Ejercicios de la sección 5.1 Espacios vectoriales y subespacios

(Ejercicios para hacer en clase: 1, 4, 7, 10, 12, 14, 16, 19, 21.)
(Ejercicios con solución o indicaciones: 2, 3, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 23.)

►**1.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en $\operatorname{Nul} A$? ¿Está $\mathbf{u}$ en $\operatorname{Col} A$? Justifica tus respuestas.

►**2.** Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla un vector en $\operatorname{Nul} A$ que sea distinto de $\mathbf{0}$ y un vector en $\operatorname{Col} A$ que no sea ninguna columna de A.

►**3.** Supongamos que una matriz A de orden $n \times n$ es inversible. ¿Qué puede decirse acerca de $\operatorname{Col} A$? ¿Y acerca de $\operatorname{Nul} A$?.

►**4.** Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$. Averigua si $\mathbf{w}$ está en el subespacio de $\mathbf{R}^3$ generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

5. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$. Averigua si $\mathbf{u}$ está en el subespacio de $\mathbf{R}^4$ generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

►**6.** Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix}$ y $A = [\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3]$ (la matriz cuyas columnas son $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$).

(a) ¿Cuántos vectores hay en $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$?

(b) ¿Cuántos vectores hay en $\operatorname{Col} A$?

(c) ¿Está $\mathbf{p}$ en $\operatorname{Col} A$? ¿Por qué sí o por qué no?

►**7.** Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$. Averigua si $\mathbf{p}$ está en $\operatorname{Col} A$, donde $A = [\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{v}_3]$.

8. Con A y $\mathbf{p}$ como en el ejercicio 5, averigua si $\mathbf{p}$ está en $\operatorname{Nul} A$.

►**9.** Con $\mathbf{u} = (-5, 5, 3)$ y A como en ejercicio 6, averigua si $\mathbf{u}$ está en $\operatorname{Nul} A$.

En los ejercicios 10 y 11, halla enteros p y q tales que $\operatorname{Nul} A$ sea un subespacio de $\mathbf{R}^p$ y $\operatorname{Col} A$ un subespacio de $\mathbf{R}^q$.

►**10.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -5 \\ -9 & -4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

►**11.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 11 \end{pmatrix}$.

►**12.** Para A como en el ejercicio 10, halla un vector no nulo en $\operatorname{Nul} A$ y un vector no nulo en $\operatorname{Col} A$ que no sea ninguna de las columnas dadas.

►**13.** Para A como en el ejercicio 11, halla un vector no nulo en $\operatorname{Nul} A$ y un vector no nulo en $\operatorname{Col} A$ que no sea ninguna de las columnas dadas.

En los ejercicios 14 y 15 indica para cada enunciado si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

►**14.**

(a) Un subespacio de $\mathbf{R}^n$ es cualquier conjunto H tal que (i) el vector cero está en H, (ii) si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en H, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en H, y (iii) si c es un número y $\mathbf{u}$ está en H, $c\mathbf{u}$ está en H.

(b) El espacio columna de una matriz A es el subespacio imagen de la aplicación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

(c) Si A es una matriz $m \times n$ y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible entonces el espacio columna de A es todo $\mathbf{R}^m$.

(d) El núcleo de una aplicación lineal es un espacio vectorial.

(e) Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ están en $\mathbf{R}^n$, entonces $\operatorname{Gen}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es lo mismo que el espacio columna de la matriz $[\mathbf{v}_1 \;\ldots\; \mathbf{v}_p]$.

(f) El conjunto de todas las soluciones de un sistema de m ecuaciones homogéneas en n incógnitas es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^m$.

►**15.**

(a) Un subconjunto H de $\mathbf{R}^n$ es un subespacio si el vector cero está en H.

(b) El espacio nulo de A es el núcleo de la aplicación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

(c) El espacio columna de una matriz A es el conjunto de todos los vectores de la forma $A\mathbf{x}$ para algún $\mathbf{x}$.

(d) Dados los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ en $\mathbf{R}^n$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$.

(e) El espacio nulo de una matriz $m \times n$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$.

(f) El espacio columna de una matriz A es el conjunto de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

►**16.** Construye una matriz A de orden 3×3 y un vector $\mathbf{b}$ distinto de cero en forma tal que $\mathbf{b}$ esté en $\operatorname{Col} A$, pero $\mathbf{b}$ no sea igual a ninguna de las columnas de A.

►**17.** Construye una matriz A de orden 3×3 y un vector $\mathbf{b}$ tales que $\mathbf{b}$ no esté en $\operatorname{Col} A$.

►**18.** Construye una matriz A de orden 3×3 distinta de cero y un vector $\mathbf{b}$ diferente de cero tales que $\mathbf{b}$ esté en $\operatorname{Nul} A$.

En los ejercicios 19 a 23, responde de la manera más clara que te sea posible y justifica tus respuestas.

►**19.** Supongamos que F es una matriz de orden 5×5 cuyo espacio columna no es igual a $\mathbf{R}^5$. ¿Qué puede decirse acerca del espacio nulo $\operatorname{Nul} F$?

►**20.** Si R es una matriz de orden 6×6 y $\operatorname{Nul} R$ no es igual al subespacio cero, $\operatorname{Nul} R \neq \{\mathbf{0}\}$, ¿qué puede decirse acerca del espacio columna $\operatorname{Col} R$?

►**21.** Si Q es una matriz de orden 4×4 y $\operatorname{Col} Q = \mathbf{R}^4$, ¿qué puede decirse acerca de las soluciones a las ecuaciones de la forma $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^4$.

►**22.** Si P es una matriz de orden 5×5 y $\operatorname{Nul} P$ es igual al subespacio cero, $\operatorname{Nul} P = \{\mathbf{0}\}$, ¿qué puede decirse acerca de las soluciones a las ecuaciones de la forma $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^5$?

►**23.** ¿Qué puede decirse acerca de $\operatorname{Nul} B$ si B es una matriz de orden 5×4 con columnas linealmente independientes?

Versión de 18 de enero de 2023, 18:05h.

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 5.1

2. En $\operatorname{Nul} A$ está el vector $(1,0,0,0)$ y en $\operatorname{Col} A$ el vector $(1,1,0)$ (suma de las columnas 2 y 3 de A).

3. $\operatorname{Col} A$ es todo $\mathbf{R}^n$; $\operatorname{Nul} A$ es igual al subespacio cero, $\operatorname{Nul} A = \{\mathbf{0}\}$.

6. (a) Tres. (b) Infinitos. (c) Sí. Porque $\mathbf{p}$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ ya que una forma escalonada de la matriz $[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3\ \ \mathbf{p}]$ es $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ lo que indica que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$ es compatible.

9. Basta calcular $A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -8 & 8 & 6 \\ 6 & -7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37 \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$. Como el resultado no es el vector cero, $\mathbf{u}$ no está en $\operatorname{Nul} A$.

11. A es 4×3, luego $p = 3$ y $q = 4$.

13. Primero miramos si existe algún vector no nulo en $\operatorname{Nul} A$, lo que ocurirá sólo si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene alguna variable libre. Una forma escalonada de A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y ahí se ve que A tiene una variable libre. Por tanto sí existe algún vector no nulo en $\operatorname{Nul} A$. Sin necesidad de resolver el sistema se ve que en la forma escalonada (denotando $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ a sus columnas) se cumple $\mathbf{a}_3 = (3 - \frac{10}{3})\mathbf{a}_1 + \frac{5}{3}\mathbf{a}_2 = -\frac{1}{3}\mathbf{a}_1 + \frac{5}{3}\mathbf{a}_2$, o sea: $\mathbf{a}_1 - 5\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Por tanto lo mismo se cumple con las columnas de A y un vector no nulo de $\operatorname{Nul} A$ es $(1,-5,3)$.
La segunda parte se puede contestar con cualquier reescalado no trivial de cualquier columna de A (por ejemplo, el doble de la tercera columna, $\mathbf{v} = (6,14,0,22)$) o la suma de dos columnas de A (por ejemplo la suma de las dos primeras: $\mathbf{u} = (3,9,-6,9)$).

15. (a) Esa condición no es suficiente, (b) Es la definición de núcleo, (c) Los vectores de la forma $A\mathbf{x}$ son las combinaciones lineales de las columnas de A, (d) Se demuestra facilmente que cumple las tres condiciones, (e) Es el núcleo de la aplicación lineal $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ definida por la matriz, (f) No son las soluciones, sino los vectores $\mathbf{b}$ para los que hay solución.

17. Basta que las tres columnas de A sean iguales a cualquier vector de $\mathbf{R}^3$ y que $\mathbf{b}$ sea otro vector de $\mathbf{R}^3$ que no sea múltiplo del anterior.

18. Basta que A tenga las dos primeras columnas iguales y $\mathbf{b} = (1,-1,0)$.

20. Que no es igual a $\mathbf{R}^6$.

22. Que son únicas para todo $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^5$ (sistemas compatibles determinados).

23. Que $\operatorname{Nul} B$ es igual al subespacio cero, $\operatorname{Nul} B = \{\mathbf{0}\}$.