Метод на Гаус-Жордан за намиране на обратна матрица. Матрични уравнения

Метод на Гаус-Жордан за намиране на обратна матрица

Нека A е обратима матрица (квадратна, $\det A \neq 0$). Нека разгледаме по-подробно случая, когато A е от 2-ри ред (за по-високи редове разсъжденията са аналогични). Търсим обратната матрица A^{-1} на A, където

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}.$$

Трябва да намерим неизвестните елементи x, y, z, t на A^{-1} от условието

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Достатъчно е да решим едното от двете условия, $AA^{-1} = E$.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & az+bt \\ cx+dy & cz+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откъдето за x, y и за z, t получаваме следните две системи

$$\left| \begin{aligned} ax+by&=1 \\ cx+dy&=0, \end{aligned} \right. \qquad \left| \begin{aligned} az+bt&=0 \\ cz+dt&=1. \end{aligned} \right.$$

Двете системи имат еднаква основна матрица, която е A, и се различават само по стълбовете от свободните си членове. Освен това и двете системи са определени (трябва да имат единствено решение). Тогава двете системи могат да бъдат решени чрез метода на Гаус-Жордан. Освен това могат за бъдат решени съвместно заради еднаквата основна матрица, тъй като елементарните действия, които трябва да бъдат извършени, ще бъдат едни и същи (последователността на извършваните елементарни действия се ръководи от елементите на основната матрица, както видяхме).

За решаването на двете системи можем да запишем общата им разширена матрица

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) = (A|E)$$

и да извършваме елементарни действия само върху нейните редове. Целта на метода на Гаус-Жордан е чрез тези елементарни действия основната матрица на системата, т.е. A да бъде превърната в единичната матрица E. Тогава стълбовете от свободните членове ще се превърнат в стълбове, съдържащи единствените решения за (x, y) и (z, t) на двете системи, които решаваме съвместно, т.е. ще се превърнат в елементите на обратната матрица A^{-1}.

Така **методът на Гаус-Жордан за намиране на обратна матрица** на дадена матрица A се състои в извършването на елементарни действия по редовете на $(A|E)$, така че A да се превърне в E. Тогава на мястото на E ще се появи търсената обратна матрица A^{-1}

$$(A|E) \sim ... \sim (E|A^{-1}).$$

Чрез метода на Гаус-Жордан намерете обратната матрица на

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$
(A|E) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \quad \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-3) \\ + \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \end{array}
$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ | \cdot (-1/2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right) = (E|A^{-1}).$$

Следователно

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрични уравнения

Уравнения от вида

$$AX = B, \qquad XA = B, \tag{12.4}$$

където матриците A и B са дадени, а матрицата X е неизвестна, се наричат *матрични уравнения.*

Ако A е неособена квадратна матрица от тип $(n \times n)$ $(\det A \neq 0)$, а B е матрица от тип $(n \times s)$ за първото уравнение на (12.4) и от тип $(s \times n)$ - за второто уравнение на (12.4), то и за двете уравнения X е матрица от същия тип като B и се получава съответно чрез

$$X = A^{-1}B, \qquad X = BA^{-1}.$$

Ако матрицата A не е квадратна или $\det A = 0$, то A^{-1} не съществува. В такива случаи, за да се реши матричното уравнение (12.4), първо се извършва матричното умножение (съответно

AX или XA) и след сравняване на матриците от двете страни на уравнението се решава получената система.

Пример 13.2. Да се решат матричните уравнения

$$1) \qquad AX = B, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$2) \qquad XA = B, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1) За матрицата A е изпълнено $\det A = -2 \neq 0$, следователно съществува A^{-1} и тя има вида

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогава X получаваме като умножим двете страни на уравнението с A^{-1} отляво, т. е.

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Първо установяваме, че $\det A = 0$. Тъй като A е матрица от тип (2×2), а B - от тип (3×2), то и X трябва да е от тип (3×2). Следователно матрицата X се състои от шест елемента

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{pmatrix},$$

където x_i, $i = 1, 2, ..., 6$, са неизвестни. Извършваме умножението XA, както следва

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_4 & 2x_1 + 4x_4 \\ x_2 + 2x_5 & 2x_2 + 4x_5 \\ x_3 + 2x_6 & 2x_3 + 4x_6 \end{pmatrix}$$

и сравняваме получената матрица с B. Така достигаме до следната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_5 = 3 \\ 2x_2 + 4x_5 = 6 \\ x_3 + 2x_6 = 2 \\ 2x_3 + 4x_6 = 4. \end{array} \right.$$

Първите две, вторите две и третите две уравнения са линейно зависими помежду си. Следователно системата се свежда до следната система три уравнения и шест неизвестни:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_5 = 3 \\ x_3 + 2x_6 = 2. \end{array} \right.$$

Ако изберем $x_4 = p$, $x_5 = q$ и $x_6 = s$ за параметри, получаваме $x_1 = 1 - 2p$, $x_2 = 3 - 2q$ и $x_3 = 2 - 2s$. По този начин намерихме

$$X = \begin{pmatrix} 1 - 2p & p \\ 3 - 2q & q \\ 2 - 2s & s \end{pmatrix}, \quad p, q, s \in \mathbb{R}.$$