1. Задачный минимум

1. Рост в сантиметрах (случайная величина X) и вес в килограммах (случайная величина Y) взрослого мужчины является нормальным случайным вектором $Z = (X, Y)$ с математическим ожиданием $\mathrm{E}[Z] = (175, 74)$ и ковариационной матрицей

$$\mathrm{Var}(Z) = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$$

Лишний вес характеризуется случайной величиной $U = X - Y$. Считается, что человек страдает избыточным весом, если $U < 90$.

   а) Определите вероятность того, что рост мужчины отклоняется от среднего более, чем на 10 см.

   б) Укажите распределение случайной величины U. Выпишите её плотность распределения.

   в) Найдите вероятность того, что случайно выбранный мужчина страдает избыточным весом.

2. Рост в сантиметрах, случайная величина X, и вес в килограммах, случайная величина Y, взрослого мужчины является нормальным случайным вектором $Z = (X, Y)$ с математическим ожиданием $\mathrm{E}[Z] = (175, 74)$ и ковариационной матрицей

$$\mathrm{Var}(Z) = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$$

   а) Найдите средний вес мужчины при условии, что его рост составляет 170 см.

   б) Выпишите условную плотность распределения веса мужчины при условии, что его рост составляет 170 см.

   в) Найдите условную вероятность того, что человек будет иметь вес, больший 90 кг, при условии, что его рост составляет 170 см.

3. Для реализации случайной выборки $x = (1, 0, -1, 1)$ найдите:

   а) выборочное среднее,

   б) неисправленную выборочную дисперсию,

   в) исправленную выборочную дисперсию,

   г) выборочный второй начальный момент,

   д) выборочный третий центральный момент,

4. Для реализации случайной выборки $x = (1, 0, -1, 1)$ найдите:

   а) вариационный ряд,

   б) первый член вариационного ряда,

   в) последний член вариационного ряда,

   г) график выборочной функции распределения.

5. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из дискретного распределения, заданного с помощью таблицы

x	-3	0	2
$\mathbb{P}(X_i = x)$	$2/3 - \theta$	$1/3$	θ

Рассмотрите оценку $\hat{\theta} = \dfrac{\bar{X} + 2}{5}$.

а) Найдите $\mathrm{E}[\hat{\theta}]$.

б) Является ли оценка $\hat{\theta}$ несмещенной оценкой неизвестного параметра θ?

6. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{6x(\theta - x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения и $\hat{\theta} = \bar{X}$.

а) Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ несмещенной оценкой неизвестного параметра θ?

б) Подберите константу c так, чтобы оценка $\tilde{\theta} = cX$ оказалась несмещенной оценкой неизвестного параметра θ.

7. Пусть $X = (X_1, X_2, X_3)$ — случайная выборка из распределения Бернулли с неизвестным параметром $p \in (0, 1)$. Какие из следующих ниже оценкой являются несмещенными? Среди перечисленных ниже оценок найдите наиболее эффективную оценку:

- $\hat{p}_1 = \dfrac{X_1 + X_3}{2}$,
- $\hat{p}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3$,
- $\hat{p}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$.

8. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n + 1}$ состоятельной?

9. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{6x(\theta - x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения. Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \frac{2n+1}{n}\bar{X}_n$ состоятельной оценкой неизвестного параметра θ?

10. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{6x(\theta - x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения. Используя центральный момент 2-го порядка, при помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра θ.

11. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

x	-3	0	2
$\mathbb{P}(X_i = x)$	$2/3 - \theta$	$1/3$	θ

Используя второй начальный момент, при помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра θ. Для реализации случайной выборки $x = (0, 0, -3, 0, 2)$ найдите числовое значение найденной оценки параметра θ.

12. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}\, e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ.

13. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $\mathbb{P} \in (0; 1)$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра $\mathbb{P}$.

14. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ эффективной?

15. Стоимость выборочного исследования генеральной совокупности, состоящей из трех страт, определяется по формуле $TC = c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3$, где c_i — цена одного наблюдения в i-ой страте, а n_i — число наблюдений, которые приходятся на i-ую страту. Найдите n_1, n_2 и n_3, при которых дисперсия стратифицированного среднего достигает наименьшего значения, если бюджет исследования 8000 и имеется следующая информация:

Страта	1	2	3
Среднее значение	30	40	50
Стандартная ошибка	5	10	20
Вес	25%	25%	50%
Цена наблюдения	1	5	10

Ответы:

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.