Задача 6. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения
$$f_X(x) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} .$$

(a) Убедитесь в том, что функция $f_X(x)$, действительно, является плотностью.

(b) Найдите $\mathbb{E}[X]$.

(c) Найдите $\mathbb{E}[X^2]$.

(d) Найдите $\mathrm{D}(X)$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся хорошо известными соотношениями:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu^2 + \sigma^2 .$$

(a) Указанная выше функция f_X является плотностью распределения, т. к. она удовлетворяет двум условиям: 1) f_X является неотрицательной, 2) интеграл от функции f_X в переделах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\, dx}_{=1} + \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}\, dx}_{=1} = 1 .$$

(b) $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\, dx}_{=1} + \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}\, dx}_{=-1} = 0 .$

(c) $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\, dx}_{=1^2+1^2} + \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}\, dx}_{=(-1)^2+1^2} = 2 .$

(d) $\mathrm{D}(X) = \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}X]^2 = 2 - 0^2 = 2 .$ □