Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

PARCIAL 1

25 de febrero de 2019, 10:00 a 11:00h – Aula Magna

Pregunta 1

(3 pt.)

Considera la matriz: $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 9 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

(1 pt.) (a) Demuestra que es posible hallar una forma escalonada de B realizando únicamente cinco operaciones elementales de reemplazo de filas, e indica claramente cuáles son esas operaciones y en qué orden hay que realizarlas.

(1 pt.) (b) Suponiendo que B es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, ¿es ese sistema compatible?. En caso afirmativo halla la solución general del sistema y escríbela en forma paramétrica vectorial.

(1 pt.) (c) ¿Existe la factorización LU de B? En caso afirmativo, halla la correspondiente matriz L.

Solución:

(c) Si existe factorización LU, la matriz L tendrá la forma $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ -2 & & & 1 \end{pmatrix}$.

Para saber si la factorización LU de A existe, intentamos reducir A a forma escalonada usando solamente operaciones de reemplazo progresivas:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+3F_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hemos podido, por tanto: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b)

$$\det B = (-3)\det\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 & -5 \\ -4 & 9 & -3 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (-3)\det\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (-3)\times 2\times \det\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -6\ \det\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -6\ \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{6}.$$

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 2

(4 pt.)

Dados $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\-2\\-3\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$:

(1 pt.) (a) ¿Qué condición tienen que cumplir los cuatro números x_1, x_2, x_3, x_4 para que el vector $\mathbf{x}$ sea combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

(1 pt.) (b) Explica razonadamente si el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es libre o ligado.

(1 pt.) (c) Halla los coeficientes de una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ que sea igual a $\mathbf{b}$.

(1 pt.) (d) Halla las ecuaciones cartesianas del subespacio de $\mathbf{R}^4$ generado por los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, y $\mathbf{v}_3$ (Gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$).

Solución:

(a) Como H está definido como el subespacio generado por $\mathcal{B}$, este conjunto ya cumple la primera condión para se una base de H (generar H). La segunda condición es que los vectores dados sean linealmente independientes. Para demostrarlo buscamos las columnas pivote de la matriz formada por esos vectores reduciendo esa matriz a forma escalonada:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & -2\\0 & 2 & -3\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_2]{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Incluso sin terminar de obtener una forma escalonada se ve que hay tres pivotes, tantos como columnas y por tanto los vectores dados son independientes.

(b) El vector $\mathbf{b}$ pertenece a H si y sólo si el sistema $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible, en cuyo caso la solución es el vector de coordenadas de $\mathbf{b}$. Primero ponemos la matriz ampliada en forma escalonada:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & 1\\0 & 2 & -3 & 3\\0 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_2]{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - 2F_3} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Todos los pivotes estean en las columnas de coeficientes, luego el sistema es compatible y $\mathbf{b}$ pertenece a H. Completamos el cálculo de la forma escalonada reducida para hallar las coordenadas:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 - 3F_3]{F_2 + 2F_3} \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + 2F_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\0 & 1 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Luego el vector de coordenadas de $\mathbf{b}$ es: $[\mathbf{b}]_{\mathcal{B}} = (5, 3, 1)$.

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 3

(3 pt.)

Sea H el subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$ definido por las siguientes ecuaciones cartesianas:

$$H: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ \quad\;\; x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{cases}$$

(0.5 pt.) (a) Escribe en forma matricial ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) el sistema de ecuaciones lineales que define a H.

(1 pt.) (b) Halla una base del espacio columna, Col A, de la matriz de coeficientes del apartado anterior.

(1.5 pt.) (c) Halla una base de H.

Solución:

(a) Las bases se hallan resolviendo los sistemas homogéneos:

Para H: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Por tanto: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

luego una base de H es: $\mathcal{B}_H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Para K: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, luego una base de K es:

$$\mathcal{B}_K = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Para que pertenezca a H y a K tiene que cumplir las ecuaciones de H y las de K, por tanto basta hallar una solución particular no nula del sistema formado por las tres ecuaciones. Sin embargo, se puede dar una respuesta más rápida porque es evidente que la ecuación de K es la diferencia de las ecuaciones de H, lo que implica que todo vector de H está en K. Luego cualquier vector de H pertenece a ambos subespacios, por ejemplo

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$