Задача 5. Пусть случайные величины X и Y означают время безотказной работы рулевого управления и двигателя автомобиля соответственно. Время измеряется в годах. Совместная плотность распределения случайных величин X и Y имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0.005\,e^{-0.05x-0.1y} & \text{при } x>0 \text{ и } y>0,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

(a) Найдите частные плотности распределения случайных величин X и Y.

(b) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

(c) Найдите вероятность того, то двигатель прослужит без сбоев более пяти лет, т. е. требуется найти вероятность $\mathbb{P}(\{Y>5\})$.

(d) Найдите вероятность того, что двигатель прослужит без сбоев более восьми лет, если известно, что он уже проработал без сбоев три года, т. е. требуется найти вероятность $\mathbb{P}(\{Y>8\}\,|\,\{Y\geq 3\})$.

(e) Найдите условное математическое ожидание безотказной работы рулевого управления, если известно, что двигатель проработал без сбоев пять лет, т. е. требуется найти условное математическое ожидание $\mathbb{E}[X\,|\,Y=5]$.

(f) Найдите вероятность того, что рулевое управление проработает без сбоев на два года больше двигателя, т. е. требуется найти вероятность $\mathbb{P}(\{X-Y>2\})$.

Решение. (a) Сначала найдем плотность распределения случайной величины X.

Пусть $x\leq 0$; тогда $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{=0}dy=0$;

пусть $x>0$; тогда

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^{+\infty}0.005\,e^{-0.05x-0.1y}\,dy=$$

$$=0.005\,e^{-0.05x}\int_0^{+\infty}e^{-0.1y}\,dy=0.005\,e^{-0.05x}\cdot\left(-10\,e^{-0.1y}\right)\Big|_{y=0}^{y=+\infty}=0.05\,e^{-0.05x}.$$

Таким образом, имеем:

$$f_X(x)=\begin{cases}0.05\,e^{-0.05x} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x\leq 0,\end{cases}$$

т. е. $X\sim\mathrm{Exp}(\lambda=0.05)$ — случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda=0.05$.

Теперь найдем плотность распределения случайной величины Y.

Пусть $y\leq 0$; тогда $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{=0}dx=0$;

пусть $y>0$; тогда

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_0^{+\infty}0.005\,e^{-0.05x-0.1y}\,dx=$$

$$=0.005\,e^{-0.1y}\int_0^{+\infty}e^{-0.05x}\,dx=0.005\,e^{-0.1y}\cdot\left(-20\,e^{-0.05x}\right)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=0.1e^{-0.1y}.$$

Таким образом, имеем:

$$f_Y(y)=\begin{cases}0.1e^{-0.1y} & \text{при } y>0,\\ 0 & \text{при } y\leq 0.\end{cases}$$

т. е. $Y\sim\mathrm{Exp}(\lambda=0.1)$ — случайная величина Y имеет показательное распределение с параметром $\lambda=0.1$.

(b) Поскольку для любых точек $x,y\in\mathbb{R}$ справедливо равенство $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$, случайные величины X и Y являются независимыми.

(c) Найдем вероятность $\mathbb{P}(\{Y>5\})$:

$$\mathbb{P}(\{Y>5\}) = \int_5^{+\infty} f_Y(y)\,dy = \int_5^{+\infty} 0.1e^{-0.1y}\,dy = 0.1\cdot\left(-10\,e^{-0.1x}\right)\Big|_{y=5}^{y=+\infty} = e^{-0.5} \approx 0.6065\,.$$

(d) Требуется найти условную вероятность $\mathbb{P}(\{Y>8\}\,|\,\{Y\geq 3\})$. Для этого предварительно найдем вероятности $\mathbb{P}(\{Y>8\})$ и $\mathbb{P}(\{Y\geq 3\})$:

$$\mathbb{P}(\{Y>8\}) = \int_8^{+\infty} f_Y(y)\,dy = \int_8^{+\infty} 0.1e^{-0.1y}\,dy = 0.1\cdot\left(-10\,e^{-0.1x}\right)\Big|_{y=8}^{y=+\infty} = e^{-0.8}\,,$$

$$\mathbb{P}(\{Y\geq 3\}) = \int_3^{+\infty} f_Y(y)\,dy = \int_3^{+\infty} 0.1e^{-0.1y}\,dy = 0.1\cdot\left(-10\,e^{-0.1x}\right)\Big|_{y=3}^{y=+\infty} = e^{-0.3}\,.$$

Теперь находим требуемую условную вероятность:

$$\mathbb{P}(\{Y>8\}\,|\,\{Y\geq 3\}) = \frac{\mathbb{P}(\{Y>8\}\bigcap\{Y\geq 3\})}{\mathbb{P}(\{Y\geq 3\})} = \frac{\mathbb{P}(\{Y>8\})}{\mathbb{P}(\{Y\geq 3\})} =$$

$$= \frac{e^{-0.8}}{e^{-0.3}} = e^{-0.5} = \mathbb{P}(\{Y>5\}) \approx 0.6065\,.$$

(e) Сначала найдем условную плотность распределения случайной величины X при условии $\{Y=y\}$:

$$f_{X|Y}(x\,|\,y) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{при } f_Y(y)>0, \\ 0 & \text{при } f_Y(y)>0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{0.005\,e^{-0.05x-0.1y}}{0.1e^{-0.1y}} & \text{при } x>0 \text{ и } y>0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0.05\,e^{-0.05x} & \text{при } x>0 \text{ и } y>0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} f_X(x) & \text{при } y>0, \\ 0 & \text{при } y\leq 0. \end{cases}$$

Теперь находим искомое условное математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[X\,|\,Y=5] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x\,|\,5)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \mathbb{E}[X] = \tfrac{1}{0.05} = 20\,.$$

Здесь мы воспользовались известным фактом, что если $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, то $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$.

(f) Требуется найти вероятность $\mathbb{P}(\{X-Y>2\})$. Для этого введем множества

$$B := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<x-2\} \quad \text{и} \quad C := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<x-2,\, x>0,\, y>0\}\,.$$

Заметим, что вероятность $\mathbb{P}(\{X-Y>2\})$ может быть записана в виде

$$\mathbb{P}(\{X-Y>2\}) = \mathbb{P}(\{(X,Y)\in B\}) = \iint_B f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \iint_C f_{X,Y}(x,y)\,dxdy\,.$$

Стало быть, искомая вероятность

$$\mathbb{P}(\{X-Y>2\}) = \iint_C f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int_2^{+\infty}\left[\int_0^{x-2} f_{X,Y}(x,y)\,dy\right]dx =$$

$$= \int_2^{+\infty}\left[\int_0^{x-2} 0.005\,e^{-0.05x-0.1y}\,dy\right]dx = \int_2^{+\infty}\left[0.005\,e^{-0.05x}\cdot\left(-10\,e^{-0.1y}\right)\Big|_{y=0}^{y=x-2}\right]dx =$$

$$= \int_2^{+\infty}\left[0.05\,e^{-0.05x}\cdot\left(1-e^{-0.1(x-2)}\right)\right]dx =$$

$$= \int_2^{+\infty} 0.05\,e^{-0.05x}\,dx - \int_2^{+\infty} 0.05\,e^{-0.05x-0.1x+0.2}\,dx =$$

$$= 0.05\cdot\left(-\tfrac{1}{0.05}\,e^{-0.05x}\right)\Big|_{x=2}^{x=+\infty} - e^{0.02}\cdot 0.05\cdot\left(-\tfrac{1}{0.15}\,e^{-0.15x}\right)\Big|_{x=2}^{x=+\infty} =$$

$$= e^{-0.1} - \tfrac{1}{3}e^{-0.1} = \tfrac{2}{3}e^{-0.1} \approx 0.6032\,. \quad \square$$