Ejercicios de la sección 1.2 Forma Escalonada Reducida y solución de sistemas en forma paramétrica vectorial

(Clase de prácticas: 1, 3, 7, 10, 15, 16, 33.)

▶**1.** Para las siguientes matrices determina cuáles están en forma escalonada reducida y cuáles sólo en forma escalonada (pero no reducida).

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Repite el ejercicio anterior, con las matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Halla la forma escalonada reducida de las matrices de los ejercicios 3 y 4. Señala las posiciones pivote rodeando con un círculo los elementos en posición pivote tanto en la matriz final como en la matriz original. Enumera las columnas pivote.

▶**3.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

5. Describe las formas escalonadas posibles de una matriz no nula de 2 filas y 2 columnas. Utiliza el símbolo de punto, "•", para representar un elemento no nulo y el de asterisco, "$*$", para representar un elemento que puede ser cero o no.

6. Repite el ejercicio 5 para una matriz no nula de 3 filas y 3 columnas.

En los ejercicios 7 a 10 cada matriz representa la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales. En cada caso, determina si el sistema es compatible. De ser así, determina si la solución es única o no. Al igual que en el ejercicio 5, el punto "•" representa un número no nulo y el asterisco "$*$" un número que puede ser distinto de cero o no.

▶**7.** $\begin{pmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & 0 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$ ▶**10.** $\begin{pmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 11 y 12, determina el valor o los valores de h tales que la matriz sea la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales compatible.

11. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & h \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & h & -7 \end{pmatrix}$.

En los ejercicios 13 y 14, elije h y k de tal forma que el sistema dado:
(a) no tenga solución,
(b) tenga una solución única, y
(c) tenga muchas soluciones.
Da respuestas por separado para cada caso.

13.
$$\begin{aligned} x_1 + hx_2 &= 2 \\ 4x_1 + 8x_2 &= k \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 3x_1 + hx_2 &= k \end{aligned}$$

En los ejercicios 15 y 16, indica, para cada enunciado, si es verdadero o falso. Justifica cada respuesta.

▶**15.**

(a) En algunos casos, una matriz se puede reducir por filas a más de una matriz en forma escalonada reducida, usando diferentes secuencias de operaciones elementales de filas.

(b) El algoritmo de reducción por filas se aplica solamente a matrices ampliadas de sistemas de ecuaciones lineales.

(c) Una incógnita básica de un sistema de ecuaciones lineales es una incógnita que corresponde a una columna pivote en la matriz de coeficientes.

(d) Resolver un sistema de ecuaciones lineales es lo mismo que encontrar las ecuaciones paramétricas de su conjunto solución.

(e) Si una fila en la forma escalonada de la matriz ampliada de un sistema es $(0\ 0\ 0\ 5\ 0)$, entonces el sistema de ecuaciones lineales asociado es incompatible.

▶**16.**

(a) La forma escalonada de una matriz es única.

(b) En una matriz, las posiciones pivote dependen de si se usan o no intercambios de fila en el proceso de eliminación.

(c) La reducción de una matriz a forma escalonada es la fase progresiva del proceso de reducción por filas.

(d) Si un sistema tiene variables libres, entonces el conjunto solución contiene muchas soluciones.

(e) Una solución general de un sistema es una descripción explícita de todas las soluciones del sistema.

17. Supongamos que una matriz de coeficientes 3×5 para un sistema tiene tres columnas pivote. ¿Es compatible el sistema? ¿Por qué sí o por qué no?

18. Supongamos que un sistema de ecuaciones lineales tiene una matriz ampliada de 3×5 cuya quinta columna es una columna pivote. ¿Es compatible el sistema? ¿Por qué sí o por qué no?

Versión de 30 de enero de 2022, 16:20h.

19. Supongamos que la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales tiene una posición pivote en cada fila. Explica por qué este sistema es compatible.

20. Supongamos que la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y tres incógnitas tiene un pivote en cada columna. Explica por qué tiene este sistema una solución única.

21. Completa la siguiente frase utilizando el concepto de columnas pivote: "Si un sistema de ecuaciones lineales es compatible, entonces la solución es única si, y sólo si, ..."

22. ¿Qué debería saberse acerca de las columnas pivote de una matriz ampliada para poder asegurar que el sistema de ecuaciones lineales es compatible y tiene una solución única?

23. Un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas se denomina sistema *subdeterminado*. Supongamos que un sistema así resulta ser compatible. Explica por qué necesariamente existirá un número infinito de soluciones.

24. Pon un ejemplo de un sistema subdeterminado incompatible de dos ecuaciones y tres incógnitas.

25. Un sistema de ecuaciones lineales con más ecuaciones que incógnitas se denomina sistema *sobredeterminado*. ¿Puede ser compatible un sistema así?. Pon un ejemplo concreto de un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas que justifique tu respuesta.

Para los sistemas cuyas matrices se dan en los ejercicios 26 a 33, halla las soluciones generales escribiéndolas en forma paramétrica vectorial.

26. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & -6 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

►**33.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

34. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(a) Escribe la matriz A del sistema (matriz ampliada).

(b) Halla una matriz equivalente a A que esté en forma escalonada.

(c) A la vista de dicha forma escalonada discute las cuestiones de existencia y unicidad de soluciones del sistema de ecuaciones dado.

(d) Halla la forma escalonada reducida de A.

(e) En caso de ser compatible, escribe la solución general del sistema en forma paramétrica vectorial.

Halla las ecuaciones paramétricas del conjunto solución de los sistemas dados en los ejercicios 35 y 36.

35. $$\begin{aligned} x_1 \qquad - 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 7 \\ x_1 - 3x_2 \qquad &= 5. \end{aligned}$$

36. $$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 5x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 5x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Soluciones a ejercicios seleccionados de la sección 1.2

1. Escalonada reducida: (a), (b) y (c). Sólo escalonada (d).

3. La forma escalonada reducida es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Una posible forma de obtenerla es mediante la siguiente serie de operaciones elementales: $F_2 - 4F_1$, $F_3 - 6F_1$, $-\frac{1}{3}F_2$, $-\frac{1}{5}F_3$, $F_3 - F_2$, $F_1 - 2F_2$.

7. Sistema compatible determinado.

10. Sistema compatible indeterminado.

15. (a) **Falso** (La forma escalonada reducida es única.), (b) **Falso** (Se puede aplicar a cualquier matriz.), (c) **Verdadero** (Esta es la definición de las incógnitas básicas. Ver en el tema 1, sección 1.1 el párrafo anterior al ejercicio de tarea 1.1.2.), (d) **Verdadero** (Las ecuaciones paramétricas del conjunto solución representan la solución general del sistema.), (e) **Falso** (Esta fila no implica que haya un pivote en la última columna.).

16. (a) **Falso** (Véase en el tema 1, sección 1.2 la subsección “Unicidad de la forma escalonada reducida” justo antes del ejercicio de tarea 1.2.2.), (b) **Falso** (Se llega siempre a las mismas posiciones pivote háganse las operaciones elementales que se hagan para llegar a una forma escalonada.), (c) **Verdadero** (Ver en el tema 1, sección 1.2, el párrafo inicial de la subsección “El algoritmo de reducción por filas”.), (d) **Falso** (Sólo a condición de que sea compatible.), (e) **Verdadero** (Una descripción explícita nos permite generar sólo soluciones y tantas como queramos. Una descripción implícita sólo nos permite decir para cada candidato dado si es solución o no y no ofrece un método de generar soluciones.).

33. Como la matriz está en forma escalonada, sólo viendo la forma que tiene sabemos que la solución general es de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 1 \\ * \end{pmatrix}.$$

Pero además, como casi está en forma escalonada reducida, podemos incluso escribir sin hacer ningún cálculo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} * \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} * \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Basta hacer la operación elemental $F_1 - 2F_2$ para completar el cálculo de la forma escalonada reducida y llegar a la solución general:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$