Métodos algebraicos de análisis y síntesis de circuitos lógicos

- Introducción.

- Nociones acerca de las álgebras de Boole.

- Álgebra de Boole bivalente o de conmutación.
  _ Variables, funciones y constantes lógicas.
  _ Representación de funciones lógicas.
  _ Representación de funciones incompletas (no totalmente definidas)

- Introducción a las puertas lógicas.
  _ Implementación de funciones lógicas.

- Simplificación de funciones lógicas.
  _ Método algebraico (no).
  _ Método de Karnaugh-Veitch.

Ninguna investigación humana puede afirmarse que es científica si no pasa la prueba matemática.
Leonardo da Vinci

El idioma de la Ingeniería son las Matemáticas

Las inteligencias grandes discuten las ideas; las inteligencias medias, los sucesos; y las pequeñas, las personas.

Bertran Russell

Introducción:

En 1849, *George Boole* publicó un libro titulado:

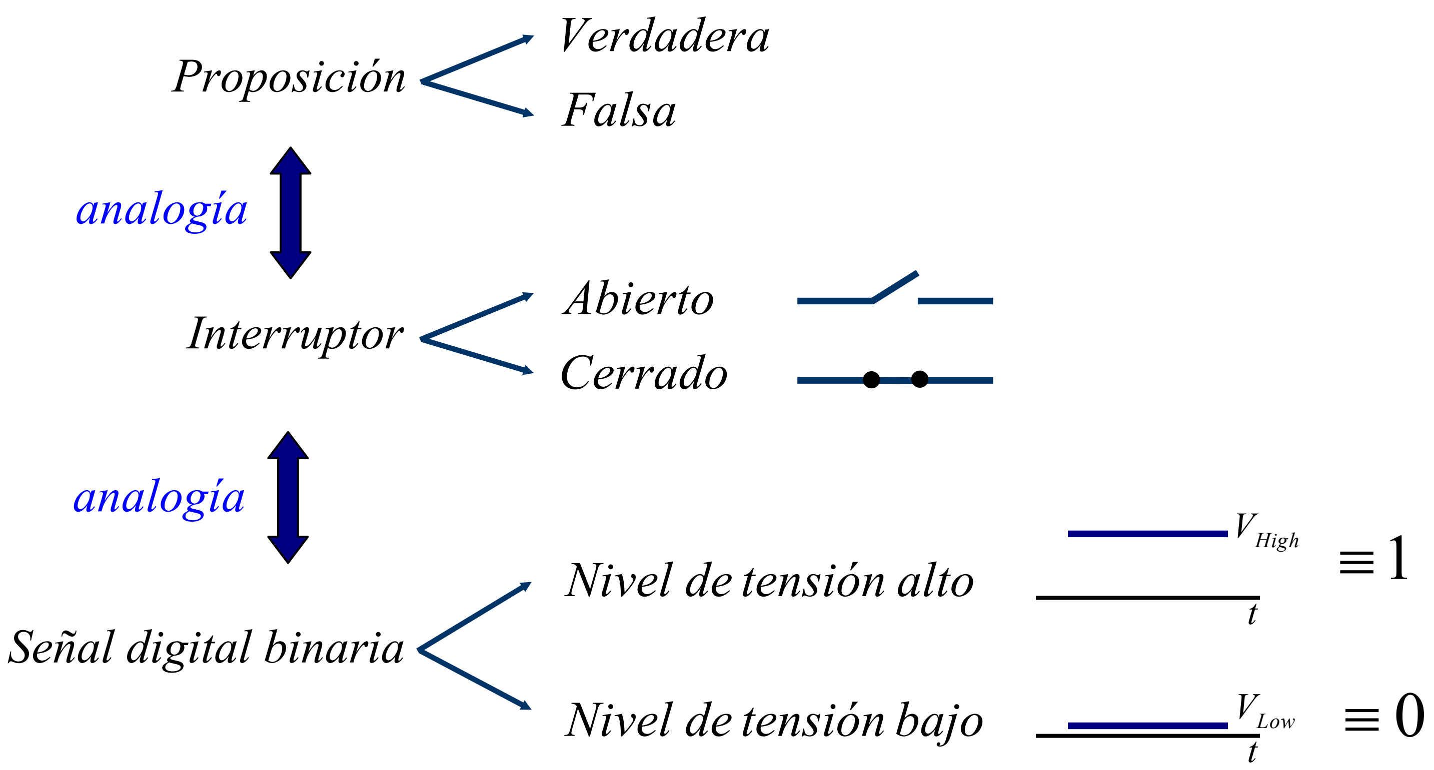
"*An investigation of the laws of thought*"

_ Método simbólico con el que pretendía analizar los mecanismos del razonamiento lógico humano.

_ Utilizaba *variables lógicas* que sólo podían tomar 2 valores distintos: *verdadero* y *falso*.

_ Su trabajo se basaba en suponer que cualquier razonamiento lógico *complejo* se puede descomponer en una secuencia concatenada de razonamientos lógicos simples del tipo *verdadero*/*falso*.

Claude E. Shannon (1938, MIT) se dio cuenta de que el trabajo de *Boole* era aplicable al análisis y diseño de circuitos basados en la utilización de interruptores. Cuando apareció la *Electrónica* basada en semiconductores, el trabajo de *Boole* se aplicó a los circuitos digitales.



Nociones acerca de las Álgebras de Boole

- Los *axiomas* o *postulados* de un sistema matemático son un conjunto *mínimo* de *definiciones básicas* acerca de dicho sistema que se suponen *ciertas* y a partir de las cuales se puede deducir *cualquier otra propiedad* del sistema.

- El conjunto de *axiomas* que vamos a ver a continuación fue publicado por *Edward V. Huntintong*.

- Se puede demostrar que los *axiomas* indicados a continuación son:

  Consistentes: no llevan a contradicciones.

  Independientes: ninguno se puede deducir a partir de los demás.

- Aquí, los símbolos 0 y 1 no representan números binarios, sino que representan *estados lógicos* de una *proposición*.

DEF.: Se dice que una estructura algebraica **{*B*,+,·}** formada por un conjunto ***B*** y dos operaciones definidas sobre ***B***, que representamos como + y · es un *Álgebra de Boole* sí y sólo sí cumple los siguientes axiomas:

A_I : *El conjunto* **B** *es cerrado con respecto a las operaciones* **+** *y* **·**. *Es decir, para todo* **x** *e* **y** *pertenecientes al conjunto* **B** *se cumple que*:

$$x + y \in B$$

$$x \cdot y \in B$$

A_{II} : *Existe un elemento identidad para las operaciones* **+** *y* **·**. *Es decir, existen dos elementos en el conjunto* **B**, *que se representan por los símbolos* **0** *y* **1**, *de modo que para todo elemento* **x** *perteneciente a* **B** *se cumple que*:

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

Nota: *de éste axioma no se deduce cuántos elementos hay en el conjunto* **B**, *ni que los elementos* 0 *y* 1 *sean necesariamente distintos.*

A_{III} : *Las operaciones* **+** *y* **·** *cumplen la propiedad conmutativa. Es decir, para todo elemento* ***x*** *e* ***y*** *pertenecientes al conjunto* ***B*** *se cumple que*:

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

A_{IV} : *Cada operación es distributiva con respecto a la otra. Es decir, para todo* ***x***, ***y*** *y* ***z*** *pertenecientes al conjunto* ***B*** *se cumple que*:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \rightarrow \textit{propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.}$$

$$x + y \cdot z = (x + y)(x + z) \quad \rightarrow \textit{propiedad distributiva de la suma con respecto al producto.}$$

A_V : *Existe un elemento inverso o complementario. Es decir, para todo* **x** *perteneciente al conjunto* **B** *existe otro elemento en* **B**, *que se denomina complementario, inverso o negado y que se denota por* $\overline{x}$, *que cumple lo siguiente*:

$$x+\overline{x}=1$$

$$x\cdot\overline{x}=0$$

A_{VI} : *Por lo menos hay dos elementos distintos en el conjunto B*

Nota: *este último axioma indica que el conjunto B puede tener* 2, 3, 4, ... *elementos distintos.*

Propiedades del Álgebra de Boole

A continuación se enuncian una serie de propiedades del *Álgebra de Boole*, expresadas en forma de *teoremas*, que serán muy útiles a la hora de analizar y diseñar circuitos digitales.

T$_{\mathbf{I}}$: *Los elementos* 0 *y* 1 *del conjunto* ***B****, definidos en el axioma* **A$_{\mathbf{II}}$**, *son únicos. Es decir, en el conjunto B no hay más elementos que tengan las mismas propiedades que estos elementos.*

T$_{\mathbf{II}}$: *Para todo x perteneciente a B se cumple que*:

$$x + x = x$$

$$x \cdot x = x$$

T$_{\mathbf{III}}$: *Para todo* ***x*** *perteneciente a* **B** *se cumple que*: $\overline{\overline{x}} = x$

T_{IV} : *Para todo* **x** *perteneciente a* **B** *se cumple que*:

$$x + 1 = 1$$
$$x \cdot 0 = 0$$

Nota: *aquí el* 1 *no representa una cantidad y la operación* + *no representa una suma aritmética.*

T_{V} : *Para todo* **x** *e* **y** *perteneciente a* **B** *se cumple que*:

$$x + y \cdot x = x$$
$$x \cdot \left(y + x \right) = x$$

T_{VI} : *Las operaciones* **+** *y* **·** *definidas en el Álgebra de Boole cumplen la propiedad asociativa. Es decir, para todo* **x**, **y** *y* **z** *pertenecientes al conjunto* **B** *se cumple que:*

$$x + y + z = \left(x + y \right) + z = x + \left(y + z \right) \qquad \forall\ x, y, z \in B$$
$$x \cdot y \cdot z = \left(x \cdot y \right) \cdot z = x \cdot \left(y \cdot z \right)$$

$\mathbf{T_{VII}}$ **:** (*Leyes de De Morgan*) *Para todo* **x** *e* **y** *pertenecientes al conjunto* **B** *se cumple que*:

$$\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

$\mathbf{T_{VIII}}$: *Metateorema* (*principio de dualidad*) *Si una expresión es cierta en el Álgebra de Boole entonces su expresión dual también lo es y viceversa. La expresión dual de una expresión dada se obtiene cambiando*:

_ *Las operaciones* **+** *por operaciones* **·** *y viceversa* (*si las hay*).

_ *Los* 1_s *por* 0_s *y viceversa* (*si los hay*).

Notas:

- *dual*(x+y) = *dual*(x) · *dual*(y)
- *dual*(x·y) = *dual*(x) + *dual*(y)
- *si x representa un elemento del conjunto B, se cumple que*: *dual*(x) = x.
- *una expresión y su dual no tienen que ser necesariamente iguales*.
- *en lo que se refiere a dualidad no se ha dicho nada sobre las negaciones*.

Álgebra de Boole bivalente o de conmutación:

_ *El conjunto B está formado por solo dos elementos* {0,1}

_ *La operación* **+** *se denomina suma lógica y la operación* **·** *se denomina producto lógico*

_ *Los teoremas y axiomas definidos anteriormente fueron establecidos sin especificar el número de componentes del conjunto* ***B***. *Lo cual implica que son aplicables al caso en el que* ***B***={0,1}

_ *El establecimiento de un conjunto* ***B*** *formado por sólo dos elementos determina de forma unívoca las operaciones* + *y* · *definidas en el Álgebra de Boole bivalente o de conmutación.*

▪ *Suma lógica: del axioma A_{II} y del teorema T_{IV} se deduce lo siguiente:*

$$\left.\begin{array}{l} A_{\mathrm{II}} : \; x+0=x \\ T_{\mathrm{IV}} : \; x+1=1 \\ x \in B=\{0,1\} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} 0+0=0 \\ 0+1=1 \\ 1+0=1 \\ 1+1=1 \end{cases}$$

Las propiedades anteriores junto con el teorema T_{VI} determinan completamente la operación suma lógica (+)

$$T_{VI} : \;\; x+y+z=(x+y)+z=x+(y+z) \qquad \forall\, x,y,z \in B$$

A nivel proposicional, de la definición anterior se deduce que:

La suma lógica de dos proposiciones es cierta sí y sólo sí al menos una de ellas es cierta.

Analogía: $verdadero\ (cierto) \equiv 1 \qquad falso \equiv 0$

$$0+0=0 \quad \leftrightarrow \quad falso + falso = falso$$

$$0+1=1 \quad \leftrightarrow \quad falso + verdadero = verdadero$$

$$1+0=1 \quad \leftrightarrow \quad verdadero + falso = verdadero$$

$$1+1=1 \quad \leftrightarrow \quad verdadero + verdadero = verdadero$$

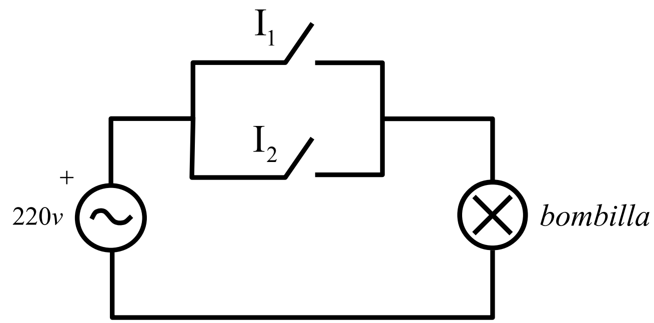
el resultado es igual a 1 *si al menos uno de los sumandos vale* 1

Ejemplo:

proposición 1: *el interruptor* I_1 *está cerrado* $\begin{cases} \text{verdadera} \\ \text{falsa} \end{cases}$

proposición 2: *el interruptor* I_2 *está cerrado* $\begin{cases} \text{verdadera} \\ \text{falsa} \end{cases}$

proposición 3: *la bombilla está encendida* $\begin{cases} \text{verdadera} \\ \text{falsa} \end{cases}$



Analogía: *verdadero* $\equiv 1$

falso $\equiv 0$

La bombilla está encendida sí y sólo sí el interruptor I_1 *está cerrado, o si el interruptor* I_2 *está cerrado o bien si ambos interruptores están cerrados. Es decir, la proposición* 3 *es cierta si y sólo sí la proposición* 1 *es cierta o si la proposición* 2 *es cierta o bien si ambas son ciertas. Es decir,*

$$proposición\,3 = proposición\,1 + proposición\,2$$

Nota: *"al menos uno"* $\equiv$ *"o uno u otro o ambos"*

- *Producto lógico* (•): *del axioma A_{II} y del teorema T_{IV} se deduce lo siguiente*:

$$\left.\begin{array}{l} A_{\mathrm{II}} : \ x \cdot 1 = x \\ T_{\mathrm{IV}} : \ x \cdot 0 = 0 \\ x \in B = \{0,1\} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} 0 \cdot 0 = 0 \\ 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

Las propiedades anteriores junto con el teorema T_{VI} determinan completamente la operación *producto lógico* (•)

$$T_{\mathrm{VI}} : \ x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad \forall\, x, y, z \in B$$

A nivel proposicional, de la definición anterior se deduce que:

El producto lógico de dos proposiciones es cierto sí y sólo sí ambas proposiciones son ciertas a la vez (simultáneamente).

Analogía: $verdadero\ (cierto) \equiv 1 \quad falso \equiv 0$

$$0 \cdot 0 = 0 \quad \leftrightarrow \quad falso \cdot falso = falso$$

$$0 \cdot 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad falso \cdot verdadero = falso$$

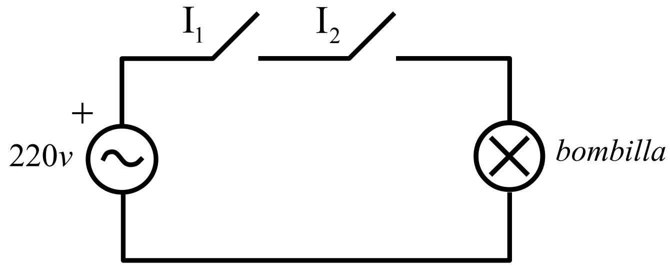
$$1 \cdot 0 = 0 \quad \leftrightarrow \quad verdadero \cdot falso = falso$$

$$1 \cdot 1 = 1 \quad \leftrightarrow \quad verdadero \cdot verdadero = verdadero$$

el resultado es igual a 1 *si los operandos valen* 1 a la vez (simultáneamente)

Ejemplo:

proposición 1: *el interruptor* I_1 *está cerrado* $\begin{cases} \text{verdadera} \\ \text{falsa} \end{cases}$



proposición 2: *el interruptor* I_2 *está cerrado* $\begin{cases} \text{verdadera} \\ \text{falsa} \end{cases}$

Analogía: *verdadero* $\equiv 1$

falso $\equiv 0$

proposición 3: *la bombilla está encendida* $\begin{cases} \text{verdadera} \\ \text{falsa} \end{cases}$

La bombilla está encendida ($\equiv$ *la proposición* 3 *es cierta*) *sí y sólo sí el interruptor* I_1 *está cerrado y al mismo tiempo* (*a la vez, simultáneamente*) *el interruptor* I_2 *también está cerrado. Es decir*:

$$\textit{proposición}\,3 = \textit{proposición}\,1 \bullet \textit{proposición}\,2$$

Nota: *"al mismo tiempo"* $\equiv$ *"a la vez"* $\equiv$ *"simultáneamente"*

· *De los axiomas y teoremas definidos anteriormente se deducen las siguientes propiedades relativas al complemento, negado o inverso de un elemento perteneciente al conjunto B*:

$$\left.\begin{aligned} A_{\mathrm{V}}:\ x+\overline{x}&=1 \\ x\cdot\overline{x}&=0 \\ x\in B&=\{0,1\} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \overline{0}=1 \\ \overline{1}=0 \\ ya\ que\ si\ \ x=0 \ \Rightarrow\ \overline{x}=1 \\ ya\ que\ si\ \ x=1 \ \Rightarrow\ \overline{x}=0 \end{cases}$$

Nota: *En algunos textos académicos a la propiedad anterior, que se representa por el símbolo* $\overline{\ \ }$*, se la considera como una operación lógica más definida en el Álgebra de Boole, pero no lo es!.*

Las operaciones $+$, $\cdot$ y $\overline{}$ definidas en las diapositivas anteriores se denominan operaciones lógicas elementales. Mas adelante se podrá comprobar que mediante la adecuada combinación de estas tres operaciones elementales se puede realizar cualquier operación lógica, por muy complicada que sea.

Variables, constantes y funciones lógicas.

Def.: *Se dice que un símbolo cualquiera (por ejemplo x) es una variable lógica si representa a elementos del conjunto B sobre el que se ha definido un Álgebra de Boole bivalente o de conmutación.*

En el caso de que un símbolo cualquiera (por ejemplo λ) represente siempre a un mismo elemento del conjunto B, a dicho símbolo se lo denomina constante lógica.

Def.: *Una función lógica f es una aplicación definida de la siguiente manera*

$$f: B^n \longrightarrow B$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Ejemplos:

$$f(d,c,b,a) = dc\overline{b} + \overline{d}ba + c \qquad d,c,b,a,f \in B = \{0,1\}$$

$$g(z,y,x) = \overline{\overline{z}yx} + x\left(zy + x\overline{y}\right) \qquad z,y,x,g \in B = \{0,1\}$$

T_{IX}: *El resultado de aplicar cualquiera de las operaciones definidas en el Álgebra de Boole a elementos del conjunto B* (≡*variables y/o funciones lógicas*) *es otra variable del sistema y este resultado es único.*

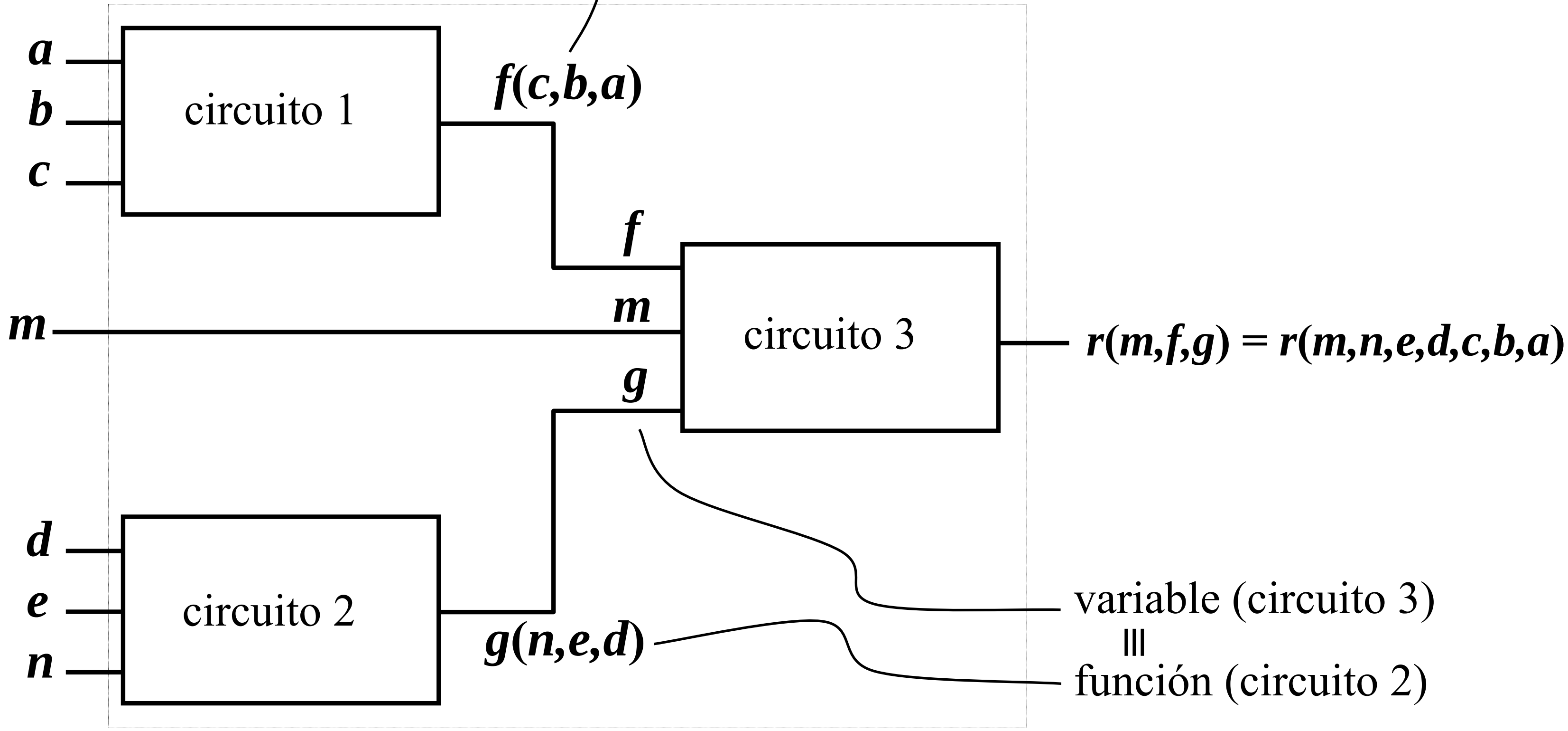
Del teorema anterior se deduce que

"toda función lógica también es una variable lógica"

Por lo que los axiomas y teoremas definidos para las variables lógicas también son aplicables a las funciones lógicas!.

Nota: *en esta asignatura, las funciones lógicas se utilizan para describir a nivel matemático el comportamiento de circuitos digitales. De acuerdo con esto, una función lógica representa el valor de una salida de un circuito, mientras que una variable lógica representa el valor de una entrada de un circuito.*

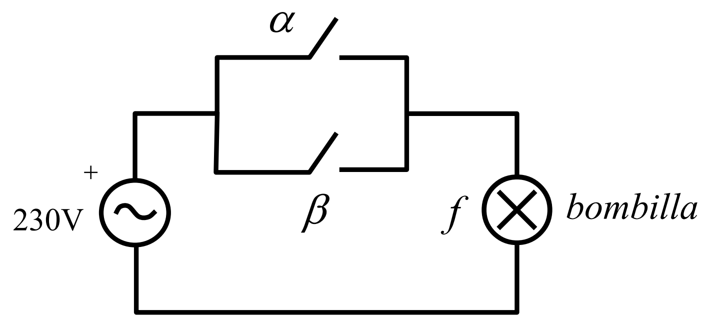
Para el circuito 1 f es una *función* cuyo valor depende tanto de los valores de las entradas c, b y a como de las características del circuito 1. Sin embargo, para el circuito 3 f es una *variable* (es una entrada).



no

Ejemplo:

versión: *Boole*



proposición 1: *el interruptor* I_1 *está cerrado* $\begin{cases}\text{verdadera}\\ \text{falsa}\end{cases}$

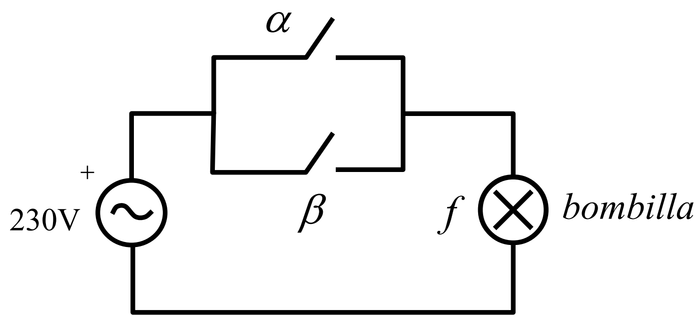
proposición 2: *el interruptor* I_2 *está cerrado* $\begin{cases}\text{verdadera}\\ \text{falsa}\end{cases}$

proposición 3: *la bombilla está encendida* $\begin{cases}\text{verdadera}\\ \text{falsa}\end{cases}$

La bombilla está encendida (la proposición 3 es cierta) sí y sólo sí el interruptor α *está cerrado, o bien si el interruptor* β *está cerrado o bien si ambos interruptores están cerrados. Es decir*:

$$\textit{proposición}\,3 = \textit{proposición}\,2 \,\vee\, \textit{proposición}\,1 \qquad (\textit{Boole})$$

versión: *Digital*



$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si el interruptor } \alpha \text{ está cerrado} \\ 0 & \text{si el interruptor } \alpha \text{ está abierto} \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{si el interruptor } \beta \text{ está cerrado} \\ 0 & \text{si el interruptor } \beta \text{ está abierto} \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} 1 & \text{si la bombilla está encendida} \\ 0 & \text{si está apagada} \end{cases}$$

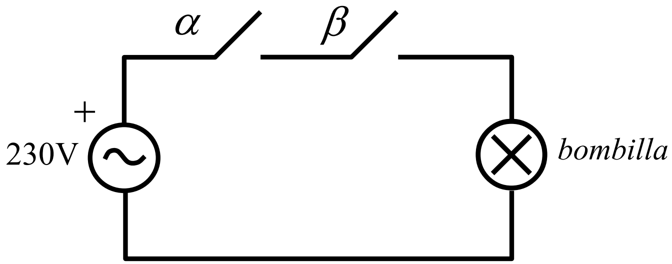
$$f(\alpha,\beta) = \alpha \overset{\text{o uno u otro o ambos}}{+} \beta \qquad (\textit{Digital})$$

Muy importante: *una función lógica sólo indica los casos* (≡ *combinaciones de valores de las variables de las que depende*) *para los cuales la función toma el valor lógico* 1. Lo que represente el que la función tome el valor lógico 1 es una cuestión aparte.

no

Ejemplo:

versión: *Boole*



proposición 1: *el interruptor* I_1 *está cerrado* $\begin{cases} \text{verdadera} \\ \text{falsa} \end{cases}$

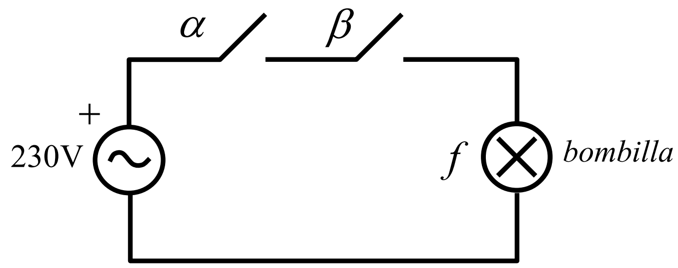
proposición 2: *el interruptor* I_2 *está cerrado* $\begin{cases} \text{verdadera} \\ \text{falsa} \end{cases}$

proposición 3: *la bombilla está encendida* $\begin{cases} \text{verdadera} \\ \text{falsa} \end{cases}$

La bombilla está encendida (la proposición 3 es cierta) sí y sólo sí el interruptor α está cerrado y al mismo tiempo (a la vez, simultáneamente) el interruptor β también está cerrado. Es decir:

$$\textit{proposición}\,3 = \textit{proposición}\,1 \wedge \textit{proposición}\,2$$

versión: *Digital*



$$\alpha = \begin{cases} 1 & si\ el\ interruptor\ \alpha\ está\ cerrado \\ 0 & si\ el\ interruptor\ \alpha\ está\ abierto \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & si\ el\ interruptor\ \beta\ está\ cerrado \\ 0 & si\ el\ interruptor\ \beta\ está\ abierto \end{cases}$$

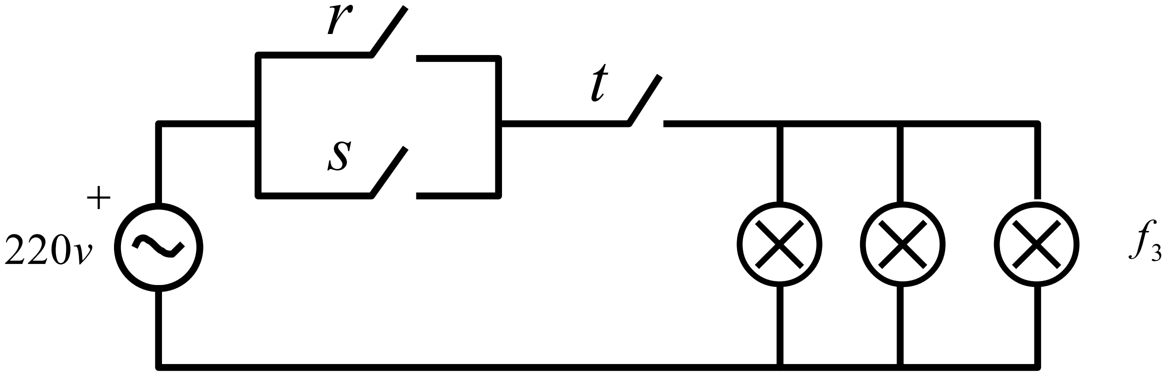
$$f = \begin{cases} 1 & si\ la\ bombilla\ está\ encendida \\ 0 & si\ está\ apagada \end{cases}$$

ambos a la vez

$$f\left(\alpha,\beta\right) = \alpha \bullet \beta \qquad (Digital)$$

Recordatorio: la expresión de una función lógica indica siempre los casos para los que dicha función toma el valor lógico 1. Lo que represente el que la función tome el valor lógico 1 es una cuestión aparte.

Ejemplo:



$$f_3(r,s,t) = t \underset{\text{simultaneidad (amb@s a la vez)}}{\cdot} \overbrace{(r + s)}^{\text{o bien un@ o bien otr@ o bien amb@s}}$$

Muy importante: *no hay que olvidar que una función lógica sólo indica los casos (≡ combinaciones de valores de las variables de las que depende) para los cuales la función toma el valor lógico* 1.

Notas sobre *dualidad* de *funciones* y de *variables* lógicas:

- Sean f y g dos *funciones lógicas* cualesquiera. Se cumple que:

$$dual(f+g) = dual(f) \cdot dual(g)$$

$$dual(f \cdot g) = dual(f) + dual(g)$$

- Sea x una *variable lógica* cualquiera, se cumple que: $dual(x) = x$

- Si f^d es la función dual de una función f, no tiene porqué cumplirse necesariamente que f^d es igual a f.

Ejemplo: sea $f(z, y, x) = \overline{x + y \cdot z}$ se cumple que $dual(f) = \overline{x \cdot (y + z)}$

Formas de representar/definir una función lógica:

i) Tabla de verdad

ii) Expresión lógica
- *Expresión lógica cualquiera (no canónica)*
- *Expresión lógica canónica*
  - *En forma de suma de productos*
  - *En forma de producto de sumas*

▪ *Tabla de verdad: si se determina el valor (lógico) de una función para todas las combinaciones de las variables de que depende y se representan los resultados en forma de tabla, se obtiene una representación (definición) única de dicha función, denominada tabla de verdad.*

Comentario: *dado que la tabla de verdad de una función es única, si dos funciones tienen la misma tabla de verdad significa que son la misma función.*

Ejemplo:

$$f(r,s,t)=t(s+r)$$

$$\overline{f}(r,s,t)=\overline{t(s+r)}$$

r	s	t	$f(r,s,t)$	$\overline{f}(r,s,t)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$f(1,0,0) = 0$

$f(1,1,1) = 1$

Consejo: determina una expresión equivalente de la función en forma de suma de productos

- *Expresión lógica no canónica: se puede definir una función mediante una expresión en la que intervienen <u>todas</u> las variables de las que depende, relacionadas entre sí por los operadores lógicos* +, · *y* ¯.

Ejemplos:

$$f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x}_2 x_1 + x_2 \overline{x}_1 \overline{x}_0 + x_1 x_0$$

$$g(d,c,b,a) = d\ \overline{c\ \overline{\overline{b} + a}\ \overline{d} + \overline{a}}$$

$$h(z,y,x) = z\,\overline{y} + y \qquad *$$

La expresión lógica de una función no *es única. Es decir, se puede definir una misma función utilizando diferentes expresiones lógicas equivalentes entre sí*

Ejemplo:

$$f(y,x) = \overline{y}\,x + y\,\overline{x} + y\,x$$

$$g(y,x) = y + x$$

Homework: *demostrar que las funciones* f *y* g *son equivalentes* (≡ *que son la misma función*!)

▪ *Expresiones lógicas canónicas: de todas las expresiones que definen una función lógica hay* 2*, denominadas expresiones canónicas, que son particularmente útiles.*

Una de las expresiones canónicas consiste en una suma de productos lógicos canónicos, mientras que la otra expresión consiste en un producto de sumas lógicas canónicas.

Un producto canónico (minterm) está constituido por el producto de todas las variables de las que depende la función. Las variables pueden aparecer tanto en su forma directa (por ejemplo: x) como en su forma negada (por ejemplo: $\overline{x}$ *).*
Ejemplo:

$$f(d,c,b,a) \rightarrow \; d\,\overline{c}\,b\,a,\; d\,c\,b\,a,\; d\,\overline{b}\,c\,\overline{a},\; b\,c\,\overline{d}\,\overline{a},\; \overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d},\; d\,\overline{b}\,a$$

Una suma canónica (maxterm) está constituida por la suma de todas las variables de las que depende la función. Las variables pueden aparecer tanto en su forma directa como en su forma negada. Ejemplo:

$$g(d,c,b,a) \rightarrow (d+\overline{c}+b+a),\; (d+c+b+a),\; (\overline{c}+\overline{a}+\overline{b}+\overline{d}),\; (d+\overline{b}+a)$$

Se puede demostrar que:

_ *Toda función tiene* 2 *expresiones canónicas, una en forma de suma de productos canónicos y otra en forma de producto de sumas canónicas.*

_ *Las expresiones canónicas de una función son* *<u>únicas</u>*.

Importante: *Las expresiones canónicas de una función, al igual que cualquier otra expresión lógica equivalente, indican las combinaciones de las variables de las que depende la función para las cuales la función toma el valor lógico* 1.

Comentario 1: *dado que las expresiones canónicas de una función son únicas, si dos funciones tienen las mismas expresiones canónicas significa que son la misma función.*

Comentario 2: *si una función "tiene una expresión canónica, pero no tiene la otra" eso indica que NO es una función.*

Ejemplos:

$$1:\ f(y,x)=\overline{y}x+y\overline{x}+yx\ \equiv\ suma\, de\, productos\, canónicos$$

$$2:\ g(b,a)=\left(\overline{b}+a\right)\left(\overline{b}+\overline{a}\right)\ \equiv\ producto\ de\ sumas\ canónicas$$

$$3:\ h(r,s)=r\overline{s}$$

$$4:\ n(s_1,s_0)=\overline{s}_1+\overline{s}_0$$

$$5:\ m(x_2,x_1,x_0)=\overline{x}_2x_1+x_2\overline{x}_1\overline{x}_0+x_2x_0$$

$$6:\ l(b,a)=b+b\overline{a}$$

$$7:\ p(z,y,x)=(z+y)(\overline{z}+y+x)$$

$$8:\ t(d,c,b,a)=\overline{d}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}+\overline{d}\,\overline{c}\,b\,\overline{a}+\overline{d}\,\overline{c}\,b\,a+\overline{d}\,c\,\overline{b}\,a+d\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}+d\,c\,b\,a$$

$$9:\ v(d,c,b,a)=(\overline{d}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{a})(\overline{a}+\overline{c}+\overline{d}+b)(\overline{c}+b+\overline{d}+a)$$

$$A:\ w(z,y,x)=z\,\overline{y}\,x(\overline{z}+y+x)$$

$$B:\ \alpha(d,c,b,a)=(\overline{d}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{a})(\overline{a}+\overline{c}+\overline{d}+b)(\overline{c}+b+\overline{d}+\overline{b})$$

$$C:\ \beta(b,a)=\overline{b}\,a+b\,a+b\,\overline{a}+\overline{b}\,\overline{a}$$

Homework: representa la tabla de verdad de la "función" β

Representación simbólica simplificada de las expresiones canónicas:

Ejemplos:

$$f(\overset{8}{d},\overset{4}{c},\overset{2}{b},\overset{1}{a})=\underbrace{\bar d\,\bar c\,\bar b\,\bar a}_{\downarrow}+\underbrace{\bar d\,\bar c\,\overset{2}{b}\,\bar a}_{\downarrow}+\underbrace{\bar d\,\bar c\,\overset{2}{b}\,\overset{1}{a}}_{\downarrow}+\underbrace{\bar d\,\overset{4}{c}\,\bar b\,\overset{1}{a}}_{\downarrow}+\underbrace{\overset{8}{d}\,\bar c\,\bar b\,\bar a}_{\downarrow}+\underbrace{\overset{8}{d}\,\overset{4}{c}\,\bar b\,\bar a}_{\downarrow}+\underbrace{\overset{8}{d}\,\overset{4}{c}\,\overset{2}{b}\,\overset{1}{a}}_{\downarrow}=$$

$$= P_0 + P_2 + P_3 + P_5 + P_8 + P_{12} + P_{15} =$$

$$= \sum_4 (0,2,3,5,8,12,15)$$

$$g(\overset{8}{d},\overset{4}{c},\overset{2}{b},\overset{1}{a})=\underbrace{(\bar d+\bar c+\bar b+\bar a)}_{\downarrow}\cdot\underbrace{(\bar d+\overset{4}{c}+\overset{2}{b}+\bar a)}_{\downarrow}\cdot\underbrace{(\overset{8}{d}+\bar c+\bar b+\overset{1}{a})}_{\downarrow}\cdot\underbrace{(\overset{8}{d}+\overset{4}{c}+\overset{2}{b}+\bar a)}_{\downarrow}=$$

$$= S_0 \cdot S_6 \cdot S_9 \cdot S_{14} =$$

$$= \prod_4 (0,6,9,14)$$

Métodos para obtener las expresiones canónicas de una función

1º caso: *Obtención de la expresión canónica en forma de suma de productos a partir de una expresión no canónica cualquiera.*

1º paso: hay que obtener una expresión en forma de *suma de productos* aplicando la *propiedad distributiva del producto con respecto a la suma* y el teorema de *De Morgan* (en caso necesario)

2º paso: añadir a cada producto las variables que le falten para que sea un producto canónico.

Ejemplo 1:

$$f(c,b,a) = a(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{c} \cdot a + \overline{b} \cdot a = \overline{c}(b + \overline{b})a + (c + \overline{c}) \cdot \overline{b} \cdot a =$$

$$= \overline{c}ba + \overline{c}\overline{b}a + \overline{c}\overline{b}a + c\overline{b}a = P_1 + P_3 + P_5 = \Sigma_3(1,3,5)$$

Ejemplo 2:

$$f(c,b,a) = (a+\overline{c})(a+b) = a+\overline{c}b = (\overline{c}+c)(b+\overline{b})a+\overline{c}b(a+\overline{a}) =$$

$$= \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot = \overline{c}\overline{b}a+\overline{c}b\overline{a}+\overline{c}ba+c\overline{b}a+cba = \Sigma_3(1,2,3,5,7)$$

2º caso: *Obtención de la expresión canónica en forma de producto de sumas a partir de una expresión no canónica cualquiera.*

1º paso: hay que obtener una expresión en forma de *producto de sumas* aplicando la *propiedad distributiva de la suma con respecto al producto* y el teorema de *De Morgan* (en caso necesario)

2º paso: añadir a cada suma las variables que le falten para que sea una suma canónica.

Ejemplo 1:

$$g(z,y,x)=\overline{z}y+zx=(\overline{z}y+z)(\overline{z}y+x)=(\overline{z}+z)(z+y)(\overline{z}+x)(y+x)=$$

$$=(z+y+x\overline{x})(\overline{z}+y\overline{y}+x)(z\overline{z}+y+x)=$$

$$=(z+y+x)(z+y+\overline{x})(\overline{z}+y+x)(\overline{z}+\overline{y}+x)(z+y+x)(\overline{z}+y+x)=$$

$$=S_1\cdot S_3\cdot S_6\cdot S_7=\Pi_3(1,3,6,7)$$

Ejemplo 2:

$$f(c,b,a) = a\overline{b} + a\overline{c} = a(\overline{c} + \overline{b}) = (c\overline{c} + a)(\overline{c} + \overline{b} + a\overline{a}) =$$

$$= (c + a)(\overline{c} + a)(\overline{c} + \overline{b} + a)(\overline{c} + \overline{b} + \overline{a}) = (c + b\overline{b} + a)(\overline{c} + b\overline{b} + a)S_1 S_0 =$$

$$= (c + b + a)(c + \overline{b} + a)(\overline{c} + b + a)(\overline{c} + \overline{b} + a)S_1 S_0 =$$

$$= S_0 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 \cdot S_7 = \Pi_3(0,1,3,5,7)$$

3º caso: *Obtención de las expresiones canónicas de una función a partir de su tabla de verdad*

Ejemplo: obtención expresión canónica en forma de suma de productos.

z	y	x	$f(z,y,x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	$1 \equiv P_2 = \overline{z}\,y\,\overline{x}$
0	1	1	0
1	0	0	$1 \equiv P_4 = z\,\overline{y}\,\overline{x}$
1	0	1	$1 \equiv P_5 = z\,\overline{y}\,x$
1	1	0	0
1	1	1	$1 \equiv P_7 = z\,y\,x$

$$f(z,y,x) = \overline{z}\;y\;\overline{x} + z\;\overline{y}\;\overline{x} + z\;\overline{y}\;x + z\;y\;x = P_2 + P_4 + P_5 + P_7 = \sum\nolimits_3 (2,4,5,7)$$

Recordatorio: Las expresiones canónicas de una función, al igual que cualquier otra expresión lógica equivalente, indican las combinaciones de las variables de las que depende la función para las cuales la función toma el valor lógico 1.

Nota: Cada 1 que aparece en la tabla de verdad de una función da lugar a un *producto canónico* en su expresión (canónica) en forma de *suma de productos*.

z	y	x	f		
0	0	0	1	$\rightarrow$	$\overline{z} \cdot \overline{y} \cdot \overline{x} \equiv P_0$
0	0	1	1	$\rightarrow$	$\overline{z} \cdot \overline{y} \cdot x \equiv P_1$
0	1	0	1	$\rightarrow$	$\overline{z} \cdot y \cdot \overline{x} \equiv P_2$
0	1	1	1	$\rightarrow$	$\overline{z} \cdot y \cdot x \equiv P_3$
1	0	0	1	$\rightarrow$	$z \cdot \overline{y} \cdot \overline{x} \equiv P_4$
1	0	1	1	$\rightarrow$	$z \cdot \overline{y} \cdot x \equiv P_5$
1	1	0	1	$\rightarrow$	$z \cdot y \cdot \overline{x} \equiv P_6$
1	1	1	1	$\rightarrow$	$z \cdot y \cdot x \equiv P_7$

Propiedad : *dada una función f cualquiera, se cumple que $\overline{f}$ depende de los productos canónicos de los que no depende f y viceversa.*

z	y	x	f	$\overline{f}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$$f(z,y,x) = \overset{P_2}{\overline{z}\,y\,\overline{x}} + \overset{P_4}{z\,\overline{y}\,\overline{x}} + \overset{P_5}{z\,\overline{y}\,x} + \overset{P_7}{z\,y\,x} = \sum\nolimits_3 (2,4,5,7)$$

$$\overline{f}(z,y,x) = \overset{P_0}{\overline{z}\,\overline{y}\,\overline{x}} + \overset{P_1}{\overline{z}\,\overline{y}\,x} + \overset{P_3}{\overline{z}\,y\,x} + \overset{P_6}{z\,y\,\overline{x}} = \sum\nolimits_3 (0,1,3,6)$$

Pregunta: ¿A qué es igual $f + \overline{f}$?

Ejemplo: *Obtención expresión canónica en forma de producto de sumas.*

z	y	x	$f(z,y,x)$
0	0	0	$0 \equiv S_7 = z + y + x$
0	0	1	$0 \equiv S_6 = z + y + \overline{x}$
0	1	0	1
0	1	1	$0 \equiv S_4 = z + \overline{y} + \overline{x}$
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	$0 \equiv S_1 = \overline{z} + \overline{y} + x$
1	1	1	1

$$f(z,y,x) = (\overline{z} + \overline{y} + x)(z + \overline{y} + \overline{x})(z + y + \overline{x})(z + y + x) = S_1 \cdot S_4 \cdot S_6 \cdot S_7 = \prod_3(1,4,6,7)$$

Nota: Cada 0 que aparece en la tabla de verdad de una función da lugar a una *suma canónica* en su expresión (canónica) en forma de *producto de sumas*.

z	y	x	f		
0	0	0	0	$\rightarrow$	$(z+y+x) \equiv S_7$
0	0	1	0	$\rightarrow$	$(z+y+\overline{x}) \equiv S_6$
0	1	0	0	$\rightarrow$	$(z+\overline{y}+x) \equiv S_5$
0	1	1	0	$\rightarrow$	$(z+\overline{y}+\overline{x}) \equiv S_4$
1	0	0	0	$\rightarrow$	$(\overline{z}+y+x) \equiv S_3$
1	0	1	0	$\rightarrow$	$(\overline{z}+y+\overline{x}) \equiv S_2$
1	1	0	0	$\rightarrow$	$(\overline{z}+\overline{y}+x) \equiv S_1$
1	1	1	0	$\rightarrow$	$(\overline{z}+\overline{y}+\overline{x}) \equiv S_0$

Propiedad : *dada una función f cualquiera, se cumple que $\overline{f}$ depende de las sumas canónicas de las que no depende f y viceversa.*

z	y	x	f	$\overline{f}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$$f(z,y,x) = (z+y+x)\cdot(z+y+\overline{x})\cdot(z+\overline{y}+\overline{x})\cdot(\overline{z}+\overline{y}+x) =$$
$$= \prod\nolimits_3 (1,4,6,7)$$

$$\overline{f}(z,y,x) = (z+\overline{y}+x)\cdot(\overline{z}+y+x)\cdot(\overline{z}+y+\overline{x})\cdot(\overline{z}+\overline{y}+\overline{x}) =$$
$$= \prod\nolimits_3 (0,2,3,5)$$

Pregunta: ¿A qué es igual $f \cdot \overline{f}$?

4º caso: *Obtención de la expresión canónica en forma de producto de sumas a partir de la expresión canónica en forma de suma de productos.*

Ejemplo:

$$f(z,y,x)=\sum_3\left(2,4,5,7\right)=P_2+P_4+P_5+P_7$$

$$\overline{f}(z,y,x)=P_0+P_1+P_3+P_6$$

$$f(z,y,x)=\overline{\left(\overline{f}(z,y,x)\right)}=\overline{P_0+P_1+P_3+P_6}=\overline{P_0}\cdot\overline{P_1}\cdot\overline{P_3}\cdot\overline{P_6}=$$

$$=S_7\cdot S_6\cdot S_4\cdot S_1=\prod_3\left(1,4,6,7\right)$$

$$Nota:\ \ S_i=\overline{P_j}\ \ /\ \ i=2^n-1-j\ \ \Leftrightarrow\ \ i+j=2^n-1\qquad (por\ inducción)$$

Ejemplo: en una función dependiente de 3 variables se cumple que $S_4=\overline{P_3}$

5º caso: *Obtención de la expresión canónica en forma de suma de productos a partir de la expresión canónica en forma de producto de sumas.*

Ejemplo:

$$f(z,y,x)=\prod_3\left(1,4,6,7\right)=S_1\cdot S_4\cdot S_6\cdot S_7$$

$$\overline{f}(z,y,x)=\prod_3\left(0,2,3,5\right)=S_0\cdot S_2\cdot S_3\cdot S_5$$

$$f(z,y,x)=\overline{\left(\overline{f}(z,y,x)\right)}=\overline{S_0\cdot S_2\cdot S_3\cdot S_5}=\overline{S}_0+\overline{S}_2+\overline{S}_3+\overline{S}_5=$$

$$=P_7+P_5+P_4+P_2=\sum_3\left(2,4,5,7\right)$$

$$Nota\ 1:\ \ \overline{S}_j\ =\ P_i\ /\quad i=2^n-1-j\quad\Leftrightarrow\quad i+j=2^n-1$$

$$Nota\ 2:\ Si\ \ \overline{S}_j\ =\ P_i\ \Rightarrow\ \overline{\overline{S}}_j=S_j=\overline{P}_i\ \rightarrow\ la\ fórmula\ tiene\ que\ ser\ la\ misma!!!$$

Funciones incompletas o no totalmente definidas:

En la práctica, el valor de una función lógica puede no estar definido para algunas combinaciones de las variables de las que depende. Los motivos pueden ser varios como, por ejemplo:

· *Que dichas combinaciones correspondan a situaciones físicamente imposibles*.

· *Que para dichas combinaciones, el valor de la función no vaya a ser tenido en cuenta*

La forma de indicar el valor de una función en éstos casos se muestra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo: La empresa *TEMBLOR* comercializa un sensor de alta precisión para medir la magnitud de seísmos en un radio de 300Km. Este sensor proporciona la magnitud de los seísmos codificada en binario natural, referida a la escala de *C. F. Richter* (escala de 10 grados: 0-9).

1) Determinar la tabla de verdad de una función f que, a partir de la información suministrada por el sensor, indique si la magnitud de un seísmo es superior a 5 en la escala de *Richter*.

2) Determinar las expresiones canónicas de la función anterior f.

3) Determinar la tabla de verdad de una función g que, a partir de la información suministrada por el sensor, indique si la magnitud de un seísmo es inferior a 6 en la escala de *Richter*.

4) Determinar las expresiones canónicas de la función g.

5) ¿Qué relación hay entre las funciones f y g?.

Solución:

1) 3)

d	c	b	a	f	g	P
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	2
0	0	1	1	0	1	3
0	1	0	0	0	1	4
0	1	0	1	0	1	5
0	1	1	0	1	0	6
0	1	1	1	1	0	7
1	0	0	0	1	0	8
1	0	0	1	1	0	9
1	0	1	0	x	x	10
1	0	1	1	x	x	11
1	1	0	0	x	x	12
1	1	0	1	x	x	13
1	1	1	0	x	x	14
1	1	1	1	x	x	15

2)

$$f(d,c,b,a)=\Sigma_4\left(6,7,8,9\right)+\Sigma_\phi\left(10,11,12,13,14,15\right)$$

$$\overline{f}(d,c,b,a)=\Sigma_4\left(0,1,2,3,4,5\right)+\Sigma_\phi\left(10,11,12,13,14,15\right)$$

$$f(d,c,b,a)=\overline{\overline{f}(d,c,b,a)}=\Pi_4\left(10,11,12,13,14,15\right)\cdot\Pi_\phi\left(0,1,2,3,4,5\right)$$

d	c	b	a	f	g	S
0	0	0	0	0	1	15
0	0	0	1	0	1	14
0	0	1	0	0	1	13
0	0	1	1	0	1	12
0	1	0	0	0	1	11
0	1	0	1	0	1	10
0	1	1	0	1	0	9
0	1	1	1	1	0	8
1	0	0	0	1	0	7
1	0	0	1	1	0	6
1	0	1	0	x	x	5
1	0	1	1	x	x	4
1	1	0	0	x	x	3
1	1	0	1	x	x	2
1	1	1	0	x	x	1
1	1	1	1	x	x	0

4)

$$g(d,c,b,a) = \Sigma_4\left(0,1,2,3,4,5\right) + \Sigma_\phi\left(10,11,12,13,14,15\right)$$

$$\overline{g}(d,c,b,a) = \Sigma_4\left(6,7,8,9\right) + \Sigma_\phi\left(10,11,12,13,14,15\right)$$

$$g(d,c,b,a) = \overline{\overline{g}(d,c,b,a)} = \Pi_4\left(6,7,8,9\right)\cdot\Pi_\phi\left(0,1,2,3,4,5\right)$$

5) $g(d,c,b,a) = \overline{f}(d,c,b,a)$

d	*c*	*b*	*a*	*f*	*g*
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	x	x
1	0	1	1	x	x
1	1	0	0	x	x
1	1	0	1	x	x
1	1	1	0	x	x
1	1	1	1	x	x

Ejemplo: Dada la función definida por la tabla de verdad de la derecha, se pide:

i) Determinar su expresión canónica en forma de suma de productos.

ii) Determinar su expresión canónica en forma de producto de sumas directamente de la tabla.

iii) Determinar la expresión canónica en forma de *producto de sumas* a partir de la expresión canónica en forma de *suma de productos*.

c	b	a	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	x
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	x
1	1	1	x

Solución:

c	b	a	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	x
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	x
1	1	1	x

i) $f(c,b,a)=\sum_3(1,3,4)+\sum_\phi(2,6,7)$

ii) $f(c,b,a)=\Pi_3(2,7)\cdot\Pi_\phi(0,1,5)$

iii) $f(c,b,a)=\sum_3(1,3,4)+\sum_\phi(2,6,7)$

$$\overline{f}(c,b,a)=\sum_3(0,5)+\sum_\phi(2,6,7)$$

$$f(c,b,a)=\overline{\overline{f}(c,b,a)}=\overline{(P_0+P_5)+(P_2+P_6+P_7)_\phi}=$$

$$=(\overline{S}_7\cdot\overline{S}_2)\cdot(\overline{S}_5\cdot\overline{S}_1\cdot\overline{S}_0)_\phi=\Pi_3(2,7)\cdot\Pi_\phi(0,1,5)$$

Ejercicio: Determinar la tabla de verdad de las siguientes funciones:

$$f(c,b,a) = \sum_3 (1,3,4) + \sum_\phi (2,6,7)$$

$$g(c,b,a) = \prod_3 (2,5,6) \cdot \prod_\phi (0,3)$$

Introducción a las puertas lógicas básicas

Objetivo: Diseñar un circuito que tenga el comportamiento descrito por una función lógica dada.

- Existen una serie de circuitos electrónicos denominados *puertas lógicas* cuyo comportamiento, a nivel funcional, equivale a realizar una determinada función lógica.

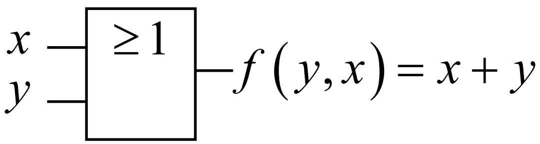
- La utilidad de las puertas lógicas reside en que mediante una adecuada interconexión de las mismas se puede implementar cualquier función lógica.

▪ Los circuitos digitales trabajan con *señales eléctricas binarias*, nosotros operamos con 1s y 0s. La equivalencia entre ambas representaciones que seguiremos en este curso es:

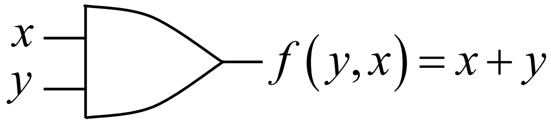
$$\left.\begin{array}{l} \textit{Nivel alto de tensión} \equiv 5\text{v.} \equiv \mathrm{H} \equiv 1 \ \textit{lógico} \\ \textit{Nivel bajo de tensión} \equiv 0\text{v.} \equiv \mathrm{L} \equiv 0 \ \textit{lógico} \end{array}\right\} \textit{lógica positiva}$$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Nivel bajo de tensión} \equiv \mathrm{L} \equiv 1 \ \textit{lógico} \\ \textit{Nivel alto de tensión} \equiv \mathrm{H} \equiv 0 \ \textit{lógico} \end{array}\right\} \textit{lógica negativa} \quad (\textit{no})$$

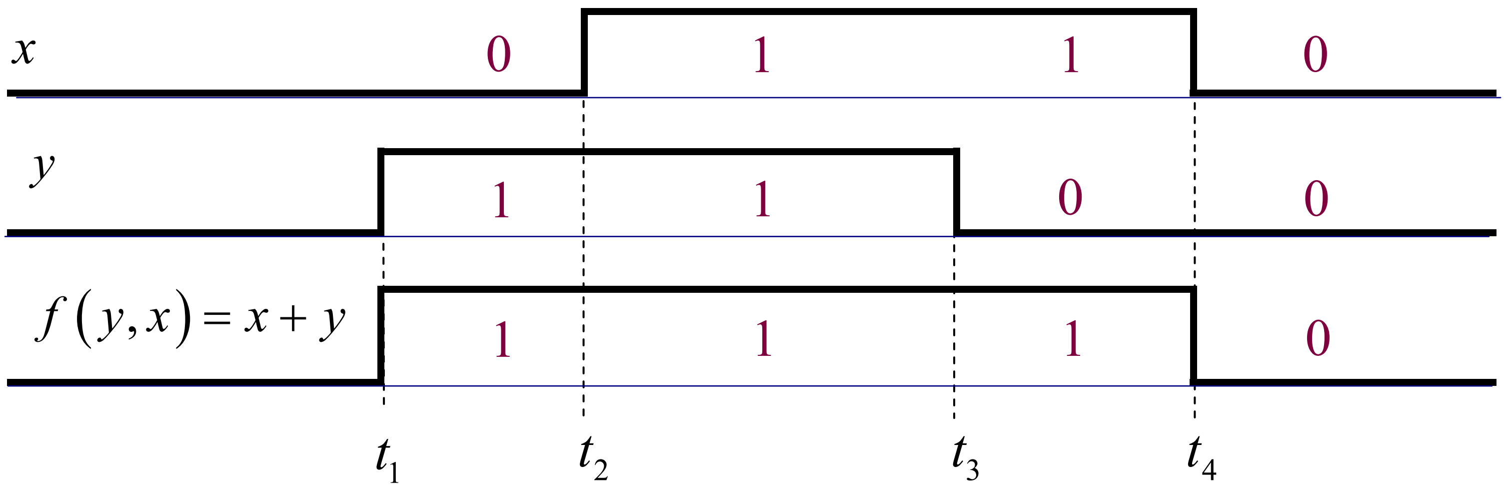
Puerta OR



IE^3 $Std.$ $91-1984$

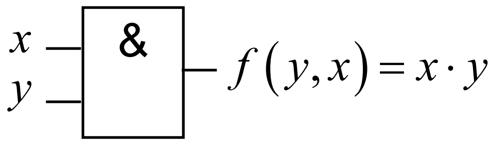


IE^3 $Std.$ $91-1973$

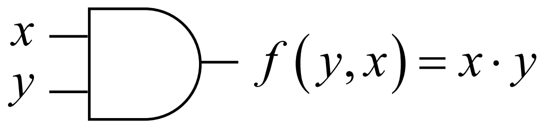


& ≡ *ampersand*

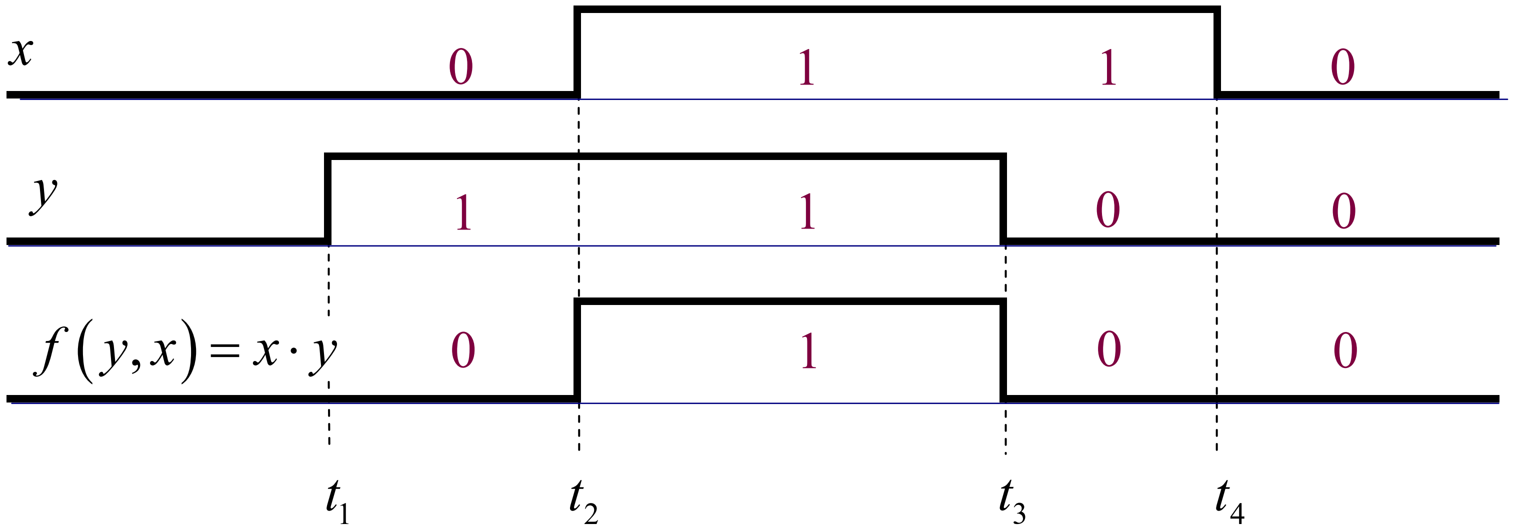
Puerta AND



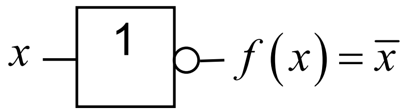
IE^3 *Std*. 91–1984



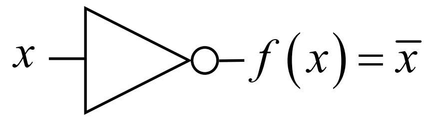
IE^3 *Std*. 91–1973



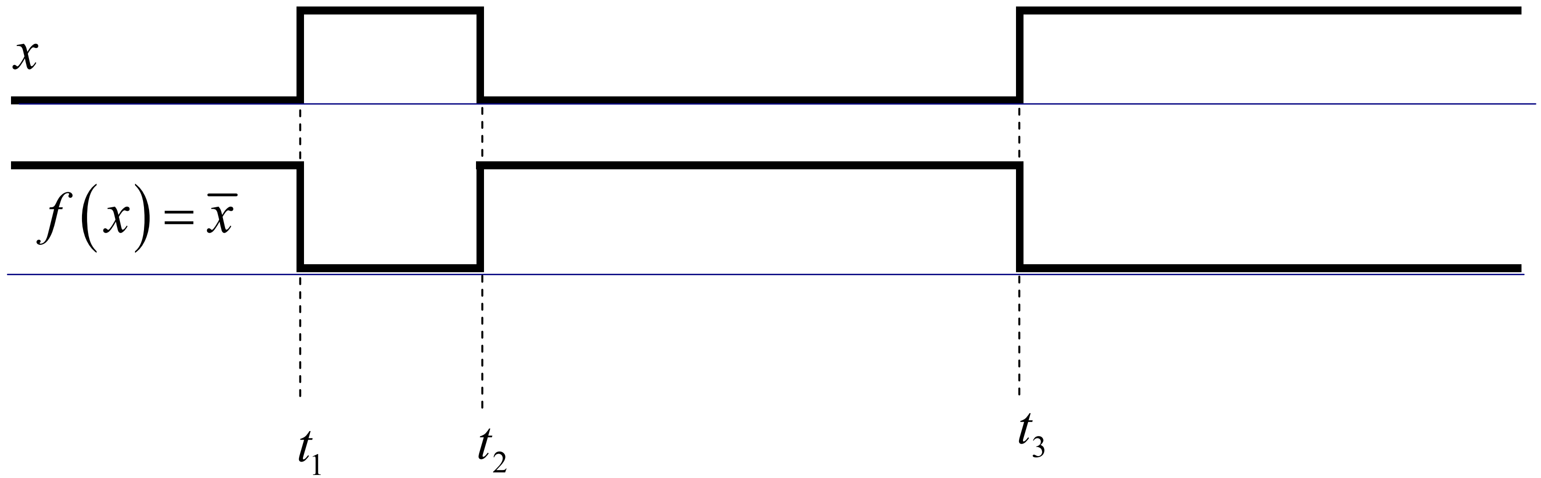
Puerta NOT



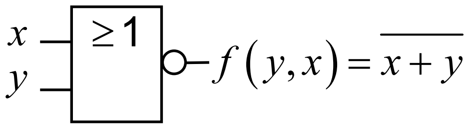
IE^3 $Std.\ 91-1984$



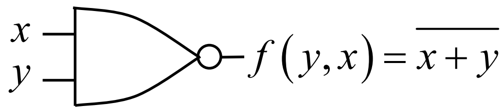
IE^3 $Std.\ 91-1973$



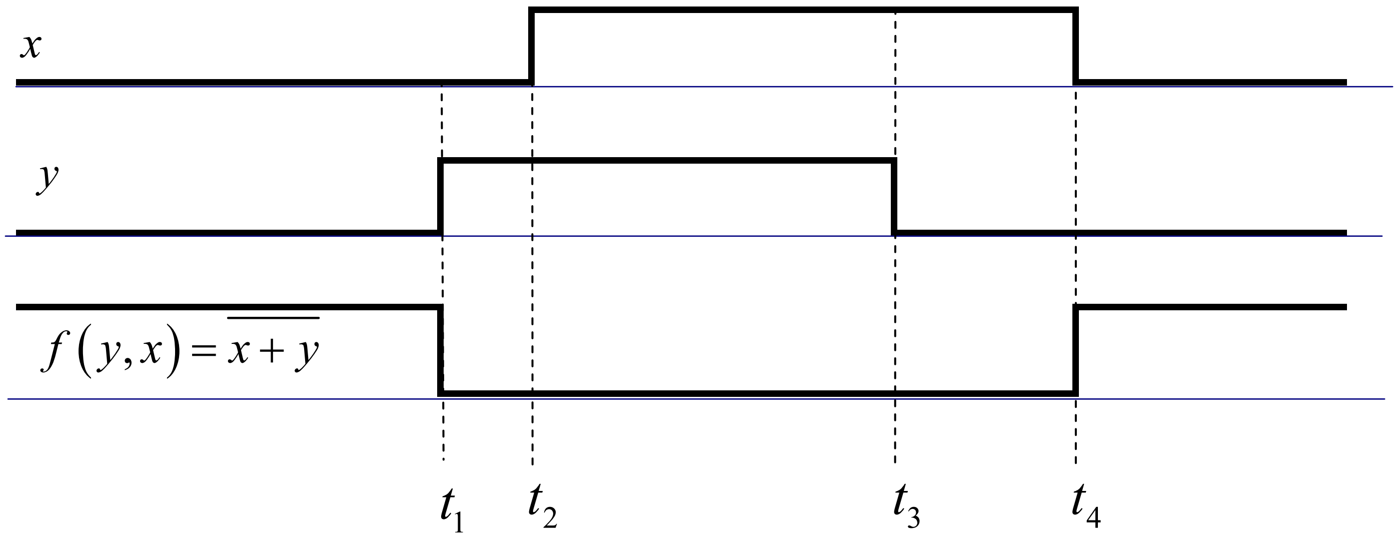
Puerta NOR



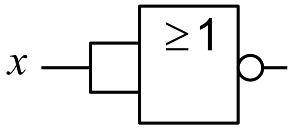
$IE^3\ Std.\ 91-1984$



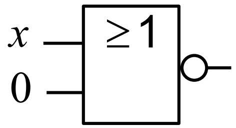
$IE^3\ Std.\ 91-1973$



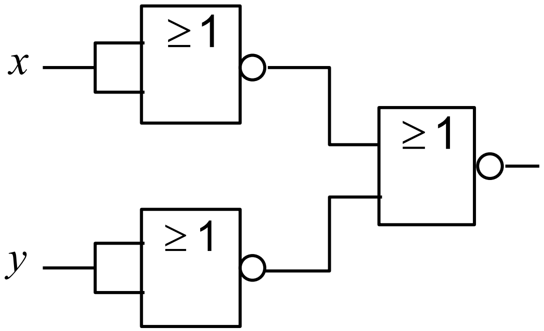
La puerta NOR es universal:



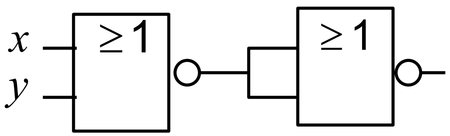
$f(x) = \overline{x + x} = \overline{x} \quad (NOT)$



$f(x) = \overline{x + 0} = \overline{x} \quad (NOT)$

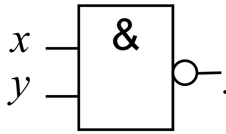


$f(y,x) = \overline{\overline{y} + \overline{x}} = y \cdot x \quad (AND)$



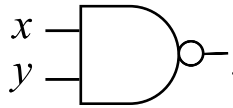
$f(y,x) = \overline{\overline{y + x}} = y + x \quad (OR)$

Puerta NAND



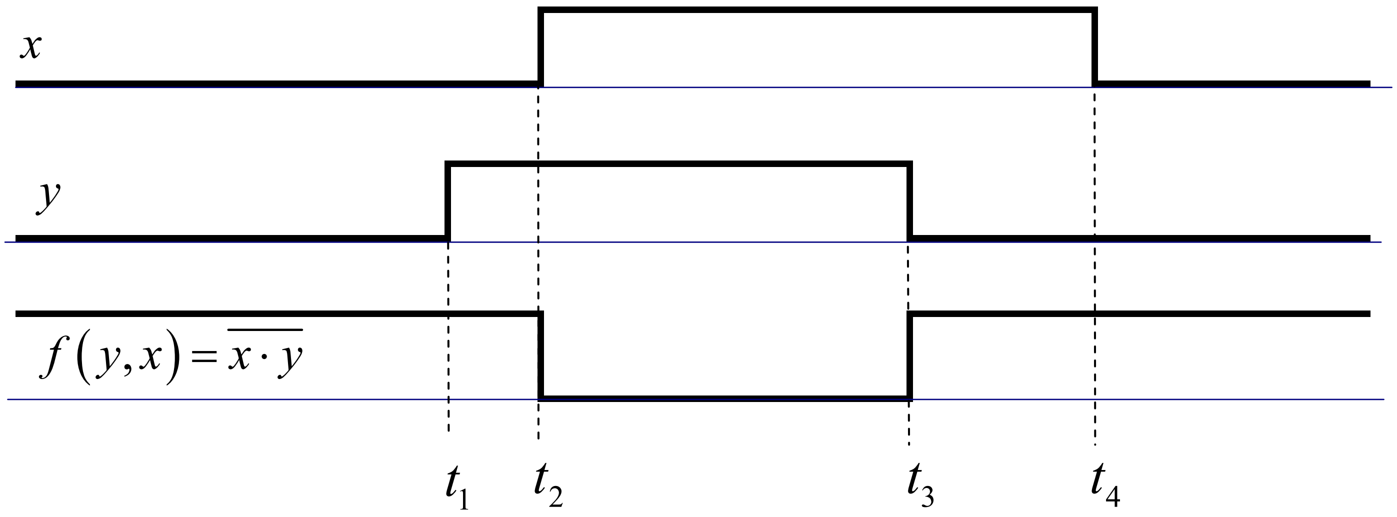
$f(y,x) = \overline{x \cdot y}$

IE^3 $Std.$ 91−1984

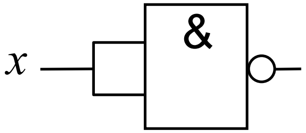


$f(y,x) = \overline{x \cdot y}$

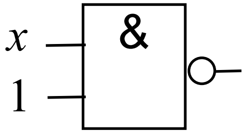
IE^3 $Std.$ 91−1973



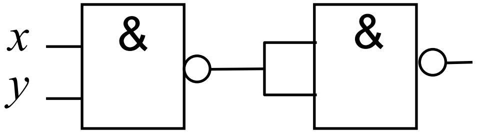
La puerta NAND es universal:



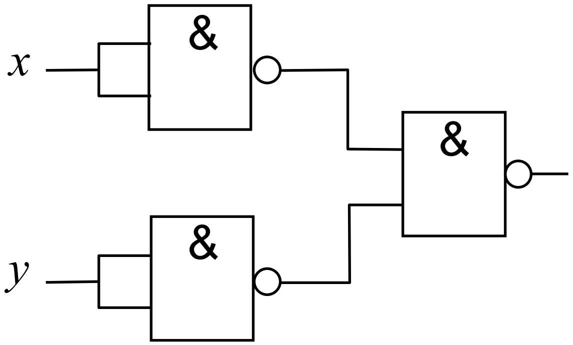
$f(x)=\overline{x\cdot x}=\overline{x}\quad (NOT)$



$f(x)=\overline{x\cdot 1}=\overline{x}\quad (NOT)$

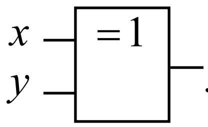


$f(y,x)=\overline{\overline{y\cdot x}}=y\cdot x\quad (AND)$

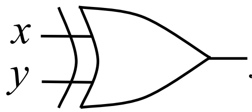


$f(y,x)=\overline{\overline{y}\cdot\overline{x}}=y+x\quad (OR)$

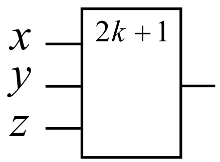
Puerta XOR



$$f(y,x) = y \oplus x = \overline{x}\,y + x\,\overline{y}$$

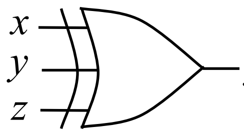


$$f(y,x) = y \oplus x$$



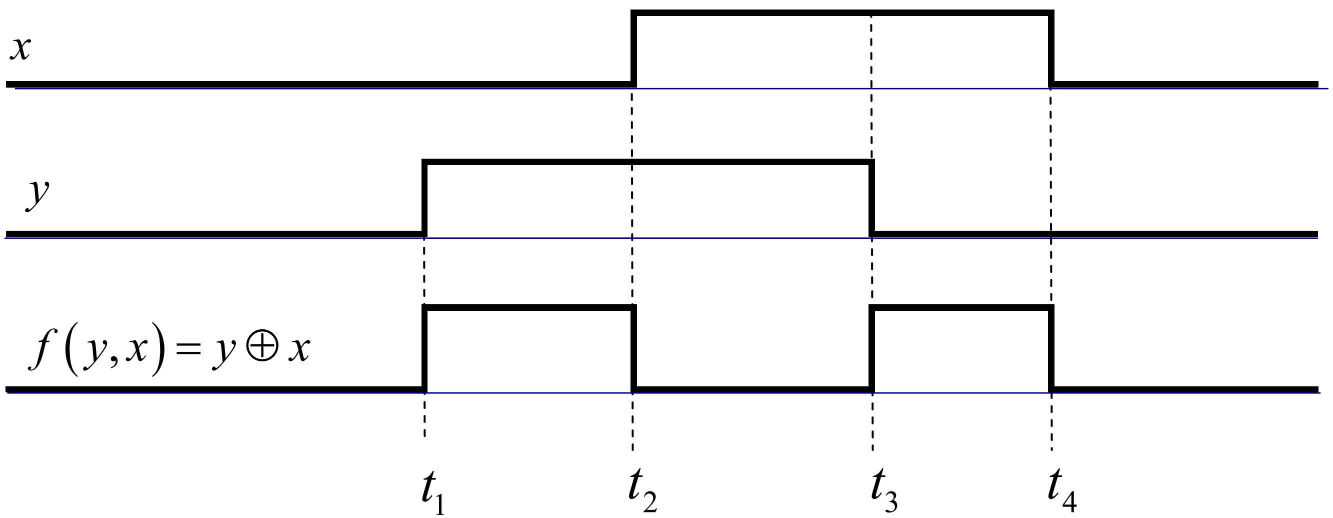
$$f(z,y,x) = z \oplus y \oplus x$$

IE^3 $Std.\ 91-1984$



$$f(z,y,x) = z \oplus y \oplus x$$

IE^3 $Std.\ 91-1973$



Propiedades de la función XOR

$$x \oplus y \oplus z = \left(x \oplus y\right) \oplus z = x \oplus \left(y \oplus z\right) \;\; \textit{propiedada asociativa}$$

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = \begin{cases} 1 \;\; \textit{si el número de variables que están a } 1 \textit{ es un número impar.} \\ 0 \;\; \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$x \oplus y = y \oplus x \quad \textit{propiedada conmutativa}$$

$$x \oplus y = \overline{x}\, y + x\, \overline{y}$$

Propiedades de la función XOR (continuación)

$$x \oplus x = 0$$

$$x \oplus \overline{x} = 1$$

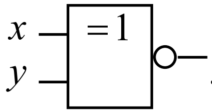
$$x \oplus 0 = x$$

$$x \oplus 1 = \overline{x}$$

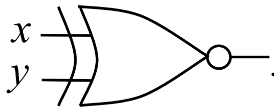
$$\overline{x \oplus y} = \overline{x} \oplus y = x \oplus \overline{y}$$

$$x \oplus y = \overline{x \oplus \overline{y}} = \overline{\overline{x} \oplus y} = \overline{x} \oplus \overline{y}$$

Puerta XNOR (equivalencia)

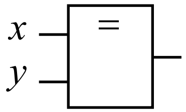


$f\left(y,x\right)=y\odot x=\overline{x}\,\overline{y}+x\,y$



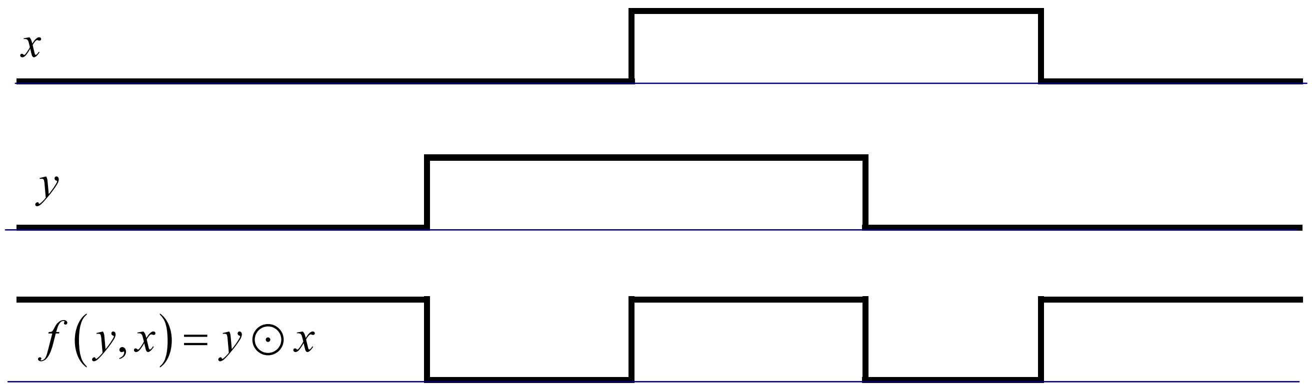
$f\left(y,x\right)=y\odot x$

$IE^3\ Std.\ 91-1973$



$f\left(y,x\right)=y\odot x=\overline{x}\,\overline{y}+x\,y$

$IE^3\ Std.\ 91-1984$



Propiedades de la función XNOR

$$x \odot y \odot z = (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z) \quad \textit{propiedada asociativa}$$

$$x_1 \odot x_2 \odot \cdots \odot x_n = \begin{cases} 1 \;\; si \begin{cases} n \textit{ es impar y el número de variables que están a } 1 \textit{ es impar.} \\ n \textit{ es par y el número de variables que están a } 1 \textit{ es par.} \end{cases} \\ 0 \;\; \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$x_1 \odot x_2 \odot \cdots \odot x_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \quad \Leftrightarrow \quad n \textit{ es impar}$$

$$x_1 \odot x_2 \odot \cdots \odot x_n = \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n} \quad \Leftrightarrow \quad n \textit{ es par}$$

$$x \odot y = \overline{x \oplus y} = \overline{\overline{x}\, y + x\, \overline{y}} \qquad (n \textit{ es par})$$

$$x \odot y = y \odot x \quad propiedada\ \ conmutativa$$

$$x \odot x = 1$$

$$x \odot 0 = \overline{x}$$

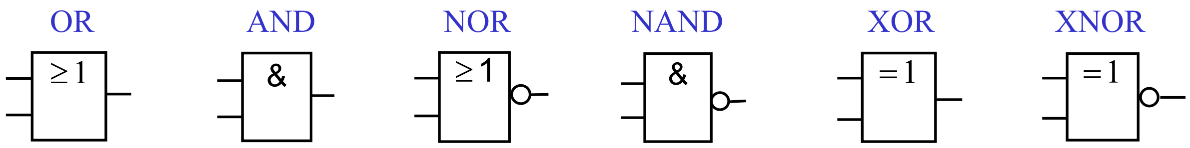
$$x \odot \overline{x} = 0$$

$$x \odot 1 = x$$

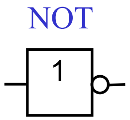
$$x \odot y = \overline{x} \odot \overline{y} = \overline{x \oplus y} = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y$$

$$\overline{x} \odot y = x \odot \overline{y} = \overline{x \odot y} = x \oplus y = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}$$

Tablas de verdad de las funciones implementadas por las puertas lógicas básicas

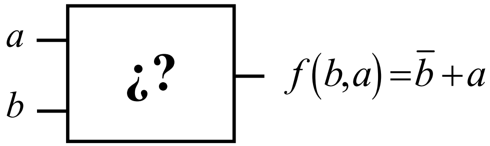


y	x	$y+x$	$y\cdot x$	$\overline{y+x}$	$\overline{y\cdot x}$	$y\oplus x$	$\overline{y\oplus x}$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

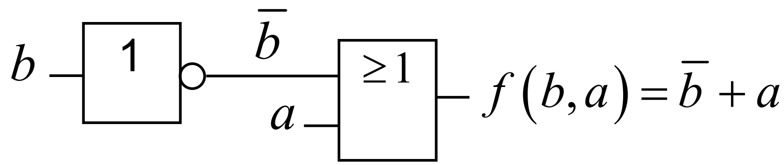


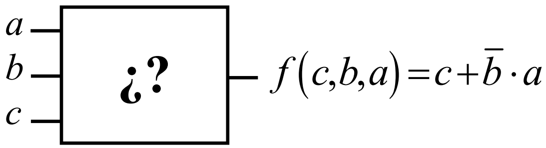
x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Ejemplos de implementación de funciones lógicas utilizando puertas lógicas básicas:

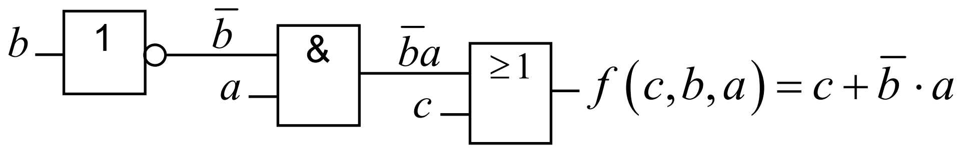


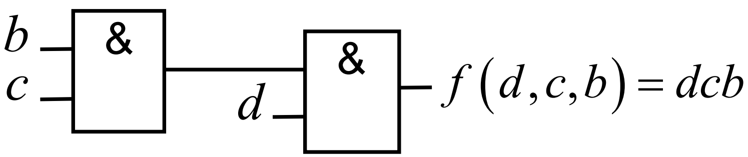
se supone que lo que se conoce son los valores de b y de a



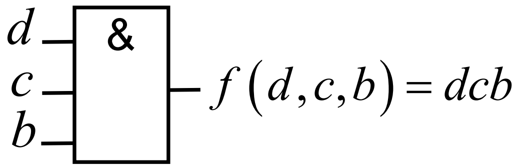


en este caso, lo que se conoce son los valores de c, b y a

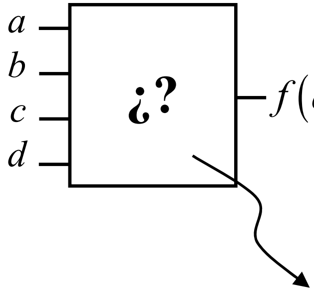




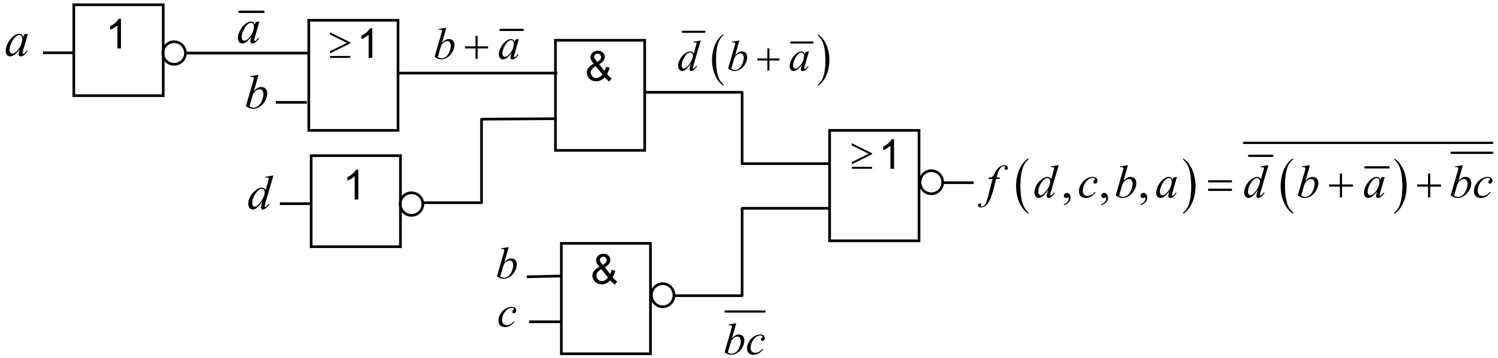
$\equiv$

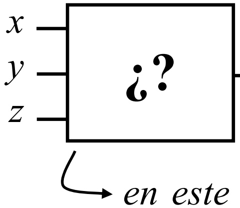


ésta no es una puerta lógica básica



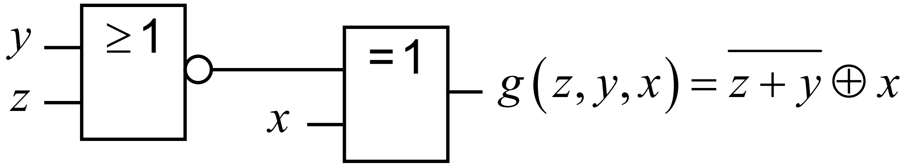
$f(d,c,b,a)=\overline{\overline{d}(b+\overline{a})+\overline{bc}}$ → *en este caso, lo que se conoce son los valores de d, c, b y a*



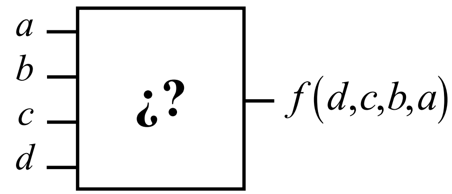


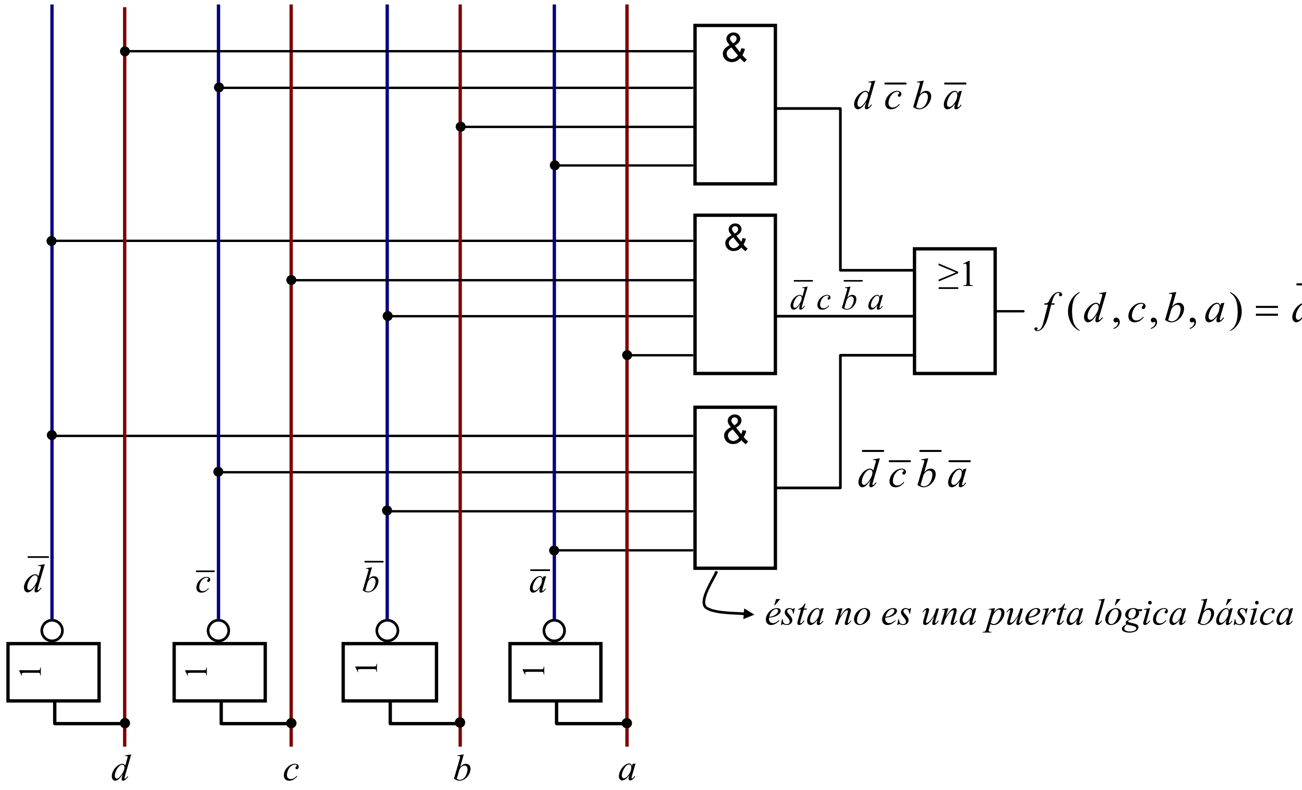
$g(z,y,x)=\overline{z+y}\oplus x$

en este caso, lo que se conoce son los valores de z, y y x



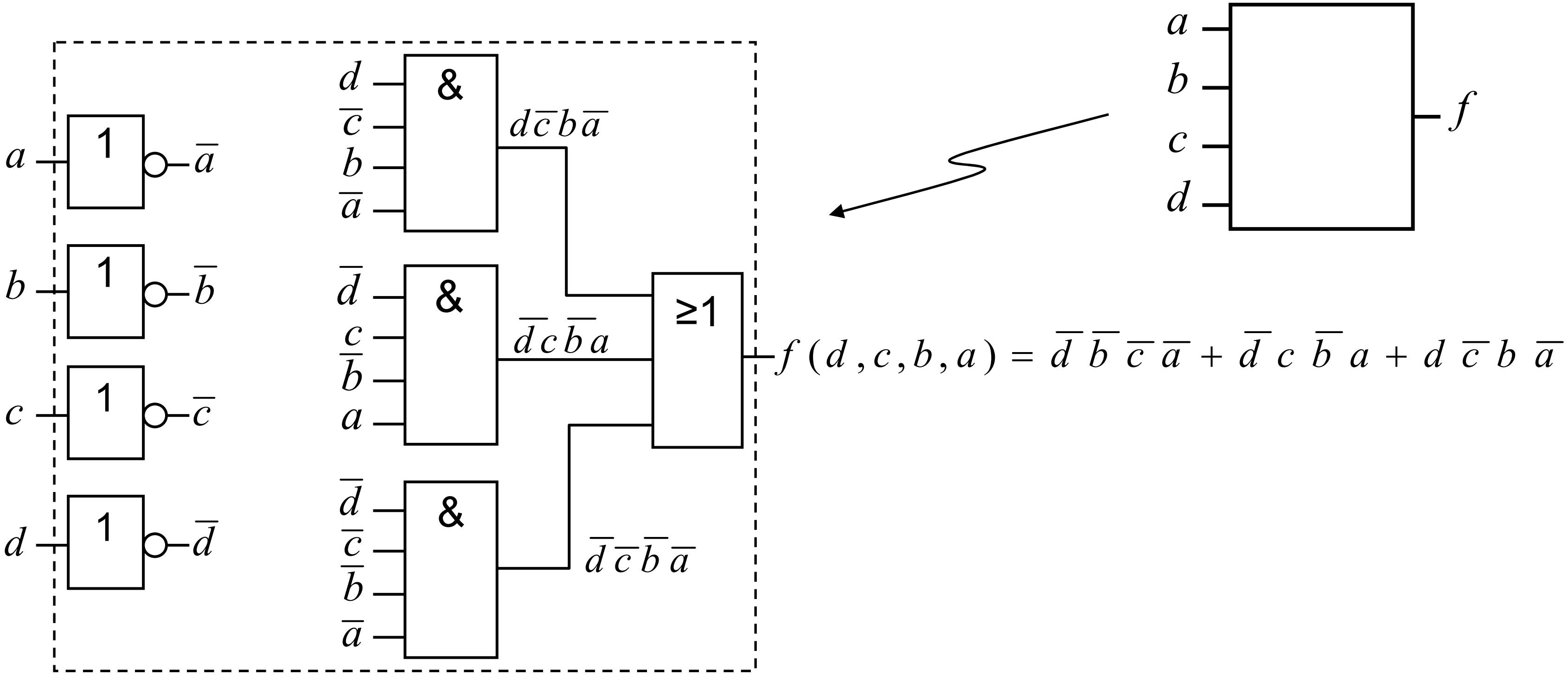
Ejemplo de implementación de una función utilizando puertas lógicas no básicas





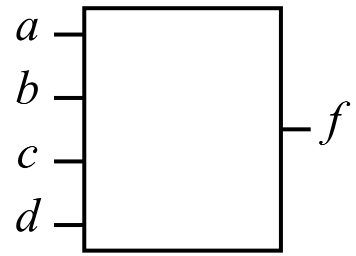
$$f(d,c,b,a) = \bar{d}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a} + \bar{d}\,c\,\bar{b}\,a + d\,\bar{a}\,\bar{c}\,b$$

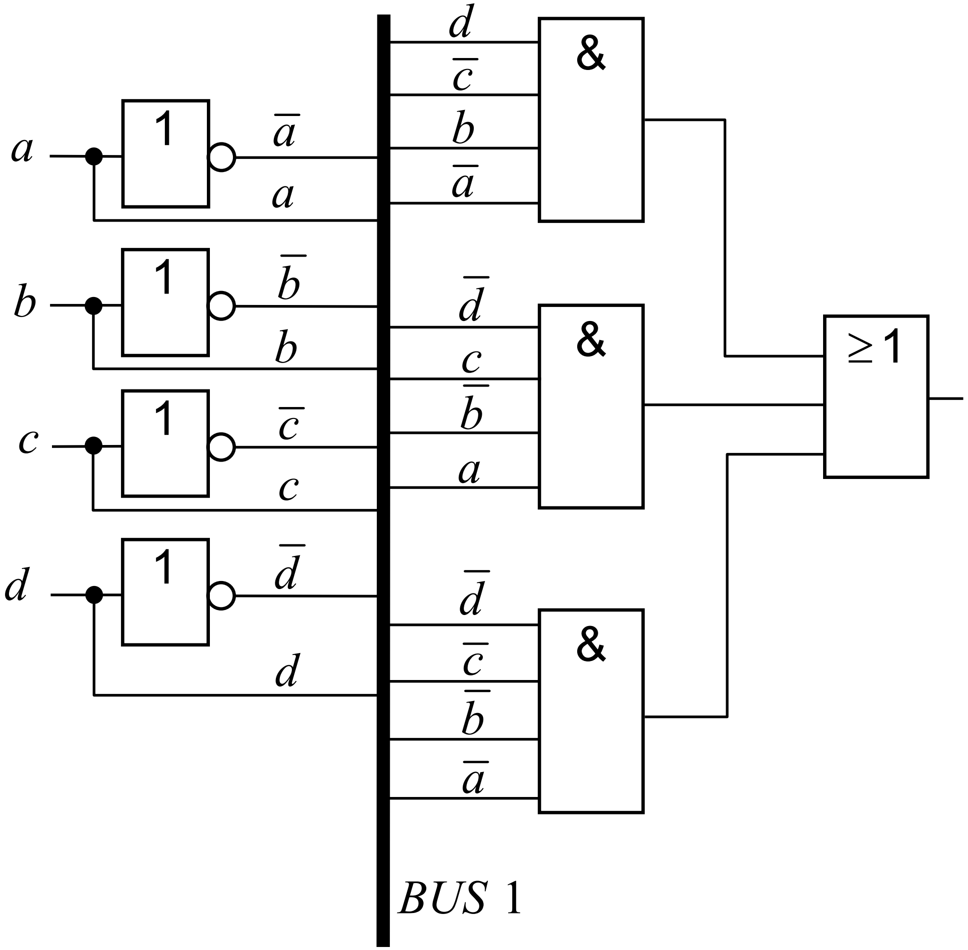
Otra forma de indicar algunas conexiones eléctricas internas en el circuito anterior



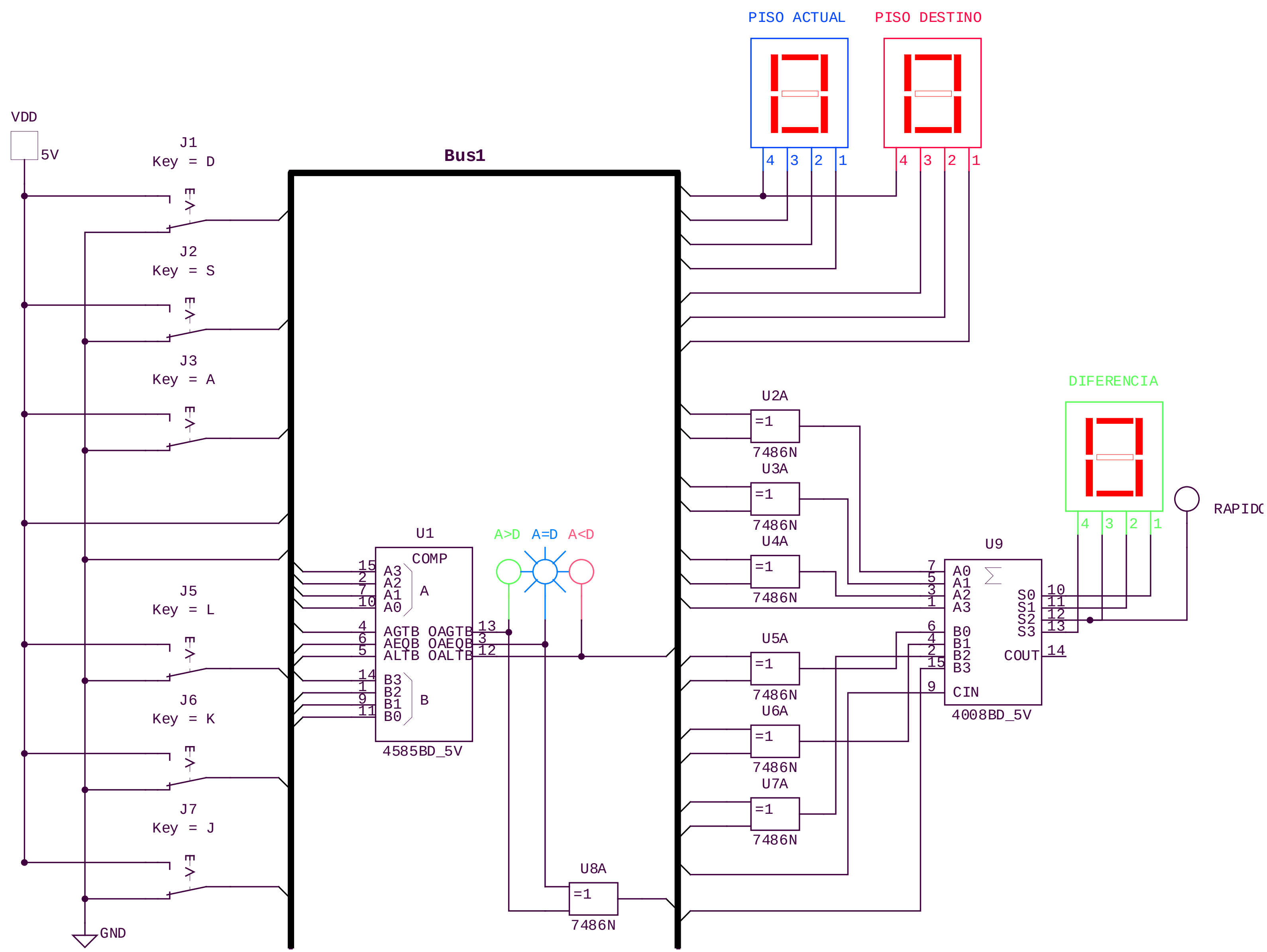
Acuerdo: dos o más terminales que tengan el mismo nombre se considera que están conectados eléctricamente

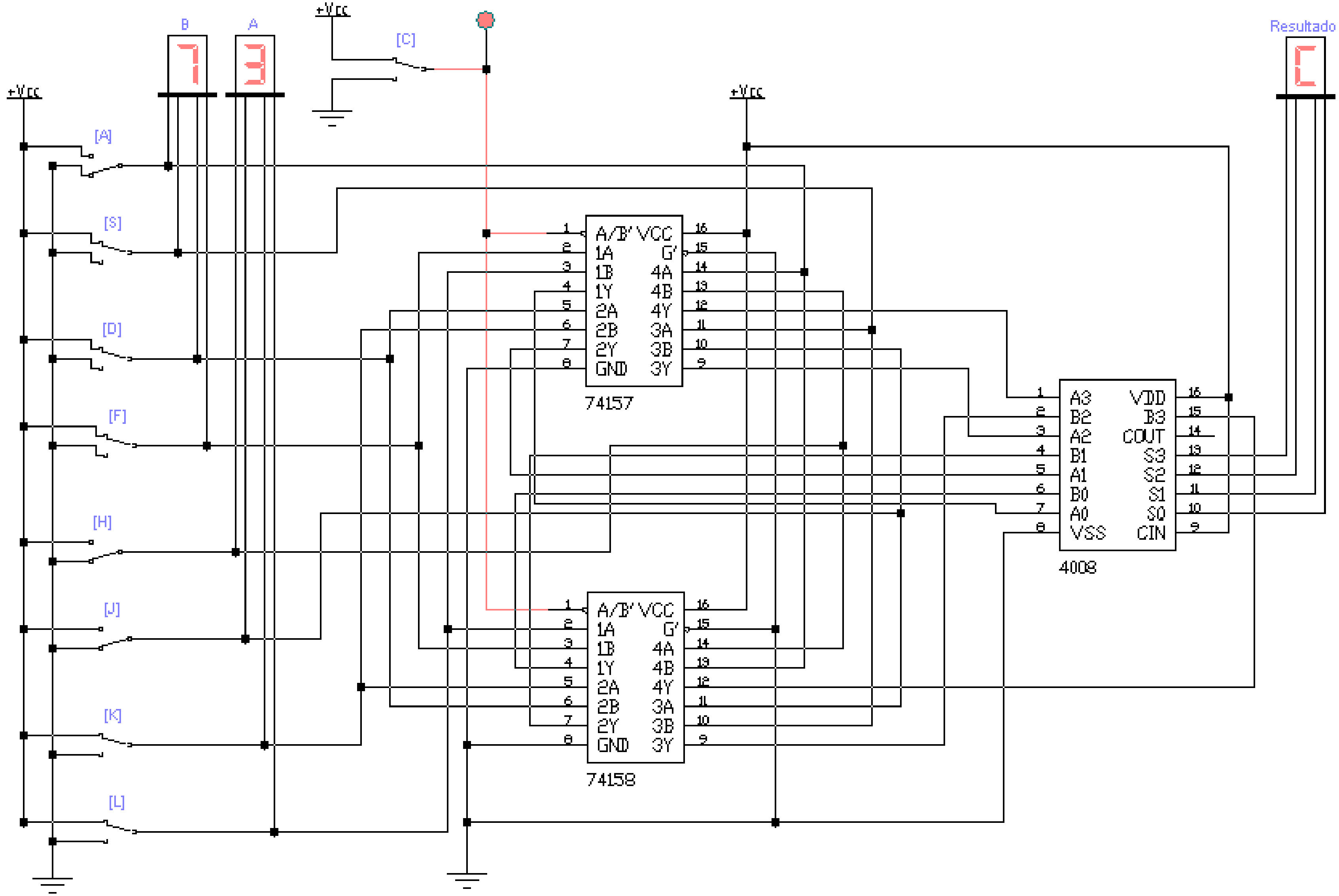
Ejemplo de utilización de un *bus* para indicar algunas conexiones eléctricas internas en el circuito anterior





$$f\left(d,c,b,a\right)=\overline{d}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a}+\overline{d}\,c\,\overline{b}\,a+d\,\overline{a}\,\overline{c}\,b$$

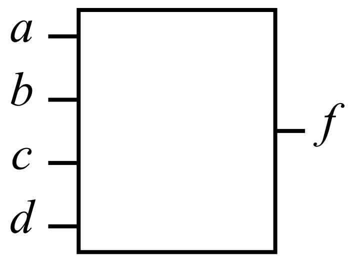

PISO ACTUAL
PISO DESTINO
VDD
5V
J1
Key = D
J2
Key = S
J3
Key = A
J5
Key = L
J6
Key = K
J7
Key = J
GND
Bus1
U1
COMP
A3
A2
A1
A0
A
AGTB OAGTB
AEQB OAEQB
ALTB OALTB
B3
B2
B1
B0
B
4585BD_5V
A>D A=D A<D
U2A
U3A
U4A
U5A
U6A
U7A
U8A
=1
7486N
DIFERENCIA
RAPIDO
U9
A0
A1
A2
A3
B0
B1
B2
B3
S0
S1
S2
S3
COUT
CIN
4008BD_5V

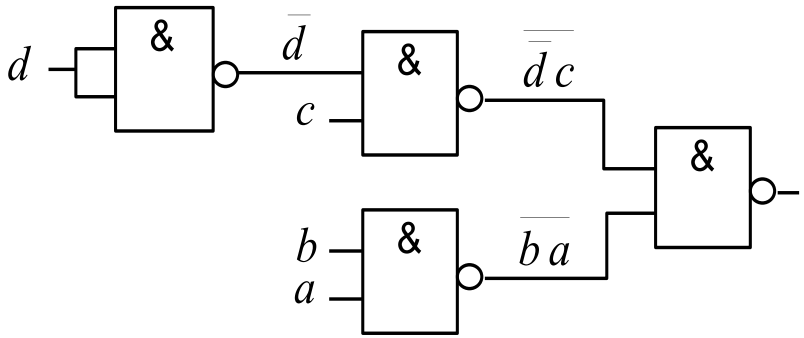


B
A
+Vcc
[C]
+Vcc
[A]
[S]
[D]
[F]
[H]
[J]
[K]
[L]
A/B' VCC
1A G'
1B 4A
1Y 4B
2A 4Y
2B 3A
2Y 3B
GND 3Y
74157
+Vcc
Resultado
A3 VDD
B2 B3
A2 COUT
B1 S3
A1 S2
B0 S1
A0 S0
VSS CIN
4008
A/B' VCC
1A G'
1B 4A
1Y 4B
2A 4Y
2B 3A
2Y 3B
GND 3Y
74158

Ejemplo de implementación de una función utilizando únicamente puertas NAND de 2 entradas

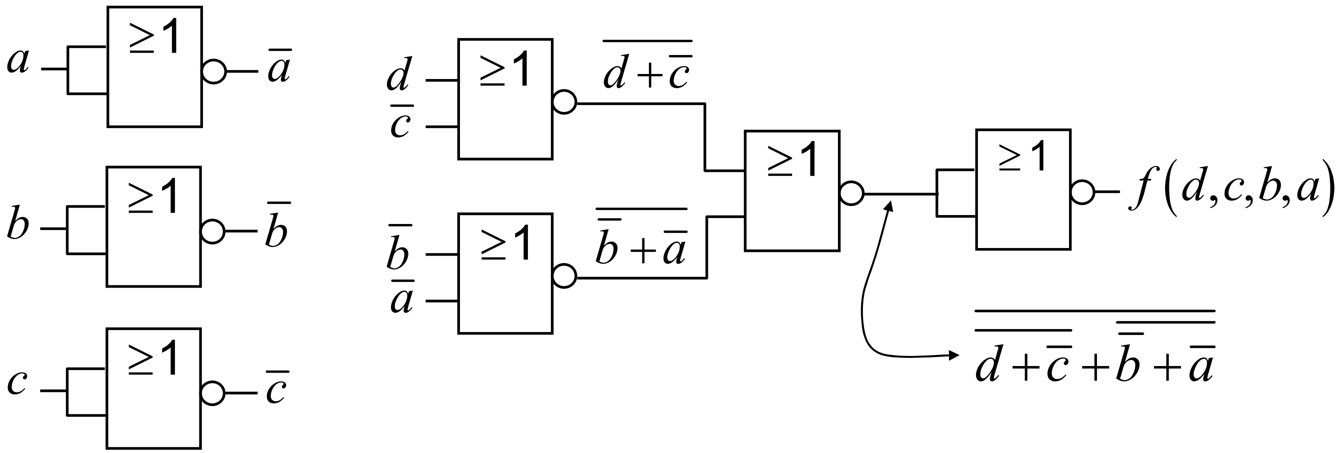
$$f(d,c,b,a)=\bar{d}\,c+b\,a=\overline{\overline{\bar{d}\,c+b\,a}}=\overline{\overline{\bar{d}\,c}\;\overline{b\,a}}$$



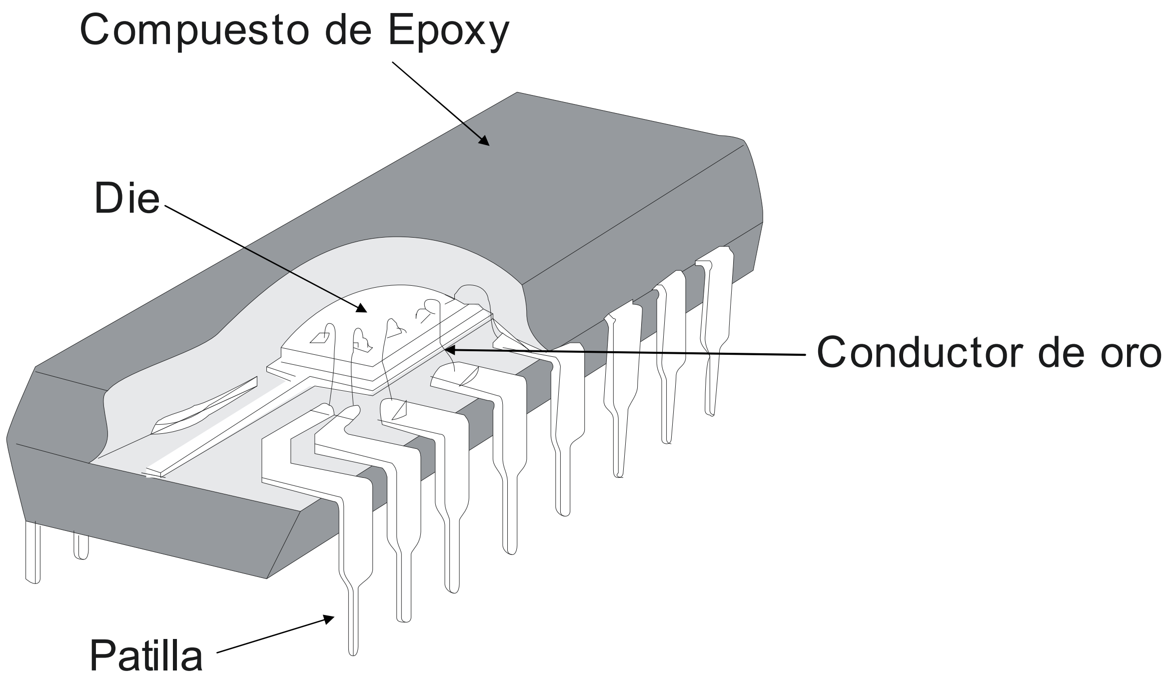


Ejemplo de implementación de una función utilizando únicamente puertas NOR de 2 entradas

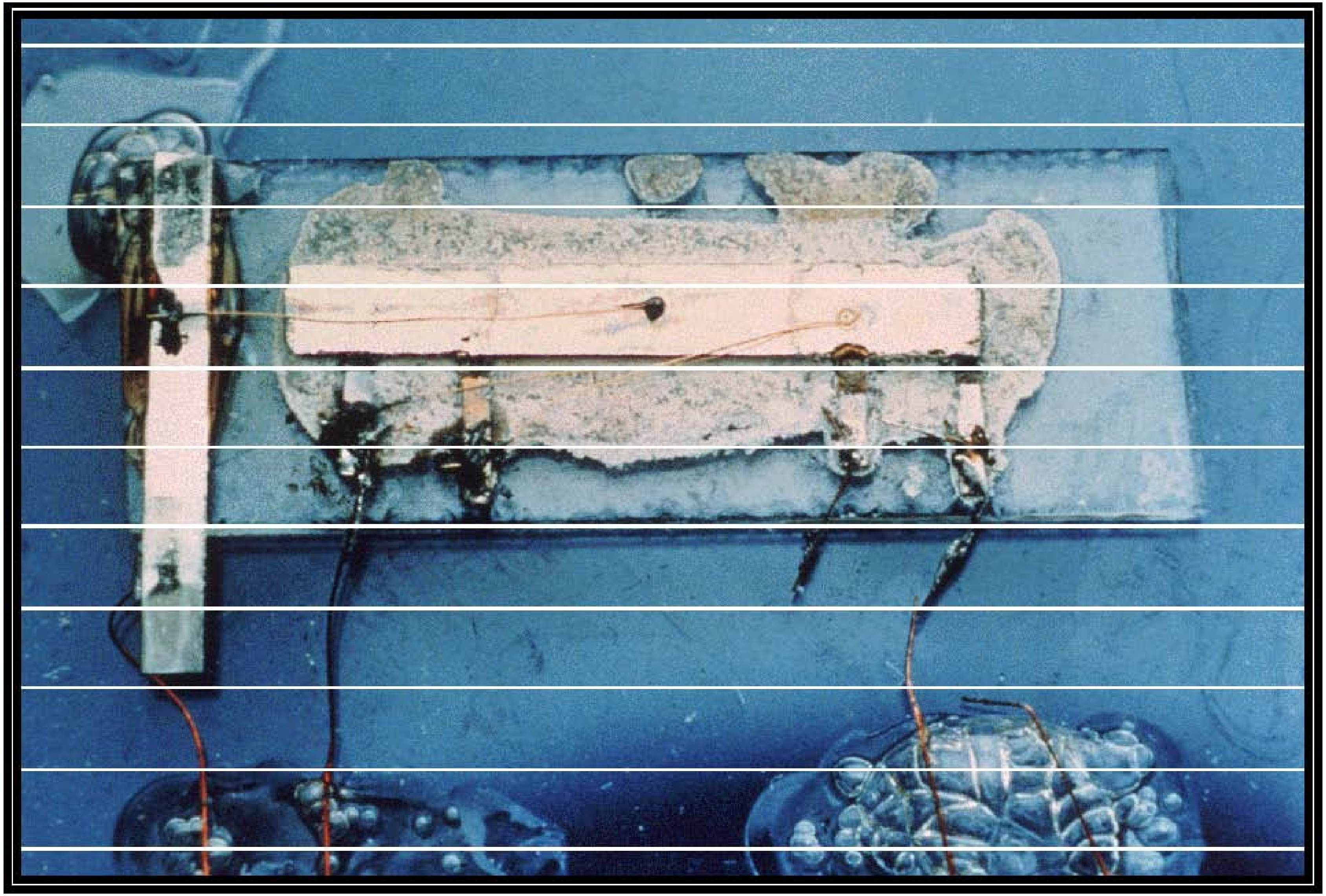
$$f(d,c,b,a) = \bar{d}\,c + b\,a = \overline{\overline{\bar{d}\,c}} + \overline{\overline{b\,a}} = \overline{\bar{\bar{d}} + \bar{c}} + \overline{\bar{b} + \bar{a}} = \overline{\overline{\overline{d + \bar{c}} + \overline{\bar{b} + \bar{a}}}}$$



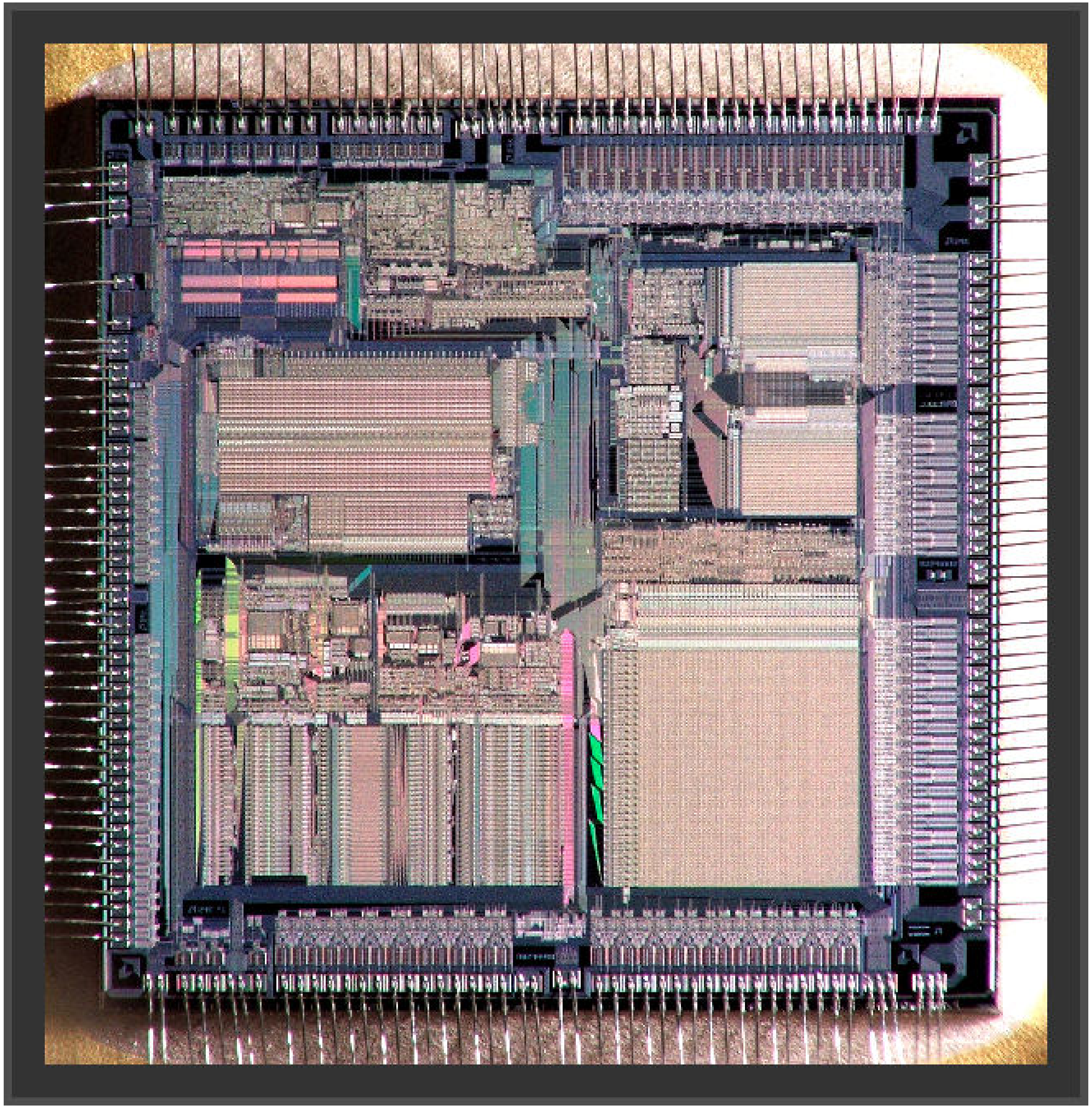
Circuitos integrados:

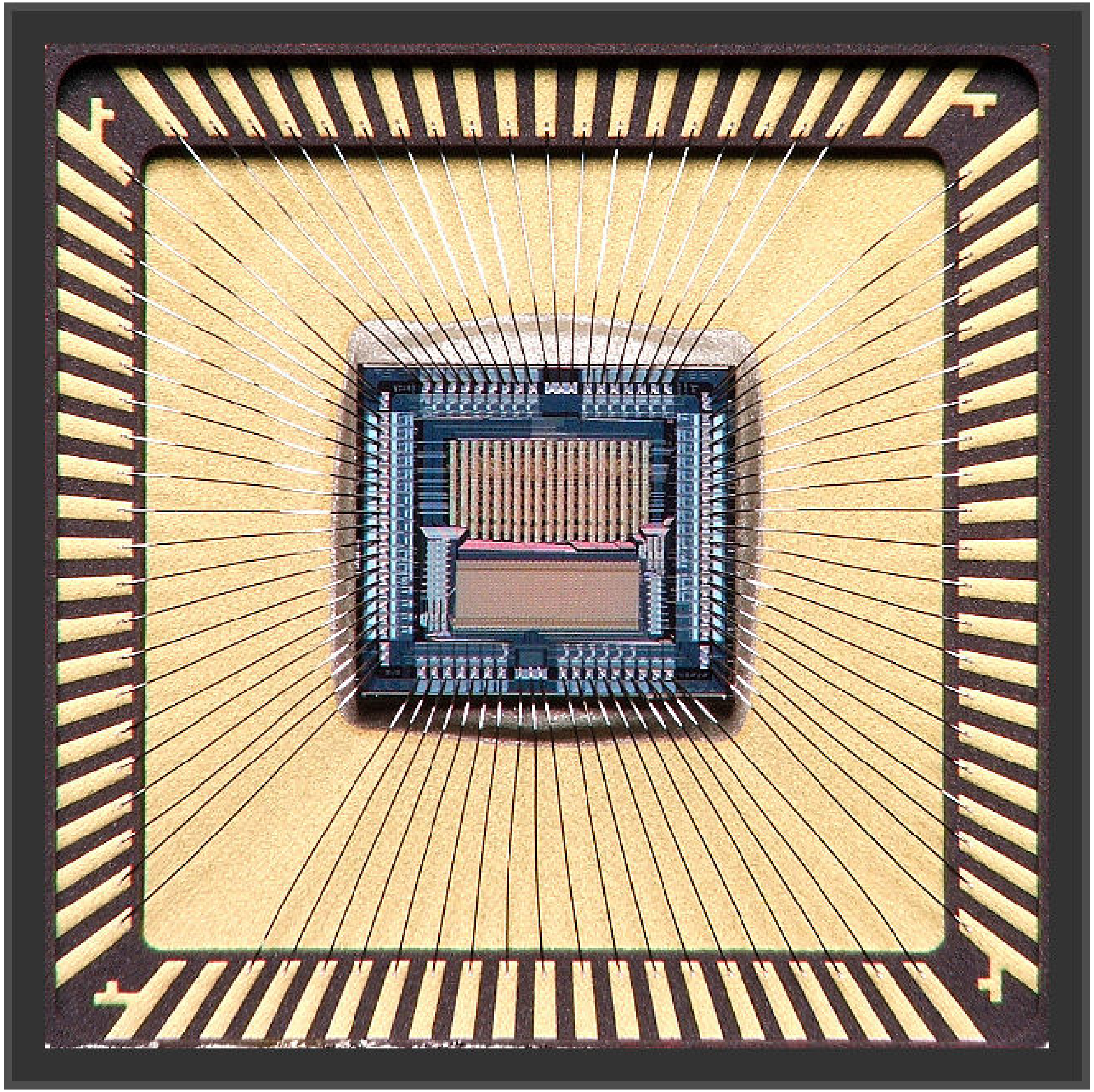


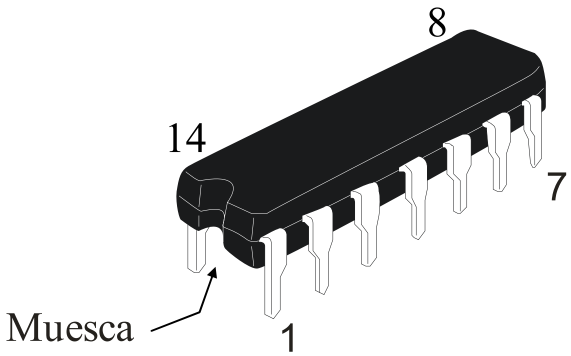
Primer circuito integrado (Jack Kilby-1958-Texas Instruments)

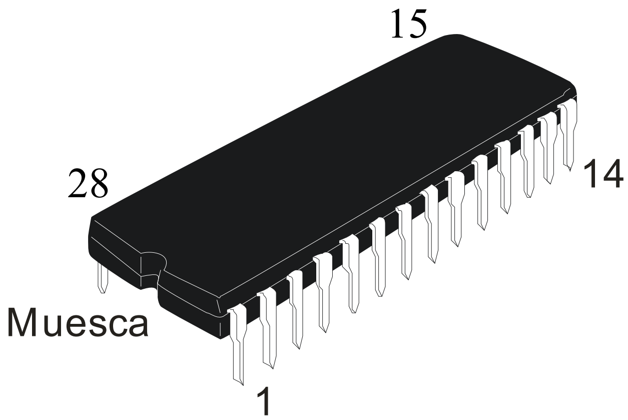


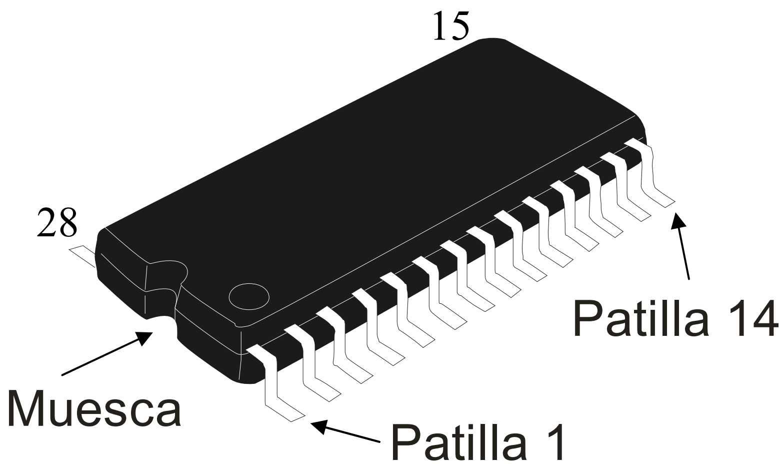
(Robert Noyce-1958-Fairchild semiconductor)

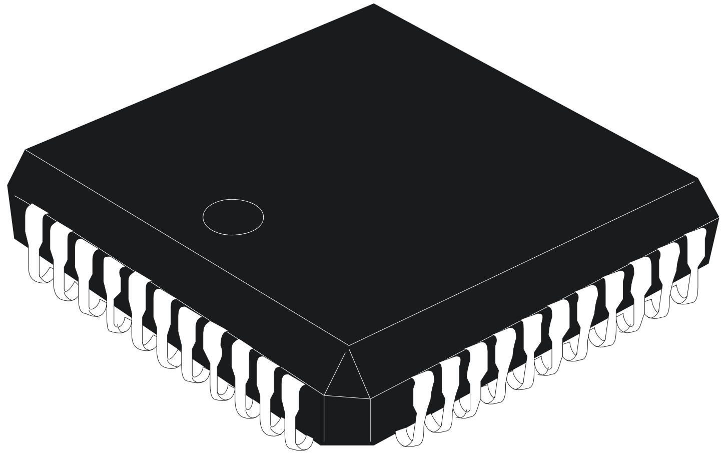


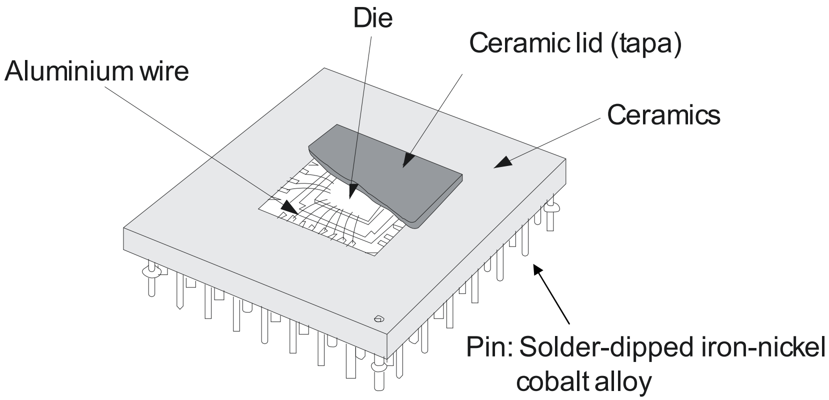


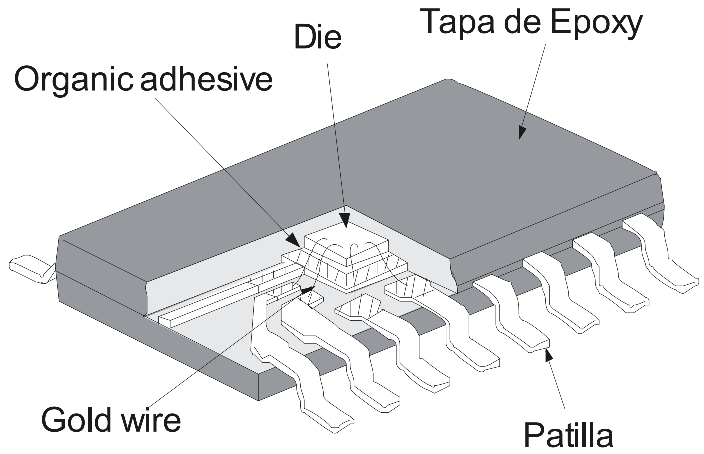

8
14
7
Muesca
1

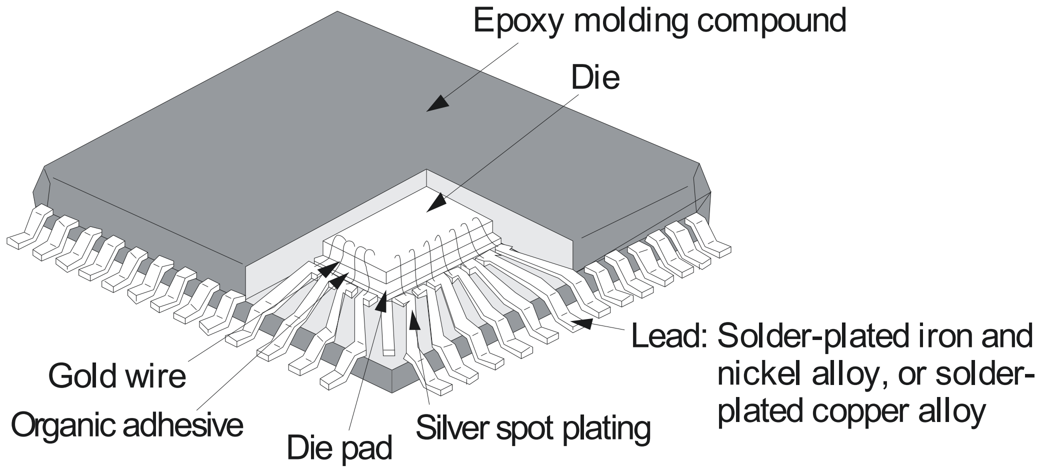

15
28
14
Muesca
1

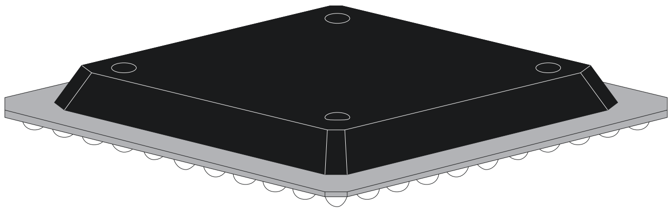

15
28
Patilla 14
Muesca
Patilla 1

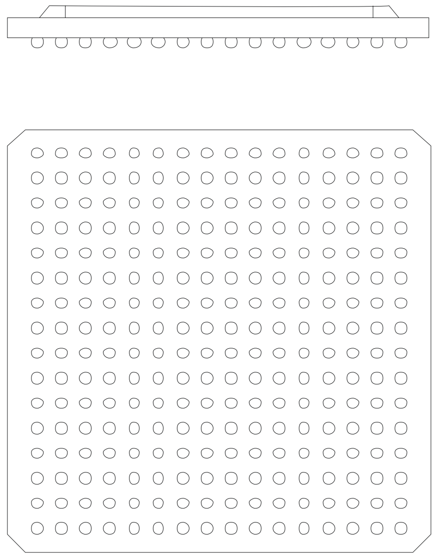


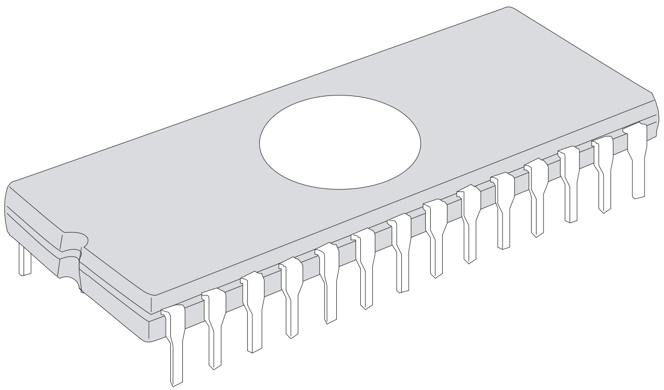

Die
Ceramic lid (tapa)
Aluminium wire
Ceramics
Pin: Solder-dipped iron-nickel cobalt alloy


Die
Tapa de Epoxy
Organic adhesive
Gold wire
Patilla

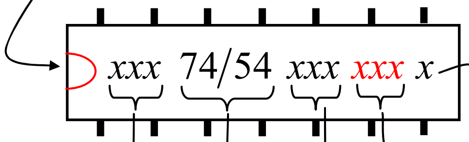

Epoxy molding compound
Die
Lead: Solder-plated iron and nickel alloy, or solder-plated copper alloy
Gold wire
Organic adhesive
Die pad
Silver spot plating







identificador de la patilla 1



patilla 1

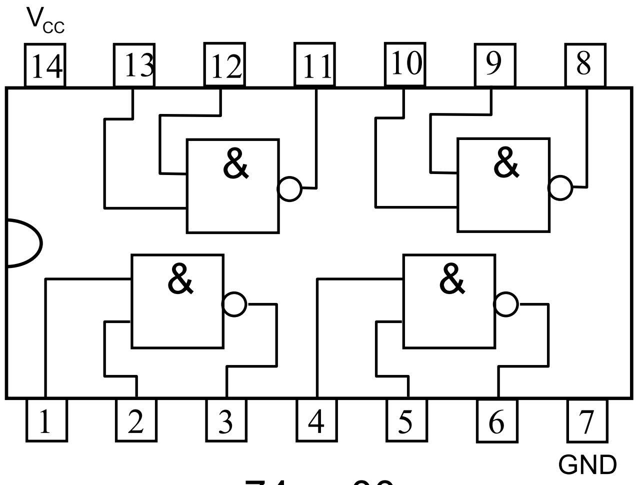
tipo de encapsulado : P(plastic), T (plastic minipack), etc.

número que indica la función lógica que realiza el circuito integrado. Puede incluir letras como sufijo (ejemplo B ≡ bufferred indica que las salidas pueden manejar corrientes mayores que la versión UB ≡ unbufferred o normal)

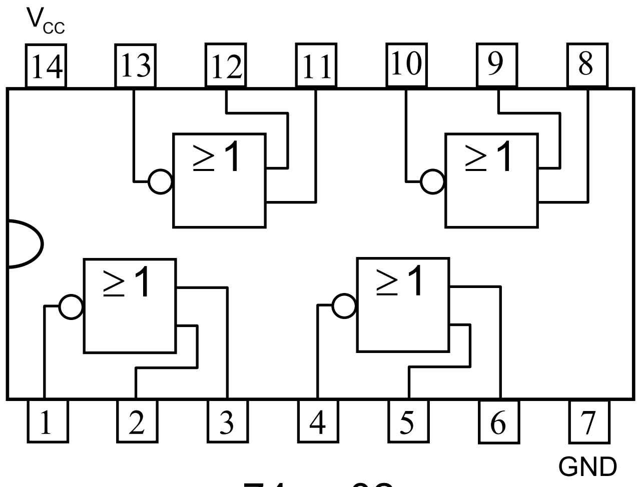
subfamilia a la que pertenece el IC. Estos dígitos tambien permiten identificar la tecnología de fabricacion (*TTL*, *CMOS*, ...).

$$serie \begin{cases} 74: \text{ versión comercial } (0 \div 70\ ^{o}C) \\ 54: \text{ versión militar } (-55\ ^{o}C \div 125\ ^{o}C) \end{cases}$$

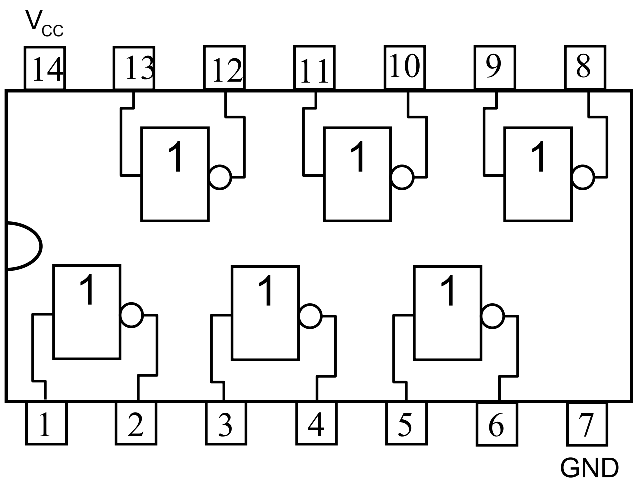
$$fabricante \begin{cases} SN: \text{ Texas Instruments} \\ DM: \text{ National Semiconductor} \\ MC: \text{ Motorola} \\ F: \text{ Fairchild} \\ MIC: \text{ ITT} \\ N: \text{ Signetics} \\ etc. \end{cases}$$



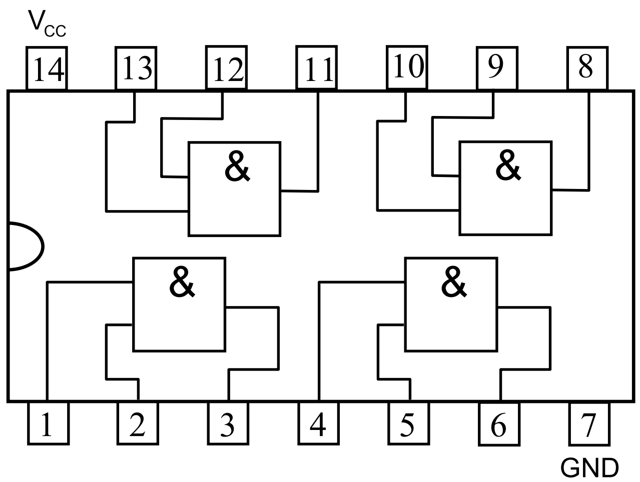
74xxx00



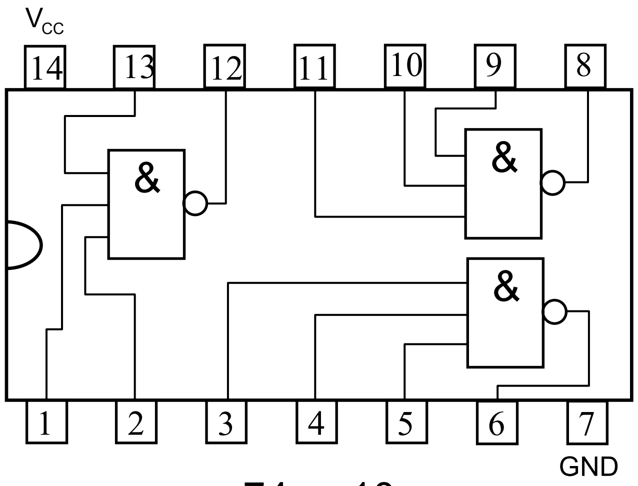
74xxx02



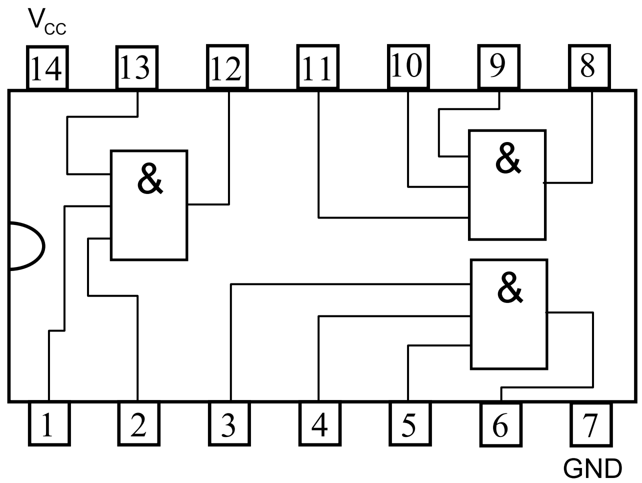
74xxx04



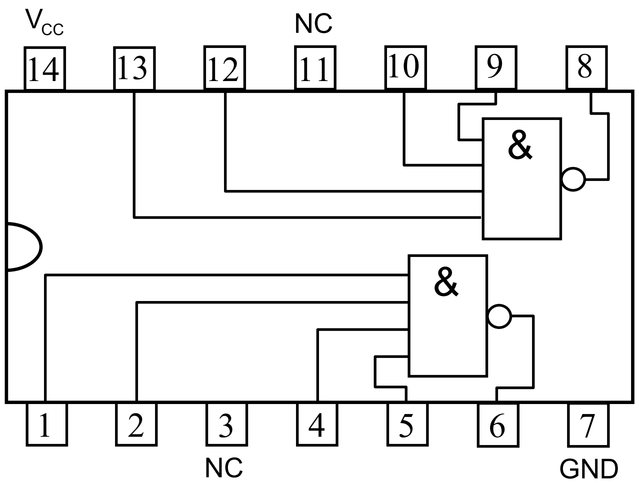
74xxx08



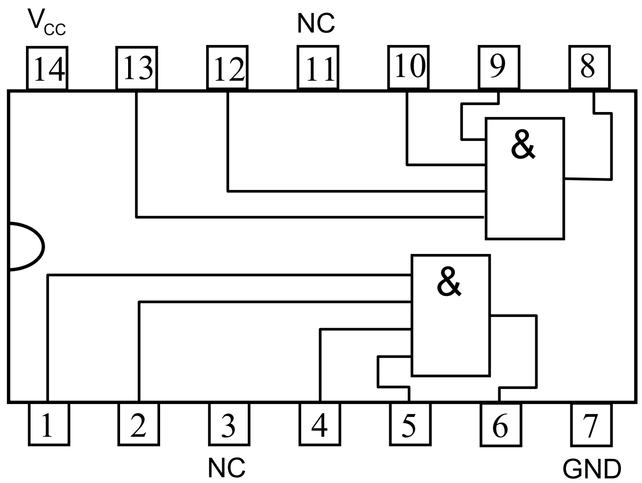
74xxx10



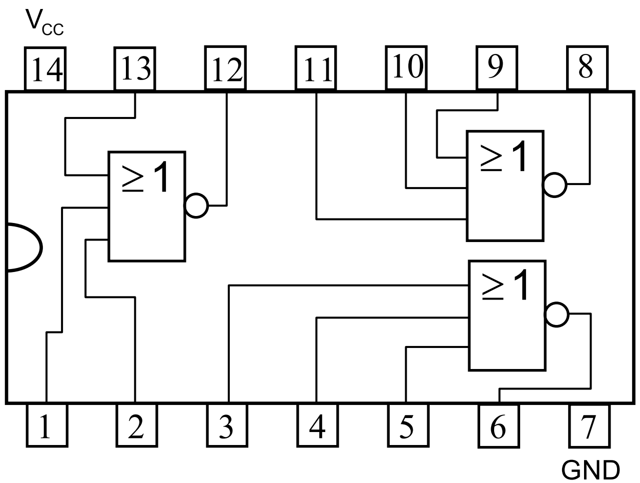
74xxx11



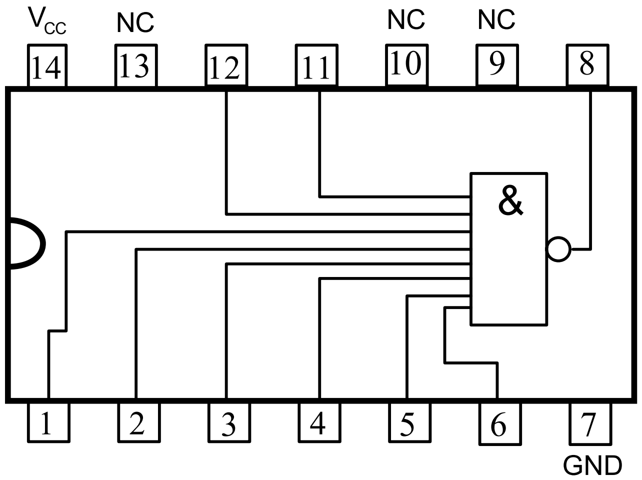
74xxx20



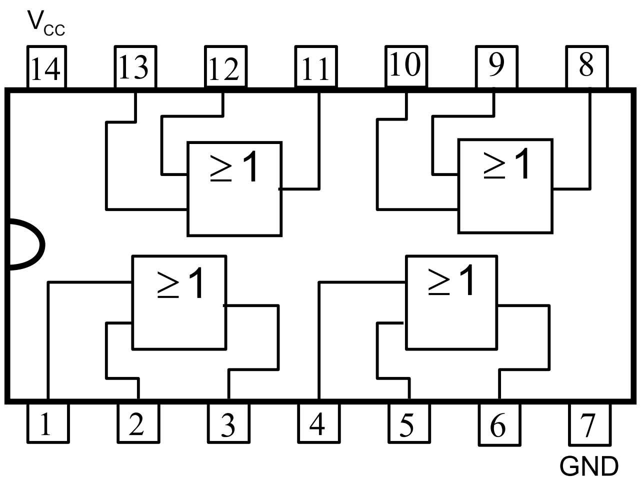
74xxx21



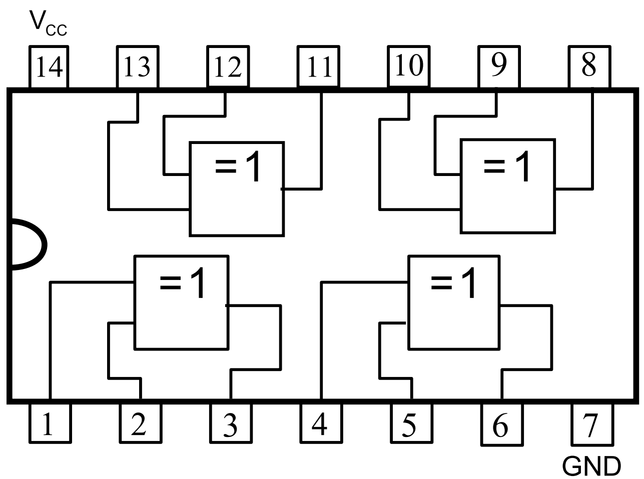
74xxx27



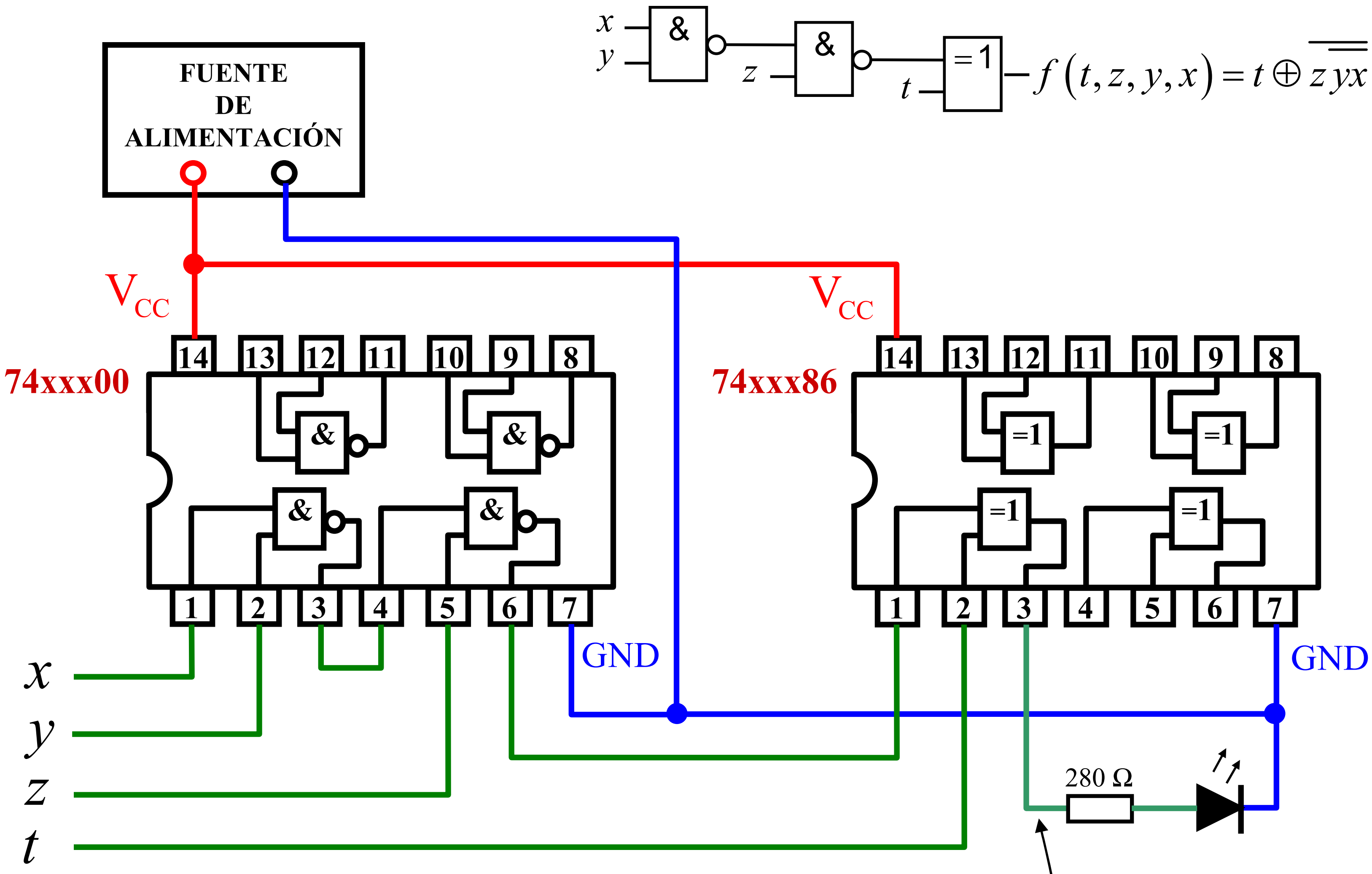
74xxx30



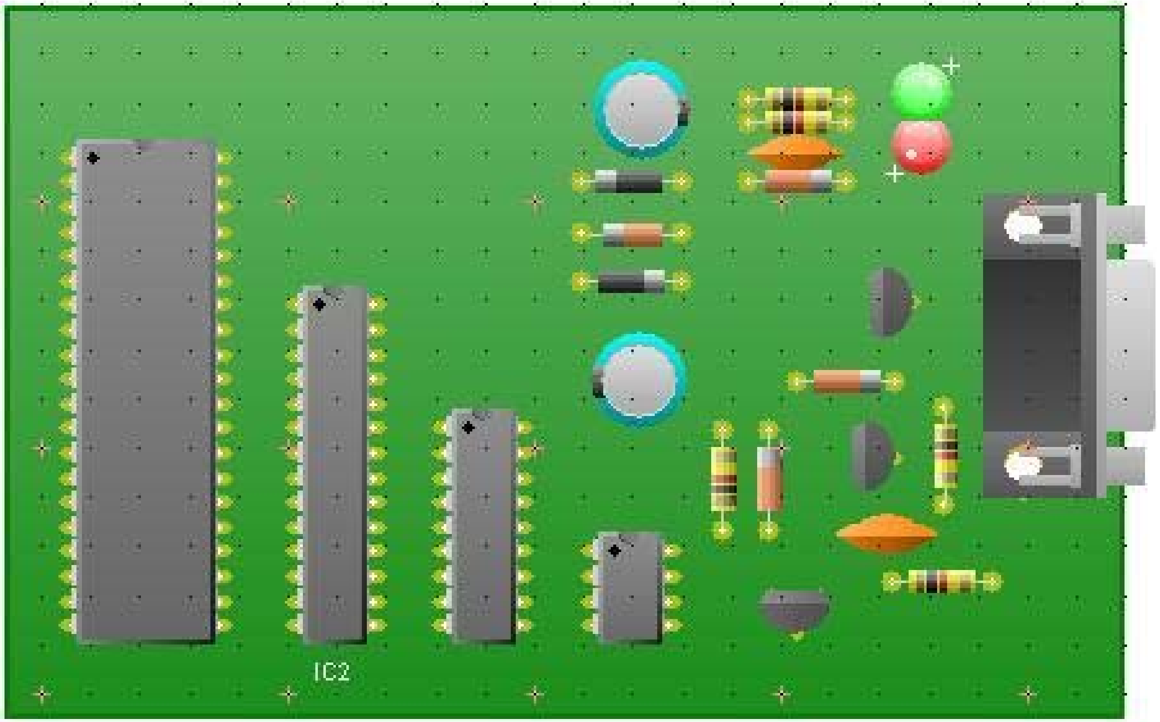
74xxx32

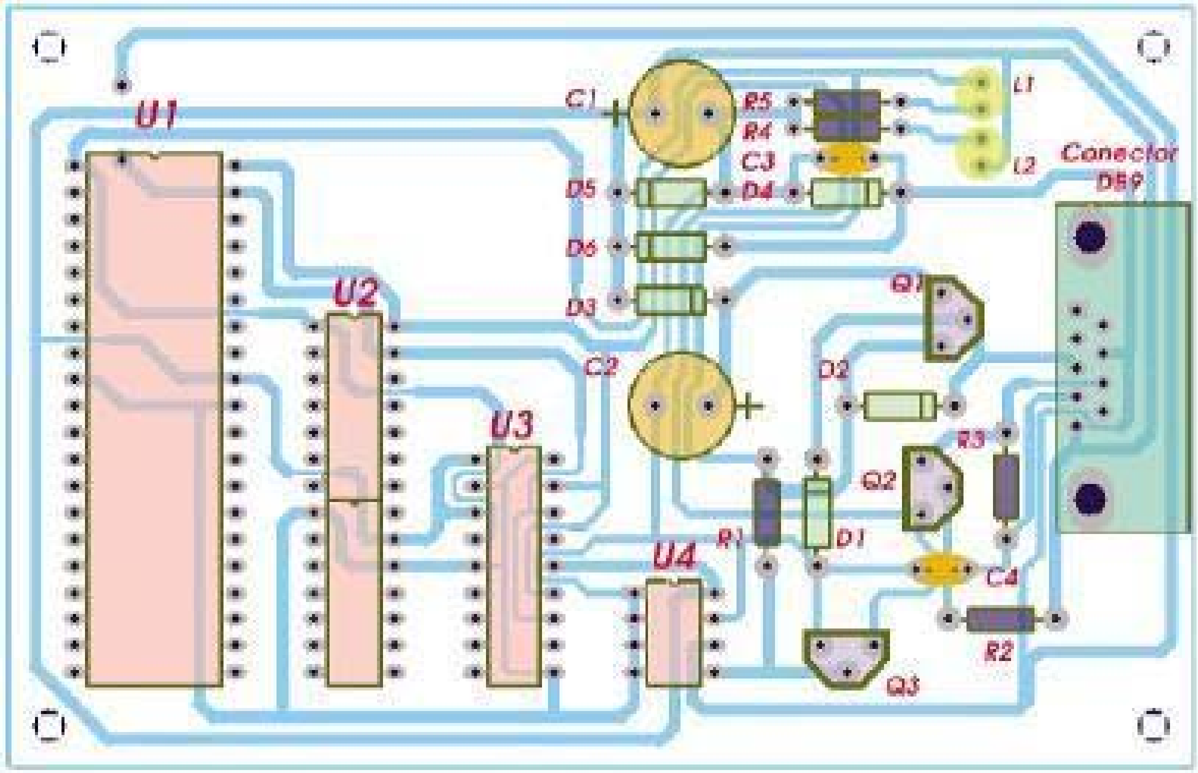


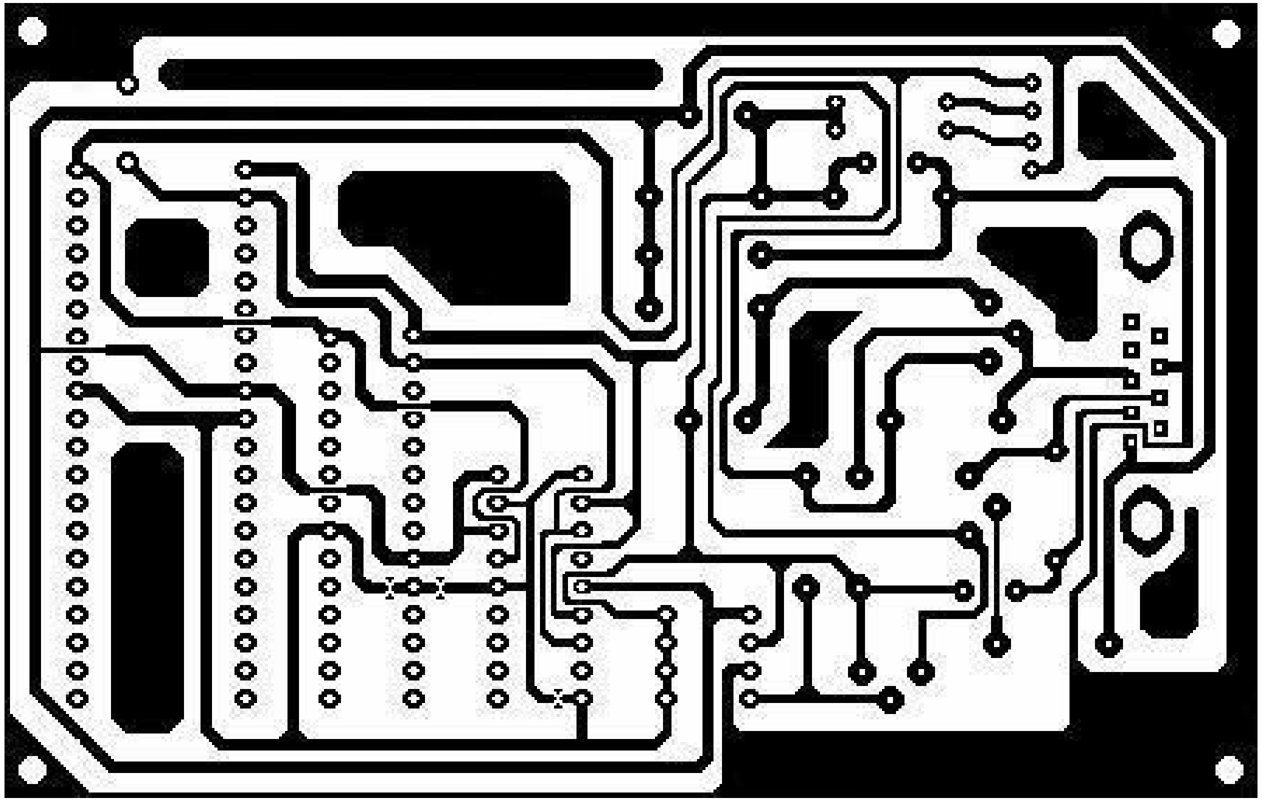
74xxx86



$$f(t,z,y,x) = t \oplus \overline{z\,\overline{yx}}$$


IC2


U1
U2
U3
U4
C1
C2
C3
C4
R1
R2
R3
R4
R5
D1
D2
D3
D4
D5
D6
Q1
Q2
Q3
L1
L2
Conector
DB9

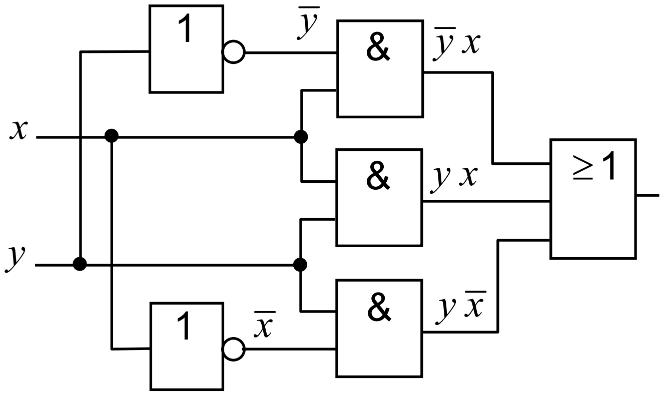


Simplificación de funciones lógicas

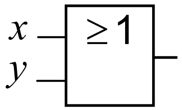
Los motivos por los que conviene utilizar las expresiones más sencillas de las funciones lógicas se resumen en lo siguiente:

- ✓ más sencillo resultará su análisis (entenderla).
- ✓ más fácilmente se podrá operar con ella.
- ✓ más sencillo será el circuito electrónico que cumpla dicha función, lo que implica que:
  - más económico será el circuito.
  - menor será la probabilidad de que se estropee.
  - más sencilla será su reparación.
  - menor será su volumen y su peso.

Ejemplo: los siguientes circuitos implementan la misma función



$$f(y,x)=\overline{y}\,x+y\,\overline{x}+y\,x$$



$$f(y,x)=y+x=\overline{y}\,x+y\,\overline{x}+y\,x$$

Los métodos para simplificar funciones lógicas se pueden clasificar en tres grupos:

_ *Método algebraico* (no)

_ *Métodos gráficos* $\rightarrow$ *Método de Karnaugh-Veitch*

_ *Métodos numéricos, por ejemplo: Método de Quine-McCluskey* (no)

Método algebraico: (no)

- Se basa en utilizar adecuadamente los teoremas y axiomas del álgebra de Boole

- Para poder aplicar este método de forma eficiente es necesario tener un buen conocimiento del álgebra de *Boole*, experiencia, ingenio, etc.

- La utilización de este método no siempre conduce a la expresión más sencilla.

no

Ejemplo:

$$f(c,b,a)=\bar{c}\,\overset{0}{\bar{b}}\,\bar{a}++\bar{c}\,\overset{2}{b}\,\bar{a}+\bar{c}\,\overset{3}{b}\,a+c\,\overset{4}{\bar{b}}\,\bar{a}+c\,\overset{5}{\bar{b}}\,a+c\,\overset{7}{b}\,a=$$

$$=\underbrace{\bar{c}\,\overset{0}{\bar{b}}\,\bar{a}+\bar{c}\,\overset{2}{b}\,\bar{a}}_{\bar{c}\,\bar{a}}+\underbrace{\bar{c}\,\overset{2}{b}\,\bar{a}+\bar{c}\,\overset{3}{b}\,a}_{\bar{c}\,b}+\underbrace{c\,\overset{4}{\bar{b}}\,\bar{a}+c\,\overset{5}{\bar{b}}\,a}_{c\,\bar{b}}+\underbrace{c\,\overset{5}{\bar{b}}\,a+c\,\overset{7}{b}\,a}_{c\,a}=$$

$=\bar{c}\,\bar{a}+\bar{c}\,b+c\,\bar{b}+c\,a$ $\rightarrow$ esta expresión no es la más sencilla y sin embargo no se puede simplificar más.

no

$$f(c,b,a)=\overset{0}{\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}}++\overset{2}{\bar{c}\,b\,\bar{a}}+\overset{3}{\bar{c}\,b\,a}+\overset{4}{c\,\bar{b}\,\bar{a}}+\overset{5}{c\,\bar{b}\,a}+\overset{7}{c\,b\,a}=$$

$$=\underbrace{\overset{0}{\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}}+\overset{4}{c\,\bar{b}\,\bar{a}}}_{\bar{b}\,\bar{a}}+\underbrace{\overset{2}{\bar{c}\,b\,\bar{a}}+\overset{3}{\bar{c}\,b\,a}}_{\bar{c}\,b}+\underbrace{\overset{5}{c\,\bar{b}\,a}+\overset{7}{c\,b\,a}}_{c\,a}=$$

$$=\bar{b}\,\bar{a}+\bar{c}\,b+c\,a \;\rightarrow\; \textit{esta expresión es mínima}$$

$$f(c,b,a)=\overset{0}{\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}}++\overset{2}{\bar{c}\,b\,\bar{a}}+\overset{3}{\bar{c}\,b\,a}+\overset{4}{c\,\bar{b}\,\bar{a}}+\overset{5}{c\,\bar{b}\,a}+\overset{7}{c\,b\,a}=$$

$$=\underbrace{\overset{0}{\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}}+\overset{2}{\bar{c}\,b\,\bar{a}}}_{\bar{c}\,\bar{a}}+\underbrace{\overset{3}{\bar{c}\,b\,a}+\overset{7}{c\,b\,a}}_{b\,a}+\underbrace{\overset{4}{c\,\bar{b}\,\bar{a}}+\overset{5}{c\,\bar{b}\,a}}_{c\,\bar{b}}=$$

$$=\bar{c}\,\bar{a}+b\,a+c\,\bar{b} \;\rightarrow\; \textit{esta expresión es mínima}$$

De los ejemplos anteriores se deduce lo siguiente:

- Aplicando los teoremas y axiomas del Álgebra de Boole se puede obtener una expresión aparentemente irreducible, la cual no es necesariamente la más sencilla.

- En general, no existe una única forma de aplicar los teoremas y axiomas para simplificar una función.

- La expresión más sencilla de una función no siempre es única.

Método de *Karnaugh-Veitch*:

- Es un método gráfico que resulta práctico para simplificar funciones que no dependan de 6 o más variables.

- Para determinar la expresión más sencilla de una función se parte de una expresión canónica de la misma (en forma de *suma de productos* o en forma de *producto de sumas*). La expresión más sencilla que se obtenga será del mismo tipo que la expresión canónica de partida (suma de productos / producto de sumas).

- Este método se basa en las siguientes propiedades:

Nota: en esta asignatura no se estudian los *fenómenos aleatorios*, *riesgos* o *hazards* (*lógicos* y *funcionales*) por falta de tiempo. Al ignorar estos fenómenos, el método de *Karnaugh-Veitch* que se explica en estas diapositivas proporciona la expresión ***más sencilla*** de una función lógica.

1ª propiedad: La suma/producto de dos términos *canónicos adyacentes* siempre se puede reducir a un término *no canónico* en el que desaparece la variable en la que se diferencian ambos términos.

Ejemplos:

$$cba + c\overline{b}a = ca\left(b + \overline{b}\right) = ca$$

$$\left(c + b + a\right)\cdot\left(c + \overline{b} + a\right) = c + a + b\cdot\overline{b} = c + a$$

2ª propiedad: Se puede agrupar un mismo término canónico con dos o más términos canónicos con el fin de simplificar dichos términos.

Ejemplos:

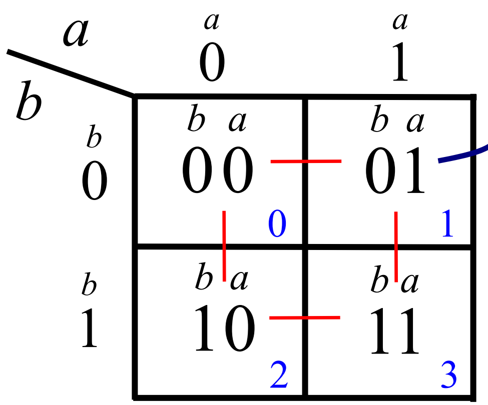
$$\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}+\overline{c}\,\overline{b}\,a+\overline{c}\,b\,a=\underbrace{\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}+\overline{c}\,\overline{b}\,a}_{\overline{c}\,\overline{b}}\;+\;\underbrace{\overline{c}\,\overline{b}\,a+\overline{c}\,b\,a}_{\overline{c}\,a}=\overline{c}\,\overline{b}+\overline{c}\,a$$

$$\left(\overline{c}+\overline{b}+\overline{a}\right)\left(\overline{c}+\overline{b}+a\right)\left(\overline{c}+b+a\right)=\underbrace{\left(\overline{c}+\overline{b}+\overline{a}\right)\left(\overline{c}+\overline{b}+a\right)}_{\overline{c}+\overline{b}}\;\underbrace{\left(\overline{c}+\overline{b}+a\right)\left(\overline{c}+b+a\right)}_{\overline{c}+a}=$$

$$=\left(\overline{c}+\overline{b}\right)\left(\overline{c}+a\right)$$

El método de *Karnaugh-Veitch* utiliza una tabla representar los términos canónicos de los que depende la función a simplificar. Cada casilla de la tabla representa un término canónico distinto. Si se simplifica una expresión canónica en forma de *suma de productos* (canónicos) cada casilla representa un *producto canónico*, y si se simplifica una expresión canónica en forma de *producto de sumas* canónicas, cada casilla representa una *suma canónica*.

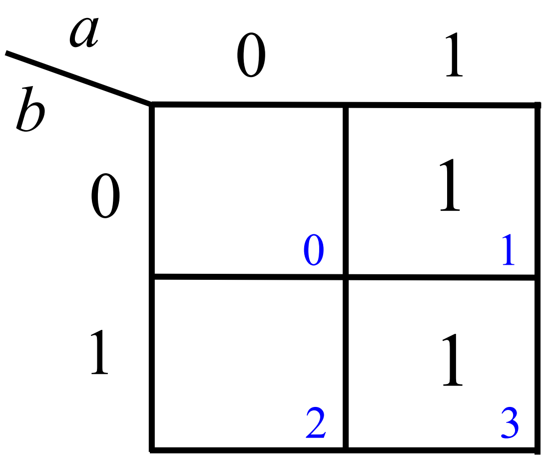
La tabla para simplificar funciones dependientes de 2 variables es la siguiente:



$$\begin{cases} P_1 = \overline{b} \cdot a \\ S_1 = \overline{b} + a \end{cases}$$

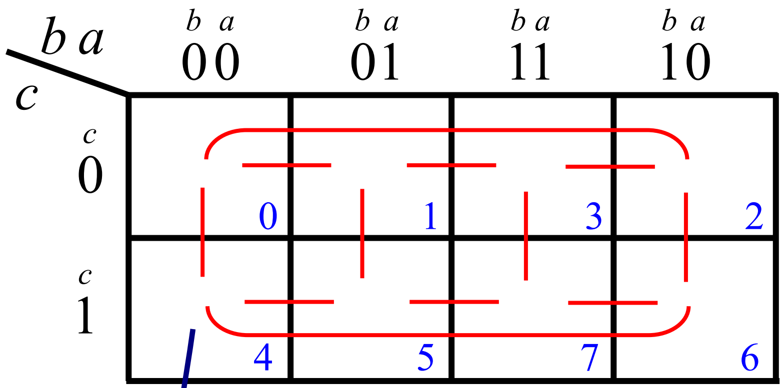
Nota: las líneas de color rojo (—) unen casillas que representan términos canónicos adyacentes

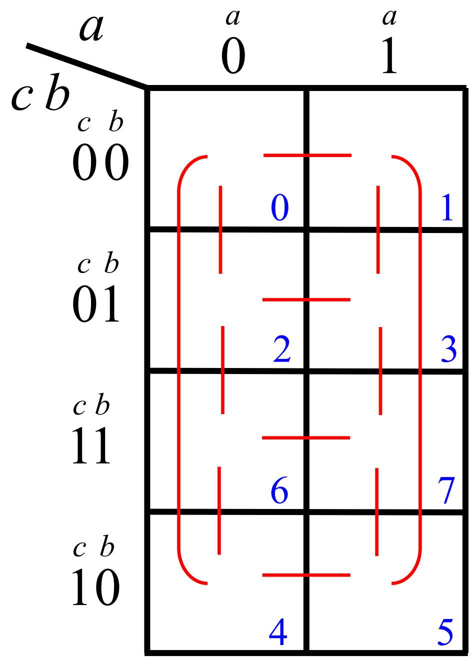
Una vez dibujada la tabla, se pone un 1 en las casillas que representan los términos canónicos de los que depende la función a simplificar. Así, por ejemplo, la tabla cubierta que se utiliza para simplificar la función $f(b,a) = \sum_2(1,3) = P_1 + P_3$ es la siguiente:



Nota: para simplificar la función $g(b,a) = \prod_2(1,3) = S_1 \cdot S_3$ también se utiliza una tabla como la anterior (con 1s en las mismas casillas)

Las tablas que se pueden utilizar para simplificar funciones dependientes de 3 variables se indican a continuación (se puede utilizar cualquiera de las dos):





$$\begin{cases} P_4 = c \cdot \overline{b} \cdot \overline{a} \\ S_4 = c + \overline{b} + \overline{a} \end{cases}$$

Nota: las líneas de color rojo (—) unen casillas que representan términos canónicos adyacentes

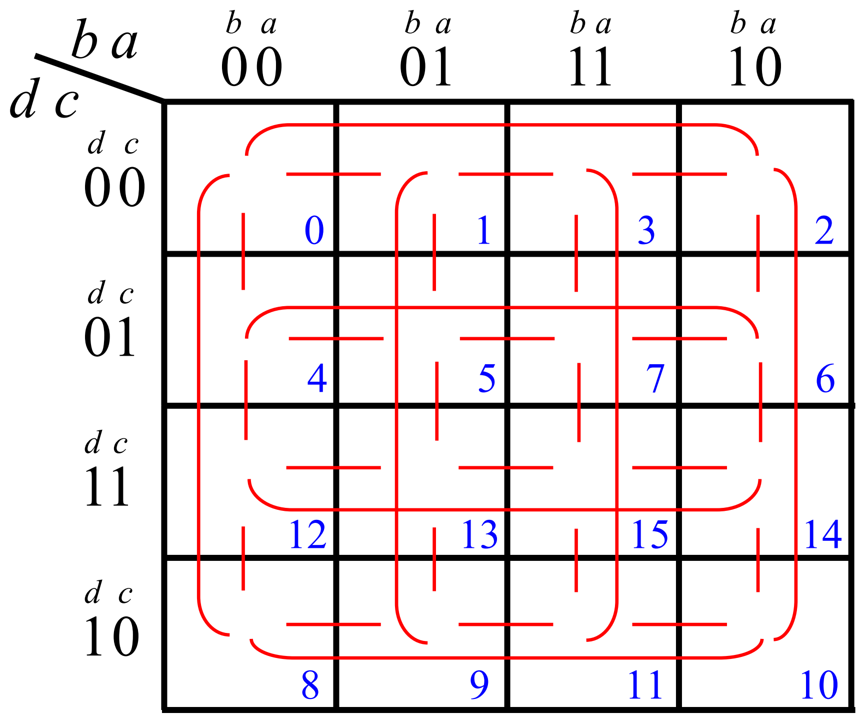
Ejemplo: a continuación se muestran 2 tablas equivalentes, ya cubiertas, para simplificar la siguiente función (se puede utilizar cualquiera de las dos tablas indicadas):

$$f(c,b,a) = \sum\nolimits_2 (0,3,5,6) = P_0 + P_3 + P_5 + P_6$$

c \ $b\,a$	00	01	11	10
0	1 $_0$	$_1$	1 $_3$	$_2$
1	$_4$	1 $_5$	$_7$	1 $_6$

$c\,b$ \ a	0	1
00	1 $_0$	$_1$
01	$_2$	1 $_3$
11	1 $_6$	$_7$
10	$_4$	1 $_5$

La tabla para simplificar funciones dependientes de 4 variables es la siguiente:



Nota: las líneas de color rojo (—) unen casillas que representan términos canónicos adyacentes

Ejemplo: a continuación se muestra la tabla, ya cubierta, para simplificar la función

$$f(d,c,b,a) = \prod\nolimits_4 \left(0,2,5,10,12,15\right)$$

dc \ ba	00	01	11	10
00	1 0	1	3	1 2
01	4	1 5	7	6
11	1 12	13	1 15	14
10	8	9	11	1 10

Nota: para simplificar la función $f(d,c,b,a) = \sum\nolimits_4 \left(0,2,5,10,12,15\right)$ también se utiliza una tabla igual a la anterior (con 1s en las mismas casillas)

El procedimiento sistemático para obtener la expresión *más simple* (sencilla) de una función dependiente de 2, 3 ó 4 variables consta de los siguientes pasos:

1º *paso*: Se parte de una expresión canónica de la función a simplificar (la expresión que se obtenga será del mismo tipo).

2º *paso*: Cada término canónico del que depende la función se representa escribiendo un 1 en la casilla correspondiente. Las casillas correspondientes a términos canónicos de los que no depende la función se dejan en blanco.

Ejemplo: a continuación se muestra la tabla, ya cubierta, para simplificar la función

$$f(d,c,b,a)=\sum\nolimits_{4}\left(0,6,7,12,14,15\right)$$

$dc \backslash ba$	00	01	11	10
00	1 $_{0}$	$_{1}$	$_{3}$	$_{2}$
01	$_{4}$	$_{5}$	1 $_{7}$	1 $_{6}$
11	1 $_{12}$	$_{13}$	1 $_{15}$	1 $_{14}$
10	$_{8}$	$_{9}$	$_{11}$	$_{10}$

3º *paso*: Una vez cubierta la tabla, se agrupan los 1s que haya en la tabla en el siguiente orden:

1º: Se agrupan de forma individual todos los 1s que no se pueden agrupar en grupos de dos 1s adyacentes.

2º: Con los 1s que quedan sin agrupar, se forman grupos de dos 1s (adyacentes) con los 1s que no se pueda formar un grupo de cuatro 1s (adyacentes).

3º: Con los 1s que quedan sin agrupar, se forman grupos de cuatro 1s (adyacentes entre si) con los 1s que no se pueda formar un grupo de ocho 1s (adyacentes).

4º: Con los 1s que quedan sin agrupar, se forman grupos de ocho 1s (adyacentes entre si) con los 1s que no se pueda formar un grupo de dieciséis 1s (adyacentes).

5º: Cuando se hayan agrupado todos los 1s que haya en la tabla, se transcribe cada uno de los grupos realizados en una expresión lógica del mismo tipo que la expresión canónica utilizada (ver el ejemplo de la diapositiva 118).

Notas:

- La expresión más sencilla de una función no siempre es única. Es decir, puede haber más de una forma de agrupar los unos en una tabla de K-V

- Las expresiones más sencillas de una función en forma de *suma de productos* y en forma de *producto de sumas* no siempre son igual de sencillas.

Ejemplo: Simplificación de la función $f(d,c,b,a) = \sum_4 (0,6,7,12,14,15)$ utilizando el método de *Karnaugh – Veitch*:

$dc \backslash ba$	00	01	11	10
00	1 0	1	3	2
01	4	5	1 7	1 6
11	1 12	13	1 15	1 14
10	8	9	11	10

Pregunta: ¿Qué 1 hay que agrupar primero?

Nota: para simplificar la función $g(d,c,b,a) = \prod_4 (0,6,7,12,14,15)$ se utilizaría una tabla igual a la anterior (con 1s en las mismas casillas).

Pregunta: ¿Qué 1 ó 1s hay que agrupar ahora?

$dc \backslash ba$	00	01	11	10
00	$\boxed{1}$ 0	 1	 3	 2
01	 4	 5	1 7	1 6
11	1 12	 13	1 15	1 14
10	 8	 9	 11	 10

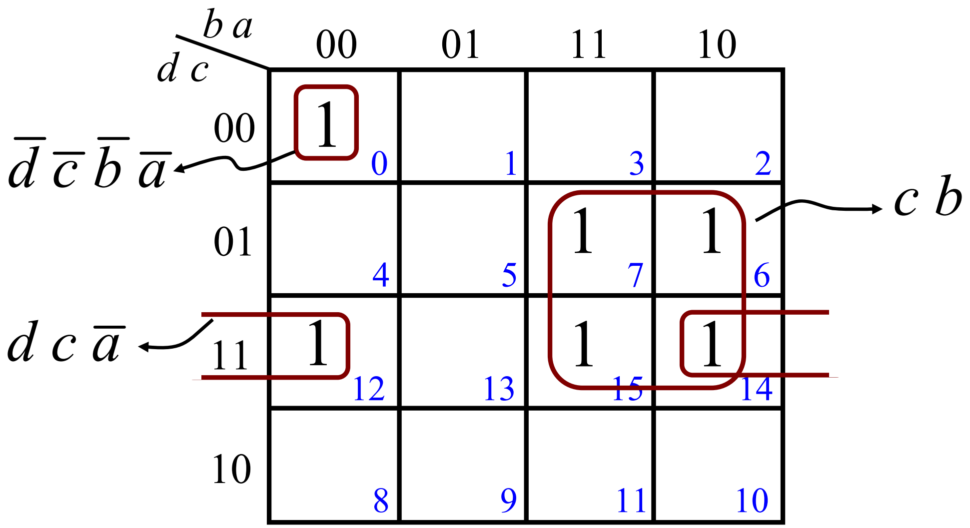
Pregunta: ¿Qué grupo o grupos quedan por realizar?

$dc \backslash ba$	00	01	11	10
00	1 (0)	(1)	(3)	(2)
01	(4)	(5)	1 (7)	1 (6)
11	1 (12)	(13)	1 (15)	1 (14)
10	(8)	(9)	(11)	(10)

$dc \backslash ba$	00	01	11	10
00	1 $_{0}$	$_{1}$	$_{3}$	$_{2}$
01	$_{4}$	$_{5}$	1 $_{7}$	1 $_{6}$
11	1 $_{12}$	$_{13}$	1 $_{15}$	1 $_{14}$
10	$_{8}$	$_{9}$	$_{11}$	$_{10}$

Una vez agrupados todos los 1s que hay en la tabla, hay que transcribir cada grupo realizado en una expresión lógica (del mismo tipo que los términos canónicos de la función utilizada)

Nota: En la práctica, para obtener la expresión más sencilla de una función es necesario simplificar sus dos expresiones canónicas.



La expresión más sencilla de la función: $f(d,c,b,a)=\sum_4(0,6,7,12,14,15)$

es: $f(d,c,b,a)=\overline{d}\,\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}+d\,c\,\overline{a}+c\,b=\sum_4(0,6,7,12,14,15)$

Nota: si se hubiese simplificado la función $g(d,c,b,a)=\prod_4(0,6,7,12,14,15)$

la expresión más sencilla resultaría ser: $g(d,c,b,a)=(\overline{d}+\overline{c}+\overline{b}+\overline{a})(d+c+\overline{a})(c+b)$

¡**Cuidado!** el término canónico que representa cada casilla de una tabla de *Karnaugh-Veitch* depende tanto de dónde se sitúen las variables de las que depende la función a simplificar, como del orden en el que se indiquen. A continuación se muestran, a modo de ejemplo, dos de las posibles tablas (ya cubiertas) para simplificar la función

$$f(\overset{8}{d},\overset{4}{c},\overset{2}{b},\overset{1}{a}) = \sum\nolimits_4 (1,3,8,10,14)$$

$dc \backslash ba$	00	01	11	10
00	(0)	1 (1)	1 (3)	(2)
01	(4)	(5)	(7)	(6)
11	(12)	(13)	(15)	1 (14)
10	1 (8)	(9)	(11)	1 (10)

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00	(0)	(2)	1 (3)	1 (1)
01	1 (8)	1 (10)	(11)	(9)
11	(12)	1 (14)	(15)	(13)
10	(4)	(6)	(7)	(5)

(ver ejemplos de clase de simplificación de funciones)

Ejercicio: simplifica las siguientes funciones

$$f(b,a)=b\overline{a}+ba$$

$$f(c,b,a)=\sum_3(0,2,5,7)=\prod_3(1,3,4,6)$$

$$f(d,c,b,a)=\sum_4(2,3,5,7,10,11,15)=\prod_4(1,2,3,6,7,9,11,14,15)$$

$$f(d,c,b,a)=\sum_4(3,6,7,10,11,14)$$

$$f(d,c,b,a)=\prod_4(3,6,9,10,15)$$

$$f(d,c,b,a)=\sum_4(1,5,9,11)+\sum_\phi(0,2,3,4,8,13)$$

$$f(d,c,b,a)=\prod_4(5,8)\cdot\prod_\phi(2,3,7,10,11,14,15)$$

$$f(d,c,b,a)=\prod_4(2,3,6,9,14,15)\cdot\prod_\phi(0,1,4,5,8,11,12,13)$$

$$f(d,c,b,a)=\sum_4(2,3,6,9,11,14,15)+\sum_\phi(0,1,4,5,8,12,13)$$

$$f(d,c,b,a)=\prod_4(3,6,12,14)\cdot\prod_\phi(0,1,2,4,7,9,11,13,15)$$

$$f(d,c,b,a)=\sum_4(2,4,5,6,7,9,12,13)+\sum_\phi(1,3,10,14)$$