第五章
傅立叶变换应用于通信系统—滤波，调制与抽样

§5.1引言 $E = MC^2$

E:information Environment

M:Multimedia

C:computer

C:communication

数字化浪潮的技术核心是4C

4C

- Computer
- Communication
- Consumer Electronics
- Content：服务内容

网络时代的三大基本定律

摩尔定律:

CPU性能18个月翻番, 10年100倍。

所有电子系统（包括电子通信系统，计算机）都适用

光纤定律:

超摩尔定律，

骨干网带宽9个月翻番，10年10000倍。

带宽需求呈超高速增长的趋势

迈特卡尔夫定律: 联网定律，

网络价值随用户数平方成正比。未联网设备增加N倍，效率增加N倍。联网设备增加N倍，效率增加N^2倍

付氏变换在图像数据压缩中的应用。

位图图像的大小

- 图像以字节来表示其所需要的存储空间大小，图像大小与图像的像素尺寸、图像的位深度有关。例如，一个24位的RGB位图，大小为640x480像素，则图像数据的大小为 640 x 480 x 3 = 921,600 字节，约900KB 。
- 若以600dpi扫描一幅A4幅面的24位真彩图像，其图像数据大约有99MB 。1M接入的ADSL也需要下载大约14分钟！

24位深度图像（380k）

8位深度图像（128k）

4位深度图像（64k）

功能	傅里叶变换性质	应用举例	重点	配合
滤波	卷积定理	无失真传输条件 理想低通、带通	5.3 5.4	5.5 5.6
调制	频移定理	SC – AM 、 SSB 频分复用	5.7 5.11	5.8
抽样	抽样定理	抽样信号恢复 时分复用 PCM 、数字通信	5.9 5.11	5.10
时频域窗函数	尺度定理 时移定理 频移定理	小波变换 短时傅里叶变换		5.8

*时域,复频域,频域完全响应的求解公式

$$r(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i t}+\int_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau\text{(时域)}$$

$$r(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i t}+\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}H(s)F(s)e^{st}ds\text{(复频域)}$$

$$r(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i t}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)F(\omega)e^{j\omega t}d\omega\text{(频域)}$$

*.系统概念的推广

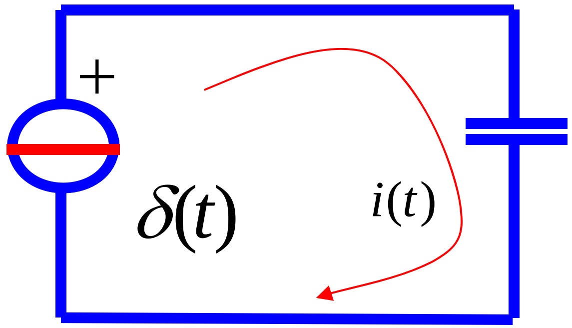
$$f_1 * f_2 \leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)$$

$$f(t) \longrightarrow \boxed{F_2(j\omega)} \xrightarrow{y(t)} \qquad \delta(t) \longrightarrow \boxed{F_1(j\omega)} \xrightarrow{f_1(t)} \boxed{F_2(j\omega)} \xrightarrow{y(t)}$$

*.傅立叶变换只用于分析稳定系统

*临界系统,初态=0,求Vc(t)=?

$$H(p) = \frac{v_c(p)}{I(P)} = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = u(t)$$



$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$v_c(t) = F^{-1}[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)] = u(t)$$

$$v_c(t) = F^{-1}\left[\frac{1}{s}\Big|_{s=jw}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \quad \text{(错)}$$

*.不稳定系统无法使用付氏变换;

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{p-1}} \longrightarrow h_1(t) \qquad\qquad \delta(t) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{j\omega-1}} \longrightarrow h_2(t)$$

频域中的
反因果系统

$$\because \ \lambda = 1 > 0$$

$$\therefore \ h_1(t) = e^{t}u(t)\text{而}$$

$$h_2(t) = F^{-1}\left[\frac{1}{j\omega - 1}\right] = -e^{t}u(-t)$$

§5.2利用系统函数H(jω)求响应

一.非正弦周期信号激励下系统的稳态响应

1.傅立叶级数法

(1).原理：迭加原理和相量法。

迭加性:等于一系列正弦信号同时作用于系统时所引起的响应之和。

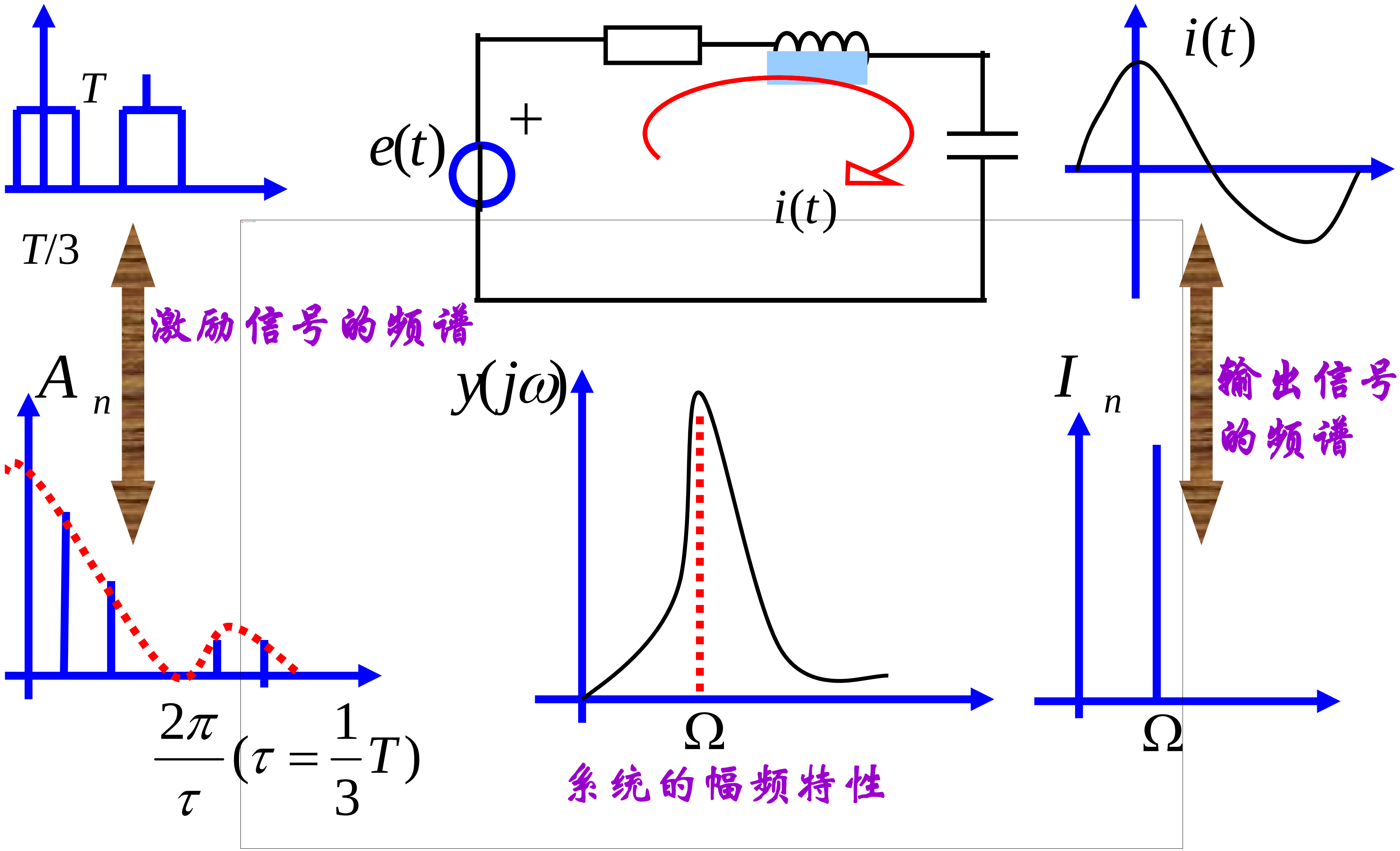
均匀性：在正弦激励产生的响应电压或响应电流仍是同频率的正弦信号。

(2).计算步骤:

*.举例、一个周期矩形脉冲信号作用于$r = 20\Omega$
$L = 1000\mu H, C = 1000pF$ 组成的串连谐振电路中,
求:
电路中的电流.(设E=1V,T=6.28微秒,脉宽＝(1/3)T

解: $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6.28}{6.28\times10^{-6}} = 10^{6rad} / s$

$$e(t) = [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \varphi)$$


T
T/3
e(t)
+
i(t)
i(t)
激励信号的频谱
A_n
$y(j\omega)$
I_n
输出信号的频谱
$\frac{2\pi}{\tau}(\tau = \frac{1}{3}T)$
Ω
Ω
系统的幅频特性

a.把激励信号展开成傅立叶级数

$$A_n = \frac{2A\tau}{T}[\frac{\sin n\pi\tau/T}{n\pi\tau/T}], A_0 = \frac{A\tau}{T} = \frac{1}{3}$$

$$A_n = \frac{2}{3}[\frac{\sin n\pi/3}{n\pi/3}] = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}$$

$$\therefore e(t) = 2[\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi} sin\frac{n\pi}{3}\cos n\Omega t]$$

b.计算电路对各次谐波的输入导纳

$$y(j\omega) = \frac{1}{r + j(\omega L - \frac{1}{\omega c})} = \frac{1}{\sqrt{(r^2 + (\omega L - 1/\omega c))}} e^{-\varphi}$$

$$\varphi = -arctg\frac{\omega L - 1/\omega C}{r}$$

c.对各次谐波分量单独求取系统的响应

$$i(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|y(n\Omega)|\sin n\pi/3}{n}\cos(n\Omega t-\operatorname{artg}\frac{n\Omega L-1/n\Omega c}{r})$$

$$n\Omega L=n\times10^{6}\times1000\times10^{-6}=1000n$$

$$1/n\Omega c=n\times10^{6}\times1000\times10^{-12}=1000/n$$

$$i(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sin(n\pi/3)}{\sqrt{\left(20^{2}+(1000n-1000/n)^{2}\right)}}\cos(n\Omega t-\operatorname{arctg}\frac{50(n^{2}-1)}{n}$$

$n=1$时， $\omega L-\dfrac{1}{\omega C}=0$

电路发生谐振。

n=1时,基波电流的振幅为27.6ma

n=2时,二次谐波电流的振幅为3.68ma.

2.用付氏变换法分析周期信号激励下的响应

a.正弦信号的激励

设.e(

则.E(

H(j

R(

= j

∴ r(

$$r(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}j\pi\left|H(j\omega_0)\right|$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-j\varphi}\delta(\omega+\omega_0)-e^{i\varphi}\delta(\omega-\omega_0)]e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|H(j\omega)\right|e^{-j\varphi}e^{-j\omega_0 t}-e^{j\varphi}e^{j\omega_0 t}$$

$$=\left|H(j\omega)\right|\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

P310.5-2： $H(jw)=1/(jw+1), e(t)=\sin t+\sin 3t$

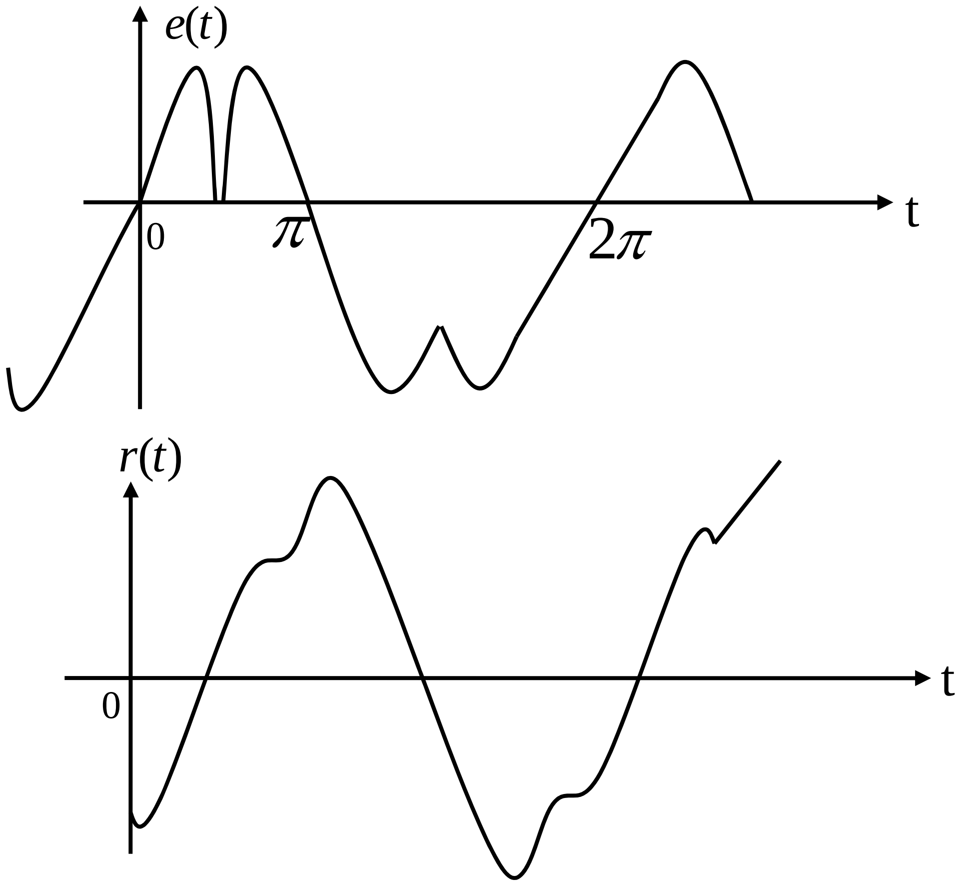
$$E(j\omega)= j\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-\omega)]+ j\pi[\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)]$$

$$\because H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\omega^{2}\right)}}e^{-jtg^{-1}\omega}$$

$$R(j\omega)=H(j\omega)E(j\omega)$$

$$r(t)=F^{-1}[R(j\omega)]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t-45^{0})+\frac{1}{\sqrt{10}}\sin(3t-71.^{0}56^{'})$$



失真

已知某LTI系统的动态方程为y"(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)，求系统的频率响应H(jω)。

解:利用Fourier变换的微分特性，微分方程的频域表示式为

$$(j\omega)^2 Y_f(j\omega) + 3j\omega Y_f(j\omega) + 2Y_f(j\omega) = F(j\omega)$$

由定义可求得

$$H(j\omega) = \frac{Y_f(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$

已知某LTI系统的冲激响应为$h(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$，

求系统的频率响应$H(j\omega)$。

解：利用$H(j\omega)$与$h(t)$的关系

$$H(j\omega)=F[h(t)]=\frac{1}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}$$

$$=\frac{1}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2}$$

*.已知某系统函数 $H(s)$零极点分步如图，若冲激响应的初值 $h(0^+)=2$，激励信号 $e(t)=\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\,u(t)$，求该系统的稳态响应.

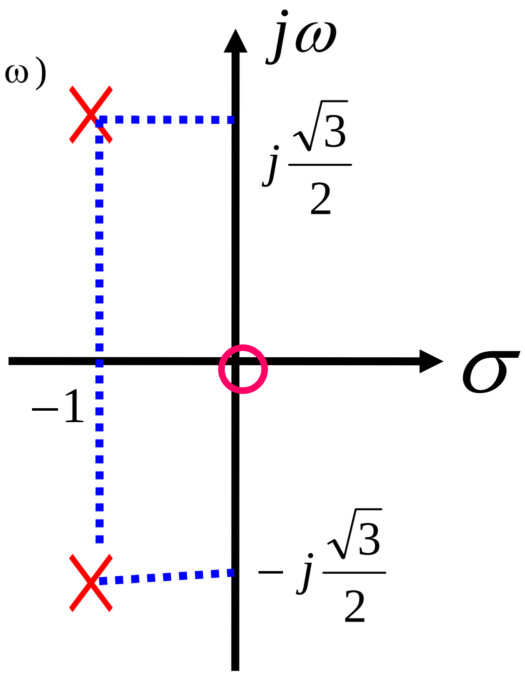
解：若激励 $e(t)=E_m\sin\omega_0 t$

系统的频率特性为：$H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

则系统的稳态响应为：

$$r(t)=|H(\omega_0)|E_m\sin[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]$$

对于稳定系统 $H(\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}$



由图得出： $H(s)=\dfrac{ks}{(s+1)^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2}$

由初值定理得： $h(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty} sH(s)=k;\therefore k=2$

$$\therefore H(s)=\frac{2s}{(s+1)^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

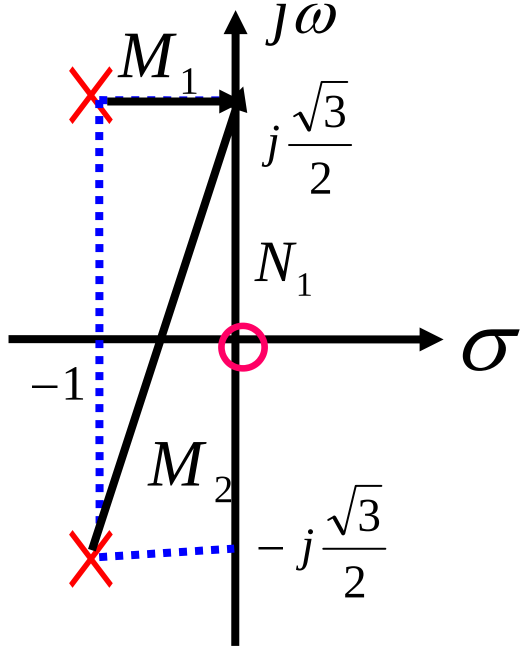
$$H(j\frac{\sqrt{3}}{2})=H(s)\Big|_{s=j\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2j\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{(j\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1)^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{j\sqrt{3}}{1+j\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{j30^0}$$

用此式　$r(t)=\left|H(\omega_0)\right|E_m\sin(\omega_0 t+\varphi(\omega_0))$

求得稳态响应为：$r(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+30^0)$

利用S平面矢量因子求将更为 简单，当 $\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时：

零极点矢量因子图如下



$$H(j\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{2N_1}{M_1M_2}e^{j(90^0-0^0-60^0)}=\frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-2}e^{j30^0}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{j30^0}$$

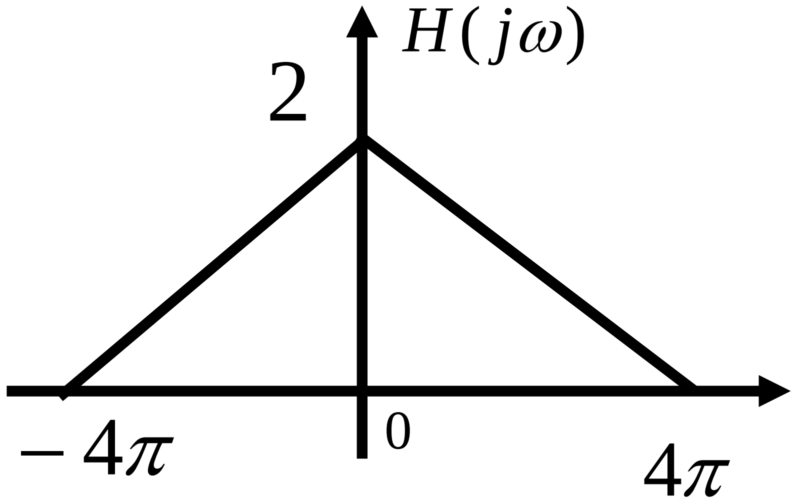
两点说明：

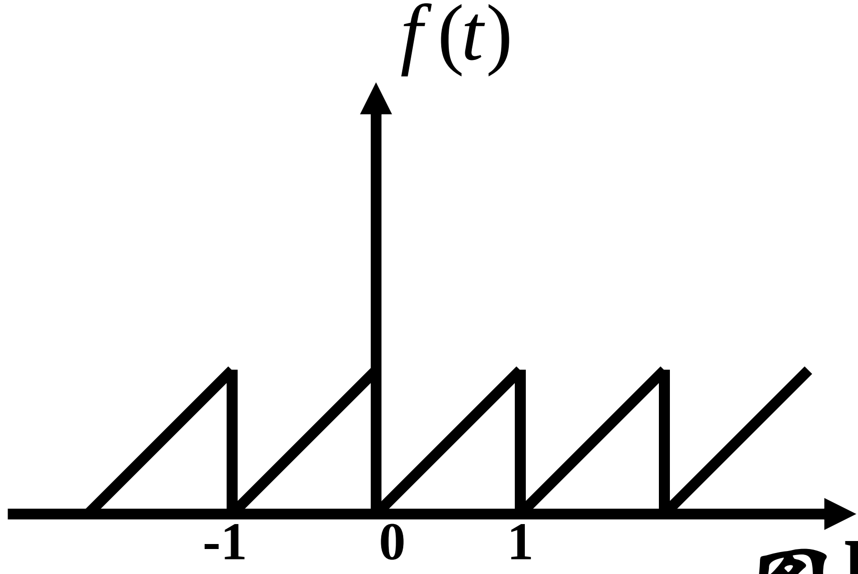
1.这个方法只能用于稳定系统。

2.只能求稳态响应，不能求暂态响应。

b.非正弦周期信号的激励

* H(jω)如图所示,其相位特性为零.输入信号如图b,求输出信号y(t)=?





图b

解:1, $T=1s$, $\Omega=2\pi rad/s$

$$A_n = 2\int_0^1 t e^{jn\Omega t} dt = j\frac{1}{n\pi}$$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^1 tdt = 1$$

$$\mathrm{F}(\omega) = \pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\Omega).A_n$$

$$= \pi\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{j}{n\pi}\delta(\omega - 2\pi n) + \pi\delta(\omega) + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\delta(\omega - 2\pi n)$$

$$2.\mathrm{y}(j\omega) = \mathrm{F}(j\omega)\mathrm{H}(j\omega)$$

$$=[-j\pi\delta(\omega + 2\pi) + \pi\delta(\omega) + j\pi\delta(\omega - 2\pi)]\mathrm{H}(j\omega)$$

$$3.y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y(j\omega)e^{j\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[-j\delta(\omega+2\pi)+\pi\delta(\omega)+j\delta(\omega-2\pi)]H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}[-jH(-2\pi)e^{-j2\pi t}+\pi H(0)+jH(2\pi)e^{j2\pi t}]$$

$$=\frac{1}{2\pi}[-je^{-j2\pi t}+2\pi+je^{j2\pi t}]$$

$$=1-\frac{1}{\pi}\sin 2\pi t$$

§5.3 无失真传输

- 无失真传输
- 幅度失真和相位失真
- 线性失真和非线性失真
- 相位延时和群延时

信号与系统的匹配

*信号的占有频带与系统的通频带(频域)

*信号的分解程度与系统的分辨能力(时域)

*信号的信息含量与系统的信息通量(信息)

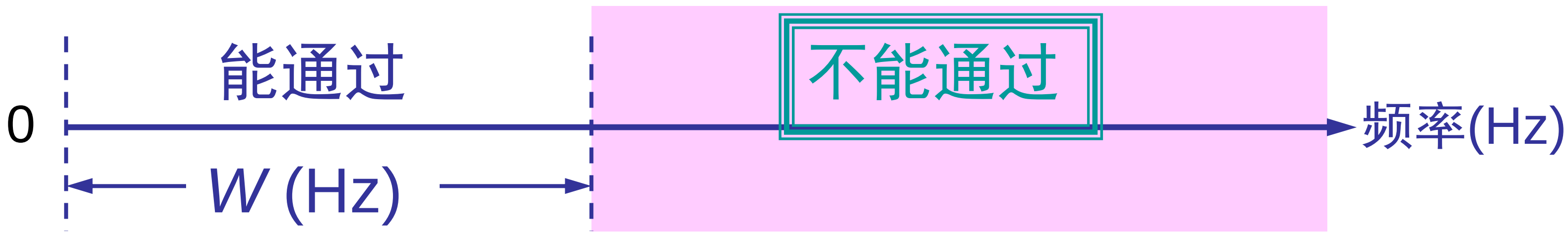
*信号的能量与负载能量（能量）

等四个方面的匹配

奈氏(Nyquist)准则

理想低通信道的最高码元传输速率 = 2*W* Baud

W 是理想低通信道的带宽，单位为赫(Hz)

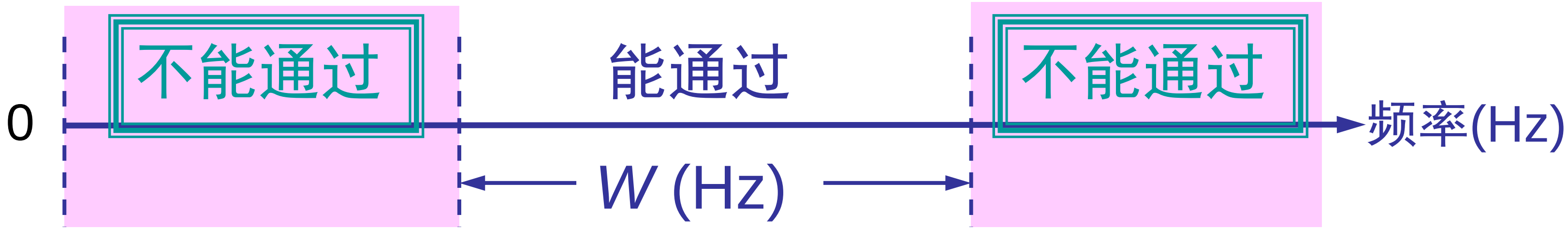


- 每赫带宽的理想低通信道的最高码元传输速率是每秒 2 个码元。
- Baud 是波特，是码元传输速率的单位，1 波特为每秒传送 1 个码元。

另一种形式的奈氏准则

理想带通特性信道的最高码元传输速率 = *W* Baud

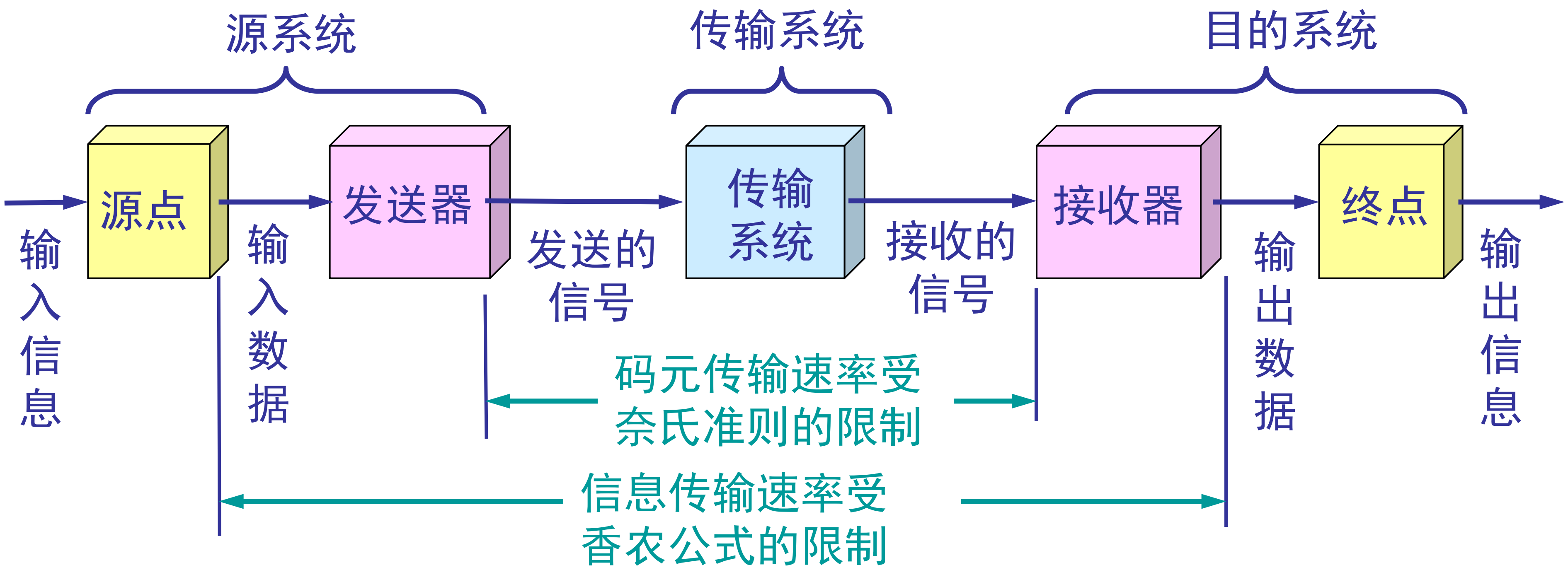
W 是理想带通信道的带宽，单位为赫(Hz)



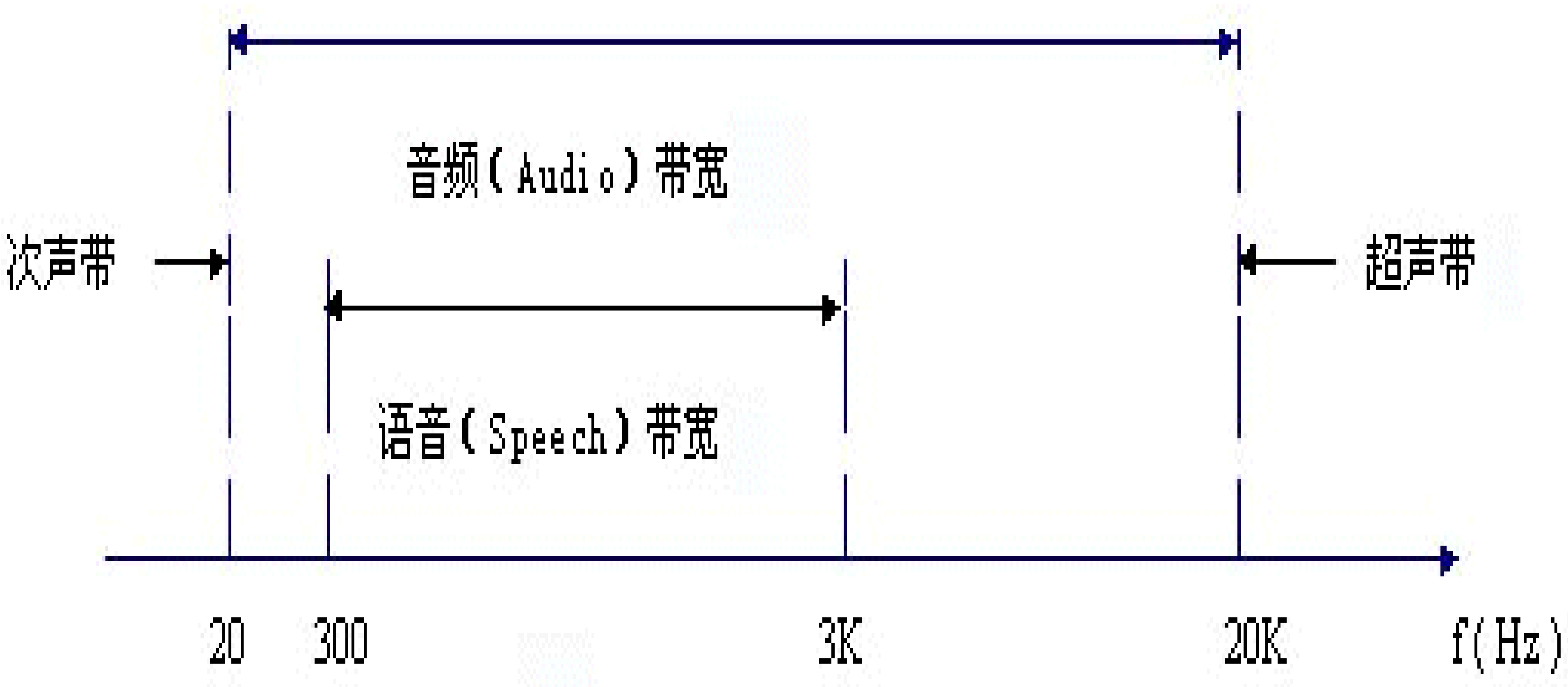
- 每赫带宽的理想带通信道的最高码元传输速率是每秒 1 个码元。

- 香农(Shannon)用信息论的理论推导出了带宽受限且有高斯白噪声干扰的信道的极限、无差错的信息传输速率。
- 信道的极限信息传输速率 C 可表达为
- $C = W \log2(1+S/N)$ b/s
  - W 为信道的带宽（以 Hz 为单位）；
  - S 为信道内所传信号的平均功率；
  - N 为信道内部的高斯噪声功率。

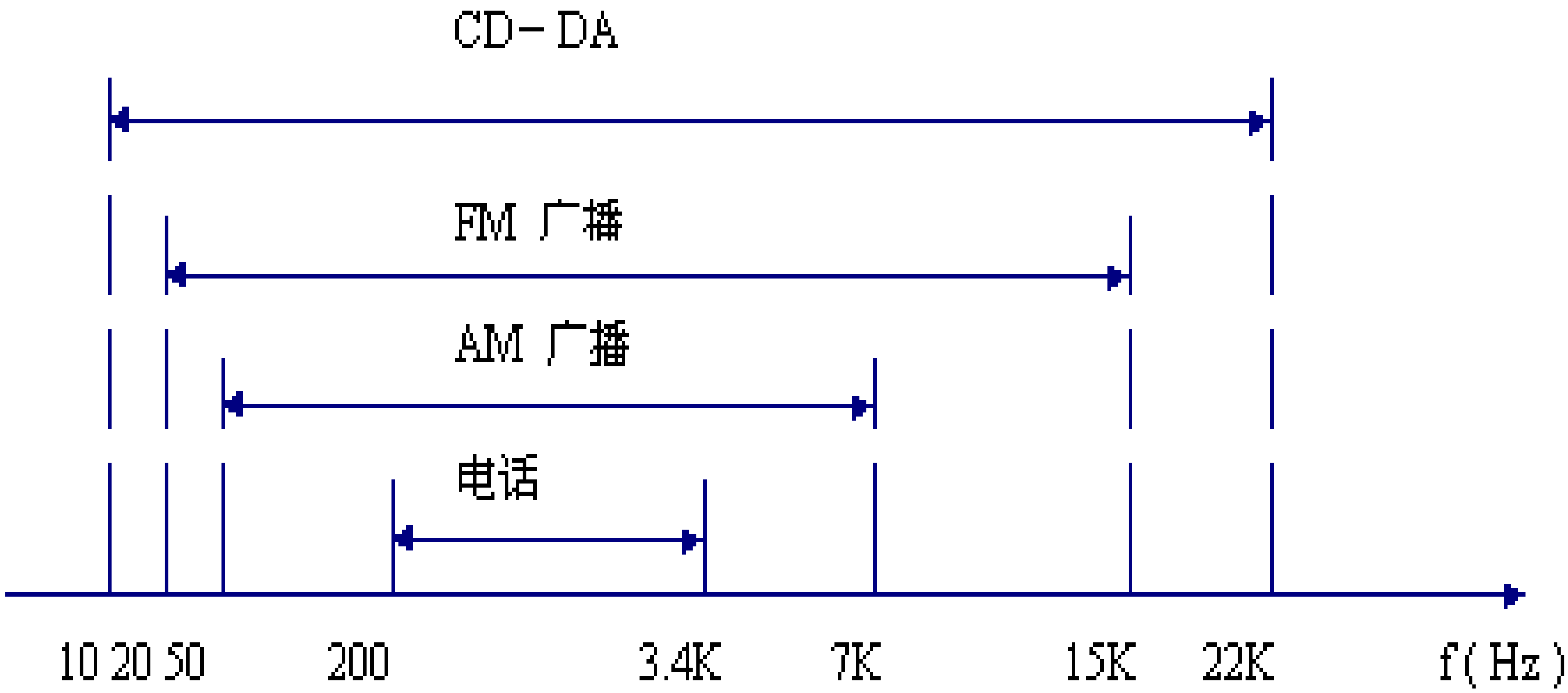
奈氏准则和香农公式
在数据通信系统中的作用范围



音宽与频带



频带宽度



失真的概念

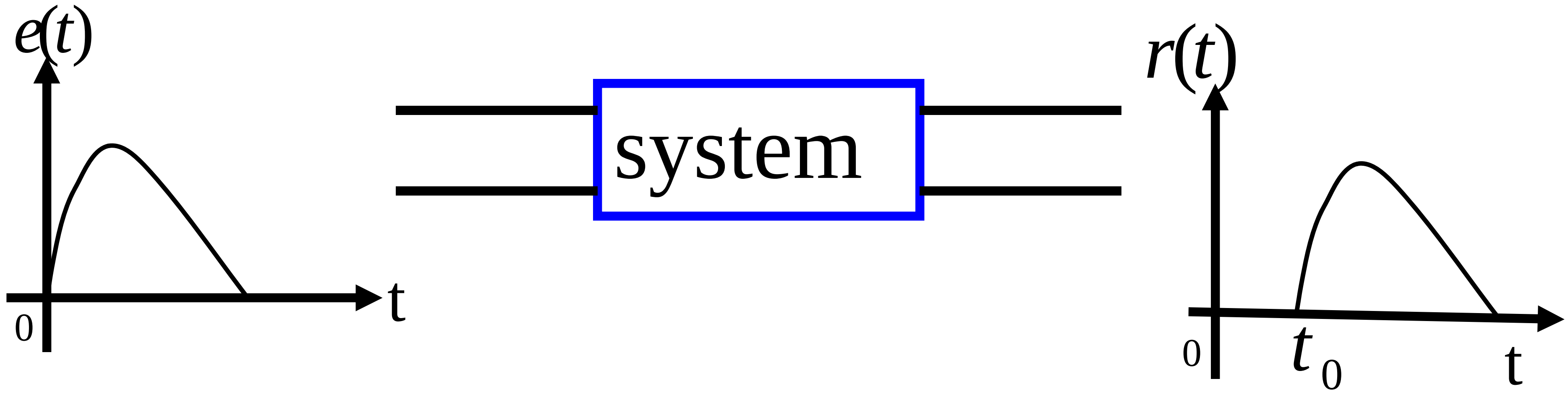
失真：系统的响应波形与激励波形不相同。失真分为线性失真与非线性失真两种。

线性失真：有波形上的变化，但不产生新的频率分量。

非线性失真：有波形上的变化，产生新的频率分量。

线性失真 $\begin{cases} \text{幅度失真：相对幅度产生变化。} \\ \text{相位失真：各频率分量在时间轴上的相对位置发生变化。} \end{cases}$

无失真传输的条件



时域： $r(t) = ke(t - t_0)$

从系统函数的意义上讲：输出仅是输入的线性放大和延时，则系统不使输出波形失真

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow r(t)=K\,\delta(t-t_0)$$

常用冲激信号作为测试

系统保真度的信号

上面的处理提出几个问题

- 如何保证信号经过系统不会失真?
- 如何根据要求设计系统函数?
- 什么系统函数是理想函数?
- 如何将设计的理想的系统函数变为物理可实现的?
- 信号在经过系统前后能量有何变化?

关键是有什么样的系统频率特性

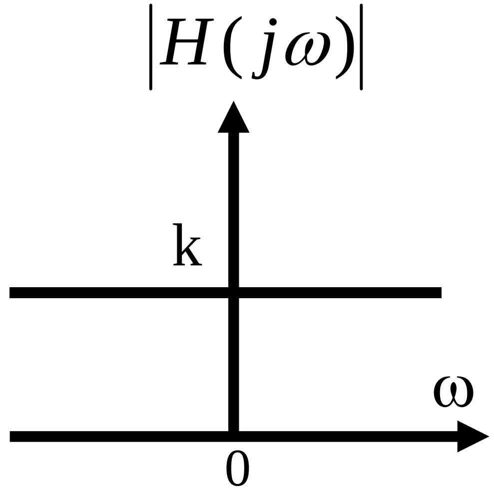
$$\boxed{H(j\omega) = \left|H(j\omega)\right| e^{j\varphi(j\omega)}}$$

频域：令 $e(t) \leftrightarrow E(j\omega), E(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t)e^{-j\omega t}dt$

$$R(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} ke(t-t_0)e^{-j\omega t}dt$$

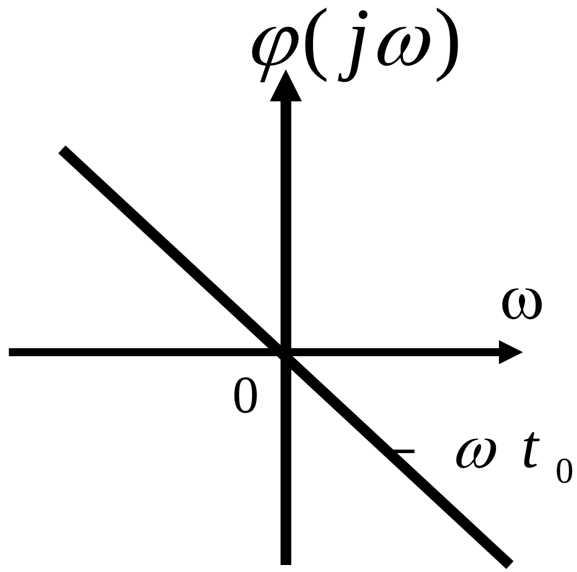
$$a.\left|H(j\omega)\right| = k$$

$$b.\varphi(j\omega) = -\omega t_0$$



令 $x = t - t_0$

$$R(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} ke(x)e^{-j\omega(x+t_0)}dx$$



$$= ke^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} e(x)e^{-j\omega x}dx$$

$$\because R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega)$$

$$\therefore H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0}$$

振幅失真和相位失真

1.振幅: 由$|H(j\omega)|=k$不能满足而产生的失真 .

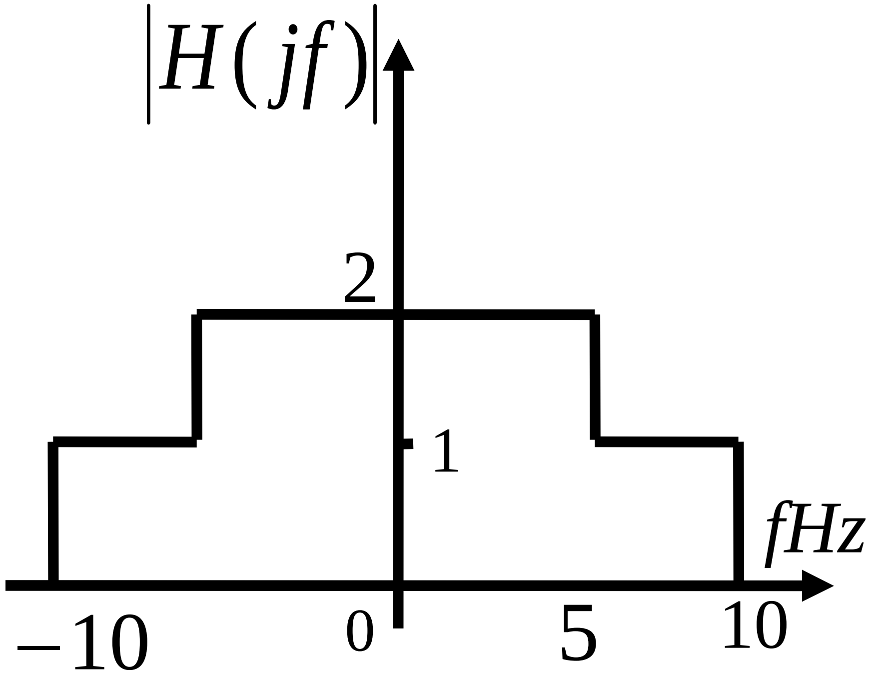
2.相位: 由$\varphi(j\omega)=-\omega t_0$不能满足而引起的失真

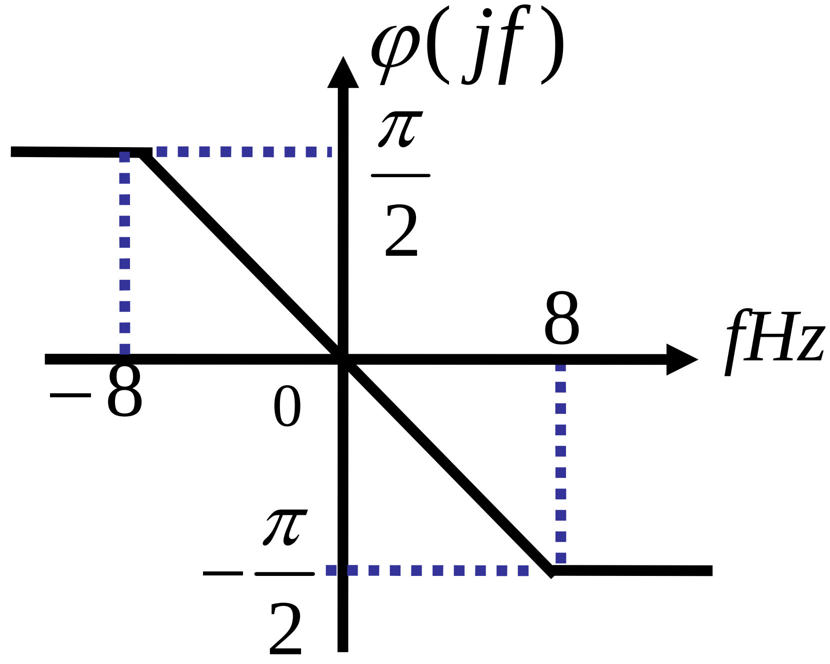
*.系统的幅频特性和相频特性如图所示,当激励为如下三种信号时,求各自的响应;讨论失真情况.

$$a.e(t)=2\sin 6\pi t+\sin 8\pi t$$

$$b.e(t)=3\sin 8\pi t+2\sin 14\pi t$$

$$c.e(t)=4\sin 14\pi t+3\sin 18\pi t$$





$$a.e(t) = 2\sin 2\pi f_1 t + \sin 2\pi f_2 t$$

$$= 2\sin 2\pi \times 3t + \sin 2\pi \times 4t$$

$$f_1 = 3Hz.E_{1m} = 2 < 0^0, \left|H_1\right| = 2$$

$$\varphi_{H_1} = \frac{-\pi/2}{8} \times 3 = -\frac{3}{16}\pi = -33.8^0$$

$$H_1 = 2 < -33.8^0, R_{1m} = E_{1m}H_1 = 4 < 33.8^0$$

f_2的响应算法同上。

$$\therefore r(t) = 4\sin(6\pi t - 33.8^0) + 2\sin(8\pi t - 45^0)$$

$$t_0 = \frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi/2}{8} \approx 0.0312s$$

b. $\because f_1 = 4\text{Hz}, f_2 = 7\text{Hz}$

$\therefore$ 信号产生了幅度失真。

c. $\because f_1 = 7\text{Hz}, f_2 = 9\text{Hz}$

$\therefore$ 信号产生了相位失真。

*.群延时和相位延时

相位延时：$t_p = \frac{\varphi(\omega)}{\omega}$

它是系统对给定角频率ω_i的简谐信号所产生的延时。

群延时：$t_g = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$

表示一个载波信号的包络的延时(一定带宽一组频率成份的延时）。

*.设有两个复数信号$e^{j(\omega_0+\Delta\omega)t}$及$e^{j(\omega_0-\Delta\omega)t}$同时作用于频响特性为$H(j\omega)=e^{-j\varphi(\omega)}$的系统中，求其响应$y(t)$？

$$y(t)=e^{j(\omega_0+\Delta\omega)t}e^{-j\varphi(\omega_0+\Delta\omega)}+e^{j(\omega_0-\Delta\omega)}e^{-j\varphi(\omega_0-\Delta\omega)}$$

$$=e^{j[(\omega_0+\Delta\omega)t-(\varphi_0+\Delta\varphi)]}+e^{j[(\omega_0-\Delta\omega)-(\varphi_0-\Delta\varphi)]}$$

$$=e^{j(\omega_0 t-\varphi_0)}[e^{j(\Delta\omega t-\Delta\varphi)}+e^{-j(\Delta\omega t-\Delta\varphi)}]$$

$$=\frac{1}{2}\cos(\Delta\omega t-\Delta\varphi)e^{j(\omega_0-\varphi_0)}$$

$$=\frac{1}{2}\cos(t-\frac{\Delta\varphi}{\Delta\omega})e^{j\omega_0(t-\frac{\varphi_0}{\omega_0})}$$

其中: $\varphi_0=\varphi(\omega_0);\varphi_0+\Delta\varphi=\varphi(\omega_0+\Delta\omega);\varphi_0-\Delta\varphi=\varphi(\omega_0-\Delta\varphi)$

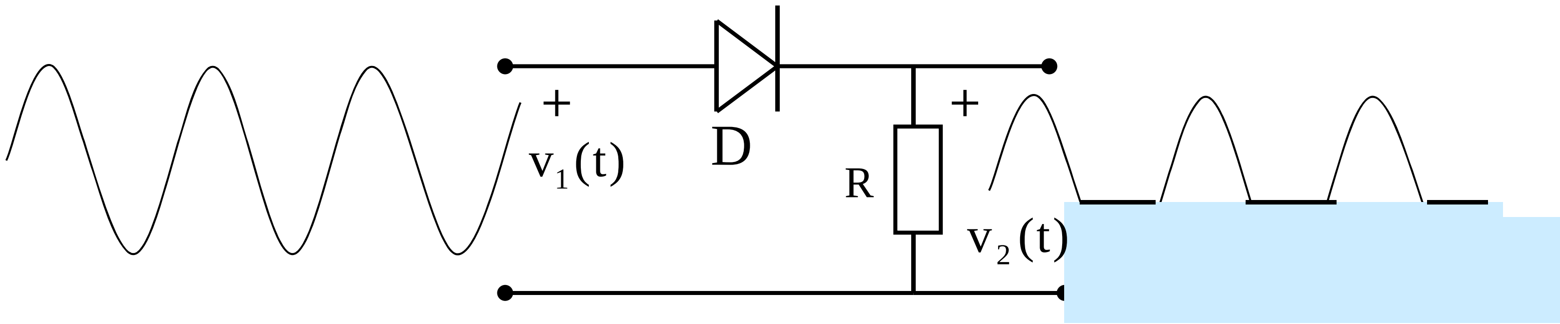
$$\lim_{\Delta\omega\to 0}-\frac{\Delta\varphi}{\Delta\omega}=-\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=t_g(\omega)$$ 群延时

群延时出现在包络中,而相位延时 $\frac{\varphi_0}{\omega_0}$

出现在载波中.

($P290$,倒数二自然段，$P291$图5—20(b))

非线性失真的举例



$v_1(t)$中只含有一个频率分量，而$v_2(t)$中却产生了大量丰富的各次谐波，并产生了直流分量。

结语：线性系统引起的失真不产生新的频率成份，而非线性系统引起的失真将产生新的频率成份。

§5.6利用Hilbert变换研究系统函数的约束特性

一.因果系统 $H(j\omega)$ 的实部与虚部的关系

1.推导: $312.5-15$

设因果系统: $H(j\omega)\leftrightarrow h(t)\quad h(t)=h(t)u(t)$

$$\because h(t)=h_e(t)+h_0(t)$$

$$h(-t)=h_e(t)-h_0(t)$$

$$h_e(t)=\frac{h(t)+h(-t)}{2}$$

$$h_0(t)=\frac{h(t)-h(-t)}{2}$$

若系统是因果的,则 $\begin{cases} h(t)=0 \ldots t<0 \\ h(-t)=0 .. t>0 \end{cases}$

得出：

$t > 0,$

$$\begin{cases} h_e(t) = \dfrac{h(t)}{2} \\ h_0(t) = \dfrac{h(t)}{2} \end{cases}$$

$h(t) = 2h_e(t) = 2h_0(t)$

$t < 0,$

$$\begin{cases} h_e(t) = \dfrac{h(-t)}{2} \\ h_0(t) = -\dfrac{h(-t)}{2} \end{cases}$$

$$\therefore h_e(t) = \begin{cases} h_o(t) \ldots\ldots t > 0 \\ -h_o(t) \ldots t < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1\ldots t<0\\ 1\ldots t>0\end{cases}\qquad \therefore h_e(t)=h_o(t)\,\mathrm{sgn}(t)\qquad h_o(t)=h_e(t)\,\mathrm{sgn}(t)$$

$$\because \mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow 2/\mathrm{j}\omega,\ \mathrm{H}(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{R}(\mathrm{j}\omega)+\mathrm{jI}(\mathrm{j}\omega)$$

又 $\because \mathrm{h}(\mathrm{t})\leftrightarrow \mathrm{H}(\mathrm{j}\omega), \therefore \mathrm{h_e}(\mathrm{t})\leftrightarrow \mathrm{R}(\mathrm{j}\omega), \mathrm{h_o}(\mathrm{t})\leftrightarrow \mathrm{jI}(\mathrm{j}\omega)$

(奇偶虚实关系参考)($p166.3-20$)

$$h_o(t)\,\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow R(j\omega),\ h_e(t)\,\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow jI(j\omega)$$

应用频域卷积定理 (p207,3.8节)

$$\mathrm{R}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{jI}(\mathrm{j}\omega)*\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{j};\ \mathrm{I}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{R}(\mathrm{j}\omega)*\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

$$I(j\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(y)}{\omega-y}dy;\ R(j\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(y)}{\omega-y}dy$$

2.结论:

a.若H(jw)的实部和虚部满足Hilbert变换

则系统是因果的。反之亦然。

b. 若 $H(j\omega)=\left|H(j\omega)\right|e^{j\varphi(j\omega)}$

则 $\mathrm{Ln}H(j\omega)=\mathrm{Ln}\left|H(j\omega)\right|+\varphi(j\omega)$

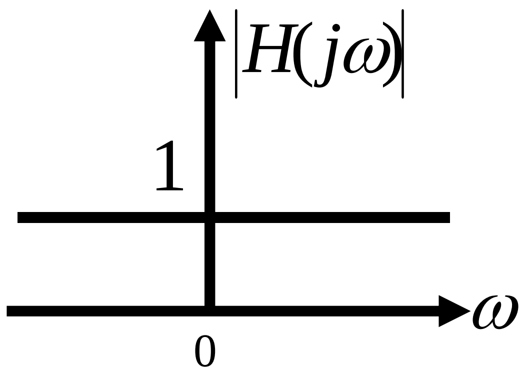
波特关系式

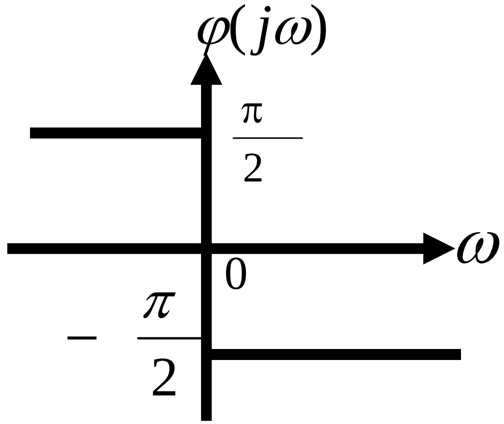
二.Hilbert变换的概念

$$\text{正}: e(t) \rightarrow \hat{e}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\frac{1}{t-\tau}d\tau = e(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$\text{反}: \hat{e}(t) \rightarrow e(t) = -\hat{e}(t) * \frac{1}{\pi t}$$

设有一全通网络,其幅频特性和相频如图a,b所示:1.求系统的冲激响应.2.证明系统的输入为e(t)时,则其响应r(t)与e(t)满足希尔伯特变换关系式.





解：设 $H(j\omega) = e^{-j\varphi(j\omega)}$

$$1.h(t) = F^{-1}[H(j\omega)] = F^{-1}[-j\,\mathrm{sgn}\,\omega] = \frac{1}{\pi t}$$

$$2.r(t) = e(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e(\tau)}{t-\tau}d\tau = \hat{e}(t)$$

$$\hat{e}(t) \leftrightarrow E_H(j\omega) = E(j\omega)[-j\,\mathrm{sgn}\,\omega]$$

$$E(j\omega) \longrightarrow \boxed{H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j, \omega > 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}} = j, \omega < 0 \end{cases}} \longrightarrow E_H(j\omega)$$

*Hilbert变换就是移相。

*Hilbert反变换

$$e(t) = -\hat{e}(t) * \frac{1}{\pi t}, e(t) \leftrightarrow E(j\omega), \hat{e}(t) \leftrightarrow E_H(j\omega)$$

$$F^{-1}[-\hat{e}(t)] = -E_H(j\omega)[-j\,\mathrm{sgn}\,\omega] = E_H(j\omega)\,j\,\mathrm{sgn}\,\omega$$

结论：希尔伯特反变换也是一个移相过程。

它将$\hat{e}(t)$的正频率部分移相$+90^0$;负频率部分移相-90^0，正好和希尔伯特正变换移相值反方向移动。这就很自然地回到了原信号的相位关系，从而得到了原信号。(为一可逆系统)

*.Hilbert变换的计算

1.求$f(t)=\cos\omega_0 t$的$Hilbert$变换。

$$\hat{f}(t)=f(t)*\frac{1}{\pi t}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega_0(t-\tau)\frac{1}{\tau}d\tau=\sin\omega_0 t$$

2 .求 $f(t)=\delta(t)$的 $Hilbert$ 变换。

$$\hat{\delta}(t)=\delta(t)*\frac{1}{\pi t}=\frac{1}{\pi t}$$

3.求$\hat{f}(t)=\cos\omega_0 t$ $Hilbert$的反变换。

$$f(t)=-\cos\omega_0 t*\frac{1}{\pi t}=-\frac{1}{\pi}\int\cos\omega_0(t-\tau)\frac{1}{\tau}d\tau=-\sin\omega_0 t$$

(Hilbert)

- 因果系统——物理可实现系统
- 因果系统的实部和虚部之间相互限制
- 因果系统的模和相角之间相互限制

因果系统的频谱实部和虚部关系

$$h(t)_{t\geq 0} = h(t)u(t)$$

$$H(j\omega) = R(j\omega) + jX(j\omega)$$

$$FT[h(t)] = \frac{1}{2\pi} FT[h(t)] * FT[u(t)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} H(j\omega) * (\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} [R(j\omega) + jX(j\omega)] * (\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega})$$

$$= \{ \frac{R(j\omega)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \} + j\left\{ \frac{X(\omega)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \right\}$$

$$R(j\omega)$$

$$X(j\omega)$$

分别比较上式两边的实部和虚部得：

$$R(\omega)=\frac{1}{\pi\omega}*X(\omega)$$

$$X(\omega)=-\frac{1}{\pi\omega}*R(\omega)$$

结论：任何物理可实现系统都是因果系统，即冲激响应都是因果函数，因此其频率的实部和虚部都存在希尔伯特变换关系。

例$:h(t)=e^{-\alpha t}u(t)\leftrightarrow H(\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}$

$$R(\omega)+jX(\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}-j\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

可以证明$:\frac{1}{\omega t}*X(\omega)=R(\omega)$

Hilbert Transform

$$R(j\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\lambda)}{\omega-\lambda}d\lambda$$

$$X(j\omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\lambda)}{\omega-\lambda}d\lambda$$

因果系统的实部被已知的虚部唯一地确定

因果系统的频谱模和相角的关系

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(j\omega)}$$

$$\ln H(j\omega)=\ln|H(j\omega|+j\varphi(j\omega)$$

$$\ln|H(j\omega)|=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda)}{\omega-\lambda}d\lambda$$

$$\varphi(j\omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|H(j\omega)|}{\omega-\lambda}d\lambda$$

*解析信号与单边频谱

以实信号f(t)作为实部，以f(t)的希尔伯特变换作为虚部的复信号$f_a(t)$称为f(t)的解析信号

$$f_a(t) = f(t) + jH.f(t)$$

设$f_a(t) \leftrightarrow F_a(j\omega)$

$$\text{则}: F_a(j\omega) = F(j\omega) + [-\mathrm{sgn}(\omega)]F(j\omega)$$

$$= \begin{cases} 2F(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

例：$f(t) = \cos\omega_0 t \quad \omega > 0$其希尔伯特变换为

$$H.f(t) = \frac{1}{\pi t} * \cos\omega_0 t$$

$$= H^{-1}\{-j\,\mathrm{sgn}(\omega).[\pi\delta(\omega+\omega_0) + \pi\delta(\omega-\omega_0)]\}$$

$$= H^{-1}\{j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]\} = \sin\omega_0 t$$

故其解析信号为

$$f_a(t) = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t = e^{j\omega_0 t}$$

而 $F_a(j\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

为ω的因果函数，是一个单边谱。解析性→单边性。

希尔伯特变换的两种推导方式：

时域因果性：$h(t)=h(t)u(t)$

频域的单边性：(p312;5−16题)

傅里叶变换
对偶性又一
例证

P312.5-16

证明: $z(t) = F^{-}[Z(\omega)] = F^{-}[2F(\omega)u(\omega)]$

$= 2F^{-}[F(\omega)] * F^{-}[u(\omega)]$ $\because F(\omega) \leftrightarrow f(t)$

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega);\ f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$$

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega};\ \therefore [\pi\delta(t) + \frac{1}{jt}] \leftrightarrow 2\pi u(-\omega)$$

$$\therefore u(\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[\pi\delta(t) - \frac{1}{jt}]$$

$$\boxed{z(t) = f(t) + \hat{f}(t)}$$

$$\therefore z(t) = 2f(t) * \{\frac{1}{2\pi}[\pi\delta(t) - \frac{1}{jt}]\} = f(t) - \frac{1}{j\pi} f(t) * \frac{1}{t}$$

*.已知一连续因果LTI系统的特性为:

$$H(j\omega)=A(j\omega)+B(j\omega)$$

证明该系统的冲激响应h(t)可分别由

$A(j\omega)$或$B(j\omega)$求出.

证明 $\because$ 系统是因果的 $\quad\therefore\ h(t)=0 \quad t<0$

$$h(-t)=0 \quad t>0$$

设$h(t)=h_e(t)+h_o(t)$

由前推出:$h_e(t)\leftrightarrow A(\omega);h_o(t)\leftrightarrow jB(\omega)$

$$h(t)=2h_e(t)=2h_o(t)$$

$$\therefore h(t) = 2h_e(t) = 2F^{-1}[A(\omega)]$$

$$\therefore h(t) = 2h_o(t) = 2F^{-1}[jB(\omega)]$$

证明完毕.

单边函数 $\leftrightarrow$ 实部和虚部都存在希尔伯特变换。

*.已知因果LTI系统频响特性H(ω)的实部为πδ(ω)

求系统频响特性H(ω)和冲激响应h(t)?

解：设$H(\omega)=A(\omega)+jB(\omega)$ 已知$A(\omega)=\pi\delta(\omega)$

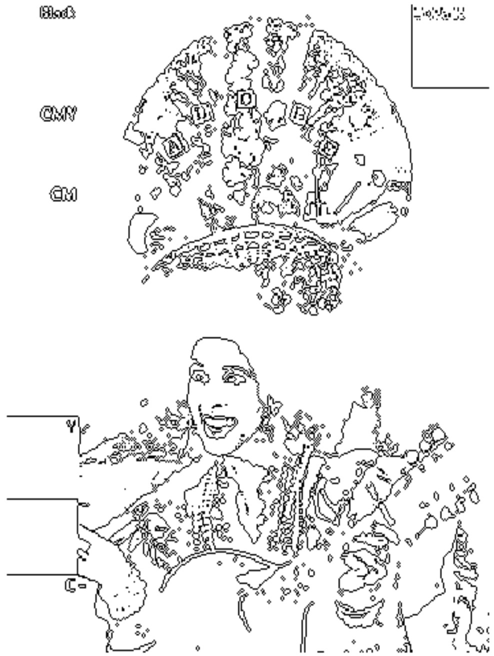
$$\therefore B(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi\delta(\lambda)}{\omega-\lambda}d\lambda=-\frac{1}{\omega}$$

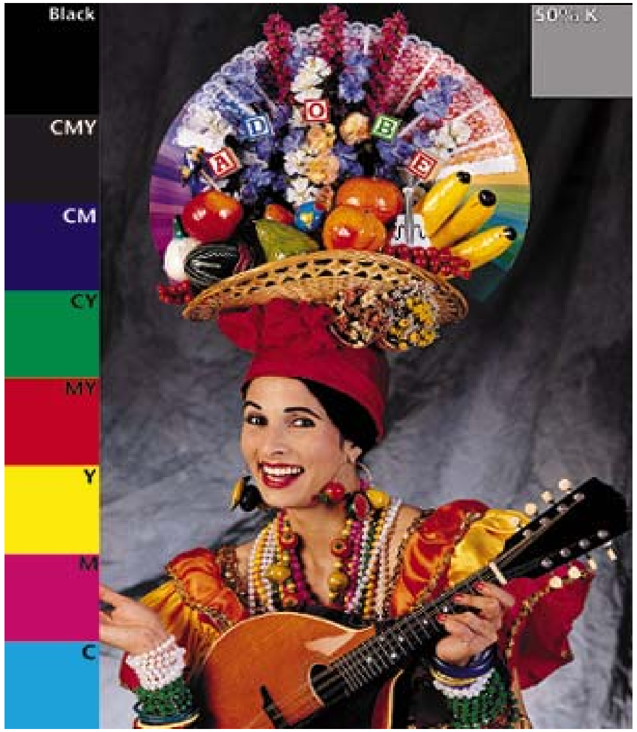
$$\therefore H(\omega)=\pi\delta(\omega)-j\frac{1}{\omega}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

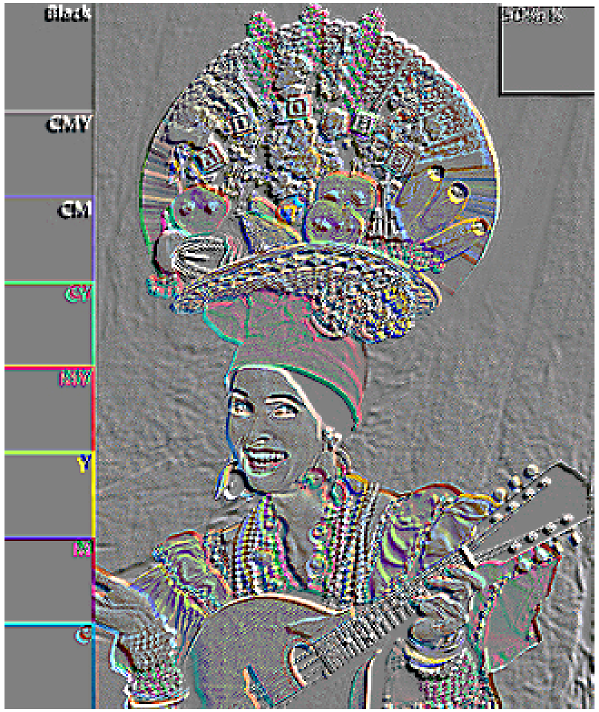
$$\therefore h(t)=u(t)$$

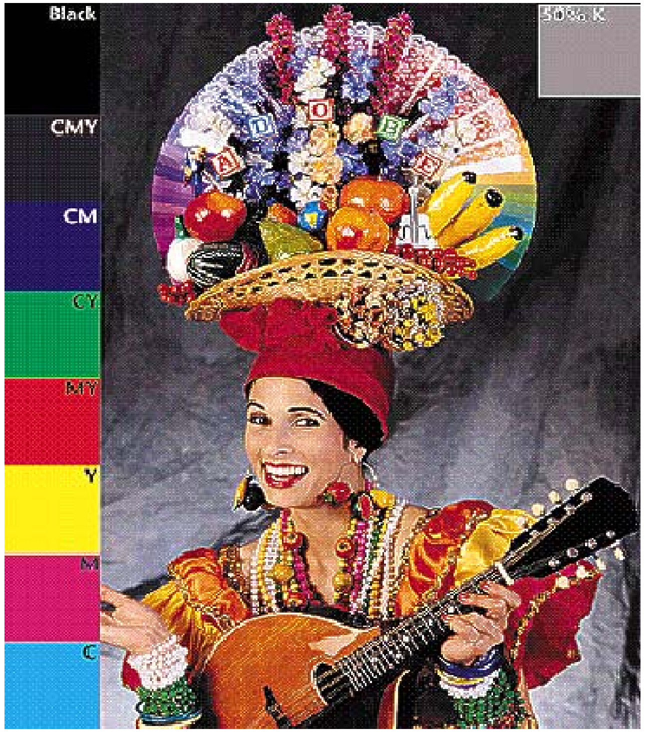
§5.4 理想低通滤波器

滤波:一般来说,能改变信号中各个频率分量的相对大小、或者抑制甚至全部滤除某些频率分量的过程称为滤波。




Black
CMY
CM
CY
MY
Y
M
C
50% K

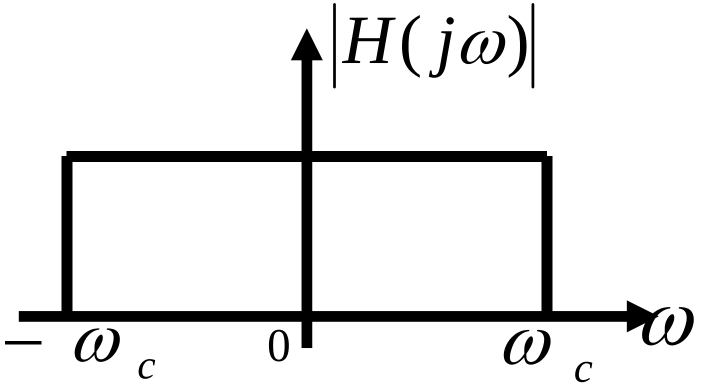

Black
CMY
CM
CY
MY
Y
M
C


Black
CMY
CM
CY
MY
Y
M
C
50% K

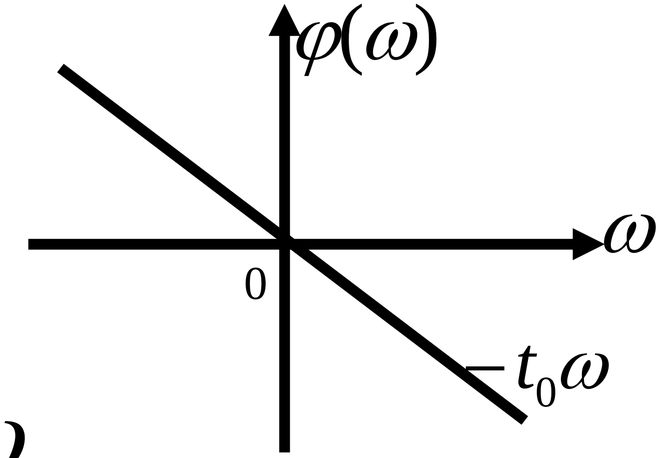
- 理想低通滤波器的转移函数
- 理想低通滤波器的冲激响应
- 理想低通滤波器的阶跃响应
- 佩利-维纳准则

一.理想低通滤波器响应

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1(-\omega_c < \omega < \omega_c) \\ 0(\omega\text{为其它值}) \end{cases}$$



$$\varphi(\omega) = -t_0\omega, H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$$



二.单位冲激响应

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

1.h(t)的求取(p275,5-24)

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)}$$

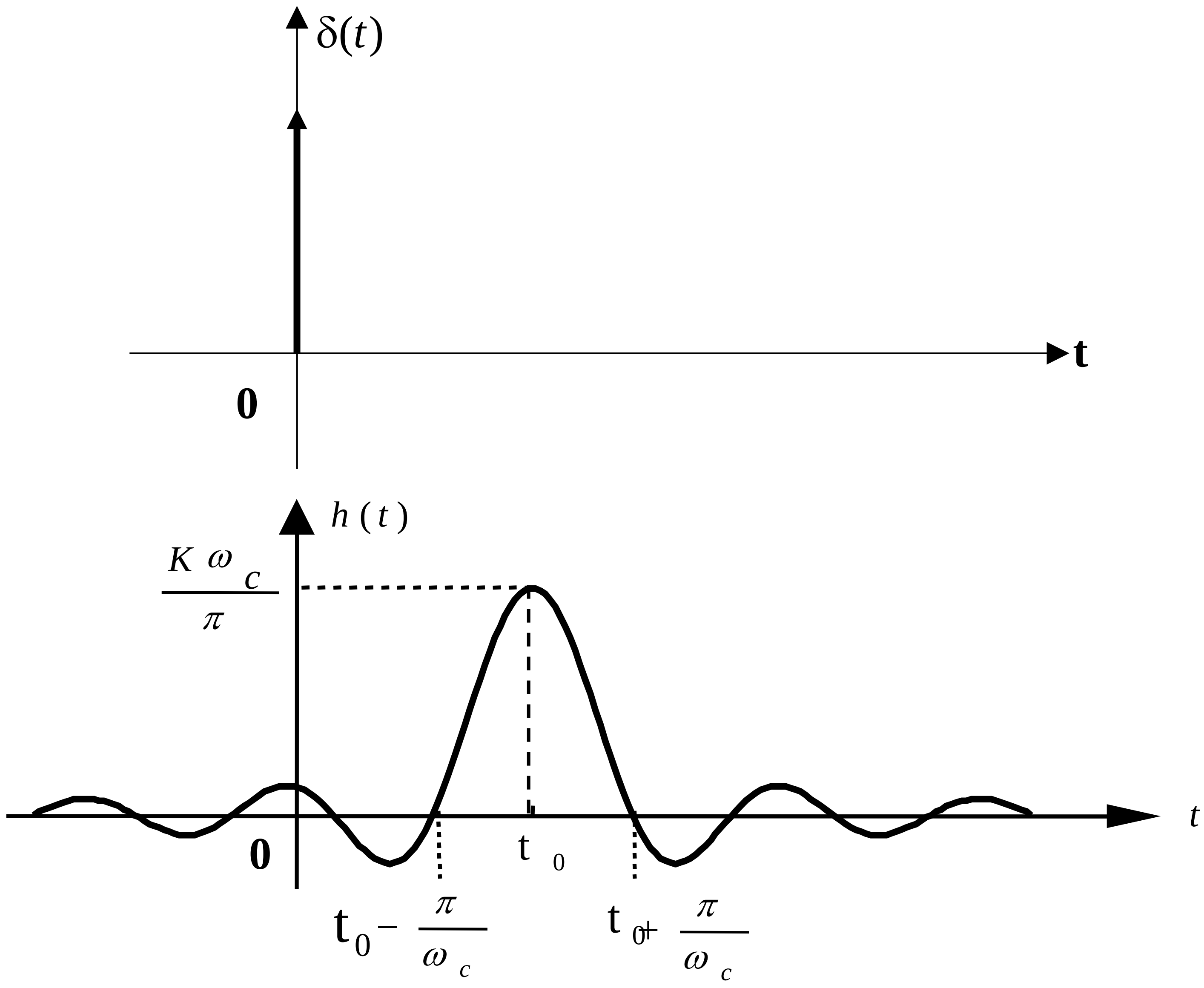
2.说明：

a.波形产生了失真。

$$\lim_{\omega_c\to\infty}h(t)=\lim_{\omega_c\to\infty}\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_0)]=\delta(t-t_0)$$

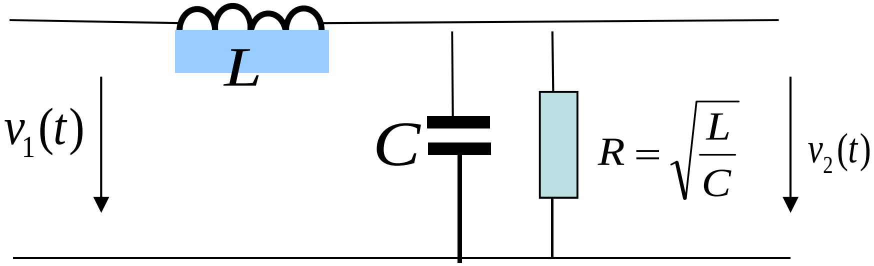
b.h(t)的主峰发生在$t=t_0$处。

c.系统违背了因果律。

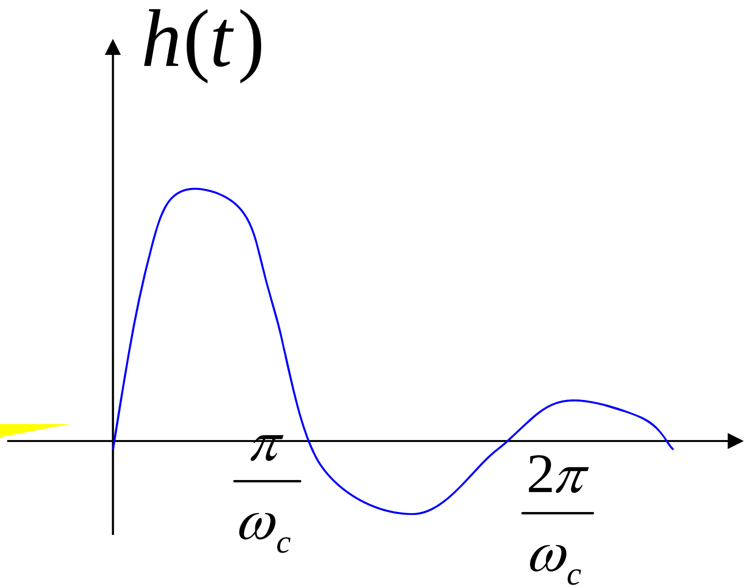


δ(t)
t
0
h(t)
Kω
c
π
t
0
t
0
t
0
−
π
ω
c
t
0
+
π
ω
c

p280.实例 $h(t)=?$

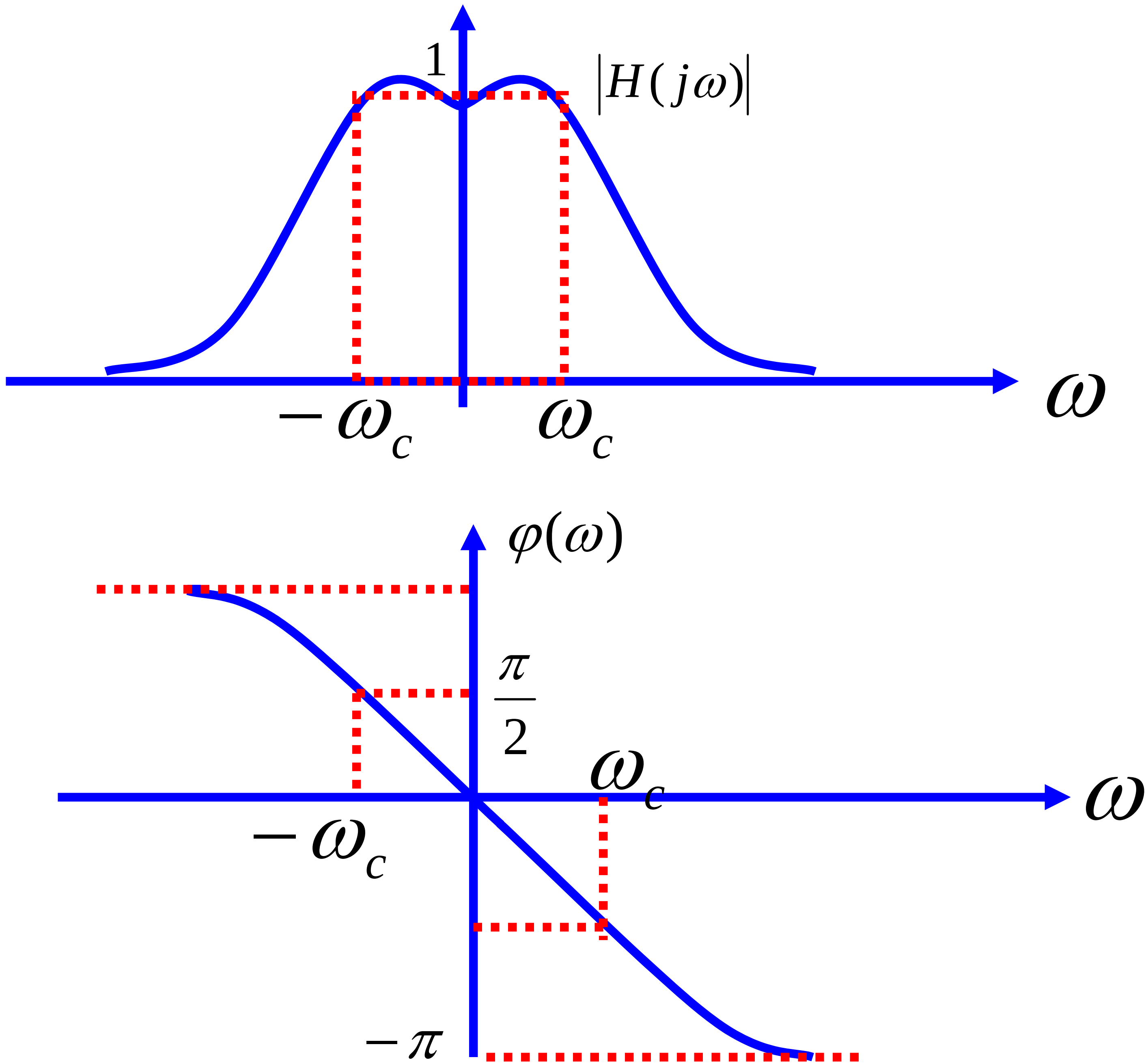


$$H(j\omega)=\frac{2\omega_c}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c}{\left(\frac{\omega_c}{2}+j\omega\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c\right)^2}$$



由实际电路组成从t>=0
开始，物理可实现的必要条件

$$h(t)=FT^{-1}[H(j\omega)]=\frac{2\omega_c}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\omega_c}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c t\right)\quad(t\geq 0)$$



1
$|H(j\omega)|$
ω
$-\omega_c$
ω_c
$\varphi(\omega)$
$\frac{\pi}{2}$
ω_c
ω
$-\omega_c$
$-\pi$

三.系统的物理可实现性——佩利.维纳准则

1.时域——因果性 $t<0, \quad h(t)=0$

2.频域有界

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\ln\left|H(j\omega)\right|\right|}{1+\omega^{2}}d\omega<\infty$$

限制了衰减速度

能量可积

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(j\omega)\right|^{2}d\omega<\infty$$

频带内不为零

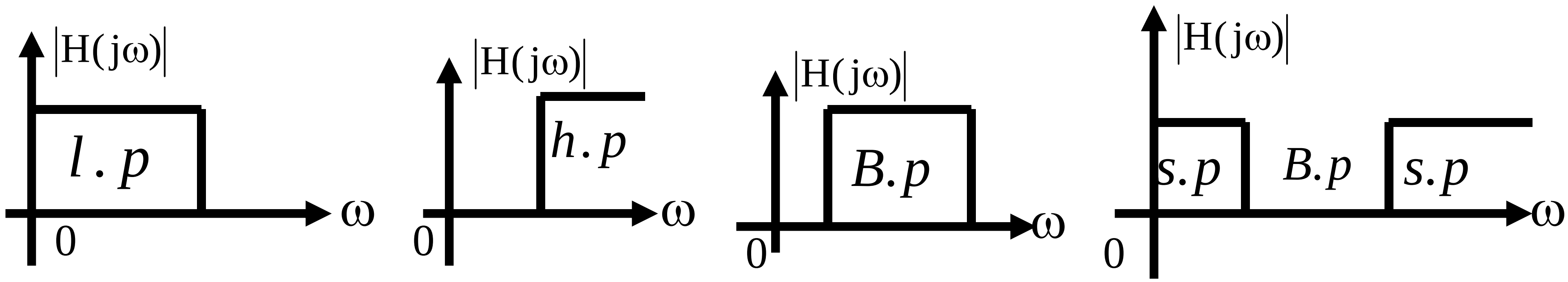
$$\left|H(j\omega)\right|\neq 0$$

.佩利-维纳准则只是物理可实现系统的必要条件,而不是充分条件。

3. 推论:

a. 幅度函数 $|H(j\omega)|$ 在某些离散频率处,可以是零,但在一有限频带内不能为零。

$\because \left|H(j\omega)\right| = 0$, paley − wiener 积分 $\to \infty$



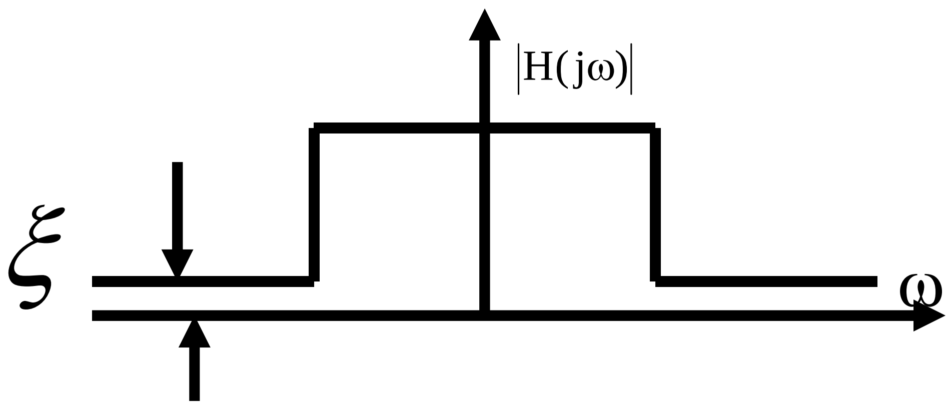
都是不能实现的.

b.幅度特性不能有过大的总衰减

$$\left|H(j\omega)\right| = ke^{-a|\omega|}$$ 是允许的。

$$\left|H(j\omega)\right| = ke^{-(a\omega)^2}$$ 不能实现。

c.I.l.p可以任意逼进.



高斯幅频特性是否物理可实现?

$$\left|H(j\omega)\right| = e^{-\omega^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\ln\left|H(j\omega)\right|\right|}{1+\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\ln(e^{-\omega^2})\right|}{1+\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{1+\omega^2} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\omega^2+1}\right) d\omega = \lim_{B\to\infty} \left(\omega - tg^{-1}\omega\right)\Big|_{-B}^{B}$$

$$= \lim_{B\to\infty} 2(B - tg^{-1}B = 2\left(\lim_{B\to\infty} B - \frac{\pi}{2}\right)$$

发散的，物理不可实现

P311,5-13 解 $\because H(\omega) = H_i(\omega)(1+\cos\frac{\pi}{\omega_c}\omega)$

$$H_i(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega \le \omega_c| \\ 0 & |\omega \ge \omega_c| \end{cases}$$

$$\therefore h(t) = F^{-1}[H(\omega)] = F^{-1}[H_i(\omega)(1+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{\omega_c}\omega)]$$

$$= F^{-1}[H_i(\omega) + \frac{1}{2}H_i(\omega)(\frac{1}{2_i}\, e^{j\frac{\pi}{\omega_c}\omega} + e^{-j\frac{\pi}{\omega_c}\omega})]$$

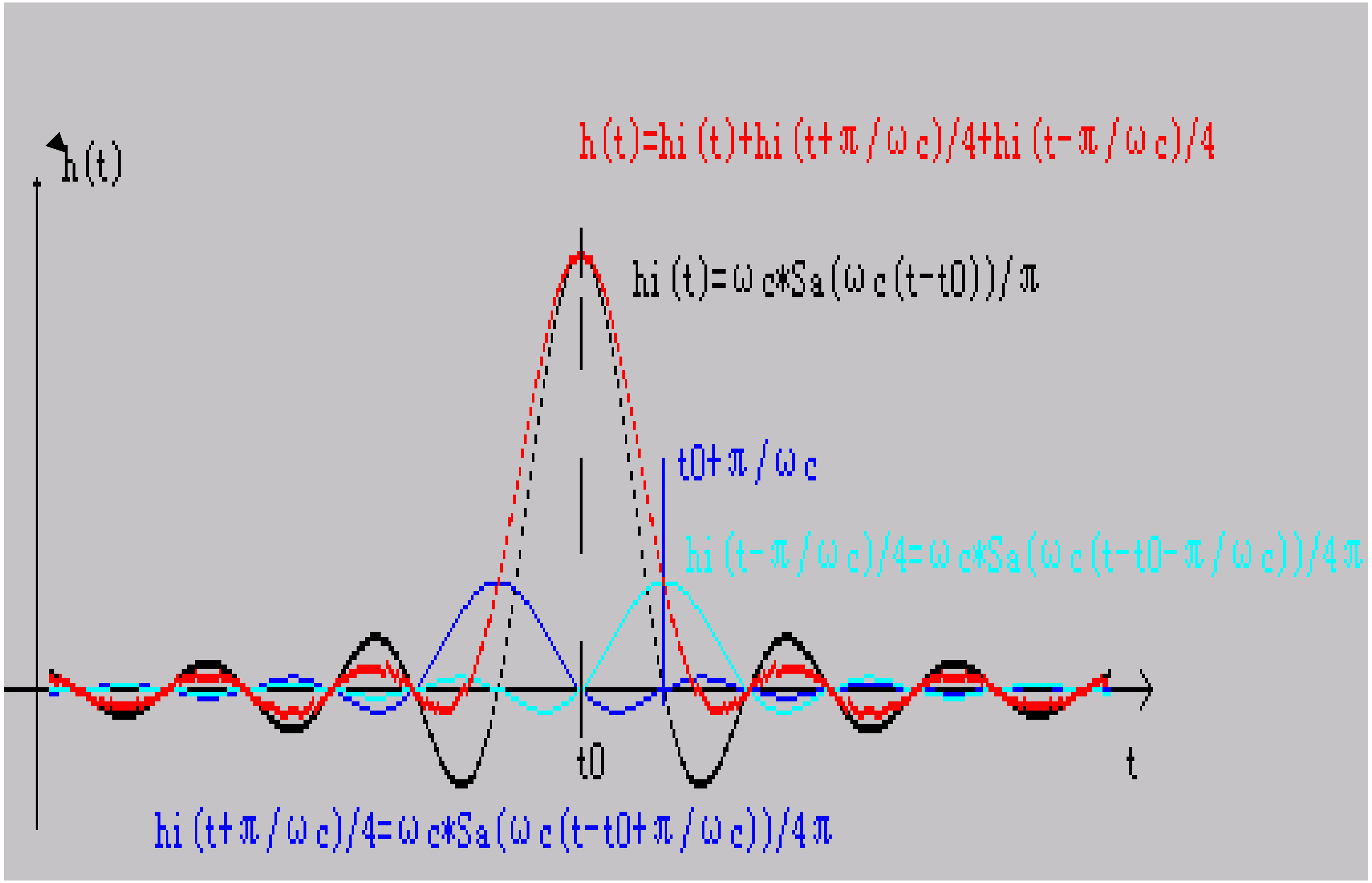
$$\because h_i(t) = F^{-1}[H_i(\omega)] = \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c(t-t_0))$$

$$\therefore h(t)=h_i(t)+\frac{1}{4}h_i(t+\frac{\pi}{\omega_c})+\frac{1}{4}h_i(t-\frac{\pi}{\omega_c})=$$

$$\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c(t-t_0))+\frac{1}{4}\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c(t-t_0+\frac{\pi}{\omega_c}))$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c(t-t_0-\frac{\pi}{\omega_c}))$$

*.理想低通滤波器的幅频特性出现附加调制时,将使冲激响应出现成对回波.若附加调制的幅度很小,则与ILPF的h(t)偏离程度并不严重.


h(t)=hi(t)+hi(t+π/ωc)/4+hi(t-π/ωc)/4
h(t)
hi(t)=ωc*Sa(ωc(t-t0))/π
t0+π/ωc
hi(t-π/ωc)/4=ωc*Sa(ωc(t-t0-π/ωc))/4π
t0
t
hi(t+π/ωc)/4=ωc*Sa(ωc(t-t0+π/ωc))/4π

四.单位阶跃响应

1.$r_u(t)$的求取

$$\because u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau,\therefore r_u(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

$$\delta(t)\longrightarrow\boxed{\text{积分器}}\xrightarrow{u(t)}\boxed{\text{L.I.P}}\xrightarrow{r_u(t)}$$

$$\delta(t)\longrightarrow\boxed{\text{L.I.P}}\xrightarrow{h(t)}\boxed{\text{积分器}}\xrightarrow{r_u(t)}$$

$$r_u(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\frac{\sin\omega_c(\tau-t_0)}{\pi(\tau-t_0)}d\tau$$

令： $x=\omega_c(\tau-t_0),dx=\omega_c d\tau,d\tau=\dfrac{dx}{\omega_c}$

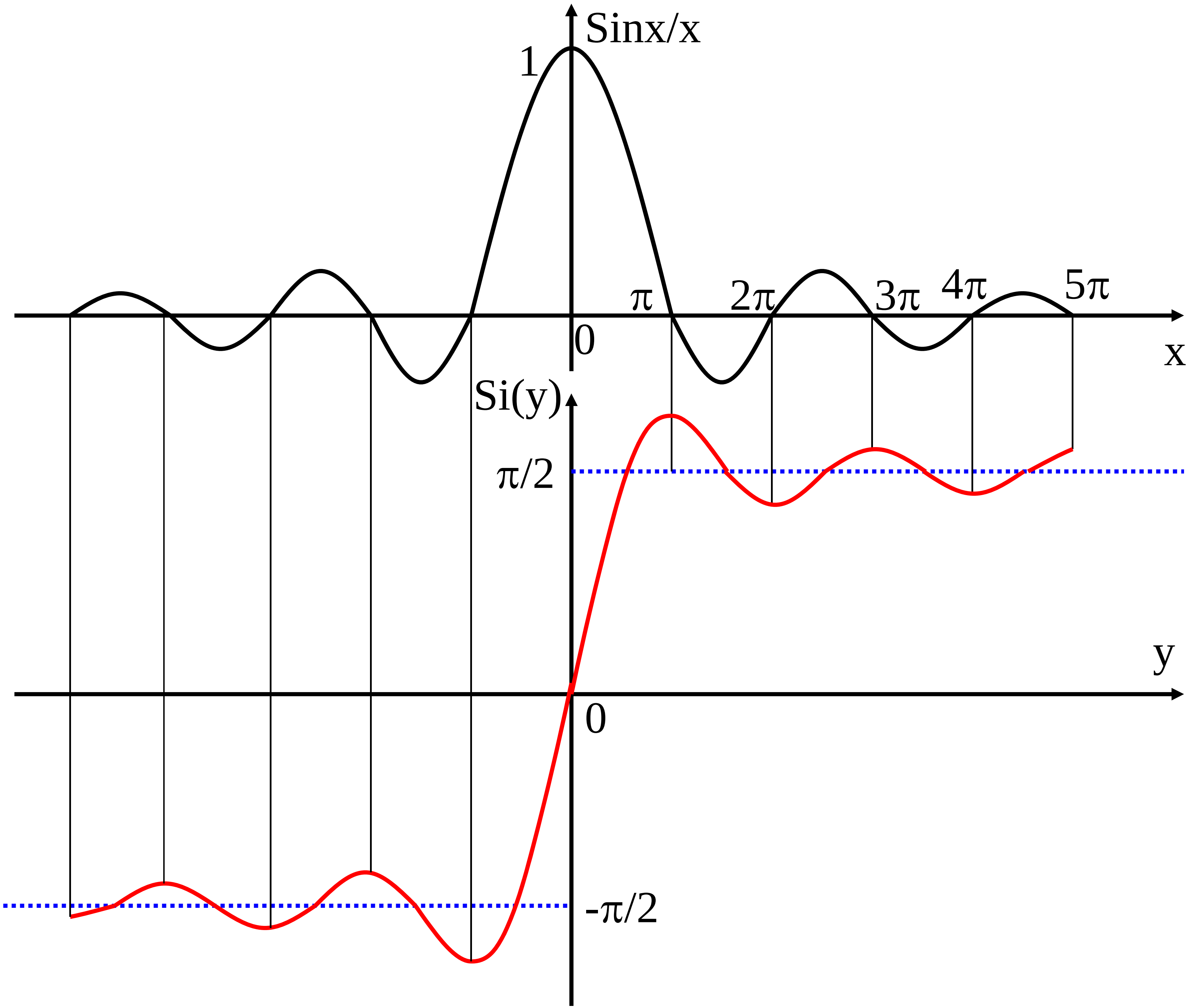
$$r_u(t)=\int_{-\infty}^{\omega_c(\tau-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{0}^{\omega_c(\tau-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx\right]$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx=-\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ldots\ldots(1)$$

$$Si(y)=\int_{0}^{y}\frac{\sin x}{x}dx,Si(y)=\int_{0}^{y}Sa(x)dx\ldots(2)$$

$$r_u(t)=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si\,\omega_c(t-t_0)\right]$$

2.正弦积分的说明:


Sinx/x
1
π
2π
3π
4π
5π
0
x
Si(y)
π/2
y
0
-π/2

$\because \mathrm{Si}(y)$是$\mathrm{Sa}(x)$的积分，

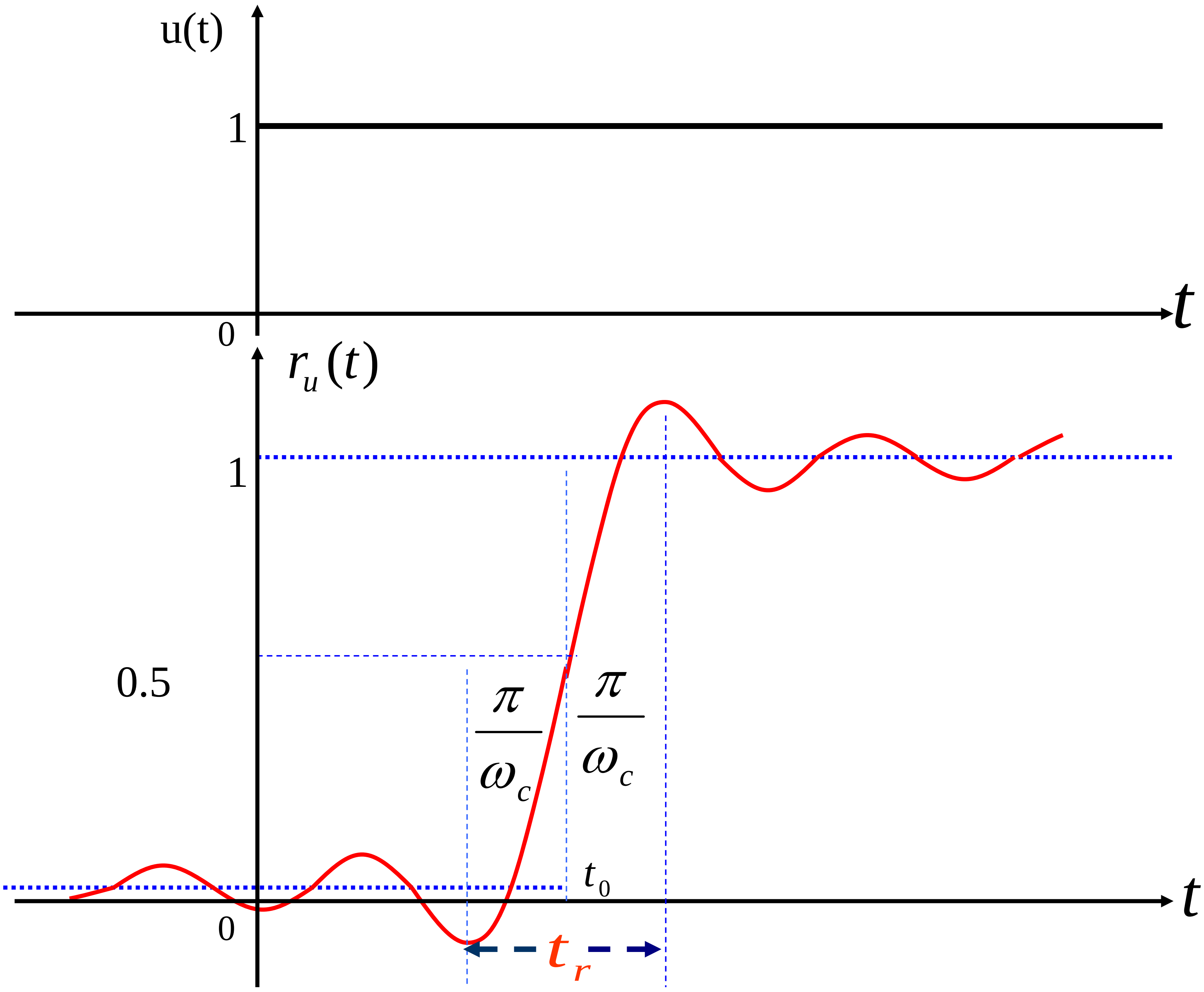
a.$\mathrm{Sa}(x)$在$\pm n\pi$处变号，$\mathrm{Si}(y)$在$x=\pm n\pi$处出现极值

b.$\mathrm{Si}(y)$是奇函数。$\mathrm{Si}(y)=-\mathrm{Si}(-y)$

c.$\mathrm{Si}(0)=0$

d.$\mathrm{Si}(\infty)=\dfrac{\pi}{2}$

e.在$y=0$附近，$\mathrm{Si}(y)$近于直线。



u(t)
1
t
0
$r_u(t)$
1
0.5
$\frac{\pi}{\omega_c}$
$\frac{\pi}{\omega_c}$
t_0
t
0
t_r

3. Gibbs现象

$a.t\to-\infty$的振荡,为非因果;$t\to\infty$的振荡为$Gibbs$波纹。

$b.$预冲和过冲。

$c.t_r=\dfrac{2\pi}{\omega_c}$,$d.t_0$平均延迟时间,(群延时$-\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$).

$d.$当$\omega_c\to\infty$时,$r_u(t)\to u(t-t_0)$

$$r_u(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{Si(\infty)}{\pi}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0..t<0\\[2ex]\dfrac{1}{2}+\dfrac{Si(-\infty)}{\pi}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1.t>0\end{cases}$$

理想低通滤波器的特性小结和评注

1、频域特性：通带内满足无失真传输条件，阻带内传输衰减到零。

时域特性：冲激响应为Sa函数。频域受限、时域不受限，构成非因果系统。

2、阶跃响应的上升时间：$t_r = \dfrac{2\pi}{\omega_c}$与带宽成反比，引用频率符号$B = \dfrac{\omega_C}{2\pi}$

则$Bt_r = 1$

关于$Bt_r = 1$的理论分析，建议参考本书6.10节“测不准原理”。

具有下限值之特征。(下限值为$\dfrac{1}{2}$)，构成普遍规律。

3、Gibbs现象

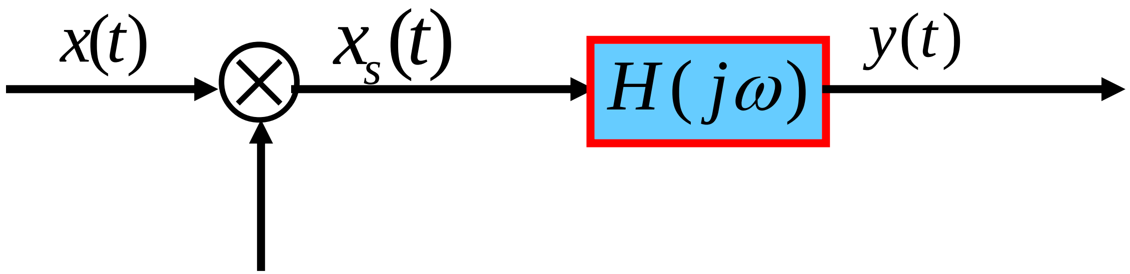
Gibbs现象启发人们认识到矩形窗的缺陷而引入了各种各样的窗函数

*.已知图a所示系统理想低通滤波器的响应H(ω)如图b所示,即

$$H(\omega)=\begin{cases} T_S & |\omega|<\omega_C \\ 0 & |\omega|>\omega_C \end{cases}$$

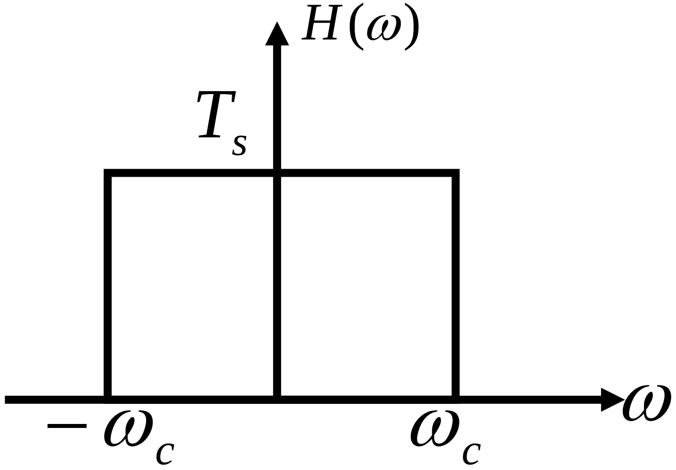
证明：若$\omega_c=\dfrac{\omega_s}{2}$,则对于任意的$T_s$，下式成立：

$$y(mT_s)=x(mT_s)\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots$$



$$\delta_{T_s}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)$$

图a



图b

证明:理想低通滤波器的冲激响应为

$$\mathrm{h(t)} = \frac{\mathrm{T_s \omega_c}}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \qquad x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t-kT_s)$$

$$y(t) = x_s(t) * h(t) = [\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t-kT_S)] * h(t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)[h(t) * \delta(t-kT_s)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)h(t-kT_s)$$

利用理想低通滤波器的冲激响应得

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_s)\frac{T_s\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c(t-kT_s)}{\omega_c(t-kT_s)}$$

若$\omega_c=\dfrac{\omega_s}{2}$;则$\dfrac{T_s\omega_c}{\pi}=1$ 代入上式

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_s)\frac{\sin[\omega_s(t-kT_s)/2]}{\omega_s(t-kT_s)/2}$$

设$t=mT_s$(m为整数) 利用$\omega_s T_s=2\pi$可得

$$y(mT_s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_s)\frac{\sin\pi(m-k)}{\pi(m-k)}$$

$$\because \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(m-k)}{\pi(m-k)} = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ 1 & m = k \end{cases}$$

$$\therefore y(mT_s) = x(mT_s) \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

根据抽样定理,若$\omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$大于信号最高频率2倍

且$\omega_c = \dfrac{\omega_s}{2}$,则$y(t) = x(t)$.

若$x(t)$不是带限信号，则 $y(t) \neq x(t)$

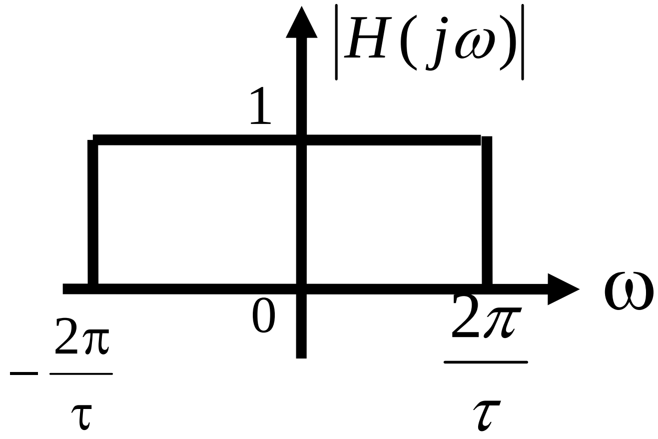
$\therefore$在$\omega_c = \dfrac{\omega_s}{2}$条件下：$y(mT_s) = x(mT_s)$成立。

证毕。

p310.5.9 解：由对称性

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi}F(t) \leftrightarrow f(\omega)$$



$$h(t) = F^{-}[H(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}.\frac{4\pi}{\tau}Sa(\frac{2\pi}{\tau}t) = \frac{2}{\tau}Sa(\frac{2\pi}{\tau}t)$$

$$e(t) = F^{-}[E(j\omega)] = u(t+\frac{\tau}{2}) - u(t-\frac{\tau}{2})$$

$$\therefore r_u(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[u(x+\frac{\tau}{2})-u(x-\frac{\tau}{2})]\frac{2}{\tau}Sa[\frac{2\pi}{\tau}(t-x)]dx$$

$$=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\frac{2}{\tau}Sa(\frac{2\pi}{\tau}(t-x))dx$$

令$\frac{2\pi}{\tau}(t-x)=u$,则

$$\therefore\ r(t)=\frac{1}{\pi}\{Si[\frac{2\pi}{\tau}(t+\frac{\tau}{2})]-Si[\frac{2\pi}{\tau}(t-\frac{\tau}{2})]\}$$

$f_c>>\frac{1}{\tau}\rightarrow$ 接近矩形

$f_c<<\frac{1}{\tau}\rightarrow$ 接近抽样函数

$f_c\tau$ 为输出脉冲 $\rightarrow$ Gibbs波纹的周期数

矩形脉冲可视为两个阶跃信号之差，

总响应又可视为两个阶跃响应之差

由于理想低通滤波器的截断效应对于上升沿和下降沿的跳变，都会产生Gibbs现象，所以输出脉冲的形状取决于矩形脉冲的宽度τ和理想低通滤波器的截止频率ω_c;而$f_c\tau$即为输出脉冲所包含的Gibbs波纹的数目。

例：理想低通对 $Sa(x)$ 响应

- 可以证明理想低通对 $\frac{\pi}{\omega_c}\delta(t)$ 和对 $\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}$ 的响应是一样的

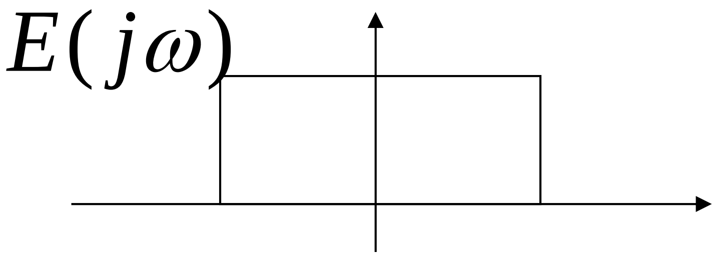
证

$$e(t)=\delta(t) \Rightarrow h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega(t-t_0)]$$

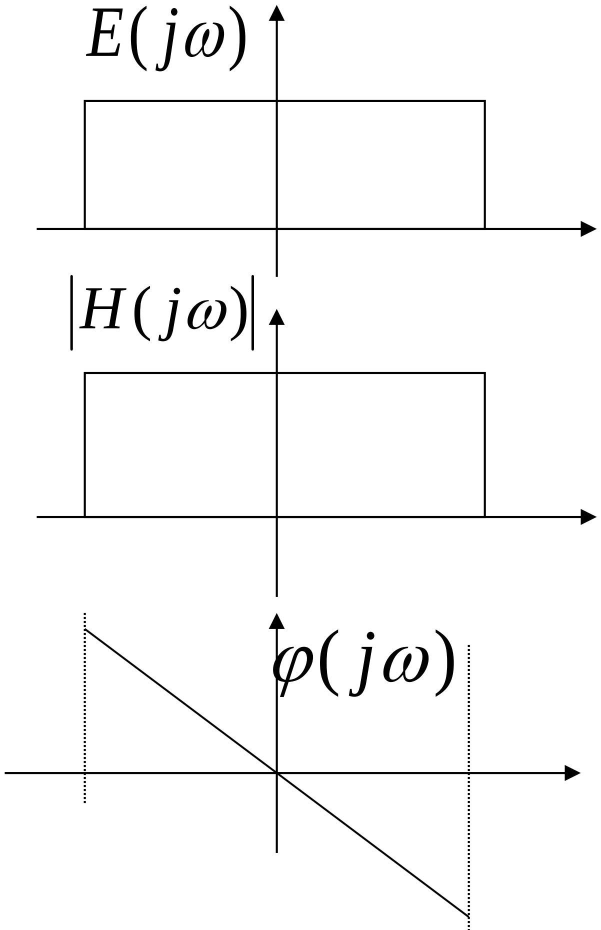
$$e(t)=\frac{\pi}{\omega_c}\delta(t) \Rightarrow r(t)=\frac{\pi}{\omega_c}h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega(t-t_0)]$$

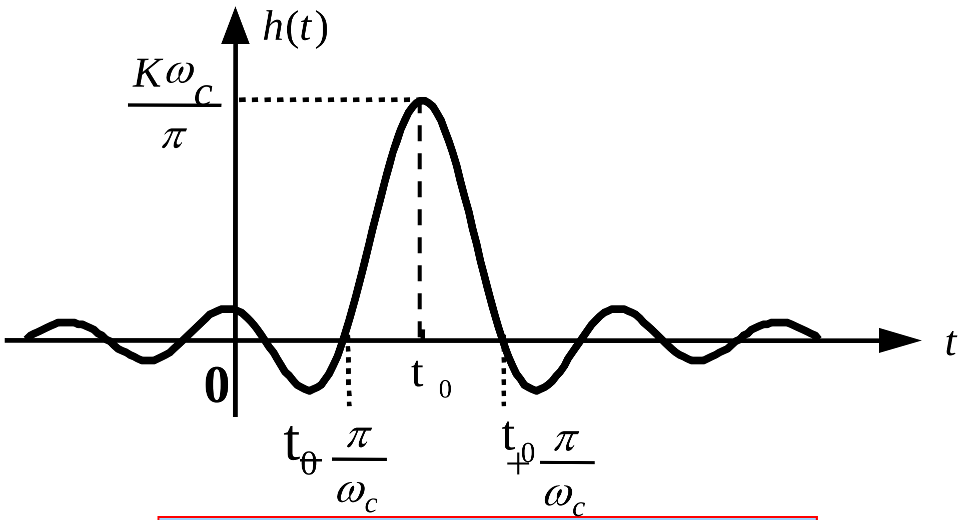
$$e(t)=\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}$$

对偶性



$E(j\omega)$ 和 $H(j\omega)$ 有完全一样的形状，相乘的结果还是$E(j\omega)$,反变换回去还是e(t),只是多了相移，因为$H(j\omega)$是有线性相位的





$$r(t) = \frac{\sin\omega(t-t_0)}{\omega(t-t_0)}$$

*结论

(1)输出响应的延迟时间取决于理想低通滤波器的相位特性的斜率。

(2)输入信号在通过理想低通滤波器后，输出响应在输入信号不连续点处产生逐渐上升或下降的波形，上升或下降的时间与理想低通滤波器的通频带宽度成反比。

(3)理想低通滤波器的通带宽度与输入信号的带宽不相匹配时，输出就会失真。系统的通带宽度越大于信号的带宽，则失真越小，反之，则失真越大。

§5.7调制与解调

*调制的功能和目的

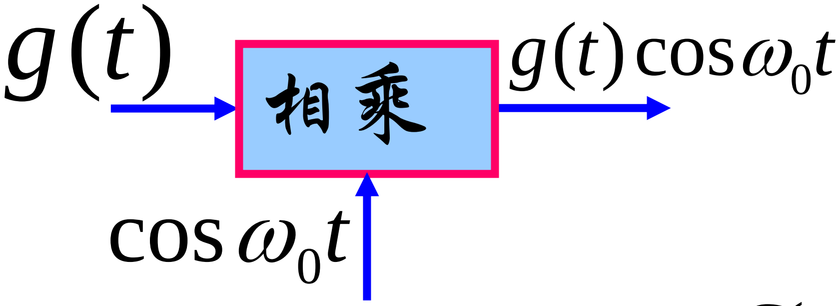
- 为无线通信天线尺寸的合理选择
- 改善电波传播之衰减
- 分割电台
- 实现信道的复用
- 进行频率变换，以利于信号的发送和信道中的传输
- 提高通信系统的抗干扰性能
- 某些乐音信号波形具有调制信号的特征

*.信号与系统频域分析的应用-调制与解调

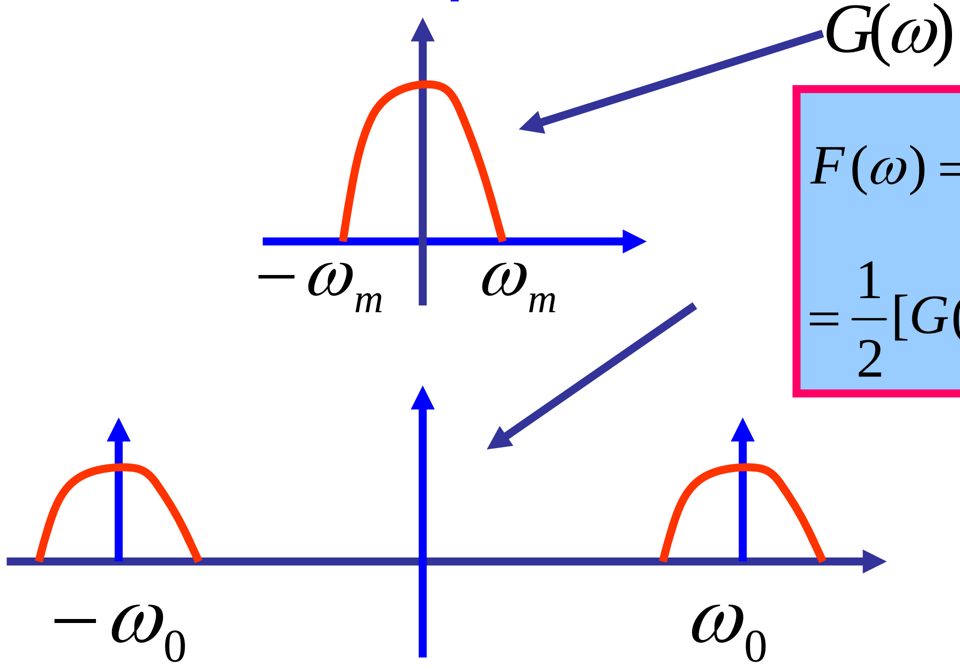
- 抑制载波调幅(SC-AM)
- 双边带调幅(DSB AMSC)
- 单边带调幅(SSB AMSC)
- 同步解调
- 频分复用
- 时分复用
- 码分复用

调制：

若 $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$　$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 则频谱搬移过程如下：



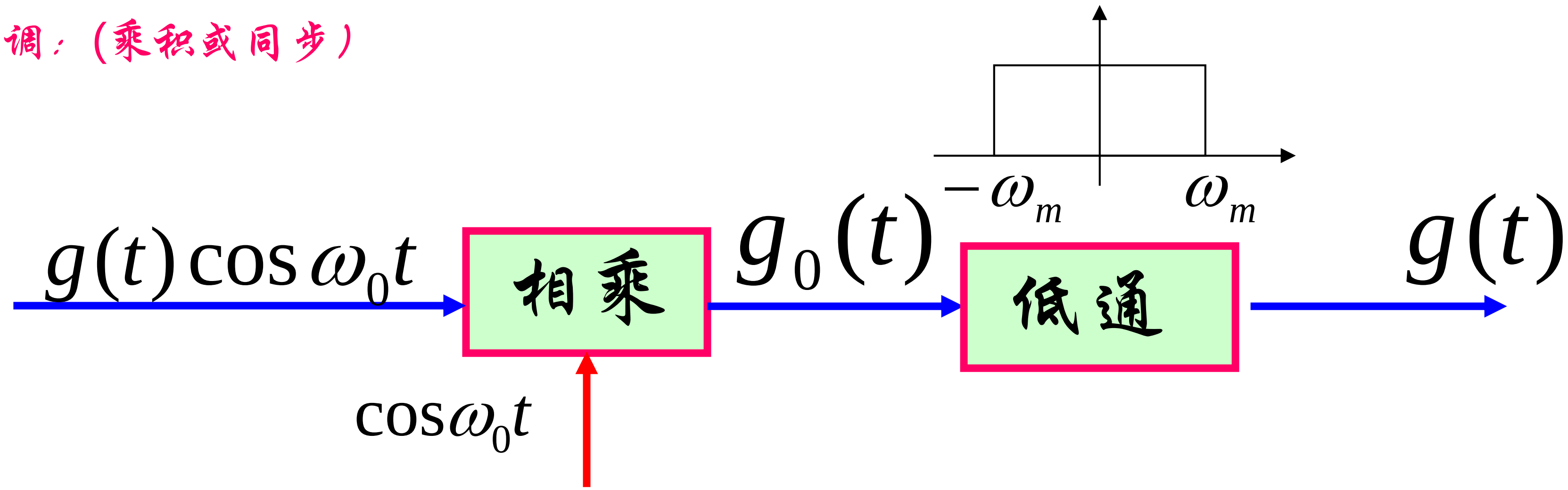
$$f(t) = g(t)\cos\omega_0 t$$



$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} G(\omega) * [\pi\delta(\omega+\omega_0) + \pi\delta(\omega-\omega_0)]$$

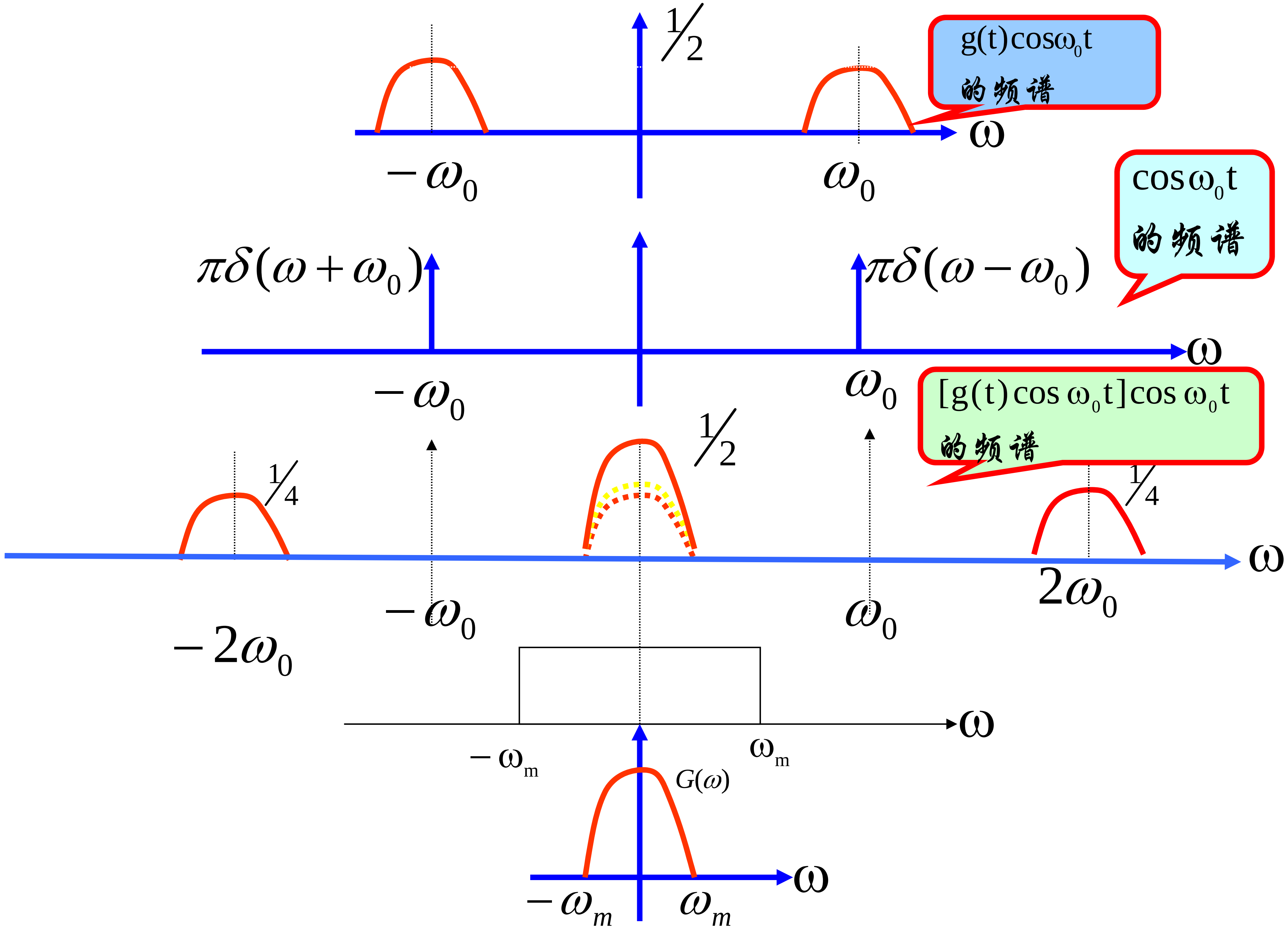
$$= \frac{1}{2}[G(\omega+\omega_0) + G(\omega-\omega_0)]$$

解调：（乘积或同步）



$$
\begin{aligned}
g_0(t) &= [g(t)\cos\omega_0 t]\cos\omega_0 t \\
&= \frac{1}{2}g(t)(1+\cos 2\omega_0 t) \\
&= \frac{1}{2}g(t)+\frac{1}{2}g(t)\cos 2\omega_0 t
\end{aligned}
$$

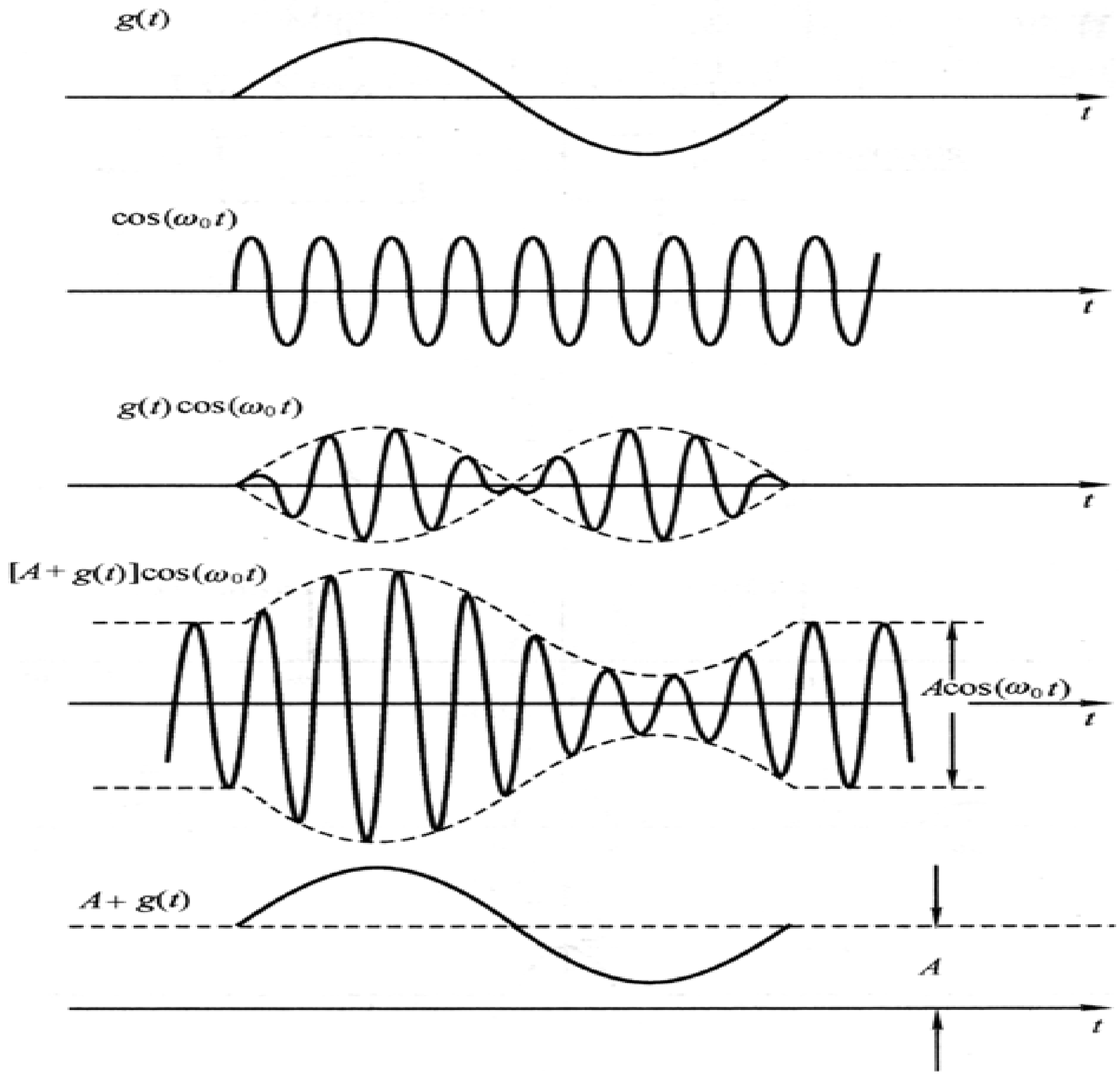
$$
G_0(\omega)=\frac{1}{2}G(\omega)+\frac{1}{4}[G(\omega+2\omega_0)+G(\omega-2\omega_0)]
$$



1/2
g(t)cosω0t 的频谱
ω
−ω0
ω0
cosω0t 的频谱
πδ(ω+ω0)
πδ(ω−ω0)
ω
−ω0
ω0
[g(t)cos ω0t]cos ω0t 的频谱
1/2
1/4
1/4
ω
2ω0
−ω0
ω0
−2ω0
ω
−ωm
ωm
G(ω)
ω
−ωm
ωm

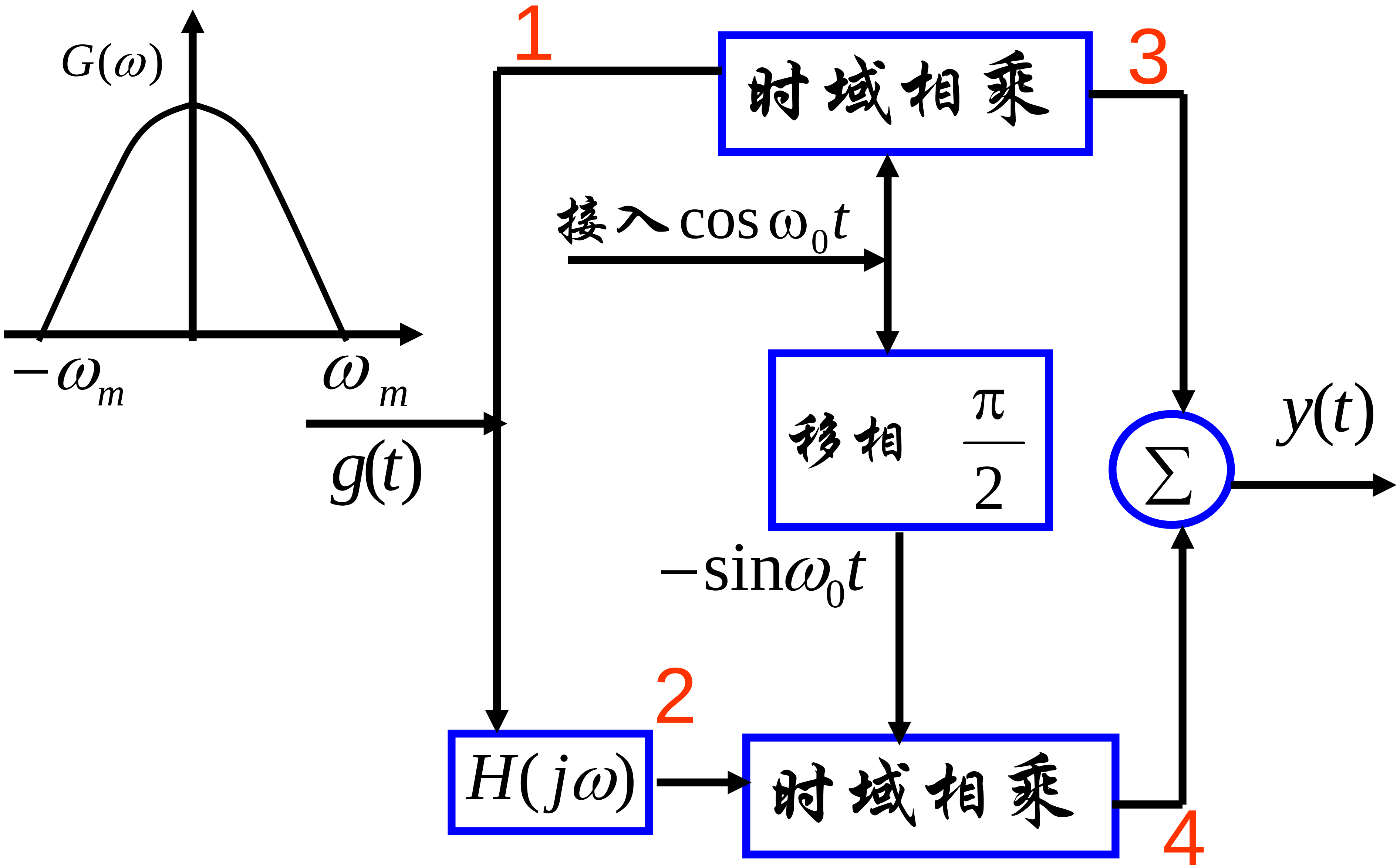
不需本地载波信号的发射

- 优点是简化接受机的结构：只需用包络检波即可（二极管、电阻、电容组成）
- 发送端的发射信号中加入一定强度的载波信号 $A\cos\omega_0 t$ ，即合成发射信号为 $[A+g(t)]\cos\omega_0 t$。如果A足够大，对于全部的 t，A+g(t) > 0, 已调制信号的包络就是A+g(t)。可以恢复出g(t).
- 技术简单，价格低，常用于民用通讯设备



调幅，抑制载波的调幅及其解调波形

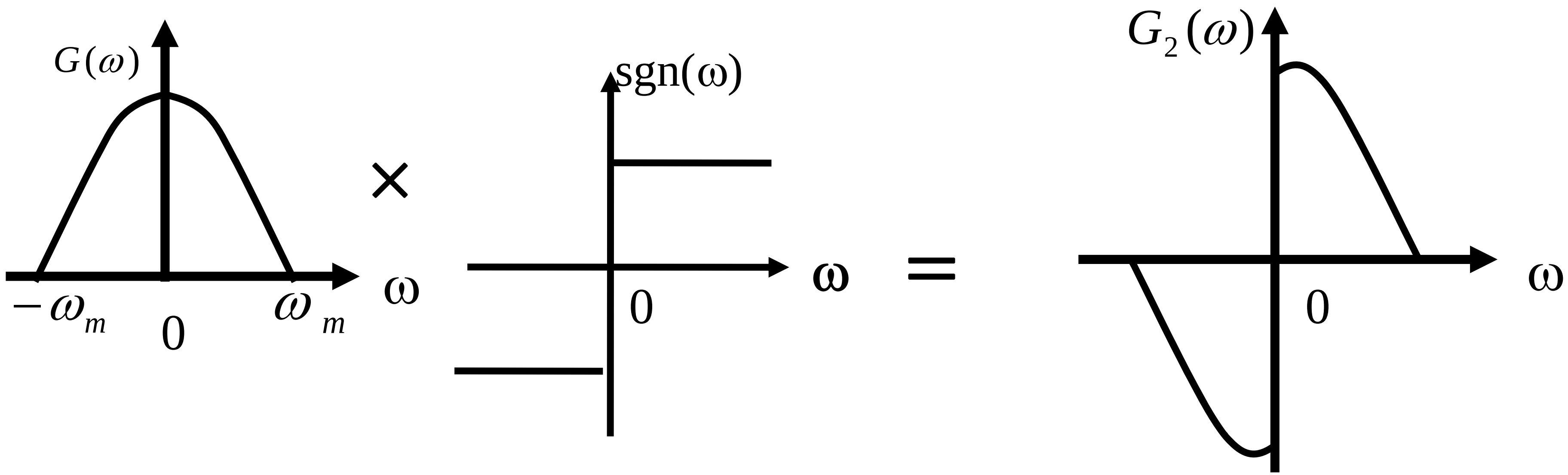
P312.5-18



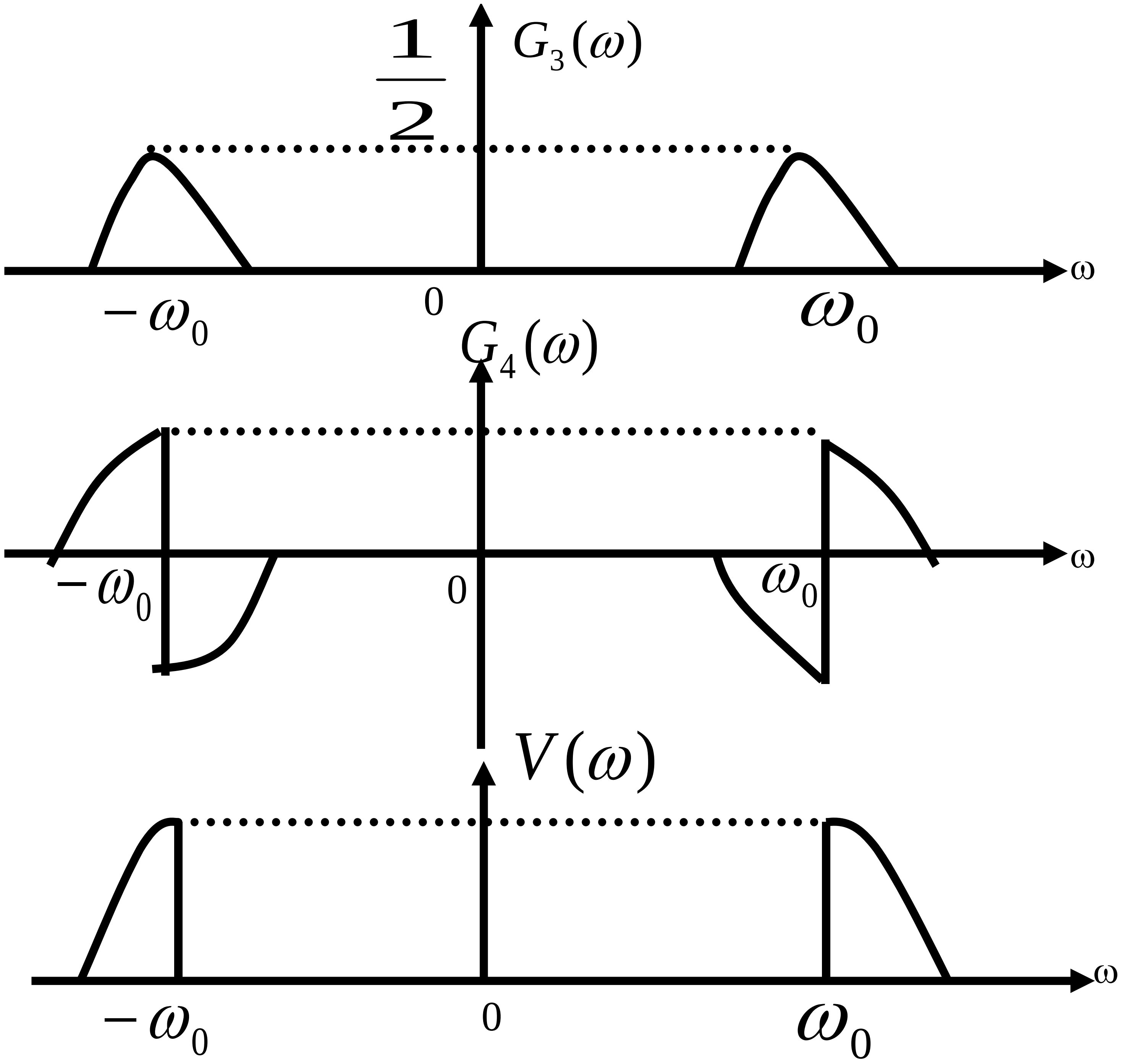
$G(\omega)$
$-\omega_m$
ω_m
$g(t)$
1
时域相乘
3
接入 $\cos\omega_0 t$
移相 $\frac{\pi}{2}$
$-\sin\omega_0 t$
Σ
$y(t)$
2
$H(j\omega)$
时域相乘
4

证明:设图中所标1,2,3,4各点信号的频谱分别为G_1,G_2,G_3,G_4则 $G_1(j\omega)=G(j\omega)$

$$G_2(\omega)=G(\omega)H(\omega)=-j\,\mathrm{sgn}(\omega)G(\omega)$$



$$G_3(\omega)=F[g(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[G(\omega+\omega_0)+G(\omega-\omega_0)]$$



$\frac{1}{2}$
$G_3(\omega)$
ω
$-\omega_0$
0
ω_0
$G_4(\omega)$
ω
$-\omega_0$
0
ω_0
$V(\omega)$
ω
$-\omega_0$
0
ω_0

$$G_4(\omega)=F[g_2(t)(-\sin\omega_0 t)=-\frac{j}{2}[G_2(\omega+\omega_0)-G_2(\omega-\omega_0)]$$

$$=\frac{1}{2}[G(\omega-\omega_0)\,\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0)-G(\omega+\omega_0)\,\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)]$$

$$V(\omega)=G_3+G_4=$$

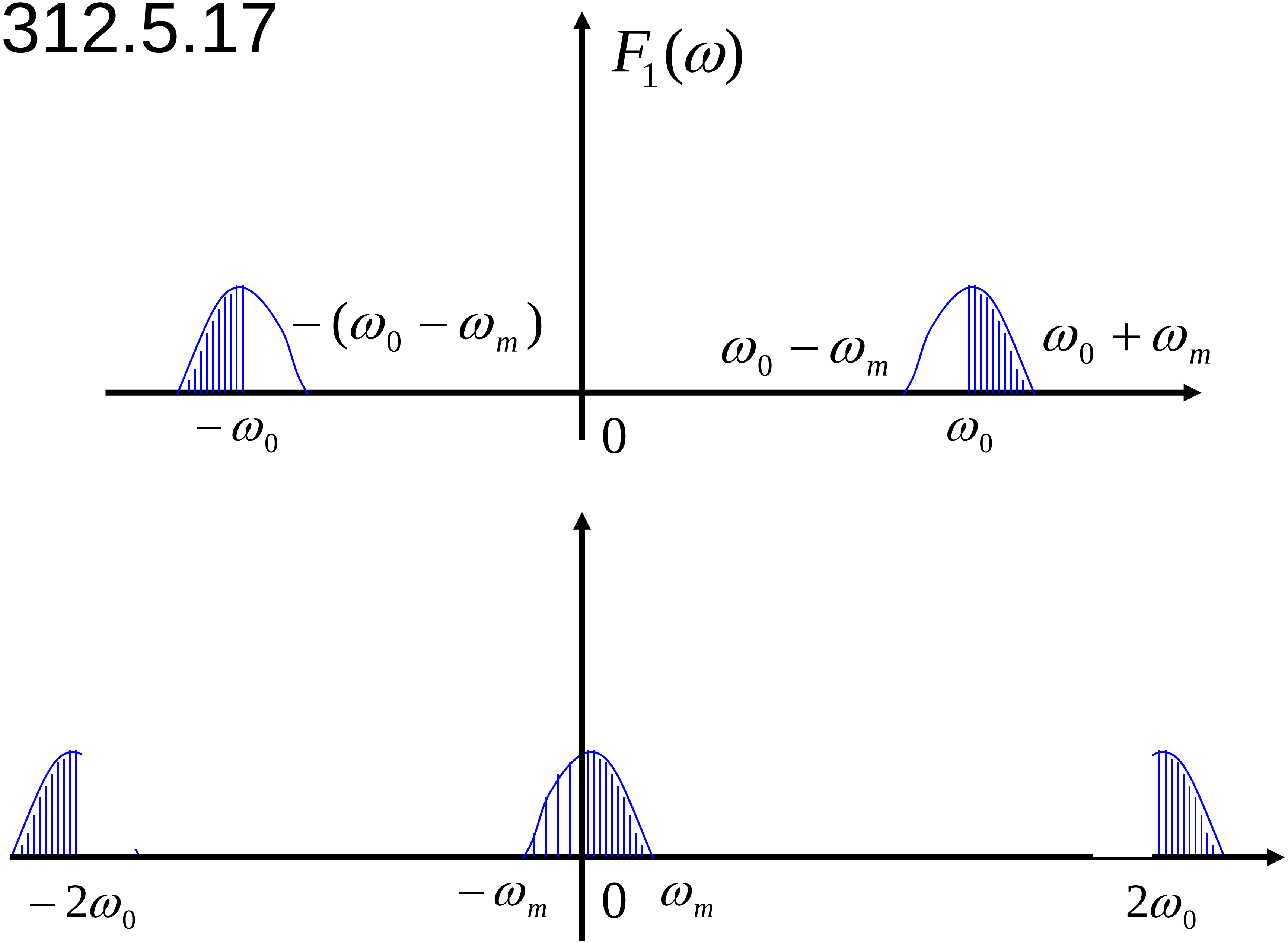
$$\frac{1}{2}\{G(\omega+\omega_0)[1-\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)]+G(\omega-\omega_0)[1+\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0)]\}$$

$$1+\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0)=\begin{cases}2\ldots\omega>\omega_0\\0\ldots\omega<\omega_0\end{cases}$$

$$1-\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0)=\begin{cases}2\ldots\omega<-\omega_0\\0\ldots\omega>\omega_0\end{cases}$$

$$\therefore V(\omega)=G(\omega-\omega_0)u(\omega-\omega_0)+G(\omega+\omega_0)u(-\omega-\omega_0)$$

P312.5.17



$F_1(\omega)$
$-(\omega_0-\omega_m)$
$\omega_0-\omega_m$
$\omega_0+\omega_m$
$-\omega_0$
0
ω_0
$-2\omega_0$
$-\omega_m$
0
ω_m
$2\omega_0$

证明：同步解调就是使单边带信号$f_1(t)$

在时域中乘上$\cos\omega_0 t$

$$f(t) = f_1(t)\cos\omega_0 t$$

频域中：$F(\omega) = F_1(\omega) * \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$

从卷积结果中可以看到：

它包括了原信号的频谱和一载波为$2\omega_0$

的单边带信号，

利用一低通滤波器（$\omega_c \ge \omega_m$）

滤出载波为$2\omega_0$的

单边带信号就得到了原信号频谱$G(\omega)$.

§5.8带通滤波器系统的运用

一.调幅信号作用于带通系统

（p289,例5－4）

$$v_1(t) = \cos(1+100t)\cos 100t$$

$$v_2(t) = [1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t-45^0)\cos 100t$$

已知带通滤波器的转移函数为

$$H(s)=\frac{v_2(s)}{v_1(s)}=\frac{2s}{(s+1)^2+100^2}$$

1.求冲激响应 $h(t)=L^{-1}[H(s)]$.

2.若激励信号 $v_1(t)=(1+\cos t)\cos 100t$,求稳态响应 $v_2(t)$

（提示：先求出正弦稳态频率响应特性表达式，可利用一些近似条件简化表达式）

3.粗略画出 $v_2(t)$ 的波形图，并指出 $v_2(t)$ 与 $v_1(t)$ 波形的主要区别。

解：$1.\ h(t) = L^{-1}\left[\frac{2s}{(s+1)^2+100^2}\right] =$

$$L^{-1}2\left[\frac{s+100}{(s+1)^2+100^2} - \frac{100}{(s+1)^2+100^2}\right]$$

$$= 2e^{-t}[\cos 100t - \sin 100t)$$

2.$v_1(t)$的表达式可展开为：

$$v_1(t) = \cos(100t) + \frac{1}{2}\cos(101t) + \frac{1}{2}\cos(99t)$$

$$H(j\omega) = \frac{2j\omega}{(j\omega+1)^2+100^2} \approx \frac{2j\omega}{(j\omega)^2+2j\omega+100^2}$$

$$=\frac{2}{2+j\dfrac{(\omega+100)(\omega-100)}{\omega}}$$

考虑到所研究的频率范围仅在ω=100附近

取近似条件 $\omega+100\approx 2\omega$；于是有

$$\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega)\approx\frac{1}{1+\mathrm{j}(\omega-100)}$$

$$\begin{cases} H(100)=1 \\ H(101)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-j45^0} \\ H(99)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{j45^0} \end{cases}$$

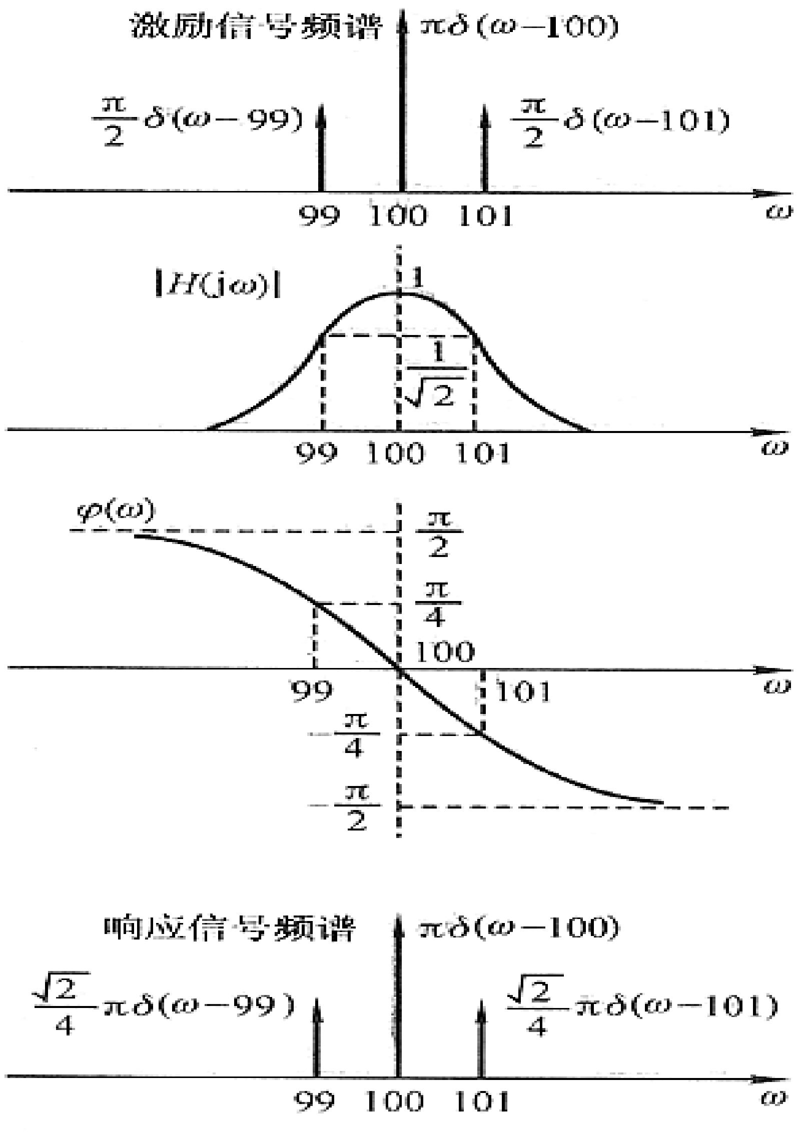
$$v_2(t) = \cos(100t) + \frac{1}{2}[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(101t - 45^0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(99t + 45^0)$$

$$= \cos(100t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(100t)\cos(t - 45^0)$$

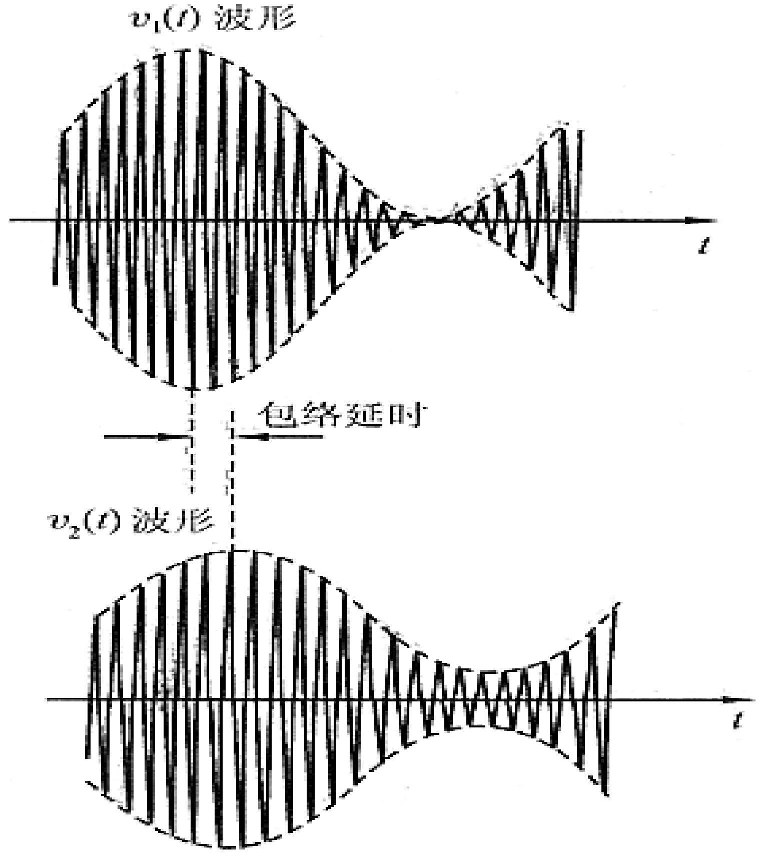
$$= [1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t - 45^0)\cos 100t$$

$$\mathrm{v}_1(\mathrm{t}) = (1 + \cos 100\,\mathrm{t})\cos 100\,\mathrm{t}$$

调幅，抑制载波调幅及其解调波形



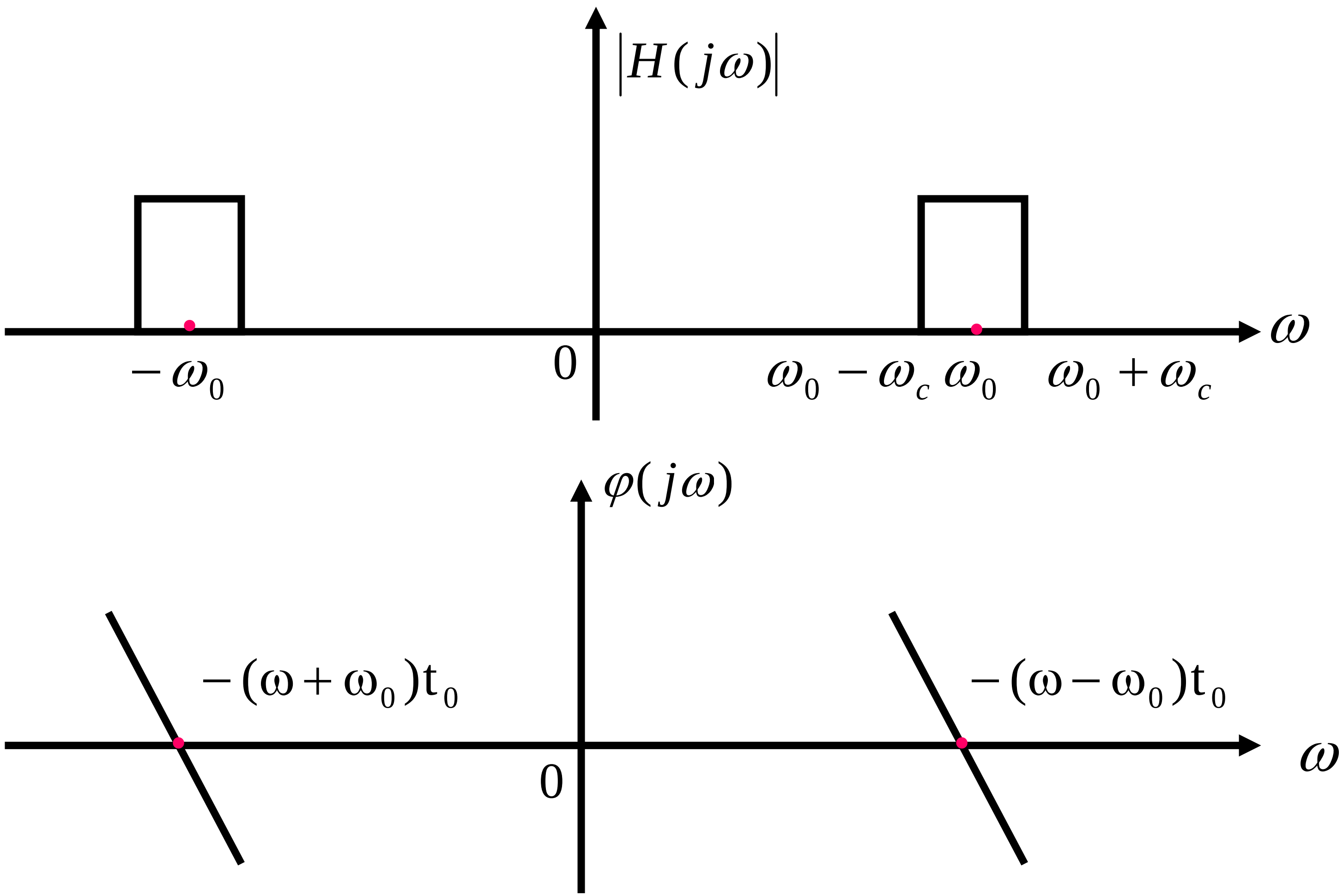
(a)



(b)

由$v_1(t)$和$v_2(t)$地表达式可知:调幅波包络的相对强度减小，而且包络产生延时。

P311.3-10



解：此题由傅立叶反变 换的定义得出

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$H(\omega) = H_1(\omega + \omega_0) + H_1(\omega - \omega_0)$$

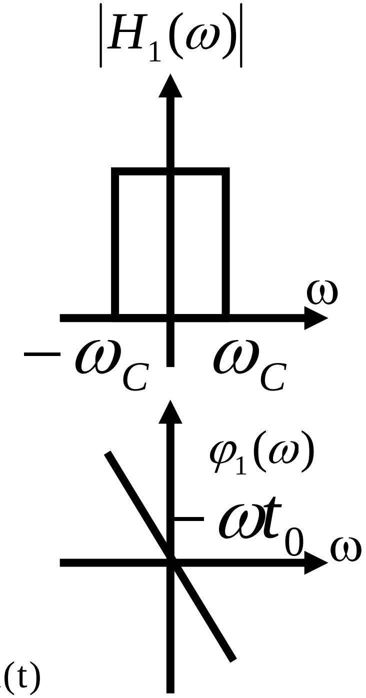
$$h(t) = F^{-1}[H_1(\omega + \omega_0) + H_1(\omega - \omega_0)]$$

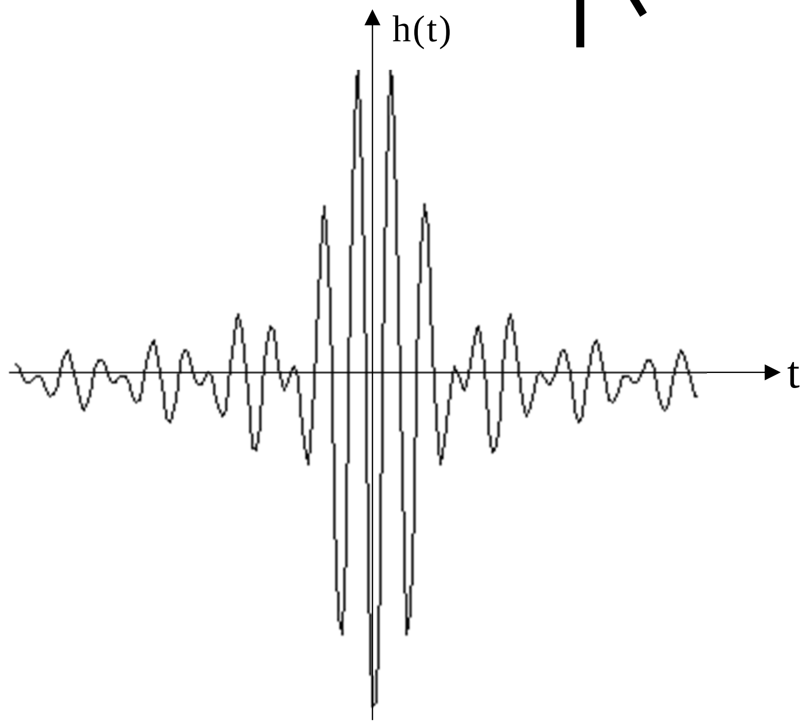
$$= h_1(t)e^{-j\omega t} + h_1(t)e^{j\omega t}$$

$$h_1(t) = F^{-1}[H_1(\omega)] = \frac{\omega_C}{\pi} Sa[\omega_c(t - t_0)]$$

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t - t_0)] 2\cos\omega_0 t$$

不是物理可实现的。





二.频率窗函数的应用

P292.例题5－5说明了频窗函数的概念，我们现在讨论
p313.习题5－22

若x(t)、φ(t)都是实函数，连续小波变换的定义可 简写为

$$WT_x(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

1.若$F[x(t)]=X(\omega);F[\varphi(t)]=\psi(\omega)$，试证明以上定义式也可用下式给出

$$WT_x(a,b)=\frac{\sqrt{a}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\psi(a\omega)e^{j\omega b}d\omega$$

2.讨论定义式中a、b参量的含义。

解： $x(t) \leftrightarrow X(\omega) \quad \varphi(t) \leftrightarrow \psi(\omega)$

由 $p129: F[f(at-t_0)] = \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a}) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$

$$WT_x(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} x(t) \varphi(\frac{t-b}{a}) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} x(t) \varphi[-\frac{1}{a}(b-t)] dt$$ 与下式比较

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} x(t) * \varphi(-\frac{t}{a})$$

$$\Big\downarrow FT \qquad\qquad \Big\downarrow FT$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} X(\omega) \qquad\qquad |a|\psi(-a\omega)$$

$$WT_x(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} X(\omega)|a|\psi(a\omega)e^{j\omega b}d\omega$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\psi(a\omega)e^{j\omega b}d\omega$$

§5.9从抽样信号恢复原连续时间信号

(一).由抽样信号恢复原连续信号

- 取主频带 $F(\omega)$ ：

$$\boxed{F(\omega) = F_s(\omega)H(\omega)}$$

- 时域卷积定理：

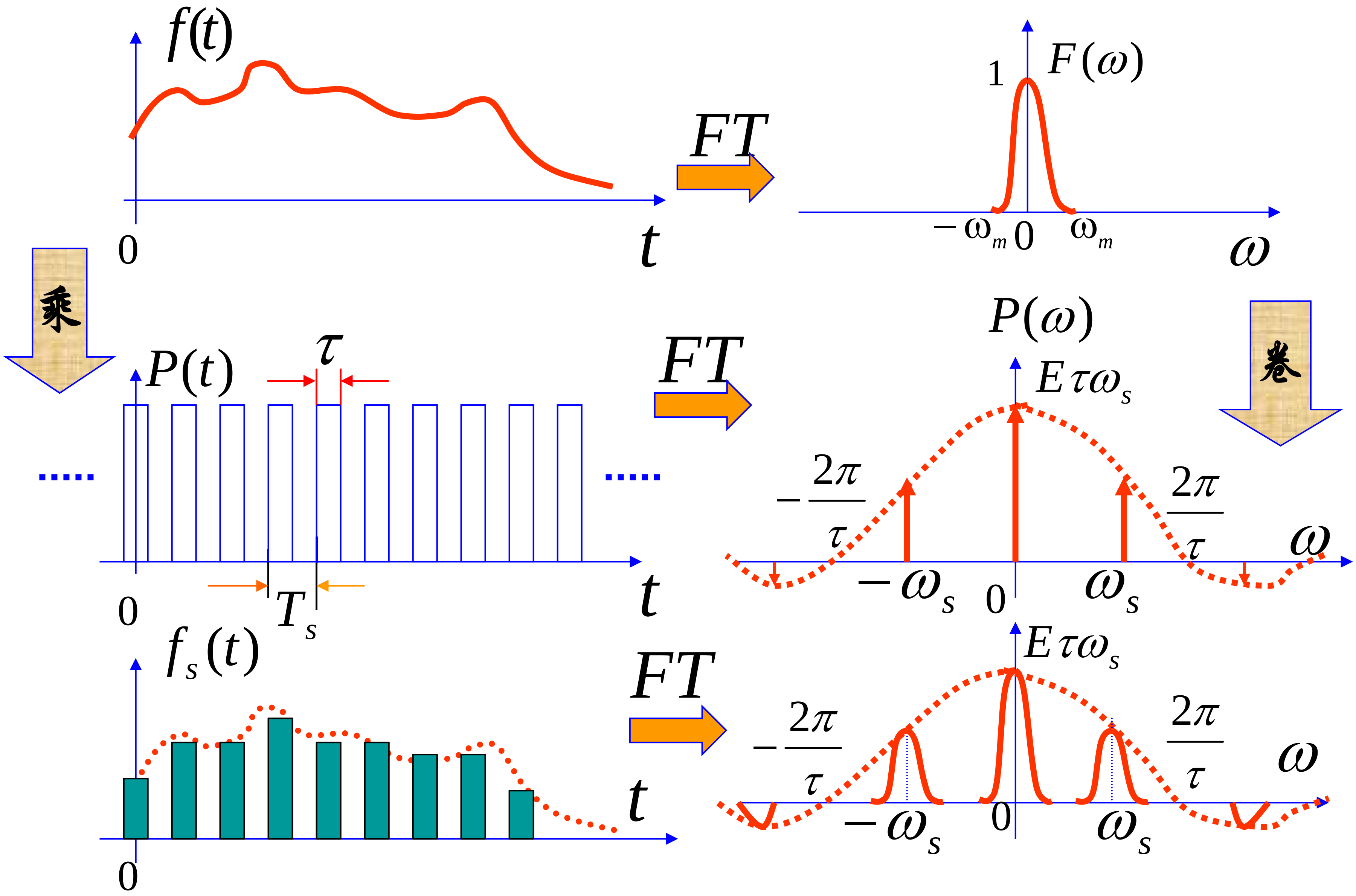
$$\boxed{f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)}$$

$$\boxed{h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c t)}$$

$$f(t) = f_s(t) * h(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_c}{\pi} f(nT_s) Sa[\omega_c(t - nT_s)]$$

矩形脉冲的取样(p152 图3－50) ⟶ 自然抽样



*取样信号频谱推导:

令模拟带限信号傅立叶变换为 $F(\omega)$,即 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

取样脉冲序列的傅立叶变换为 $p(t) \leftrightarrow P(\omega)$

设取样为均匀抽样,周期为T_s,则取样角频率为

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

由于p(t)是周期信号,可知p(t)的傅立叶变换为:

$$p(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

其中(参看p102)

$$P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{E\tau}{T_s} Sa\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right)$$

由频域卷积定理得，时域相乘的傅立叶变换等于它们的频谱在频域里相卷积。

$$F_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)$$

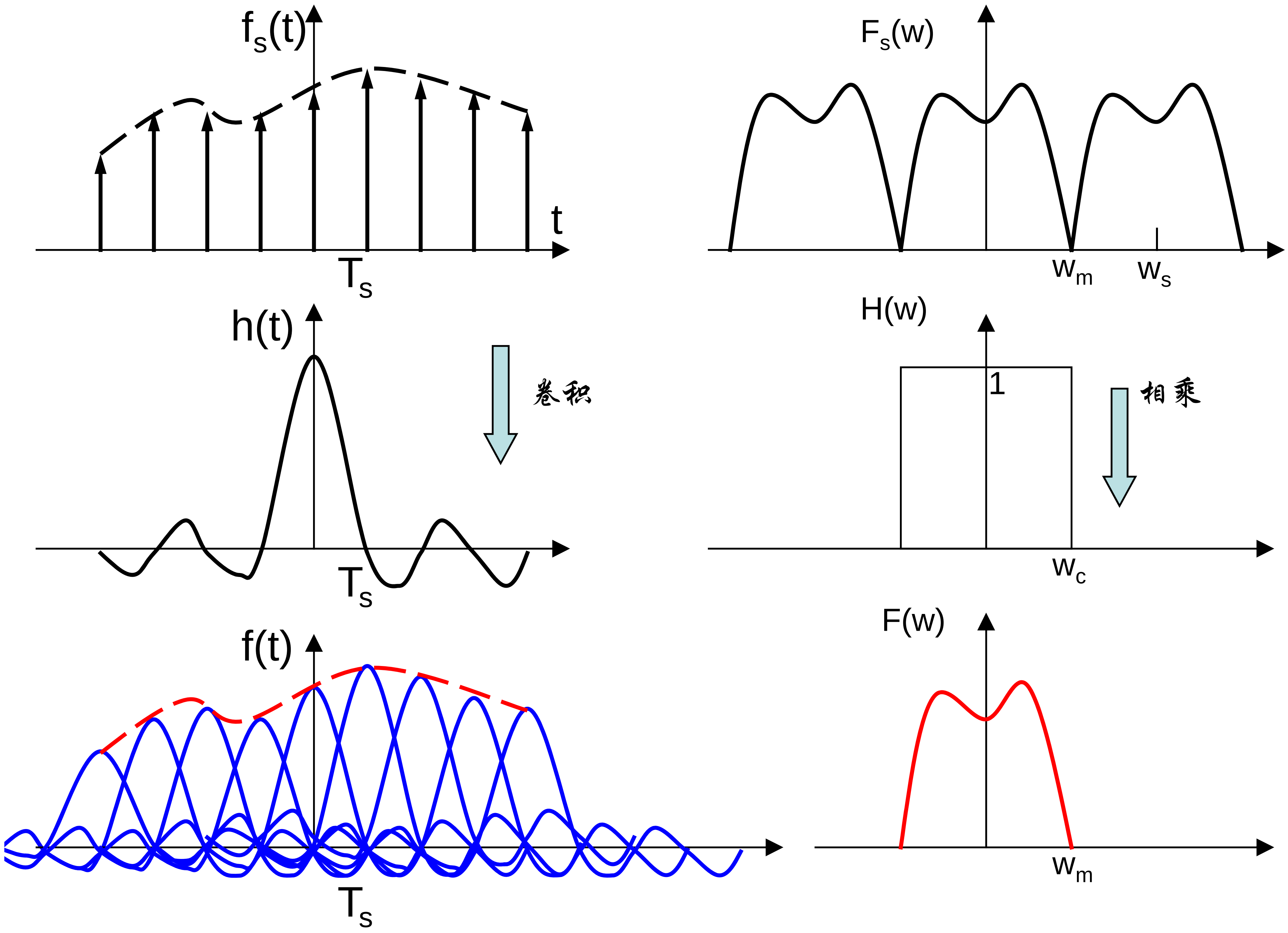
把计算出的 $P(\omega)$ 代入上式得：

$$F_s(\omega)=\frac{E\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)F(\omega-n\omega_s)$$

上式表明：

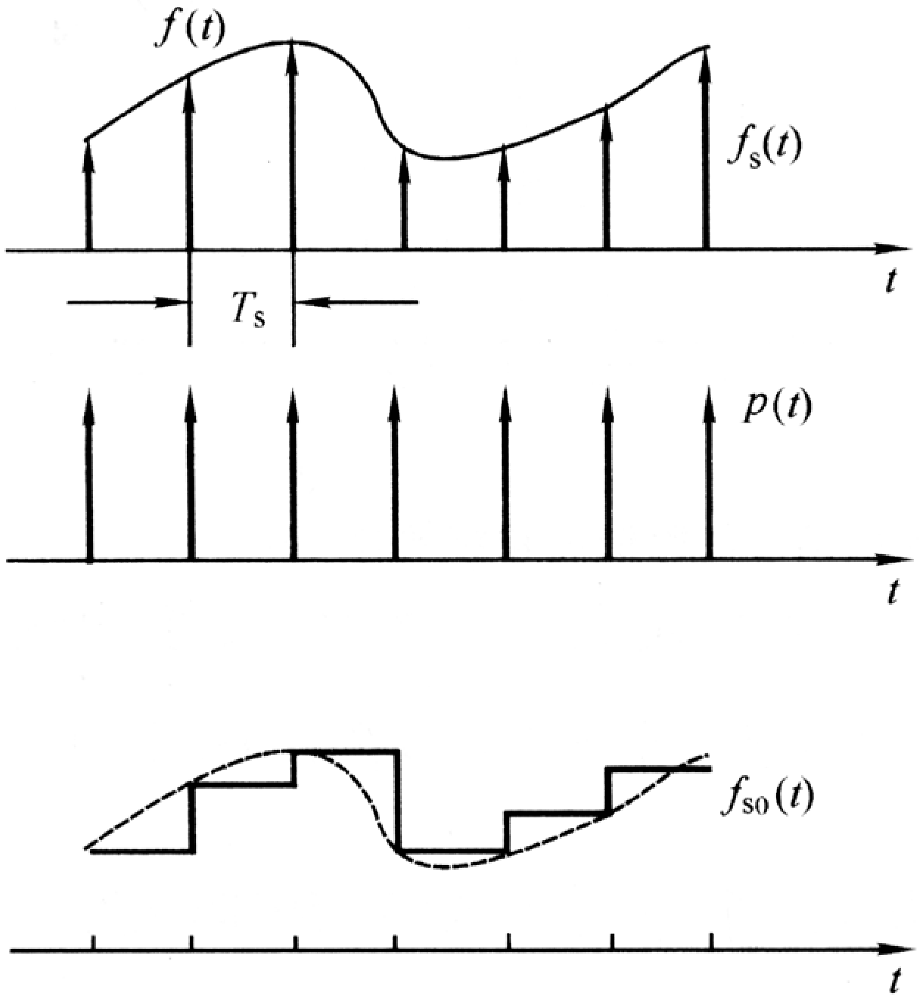
信号在时域被抽样后，它的频谱 $F_s(\omega)$ 是连续信号的频谱 $F(\omega)$ 以取样角频率 ω_s 为间隔周期地重复而得到的。在重复过程中，幅度被取样脉冲p(t)的傅立叶系数所加权，加权系数取决于取样脉冲序列的形状。(p152 图3－50)

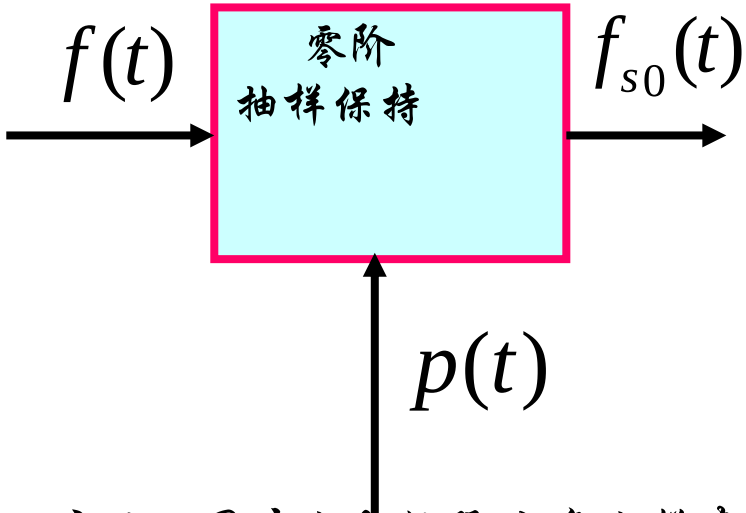
抽样性→周期性


$f_s(t)$
t
T_s
$F_s(w)$
w_m
w_s
h(t)
卷积
T_s
H(w)
1
相乘
w_c
f(t)
T_s
F(w)
w_m

（二）零阶抽样保持(瞬时抽样)

冲激抽样的困难：时宽窄，幅度大，只是一种理想的波形，硬件电路无法实现。因此实际上常采用零阶保持抽样。





定义：用这个内插器时,每个样本值将在采样周期中保持到收到下一个样本值为止.用阶梯信号近似表示连续函数。

数学分析：$f_{s0}(t)$ 如何恢复到 $f(t)$

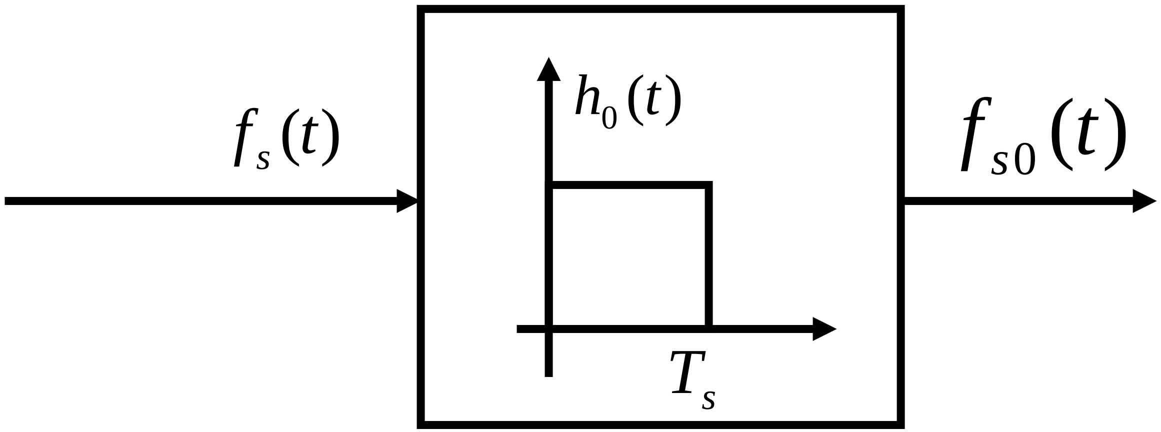
由于

$$f_s(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$

又由于 $f_{s0}(t)$ 可以由 $f(t)$ 通过具有冲激响应为 $h_0(t)=u(t)-u(t-T_s)$ 的线性时不变系统得到，则

$$f_{s0}(t) = f_s(t) * h_0(t)$$



其中$h_0(t)$的傅立叶变换为：

$$F[h_0(t)] = T_s Sa(\frac{\omega T_s}{2}) e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}$$ 则：

$$F_{s0}(\omega) = F_s(\omega) * F[h_0(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) Sa(\frac{\omega T_s}{2}) e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}$$

与自然取样比较：$F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{n\omega_s \tau}{2}) F(\omega - n\omega_s)$

特征：

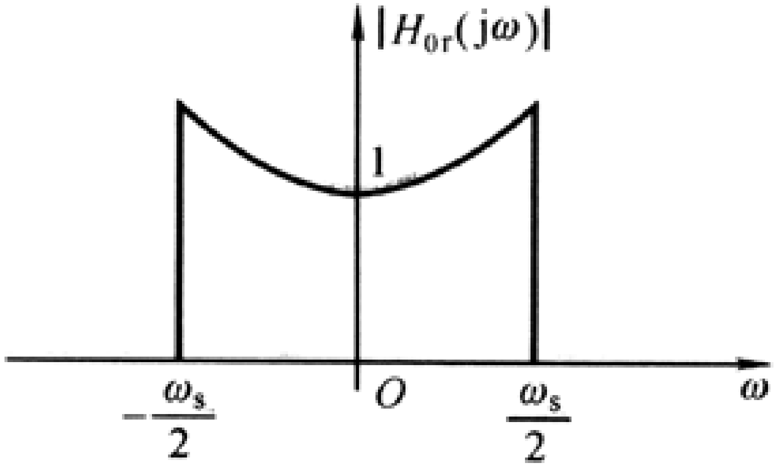
（1）$f_{s0}(t)$ 的频谱仍然是$F(\omega)$ 频谱以ω_s 为周期重复

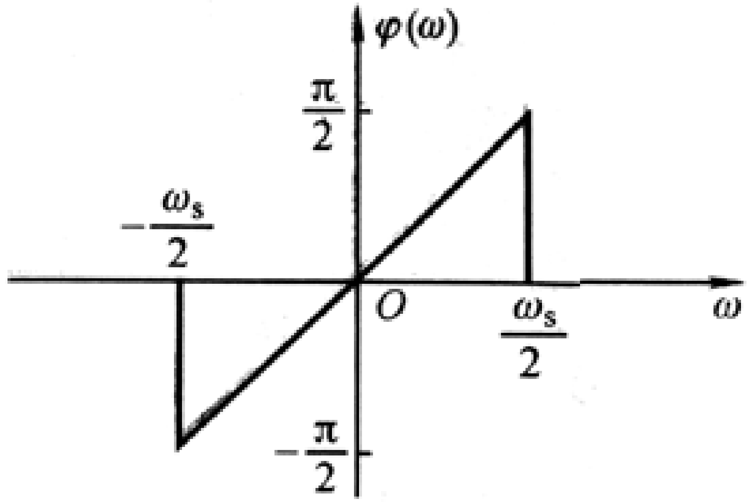
（2）要乘以 $Sa(\frac{\omega T_s}{2})$ 和延时因子$e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}$

（3）接收端不应用理想低通滤波器，而是应用具有以下补偿特征的低通滤波器：

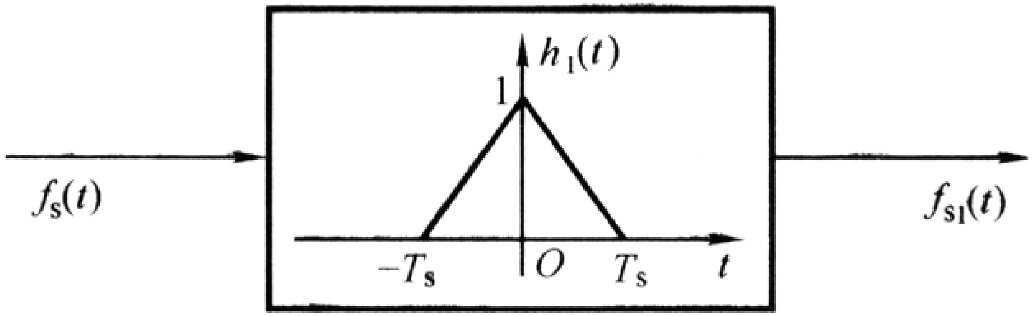
$$H_{0r}(j\omega)=\begin{cases}\dfrac{e^{j\frac{\omega T_s}{2}}}{Sa(\dfrac{\omega T_s}{2})} & \left(|\omega|\le\dfrac{\omega_s}{2}\right)\\ 0 & \left(|\omega>\dfrac{\omega_s}{2}|\right)\end{cases}$$

其幅频和相频曲线如图：

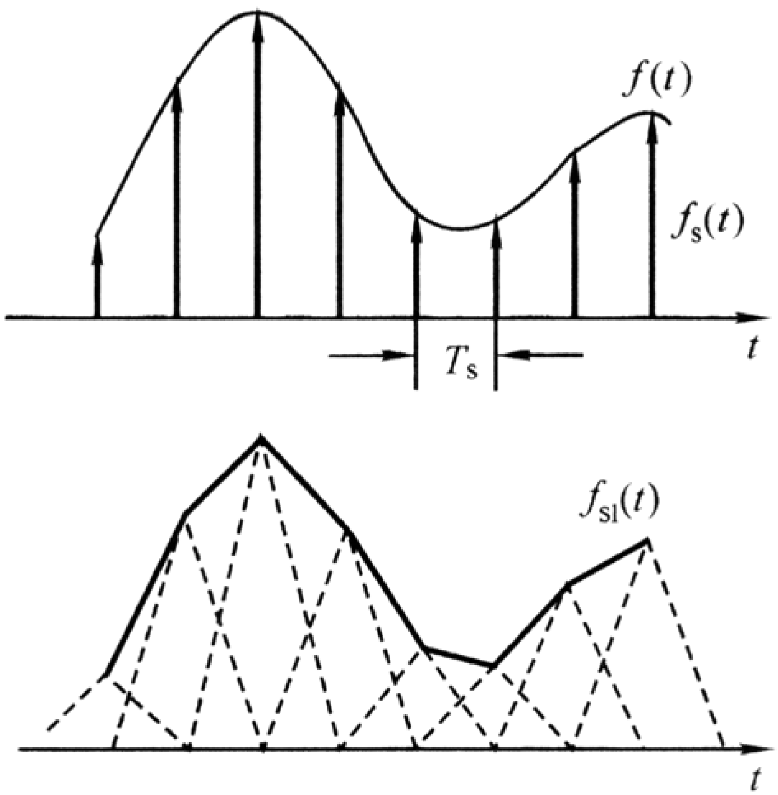




（三）一阶抽样保持 $f_{s1}(t)$



用这个方法时，相邻的两个样本值之间用直线连接，用折线信号近似表示连续函数。



由于 $f_{s1}(t)$ 可以由 $f(t)$ 通过具有冲激响应为

$$h_1(t)=\begin{cases}1-\dfrac{|t|}{T_s} & \left(|t|<T_s\right)\\ 0 & \left(|t|\ge T_s\right)\end{cases}$$

的线性时不变系统得到，则 $f_{s0}(t)=f_s(t)*h_1(t)$

其中 $h_1(t)$ 的傅立叶变换为：

$$F\left[h_1(t)\right]=T_s Sa^2(\frac{\omega T_s}{2})$$

则：

$$F_{s0}(\omega)=F_s(\omega)*F\left[h_1(t)\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)Sa^2(\frac{\omega T_s}{2})$$

特征：

（1） $f_{s1}(t)$ 的频谱仍然是$F(\omega)$ 频谱以ω_s 为周期重

（2） 要乘以 $Sa^2(\frac{\omega T_s}{2})$

（3） 接收端不应用理想低通滤波器，而是应用具有以下补偿特征的低通滤波器：

$$H_{0r}(j\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{Sa^2(\frac{\omega T_s}{2})} & \left(|\omega|\le\dfrac{\omega_s}{2}\right)\\ 0 & \left(\left|\omega>\dfrac{\omega_s}{2}\right|\right)\end{cases}$$

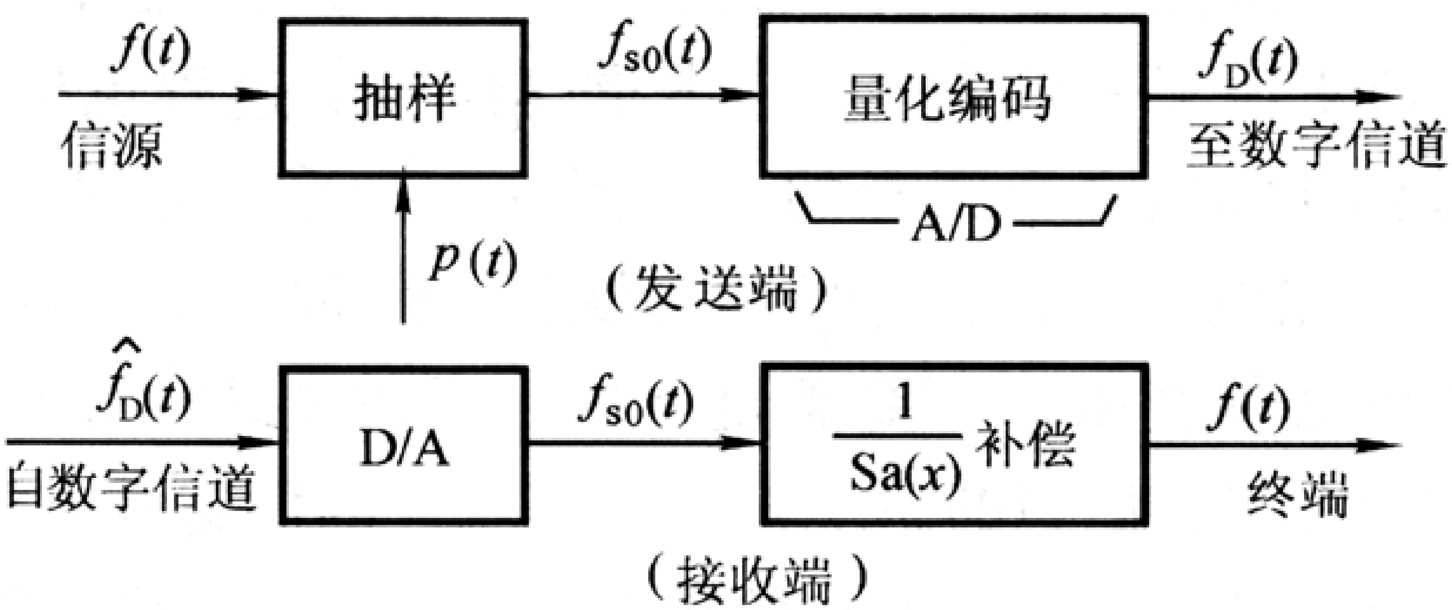
需注意的是：冲激响应为$h_1(t)$的系统是非因果系统(三角波形在负时间就出现)，但是如果引入时延特性，在线性相移的条件下，最终仍可无失真重建 $f(t)$，只是时间上相对于原信号有一定延时。

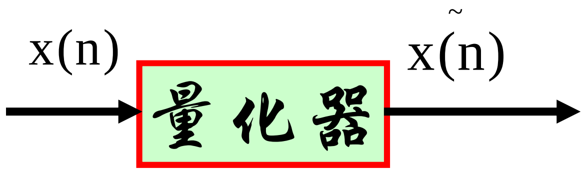
§5.10 脉冲编码调制(PCM）

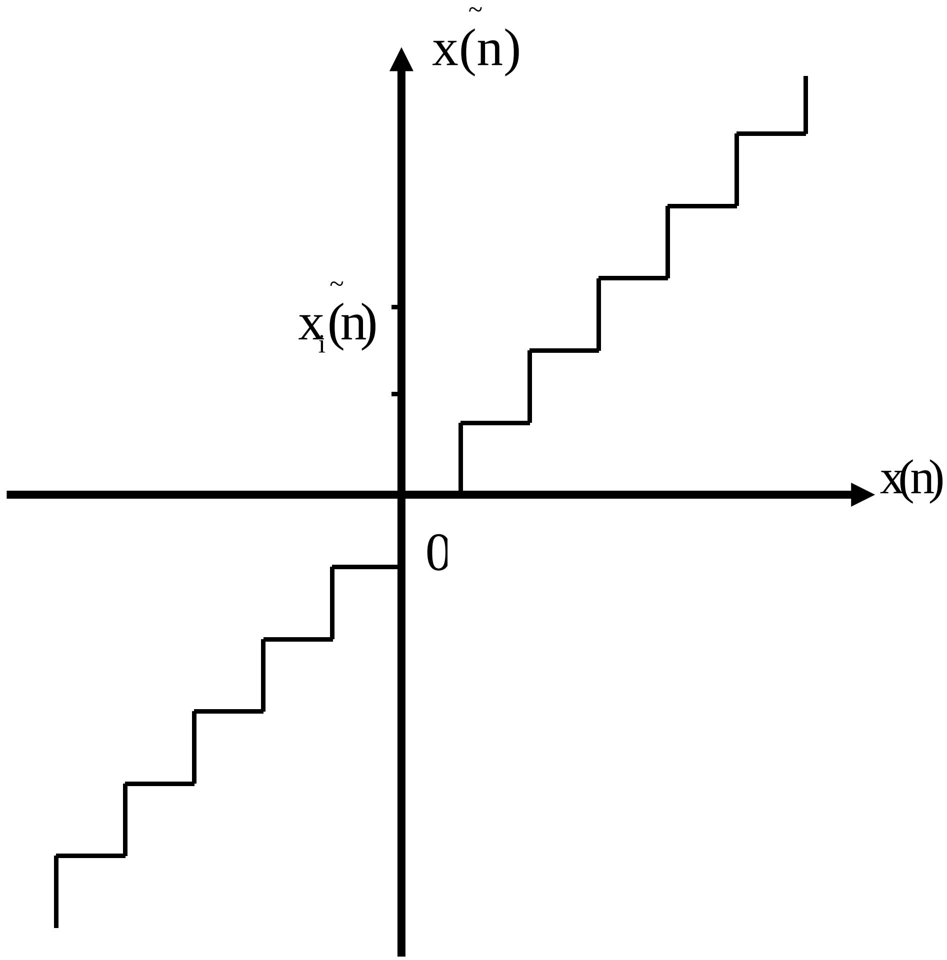
♦PCM（Pulse Code Modulation）

PAM：利用脉冲序列对连续信号进行抽样产生的信号。

PCM：把连续的信号换成数字编码信号进行传输或处理。（对模拟信号进行量化的一种方法）

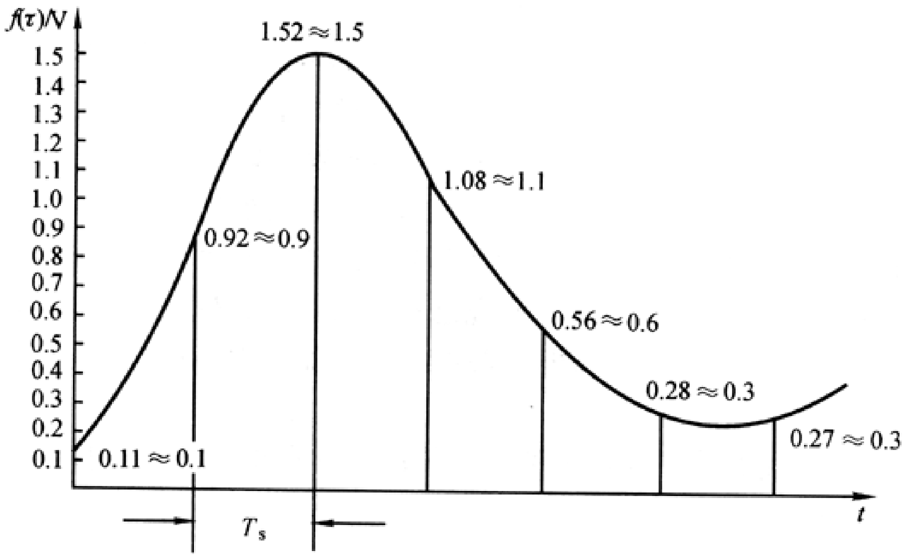






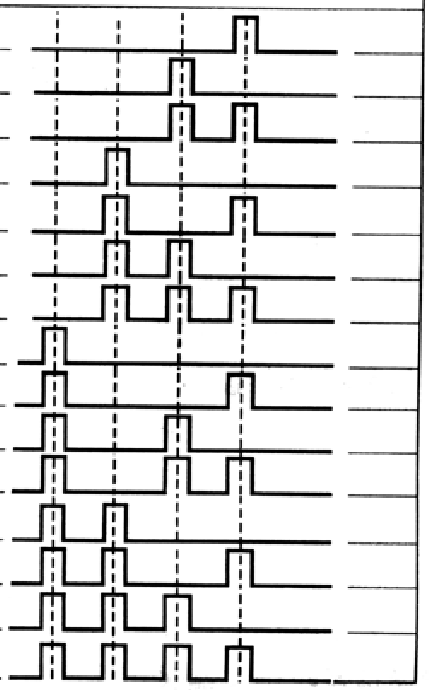
将输入序列 x(n)的动态范围（最大最小值之间的范围），均匀的分成2^b个量化台阶。把量化台阶的量化电平的量化电平作为量化器的输出序列值。简言之，量化器相当于围绕每一个电平四舍五入的过程。

量化与编码原理



(a)

数字	二进制等效数字	脉冲编码波形
0	0000	
1	0001	
2	0010	
3	0011	
4	0100	
5	0101	
6	0110	
7	0111	
8	1000	
9	1001	
10	1010	
11	1011	
12	1100	
13	1101	
14	1110	
15	1111	



(b)

PCM的特征：

（1）不能无失真传输信号。因为量化与重建过程中会产生量化误差。合理设计A/D和D/A变换器可将量化噪声限制在相当微弱的范围之内，保证PCM系统具有足够满意的传输质量。

（2）中继过程中噪声不会累加。不像模拟信号噪声会累加，信号传输时每段路程的PCM信号判决误差都可以很小，且不会累加。

（3）组合多种信源传输时具有很好的灵活性。信号经过PCM编码后可成为统一形式的二进制数字码流，实现时分复用等交织传输。

（4）易于实现数字信号处理和加密功能。

（5）PCM所需更多带宽。例子见P302

如语音信号频率范围：$(300-3400)Hz$

每个话路带宽约 $4\,\mathrm{kHz}$（模拟传输时）

$8\times 8\,\mathrm{kHz} = 64\,\mathrm{kHz}$（数字传输时）

§5.11 频分复用与时分复用

*多路复用：在同一个传输信道内，同时传输多路不同信号的概念和方法。

频分复用(FDM)

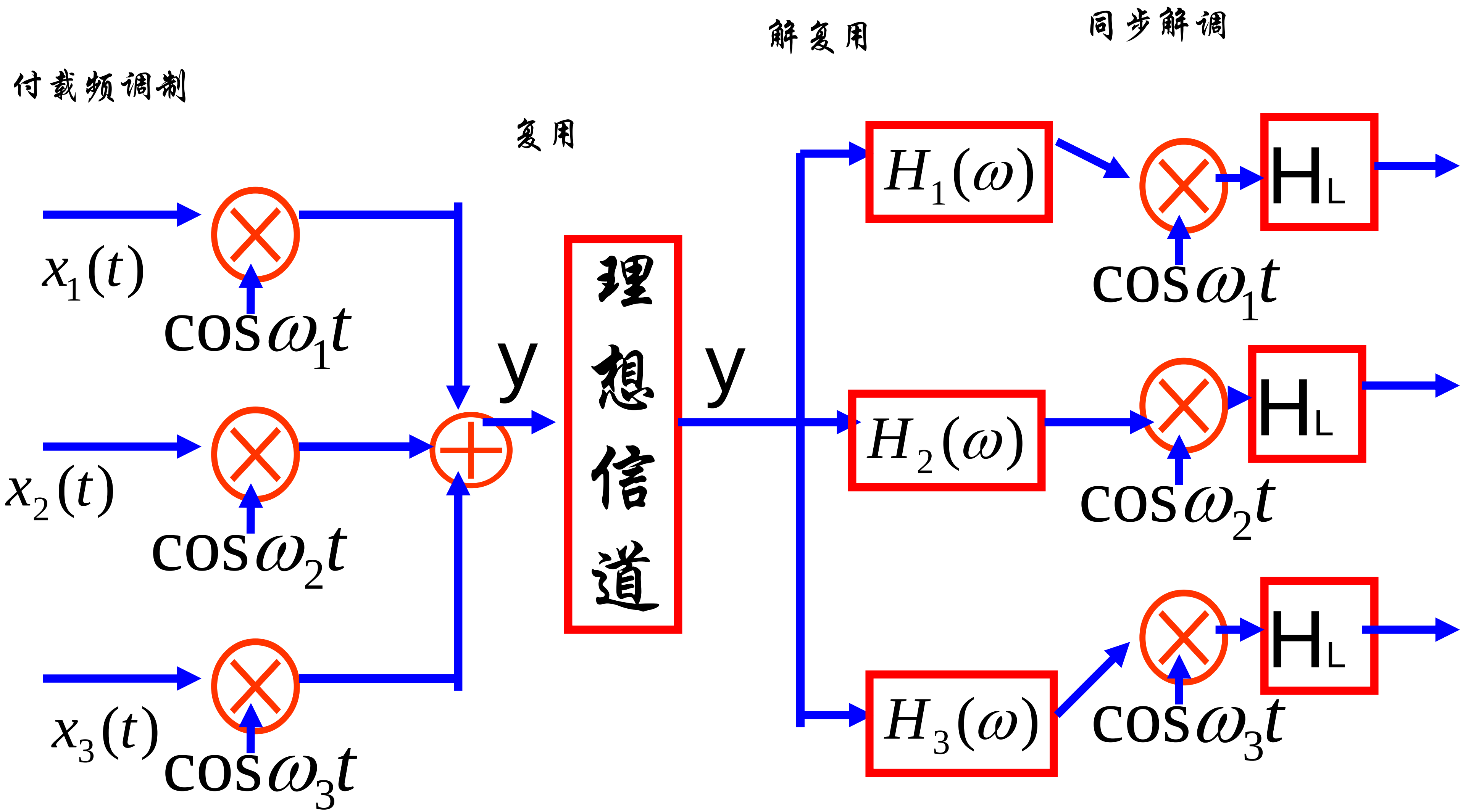
时分复用（TDM)

正交多路复用(QDM)

码分复用（CDM,CDMA)

波分复用(WDM)

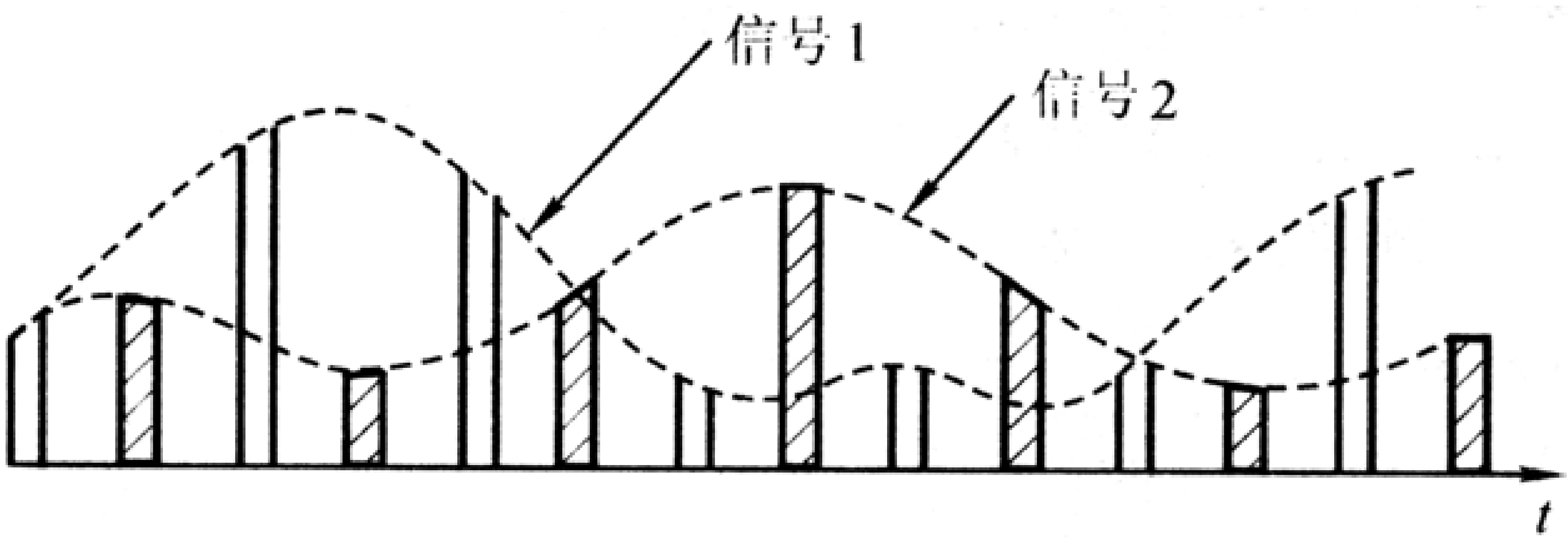
*频分复用



利用正弦幅度调制的频分多路复用和解复用的原理图

*.时分复用

理论依据：抽样定理。抽样空闲时间可以传输其他多路信号。在接收端，抽样值由适当的同步检测器分离。下面是两路信号一个信道的时分复用波形。



*时分与频分复用比较：

1、频分复用的每一信号占用不同的频率区间，相同的时间区间；时分复用的每一信号占用不同的时间区间，相同的频率区间；频分复用保留了频谱的个性，时分复用保留了波形的个性。

2、从硬件上看，频分复用的每一信号产生不同的载波，系统复杂；而时分复用则简单，易于大规模集成。

3、时分复用不会产生信号间的串话，而频分复用由于有谐波失真，易于产生信号间的串话。

但时分复用容易产生码间串扰。

4、PCM信号具备的各种优点在时分复用系统都有体现。

码分复用 CDM

- 常用的名词是码分多址 CDMA
  (Code Division Multiple Access)。
- 各用户使用经过特殊挑选的不同码型，因此彼此不会造成干扰。
- 这种系统发送的信号有很强的抗干扰能力，其频谱类似于白噪声，不易被敌人发现。
- 每一个比特时间划分为 *m* 个短的间隔，称为码片(chip)。
- 提高通信可靠性，减少干扰对通信的影响，降低平均发射功率。
- 直接序列DS-CDMA；跳频FH-CDMA

码片序列(chip sequence)

- 每个站被指派一个惟一的 *m* bit 码片序列。
  - 如发送比特 1，则发送自己的 *m* bit 码片序列。
  - 如发送比特 0，则发送该码片序列的二进制反码。
- 例如，S 站的 8 bit 码片序列是 00011011。
  - 发送比特 1 时，就发送序列 00011011，
  - 发送比特 0 时，就发送序列 11100100。
- S 站的码片序列：(–1 –1 –1 +1 +1 –1 +1 +1)

CDMA 的重要特点

- 每个站分配的码片序列不仅必须各不相同，并且还必须互相正交(orthogonal)。
- 在实用的系统中是使用伪随机码序列。

码片序列的正交关系

- 令向量 **S** 表示站 S 的码片向量，令 **T** 表示其他任何站的码片向量。
- 两个不同站的码片序列正交，就是向量 **S** 和 **T** 的规格化内积(inner product)都是 0：

$$\mathbf{S} \bullet \mathbf{T} \equiv \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i T_i = 0 \qquad (2\text{-}4)$$

码片序列的正交关系举例

- 令向量 **S** 为(–1 –1 –1 +1 +1 –1 +1 +1)，向量 **T** 为(–1 –1 +1 –1 +1 +1 +1 –1)。
- 把向量 **S** 和 **T** 的各分量值代入(2-4)式就可看出这两个码片序列是正交的。

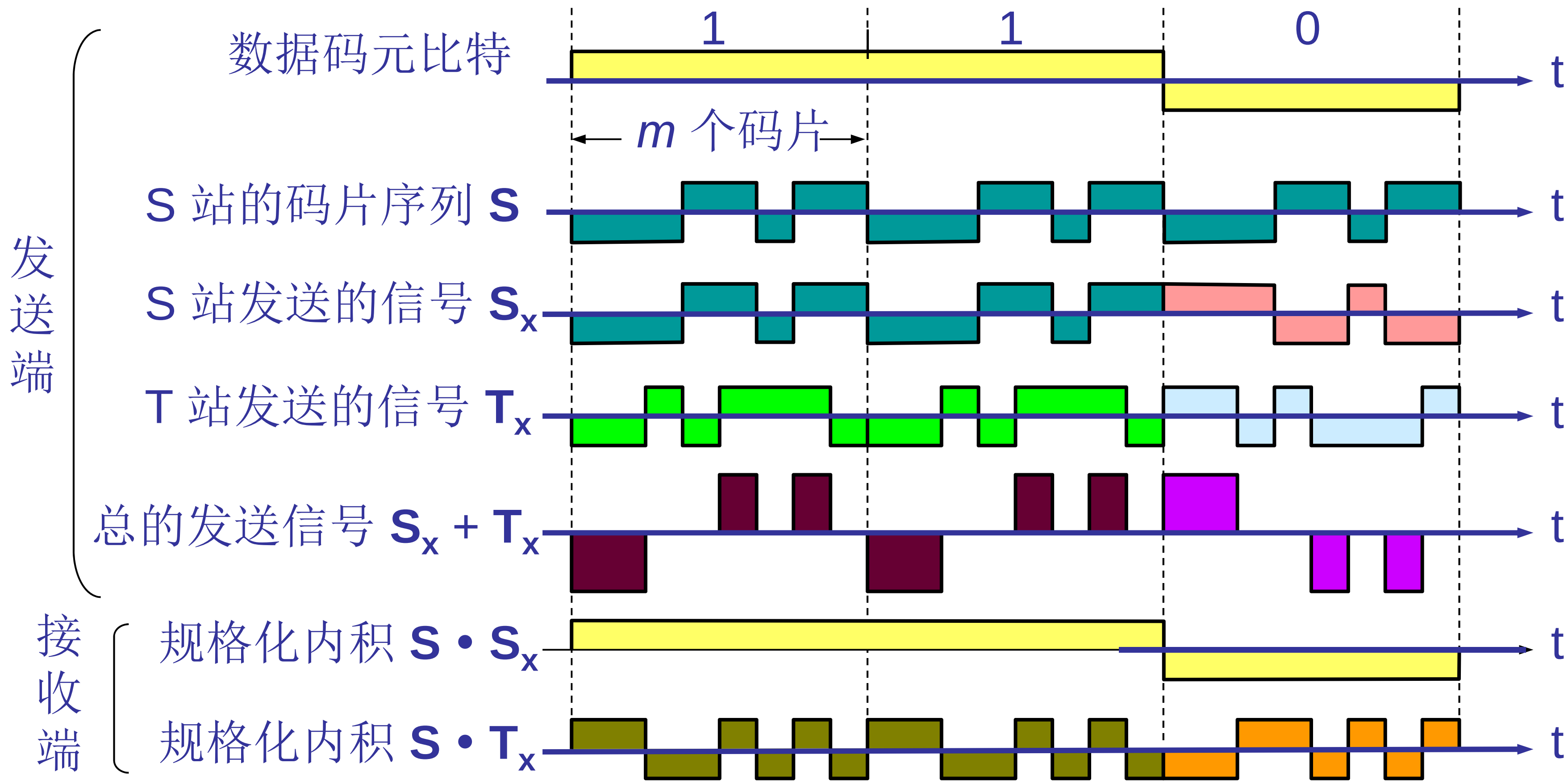
正交关系的另一个重要特性

- 任何一个码片向量和该码片向量自己的规格化内积都是1 。

$$\mathbf{S} \bullet \mathbf{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i S_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} (\pm 1)^2 = 1$$

- 一个码片向量和该码片反码的向量的规格化内积值是 –1。

CDMA 的工作原理

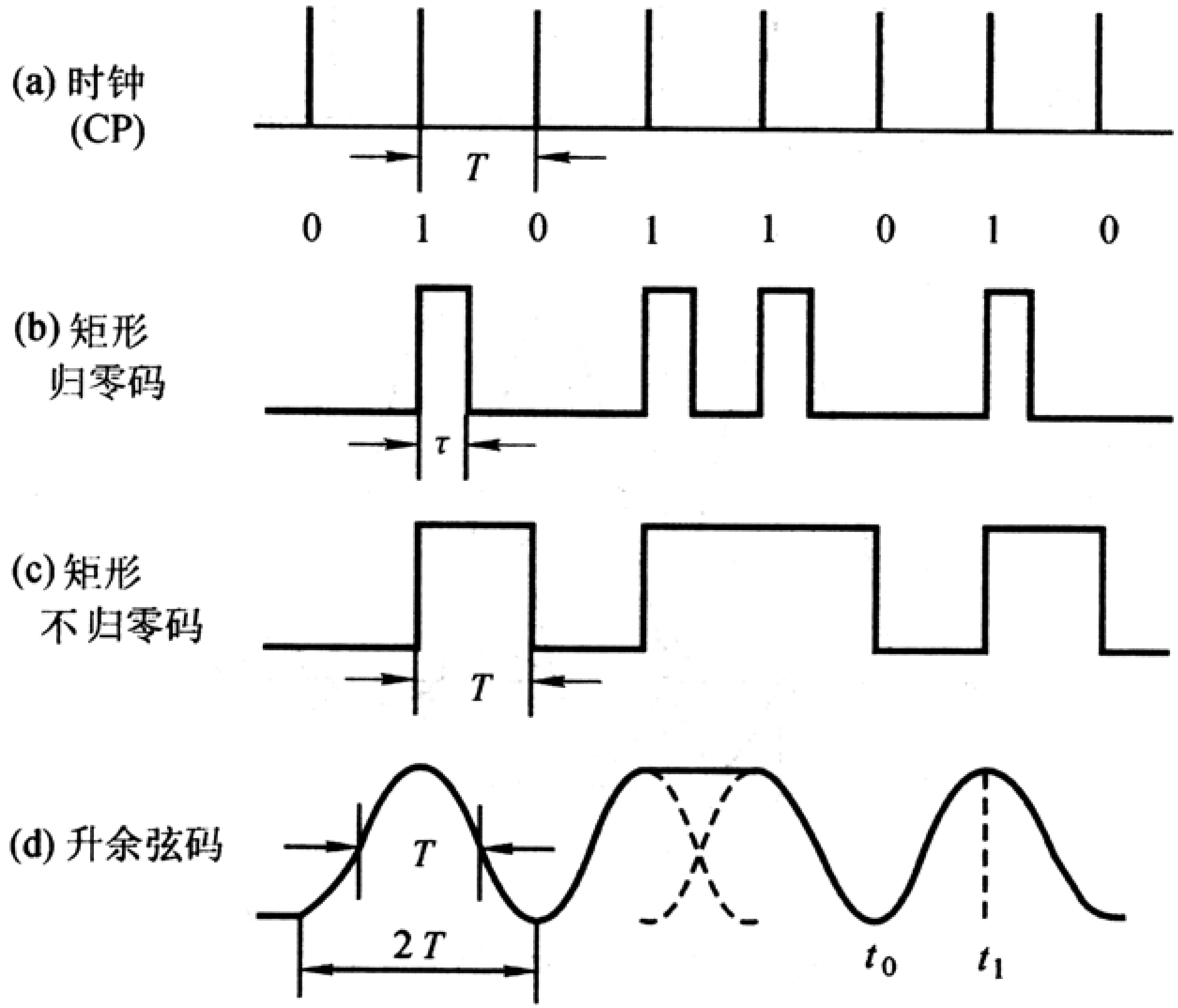


数据码元比特
1
1
0
t
m 个码片
S 站的码片序列 S
发
送
端
S 站发送的信号 Sx
T 站发送的信号 Tx
总的发送信号 Sx + Tx
接
收
端
规格化内积 S • Sx
规格化内积 S • Tx

*码速与带宽的关系

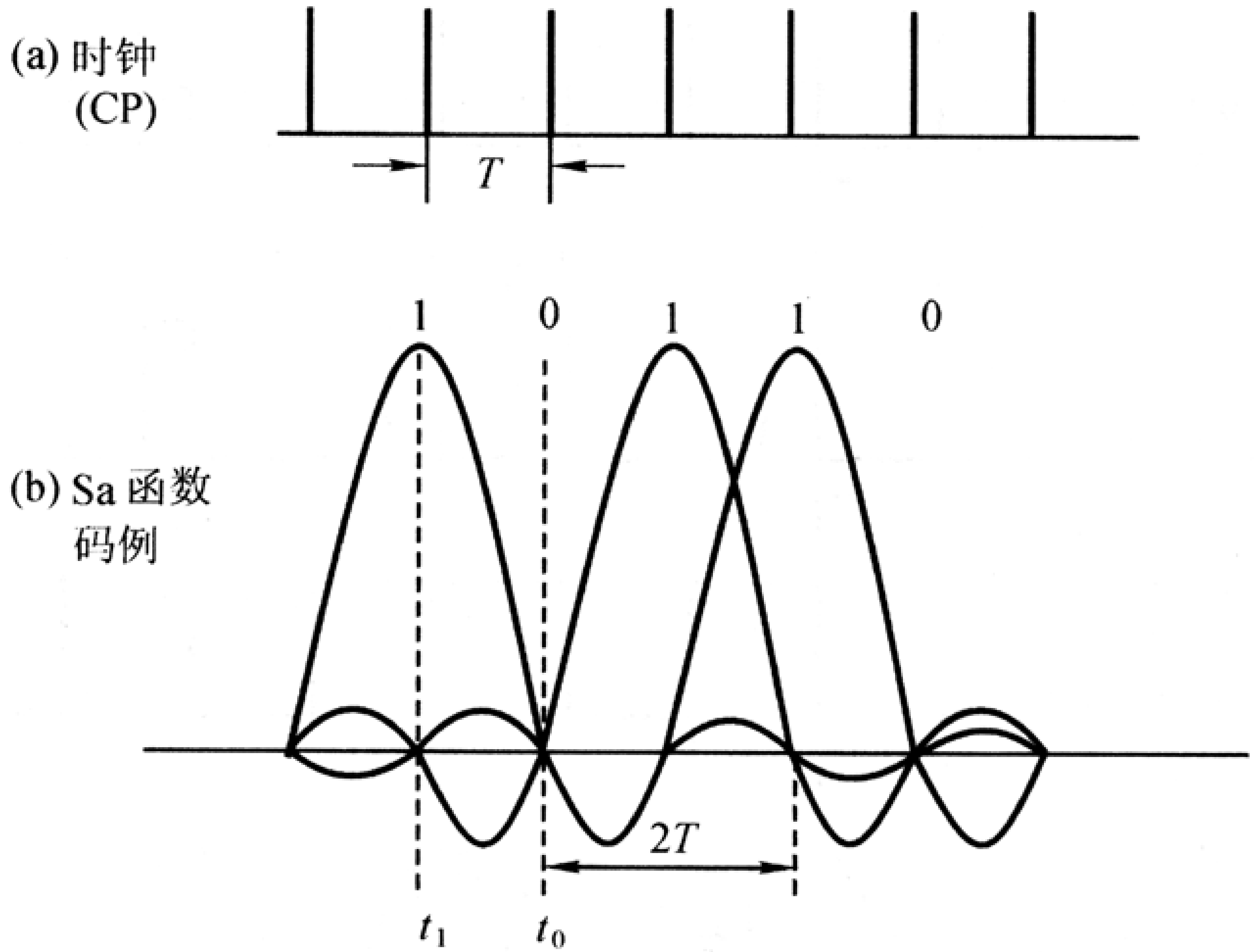
实际上不采取p304图5－32的原因：间隙太大，频谱浪费太多。

合理设计码字脉冲的波形可使频带得到充分利用并且防止码间串扰。



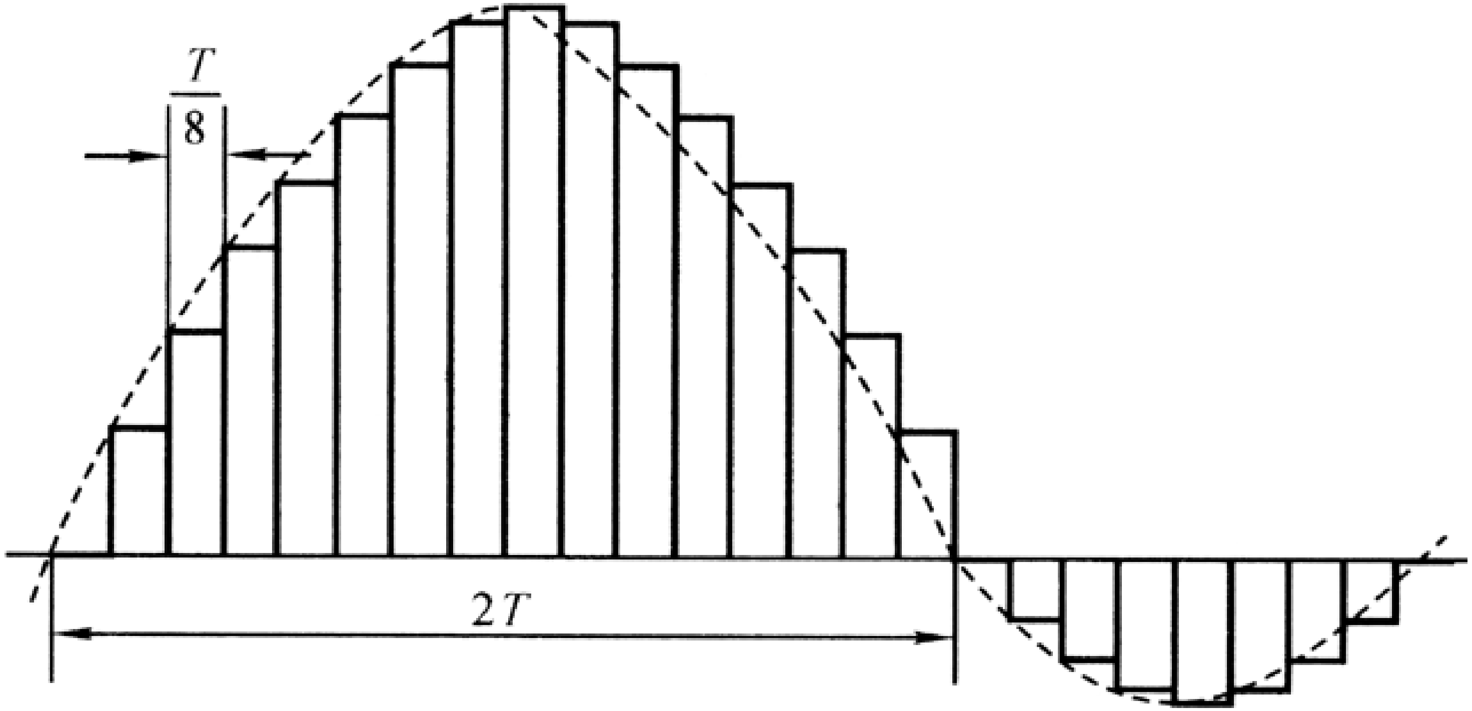
上图b是矩形归零码，c是矩形不归零码。为了节省带宽，我们使用矩形不归零码，其宽度T正好等于抽样时钟周期，则脉码传输速率为f＝1/T。但是我们忽略了矩形波频谱第一零点外的高频成分，这些高频成分较小时，在接收端对应抽样点不会产生误判；当失真较严重时，可能出现误判，引起码间干扰。

解决办法：不使用宽度为T的矩形脉冲，使用频率成分相对集中的波形，例如升余弦码、Sa函数等，使得第一零点以外的高频成分较少，也即干扰较少。



Sa函数码型示例

在相同码速下，Sa函数所占带宽是（矩形、升余弦）的一半，节省了带宽，但是硬件产生Sa函数比较困难，常用窄脉冲叠加近似形成Sa函数。



下表假定时钟周期为T,仅限于二进制等概出现之数码信号,

也即信息速率都为$f_b = \dfrac{1}{T} \mathrm{bit/s}$

单矩形脉冲	脉冲波形底宽	频谱第一个过零点	约占带宽	带外衰减	形成难易
矩形 归零码	τ $(\tau < T)$	$\frac{1}{\tau}$	$\frac{1}{\tau}$	差	易
矩形不 归零码	T	$\frac{1}{T}$	$\frac{1}{T}$	差	易
升余弦	$2T$	$\frac{1}{T}$	$\frac{1}{T}$	好	麻烦
Sa函数	$2T$ 零点间距	$\frac{1}{2T}$	$\frac{1}{2T}$ 最小	最好	最麻烦