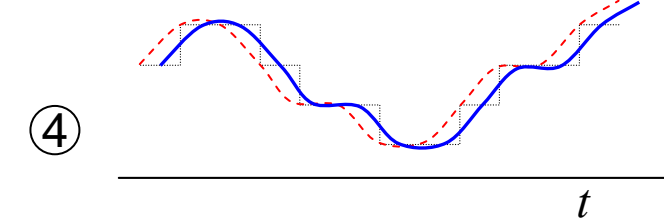
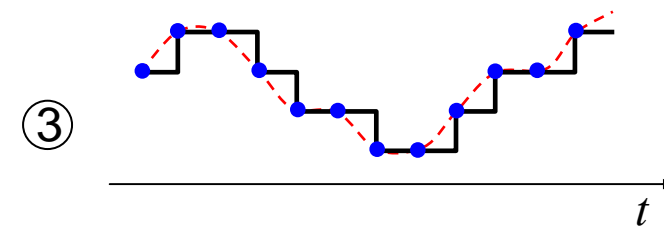
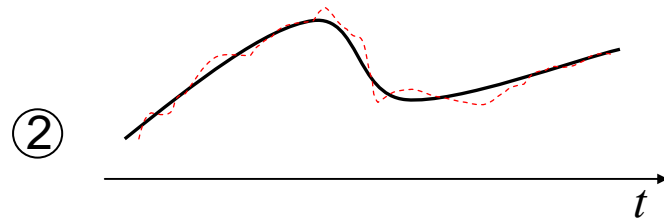
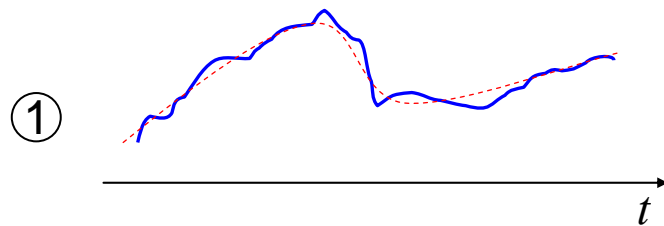
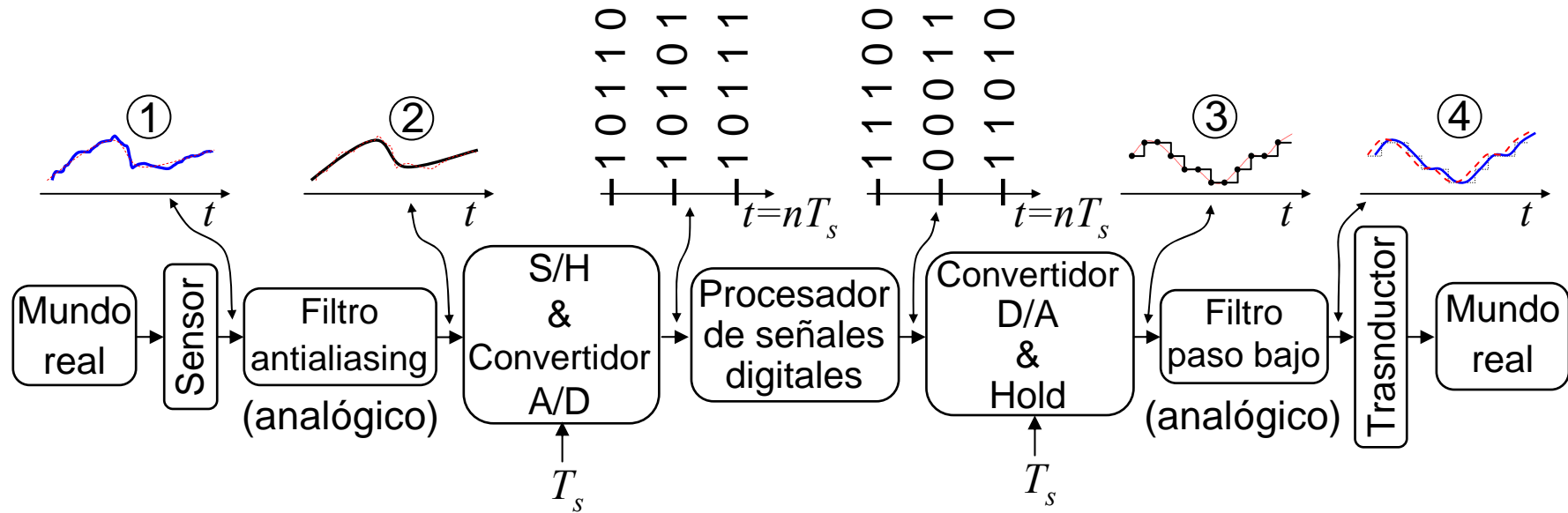
$$w_c = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{w_a T_s}{2}\right) \Leftrightarrow f_c = \frac{f_s}{\pi} \tan\left(\frac{\pi f_a}{f_s}\right)$$

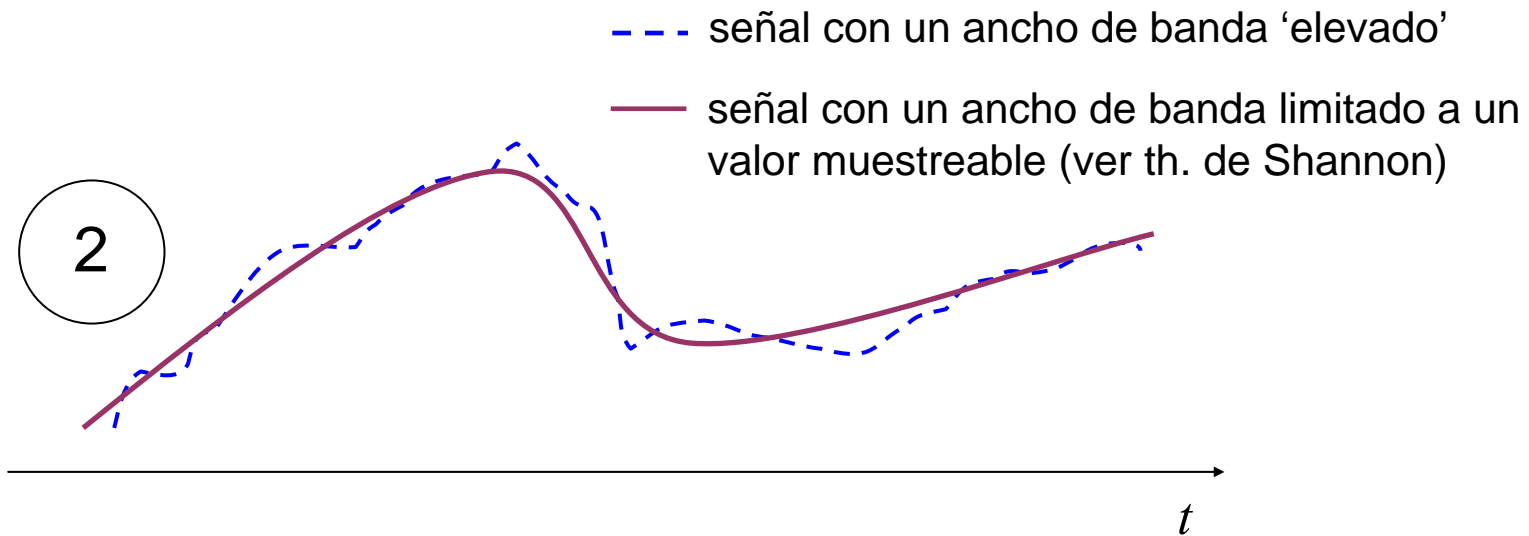
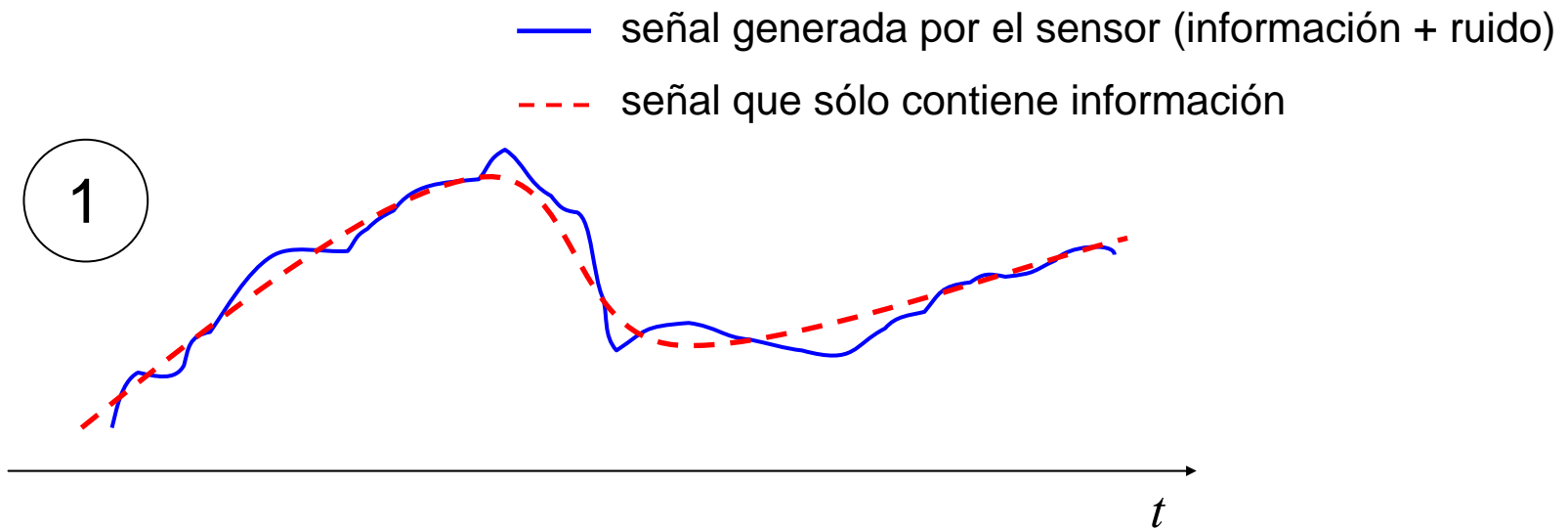
$$s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \equiv \text{transformada de Tustin}$$



Diseño de filtros digitales

Diagrama de bloques de un sistema que procesa señales digitales

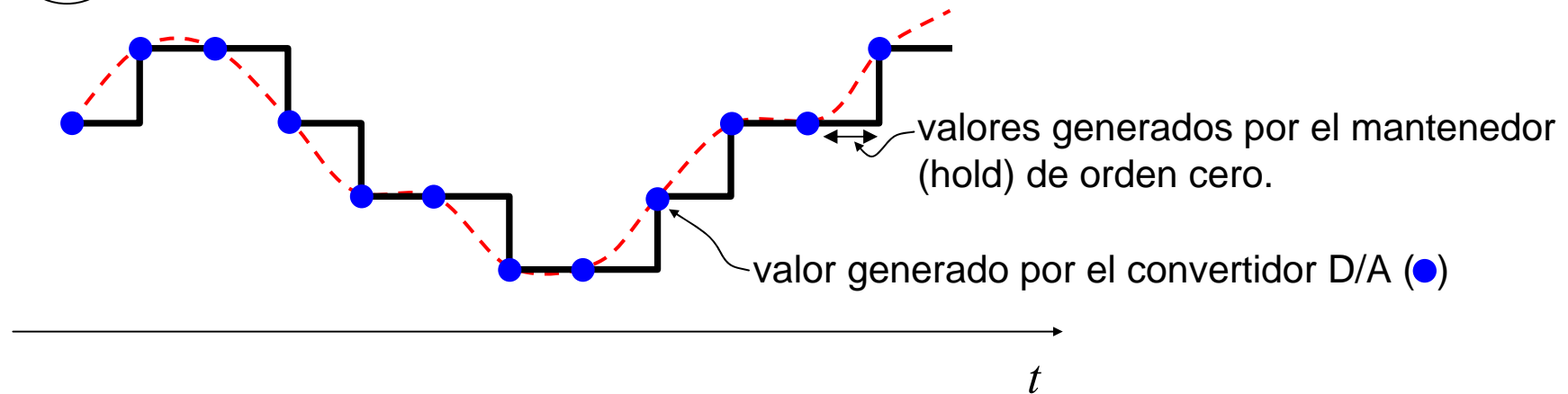




3

— señal generada por el convertidor D/A & Hold

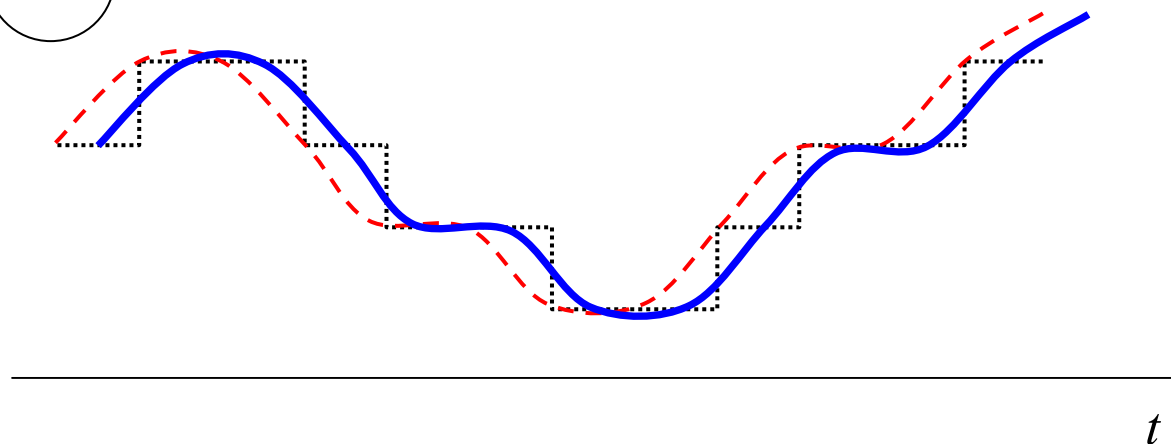
- - - señal (ideal) a generar por el sistema (el convertidor D/A genera muestras de ésta señal)



- - - señal (ideal) que sólo contiene información [sin el retardo (no deseado) introducido por el filtro paso bajo]

— señal generada por el filtro paso bajo (teórica con retardo)

4



- El procesador de señales digitales (discretas) ejecuta un algoritmo con el que procesa los valores de las muestras que le llegan periódicamente (cada T_s segundos).
- Para determinar el algoritmo a ejecutar se pueden seguir 2 caminos distintos:

Camino 1: **1º paso**: Se basa en diseñar un sistema continuo en el tiempo que realice sobre una señal analógica $x(t)$ una función como la que se quiere que realice el sistema procesador de señales digitales (*ejemplo filtro IIR*).

2º paso: A partir del sistema continuo se determina un sistema discreto equivalente, utilizando un método de discretización apropiado. En la literatura técnica se pueden encontrar diversos métodos de discretización:

_ *Impulse response invariant method*

_ *Step response invariant method*

_ *Bilinear \equiv Tustin \equiv Trapezoidal approximation method \equiv W transform*

_ *etc.*

El método más utilizado es la transformada *bilineal* o de *Tustin*, ya que es la que proporciona una buena discretización tanto a altas como a bajas frecuencias. La transformada de *Tustin* se define de la siguiente manera:

$$j\omega = s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{2}{T_s} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

El sistema digital obtenido mediante la discretización de un sistema continuo no va a presentar la misma respuesta en frecuencia que el sistema continuo. De hecho, se puede demostrar que las diferencias entre ambas respuestas en frecuencia se hacen mayores a medida que el valor de $\tan^{-1}(\omega T_s/2)$ difiere del valor de $\omega T_s/2$ (\equiv la frecuencia ω crece)

Si se desea que el sistema digital presente una determinada ganancia y una determinada fase a una frecuencia $\omega_d = \omega_a \cdot T_s$ dada, entonces hay que diseñar el sistema continuo para que tenga dicha ganancia y dicha fase a una frecuencia ω_c que cumpla lo siguiente (*frequency prewarping*):

$$\omega_c = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega_a \cdot T_s}{2}\right) \qquad f_c = \frac{f_s}{\pi} \tan\left(\frac{\pi \cdot f_a}{f_s}\right)$$

Nota: la elección de la frecuencia $\omega_d = \omega_a \cdot T_s$ a la que el sistema digital debe presentar una determinada ganancia y una determinada fase depende de la aplicación que se considere. Así por ejemplo, para un filtro, $\omega_d = \omega_a \cdot T_s$ podría ser una frecuencia de corte.

Nota: los métodos de las respuestas invariantes a un impulso y a un escalón no proporcionan una buena discretización a altas frecuencias, de ahí que apenas se utilicen.

3º paso: A partir de la *función de transferencia* del sistema discreto se obtienen una o varias ecuaciones en diferencias y a partir de éstas ecuaciones se determina el algoritmo a ejecutar por el procesador.

Nota: se pueden realizar diferentes implementaciones de una función de transferencia discreta, todas ellas equivalentes entre si a nivel matemático. Ahora bien, desde un punto de vista práctico hay diferencias según la implementación utilizada en cuanto al:

- _ número de operaciones matemáticas a realizar por el procesador en cada periodo de muestreo.

- _ la sensibilidad a los errores de representación de los coeficientes de la ecuación en diferencias y a los efectos de realizar operaciones matemáticas con un procesador con una longitud de palabra finita (procesador de coma fija).

- _ al trabajo de programar el algoritmo.

- _ al tamaño del código a ejecutar.

- _ etc.

Entre las distintas realizaciones de una *función de transferencia discreta* cabe destacar las siguientes:

- Forma directa de tipo I (\equiv estructura no canónica directa)
- Forma directa de tipo II (\equiv estructura canónica directa \equiv Biquad)
- Implementación en cascada
- Implementación en paralelo

Camino 2: **1º paso:** Se basa en diseñar directamente un sistema discreto en el plano Z a partir de las especificaciones de diseño (*ejemplo filtros FIR*).

2º paso: A partir de la *función de transferencia discreta* se obtienen una o varias ecuaciones en diferencias y a partir de éstas ecuaciones se determina el algoritmo a ejecutar por el procesador (lo mismo que en el paso 3 del camino anterior).

Ejemplo camino 1: Se trata de diseñar un filtro digital, paso bajo, de tipo *Butterworth*, que una vez implementado presente las siguientes características:

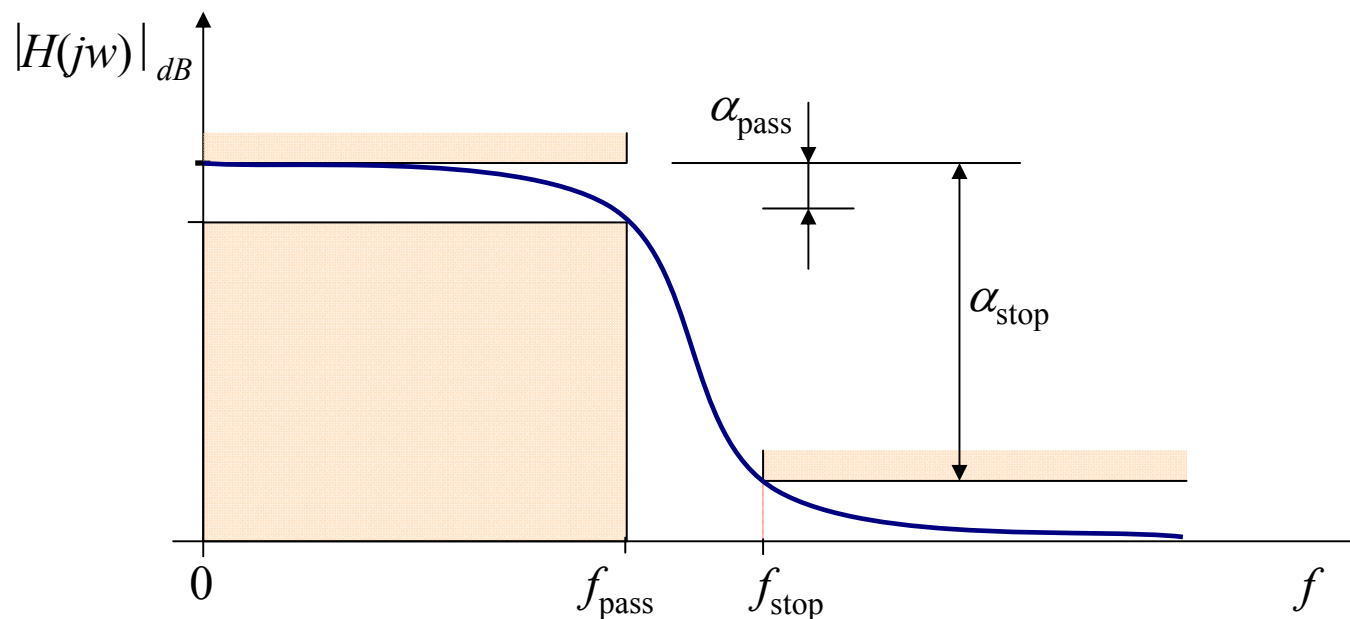
$\alpha_{\text{PASS}} = -1\text{dB}$ (amplitud máxima del rizado o atenuación máxima en la banda de paso)

$\alpha_{\text{STOP}} = -20\text{dB}$ (atenuación mínima en la banda prohibida)

$f_{\text{corte}} = f_{\text{pass}} = 1\text{kHz}$ (frecuencia de corte analógica del filtro digital)

$f_{\text{stop}} = 5\text{kHz}$ (frecuencia en la que comienza la banda prohibida del filtro digital a diseñar)

$f_s = 20\text{kHz}$ (frecuencia de muestreo)



En este ejemplo, el planteamiento que se va a seguir consiste en diseñar un filtro analógico de modo que, una vez discretizado utilizando la transformada de *Tustin*, el filtro digital que se obtenga presente las frecuencias analógicas f_{pass} y f_{stop} indicadas en la página anterior (diseño utilizando *prewarping*).

1º paso: Se determinan las frecuencias f_{c-pass} y f_{c-stop} que deberá tener el filtro analógico a diseñar, para que el filtro digital que se obtenga al discretizar el filtro analógico diseñado presente las frecuencias analógicas $f_{a-pass} = 1 \text{ kHz}$ y $f_{a-stop} = 5 \text{ kHz}$.

$$f_{c-pass} = \frac{f_s}{\pi} \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot f_{a-pass}}{f_s}\right) = \frac{2 \cdot 10^4}{\pi} \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot 10^3}{2 \cdot 10^4}\right) = 1008.3 \text{ Hz} \simeq 1008 \text{ Hz}$$

$$f_{c-stop} = \frac{f_s}{\pi} \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot f_{a-stop}}{f_s}\right) = \frac{2 \cdot 10^4}{\pi} \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot 5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^4}\right) = 6366.19 \text{ Hz} \simeq 6366 \text{ Hz}$$

Notas:

$$w_d = w_a \cdot T_s = \frac{2\pi w_a}{w_s} = \frac{2\pi f_a}{f_s} \equiv \text{frecuencia digital en radianes/muestra (unidades de ángulo)}$$

w_a y f_a son frecuencias analógicas del filtro digital, en *rad/seg* y en *Hz* respectivamente, correspondientes a una frecuencia digital w_d

En este ejemplo se cumple que:

$f_{d-pass} = 1 \text{ kHz}$ y $f_{d-stop} = 5 \text{ kHz}$. son las frecuencias analógicas del filtro digital

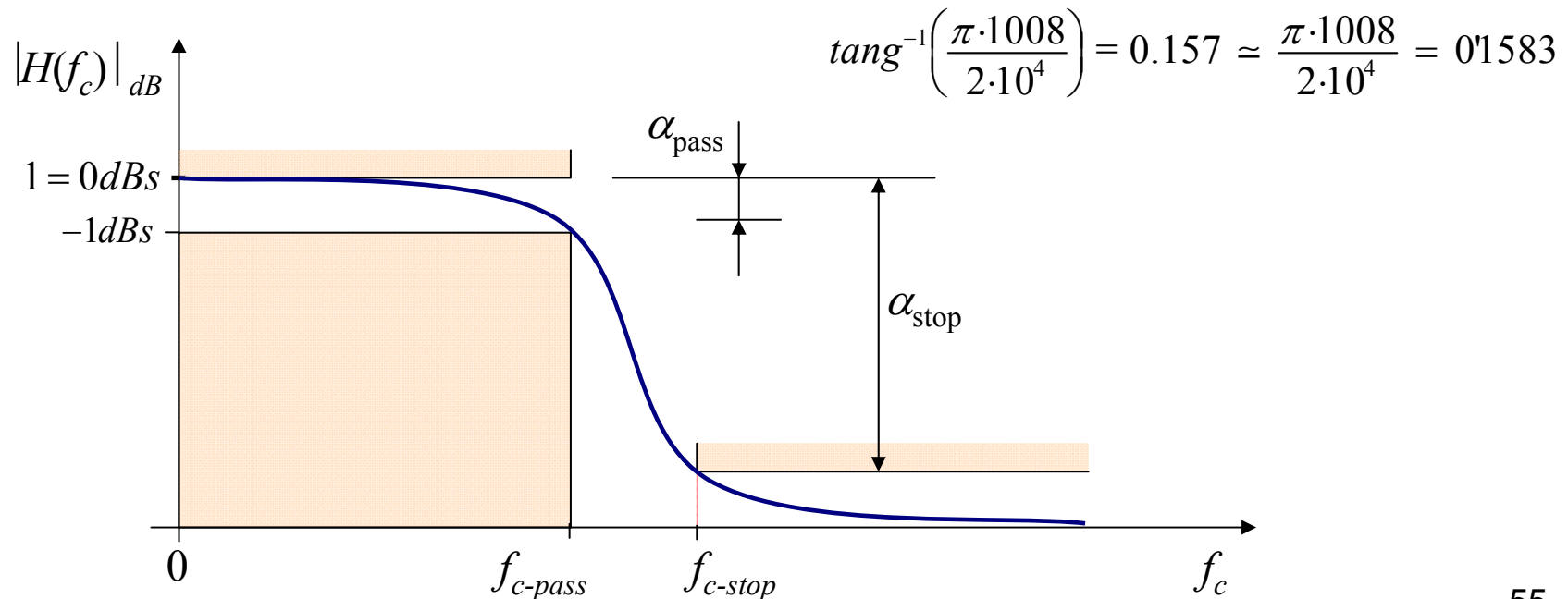
2º paso: Se diseña un filtro *analógico*, de tipo *Butterworth*, con las siguientes características (programa *WFilter*):

$\alpha_{\text{pass}} = -1\text{dB}$ (atenuación máxima del rizado en la banda de paso)

$\alpha_{\text{stop}} = -20\text{dB}$ (atenuación mínima en la banda prohibida)

$f_{c\text{-corte}} = f_{c\text{-pass}} = 1008\text{ Hz}$ (frecuencia en la que finaliza la banda de paso)

$f_{c\text{-stop}} = 6366\text{ Hz}$ (frecuencia en la que comienza la banda prohibida)

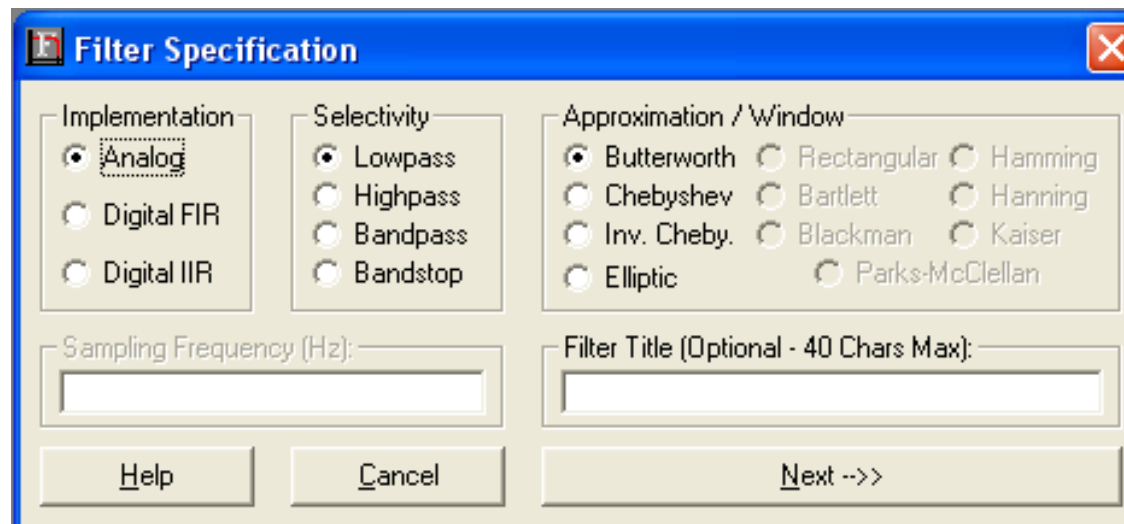


Para diseñar el filtro analógico se puede utilizar cualquiera de los innumerables programas que existen. En este ejemplo se va a utilizar el programa *WFilter* (está en faitic).

File → *New*: Implementation: *Analog*

Selectivity: *Lowpass*

Approximation/window: *Butterworth*



click en *Next*


En la siguiente ventana hay que indicar los datos (ganancias/atenuaciones y frecuencias) que caracterizan al filtro analógico a diseñar:

Passband specification: Gain (dB): -1 dB

Edge Freq (Hz): 1008 Hz

Stopband specification: Gain (dB): -20 dB

Edge Freq (Hz): 6366 Hz



The image shows a 'Lowpass Specification' dialog box with a blue title bar and a red close button. It contains two main sections: 'Passband Specification' and 'Stopband Specification'. The 'Passband Specification' section has input fields for 'Gain (dB)' with the value '-1' and 'Edge Freq. (Hz)' with the value '1008'. The 'Stopband Specification' section has input fields for 'Gain (dB)' with the value '-20' and 'Edge Freq. (Hz)' with the value '6366'. At the bottom, there are four buttons: 'Help', 'Cancel', '<<-- Back', and 'Design Filter'.

Passband Specification		Stopband Specification	
Gain (dB)	-1	Gain (dB)	-20
Edge Freq. (Hz)	1008	Edge Freq. (Hz)	6366

Buttons: Help, Cancel, <<-- Back, Design Filter

click en Design Filter

Se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{7,883 \cdot 10^7}{s^2 + 1,2556 \cdot 10^4 \cdot s + 7,883 \cdot 10^7} =$$

$$= \frac{1}{1,2678 \cdot 10^{-8} s^2 + 1,5923 \cdot 10^{-4} \cdot s + 1}$$

```

WFilter - C:\Archivos de programa\WFilter\Untitled...
File View Edit Options Window Help

Selectivity:      Lowpass
Approximation:    Butterworth
Implementation:   Analog
Passband gain (dB): -1,0
Stopband gain (dB): -20,0
Passband freq (Hz): 1008,0
Stopband freq (Hz): 6366,0

Filter Length/Order: 02
Overall Filter Gain: 1,000000000000E+00

      Numerator Coefficients
QD [S^2 +      S      +      1      ]
== =====
01 0,0  0,000000000000E+00  7,88303515116E+07

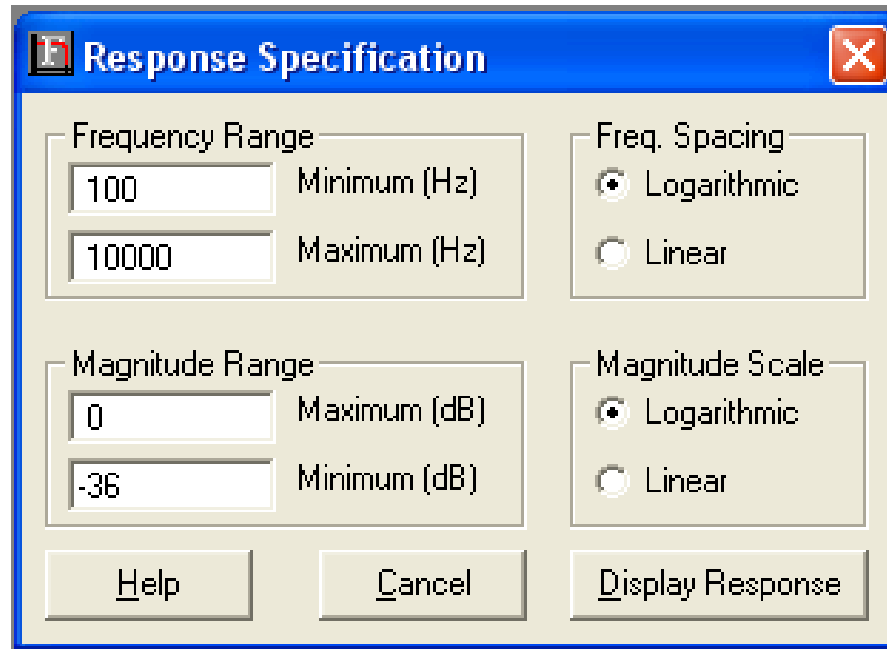
      Denominator Coefficients
QD [S^2 +      S      +      1      ]
== =====
01 1,0  1,25563013274E+04  7,88303515116E+07

      Zeros
QD [      Real      ] [      Imag      ]
== =====
01      Zero at infinity.
02      Zero at infinity.

      Poles
QD [      Real      ] [      Imag      ]
== =====
01 -6,27815066368E+03  6,27815066368E+03
02 -6,27815066368E+03 -6,27815066368E+03

```

Haciendo click en *Edit* → *Response parameters* se abre una ventana en la que hay que indicar el intervalo de valores (eje de ordenadas) y de frecuencias (eje de abscisas) a representar de la curva de módulos y de la curva de ángulos correspondientes a la respuesta en frecuencia del filtro diseñado

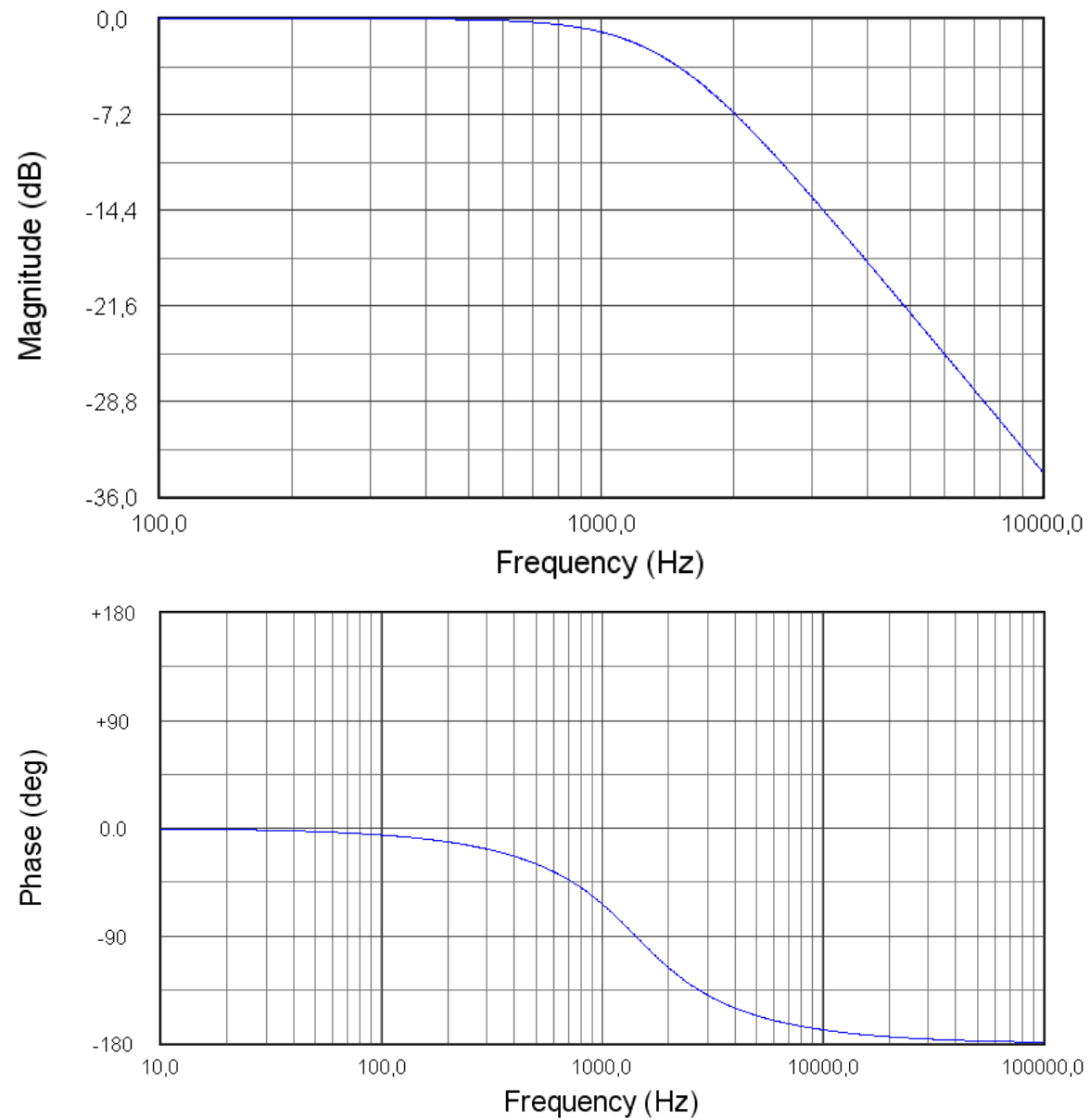


The image shows a 'Response Specification' dialog box with a blue title bar and a close button (X) in the top right corner. The dialog is divided into four main sections: 'Frequency Range', 'Freq. Spacing', 'Magnitude Range', and 'Magnitude Scale'. Each section contains input fields and radio buttons. At the bottom, there are three buttons: 'Help', 'Cancel', and 'Display Response'.

Section	Parameter	Value	Unit
Frequency Range	Minimum (Hz)	100	Hz
	Maximum (Hz)	10000	Hz
Freq. Spacing	Logarithmic	<input checked="" type="radio"/>	
	Linear	<input type="radio"/>	
Magnitude Range	Maximum (dB)	0	dB
	Minimum (dB)	-36	dB
Magnitude Scale	Logarithmic	<input checked="" type="radio"/>	
	Linear	<input type="radio"/>	

Buttons: Help, Cancel, Display Response

Las curvas que se representan en la pantalla son las siguientes:



3º paso: Utilizando la transformada *bilineal*, de *Tustin* o *trapezoidal*

$$s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = 2 f_s \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = 2 f_s \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

se obtiene la siguiente *función de transferencia*, en el plano Z, del filtro digital diseñado:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)} = \frac{3,616 \cdot 10^{-2} \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,394 \cdot z^{-1} + 0,539 \cdot z^{-2}} = \frac{k \cdot (1 + b_{-1} \cdot z^{-1} + b_{-2} \cdot z^{-2})}{1 + a_{-1} \cdot z^{-1} + a_{-2} \cdot z^{-2}}$$

4º paso: A partir de la función de transferencia anterior $H(z)$, aplicando la transformada inversa de Z, se determina la siguiente *ecuación en diferencias* que modela el comportamiento del filtro digital (ecuación que tiene que ejecutar un procesador cada T_s segundos)

$$H(z) = \frac{m[z]}{e[z]} = \frac{k \cdot (1 + b_{-1} \cdot z^{-1} + b_{-2} \cdot z^{-2})}{1 + a_{-1} \cdot z^{-1} + a_{-2} \cdot z^{-2}} = \frac{3,616 \cdot 10^{-2} \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,394 \cdot z^{-1} + 0,539 \cdot z^{-2}}$$



$$m(z) + a_{-1} \cdot z^{-1} \cdot m(z) + a_{-2} \cdot z^{-2} \cdot m(z) = k \cdot e(z) + k \cdot b_{-1} \cdot z^{-1} \cdot e(z) + k \cdot b_{-2} \cdot z^{-2} \cdot e(z)$$



$$m[n] + a_{-1} \cdot m[n-1] + a_{-2} \cdot m[n-2] = k \cdot e[n] + k \cdot b_{-1} \cdot e[n-1] + k \cdot b_{-2} \cdot e[n-2]$$

siendo: $k = 3,616 \cdot 10^{-2}$ $b_{-1} = 2$ $b_{-2} = 1$ $a_{-1} = -1,394$ $a_{-2} = 0,539$

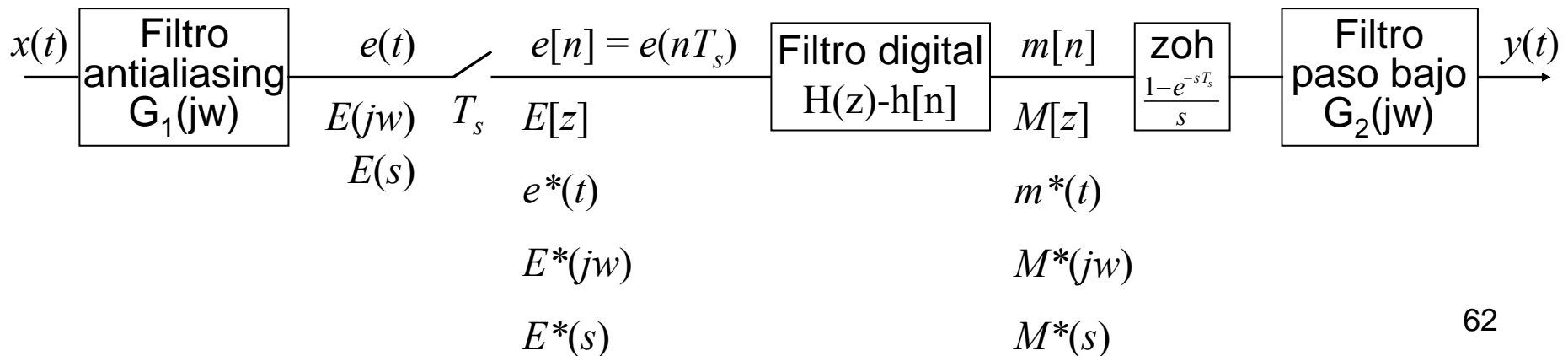
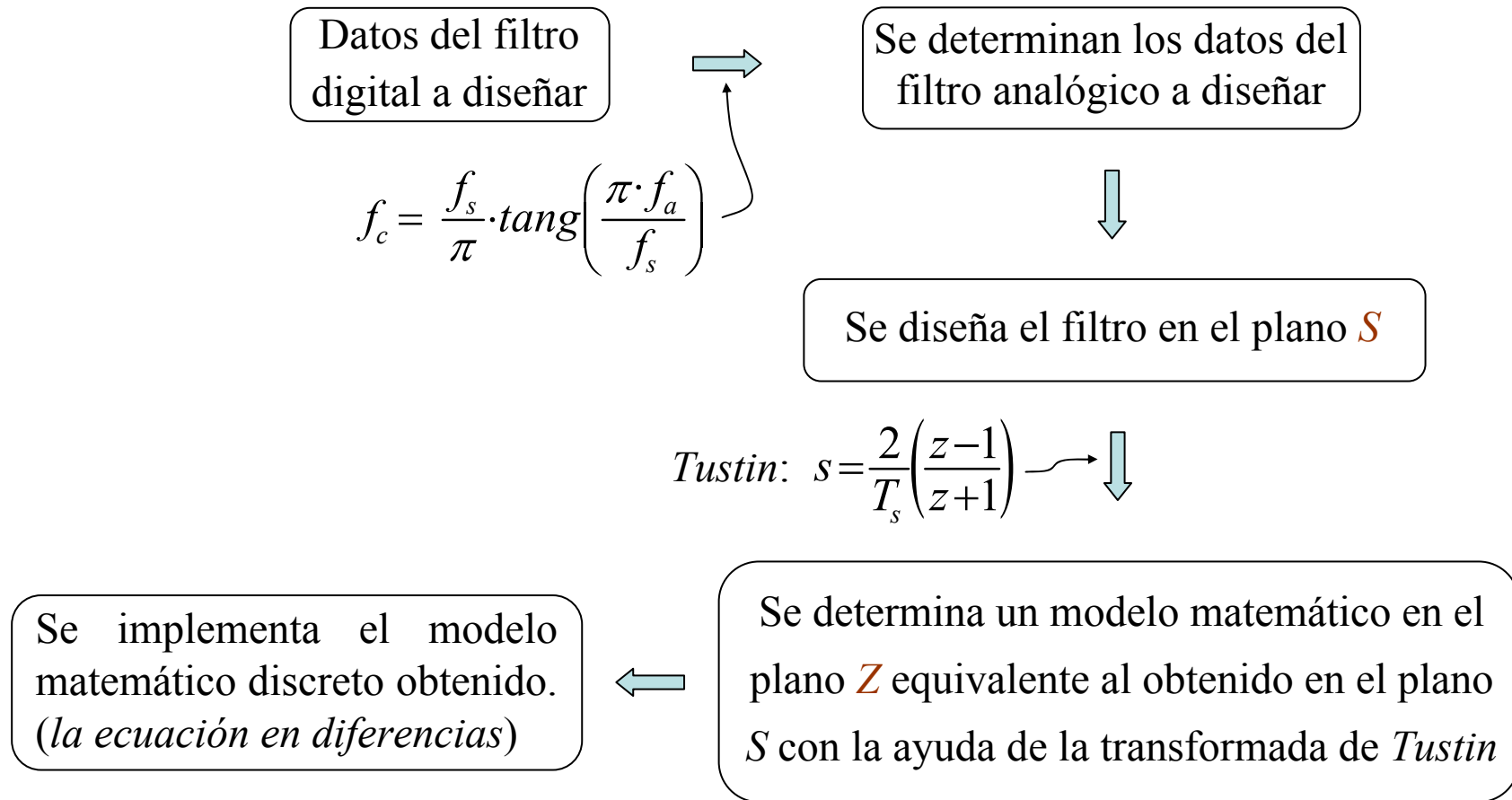


Diagrama de los pasos a dar:



Nota: Hay que elegir el valor de T_s de modo que se cumpla que $\text{tang}^{-1} \left(\frac{w \cdot T_s}{2} \right) \approx \frac{w \cdot T_s}{2}$

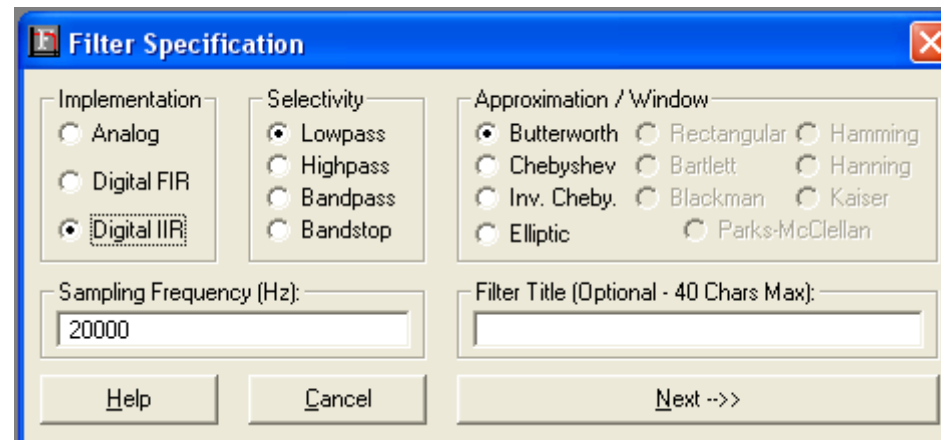
Además de escribir un algoritmo que implemente la ecuación en diferencias anterior, todavía quedaría por diseñar el filtro *antialiasing* y el filtro *paso-bajo* que se indica en el diagrama de bloques anterior (**ambos filtros son obligatoriamente analógicos**)

Nota: en estas notas tampoco se ha hablado sobre la elección de la frecuencia de muestreo. En cuanto a esto, cabe decir que en la literatura técnica se pueden encontrar infinidad de criterios a este respecto, aunque ninguno de aplicación general. A la hora de elegir su valor hay que tener en cuenta que si es demasiado pequeña, se producirá *aliasing* \Rightarrow el sistema (filtro) **funcionará mal**, ya que confundirá componentes en frecuencia de la señal de entrada con otras de frecuencias más pequeñas.

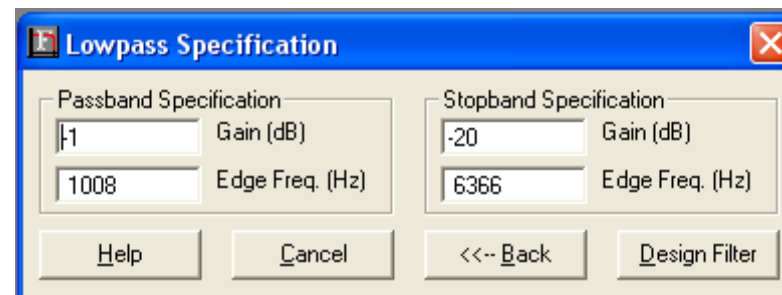
Si se elige una frecuencia de muestreo superior a la necesaria, el coste del filtro será mayor de lo necesario... o incluso irrealizable.

Uno de los muchos criterios que se podrían aplicar en este caso es: $f_s \geq 5 \cdot f_{a-pass}$

Nota: el programa WFilter diseña los filtros digitales IIR siguiendo exactamente el mismo procedimiento de diseño que el seguido en el ejemplo anterior. Por lo que si en dicho programa se selecciona la opción Digital IIR




y a continuación se indican los datos:




se obtiene la misma función de transferencia discreta $H(z)$ que la obtenida en el ejemplo anterior:

$$H(z) = \frac{m[z]}{e[z]} = \frac{k \cdot (1 + b_{-1} \cdot z^{-1} + b_{-2} \cdot z^{-2})}{1 + a_{-1} \cdot z^{-1} + a_{-2} \cdot z^{-2}} = \frac{3,616 \cdot 10^{-2} \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,394 \cdot z^{-1} + 0,539 \cdot z^{-2}}$$



$$m(z) + a_{-1} \cdot z^{-1} \cdot m(z) + a_{-2} \cdot z^{-2} \cdot m(z) = k \cdot e(z) + k \cdot b_{-1} \cdot z^{-1} \cdot e(z) + k \cdot b_{-2} \cdot z^{-2} \cdot e(z)$$



$$m[n] + a_{-1} \cdot m[n-1] + a_{-2} \cdot m[n-2] = k \cdot e[n] + k \cdot b_{-1} \cdot e[n-1] + k \cdot b_{-2} \cdot e[n-2]$$

siendo: $k = 3,616 \cdot 10^{-2}$ $b_{-1} = 2$ $b_{-2} = 1$ $a_{-1} = -1,394$ $a_{-2} = 0,539$

Ejercicio: Diseñar un filtro digital, paso bajo, basado en un filtro analógico de tipo *Chebyshev de tipo I*, utilizando el programa WFilter. Las características del filtro digital a diseñar son:

$\alpha_{\text{PASS}} = -2\text{dB}$ (amplitud máxima del rizado en la banda de paso)

$\alpha_{\text{STOP}} = -60\text{dB}$ (atenuación mínima en la banda prohibida)

$f_{\text{corte}} = f_{\text{pass}} = 10\text{kHz}$ (frecuencia *no-normalizada* en la que finaliza la banda de paso)

$f_{\text{stop}} = 20\text{kHz}$ (frecuencia *no-normalizada* en la que comienza la banda prohibida)

$f_s = 50\text{kHz}$ (frecuencia de muestreo)

1º paso: *File* → *New*: Implementation: *Digital IIR*

Selectivity: *Lowpass*

Approximation/window: *Chebyshev* (\equiv *Chebyshev de tipo I*)

Samplig Frequency (Hz): *50e3*

clik en *Next*

Passband specification: Gain (dB): -2

Edge Freq (Hz): $10e3$

Stopband specification: Gain (dB): -60

Edge Freq (Hz): $20e3$

clik en *Design Filter* y se obtienen los siguientes datos

Stopband gain (dB): -60,0
 Passband freq (Hz): 10000,0
 Stopband freq (Hz): 20000,0
 Sampling freq (Hz): 50000,0

Filter Length/Order: 04
 Overall Filter Gain: 1,86714451145E-02

Numerator Coefficients
 QD [1 + z^-1 + z^-2]
 == =====
 01 1,0 2,000000000000E+00 1,000000000000E+00
 02 1,0 2,000000000000E+00 1,000000000000E+00

Denominator Coefficients
 QD [1 + z^-1 + z^-2]
 == =====
 01 1,0 -6,20696688131E-01 8,14430976062E-01
 02 1,0 -1,18935540161E+00 5,04413209263E-01

De donde se deduce la siguiente función de transferencia (discreta):

$$H(z) = \frac{1,8671 \cdot 10^{-2} \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2}) \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 6,20696 \cdot 10^{-1} \cdot z^{-1} + 8,1443 \cdot 10^{-1} \cdot z^{-2}) \cdot (1 - 1,189355 \cdot z^{-1} + 5,04413 \cdot 10^{-1} \cdot z^{-2})} =$$

$$= \frac{1,8671 \cdot 10^{-2} \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 6,20696 \cdot 10^{-1} \cdot z^{-1} + 8,1443 \cdot 10^{-1} \cdot z^{-2})} \cdot \frac{(1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 1,189355 \cdot z^{-1} + 5,04413 \cdot 10^{-1} \cdot z^{-2})}$$

Nota: hace tiempo, en una tarea de SD se preguntaba a los alumnos si conocían el *teorema fundamental del Álgebra*....

Haciendo *click* en [View](#) se abre una ventana denominada *Response specifications* en la que hay que indicar el rango de valores a representar, así como las escalas:

Frequency range: Minimum (Hz): [1e3](#)

Maximum (Hz): [1e5](#)

Magnitude range: Maximum (dBs): [0](#)

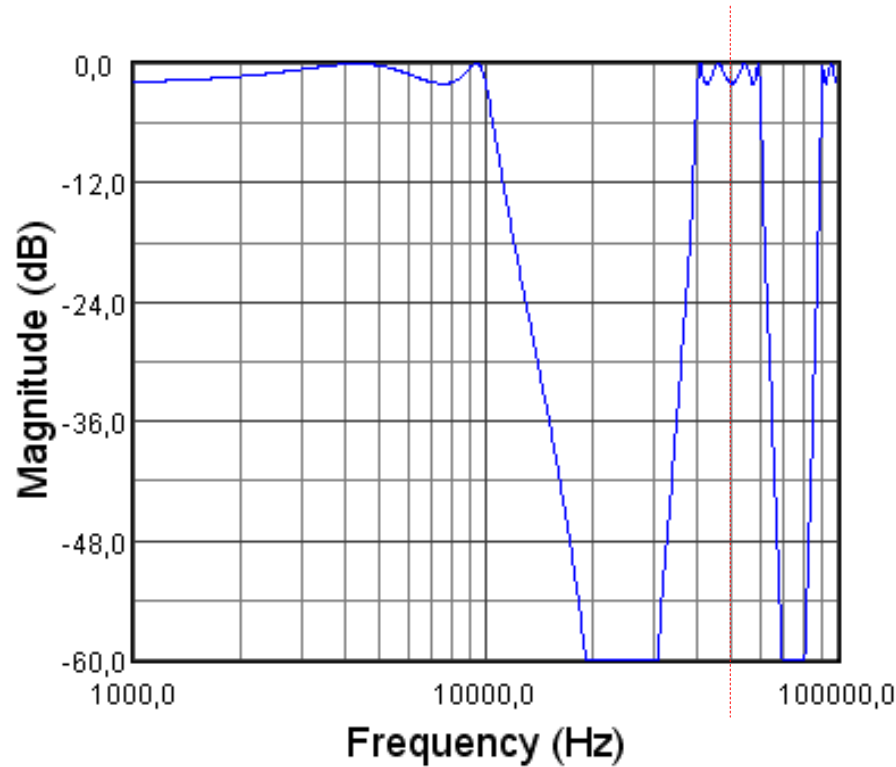
Minimum (dBs): [-60](#)

Frequency spacing: [Logarithmic](#)

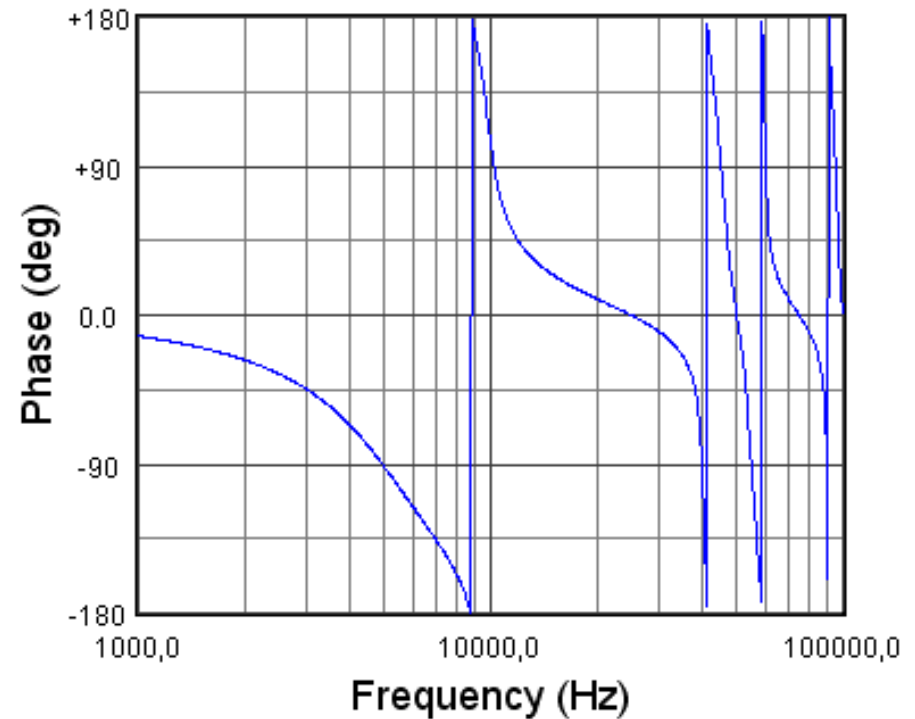
Magnitude scale: [Logarithmic](#)

haciendo *click* en [Display response](#), se obtienen las siguientes curvas correspondientes a la respuesta en frecuencia del filtro diseñado:

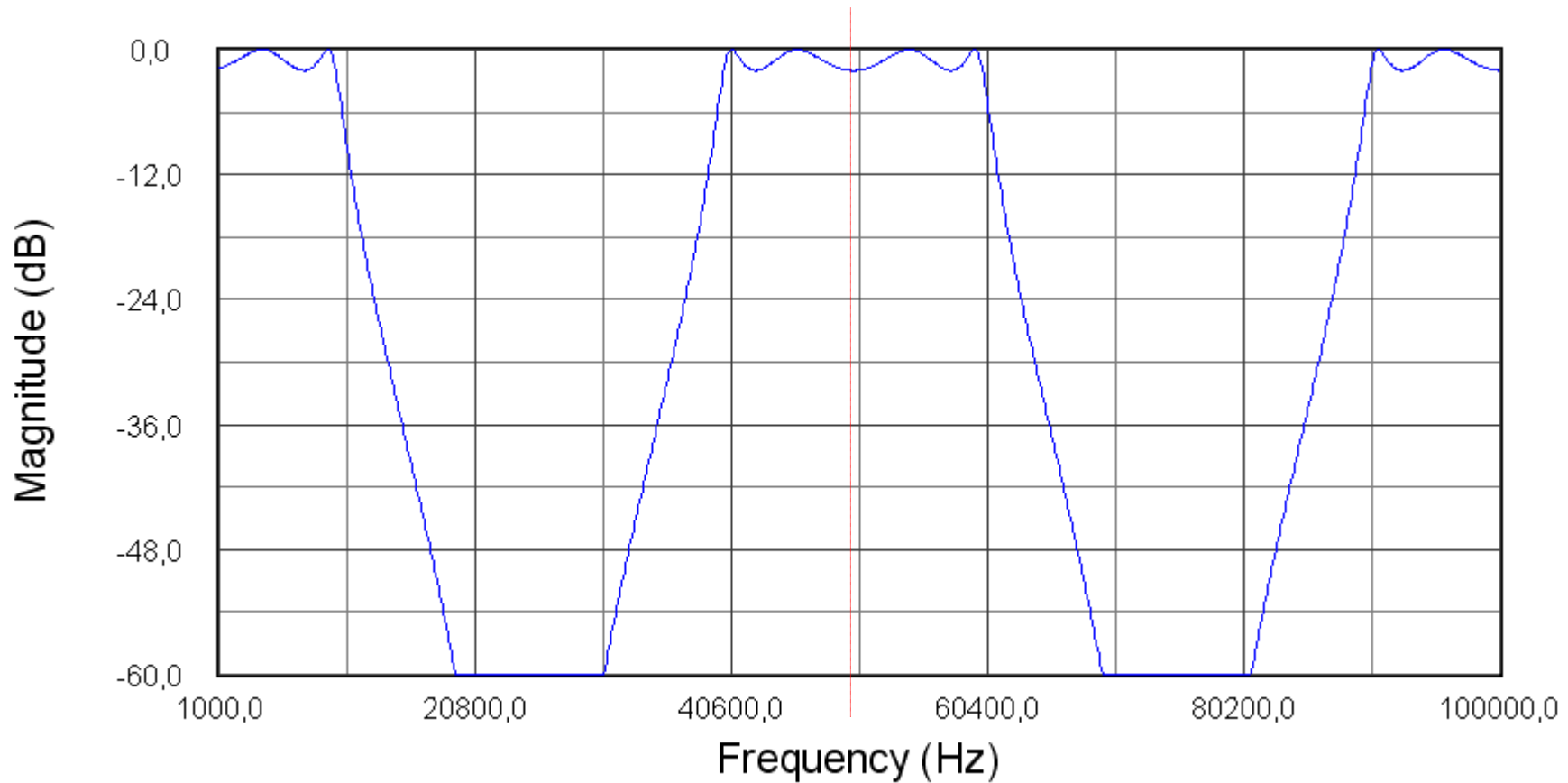
curva de módulos



curva de ángulos



Nota: en la curva de módulos se puede ver como aparece una réplica de la respuesta en frecuencia del filtro paso bajo diseñado centrada en la frecuencia de 50kHz (no hay que olvidar que la escala en el eje de frecuencias es logarítmica). En la siguiente diapositiva se representa la curva de módulos con una escala lineal en el eje de frecuencias.



Nota 1: si se hubiese elegido una representación de un rango de frecuencias mayor, se verían réplicas en todos los múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo (ver tarea 4).

Nota 2: el filtro *antialiasing* elimina todas las réplicas (siempre que su frecuencia de corte sea inferior a la mitad de la frecuencia de muestreo)

