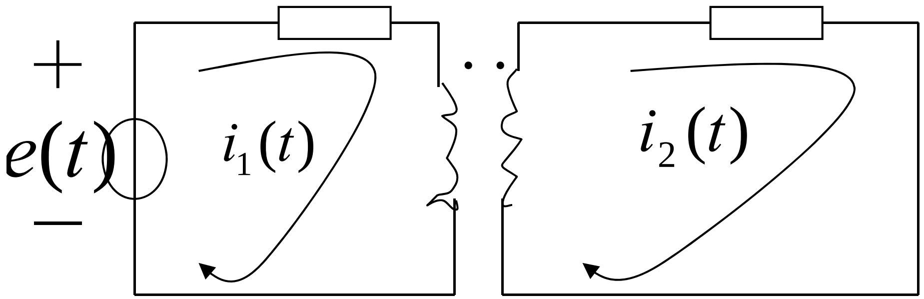
第二章 连续系统的时域分析

§2.1 引言

一、构筑微分方程的基本依据

1、元件特性：即表征元件的特性的关系式。

2、网络拓扑结构：**KCL**、**KVL**。



如图电路，电感为**L**，电阻为**R,** 互感为**M**，求电路的输入——输出方程。

由 KVL 有：
$$\begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} + Ri_1 - M\dfrac{di_2}{dt} = e(t) \\ L\dfrac{di_2}{dt} + Ri_2 - M\dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$
,消去 i_1 有：

$$(L^2 - M^2)\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 2RL\frac{di_2}{dt} + R^2 i_2 = M\frac{de}{dt}$$

其中 $i_2(t)$ 为待解函数。

§2.1 引言

二、一般线性系统的数学描述和求解问题

1：将上例推广到一般：$e(t)$——激励，$r(t)$——响应，系统描述为

$$\frac{d^n r}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dr}{dt}+a_0 r=b_m\frac{d^m e}{dt^m}+\ldots+b_1\frac{de}{dt}+b_0 e$$

2：求解问题：

A：$\boxed{\text{古典解法：r(t)=通解+特解。}}$（只适合低阶系统）

其中通解满足：描述式左边=0

其特征方程：$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0$

特征方程的根λ_1，$\lambda_2\ldots\lambda_n$为微分方程的特征根，对应于自由响应。

B：$\boxed{\text{变换域法：主要指拉氏变换法}}$。

C：$\boxed{\text{叠加积分法：主要指卷积法。（求解零状态响应）}}$

三、两个重要概念：

零输入响应：系统无输入，仅由初始条件引起的响应。

零状态响应：系统无初始储能，仅由外加激励引起的响应。

全响应=零输入响应+零状态响应

§2.2　系统方程的算子表示法

一、算子符号的基本规则：

1：定义算子：$p=\frac{d}{dt}$　　$\frac{1}{p}=\int_{-\infty}^{t}()d\tau$

则：$px=\frac{dx}{dt}$　　$p^n x=\frac{d^n x}{dt^n}$　　$\frac{1}{p}x=\int_{-\infty}^{t}xd\tau$

如：$\frac{d^2 r}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}+5r+\int_{-\infty}^{t}r(\tau)d\tau=\frac{de}{dt}+3e$

用算子表示成：$p^2 r+2pr+5r+\frac{1}{p}r=pe+3e$

即：$(p^2+2p+5+\frac{1}{p})r=(p+3)e$

§2.2 系统方程的算子表示法

二、算子运算规则：就一般而言，可将算子 符号p象代数量一样处理，但：

由 $px = py$ 不可以得出 $x = y$ $\qquad p\dfrac{1}{p}x \neq \dfrac{1}{p}px$

由 $D(p)x = D(p)y$ 不可以得出 $x = y$

$$(p+a)(p+b)x = (\frac{d}{dt}+a)(\frac{d}{dt}+b)x = (\frac{d}{dt}+a)(\frac{d}{dt}x+bx)$$

$$= \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}x+bx)+a(\frac{d}{dt}x+bx) = \frac{d^2}{dt^2}x+b\frac{d}{dt}x+a\frac{d}{dt}x+abx$$

$$= [p^2+(a+b)p+ab]x$$

但：$p\dfrac{1}{p}x = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x\,d\tau = x(t);\ \dfrac{1}{p}p = \displaystyle\int_{-\infty}^{t}[\dfrac{d}{d\tau}x]d\tau = x(t)-x(-\infty)$

当且仅当 $x(-\infty)=0$ 时，$p\dfrac{1}{p}x = \dfrac{1}{p}px; \therefore p\dfrac{1}{p}x \neq \dfrac{1}{p}px$

§ 2.2 系统方程的算子表示法

二、转移算子

系统描述为：

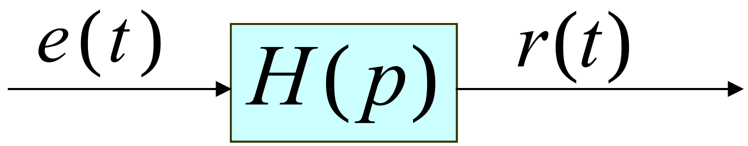
$$\frac{d^n r}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dr}{dt}+a_0 r=b_m\frac{d^m e}{dt^m}+\ldots+b_1\frac{de}{dt}+b_0 e$$

用算子表示为：

$$\underbrace{(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0)}_{D(p)}r=\underbrace{(b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_0)}_{N(p)}e$$

即：D(p)r(t)=N(p)e(t)

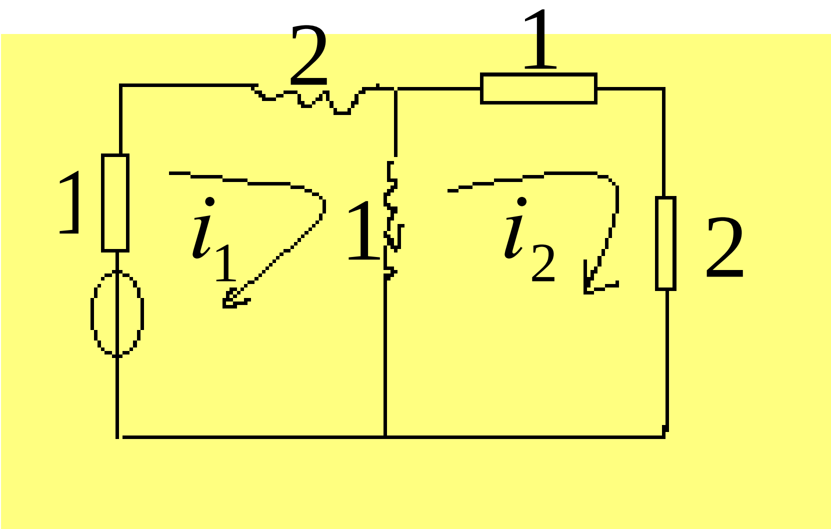
$$\therefore r(t)=\frac{N(p)}{D(p)}e(t)$$



定义转移算子：　$H(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}$　（又称传输算子）

§2.2 系统方程的算子表示法

例：下图中e(t)为激励，i_2为响应，求转移算子。



解：用KVL：

$$\begin{cases} 3\dfrac{di_1}{dt} + i_1 - \dfrac{di_2}{dt} = e(t) \\ -\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{di_2}{dt} + 3i_2 = 0 \end{cases}$$

即：$\begin{cases} (3p+1)i_1 - pi_2 = e(t) \\ -pi_1 + (p+3)i_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2p^2 + 10p + 3)i_2 = pe(t)$

$$\therefore H(p) = \frac{p}{2p^2 + 10p + 3}$$

运用算子运算与代数符号运算的近似性，配合有关规则，使解微分方程变得相对简单。

§ 2.3　系统的零输入响应 (1)

一、零输入响应仅由系统的初始条件决定

由D(p)r(t)=N(p)e(t)，而e(t)=0　有：

系统的零输入响应问题即求解D(p)r(t)=0

即求解：$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)r = 0$

A：对于一阶齐次方程

$$(p - \lambda)r = 0$$

$$\frac{dr}{dt} - \lambda r = 0 \Rightarrow \frac{dr}{r} = \lambda dt$$

取不定积分有：$\ln r = \lambda t + k$

$$r(t) = ce^{\lambda t} \ ;(c = e^k)$$

其中c为待定系数，由系统初始条件（储能）决定

$$\begin{cases} 若r(0)已知，有：r(0)=ce^{0},则c可求 \\ 若r(t_0)已知，有：r(t_0)=ce^{\lambda(t-t_0)} \end{cases}$$

B：对于二阶齐次方程：

$$(p^2 + a_1 p + a_0) r = 0 \qquad (1)$$

设$p^2 + a_1 p + a_0 = 0$的两单根为λ_1，λ_2，则：

$$(p - \lambda_1)(p - \lambda_2) r(t) = 0$$

$(p - \lambda_1) r = 0$与$(p - \lambda_2) r = 0$中

能成立一个，则（1）成立

若两个都成立，则两者之和满足方程(1),即有：

$$\boxed{r(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}$$

$$r(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

c_1, c_2为待定系数，一般：

$$\begin{cases} r(0) = c_1 + c_2 \\ r'(0) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \\ c_2 = \end{cases}$$

C：对于一般系统：

$$D(p)r=(p^{n}+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_{1}p+a_{0})r=0$$

D(p)=0——特征方程

D(p)=0的根称为特征根，特征根对应的频率称自然（由）频率。

1、若 $D(p)=0$ 有 n 个单根 λ_1，$\lambda_2\ldots\lambda_n$，则：

$$r(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\ldots+c_ne^{\lambda_n t}$$

2、若 $D(p)=0$ 有重根，不妨设 λ_1 为 m 重根，则：

$$r(t)=(c_1+c_2t+\ldots+c_mt^{m-1})e^{\lambda_1 t}+c_{m+1}e^{\lambda_2 t}+\ldots+c_ne^{\lambda_n t}$$

*3、若$D(p)=0$有复根，设复根$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$

则一对复根对应的解的形式为：

$$r_1(t)=e^{\alpha t}(c_1\sin\beta t+c_2\cos\beta t)$$

$$\lambda_1=\alpha+\beta i$$

$$\lambda_2=\alpha-\beta i$$

可套用都是单根的情况

§ 2.3　系统的零输入响应（4）

二、零输入响应举例：

$$(1)\ H(p)=\frac{p+1}{p^{2}+3p+2};\ r(0)=1,\ r'(0)=2$$

解：$p^{2}+3p+2=0$ 的根为：$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$

$$r(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$$

c_1, c_2 为待定系数 $\begin{cases} r(0)=c_1+c_2=1 \\ r'(0)=-c_1-2c_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=4 \\ c_2=-3 \end{cases}$

$$\therefore r(t)=[4e^{-t}-3e^{-2t}]u(t)$$

此题切不可用如下解法：

$$H(p)=\frac{p+1}{p^{2}+3p+2}=\frac{p+1}{(p+1)(p+2)}=\frac{1}{p+2}$$

$$\therefore r(t)=ce^{-2t}u(t)$$

§2.3　系统的零输入响应（5）

二、零输入响应举例：

$$(2)H(p)=\frac{3p+1}{p(p+1)^2},r(0)=r'(0)=0,r''(0)=1$$

解：$p(p+1)^2=0$的根为$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=-1$

$$r(t)=(c_1+c_2t)e^{-t}+c_3e^{0t}$$

$$\begin{cases} r(0)=c_1+c_3=0 \\ r'(0)=-c_1+c_2=0 \\ r''(0)=c_1-2c_2=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c_1=-1 \\ c_2=-1 \\ c_3=1 \end{cases}$$

$$\therefore r(t)=[-(1+t)e^{-t}+1]u(t)$$

§2.3　系统的零输入响应（6）

二、零输入响应举例：

$$(3)H(p)=\frac{P(p+3)}{(p+2)(p^2+2p+5)};r(0)=r'(0)=0,r''(0)=1$$

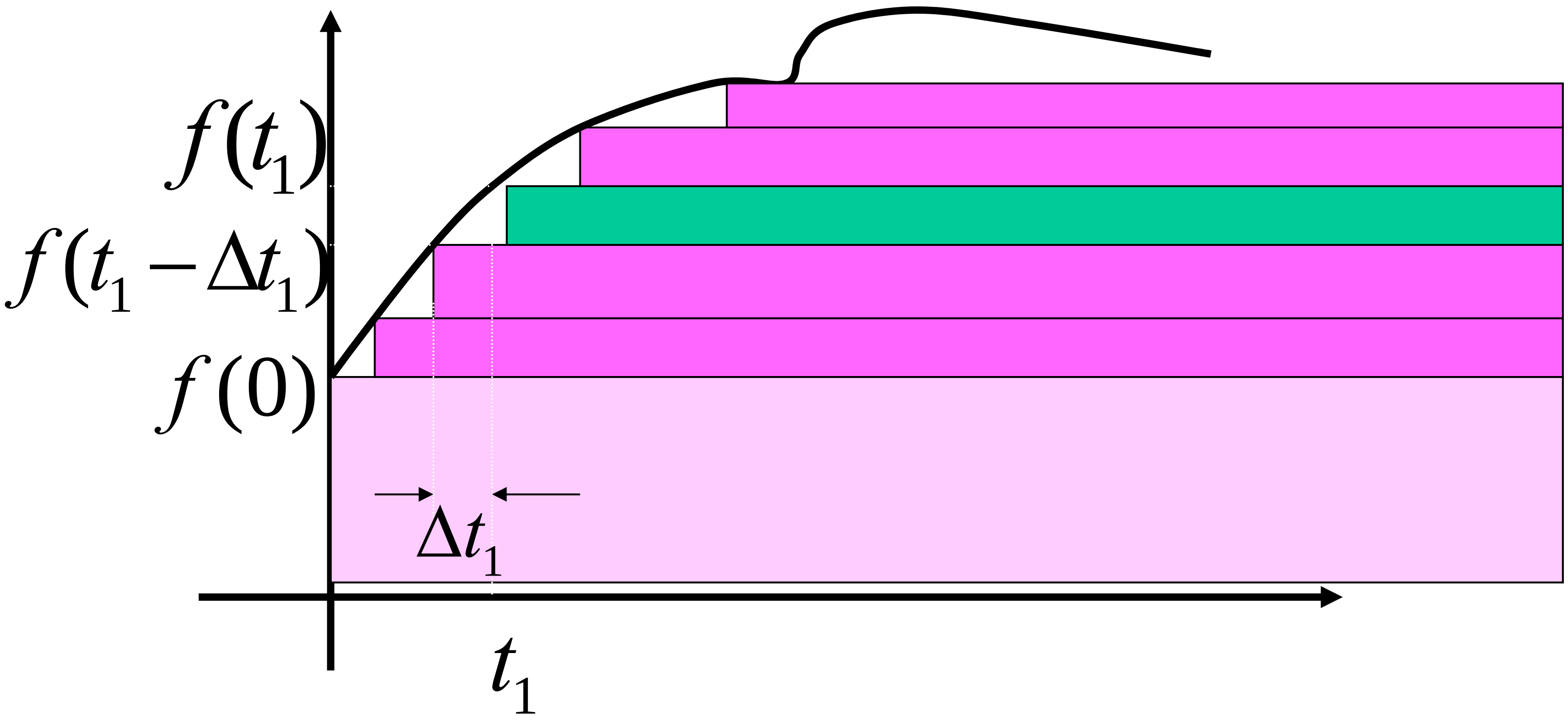
解：$(p+2)(p^2+2p+5)=0$的根为：$\lambda_1=-2$，$\lambda_{2,3}=-1\pm 2i$

$$r(t)=c_1e^{-2t}+e^{-t}(c_2\sin 2t+c_3\cos 2t)$$

$$\begin{cases} r(0)=c_1+c_3=0 \\ r'(0)=-2c_1+2c_2-c_3=0 \\ r''(0)=4c_1-4c_2-3c_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\frac{1}{9} \\ c_2=\frac{1}{18} \\ c_3=\frac{-1}{9} \end{cases}$$

$$\therefore r(t)=[\frac{1}{9}e^{-2t}+e^{-t}(\frac{1}{18}\sin 2t-\frac{1}{9}\cos 2t)]u(t)$$

分解成单位阶跃分量之和



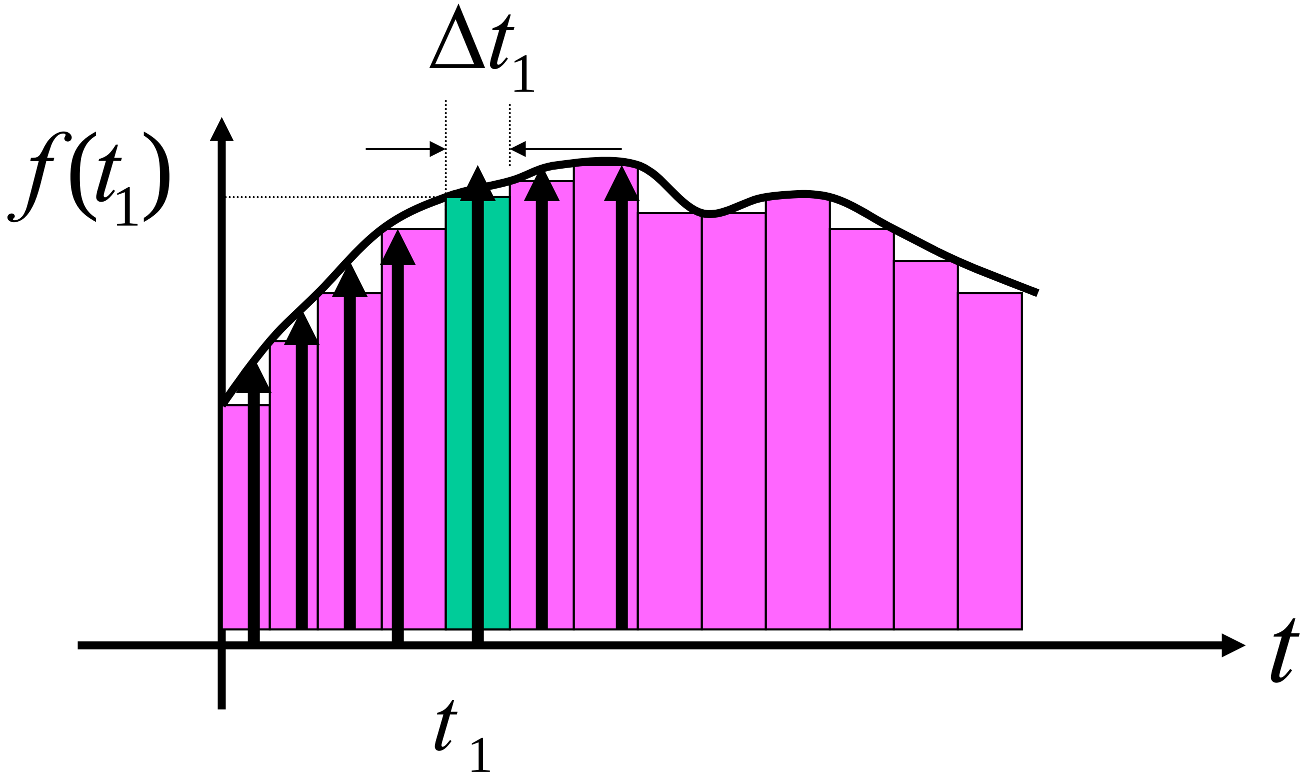
$$f(t)=f(0)u(t)+\sum_{t_1=\Delta t_1}^{t}\frac{[f(t_1)-f(t_1-\Delta t_1)]}{\Delta t_1}u(t-t_1)\Delta t_1$$

图中粉色部分

图中粉色以上的小矩形阶跃

$$f(t)=f(0)u(t)+\int_0^t\frac{df(t_1)}{dt_1}u(t-t_1)dt_1$$

分解成冲激脉冲分量之和



$$f(t)=\lim_{\Delta t_1\to 0}\sum_{t_1=0}^{t} f(t_1)[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)]\Delta t_1/\Delta t_1$$

$$f(t)=\lim_{\Delta t_1\to 0}\sum_{t_1=0}^{t} f(t_1)\delta(t-t_1).\Delta t_1$$

$$f(t)=\int_0^t f(t_1)\delta(t-t_1).dt_1$$

变量置换 $t_1\to t,\quad t\to t_0$

$$\boxed{f(t_0)=\int_0^{t_0} f(t)\delta(t-t_0)dt}$$

§ 2.6 阶跃响应与冲激响应(p58)

$\delta(t) \longrightarrow$ 系统A $\longrightarrow h(t)$

系统储能置为0

一、定义：

冲激响应：以单位冲激信号作为激励，系统产生的零状态响应称单位冲激响应，简称冲激响应。用h(t)表示。

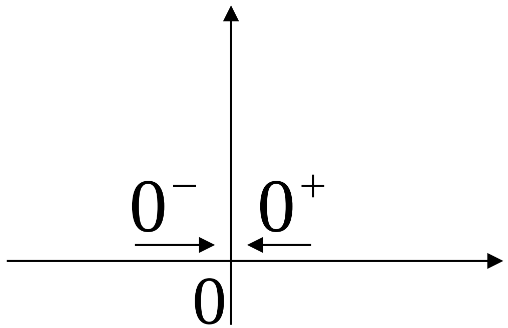
阶跃响应：以单位阶跃信号作为激励，系统产生的零状态响应称单位阶跃响应，简称阶跃响应。用g(t)表示。

二、冲激响应与阶跃响应的关系（互求）：

$$A\text{：}\quad h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

$$B\text{：}\ g(t)=\int_{0^-}^{t} h(\tau)d\tau$$

仿上可证。（注意 0^-的概念）



三、冲激响应的求法：(1)

$$e(t) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow r(t)$$

$$\therefore (p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0)r(t)=(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_0)e(t)$$

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow h(t) \qquad \boxed{h(t)=H(p)\delta(t)}$$

$$\therefore (p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0)h(t)=(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_0)\delta(t)$$

A： n>m时

$$h(t)=H(p)\delta(t)=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0}\delta(t)$$

$$=[\frac{k_1}{p-\lambda_1}+\frac{k_2}{p-\lambda_2}+\ldots+\frac{k_n}{p-\lambda_n}]\delta(t)$$

三、冲激响应的求法：(2)

不妨设特征根为单根即 $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ 各不相同，考察

$h_1(t) = \dfrac{k_1}{p-\lambda_1}\delta(t)$解的模式

$$h_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} u(t)$$

由$h_1(t) = \dfrac{k_1}{p-\lambda_1}\delta(t)$有：$\dfrac{d}{dt}h_1(t) - \lambda_1 h_1(t) = k_1\delta(t)$

两边同时乘以 $e^{-\lambda_1 t}(\neq 0)$, 有：

$$e^{-\lambda_1 t}\frac{d}{dt}h_1(t) - e^{-\lambda_1 t}\lambda_1 h_1(t) = k_1 e^{-\lambda_1 t}\delta(t)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}[e^{-\lambda_1 t}h_1(t)] = k_1 e^{-\lambda_1 t}\delta(t)$$

从0^-到t取积分： $e^{-\lambda_1 t}h_1(t) - h_1(0^-) = k_1\int_{0^-}^{t} e^{-\lambda_1 \tau}\delta(\tau)d\tau$

由$h_1(0^-) = 0$则$h_1(t) = k_1\int_{0^-}^{t} e^{\lambda_1 (t-\tau)}\delta(\tau)d\tau = k_1 e^{\lambda_1 t}u(t)$

$\therefore h(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t}u(t)$ —— （k_i的确定？）

三、冲激响应的求法：(3)

B：m=n时：

$$h(t)=H(p)\delta(t)=[b_m+H_1(p)]\delta(t)=b_m\delta(t)+H_1(p)\delta(t)$$

对$H_1(p)\delta(t)=h_1(t)$可仿A处理

$$\therefore h(t)=b_m\delta(t)+\sum_{i=1}^{n}k_i e^{\lambda_i t}u(t)$$

$$h(t)=\frac{2p+1}{p+5}\delta(t)=(2-\frac{9}{p+5})\delta(t)=2\delta(t)-9e^{-5t}u(t)$$

C：n<m时：

对H(p)用分式长除法，则：

$$H(p)=b_m p^{(m-n)}+\ldots+A+H_1(p)$$——仿A处理。

$$\therefore h(t)=b_m\delta^{(m-n)}(t)+\ldots+A\delta(t)+\sum_{i=1}^{n}k_i e^{\lambda_i t}u(t)$$

$$h(t)=\frac{p^2+p}{p+5}\delta(t)=(p-4+\frac{20}{p+5})\delta(t)$$

$$=p\delta(t)-4\delta(t)+\frac{20}{p+5}\delta(t)$$

$$=\delta'(t)-4\delta(t)+20e^{-5t}u(t)$$

§2.7　叠加积分(1))

一、杜阿美尔积分

基本思路：将信号分解成阶跃的形式，求出各阶跃的响应叠加后得到原信号施加于系统的零状态响应。

由 §2.5有：

$$e_a(t) = e(0)u(t) + \sum_{k=1}^{n}[\frac{\Delta e(t)}{\Delta t}]_{t=k\Delta t}\, u(t-k\Delta t)\Delta t$$

现$u(t) \to g(t), u(t-k\Delta t) \to g(t-k\Delta t)$

$$\therefore e_a(t) \to r_a(t) = e(0)g(t) + \sum_{k=1}^{n}[\frac{\Delta e(t)}{\Delta t}]_{t=k\Delta t}\, g(t-k\Delta t)\Delta t$$

$\Delta t \to 0$时，有：

$$e(t) \to r(t) = e(0)g(t) + \int_{0^+}^{t} e'(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{0^-}^{t} e'(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

（用换元法 可得到杜阿美尔积分的其他形式，且有相应的物理解释。）

§2.7　　叠加积分(2)

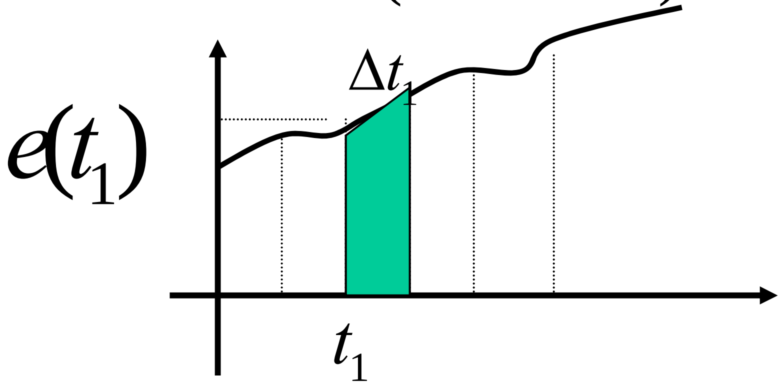
二、卷积积分(Convolution)　（重点）

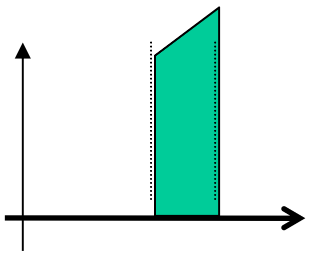
A：卷积积分的导出及其应用举例：

1、**理论基础：**叠加原理。施加于满足叠加原理系统的信号分解 成冲激信号之和，借助于冲激响应，将众冲激响应叠加，即得到系统的零状态响应。

§ 2.7　　叠加积分(4)

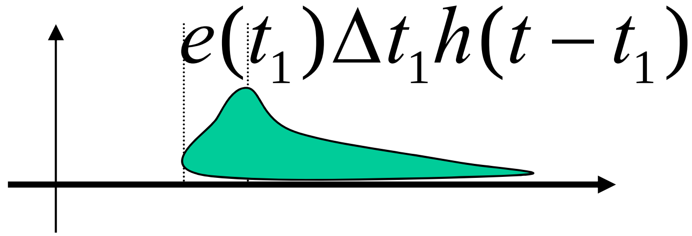
二、卷积积分(图形说明)



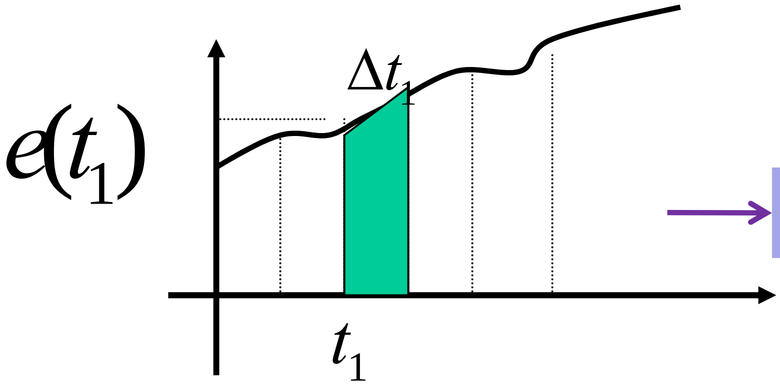


$e(t_1)\Delta t_1 \delta(t-t_1)$

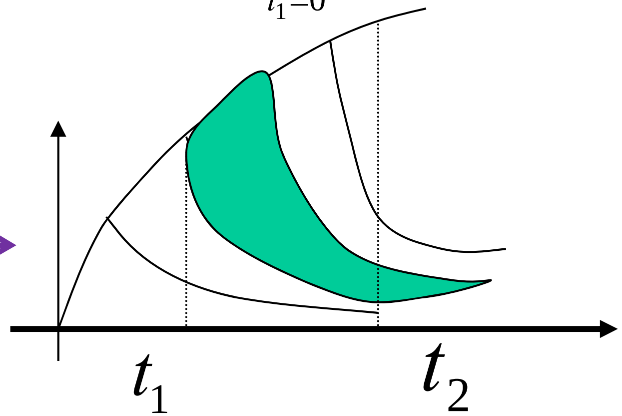
→ LTI系统 →



$$r(t_2)=\lim_{\Delta t_1\to 0}\sum_{t_1=0}^{t_2} e(t_1)\Delta t_1 h(t-t_1)$$



→ LTI系统 →



2、卷积的导出：

$$e(t) \approx \sum_{k=0}^{n} e(k\Delta t)\Delta t \delta(t - k\Delta t)$$

$$\text{由}\delta(t) \to h(t), \delta(t - k\Delta t) \to h(t - k\Delta t)$$

$$\text{则}e(t) \to r(t) \approx \sum_{k=0}^{n} e(k\Delta t)\Delta t h(t - k\Delta t)$$

$$\Delta t \to 0, \text{有：} \ r(t) = \int_{0^-}^{t} e(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$= \int_{0^-}^{t} e(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

（由换元法知）

§ 2.7　　叠加积分(3)

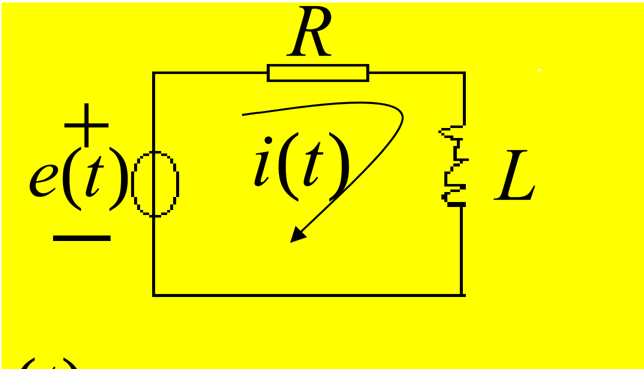
二、卷积积分

从数学意义上讲，卷积积分的表达式为：

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$ （积分限扩大）

记为：$s(t)=f_1(t)*f_2(t)$

或：$s(t)=f_1(t)\otimes f_2(t)$



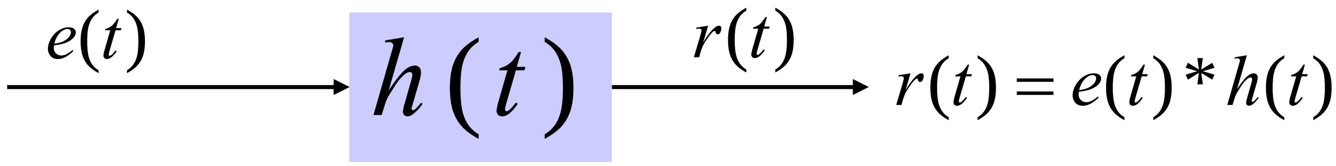
例：图示电路,$i(t)$为输出，求h(t),并求系统对e(t)=u(t)-u(t- t_0)的响应。

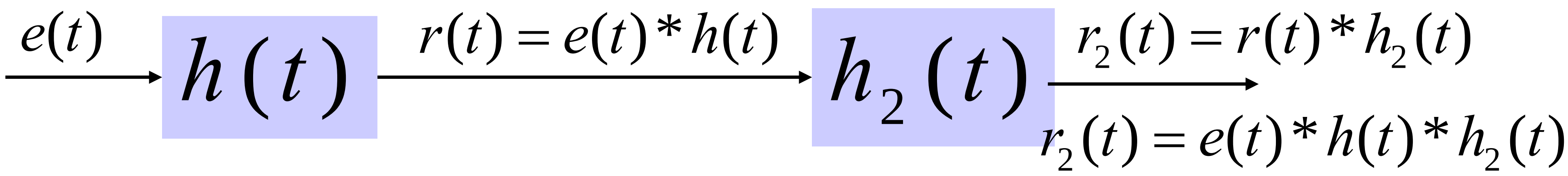
解：$Li'(t)+Ri(t)=e(t)\Rightarrow(Lp+R)i(t)=e(t)$

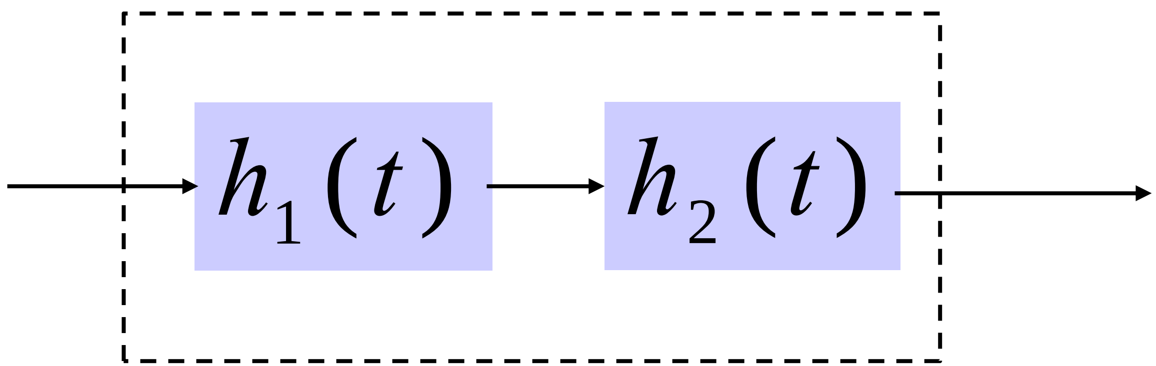
$$H(p)=\frac{1/L}{p+R/L}\Rightarrow h(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$$

$$i(t)=e(t)*h(t)=\int_{0^-}^{t} e(t)h(t-\tau)d\tau=\int_0^t[u(\tau)-u(\tau-t_0)]\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}d\tau$$

$$=\frac{1}{R}(1-e^{\frac{-R}{L}t})u(t)-\frac{1}{R}[1-e^{\frac{-R}{L}(t-t_0)}]u(t-t_0)$$







$h_1(t) * h_2(t)$

§ 2.7　叠加积分(5)

二、卷积积分

2、卷积的图形解析

例1：求解y(t)=e(t)*h(t)

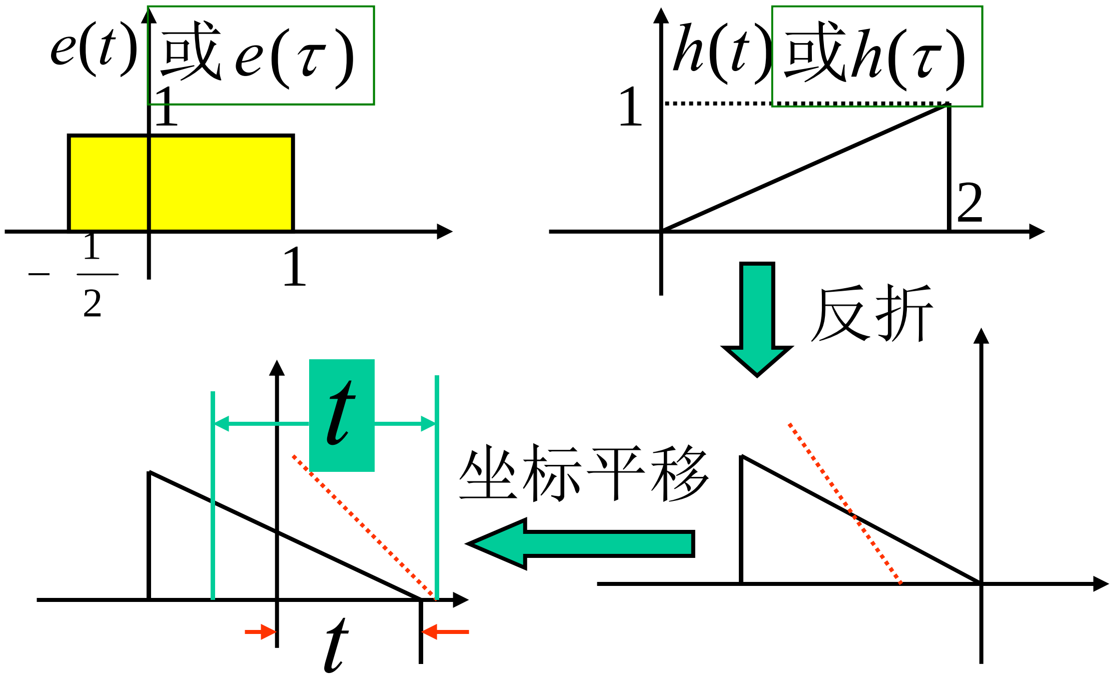
解：A、换坐标

B、反折

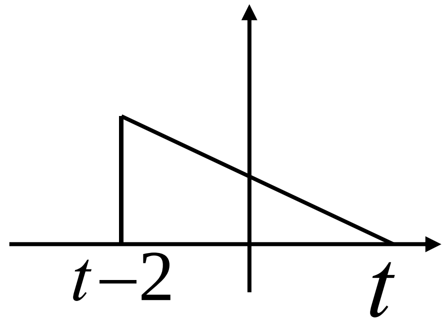
C、坐标平移

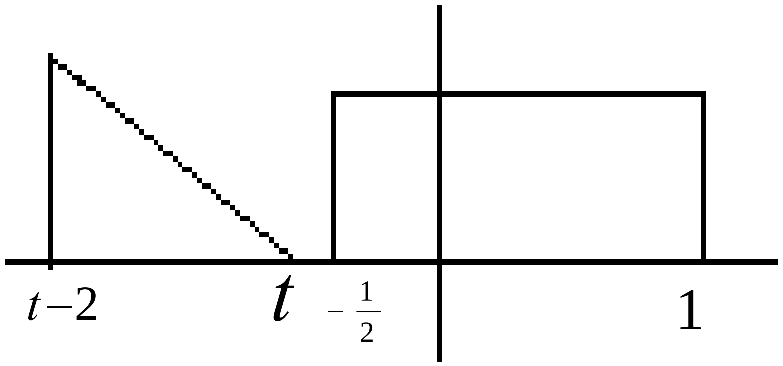
D、相乘

E、积分

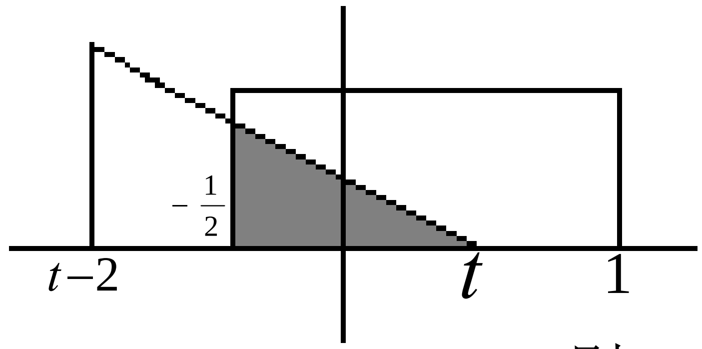


$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$





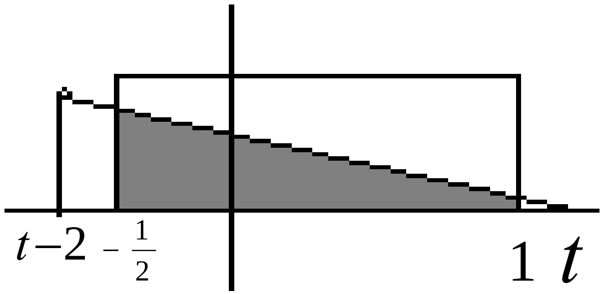
$a:-\infty < t \le -0.5$则$e(t)*h(t)=0$



$b:-0.5 < t \le 1$则

$$e(t)*h(t)=\int_{-0.5}^{t}1\times 0.5(t-\tau)d\tau$$

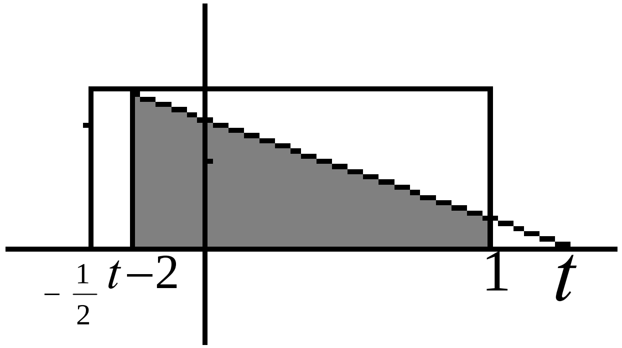
$$=\frac{1}{4}t^2+\frac{t}{4}+\frac{1}{16}$$



$c:1 < t \le 1.5$则

$$e(t)*h(t)=\int_{-0.5}^{1}1\times 0.5(t-\tau)d\tau$$

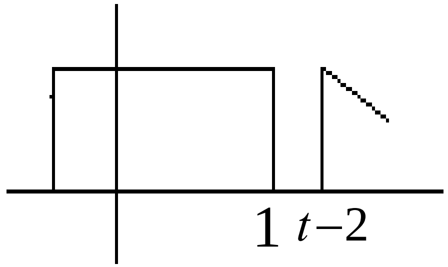
$$=\frac{3}{4}t-\frac{3}{16}$$



$d:1.5 < t \le 3$则

$$e(t)*h(t)=\int_{t-2}^{1}1\times 0.5(t-\tau)d\tau$$

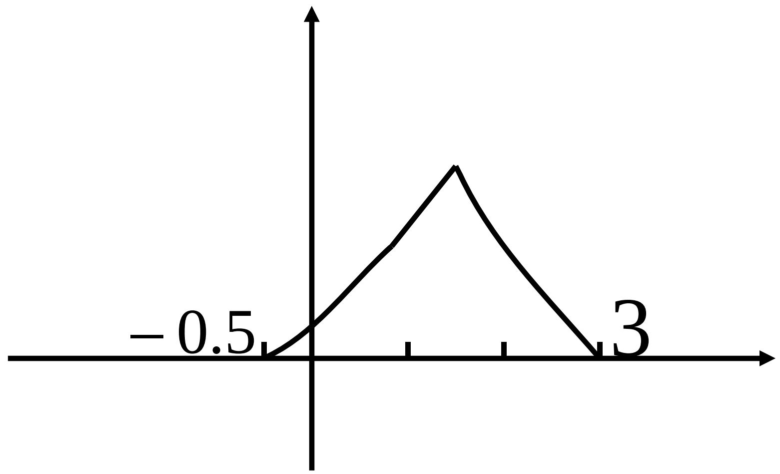
$$=-\frac{3}{4}t^2+\frac{t}{2}+\frac{3}{4}$$



$e:t>3$则$y(t)=0$

§2.7　　叠加积分(6)

二、卷积积分



$y(t)=e(t)*f(t)$结果的定义域：

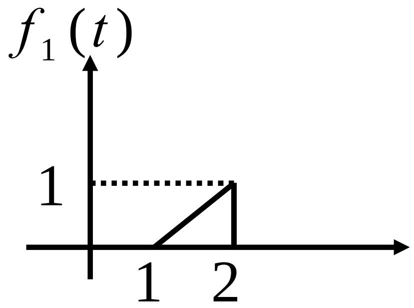
$y_{左}=e_{左}+f_{左}$

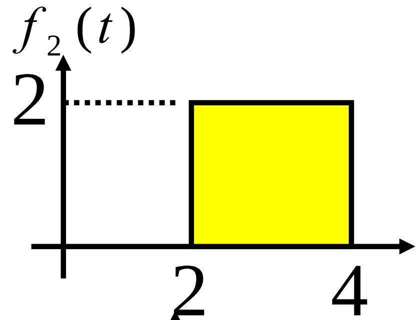
$y_{右}=e_{右}+f_{右}$

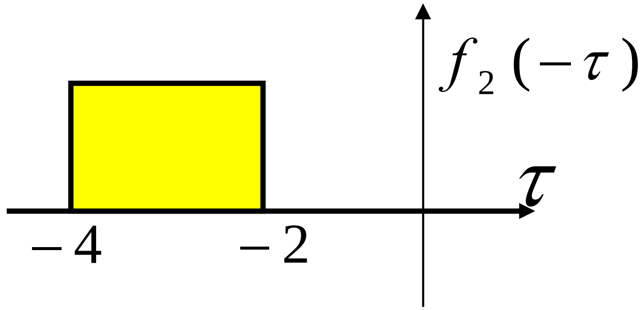
§ 2.7 叠加积分(7)

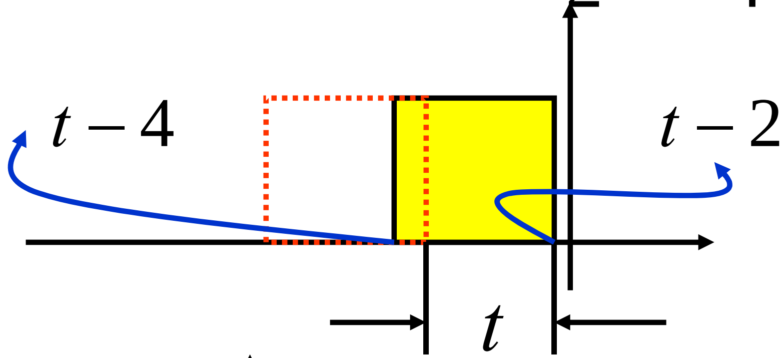
二、卷积积分

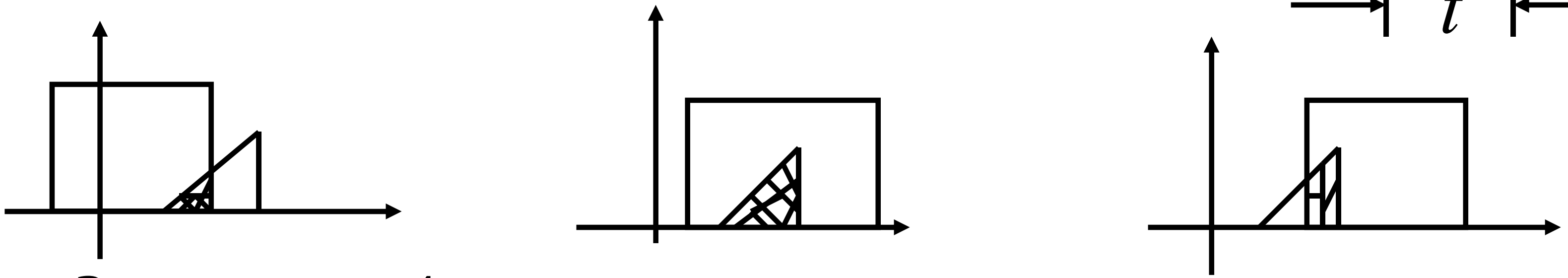
例2：求 $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$











$a: 3 < t \leq 4$ $b: 4 < t \leq 5$ $c: 5 < t \leq 6$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$t < 3$, $y(t) = 0$

$$3 \leq t < 4 : y(t) = \int_1^{t-2} 2(\tau - 1) d\tau = t^2 - 6t + 9$$

§2.7 叠加积分(8)

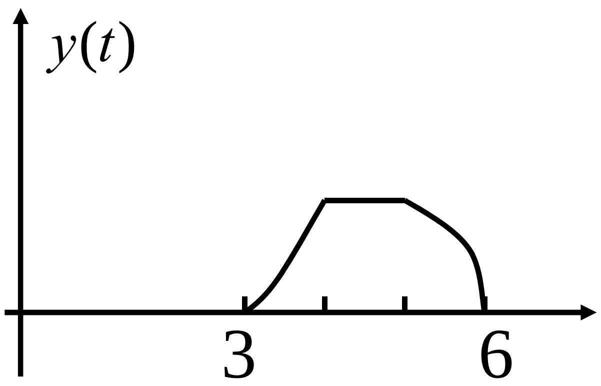
二、卷积积分

继例2

$$4 \le t < 5: y(t) = \int_{1}^{2} 2(\tau - 1) d\tau = 1$$

$$5 \le t < 6: y(t) = \int_{t-4}^{2} 2(\tau - 1) d\tau = t^2 - 6t + 9$$

$$t > 6: y(t) = 0$$



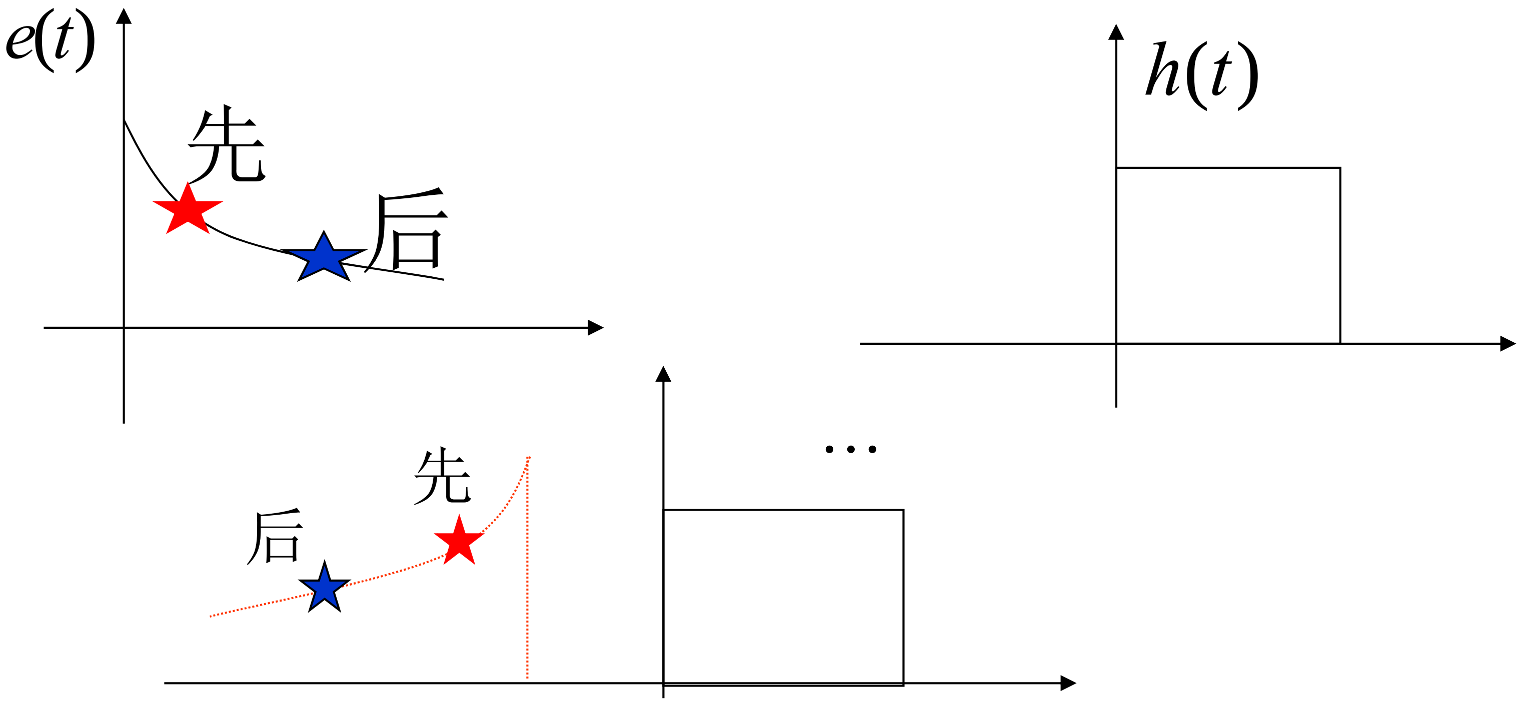
$y(t) = f_1(t) * f_2(t)$结果的定义域:

$$y_{左} = f_{1左} + f_{2左}$$

$$y_{右} = f_{1右} + f_{2右}$$

§2.7　叠加积分(9)

3、用卷积积分求系统的零状态响应的物理解析（卷积的物理含义）



§2.8 卷积的性质(1)

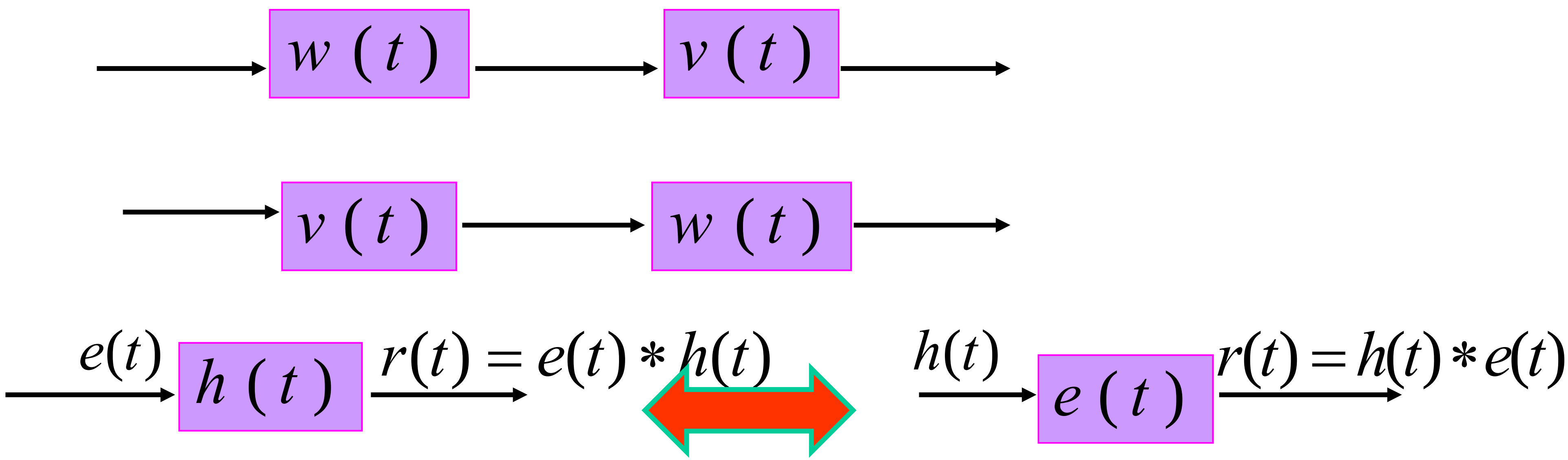
一、卷积代数

1、交换律：$w(t)*v(t)=v(t)*w(t)$

证明：$w(t)*v(t)=\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)v(t-\tau)d\tau$

令$\tau=t-x$有：

$$w(t)*v(t)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t-x)v(x)dx=v(t)*w(t)$$

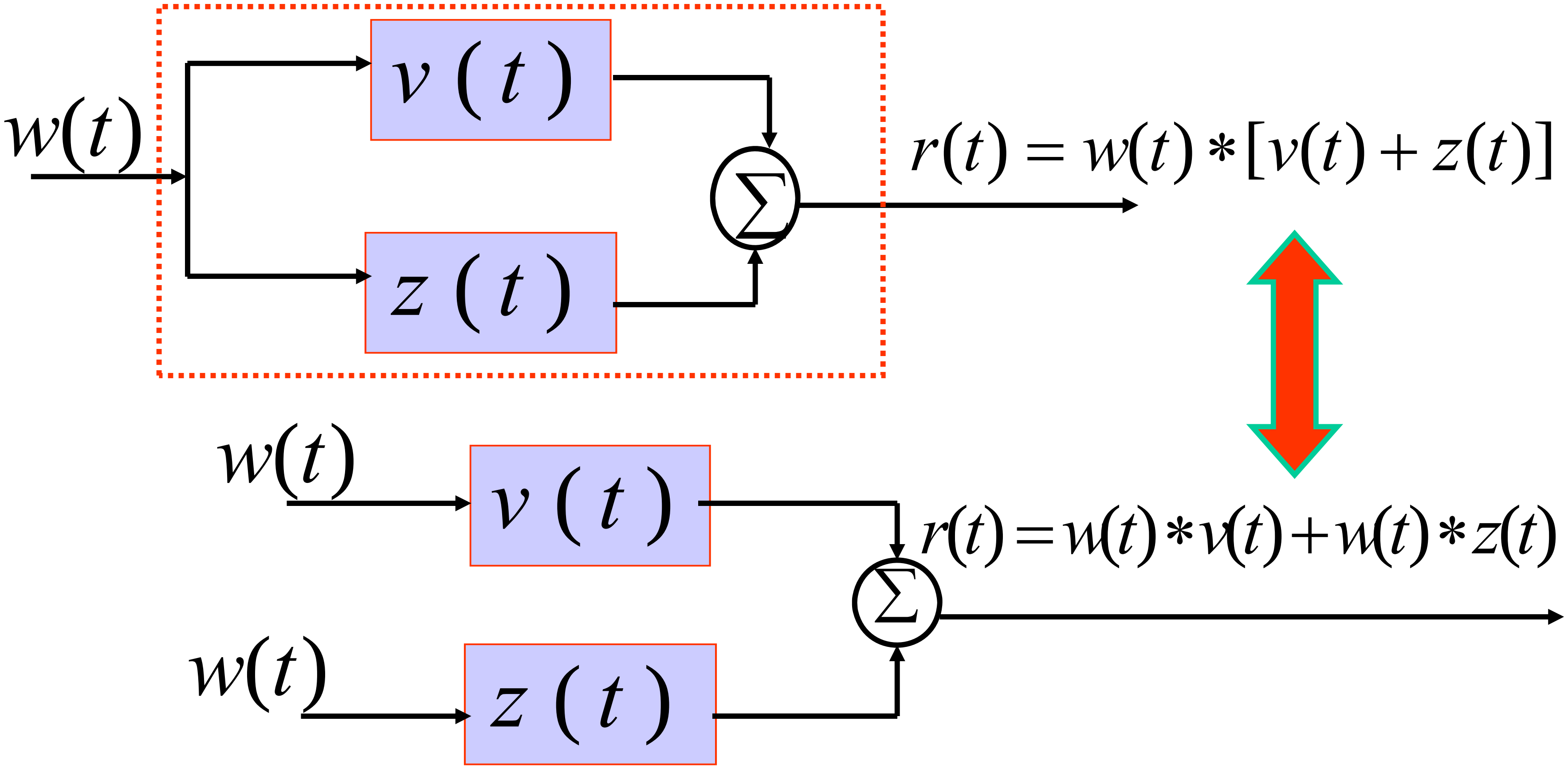


§2.8 卷积的性质(2)

一、卷积代数

2、分配律：$w(t)*[v(t)+z(t)]=w(t)*v(t)+w(t)*z(t)$

可用定义证明。

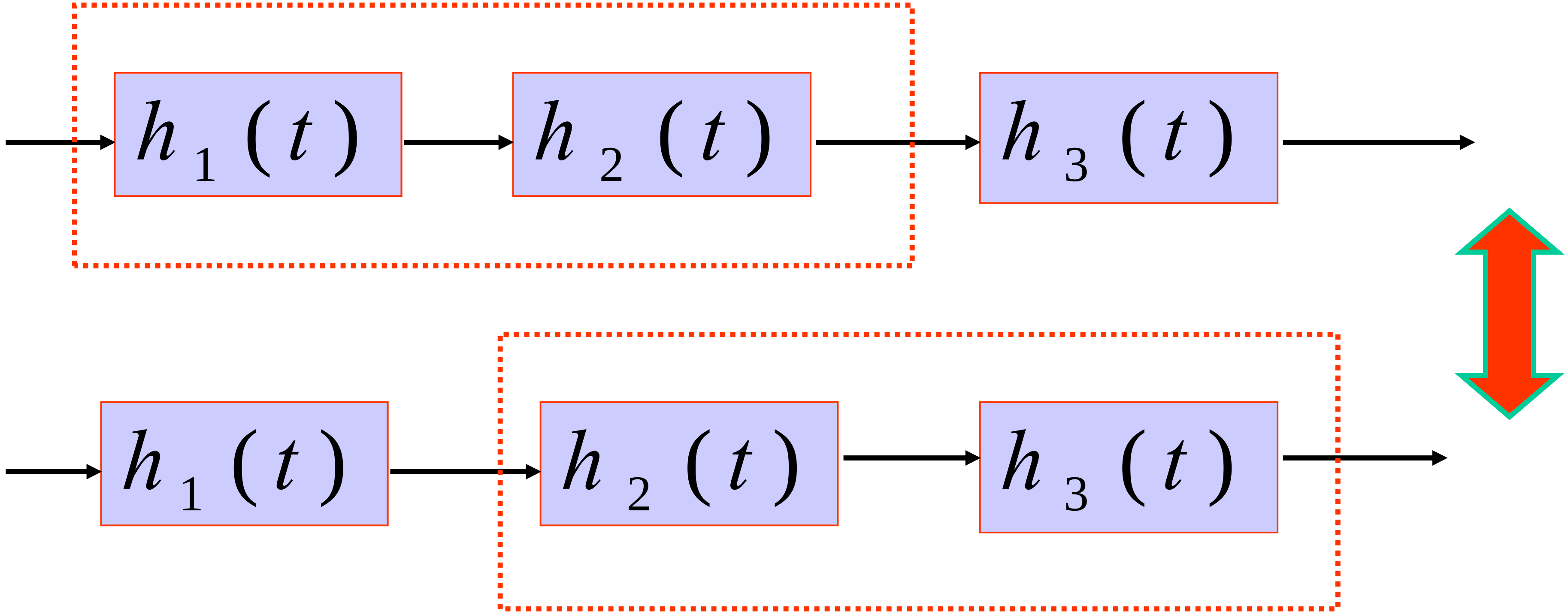


§2.8　卷积的性质(3)

一、卷积代数

3、结合律：$[w(t)*v(t)]*z(t)=w(t)*[v(t)*z(t)]$

证明见P_{65}，用定义证。



§2.8　卷积的性质(4)

二、卷积的微分与积分

1、微分：$\frac{d}{dt}[w(t)*v(t)]=w(t)*[\frac{d}{dt}v(t)]=[\frac{d}{dt}w(t)]*v(t)$

2、积分：$\int_{-\infty}^{t}[w(x)*v(x)]dx=w(t)*[\int_{-\infty}^{t}v(x)dx]$

$$=[\int_{-\infty}^{t}w(x)dx]*v(t)$$

由上两性质显然有：

$$w(t)*v(t)=[\frac{d}{dt}w(t)]*[\int_{-\infty}^{t}v(x)dx]=[\int_{-\infty}^{t}w(x)dx]*[\frac{d}{dt}v(t)]$$

同样：$s(t)=w(t)*v(t)$则：$s^{(i)}(t)=w^{(j)}(t)*v^{(i-j)}(t)$

注意：由于任意常数微分后恒为零，故两信号卷积中**有常数存在时，微积分性质不可用。**

§2.8　卷积的性质(5)

三、函数与冲激函数或阶跃函数的卷积

1、$f(t)*\delta(t)=f(t)$

$$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=f(t)$$

2、$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$且$f(t)*\delta^{(k)}(t)=f^{(k)}(t)$

3、$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$

4、延时后的卷积特性：两函数延时后的卷积，等于两个函数卷积后的延时，其延时量为两函数分别延时量的和。即：

$$若 f_1(t) * f_2(t) = f(t) 则$$

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$$

另：卷积四种计算方法：

1、查表法

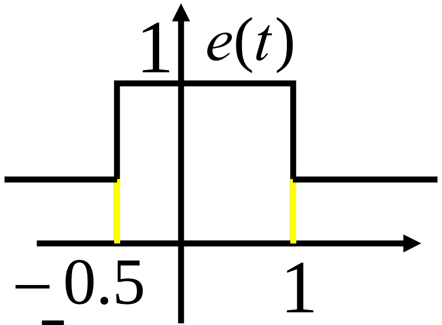
2、解析法

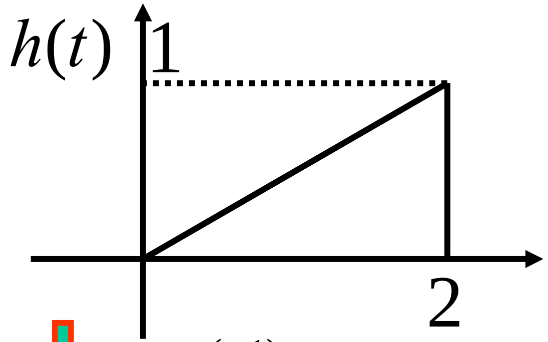
3、图解法*

4、数值计算法：多用于计算机处理。

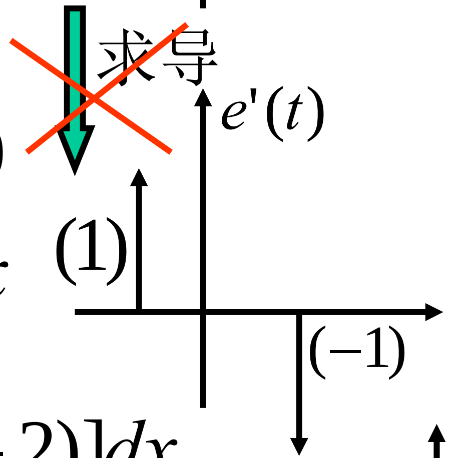
§ 2.8　卷积的性质(6)

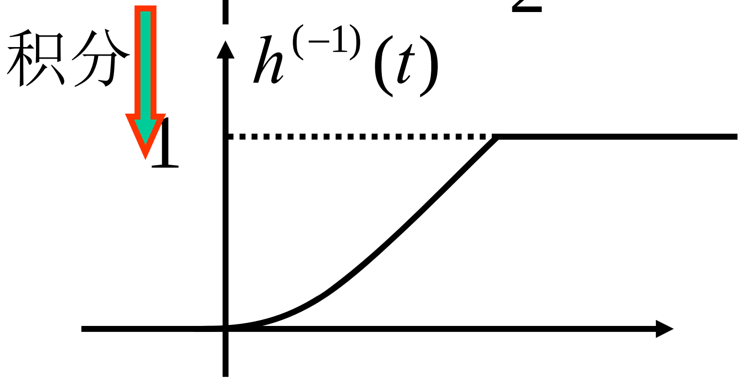
例：计算r(t)=e(t)*h(t)





解：



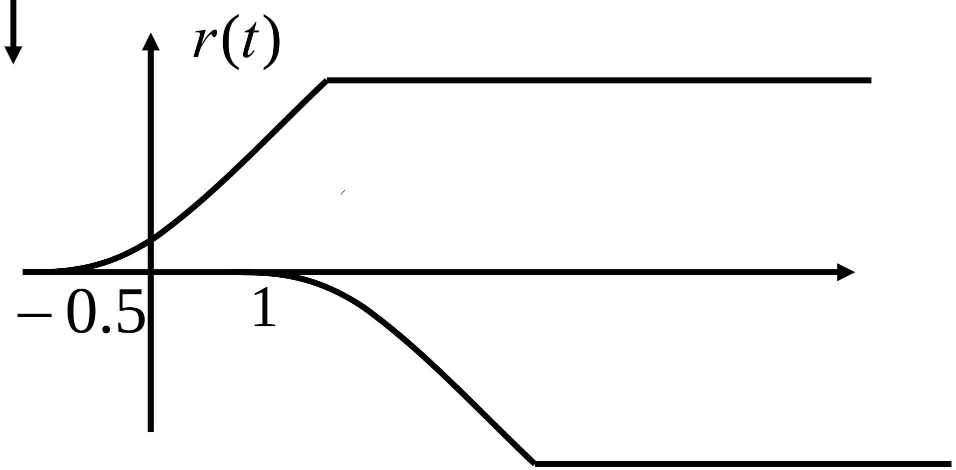


$$e'(t)=\delta(t+0.5)-\delta(t-1)$$

$$h^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}h^{(-1)}(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{t}0.5x[u(x)-u(x-2)]dx$$

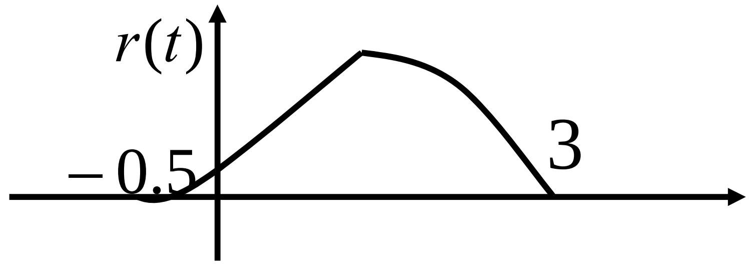
$$=\frac{t^2}{4}[u(t)-u(t-2)]-u(t-2)$$



$$r(t)=e'(t)*h^{(-1)}(t)$$

$$=h^{(-1)}(t+0.5)-h^{(-1)}(t-1)$$

$$=\ldots$$



§2.9 线性系统响应的时域求解(1)

全响应=零输入响应+零状态响应

时域分析法的基本步骤：

$$\text{系统} \rightarrow \text{建立系统的微分方程} \rightarrow \text{求转移算子}\ H(p) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \quad\text{求特征根} \rightarrow \text{求零输入响应}\ r_{zi}(t) \\ \text{求冲激响应}\ h(t) \rightarrow \text{求零状态响应}\ r_{zs}(t) \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{全响应}\ r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)$$

一般系统：$r(t) = H(p)e(t)$ 其中 $H(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$

§ 2.9 线性系统响应的时域求解(2)

设D(p)=0无重根，且n>m,有

$$H(p)=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0}=\frac{k_1}{p-\lambda_1}+\frac{k_2}{p-\lambda_2}+\ldots+\frac{k_n}{p-\lambda_n}$$

则： $r_{zi}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i t}u(t)$ —— （c_i由系统的初始条件决定）

$h(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{\lambda_i t}u(t)$ —— （k_i由系统的数学模型决定）

$$r_{zs}(t)=h(t)*e(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{\lambda_i t}u(t)*e(t)$$

$$\therefore r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i t}u(t)+\sum_{i=1}^{n}k_i e^{\lambda_i t}u(t)*e(t)$$

§2.9　线性系统响应的时域求解(3)

1、指数信号作用下系统的响应

不妨令输入信号　$e(t) = e^{st}u(t)$

$$\therefore r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t} * e^{st}$$

$$\therefore r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^{n} k_i [\frac{1}{\lambda_i - s}(e^{\lambda_i t} - e^{st})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (c_i - \frac{k_i}{s - \lambda_i}) e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s - \lambda_i} e^{st}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} + H(s) e^{st}$$

自然响应分量

受迫响应分量

§2.9 线性系统响应的时域求解(4)

$$\begin{cases}\text{自然响应分量：自然(由)频率}\lambda\text{所对应的响应分量。}\\ \text{受迫响应分量：外加激励频率}s\text{所对应的响应分量。}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{瞬时响应分量：随时间 增加而趋向于零的响应 分量。}\\ \text{稳态响应分量：随时间 增加而趋向于稳定的的 响应分量。}\end{cases}$$

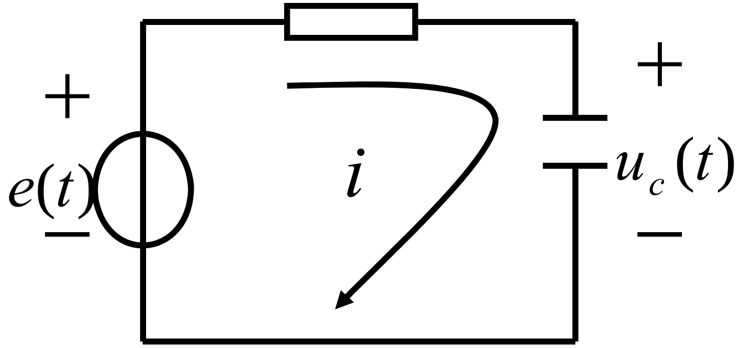
全响应分解的三种常用方式：

$$\begin{cases}\text{全响应} = \text{零输入响应} + \text{零状态响应}\\ \text{全响应} = \text{自然响应} + \text{受迫响应}\\ \text{全响应} = \text{瞬态响应} + \text{稳态响应}\end{cases}$$

§ 2.9 线性系统响应的时域求解(4)

例：图示电路，$R=1\Omega, c=1F$,

$e(t)=(1+e^{-3t})u(t), u_c(0)=1v$求$u_c(0)$。



解：对电路用KVL,有：

$$RCu_c'(t)+u_c(t)=e(t) \Rightarrow (p+1)u_c(t)=e(t)$$

系统特征根为-1，故零输入响应为：$u_{czi}(t)=ce^{-t}u(t)$

$$u_c(0)=c=1 \Rightarrow u_{czi}(t)=e^{-t}u(t)$$

$$u_c(t)=\frac{1}{p+1}e(t) \Rightarrow H(p)=\frac{1}{p+1} \Rightarrow h(t)=e^{-t}u(t)$$

$$\therefore u_{czs}(t)=e(t)*h(t)=[(1+e^{-3t})u(t)]*e^{-t}u(t)$$

$$=(1-0.5e^{-t}-0.5e^{-3t})u(t)$$

$$\therefore u_c(t)=u_{czi}(t)+u_{czs}(t)=e^{-t}u(t)+(1-0.5e^{-t}-0.5e^{-3t})u(t)$$

$$=\underbrace{0.5e^{-t}u(t)}_{\text{自然响应}}+\underbrace{(1-0.5e^{-3t})u(t)}_{\text{受迫响应}}=\underbrace{(0.5e^{-t}-0.5e^{-3t})u(t)}_{\text{瞬态响应}}+\underbrace{u(t)}_{\text{稳态响应}}$$

自然响应　　受迫响应　　瞬态响应　　稳态响应

§2.例

系统数学模型为：$r''(t)+5r'(t)+4r(t)=e''(t)+2e'(t)+e(t)$

若激励$e(t)=e^{-t}u(t)$，系统初始状态$r(0)=r'(0)=2$，求$r_{zi}(t),r_{zs}(t)$

$h(t)$及全响应$r(t)$.

解：由微分方程得： $H(p)=\dfrac{p^2+2p+1}{p^2+5p+4}$

1、求$r_{zi}(t)$：$D(p)=p^2+5p+4=0\Rightarrow$特征根$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-4$

$$r_{zi}(t)=(c_1e^{-t}+c_2e^{-4t})u(t)$$

$$\begin{cases} r(0)=c_1+c_2=2 \\ r'(0)=-c_1-4c_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{10}{3} \\ c_2=\dfrac{-4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r_{zi}(t)=[\frac{10}{3}e^{-t}-\frac{4}{3}e^{-4t}]u(t)$$

2、求 $h(t):H(p)=1-\dfrac{3(p+1)}{p^2+5p+4}=1-3\times(\dfrac{k_1}{p+1}+\dfrac{k_2}{p+4})$

§ 2.例继

3、求$r_{zs}(t)$：$r_{zs}(t) = [e^{-t}u(t)] * [\delta(t) - 3e^{-4t}u(t)]$

$$= e^{-t}u(t) * \delta(t) - e^{-t}u(t) * [3e^{-4t}u(t)]$$

$$= e^{-t}u(t) - 3 \times \frac{1}{-4-(-1)}[e^{-4t} - e^{-t}]u(t)$$

$$= e^{-4t}u(t)$$

4、求$r(t)$：$r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t) = (\frac{10}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t})u(t)$

思考：若 $H(p) = \dfrac{p^2 + 2p + 1}{p^2 - 5p + 4}$呢？

其时 $r(t) = (c_1 e^{t} + c_2 e^{4t} + c_3 e^{-t})u(t)$

$t \to \infty$时：$r(t) \to \infty$