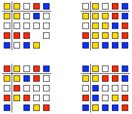
GREYC

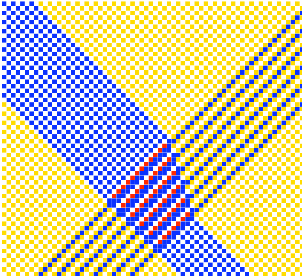
Équipe AmacC, Thème 1 :
Modèles de calcul et complexité descriptive

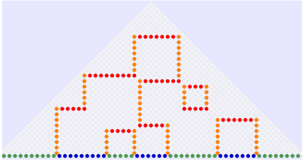
10 novembre 2015

Thème 1 : Modèles de calcul et complexité descriptive

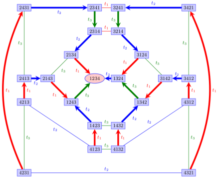
- Algorithmique et complexité des automates cellulaires
- « Tight Complexity » – algorithmes probabilistes
- Logique et requêtes
- Approches algébriques et symboliques







$$\forall \vec{x}\, \forall t \bigwedge_{a\in\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^d} \bigwedge_{\nu\in\mathbf{neighbor}_a(\mathcal{A})} \left\{ \left(\neg \max(t) \wedge P_a(\vec{x}) \wedge \bigwedge_{b\in\mathbf{Dom}_a} R_{\nu(b)}(\vec{x}+b, t)\right) \rightarrow R_{\delta_a(\nu)}(\vec{x}, t+1) \right\}$$

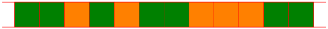


Les Automates Cellulaires

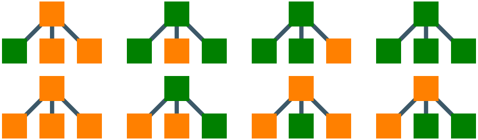
Un objet central et transversal du thème “Modèles de calcul et complexité descriptive"

Un système dynamique discret, synchrone et uniforme

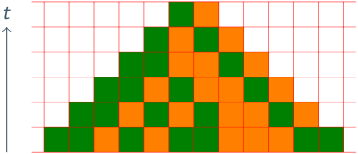
Une configuration :



La fonction locale de transition :



Évolution du système :



Les automates cellulaires
un modèle aux multiples facettes et usages

GREYC AMACC

Un Modèle pour les Systèmes Dynamiques : Modélise de nombreux Systèmes/Phénomènes à Interactions Locales : physiques, biologiques, chimiques, géologiques, économiques, etc.

Un Modèle de Calcul : Le Modèle par excellence du calcul Local et Massivement Parallèle

Bien d'autres aspects encore, connus... ou à découvrir...

Le seul modèle à la fois local et uniforme

C'est ce qu'exprime, dans un sens mathématique très précis, le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon (1969) :

Theorem

Pour toute dimension $d = 1, 2, 3, \ldots$ et tout alphabet Σ, toute fonction $G : c \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \mapsto c' \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ sur les configurations infinies de dimension d est

- **invariante par décalage** *(c'est-à-dire, intuitivement,* **uniforme***)*
- *et* **continue** *(c'est-à-dire, intuitivement,* **locale***)*

si et seulement si
G est (la fonction globale d')un **automate cellulaire***.*

C'est pourquoi tout système discret (i.e. à espace et temps discrets), obéissant à des règles d'évolution

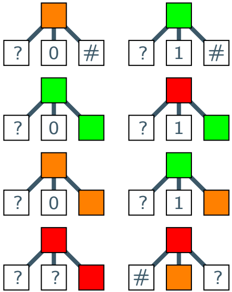
- synchrones,
- uniformes
- et locales

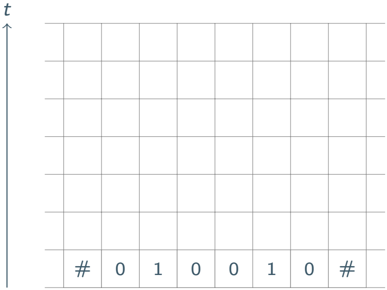
est (se modélise par) un automate cellulaire.

Un modèle de calcul et un système dynamique

Voici un automate cellulaire reconnaissant le langage $L = 0^*10^*$.

$Q = \{0, 1, \#, \textit{green}, \textit{orange}, \textit{red}\}$





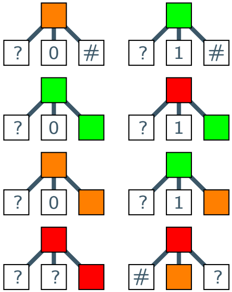
Axes de recherche :

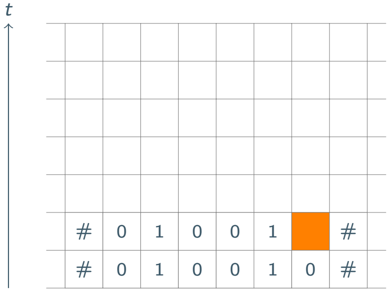
- Construire des algorithmes spécifiques et étudier les classes de complexité (N. Bacquey, G. Richard, V. Terrier) : voir soutenance de thèse N. Bacquey le 4 décembre ;
- Caractériser par la logique les langages reconnus (E. Grandjean, G. Richard) ;
- Exhiber des comportements « atypiques » des automates cellulaires considérés comme des systèmes dynamiques (G. Richard).

Un modèle de calcul et un système dynamique

Voici un automate cellulaire reconnaissant le langage $L = 0^*10^*$.

$Q = \{0, 1, \#, \textit{green}, \textit{orange}, \textit{red}\}$





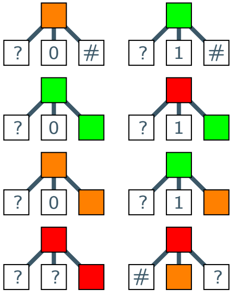
Axes de recherche :

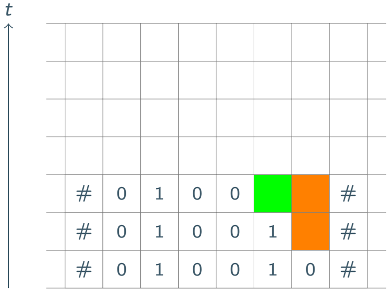
- Construire des algorithmes spécifiques et étudier les classes de complexité (N. Bacquey, G. Richard, V. Terrier) : voir soutenance de thèse N. Bacquey le 4 décembre ;
- Caractériser par la logique les langages reconnus (E. Grandjean, G. Richard) ;
- Exhiber des comportements « atypiques » des automates cellulaires considérés comme des systèmes dynamiques (G. Richard).

Un modèle de calcul et un système dynamique

Voici un automate cellulaire reconnaissant le langage $L = 0^*10^*$.

$Q = \{0, 1, \#, \textit{green}, \textit{orange}, \textit{red}\}$





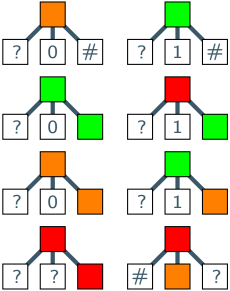
Axes de recherche :

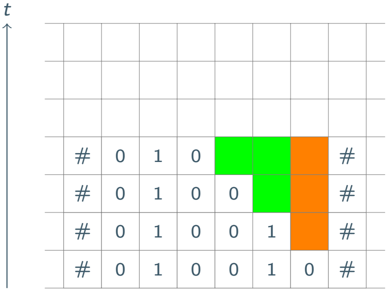
- Construire des algorithmes spécifiques et étudier les classes de complexité (N. Bacquey, G. Richard, V. Terrier) : voir soutenance de thèse N. Bacquey le 4 décembre ;
- Caractériser par la logique les langages reconnus (E. Grandjean, G. Richard) ;
- Exhiber des comportements « atypiques » des automates cellulaires considérés comme des systèmes dynamiques (G. Richard).

Un modèle de calcul et un système dynamique

Voici un automate cellulaire reconnaissant le langage $L = 0^*10^*$.

$Q = \{0, 1, \#, \textcolor{green}{green}, \textcolor{orange}{orange}, \textcolor{red}{red}\}$





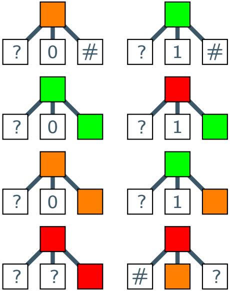
Axes de recherche :

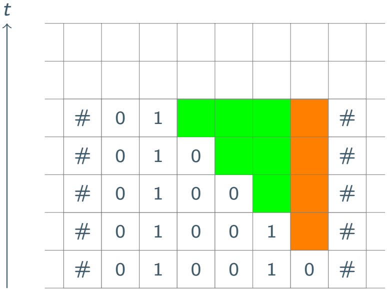
- Construire des algorithmes spécifiques et étudier les classes de complexité (N. Bacquey, G. Richard, V. Terrier) : voir soutenance de thèse N. Bacquey le 4 décembre ;
- Caractériser par la logique les langages reconnus (E. Grandjean, G. Richard) ;
- Exhiber des comportements « atypiques » des automates cellulaires considérés comme des systèmes dynamiques (G. Richard).

Un modèle de calcul et un système dynamique

Voici un automate cellulaire reconnaissant le langage $L = 0^*10^*$.

$Q = \{0, 1, \#, \textcolor{green}{\textit{green}}, \textcolor{orange}{\textit{orange}}, \textcolor{red}{\textit{red}}\}$





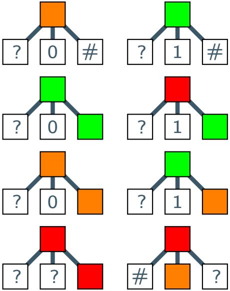
Axes de recherche :

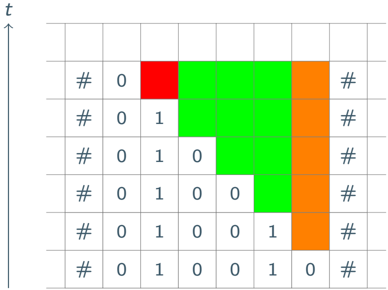
- Construire des algorithmes spécifiques et étudier les classes de complexité (N. Bacquey, G. Richard, V. Terrier) : voir soutenance de thèse N. Bacquey le 4 décembre ;
- Caractériser par la logique les langages reconnus (E. Grandjean, G. Richard) ;
- Exhiber des comportements « atypiques » des automates cellulaires considérés comme des systèmes dynamiques (G. Richard).

Un modèle de calcul et un système dynamique

Voici un automate cellulaire reconnaissant le langage $L = 0^*10^*$.

$Q = \{0, 1, \#, \textit{green}, \textit{orange}, \textit{red}\}$





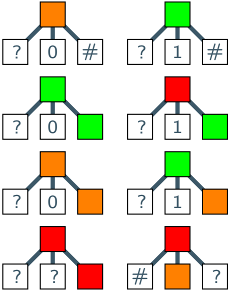
Axes de recherche :

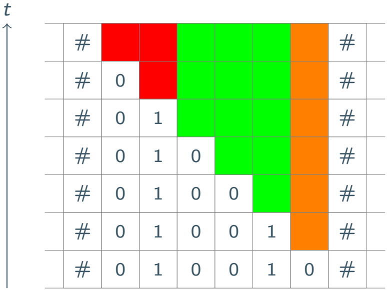
- Construire des algorithmes spécifiques et étudier les classes de complexité (N. Bacquey, G. Richard, V. Terrier) : voir soutenance de thèse N. Bacquey le 4 décembre ;
- Caractériser par la logique les langages reconnus (E. Grandjean, G. Richard) ;
- Exhiber des comportements « atypiques » des automates cellulaires considérés comme des systèmes dynamiques (G. Richard).

Un modèle de calcul et un système dynamique

Voici un automate cellulaire reconnaissant le langage $L = 0^*10^*$.

$Q = \{0, 1, \#, \textcolor{green}{green}, \textcolor{orange}{orange}, \textcolor{red}{red}\}$





Axes de recherche :

- Construire des algorithmes spécifiques et étudier les classes de complexité (N. Bacquey, G. Richard, V. Terrier) : voir soutenance de thèse N. Bacquey le 4 décembre ;
- Caractériser par la logique les langages reconnus (E. Grandjean, G. Richard) ;
- Exhiber des comportements « atypiques » des automates cellulaires considérés comme des systèmes dynamiques (G. Richard).

- Une exigence naturelle d'abord :
  - limiter l'espace de travail à l'entrée.
- En dimension 1 :
  - pour un mot d'entrée $w = w_{\mathbf{1}} \dots w_n \in \Sigma^*$,
  - faire le calcul sur n cellules ($= n$ processeurs)
  - contenant chacune initialement une lettre $w_{\mathbf{1}}, w_{\mathbf{2}}, \dots, w_n$ du mot w
  - (l'alphabet Σ est inclus dans l'ensemble des états de l'automate cellulaire).
- C'est équivalent à prendre un espace linéaire $O(n)$.

Quelles classes de complexité pour les automates cellulaires ?

Essentiellement trois classes :

- *L'espace linéaire* (équivalent à l'espace linéaire des machines de Turing ou des RAM)
- Le *temps linéaire*,
- Le *temps réel* ou *temps minimum* : correspond au temps minimum pour que toute lettre/bit de l'entrée puisse être communiquée à la cellule de sortie.

Ces trois classes :

- sont *significatives :* chacune contient un grand nombre de problèmes naturels,
- sont très *robustes :* c'est-à-dire, peuvent être définies de multiples façons.

La classe la plus significative (à mon goût) : le Temps Linéaire des automates cellulaires

GREYC AMACC

Elle contient les problèmes suivants :

- en dimension 1,
  - le tri lexicographique d'une liste de mots ;
  - le produit de deux entiers ;
- en dimension 2,
  - le produit de deux matrices booléennes $n \times n$, donc calculé en temps $O(n)$.

Nota : on conjecture que le produit de matrices $n \times n$ ne peut être calculé sur aucune RAM en temps "linéaire" $O(n^2)$; le meilleur algorithme séquentiel connu est en $O(n^{2.376})$...