Chapitre 1 : **ENSEMBLE. RELATION BINAIRE. APPLICATION**

§ 1. Ensemble

.1. *Notion d'ensemble*

1°) Définitions

a) Un ensemble est constitué d'objets rassemblés en vertu d'une propriété commune.

b) Si a est un élément de l'ensemble E, on écrit « $a \in E$ » et on dit « a élément de E » ou « a appartient à E ».

La négation de l'énoncé précédent se note « $a \notin E$ ».

Si $\wp$ est la propriété relative aux éléments de E, alors l'ensemble E est défini comme suit :

$$E = \{ a ; \text{t.q. a vérifie } \wp \}$$

2°) Exemples

Certains ensembles particulièrement très importants sont désignés par des lettres déterminées.

Signalons :

$\mathbb{N}^*$ - l'ensemble des entiers naturels $\{1, 2, 3, \cdots\}$.

$\mathbb{N}$ - l'ensemble des entiers naturels complété par zéro.

$\mathbb{Z}$ - l'ensemble des entiers relatifs $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$.

$\mathbb{Q}$ - l'ensemble des nombres rationnels, fractions positives, fractions négatives $\left\{ \dfrac{p}{q}, q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z} \right\}$.

$\mathbb{R}$ - l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$ - l'ensemble des nombres complexes $\{ a + ib ; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \}$

3°) Premières propriétés

Deux ensembles A et B sont dits égaux et l'on note « $A = B$ », si et seulement si, ils sont constitués de mêmes éléments.

.2. *Sous-ensembles*

1°) Définition

Si tous les éléments d'un ensemble F appartiennent à un ensemble E, on dit que F est inclus dans E ou que F est un sous-ensemble de E ou que F est une partie de E et l'on écrit « $F \subseteq E$ ».

D'après cette définition E doit être considéré comme un sous-ensemble de E, c'est l'inclusion au sens large.

Si E contient des éléments étrangers à F, on dit que F est un sous-ensemble strict de E et l'on note « $F \subset E$ ».

2°) Deux ensembles égaux

Deux ensembles A et B sont égaux, si et seulement si, $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

3°) Sous-ensembles disjoints

Deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E sont appelés disjoints s'ils n'ont aucun élément commun.

4°) Complémentaire

Soit A un sous-ensemble de E, le sous-ensemble A' noté $C_E A$ ou $E - A$ ou encore A^c qui réunit tous les éléments de E n'appartenant pas à A s'appelle le complémentaire de A dans E.

Il est évident que A^c et A sont disjoints. Par convention, on appelle complémentaire de E l'ensemble vide, noté $\varnothing$, d'où $E^c = \varnothing$ et $\varnothing^c = E$.

.3. Opérations sur les ensembles

1°) Ensemble des parties

On appelle ensemble des parties d'un ensemble E et l'on désigne par $P(E)$, l'ensemble dont les éléments sont les parties de E. On a $\varnothing \in P(E)$, $E \in P(E)$ et quel que soit $x \in E$, $\{x\} \in P(E)$.

3°) Intersection

Soit A et B deux parties bien déterminées d'un ensemble E. On appelle intersection de A et de B que l'on note $A \cap B$ les sous-ensembles de E formé par les éléments de E appartenant à chacune des parties considérées.

L'intersection est associative, c'est-à-dire $A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

4°) Réunion

On appelle réunion de deux parties A et B de E le sous-ensemble formé par les éléments de E appartenant au moins à l'une de ces parties. On représente par $A \cup B$ la réunion de A et de B.

La réunion est aussi associative c'est-à-dire $A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.

Les opérations d'intersection et de réunion possèdent les propriétés suivantes :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5°) Différence de deux ensembles

On appelle différence de deux ensembles A et B l'ensemble noté $A \setminus B$ défini par :

$$A \setminus B = \{x / x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B\}$$

On voit que l'opération $A \setminus B$ est la complémentation par rapport à A de la partie B. Lorsque $B \subset A$, $A \setminus B$ est le complémentaire de B dans A. De plus on peut écrire : $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.

6°) Différence symétrique

On appelle différence symétrique de deux sous ensembles A et B l'ensemble noté $A \Delta B$ défini par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

7°) Partition

On dit que l'on réalise une partition d'un ensemble E lorsque l'on classe les éléments de E dans des sous-ensembles $E_1, E_2, \cdots, E_n$ non vides tels que tout élément de E soit classé, c'est-à-dire $E = E_1 \cup E_2 \cup E_n$, $E_i \cap E_j = \varnothing \quad i \neq j$.

8°) Ensemble produit

Soient deux ensembles :

$E = \{a, b, \cdots, x, y, \cdots\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \cdots, \xi, \cdots\}$.

Les couple ordonnés du type (x, ξ), où $x \in E$ et $\xi \in F$ forment un troisième ensemble appelé le produit de E par F et sera noté $E \times F$.

Remarquons que (x, ξ) est différent de (ξ, x). En effet $(x, \xi) \in E \times F$ tandis que $(\xi, x) \in F \times E$ et si E et F sont distincts, il n'y a aucune confusion possible et si $E = F$, (x, y) et (y, x) sont deux éléments distincts de $E \times E$, la première coordonnée x et la seconde y du couple (x, y) se distinguent par l'ordre de leur écriture ; les éléments de la forme (x, x) de $E \times E$ sont dits diagonaux.

La notion se généralise à un nombre fini d'ensembles $E_1, E_2, \cdots, E_n$. L'ensemble produit $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ se compose de toutes les suites ordonnées formées de n éléments $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ avec $x_1 \in E_1, \cdots, x_n \in E_n$.

Le produit $E \times \cdots \times E$ se note E^n.

§ 2. Applications

.1. Définition

Étant donné deux ensembles E et F, on définit une application de E dans F en se donnant une règle permettant de faire correspondre à tout élément de E un élément déterminé de F. Cette règle est considérée comme un opérateur que l'on désigne par une lettre $f, T, \cdots$. Si $a \in E$, $f(a)$ désigne le transformé de a et représente donc un élément de F. Symboliquement, l'application f s'écrit sous la forme :

$$f : E \longrightarrow F \text{ ou } E \xrightarrow{f} F \; ; \; f : x \mapsto y = f(x), x \in E \text{ et } y \in F.$$

L'élément $y = f(x)$ est appelé l'image de x par f, inversement x est dit antécédent de $f(x)$.

E est appelé le domaine de définition et F le domaine des valeurs de l'application f.

1°) Application et fonction

Dans le cas, où E et F sont des ensembles de nombres, on dit que l'application f est une fonction.

2°) Transformations géométriques

Les transformations géométriques du plan ou de l'espace fournissent de nombreux exemples d'application. Les ensembles E et F sont souvent confondus, leurs éléments sont des points. Dans la transformation T, on représente par $M' = T(M)$ le transformé du point M.

3°) Cas particulier

Dans le cas où $E = F$, on appelle application identique, souvent notée id_E, l'application particulière qui à tout $x \in E$, associé x lui-même.

$$\forall x \in E, id_E(x) = x$$

4°) Restriction d'une application

Soit E_1 une partie de E. Toute application de E dans F détermine une application de E_1 est défini en vertu de son appartenance à E. Cette application est appelée la restriction de f à E_1 et sera notée $f\big|_{E_1}$.

.2. *Image d'une partie de E. Surjection*

1°) Image de f

f étant une application de E dans F. On appelle image de f l'ensemble noté $f(E) = \Im m\, f$ de tous les éléments $f(x)$ tel que x soit un élément de E.

$$\Im m\, f = f(E) = \{f(x) / x \in E\} \subset F$$

Plus généralement pour $E_1 \subset E$, on appelle image de E_1 par f, l'ensemble noté $f(E_1)$ de tous les éléments $f(x)$ tel que x appartient à E_1.

$$f(E_1) = \{f(x) / x \in E_1\} \subset F(E) \subset F$$

2°) Application surjective

Lorsqu'on sait que $f(E) = F$, l'ensemble des images recouvrant F en entier, l'application f est dite surjective et l'application est appelée surjection. On a aussi employé l'expression : application de E sur F pour une surjection.

.3. Image réciproque d'un partie de F. Injection

1°) Image réciproque

L'ensemble

$$\overset{-1}{f}(y)=\{x \in E / f(x)=y\}$$

s'appelle l'image réciproque de l'élément y de F.

Plus généralement pour $F_1 \subset F$ posons :

$$\overset{-1}{f}(F_1)=\{x \in E / f(x) \in F_1\}=\bigcup_{y \in F_1} \overset{-1}{f}(y)$$

On l'appelle l'image réciproque de F_1 par l'application f. On pose de plus $\overset{-1}{f}(\varnothing)=\varnothing$.

2°) Application injective

On dit qu'un application de E dans F est injective ou encore que c'est une injection lorsque deux éléments distincts de E ont pour images deux éléments distincts de F.

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \Leftrightarrow f(x)=f(x') \Rightarrow x=x'$$

Il en résulte que si f est injective, l'image réciproque d'un point est soit vide, soit réduite à un point.

.4. Immersion. Prolongement d'une application

1°) Immersion

Soit $E_1 \subset E$, la restriction de l'application identique id_E à E_1 s'appelle plongement ou immersion.

2°) Prolongement

Soit $E_1 \subset E$, $F_1 \subset F$, $f : E_1 \longrightarrow F_1$, $g : E \longrightarrow F$.

Si pour tout élément x de E_1 $f(x)=g(x)$, f s'appelle restriction de g et g s'appelle prolongement de f.

Par exemple, l'immersion est une restriction de l'application identique id_E.

.5. Bijection. Composition d'applications

1°) Application bijective ou biunivoque

Une application f de E dans F qui est à la fois surjective et injective est appelée bijective ou biunivoque. On dit que c'est une bijection.

2°) *Composition d'applications*

On appelle composée (ou produit de composition) de deux applications $g : F \longrightarrow G$ et $f : E \longrightarrow F$ une application notée $g \circ f : E \longrightarrow G$ et définie par :

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x))$$

Remarquons que l'application composée n'est pas définie pour toutes les applications f et g, il faut que dans leurs notations précédentes ces applications aient un ensemble commun F.

3°) *Théorème 2.1.*

Le produit de composition est associatif, c'est-à-dire si $h : G \longrightarrow H$, $g : F \longrightarrow G$, $f : E \longrightarrow F$ sont trois applications, on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

4°) *Remarque*

Le produit de composition n'est pas commutatif en général, c'est-à-dire $(g \circ f) \neq (f \circ g)$.

5°) *Application réciproque*

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications quelconques dont les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies. On dit que g est application inverse ou réciproque de f (et f est l'application réciproque de g) si :

$$f \circ g = id_F \text{ et } g \circ f = id_E$$

L'application g sera notée : $g = f^{-1}$, d'où :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

6°) *Théorème 2.2.*

Une application $f : E \longrightarrow F$ admet une application réciproque si, et seulement si, elle est biunivoque (bijective).

Pour démontrer ce théorème on se base sur le lemme suivant :

<u>**Lemme**</u> : Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ sont deux applications quelconques telles que $g \circ f = id_E$, alors f est injective et g est surjective.

En effet, soit $(x, x') \in E^2$ et $f(x) = f(x')$. Alors :

$$x = id_E(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x') = id_E(x') = x'$$

d'où f est injective.

Soit x un élément quelconque de E, on a :

$x = id_E(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$ où $y = f(x) \in F$, d'où g est surjective.

En revenant au théorème 2.2., supposons d'abord que f soit bijective, il existe alors pour tout $y \in F$ un élément unique $x \in E$ pour lequel $f(x) = y$. En posant $g(y) = x$ on définit une application $g : F \longrightarrow E$ vérifiant $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.

Réciproquement si f admet une application réciproque $g = f^{-1}$ alors $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$ et d'après le lemme précédent f est à la fois injective et surjective, d'où f est bijective.

7°) Conséquence

Si une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, f^{-1} l'est aussi et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Si de plus $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections, leur composée $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

8°) Théorème 2.3.

Soient E et F deux ensembles finis ayant le même nombre d'éléments et $f : E \longrightarrow F$ une application injective, alors f est aussi bijective.

De même si f est surjective elle est bijective.

.6. Puissance d'un ensemble

1°) Définition

On dit que deux ensembles E et F ont la même puissance si, et seulement si, il existe une application bijective $f : E \longrightarrow F$.

2°) Ensemble dénombrable

Les ensembles ayant la même puissance que $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels sont dits dénombrables. Par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont des ensembles dénombrables. Par contre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas dénombrables.

3°) Ensemble continu

On dit qu'un ensemble E est de puissance continu s'il a la même puissance que l'intervalle ouvert $]0,1[$ de la droite réelle.

Par exemple tout intervalle ouvert , tout intervalle fermé, la droite réelle $\mathbb{R}$, le plan complexe $\mathbb{C}$ a la puissance du continu.

§ 3. Relations binaires

.1. Définition

Soit P une propriété concernant deux éléments x et y appartenant respectivement à deux ensembles donnés, E et F. L'ensemble des couples (x, y) ayant la propriété P est une partie de $E \times F$. On dit que P définit sur les ensembles E et F une relation binaire R et l'on écrit :

$x \mathrm{R} y$, quand (x, y) possède P, $x \overline{\mathrm{R}} y$, quand (x, y) ne possède pas P.

Si F coïncide avec E, R est dite relation binaire définie dans E.

L'ensemble $\Gamma = \{(x, y) \in E \times F / x \mathrm{R} y\}$ est appelé graphe de la relation binaire R.

.2. Propriétés usuelles des relations binaires

1°) Réflexivité

Une relation R est dite réflexive si, et seulement si, le domaine où elle est vérifiée contient la diagonale de $E \times E$, c'est-à-dire quel que soit x, on a $x \mathrm{R}\ x$.

2°) Symétrie

Une relation binaire R est dite symétrique si, et seulement si, $a \mathrm{R} b$ entraîne $b \mathrm{R} a$.

3°) Antisymétrie

Une relation binaire R est dite antisymétrique si, et seulement si, $a \mathrm{R} b$ et $b \mathrm{R} a$ entraîne $a = b$.

Il en résulte que, si $a \neq b$ et si $a \mathrm{R} b$, la relation $b \mathrm{R} a$ ne peut être vérifiée.

4°) Transitivité

Une relation binaire R est dite transitive si $a \mathrm{R} b$ et $b \mathrm{R} c$.

.3. Relation d'équivalence

1°) Définition

Une relation binaire ξ est appelée relation d'équivalence si elle est à la fois réflexive, symétrique est transitive.

Pour souligner que ξ est une relation d'équivalence, on emploie parfois la notation spécifique $a \equiv b \pmod{\xi}$ ou bien $a \sim b \pmod{\xi}$, qui s'énonce « a congru à b modulo ξ ».

2°) Classe d'équivalence, ensemble quotient

Soit ξ une relation d'équivalence définie dans un ensemble E. Si $a \in E$, on appelle classe d'équivalence de a et l'on désigne par $C(a)$ où $\bar{a}$ l'ensemble des éléments de E équivalents à a :

$$C(a) = \bar{a} = \{x \in E / a \sim x \pmod{\xi}\}$$

a) Lemme 1

Deux éléments quelconques d'une classe d'équivalence sont équivalents entre eux.

b) Lemme 2

Deux classes ayant un élément commun sont identiques.

c) Théorème 3.1.

Une relation d'équivalence ξ, définie sur un ensemble E, détermine une partition de E en classe d'équivalence.

3°) Ensemble quotient

L'ensemble des classes d'équivalence déterminé sur E par ξ s'appelle ensemble quotient de E par ξ ; on le note E/ξ.

$\bar{a} \in E/\xi$ et $\bar{b} \in E/\xi$ implique $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \sim b$.

.4. *Factorisation des applications*

1°) Théorème 3.2.

Étant donné une partition quelconque $\pi(E)$ de l'ensemble E en sous-ensemble disjoints C_x, les parties C_x sont des classes d'équivalence par une certaine relation d'équivalence $\mathcal{R}$;

En effet, par hypothèse, tout élément $x \in E$ appartient exactement à un seul sous-ensemble C_a. Posons $x \mathrel{R} x'$ si, et seulement si, x et x' appartient à un seul et même sous-ensemble C_a. Il est évident que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Il vient par définition de $\mathcal{R}$ que $x \in C_a \Rightarrow \bar{x} = C_a$.

2°) Application canonique

Soit ξ une relation d'équivalence définie sur un ensemble E. L'application surjective de l'ensemble E sur l'ensemble quotient E/ξ : $p : x \mapsto p(x) = \bar{x}$ s'appelle application canonique.

3°) Factorisation d'une application

Soit E, F deux ensembles $f : E \longrightarrow F$ une application. La relation binaire O_f définie par :

$$x \, O_f \, x' \Leftrightarrow f(x) = f(x'), \forall \, x, x' \in E$$

est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence correspondantes $\bar{x}$ sont

$$\bar{x} = \{x' \,/\, f(x') = f(x)\}.$$

L'application f induit une application $\bar{f} : E/_{O_f} \longrightarrow F$ définie par :

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(x) \Leftrightarrow \bar{f}(p(x)) = f(x)$$

où p est l'application canonique.

Puisque $\overline{x}=\overline{x}' \Leftrightarrow f(x)=f(x')$, la définition de $\overline{f}$ ne dépend pas du représentant de $\overline{x}$.

On appelle factorisation de l'application f, la décomposition :

$$f=\overline{f}\circ p,$$

de l'application f en un produit de la surjection p et de l'injection $\overline{f}$.

.5. Ensembles ordonnés

1°) Relation d'ordre

Une relation binaire $\prec$ dans un ensemble E est appelée relation d'ordre sur E si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Si pour tout couple d'éléments (x',x) de E^2, on a $x\prec x'$ ou $x'\prec x$, on dit que l'ordre sur E est total et que l'ensemble E est totalement ordonnée (ou une chaîne). Dans le cas contraire l'ordre sur E est dit partiel.

2°) Plus grand élément, plus petit élément

a) On appelle le plus grand élément d'un ensemble E partiellement ordonné un élément $n\in E$, tel que $x\prec n$ pour tous les x de E.

b) Un élément $m\in E$ s'appelle élément maximal si $m\prec x\in E$ implique $x=m$.

c) Soit $F\subset E$, un élément $m\in E$ est dit majorant de F si quel que soit $x\in F$, on a $x\prec m$

d) Soit $F\subset E$, un élément $S\in E$ est appelé $\sup F$ (suprémum de F) ou borne supérieure de F si $x\prec S$ pour tous les x de F, et si $m\in E$ et $x\prec m, \forall x\in F$, alors $S\prec m$, i.e. S est le plus petit des majorants.

e) On appelle le plus petit élément d'un ensemble E partiellement ordonnée un élément $m\in E$, tel que $m\prec x$ pour tous les x de E.

f) Un élément $m\in E$ s'appelle élément minimal si $x\prec m\in E$ implique $x=m$.

g) Soit $F\subset E$, un élément $m\in E$ est dit minorant de F si quel que soit $x\in F$, on a $m\prec x$.

h) Soit $F\subset E$ un élément $s\in E$ est appelé $\inf F$ (infimum de F) ou borne inférieure de F si $s\prec x$ pour tous les x de F et si $m\in E$ et $m\prec x$, alors $m\prec s$, i.e. si s est le plus grand des minorants.

3°) Demi-treillis. Treillis.

On appelle sup-demi-treillis un ensemble ordonné $(E,\prec)$ dans lequel toute paire $\{a,b\}$ d'éléments admet une borne supérieure, $\sup\{a,b\}$, désignée aussi par $a\vee b$.

Définition analogue pour un inf-demi-treillis : existence de $\inf\{a,b\}$, notée aussi $a\wedge b$. Un treillis est un ensemble ordonné E qui est à la fois sup-demi-treillis et inf-demi-treillis.

On dit encore que l'ensemble ordonné $(E,\prec)$ est réticulé à droite (resp. à gauche) si deux éléments quelconques a et b de E possèdent une borne supérieure $\sup\{a,b\}$, désignée aussi par $a \vee b$ (resp. une borne inférieure $\inf\{a,b\}$, notée aussi $a \wedge b$).

4°) Ensemble dirigé.

a) Définition

Soit $(J,\prec)$ un ensemble partiellement ordonné. On dit que J est dirigé par la relation d'ordre $\prec$, ou filtrante à droite par $\prec$ si deux éléments quelconques de J possèdent toujours un majorant.

b) Exemples.

-1-) Tout ensemble totalement ordonné est dirigé. Par exemples $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}^*, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$.

-2-) Tout ensemble réticulé à droite est dirigé. Par exemples l'ensemble des parties de E, $P(E)$, ordonné par la relation d'inclusion $\subseteq$ ou $\supseteq$, i.e. dans le premier cas $A \prec B \Leftrightarrow A \subseteq B$, dans me deuxième cas $A \prec B \Leftrightarrow A \supseteq B$. Dans le 1er cas $A \vee B = A \bigcup B$, dans le 2ème cas $A \vee B = A \bigcap B$.

-3-) Soient I et J deux ensembles dirigés, l'ensemble ordonné produit, $(i',j') \prec (i,j) \Leftrightarrow i' \prec i$ et $j' \prec j$ est dirigé.

5°) Lemme de Zorn.

Si dans un ensemble partiellement ordonné $(E,\prec)$ il n'existe aucun élément $x \in E$ tel que $x_0 \prec x$ $(x \neq x_0)$, on dit que x_0 est maximal (on définit da la même façon un élément minimal).

Si dans $(E,\prec)$ tout ensemble ordonné est majoré (resp. minoré), alors dans E il existe au moins un élément maximal (resp. minimal).

6°) Théorème de Zemerlo

Chaque ensemble peut être totalement ordonné, i.e. on peut introduire dans chaque ensemble une telle relation d'ordre telle que chaque partie de cet ensemble possède une borne inférieure, ou un plus petit élément.

Ces deux théorèmes sont équivalents à l'axiome de choix.

7°) Axiome de choix.

Soit A un ensemble et à chaque $\alpha \in A$ on fait correspondre un ensemble non vide X_α. On appelle élément de l'ensemble produit $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ l'application $\alpha \to x_\alpha$ de l'ensemble A dans $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ telle que $x_\alpha \in X_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$.

L'ensemble $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ n'est pas vide. Cet axiome est appelé l'axiome de choix.

8°) Application monotone, strictement monotone.

$(E,\prec)$ et $(F,\prec)$ étant deux ensembles ordonnés et f une application de E dans F, on a les définitions suivantes :

- *a)* f est *croissante* sur E : $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ (x \prec y \Rightarrow f(x) \prec f(y))$.
- *b)* f est *strictement croissante* sur E :
- $$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ (x \prec y \Rightarrow f(x) \prec f(y) \text{ et } f(x) \neq f(y)).$$
- *c)* f est *décroissante* sur E : $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ (x \prec y \Rightarrow f(y) \prec f(x))$.
- *d)* f est *strictement croissante* sur E :
- $$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ (x \prec y \Rightarrow f(y) \prec f(x) \text{ et } f(x) \neq f(y))$$
- *e)* f est dite monotone sur E si f est *croissante* ou *décroissante* sur E. De même f est dite strictement monotone sur E si f est *strictement croissante* ou *strictement décroissante* sur E.

.6 Ensembles équipotents.

1°) Définition.

Deux ensembles E et F sont équipotents si et seulement s'il existe une bijection de E sur F.

2°) Propriétés

La relation d'équipotence est une relation d'équivalence définie la famille de tous les ensembles. On écrit $E \approx F$ pour dire que E est équipotent à F.

3°) Ensembles ordonnés isomorphes.

Deux ensembles ordonnés E et F sont dits isomorphes s'il existe une bijection monotone de E sur F.

4°) Proposition.

Tout ensemble non vide ordonné vérifiant les trois propriétés suivantes :

- *a)* Toute partie non vide de E a un plus petit élément
- *b)* Toute partie majorée de E a un plus grand élément.
- *c)* E n'a pas de plus grand élément.

est isomorphe à l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}^*$.

5°) Ensembles finis

a) Définition.

Un ensemble E est fini si et seulement équipotent à un intervalle $[1,n] = \{1,2,\ldots,n\}$ de $\mathbb{N}^*$, l'entier naturel n est appelé le *cardinal* de E et noté : $n = \mathrm{card}(E)$. On convient que $\mathrm{card}\,\varnothing = 0$.