Ejercicios de la sección 3.1 Álgebra de matrices

(Ejercicios para hacer en clase: 2, 5, 8, 14, 16, 19, 21, 23, 25, 28, 34.)
(Ejercicios con solución o indicaciones: 1, 6, 7, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 27, 29, 35, 36, 37.)

▶**1.** Dado que los vectores en $\mathbf{R}^n$ pueden ser considerados como matrices $n \times 1$, las propiedades de las traspuestas también se aplican a vectores. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcula $(A\mathbf{x})^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$, y $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$. ¿Está definido el producto $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$?

▶**2.** Sean A una matriz 4×4 y $\mathbf{x}$ un vector en $\mathbf{R}^4$. ¿Cuál es la forma más rápida de calcular $A^2\mathbf{x}$: Haciendo $A(A\mathbf{x})$ o haciendo $(A \cdot A)\mathbf{x}$?. Cuenta las multiplicaciones que hay que hacer en cada caso.

En los ejercicios 3 y 4, sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Calcula cada suma o producto si la matriz está definida. Si alguna expresión no está definida, explica por qué.

3. $-2A$, $B - 2A$, AC, CD.

4. $A + 2B$, $3C - E$, CB, EB.

En el resto de esta serie de ejercicios y en las series que siguen, debe suponerse que cada expresión de matrices está definida. Esto es, los tamaños de las matrices (y de los vectores) involucrados "se corresponden" de manera apropiada.

▶**5.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ calcula $3I_2 - A$ y $(3I_2)A$.

▶**6.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -8 & 7 & -6 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ calcula $A - 5I_3$ y $(5I_3)A$.

En los ejercicios 7 y 8, calcula el producto AB en dos formas: (a) mediante la definición, donde $A\mathbf{b}_1$ y $A\mathbf{b}_2$ se calculan por separado, y (b) mediante la regla fila-por-columna para calcular AB.

▶**7.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

▶**8.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

9. Si una matriz A es de orden 5×3 y el producto AB es de orden 5×7, ¿cuál es el orden de B?

10. ¿Cuántas filas tiene B si BC es una matriz de orden 3×4?.

11. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$. ¿Qué valor(es) de k, si hay, hacen que $AB = BA$?.

12. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Comprueba que $AB = AC$ a pesar de que $B \neq C$.

▶**13.** Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Calcula AD y DA. Explica cómo cambian las filas o columnas de A cuando se multiplica por D a la derecha o a la izquierda. Halla una matriz B de orden 3×3, que no sea la matriz identidad o la matriz cero, tal que $AB = BA$.

▶**14.** Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Construye una matriz B de orden 2×2 tal que AB sea igual a la matriz cero. Las columnas de B no deben ser iguales entre sí y deben ser distintas de cero.

▶**15.** Sean $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_p$ vectores en $\mathbf{R}^n$, y sea Q una matriz de orden $m \times n$. Escribe la matriz $[Q\mathbf{r}_1 \; \ldots \; Q\mathbf{r}_p]$ como un producto de dos matrices sin usar una matriz identidad.

En los ejercicios 16 y 17 indica para cada uno de los enunciados si es verdadero o falso. Justifica tus respuestas.

▶**16.**

(a) Si A y B son matrices de orden 2×2 con columnas $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, respectivamente, entonces $AB = [\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 \;\; \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2]$.

(b) Toda columna de AB es una combinación lineal de las columnas de B usando como coeficientes los elementos de la columna correspondiente de A.

(c) La igualdad $AB + AC = A(B + C)$ se cumple para cualesquiera matrices A, B, C para las que las operaciones indicadas estén definidas.

(d) La igualdad $A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} = (A + B)^{\mathrm{T}}$ se cumple para cualesquiera matrices A, B cuya suma esté definida.

(e) La traspuesta de un producto de matrices es igual al producto de sus traspuestas en el mismo orden.

▶**17.**

(a) Si A y B son matrices 3×3 y $B = [\mathbf{b}_1 \;\; \mathbf{b}_2 \;\; \mathbf{b}_3]$, entonces $AB = [A\mathbf{b}_1 + A\mathbf{b}_2 + A\mathbf{b}_3]$.

(b) La segunda fila de AB es la segunda fila de A multiplicada a la derecha por B.

(c) La igualdad $(AB)C = (AC)B$ se cumple para cualesquiera matrices A, B, C para las que los productos indicados estén definidos.

(d) La igualdad $(AB)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$ se cumple para cualesquiera matrices A y B para las que el producto AB esté definido.

(e) La traspuesta de una suma de matrices es igual a la suma de sus traspuestas en el mismo orden.

18. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$, halla la primera y la segunda columna de B.

▶**19.** Supongamos que las dos primeras columnas de B son iguales. ¿Qué puede decirse acerca de las columnas de AB (suponiendo que este producto está definido)?. ¿Por qué?

▶**20.** Supongamos que la tercera columna de B es la suma de las primeras dos columnas. ¿Qué puede decirse acerca de la tercera columna de AB? ¿Por qué?

Versión de 17 de enero de 2023, 23:44 h.

▶**21.** Supongamos que la segunda columna de B es toda cero. ¿Qué puede decirse acerca de la segunda columna de AB?

▶**22.** Supongamos que la última columna de AB es completamente cero, pero B por sí sola no tiene ninguna columna de ceros. ¿Qué puede decirse acerca de las columnas de A?

▶**23.** Demuestra que si las columnas de B son linealmente dependientes, también lo son las columnas de AB.

▶**24.** Supongamos que $CA = I_n$ (la matriz identidad $n \times n$). Demuestra que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial. Explica por qué A no puede tener más columnas que filas.

▶**25.** Supongamos que $AD = I_m$, (la matriz identidad $m \times m$). Demuestra que para todo $\mathbf{b}$ en $\mathbf{R}^m$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución. [Sugerencia: Piensa en la ecuación $AD\mathbf{b} = \mathbf{b}$.] Explica por qué A no puede tener más filas que columnas.

▶**26.** Supongamos que A es una matriz de orden $m \times n$ y que existen matrices $n \times m$, C y D, tales que $CA = I_n$ y $AD = I_m$. Demuestra que $m = n$ y $C = D$. [Sugerencia: Piensa en el producto CAD).]

▶**27.** Supongamos que A es una matriz de orden $3 \times n$ cuyas columnas generan $\mathbf{R}^3$. Explica cómo construir una matriz D de orden $n \times 3$ tal que $AD = I_3$.

En los ejercicios 28 y 29, considera los vectores en $\mathbf{R}^n$ como matrices $n \times 1$. Para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbf{R}^n$, el producto de matrices $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ es una matriz 1×1, llamada *producto escalar*, o *producto interno*, de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Por lo general, se escribe como un único número real sin paréntesis o corchetes. El producto de matrices $\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ es una matriz de orden $n \times n$, llamada *producto exterior* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

▶**28.** Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Calcula $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$.

▶**29.** Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbf{R}^n$, ¿qué relación hay entre $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$? ¿Y entre $\mathbf{u}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ y $\mathbf{v}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$?

30. Demuestra que $I_m A = A$ cuando A es una matriz de orden $m \times n$. Puedes utilizar el hecho de que $I_m\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^m$.

31. Demuestra que $AI_n = A$ cuando A es una matriz de orden $m \times n$. [Sugerencia: Usa la definición (de columnas) del producto de matrices AI_n.]

32. Halla una fórmula para $(AB\mathbf{x})^{\mathrm{T}}$, donde $\mathbf{x}$ es un vector y A y B son matrices con los tamaños apropiados.

33. Dada la matriz $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcula S^k para $k = 2, \ldots, 6$.

Los ejercicios 34 a 37 demuestran casos especiales de las propiedades de las matrices elementales. Aquí A es una matriz 3×3 e $I = I_3$.

▶**34.** Usa la ecuación $\mathsf{fila}_i(AB) = \mathsf{fila}_i(A) \cdot B$ para demostrar que para $i = 1, 2, 3$,

$$\mathsf{fila}_i(A) = \mathsf{fila}_i(I) \cdot A.$$

▶**35.** Demuestra que si las filas 1 y 2 de A se intercambian, entonces el resultado es igual a EA, donde E es la matriz elemental obtenida al intercambiar las filas 1 y 2 de I.

▶**36.** Demuestra que si la fila 3 de A se multiplica por 5, entonces el resultado es igual a EA, donde E es la matriz elemental obtenida al multiplicar la fila 3 de I por 5.

▶**37.** Demuestra que si la fila 3 de A es reemplazada por $\mathsf{fila}_3(A) - 4\,\mathsf{fila}_1(A)$, el resultado es igual a EA, donde E es la matriz elemental obtenida a partir de I al reemplazar la fila 3 de I por $\mathsf{fila}_3(I) - 4\,\mathsf{fila}_1(I)$.

38. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/6 & 0'5 & 1/3 \\ 0'5 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 5/12 \end{pmatrix}$, describe con palabras qué pasa al calcular A^5, A^{10}, A^{20} y A^{30}.
(*Para hacer con* Mathematica *en una práctica de ordenador.*)

Pistas y soluciones de ejercicios seleccionados de la sección 3.1

1. $(A\mathbf{x})^{\mathrm{T}} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 25 + 9 = 34$. El producto $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ no está definido porque el número de columnas de A^{T} (dos) no es igual al número de filas de $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ (una).

6. $A - 5I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -8 & 2 & -6 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (restar 5 de cada elemento de la diagonal de A);
$(5I_3)A = 5(I_3A) = 5A = \begin{pmatrix} 45 & -5 & 15 \\ -40 & 35 & -30 \\ -20 & 5 & 40 \end{pmatrix}$.

7. (a)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \left[3\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad -2\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 7 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3+2(-2) & (-1)\cdot(-2)+2\cdot 1 \\ 5\cdot 3+4(-2) & 5\cdot(-2)+4\cdot 1 \\ 2\cdot 3-3(-2) & 2(-2)-3\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 7 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

13. $AD = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 15 \\ 2 & 12 & 25 \end{pmatrix}$, $DA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 20 & 25 \end{pmatrix}$. Una matriz diagonal, multiplicada por la derecha de otra reescala las columnas y multiplicada por la izquierda de otra reescala las filas. Por lo anterior, una posible B que conmute con A (y con cualquier matriz 3×3) es cualquier matriz diagonal con todos los elementos diagonales iguales (cualquier múltiplo de la identidad). Por ejemplo $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

15. $[Q\mathbf{r}_1 \ \dots \ Q\mathbf{r}_p] = Q[\mathbf{r}_1 \ \dots \ \mathbf{r}_p]$.

17. (a) Debería decir $AB = [A\mathbf{b}_1 \ \ A\mathbf{b}_2 \ \ A\mathbf{b}_3]$, (b) Esto es la regla "fila por columna", (c) No en general. Sólo se cumpliría si B y C conmutan, (d) Debería decir $(AB^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})$, (e) El orden es irrelevante para la suma.

20. Es igual a la suma de las dos primeras columnas de AB debido a la propiedad de linealidad del producto matriz por vector. Si las tres primeras columnas de B son $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ entonces las tres primeras columnas de AB son $A\mathbf{b}_1$, $A\mathbf{b}_2$ y $A(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = A\mathbf{b}_1 + A\mathbf{b}_2$.

22. Si la última columna de B es $\mathbf{b}_n$ y es distinta de cero, y si la última columna de AB es cero, tenemos $A\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$, lo cual, por ser $\mathbf{b}_n \neq \mathbf{0}$, es una relación de dependencia lineal entre las columnas de A. Luego las columnas de A son linealmente dependientes.

24. Para cualquier solución $\mathbf{x}$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se cumple $\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = CA\mathbf{x} = C\mathbf{0} = 0$. Esto demuetra que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es determinado y por tanto no tiene variables libres, o sea, A tiene un pivote en cada columna. Como esos pivotes están en distintas filas, A no puede tener menos filas que columnas.

26. $D = I_nD = CAD = CI_m = C$.

27. Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ las columnas de I_3. Son vectores de $\mathbf{R}^3$ y como las columnas de A generan $\mathbf{R}^3$, los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_3$ son compatibles. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ sendas soluciones de los tres sistemas. La matriz $D = [\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3]$ verifica $AD = I_3$.

29. La respuesta a las dos preguntas se basa en dos propiedades: primera: la propiedad del producto de matrices que dice que la traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas en el orden contrario y segunda: la propiedad de la traspuesta que dice que hacer la traspuesta de la traspuesta da la misma matriz. De ello se deducen las relaciones $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \left((\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\right)^{\mathrm{T}}$ y $\mathbf{u}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \left((\mathbf{u}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{v}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$. Pero además, en el primer caso los resultados son matrices 1×1 y toda matriz 1×1 es igual a su traspuesta por lo que $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$.

35. Sea A' la matriz obtenida al intercambiar las filas 1 y 2 de A. Hay que demostrar que $A' = EA$, es decir, que para todos los valores de i se cumple $\mathsf{fila}_i(A') = \mathsf{fila}_i(EA)$. Empezamos con $i = 1$. Sabemos que $\mathsf{fila}_1(E) = \mathsf{fila}_2(I)$, por tanto:
$\mathsf{fila}_1(A') = \mathsf{fila}_2(A) = \mathsf{fila}_2(I) \cdot A = \mathsf{fila}_1(E) \cdot A = \mathsf{fila}_1(EA)$
Si $i = 2$ podemos usar $\mathsf{fila}_2(E) = \mathsf{fila}_1(I)$ para deducir:
$\mathsf{fila}_2(A') = \mathsf{fila}_1(A) = \mathsf{fila}_1(I) \cdot A = \mathsf{fila}_2(E) \cdot A = \mathsf{fila}_2(EA)$.
Finalmente, si $i = 3$:
$\mathsf{fila}_3(A') = \mathsf{fila}_3(A) = \mathsf{fila}_3(I) \cdot A = \mathsf{fila}_3(E) \cdot A = \mathsf{fila}_3(EA)$.

36. Sea A' la matriz obtenida al multiplicar la fila 3 de A por 5. Hay que demostrar que $A' = EA$, es decir, que para todos los valores de i se cumple $\mathsf{fila}_i(A') = \mathsf{fila}_i(EA)$. Si $i = 1$ o $i = 2$ entonces $\mathsf{fila}_i(E) = \mathsf{fila}_i(I)$, por tanto:
$\mathsf{fila}_i(A') = \mathsf{fila}_i(A) = \mathsf{fila}_i(I) \cdot A = \mathsf{fila}_i(E) \cdot A = \mathsf{fila}_i(EA)$
Si $i = 3$ podemos usar $\mathsf{fila}_3(E) = 5\,\mathsf{fila}_3(I)$ para deducir:
$\mathsf{fila}_3(A') = 5\,\mathsf{fila}_3(A) = 5\,\mathsf{fila}_3(I) \cdot A = \mathsf{fila}_3(E) \cdot A = \mathsf{fila}_3(EA)$.

37. Sea A' la matriz obtenida al realizar la operación de reemplazo indicada sobre A de forma que $\mathsf{fila}_3(A') = \mathsf{fila}_3(A) - 4\,\mathsf{fila}_1(A)$. Hay que demostrar que $A' = EA$, es decir, que para todos los valores de i se cumple $\mathsf{fila}_i(A') = \mathsf{fila}_i(EA)$. Si $i = 1$ o $i = 2$ entonces $\mathsf{fila}_i(E) = \mathsf{fila}_i(I)$, por tanto en esos casos:
$\mathsf{fila}_i(A') = \mathsf{fila}_i(A) = \mathsf{fila}_i(I) \cdot A = \mathsf{fila}_i(E) \cdot A = \mathsf{fila}_i(EA)$.
Sólo queda el caso $i = 3$, para el cual $\mathsf{fila}_3(E) = \mathsf{fila}_3(I) - 4\,\mathsf{fila}_1(I)$. Usando esto podemos deducir:
$\mathsf{fila}_3(A') = \mathsf{fila}_3(A) - 4\,\mathsf{fila}_1(A) = \mathsf{fila}_3(I) \cdot A - 4\,\mathsf{fila}_1(I) \cdot A = \left(\mathsf{fila}_3(I) - 4\,\mathsf{fila}_1(I)\right) \cdot A = \mathsf{fila}_3(E) \cdot A = \mathsf{fila}_3(EA)$.