1. Теоретический минимум

1. Сформулируйте определение независимости событий, формулу полной вероятности.
2. Приведите определение условной вероятности случайного события, формулу Байеса.
3. Сформулируйте определение и свойства функции распределения случайной величины.
4. Сформулируйте определение и свойства функции плотности случайной величины.
5. Сформулируйте определение и свойства математического ожидания для абсолютно непрерывной случайной величины.
6. Сформулируйте определение и свойства математического ожидания для дискретной случайной величины.
7. Сформулируйте определение и свойства дисперсии случайной величины.
8. Сформулируйте определения следующих законов распределений: биномиального, Пуассона, шеометрического, равномерного, экспоненциального, нормального. Укажите математическое ожидание и дисперсию.
9. Сформулируйте определение функции совместного распределения двух случайных величин, независимости случайных величин. Укажите, как связаны совместное распределение и частные распределения компонент случайного вектора.
10. Сформулируйте определение и свойства совместной функции плотности двух случайных величин, сформулируйте определение независимости случайных величин.
11. Сформулируйте определение и свойства ковариации случайных величин.
12. Сформулируйте определение и свойства корреляции случайных величин.
13. Сформулируйте определение и свойства условной функции плотности.
14. Сформулируйте определение условного математического ожидания $\mathrm{E}(Y|X = x)$ для совместного дискретного и совместного абсолютно непрерывного распределений.
15. Сформулируйте определение математического ожидания и ковариационной матрицы случайного вектора и их свойства.
16. Сформулируйте неравенство Чебышёва и неравенство Маркова.
17. Сформулируйте закон больших чисел в слабой форме.
18. Сформулируйте центральную предельную теорему.
19. Сформулируйте теорему Муавра—Лапласа.
20. Сформулируйте определение сходимости по вероятности для последовательности случайных величин.

2. Задачный минимум

1. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

Найдите

а) $\mathbb{P}(X = -1)$

б) $\mathbb{P}(Y = -1)$

в) $\mathbb{P}(X = -1 \cap Y = -1)$

г) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

д) $F_{X,Y}(-1, 0)$

е) Таблицу распределения случайной величины X

ж) Функцию $F_X(x)$ распределения случайной величины X.

з) Постройте график функции $F_X(x)$ распределения случайной величины X.

2. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.2	0.1	0.2

Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 1)$,

б) $\mathbb{P}(Y = 1)$,

в) $\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1)$

г) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

д) $F_{X,Y}(1, 0)$

е) Таблицу распределения случайной величины Y

ж) Функцию $F_Y(y)$ распределения случайной величины Y

з) Постройте график функции $F_Y(y)$ распределения случайной величины Y.

3. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

Найдите

а) $\mathrm{E}(X)$,

б) $\mathrm{E}(X^2)$,

в) $\mathrm{Var}(X)$,

г) $\mathrm{E}(Y)$,

д) $\mathrm{E}(Y^2)$,

е) $\mathrm{Var}(Y)$,

ж) $\mathrm{E}(XY)$,

з) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

и) $\mathrm{Corr}(X, Y)$

к) Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

4. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.2	0.1	0.2

Найдите

а) $\mathrm{E}(X)$,

б) $\mathrm{E}(X^2)$,

в) $\mathrm{Var}(X)$,

г) $\mathrm{E}(Y)$,

д) $\mathrm{E}(Y^2)$,

е) $\mathrm{Var}(Y)$,

ж) $\mathrm{E}(XY)$,

з) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

и) $\mathrm{Corr}(X, Y)$

к) Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

5. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

Найдите

а) $\mathbb{P}(X = -1|Y = 0)$

б) $\mathbb{P}(Y = 0|X = -1)$

в) таблицу условного распределения случайной величины Y при условии $X = -1$

г) условное математическое ожидание случайной величины Y при $X = -1$

д) условную дисперсию случайной величины Y при условии $X = -1$

6. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.2	0.1	0.2

Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 1|Y = 0)$

б) $\mathbb{P}(Y = 0|X = 1)$

в) таблицу условного распределения случайной величины Y при условии $X = 1$

г) условное математическое ожидание случайной величины Y при $X = 1$

д) условную дисперсию случайной величины Y при условии $X = 1$

7. Пусть $\mathrm{E}(X) = 1$, $\mathrm{E}(Y) = 2$, $\mathrm{Var}(X) = 3$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$. Найдите

а) $\mathrm{E}(2X + Y - 4)$

б) $\mathrm{Var}(3Y + 3)$

в) $\mathrm{Var}(X - Y)$

г) $\mathrm{Var}(2X - 3Y + 1)$

д) $\mathrm{Cov}(X + 2Y + 1, 3X - Y - 1)$

е) $\mathrm{Corr}(X + Y, X - Y)$

ж) Ковариационную матрицу случайного вектора $Z = (X \quad Y)$

8. Пусть $\mathrm{E}(X) = -1$, $\mathrm{E}(Y) = 2$, $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 2$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$. Найдите

а) $\mathrm{E}(2X + Y - 4)$

б) $\mathrm{Var}(2Y + 3)$

в) $\mathrm{Var}(X - Y)$

г) $\mathrm{Var}(2X - 3Y + 1)$

д) $\mathrm{Cov}(3X + Y + 1, X - 2Y - 1)$

е) $\mathrm{Corr}(X + Y, X - Y)$

ж) Ковариационную матрицу случайного вектора $Z = (X \quad Y)$

9. Пусть случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение.

Найдите

а) $\mathbb{P}(0 < X < 1)$

б) $\mathbb{P}(X > 2)$

в) $\mathbb{P}(0 < 1 - 2X \leq 1)$

10. Пусть случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение.

    Найдите

    а) $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$

    б) $\mathbb{P}(X < -2)$

    в) $\mathbb{P}(-2 < -X + 1 \leq 0)$

11. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$. Найдите $\mathbb{P}(1 < X < 4)$

12. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}(2, 4)$. Найдите $\mathbb{P}(-2 < X < 4)$

13. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальное распределение, $\mathrm{E}(X) = 0, \mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{E}(Y) = 2$, $\mathrm{Var}(Y) = 6$. Найдите $\mathbb{P}(1 < X + 2Y < 7)$.

14. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальное распределение, $\mathrm{E}(X) = 0, \mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{E}(Y) = 3$, $\mathrm{Var}(Y) = 7$. Найдите $\mathbb{P}(1 < 3X + Y < 7)$.

15. Игральная кость подбрасывается 420 раз. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что суммарное число очков будет находиться в пределах от 1400 до 1505?

16. При выстреле по мишени стрелок попадает в десятку с вероятностью 0.5, в девятку – 0.3, в восьмерку – 0.1, в семерку – 0.05, в шестерку – 0.05. Стрелок сделал 100 выстрелов. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что он набрал не менее 900 очков?

17. Предположим, что на станцию скорой помощи поступают вызовы, число которых распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 73$, и в разные сутки их количество не зависит друг от друга. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что в течение года (365 дней) общее число вызовов будет в пределах от 26500 до 26800.

18. Число посетителей магазина (в день) имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием 289. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что за 100 рабочих дней суммарное число посетителей составит от 28550 до 29250 человек.

19. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{при } (x, y) \in [0; 1] \times [0; 1] \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin [0; 1] \times [0; 1] \end{cases}$$

    Найдите

    а) $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2} \cap Y \leq \frac{1}{2})$,

    б) $\mathbb{P}(X \leq Y)$,

в) $f_X(x)$,
г) $f_Y(y)$,
д) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

20. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2} \cap Y \leq \frac{1}{2})$,
б) $\mathbb{P}(X \leq Y)$,
в) $f_X(x)$,
г) $f_Y(y)$,
д) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

21. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathrm{E}(X)$,
б) $\mathrm{E}(Y)$,
в) $\mathrm{E}(XY)$,
г) $\mathrm{Cov}(X, Y)$,
д) $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

22. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathrm{E}(X)$,
б) $\mathrm{E}(Y)$,
в) $\mathrm{E}(XY)$,
г) $\mathrm{Cov}(X, Y)$,
д) $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

23. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $f_Y(y)$,

б) $f_{X|Y}\left(x|\frac{1}{2}\right)$

в) $\mathrm{E}\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

г) $\mathrm{Var}\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

24. Пусть плотность распределения случайного вектора (X,Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $f_Y(y)$,

б) $f_{X|Y}\left(x|\frac{1}{2}\right)$

в) $\mathrm{E}\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

г) $\mathrm{Var}\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

Ответы

1. а) 0.5

б) 0.3

в) 0.2

г) нет

д) 0.3

е)

X	-1	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.5	0.5

ж) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1 \\ 0.5, & \text{при } x \in [-1;1) \\ 1, & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$

2. а) 0.5

б) 0.4

в) 0.2

г) да

д) 0.6

е)

Y	-1	0	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.4	0.2	0.4

ж) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y < -1 \\ 0.4, & \text{при } y \in [-1; 0) \\ 0.6, & \text{при } y \in [0; 1) \\ 1, & \text{при } y \geq 1 \end{cases}$

3. а) 0
   б) 1
   в) 1
   г) 0
   д) 0.6
   е) 0.6
   ж) 0
   з) 0
   и) 0
   к) да, являются некоррелированными, но нельзя утверждать, что являются независимыми
4. а) 0
   б) 1
   в) 1
   г) 0
   д) 0.8
   е) 0.8
   ж) 0
   з) 0
   и) 0
   к) да, являются некоррелированными, но нельзя утверждать, что являются независимыми
5. а) 0.25
   б) 0.2
   в)

$Y \mid \{X = -1\}$	-1	0	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.4	0.2	0.4

   г) 0
   д) 0.8
6. а) 0.5
   б) 0.2

в)

$Y \mid \{X=1\}$	-1	0	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.4	0.2	0.4

г) 0

д) 0.8

7. а) 0
   б) 36
   в) 9
   г) 60
   д) -4
   е) $\frac{-1}{3\sqrt{5}}$
   ж) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
8. а) -4
   б) 8
   в) 1
   г) 10
   д) -6
   е) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$
   ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
9. а) 0.3413
   б) 0.0228
   в) 0.1915
10. а) 0.6826
    б) 0.0228
    в) 0.1573
11. 0.4332
12. 0.8185
13. 0.4514
14. 0.5328
15. 0.8185
16. 0.9115
17. 0.637

18. 0.9596

19. а) 0.125

    б) 0.5

    в) $f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$

    г) $f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$

    д) нет

20. а) $\frac{1}{16}$

    б) $\frac{1}{2}$

    в) $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$

    г) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$

    д) да

21. а) $\frac{7}{12}$

    б) $\frac{7}{12}$

    в) $\frac{1}{3}$

    г) $-\frac{1}{144}$

    д) $-\frac{1}{11}$

22. а) $\frac{2}{3}$

    б) $\frac{2}{3}$

    в) $\frac{4}{9}$

    г) 0

    д) 0

23. а) $f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$

    б) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$

    в) $\frac{7}{12}$

    г) $\frac{11}{144}$

24. а) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$

б) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$

в) $\frac{2}{3}$

г) $\frac{1}{18}$