

Examen 4

Análisis y Diseño de Algoritmos

22 de Junio del 2020

Indicaciones específicas:

- Duración: 120 minutos
- El examen consiste de 6 preguntas. Usted puede entregar soluciones de todas las preguntas. De su entrega, se seleccionará un subconjunto de preguntas de manera tal que el puntaje máximo (suma de valores de las preguntas) de dicho subconjunto no sobrepase los 20 puntos. Dicho subconjunto será elegido a manera de maximizar la nota del alumno.
- Por cada pregunta resuelta, debe entregar en canvas un archivo (png, jpg, jpeg) con el número de pregunta. Está prohibido entregar un archivo que contiene resoluciones de distintas preguntas
- **NO** se permite el uso de calculadoras, copias, apuntes ni libros

Ejercicio 1 (5 pts). Diseñe un algoritmo que

Recibe un grafo no dirigido G con longitudes ℓ no negativas en las aristas y dos subconjuntos S, T de $V(G)$, y

Devuelve la distancia de S a T , es decir, la longitud de un camino mínimo que comienza en algún vértice en S y termina en algún vértice en T .

Su algoritmo deberá tener tiempo de ejecución $O((n + m) \lg n)$, donde n y m son el número de vértices y aristas del grafo, respectivamente. (Pista: modifique una versión del algoritmo de dijkstra)

Debe describir brevemente cual es la idea de su algoritmo, diseñarlo en pseudocódigo y justificar brevemente por qué funciona.

Ejercicio 2 (5 pts). Diseñe un algoritmo que

Recibe un grafo no dirigido G sin pesos y un vértice s en el grafo, y llena un arreglo global $paths$, tal que, para cada vértice, $paths[v]$, guarda el número de caminos mínimos que existen desde s hacia v .

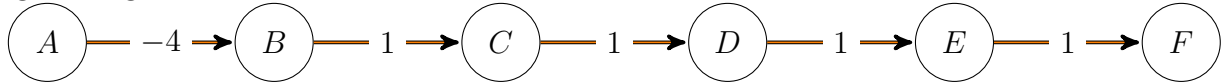
Su algoritmo deberá tener tiempo de ejecución $O(n + m)$, donde n y m son el número de vértices y aristas del grafo, respectivamente.

Debe describir brevemente cual es la idea de su algoritmo, diseñarlo en pseudocódigo y justificar brevemente por qué funciona.

Ejercicio 3 (2 ptos). ¿Verdadero o falso? Justifique

Si $X \in NP$ y X puede ser resuelto en tiempo polinómico, entonces $P=NP$

Ejercicio 4 (3 ptos). Suponga que queremos encontrar las distancias desde el nodo A en el siguiente grafo:



Señale un orden de procesamiento de las aristas en donde el algoritmo de Bellman-Ford tarda 5 iteraciones en encontrar las distancias correctas. Señale un orden de procesamiento de las aristas en donde el algoritmo de Bellman-Ford tarda 1 iteración en encontrar las distancias correctas.

Ejercicio 5 (5 ptos). Suponga que tenemos un algoritmo $OPERACION(T, k)$ que recibe un árbol binario completo T y un nodo k de dicho árbol y realiza un número de pasos proporcional al número de descendientes de k (recuerde que un nodo es descendiente de sí mismo). Dado un árbol binario completo T con conjunto de nodos $1, \dots, n$, invocamos a $OPERACION(T, k)$ n veces consecutivas, una para cada $k = 1 \dots n$.

¿Cual es el costo amortizado, en notación O-grande, de cada llamada a $OPERACION$? Justifique adecuadamente. Puede usar propiedades de árboles binarios, pero debe enunciarlas correctamente.

Ejercicio 6 (5 ptos). Considere los siguientes problemas.

3-COVERING-EXACTO:

Dado un conjunto U de n elementos y una colección \mathcal{S} de subconjuntos de U , cada uno con tamaño **3**. ¿Existe una subcolección de \mathcal{S} tal que cada elemento de U aparece en algún subconjunto de \mathcal{S} **exactamente una vez**?

4-COVERING-EXACTO:

Dado un conjunto U de n elementos y una colección \mathcal{S} de subconjuntos de U , cada uno con tamaño **4**. ¿Existe una subcolección de \mathcal{S} tal que cada elemento de U aparece en algún subconjunto de \mathcal{S} **exactamente una vez**?

Sabiendo que 3-COVERING-EXACTO es NP-completo, muestre que 4-COVERING-EXACTO es NP-completo