Análise Matemática. Curso 2021-2022.
Grao en Enxenería Informática. ESEI Ourense.
Departamento de Matemáticas. Universidade de Vigo.
Data: 03/11/2021

BLOQUE II

APELIDOS	NOME	DNI	NOTA

1. Considérese a función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

   a) Encontrar os intervalos de crecemento e decrecemento de f.

   Solución: Analizamos o signo da súa derivada

$$f'(x) = \frac{2x\mathrm{e}^{x^2} - (x^2-1)\mathrm{e}^{x^2}2x}{(\mathrm{e}^{x^2})^2} = \frac{2x-(x^2-1)2x}{\mathrm{e}^{x^2}} = \frac{4x-2x^3}{\mathrm{e}^{x^2}}$$

   calculando onde se anula

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 4x - 2x^3 = 0 \Longleftrightarrow 2x(2-x^2) = 0 \Longleftrightarrow x = -\sqrt{2}, x = 0, x = \sqrt{2}.$$

   e substituíndo valores nos intervalos que se forman:

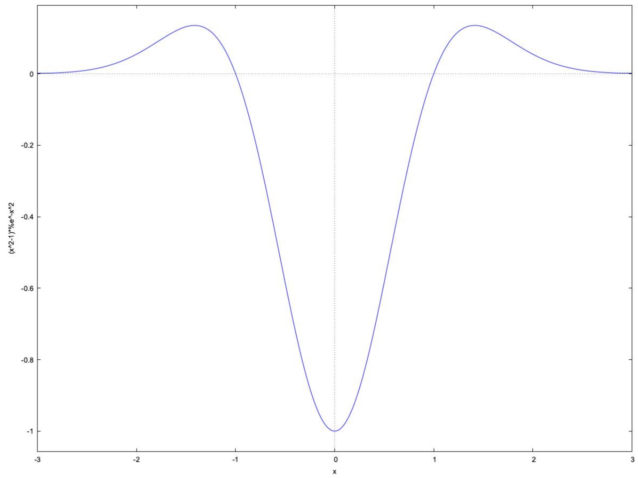
$$f'(-2) > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \Longrightarrow f \textbf{ é crecente en } (-\infty, -\sqrt{2}),$$
$$f'(-1) < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in (-\sqrt{2}, 0) \Longrightarrow f \textbf{ é decrecente en } (-\sqrt{2}, 0),$$
$$f'(1) > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in (0, \sqrt{2}) \Longrightarrow f \textbf{ é crecente en } (0, \sqrt{2}),$$
$$f'(2) < 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in (\sqrt{2}, +\infty,) \Longrightarrow f \textbf{ é decrecente en } (\sqrt{2}, +\infty),$$

   b) Clasificar os extremos relativos de f. Son extremos absolutos?

   Do estudo anterior sobre os intervalos de crecemento e decrecemento podemos concluir que f alcanza máximos relativos en $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$ e un mínimo relativo en $x = 0$.
   Para determinar se o mínimo é absoluto temos que comparar $f(0) = -1$ cos valores

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{\mathrm{e}^{x^2}} \overset{\boxed{\text{“}\frac{0\infty}{\infty}\text{”, L'Hôp.}}}{=}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2x\mathrm{e}^{x^2}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0 > f(0),$$

   e polo tanto f alcanza en $x = 0$ o seu mínimo absoluto.
   Para saber cal é o máximo absoluto temos que comparar $f(-\sqrt{2})$ con $f(\sqrt{2})$, e como $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})$ concluimos que en ambos puntos se alcanza o máximo absoluto de f (Observación: é un máximo absoluto non estricto).



Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

2. *a*) Calcular a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x}{3+3x^2}dx$.

   Solución: Facendo o cambio de variable $u = 1+x^2 \Longrightarrow du = 2xdx$ obtense

$$\int \frac{x}{3+3x^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{6}\ln|u|+c = \frac{1}{6}\ln(1+x^2)+c.$$

   b) Obter a área encerrada entre a gráfica da función $y = \dfrac{x}{3+3x^2}$ o eixe OX e as rectas verticais $x=-2$, $x=2$.

   Solución: Área$=\displaystyle\int_{-2}^{2}\left|\frac{x}{3+3x^2}\right|dx$.

   Para quitar o valor absoluto que aparece dentro da integral temos que estudar o signo da función $f(x) = \dfrac{x}{3+3x^2}$ no intervalo $[-2,2]$:

$$\frac{x}{3+3x^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

$$f(-1) = -\frac{1}{6} < 0 \Longrightarrow f(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in [-2,0),$$

$$f(1) = \frac{1}{6} > 0 \Longrightarrow f(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in (0,2].$$

   Logo,

$$\int_{-2}^{2}\left|\frac{x}{3+3x^2}\right|dx = -\int_{-2}^{0}\frac{x}{3+3x^2}dx + \int_{0}^{2}\frac{x}{3+3x^2}dx =$$

$$= -\left(\frac{1}{6}\ln(1+x^2)\right)\Bigg]_{x=-2}^{x=0} + \left(\frac{1}{6}\ln(1+x^2)\right)\Bigg]_{x=0}^{x=2} =$$

$$= -\left(\frac{1}{6}\ln 1 - \frac{1}{6}\ln 5\right) + \left(\frac{1}{6}\ln 5 - \frac{1}{6}\ln 1\right) = \frac{1}{6}\left(\ln(5)+\ln(5)\right) = \frac{1}{3}\ln(5)\,u^2 \approx 0.536479\,u^2.$$