1. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

Найдите

а) $\mathbb{P}(\{X=-1\})$

б) $\mathbb{P}(\{Y=-1\})$

в) $\mathbb{P}(\{X=-1\} \cap \{Y=-1\})$

г) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

д) $F_{X,Y}(-1,0)$

е) Таблицу распределения случайной величины X

ж) Функцию $F_X(x)$ распределения случайной величины X.

з) Постройте график функции $F_X(x)$ распределения случайной величины X.

2. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.2	0.1	0.2

Найдите

а) $\mathbb{P}(X=1)$,

б) $\mathbb{P}(\{Y=1\})$,

в) $\mathbb{P}(\{X=1\} \cap \{Y=1\})$

г) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

д) $F_{X,Y}$(1,0)

е) Таблицу распределения случайной величины Y

ж) Функцию $F_Y(y)$ распределения случайной величины Y

з) Постройте график функции $F_Y(y)$ распределения случайной величины Y.

3. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

Найдите

а) $\mathrm{E}(X)$,
б) $\mathrm{E}(X^2)$,
в) $D(X)$,
г) $\mathrm{E}(Y)$,
д) $\mathrm{E}(Y^2)$,
е) $D(Y)$,
ж) $\mathrm{E}(XY)$,
з) $\mathrm{Cov}(X, Y)$
и) $\mathrm{Corr}(X, Y)$
к) Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

4. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.2	0.1	0.2

Найдите

а) $\mathrm{E}(X)$,
б) $\mathrm{E}(X^2)$,
в) $D(X)$,
г) $\mathrm{E}(Y)$,
д) $\mathrm{E}(Y^2)$,
е) $D(Y)$,
ж) $\mathrm{E}(XY)$,
з) $\mathrm{Cov}(X, Y)$
и) $\mathrm{Corr}(X, Y)$
к) Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

5. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

Найдите

а) $\mathbb{P}(\{X=-1\}|\{Y=0\})$

б) $\mathbb{P}(\{Y=0\}|\{X=-1\})$

в) таблицу условного распределения случайной величины Y при условии $\{X=-1\}$

г) условное математическое ожидание случайной величины Y при $\{X=-1\}$

д) условную дисперсию случайной величины Y при условии $\{X=-1\}$

6. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.2	0.1	0.2

Найдите

а) $\mathbb{P}(\{X=1\}|\{Y=0\})$

б) $\mathbb{P}(\{Y=0\}|\{X=1\})$

в) таблицу условного распределения случайной величины Y при условии $\{X=1\}$

г) условное математическое ожидание случайной величины Y при $\{X=1\}$

д) условную дисперсию случайной величины Y при условии $\{X=1\}$

7. Пусть $\mathrm{E}(X)=1$, $\mathrm{E}(Y)=2$, $D(X)=3$, $D(Y)=4$, $\mathrm{Cov}(X,Y)=-1$. Найдите

а) $\mathrm{E}(2X+Y-4)$

б) $D(3Y+3)$

в) $D(X-Y)$

г) $D(2X-3Y+1)$

д) $\mathrm{Cov}(X+2Y+1, 3X-Y-1)$

е) $\mathrm{Corr}(X+Y, X-Y)$

ж) Ковариационную матрицу случайного вектора $Z=(X \quad Y)$

8. Пусть $\mathrm{E}(X)=-1$, $\mathrm{E}(Y)=2$, $D(X)=1$, $D(Y)=2$, $\mathrm{Cov}(X,Y)=1$. Найдите

а) $\mathrm{E}(2X+Y-4)$

б) $D(2Y+3)$

в) $D(X-Y)$

г) $D(2X-3Y+1)$

д) $\mathrm{Cov}(3X+Y+1, X-2Y-1)$

е) $\mathrm{Corr}(X+Y, X-Y)$

ж) Ковариационную матрицу случайного вектора $Z=(X \quad Y)$

9. Пусть случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение.

Найдите

а) $\mathbb{P}(\{0 < X < 1\})$

б) $\mathbb{P}(\{X > 2\})$

в) $\mathbb{P}(\{0 < 1 - 2X \leq 1\})$

10. Пусть случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение.

    Найдите

    а) $\mathbb{P}(\{-1 < X < 1\})$

    б) $\mathbb{P}(\{X < -2\})$

    в) $\mathbb{P}(\{-2 < -X + 1 \leq 0\})$

11. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$. Найдите $\mathbb{P}(\{1 < X < 4\})$

12. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}(2, 4)$. Найдите $\mathbb{P}(\{-2 < X < 4\})$

13. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальное распределение, $\mathrm{E}(X) = 0$, $D(X) = 1$, $\mathrm{E}(Y) = 2$, $D(Y) = 6$. Найдите $\mathbb{P}(\{1 < X + 2Y < 7\})$.

14. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальное распределение, $\mathrm{E}(X) = 0$, $D(X) = 1$, $\mathrm{E}(Y) = 3$, $D(Y) = 7$. Найдите $\mathbb{P}(\{1 < 3X + Y < 7\})$.

15. Игральная кость подбрасывается 420 раз. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что суммарное число очков будет находиться в пределах от 1400 до 1505?

16. При выстреле по мишени стрелок попадает в десятку с вероятностью 0.5, в девятку – 0.3, в восьмерку – 0.1, в семерку – 0.05, в шестерку – 0.05. Стрелок сделал 100 выстрелов. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что он набрал не менее 900 очков?

17. Предположим, что на станцию скорой помощи поступают вызовы, число которых распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 73$, и в разные сутки их количество не зависит друг от друга. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что в течение года (365 дней) общее число вызовов будет в пределах от 26500 до 26800.

18. Число посетителей магазина (в день) имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием 289. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что за 100 рабочих дней суммарное число посетителей составит от 28550 до 29250 человек.

19. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{при } (x, y) \in [0; 1] \times [0; 1] \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin [0; 1] \times [0; 1] \end{cases}$$

    Найдите

    а) $\mathbb{P}(\{X \leq \frac{1}{2}\} \cap \{Y \leq \frac{1}{2}\})$,

    б) $\mathbb{P}(\{X \leq Y\})$,

в) $f_X(x)$,

г) $f_Y(y)$,

д) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

20. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathbb{P}(\{X \leq \frac{1}{2}\} \cap \{Y \leq \frac{1}{2}\})$,

б) $\mathbb{P}(\{X \leq Y\})$,

в) $f_X(x)$,

г) $f_Y(y)$,

д) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

21. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathrm{E}(X)$,

б) $\mathrm{E}(Y)$,

в) $\mathrm{E}(XY)$,

г) $\mathrm{Cov}(X, Y)$,

д) $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

22. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathrm{E}(X)$,

б) $\mathrm{E}(Y)$,

в) $\mathrm{E}(XY)$,

г) $\mathrm{Cov}(X, Y)$,

д) $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

23. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $f_y(y)$,

б) $f_{X|Y}\left(X|\frac{1}{2}\right)$

в) $\mathrm{E}\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

г) $D\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

24. Пусть плотность распределения случайного вектора (X,Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $f_y(y)$,

б) $f_{X|Y}\left(X|\frac{1}{2}\right)$

в) $\mathrm{E}\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

г) $D\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

Ответы

1. а) 0.5

   б) 0.3

   в) 0.2

   г) нет

   д) 0.3

   е)

X	-1	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.5	0.5

   ж) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1 \\ 0.5, & \text{при } x \in [-1;1) \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$

2. а) 0.5

   б) 0.4

   в) 0.2

   г) да

   д) 0.6

е)

Y	-1	0	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.4	0.2	0.4

ж) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y < -1 \\ 0.4, & \text{при } y \in [-1; 0) \\ 0.6, & \text{при } y \in [0; 1) \\ 1, & \text{при } y > 1 \end{cases}$

3. а) 0
   б) 1
   в) 1
   г) 0
   д) 0.6
   е) 0.6
   ж) 0
   з) 0
   и) 0
   к) да, являются некоррелированными, но нельзя утверждать, что являются независимыми

4. а) 0
   б) 1
   в) 1
   г) 0
   д) 0.8
   е) 0.8
   ж) 0
   з) 0
   и) 0
   к) да, являются некоррелированными, но нельзя утверждать, что являются независимыми

5. а) 0.25
   б) 0.2
   в)

$Y \mid \{X = -1\}$	-1	0	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.4	0.2	0.4

   г) 0
   д) 0.8

6. а) 0.5
   б) 0.2

в)

$Y \mid \{X=1\}$	-1	0	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.4	0.2	0.4

г) 0

д) 0.8

7. а) 0

   б) 36

   в) 9

   г) 60

   д) -4

   е) $\frac{-1}{3\sqrt{5}}$

   ж) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

8. а) -4

   б) 8

   в) 1

   г) 10

   д) -6

   е) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$

   ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

9. а) 0.3413

   б) 0.0228

   в) 0.1915

10. а) 0.6826

    б) 0.0228

    в) 0.4987

11. 0.4332

12. 0.1815

13. 0.4514

14. 0.383

15. 0.0558

16. 0.5517

17. 0.0359

18. 0.1586

19. а) 0.125

 б) 0.5

 в) $f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$

 г) $f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$

 д) нет

20. а) $\frac{1}{16}$

 б) $\frac{1}{2}$

 в) $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$

 г) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$

 д) да

21. а) $\frac{7}{12}$

 б) $\frac{7}{12}$

 в) $\frac{1}{3}$

 г) $-\frac{1}{144}$

 д) $-\frac{1}{11}$

22. а) $\frac{2}{3}$

 б) $\frac{2}{3}$

 в) $\frac{4}{9}$

 г) 0

 д) 0

23. а) $f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$

 б) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$

 в) $\frac{7}{12}$

 г) $\frac{11}{144}$

24. а) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$

б) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$

в) $\frac{2}{3}$

г) $\frac{1}{18}$