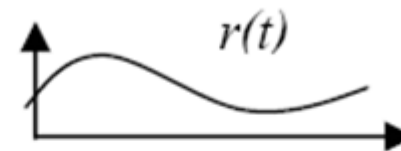
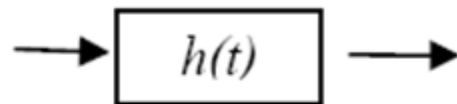
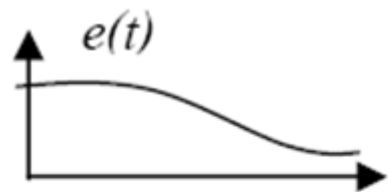
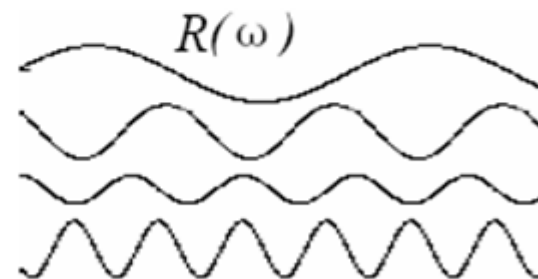
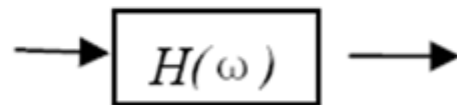
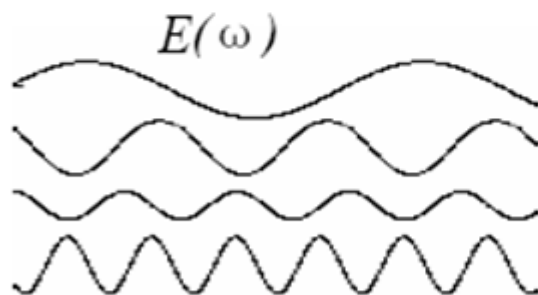


第三章 傅立叶变换

$$r(t) = e(t) * h(t)$$



(1) 时域变换



(2) 傅里叶变换

$$R(\omega) = E(\omega)H(\omega)$$

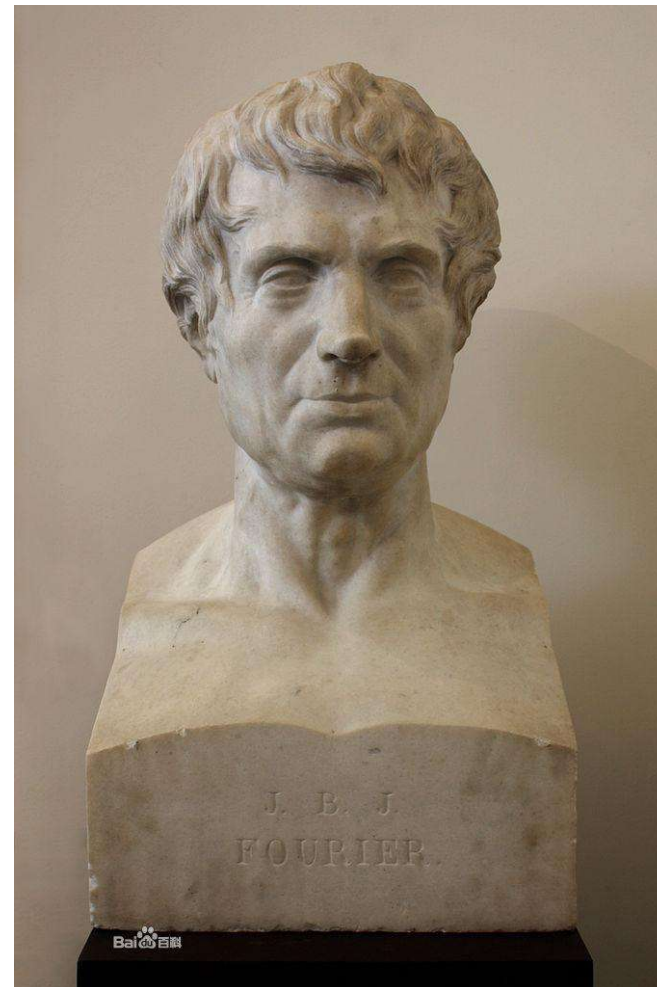
本章提要

- 正交的概念
- 傅里叶级数和傅里叶级数的分析
- 典型周期信号的傅立叶级数
- 傅立叶变换
- 典型非周期信号的傅立叶变换
- 傅立叶变换的基本性质
- 周期信号的傅立叶变换
- 卷积和卷积定理
- 抽样信号的傅里叶变换和抽样定理

傅里叶变换在电学、物理学、数论、组合数学、信号处理、概率、统计、密码学、声学、光学等领域都有着广泛的应用

傅里叶生平

- 1768年生于法国
- 1807年提出“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”
- 1829年狄里赫利第一个给出收敛条件
- 拉格朗日反对发表
- 1822年首次发表“热的分析理论”中



傅立叶的两个最主要的贡献——

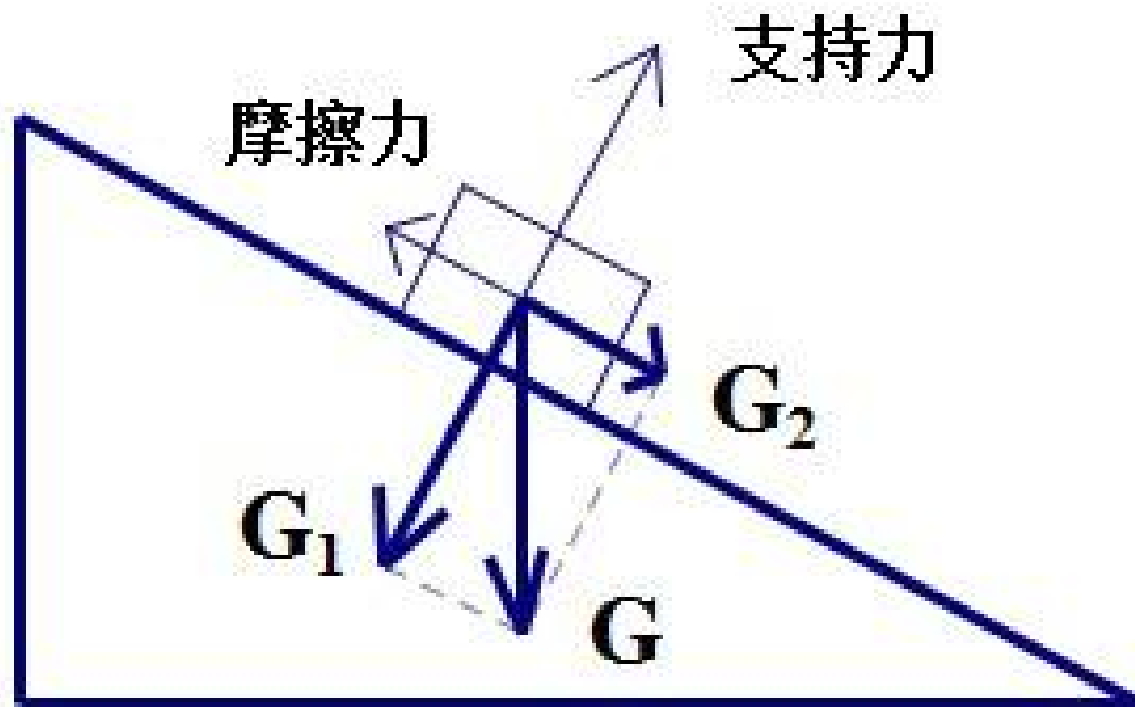
- “周期信号都可表示为成谐波关系的正弦信号的加权和”——傅里叶的第一个主要论点
- “非周期信号都可用正弦信号的加权积分表示”
——傅里叶的第二个主要论点

§ 3.1 引言



取胜策略：各个击破
问题是：什么是各个击破？
怎么构造“各个”？

§ 3.1 引言

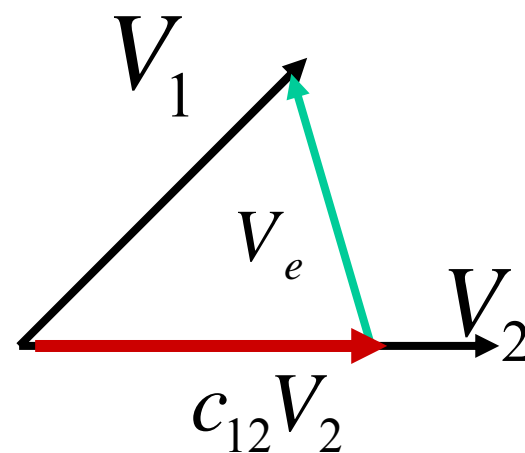
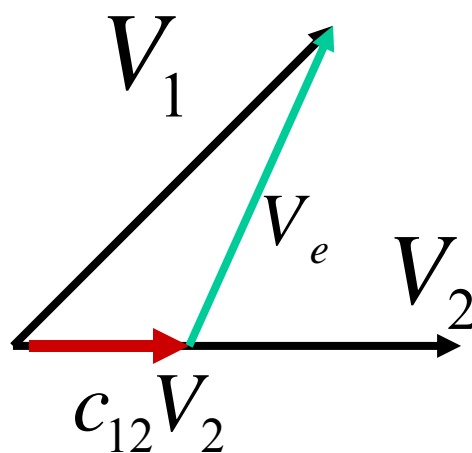
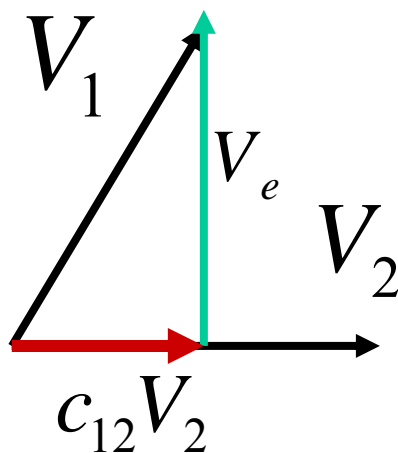


§ 3.1 引言

一、正交矢量

矢量： V_1 和 V_2 参加如下运算， V_e 是它们的差，如下式：

$$V_1 - c_{12}V_2 = V_e$$



$$c_{12}V_2 = V_1 \cos \theta = \frac{V_1 V_2 \cos \theta}{V_2} = \frac{V_1 \cdot V_2}{V_2}$$

$$c_{12} = \frac{V_1 \cdot V_2}{V_2^2}$$

c_{12} 表示 V_1 和 V_2 互相接近的程度

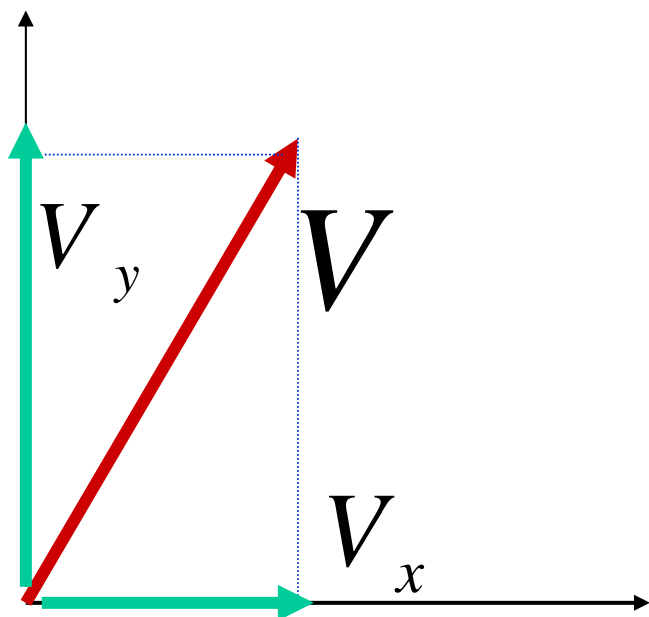
当 V_1 , V_2 完全重合, 则 $\theta = 0, c_{12} = 1$

随夹角增大, c_{12} 减小;

当 $\theta = 90^\circ, c_{12} = 0$, V_1 和 V_2 相互垂直,
两者正交。

$$V = V_x + V_y$$

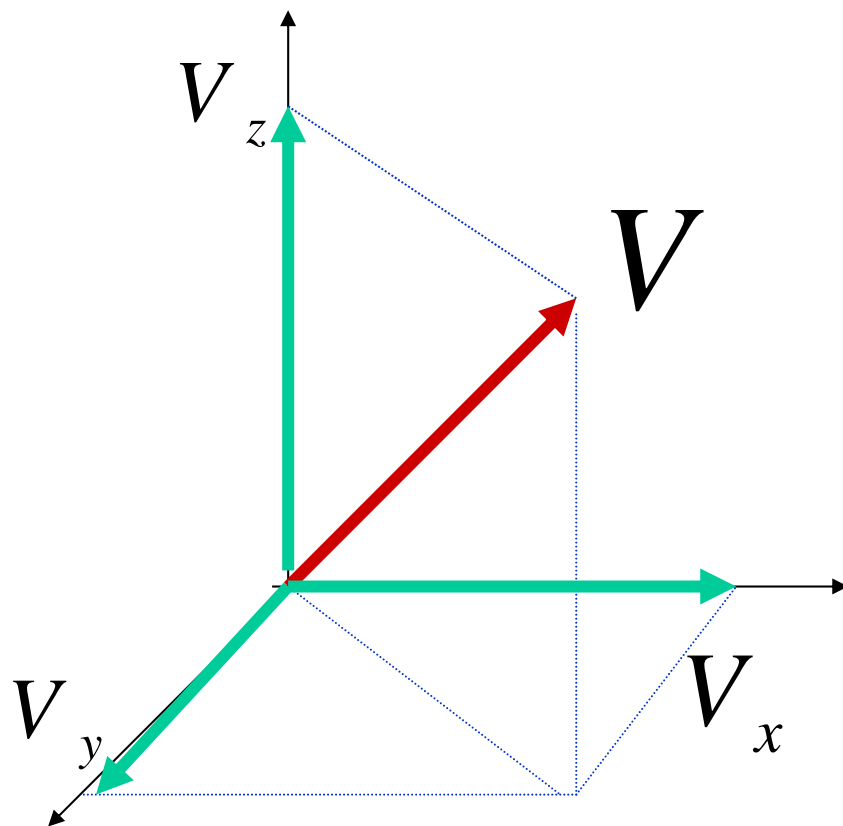
$$= U_x |V_x| + U_y |V_y|$$



二维正交集

$$V = V_x + V_y + V_z$$

$$= |V_x| U_x + |V_y| U_y + |V_z| U_z$$



三维正交集

二、 正交函数

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t) \quad (t_1 < t < t_2)$$

$$\text{误差 } \varepsilon(t) = f_1(t) - c_{12} f_2(t)$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{(t_1 - t_2)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12} f_2(t)]^2 dt$$

$$\text{令 } \frac{d\overline{\varepsilon^2}}{dc_{12}} = 0 \quad \text{则误差能量 } \overline{\varepsilon^2} \quad \text{最小}$$

$$\frac{d}{dc_{12}} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12} f_2(t)]^2 dt \right\} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dc_{12}} f_1^2(t) dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt \right. \\ \left. + 2 c_{12} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt \right] = 0 \end{aligned}$$

解得

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt}$$

正交条件

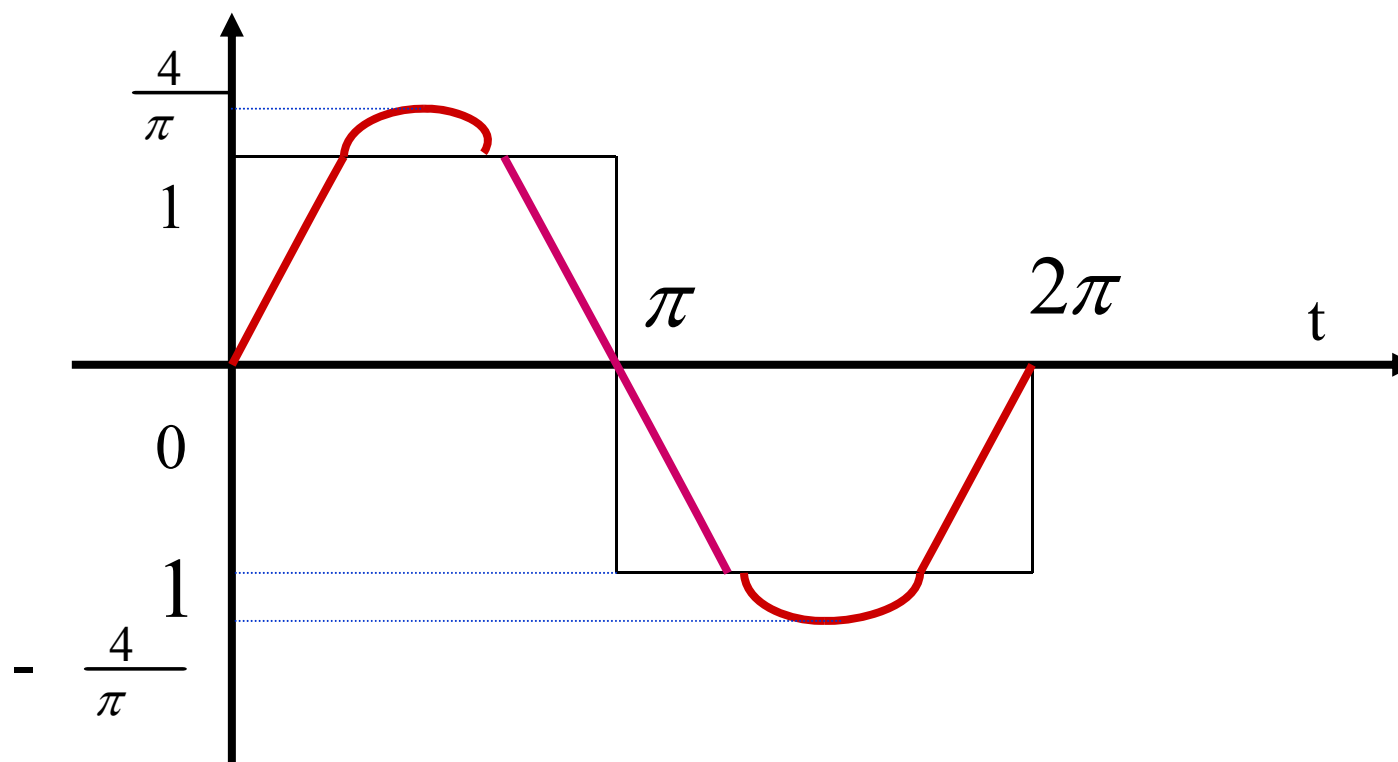
若 $c_{12} = 0$, 则 $f_1(t)$ 不包含 $f_2(t)$ 的分量, 则称正交。

正交的条件:

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt = 0$$

例： $f(t) = \begin{cases} +1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$

试用 $\sin t$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 来近似 $f(t)$



解：

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t da} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t) dt \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

所以：

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin t$$

例：试用正弦 $\sin t$ 在 $(0, 2\pi)$ 区间内来表示余弦 $\cos t$
显然

$$\int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt = 0$$

所以 $c_{12} = 0$

说明 $\cos t$ 中不包含 $\sin t$ 分量，
因此 $\cos t$ 和 $\sin t$ 正交.

三、 正交函数集

n个函数 $\{ g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t) \}$ 构成一函数集，
如在区间 (t_1, t_2) 内满足正交特性，即

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt = K_i$$

则此函数集称为正交函数集

任意函数由n个正交的函数的线性组合所近似

$$\begin{aligned} f(t) &\approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_n g_n(t) \\ &= \sum_{r=1}^n c_r g_r(t) \end{aligned}$$

由最小均方误差准则，要求系数 c_i 满足

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt} = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt$$

在最佳逼近时的误差能量

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{r=1}^n c_r^2 K_r \right]$$

归一化正交函数集:

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt = 1 \qquad c_i = \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{r=1}^n c_r^2 \right]$$

复变函数的正交特性

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t) \quad c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_2^*(t) dt}$$

两复变函数正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t) f_2(t) dt = 0$$

用完备正交集表示信号

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{r=1}^n c_r^2 K_r \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\varepsilon^2} = 0$$

$$f(t) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r g_r(t)$$

另一种定义：在正交集 $\{g_i(t)\}$ 之外再没有一有限能量的 $x(t)$ 满足以下条件

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_i(t) dt = 0$$

• 三角函数集 $\{\cos n \omega_1 t\}_{n \rightarrow \infty}$

$$\{\sin n \omega_1 t\}_{n \rightarrow \infty}$$

• 复指数函数集 $\{e^{jn \omega_1 t}\}_{n \rightarrow \infty}$

帕色瓦尔定理

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{r=1}^n c_r^2 K_r \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\varepsilon^2} = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{r=1}^n c_r^2 K_r$$

信号含有的功率等于此信号在完备正交函数集中各分量功率之总和。

§ 3.2 周期信号的傅立叶级数分析

. 周期信号可展开成正交函数线性组合的无穷级数:

- . 三角函数式的傅立里叶级数 $\{\cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t\}$
- . 复指数函数式的傅里叶级数 $\{e^{jn\omega_1 t}\}$

三角函数是正交函数

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos n\omega_1 t \cdot \sin m\omega_1 t \cdot dt = 0 \quad (3.2)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_1 t \sin m\omega_1 t dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega_1 t \cos m\omega_1 t dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (3.3)$$

- * 狄里赫利 (Dirichlet) 条件:
- (1) 在一周期内, 如果有间断点存在, 则间断点的数目应是有限个;
- (2) 在一周期内, 极大值和极小值的数目应是有限个;
- (3) 在一周期内, 信号满足绝对可积。

一、三角函数的傅里叶级数:

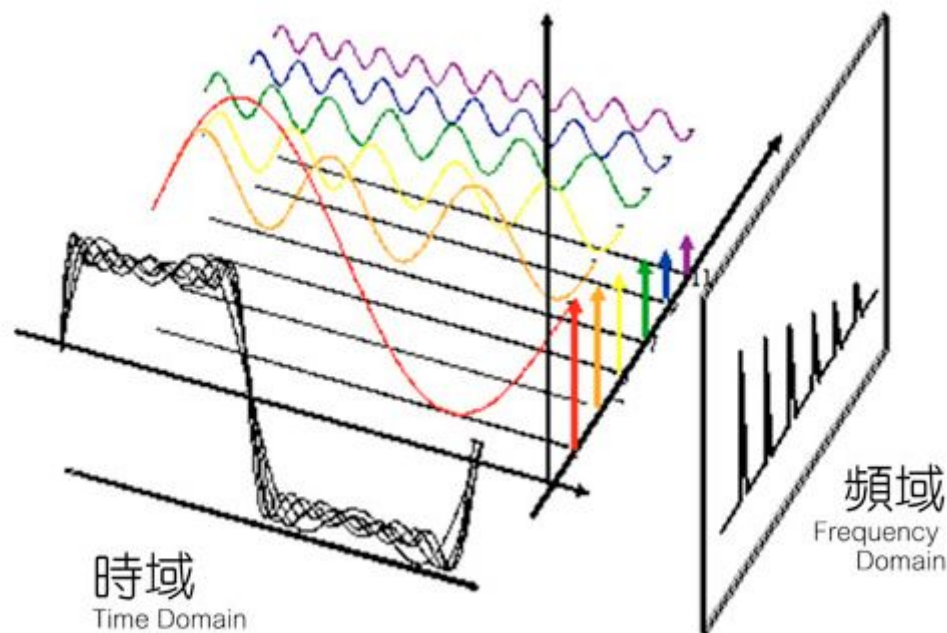
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

直流
分量

基波分量
 $n=1$

谐波分量
 $n>1$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$



由 $c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt}$ 有：

直流
系数

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t).dt$$

余弦分量
系数

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t).\cos n\omega_1 t.dt$$

正弦分量
系数

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t).\sin n\omega_1 t.dt$$

周期信号的另一种 三角函数正交集表示

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \sin(n\omega_1 t + \theta_n)$$

比较几种系数的关系，

$$a_0 = C_0 = d_0$$

$$C_n = d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$a_n = c_n \cos \varphi_n = d_n \sin \theta_n$$

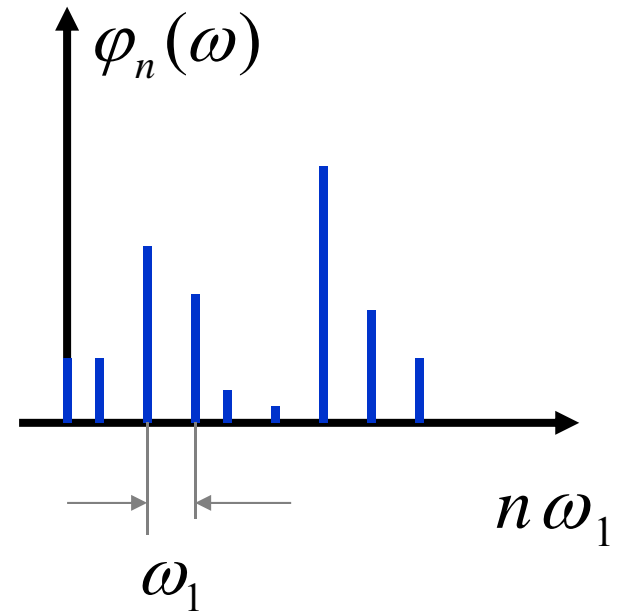
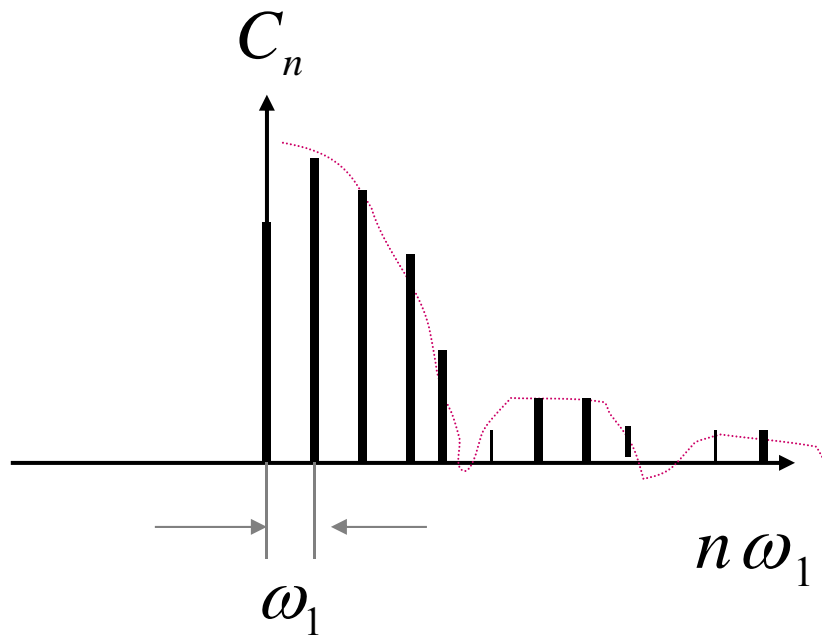
$$b_n = d_n \cos \theta_n = -c_n \sin \varphi_n$$

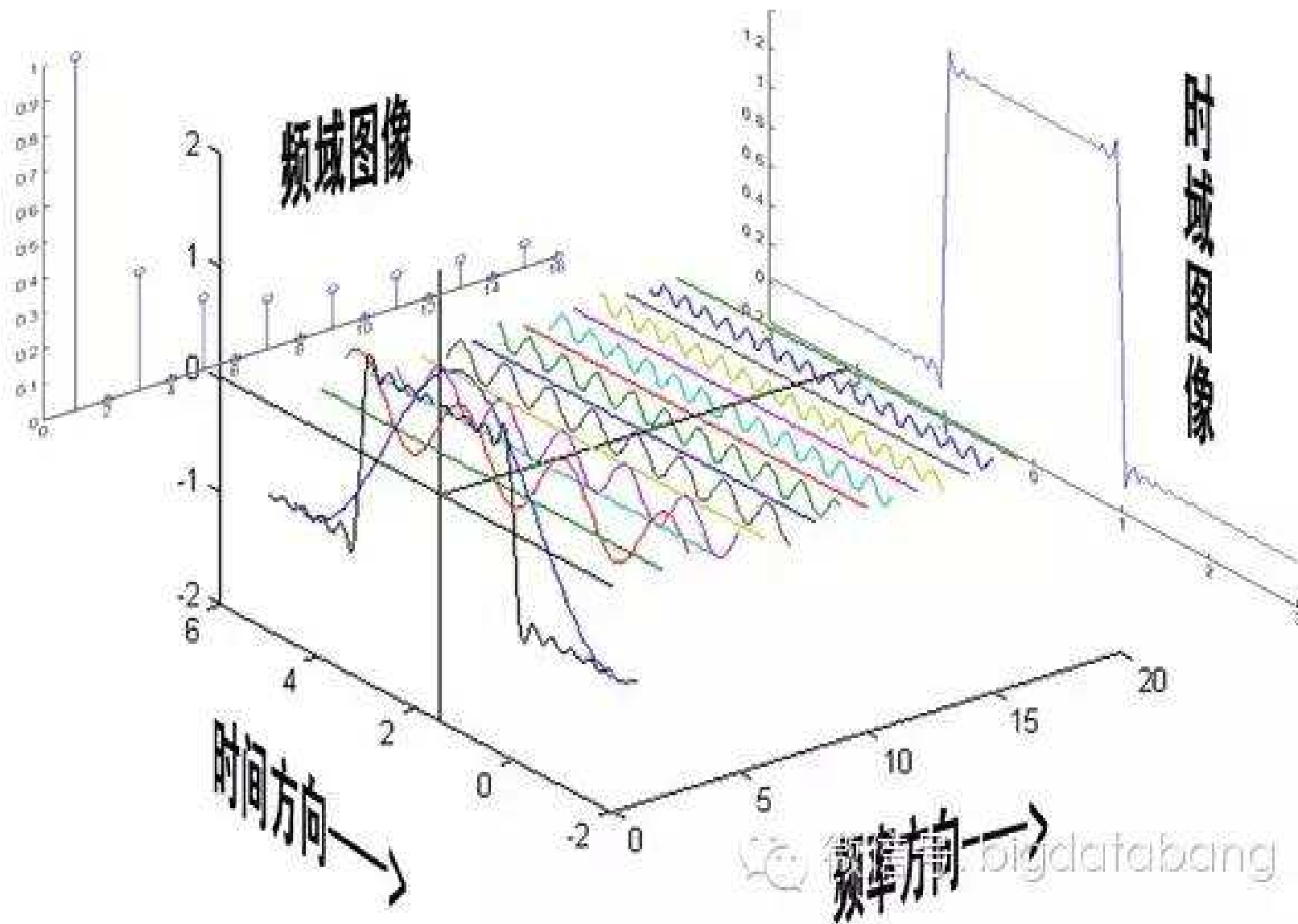
$$\operatorname{tg} \theta_n = \frac{a_n}{b_n} \quad \operatorname{tg} \phi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

周期函数的频谱:

- 周期信号的谱线只出现在基波频率的整数倍的频率处。直观看出：各分量的大小，各分量的频移，

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$





二、周期函数的复指数级数

$$f_1(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

由欧拉公式:
$$\begin{cases} 2 \cos n\omega_1 t = e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t} \\ 2j \sin n\omega_1 t = e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t} \end{cases}$$

有:
$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{(a_n - jb_n)}_{2F(n\omega_1)} e^{jn\omega_1 t} + \underbrace{(a_n + jb_n)}_{2F(-n\omega_1)} e^{-jn\omega_1 t} \right]$$

$$F(0) = a_0 \quad F(n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$F(-n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

引入了负频率

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

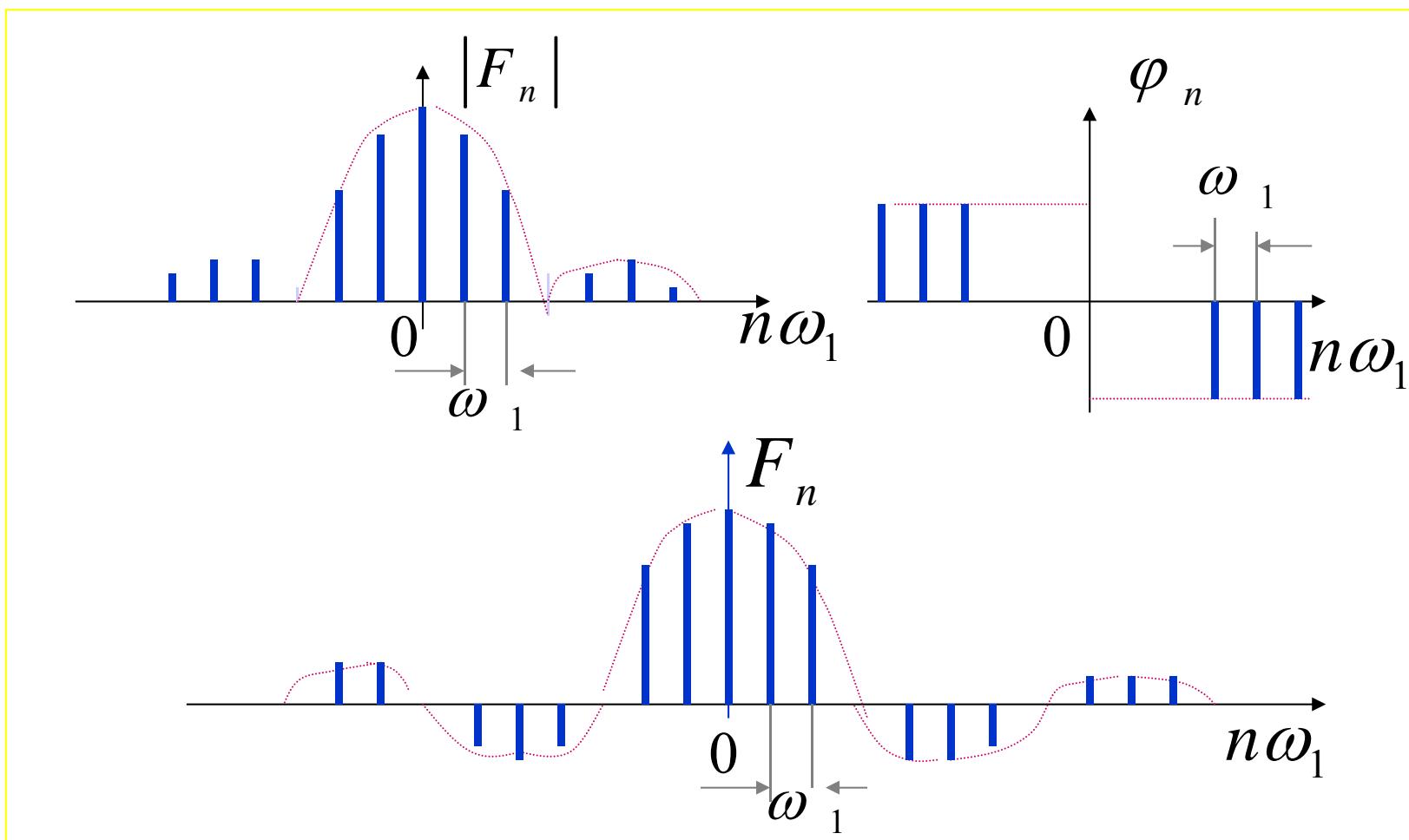
$$F(n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad F(-n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos n\omega_1 t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin n\omega_1 t \, dt$$

周期复指数信号的频谱图

$$F(n\omega_1) = F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = |F_n|e^{j\phi_n}$$



指数形式的傅里叶级数的系数 $F(n\omega_1) = F_n$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0 + T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

两种傅氏级数的系数间的关系

$$F_0 = c_0 = d_0 = a_0$$

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

$$F_{-n} = |F_{-n}| e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n)$$

两种傅氏级数的系数间的关系

$$\left| F_n \right| = \left| F_{-n} \right| = \frac{1}{2} c_n = \frac{1}{2} d_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\left| F_n \right| + \left| F_{-n} \right| = c_n$$

$$F_n + F_{-n} = a_n$$

$$j(F_n - F_{-n}) = b_n$$

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$F(-n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

$$c_n^2 = d_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = 4F_n F_{-n}$$

周期复指数信号的频谱图的特点

- 引入了负频率变量，没有物理意义，只是数学推导；
- C_n 是实函数， F_n 一般是复函数，
- 当 F_n 是实函数时，可用 F_n 的正负表示 0 和 π 相位，幅度谱和相位谱合一；

三、周期信号的功率特性⁽¹⁾

帕色伐尔定理：周期信号的功率等于该信号在完备正交函数集中各分量功率之和。

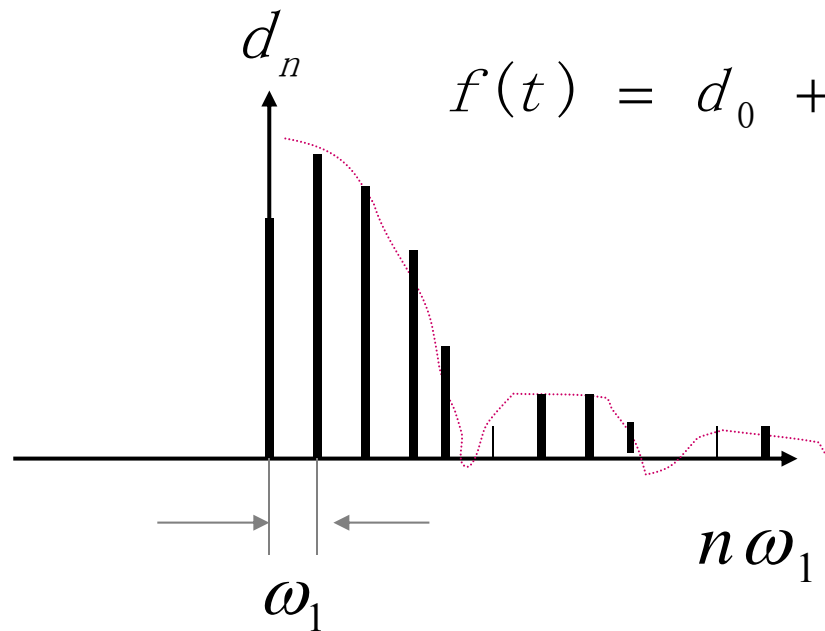
$$P = \overline{f^2(t)} = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

证明： $f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\omega_1 t + \theta_n)$

$\frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f^2(t) dt$ 展开后包含形式如下的各项：

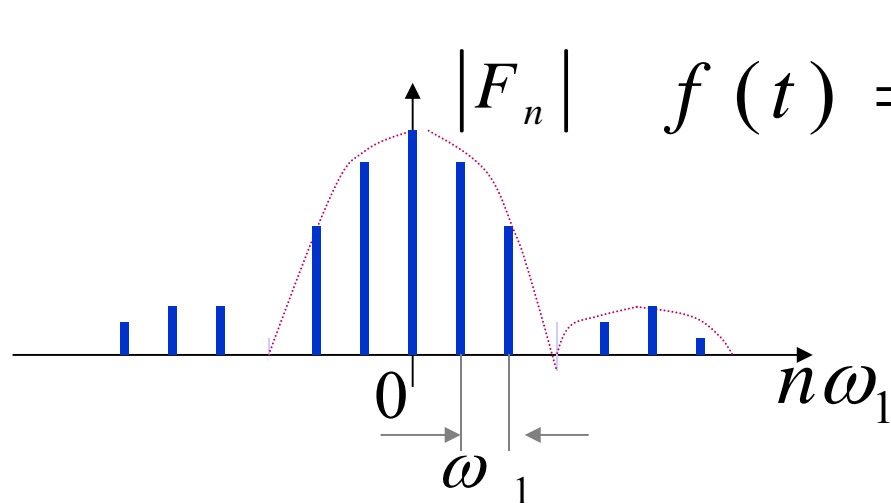
$$\frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} d_0^2 dt = d_0^2$$

$$\frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} d_n^2 \sin^2(n\omega_1 t + \theta_n) dt = \frac{d_n^2}{2}$$



$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\omega_1 t + \theta_n)$$

$$d_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{2}$$



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

三、周期信号的功率特性₍₂₎

$$\frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} 2d_0 d_n \sin(n\omega_1 t + \theta_n) dt = 0$$

$$\frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} 2d_m d_l \sin(m\omega_1 t + \theta_m) \sin(l\omega_1 t + \theta_l) dt = 0 \quad (l \neq m)$$

$$\therefore P = \overline{f^2(t)} = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

上式表明：1、时域功率等于频域功率（即时频功率守恒）

2、频域功率表示为各谐波分量功率之和，每一谐波的功率为 $|F_n|^2$

四、对称信号的傅里叶级数

三种对称：

- 偶函数： $f(t) = f(-t)$
- 奇函数： $f(t) = -f(-t)$
- 奇谐函数：半周期对称 $f(t) = -f(t \pm \frac{nT_1}{2})$
- 任意周期函数有：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{a_n \cos n\omega_1 t}_{\text{偶函数项}} + \underbrace{b_n \sin n\omega_1 t}_{\text{奇函数项}})$$

周期偶函数的傅立叶级数

对偶函数有： $\int_{-x}^0 f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$

$$\int_{-x}^x f(t)dt = \int_{-x}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt$$

$f(t)\cos n\omega_1 t$ 的形式为偶 \times 偶 = 偶

$f(t)\sin n\omega_1 t$ 的形式为偶 \times 奇 = 奇

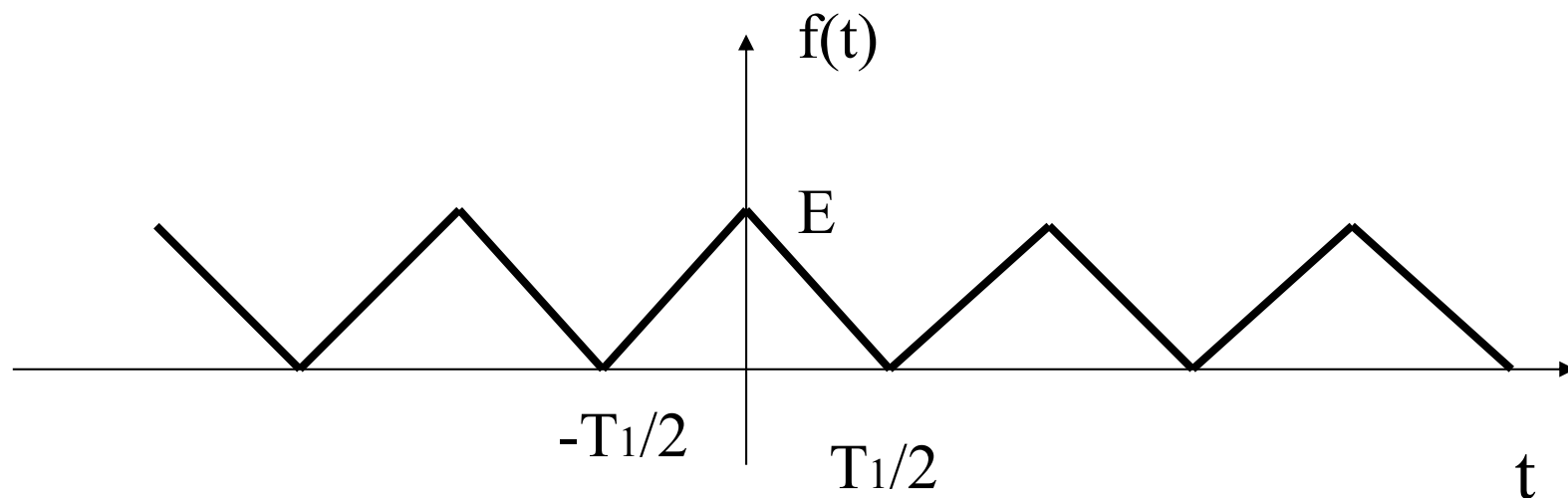
$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = 0$$

故偶函数展开为：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t$$

例如:周期三角函数是偶函数



$$f(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left(\cos \omega_1 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_1 t + \dots \right)$$

周期奇函数的傅立叶级数

对奇函数有： $\int_{-x}^0 f(t)dt = -\int_0^x f(t)dt$

$$\int_{-x}^x f(t)dt = \int_{-x}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = 0$$

$f(t)\cos n\omega_1 t$ 的形式为奇 \times 偶 = 奇

$f(t)\sin n\omega_1 t$ 的形式为奇 \times 奇 = 偶

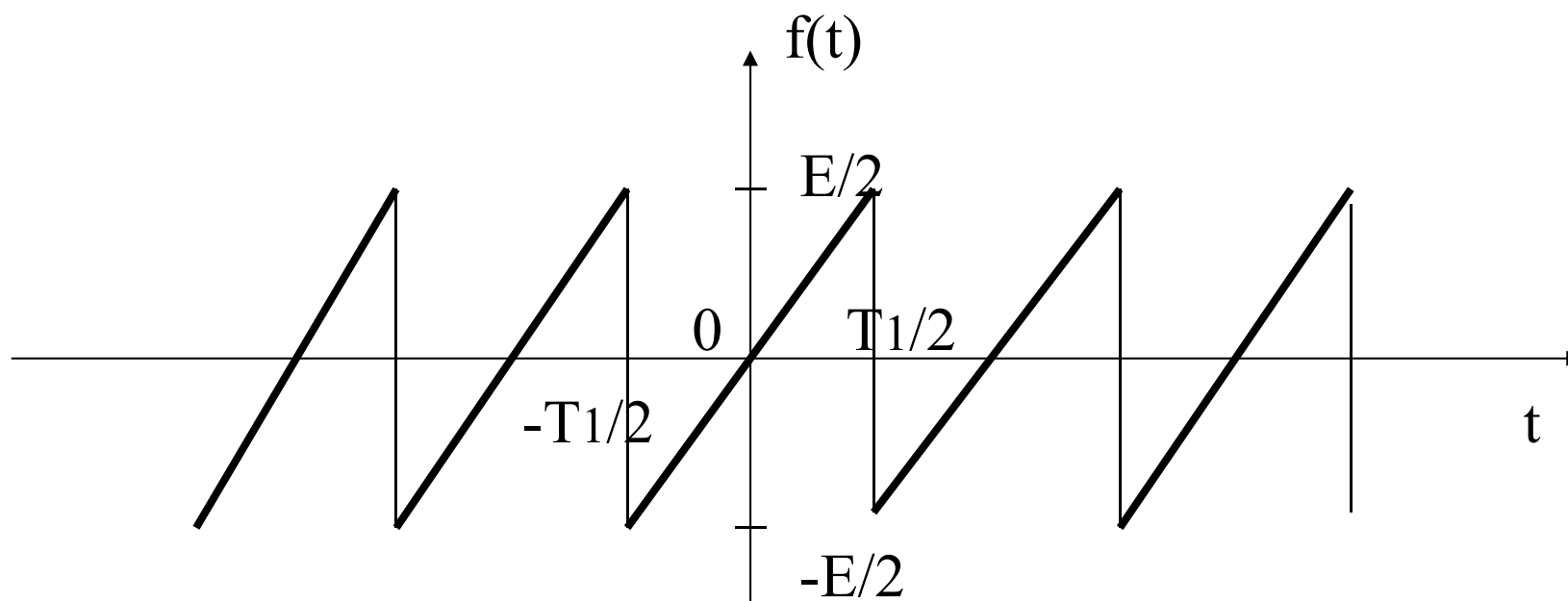
$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

故奇函数展开为：

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t$$

例如周期锯齿波是奇函数



$$f(t) = \frac{E}{\pi} (\sin \omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t - \dots)$$

奇谐函数：

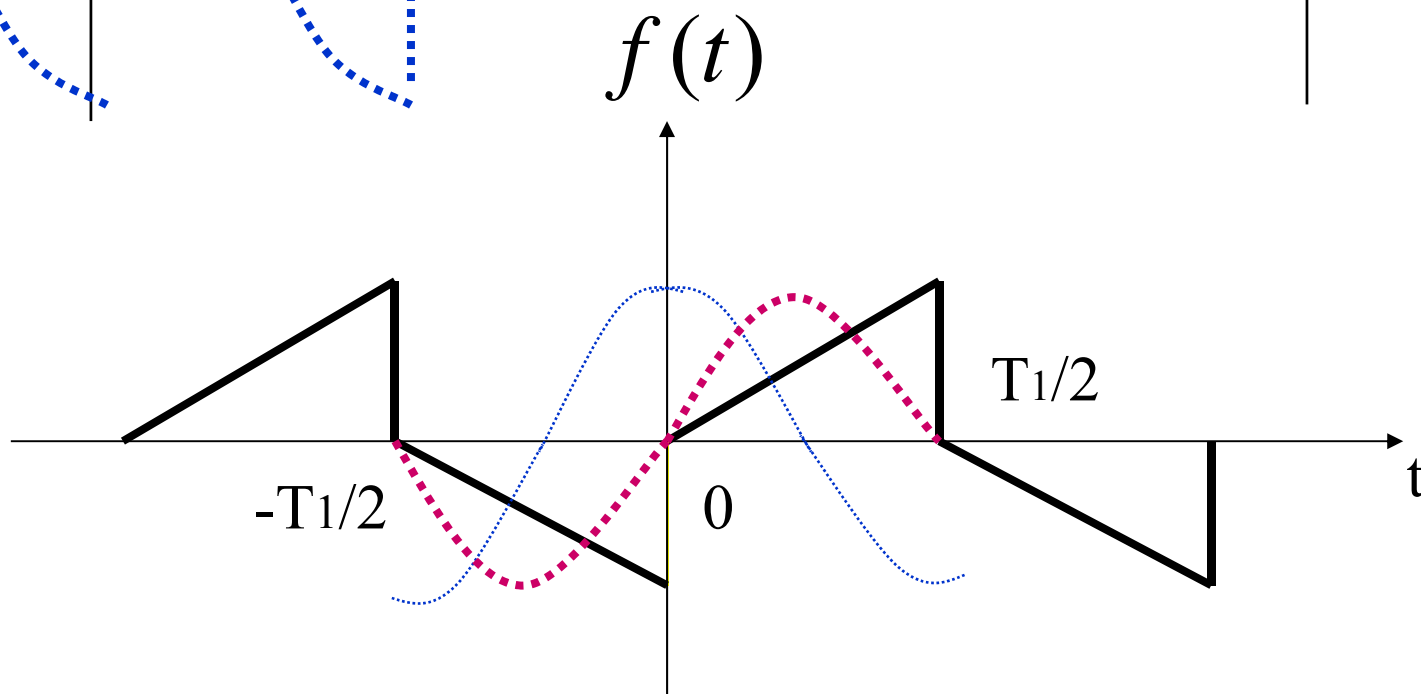
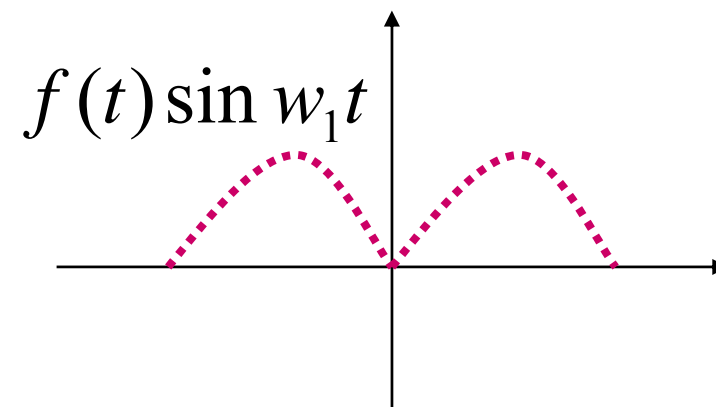
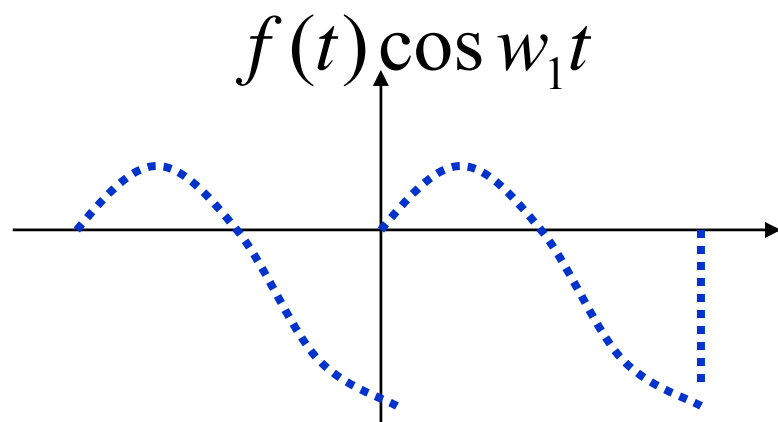
$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right)$$

- 沿时间轴移半个周期；
- 以时间轴为轴反转；
- 波形不变；

半周期对称

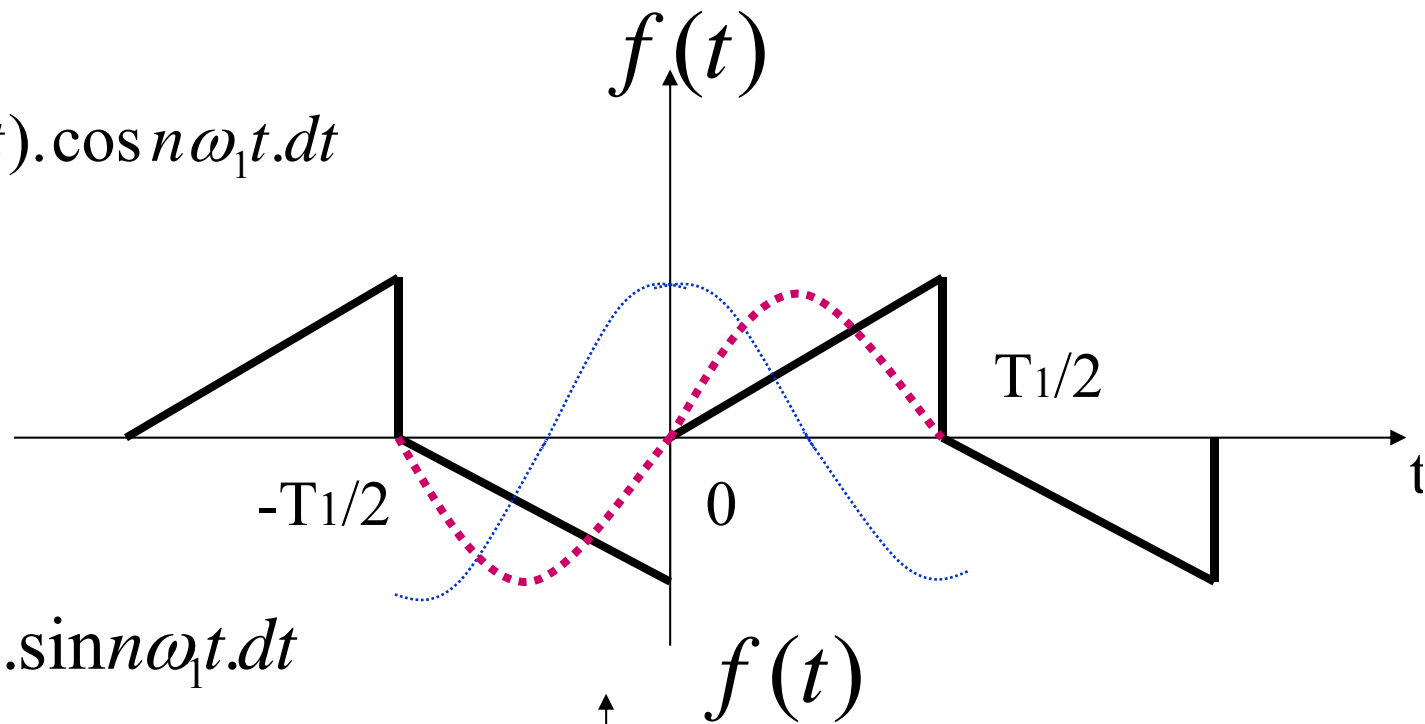
$$f\left(t + \frac{nT_1}{2}\right) = f\left(t \pm \frac{nT_1}{2}\right)$$

奇谐函数的波形: p96

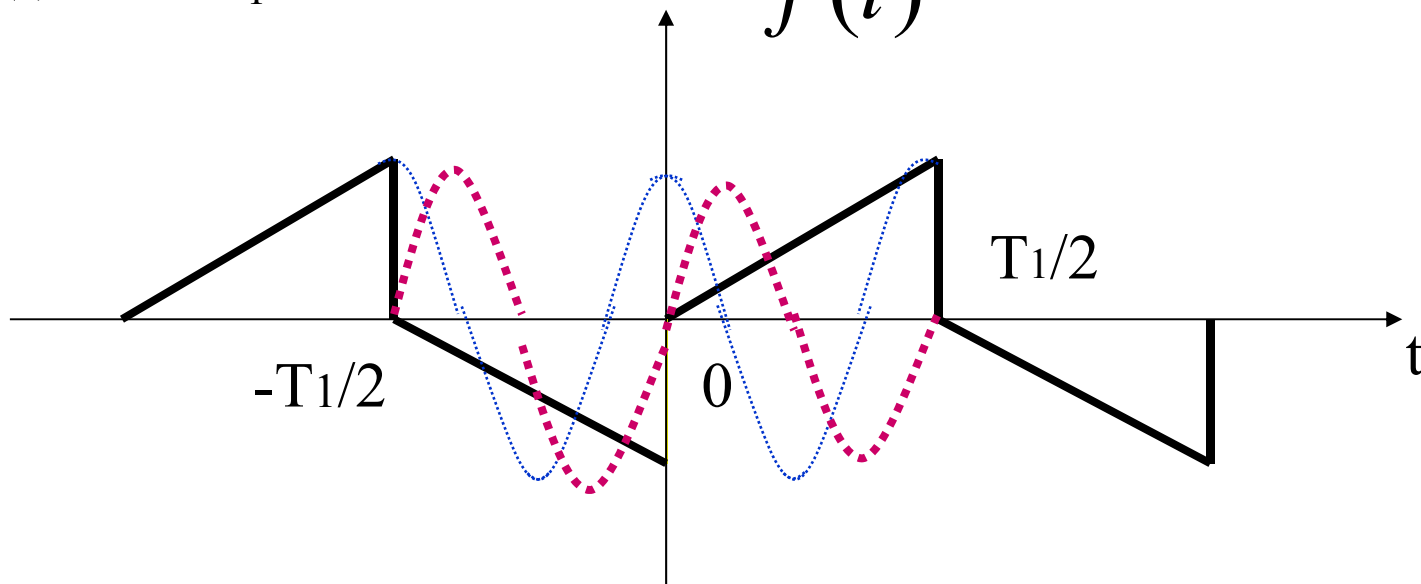


奇谐函数的波形：

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cdot \cos n\omega_1 t \cdot dt$$



$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cdot \sin n\omega_1 t \cdot dt$$



奇谐函数的傅氏级数

奇谐函数的偶次谐波的系数为0

$$a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n \omega_1 t) dt \quad (n \text{ 为奇数})$$

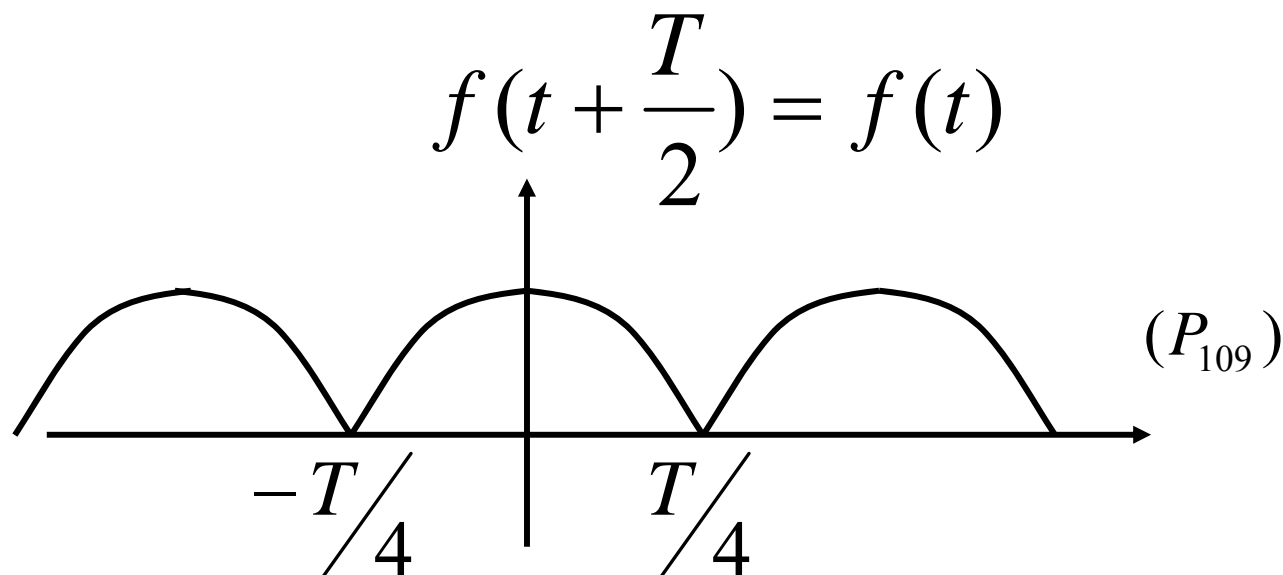
$$b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(n \omega_1 t) dt \quad (n \text{ 为奇数})$$

$$a_n = 0 \quad (n \text{ 为偶数})$$

$$b_n = 0 \quad (n \text{ 为偶数})$$

偶谐函数

偶谐函数：偶谐函数是两个半周期完全相同的函数。



按三角形形式展开后，只含偶次谐波分量与直流：

$$a_n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t + a_0 \quad (\text{n为偶数})$$

五、傅里叶有限级数

- 如果完全逼近，则 $n=\infty$ ；
- 实际中， $n=N$ ， N 是有限整数。
- 如果 N 愈接近 n ，则 其均方误差愈小
- 若用 $2N+1$ 项逼近，则

$$S_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos \omega_1 t + b_n \sin \omega_1 t)$$

误差函数和均方误差

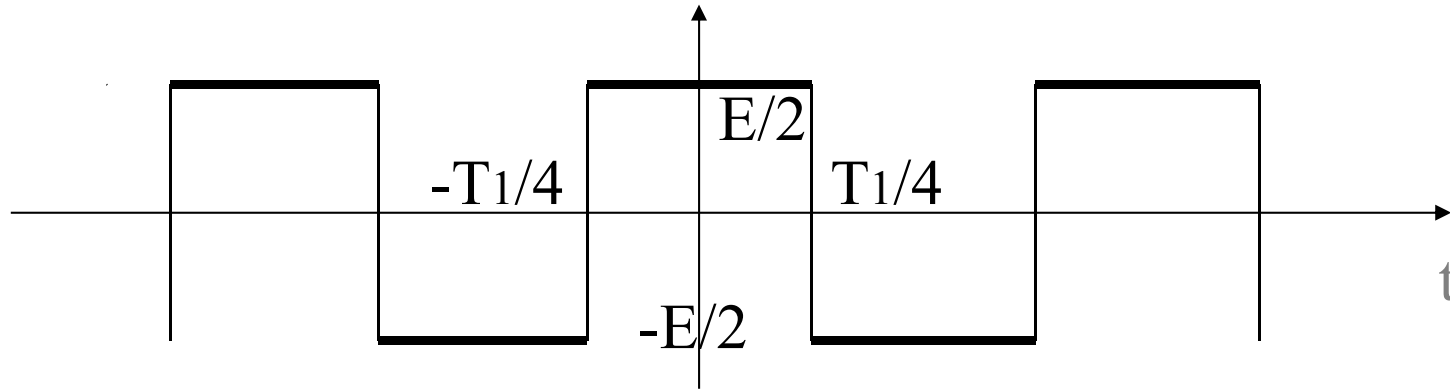
- 误差函数 $\varepsilon_N(t) = f(t) - S_N(t)$

- 均方误差

$$E_N = \overline{\varepsilon_N^2(t)} = \overline{f^2(t)} - [a_0^2 + \frac{1}{2} \sum (a_n^2 + b_n^2)]$$

例如对称方波：偶函数且奇谐函数

只有奇次谐波的余弦项。



$$a_n = \frac{2E}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \dots \right)$$

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} (\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \cdots)$$

- N=1

$$S_2 = \frac{2E}{\pi} (\cos \omega_1 t)$$

$$E_1 \approx 0.05 E^2$$

- N=2

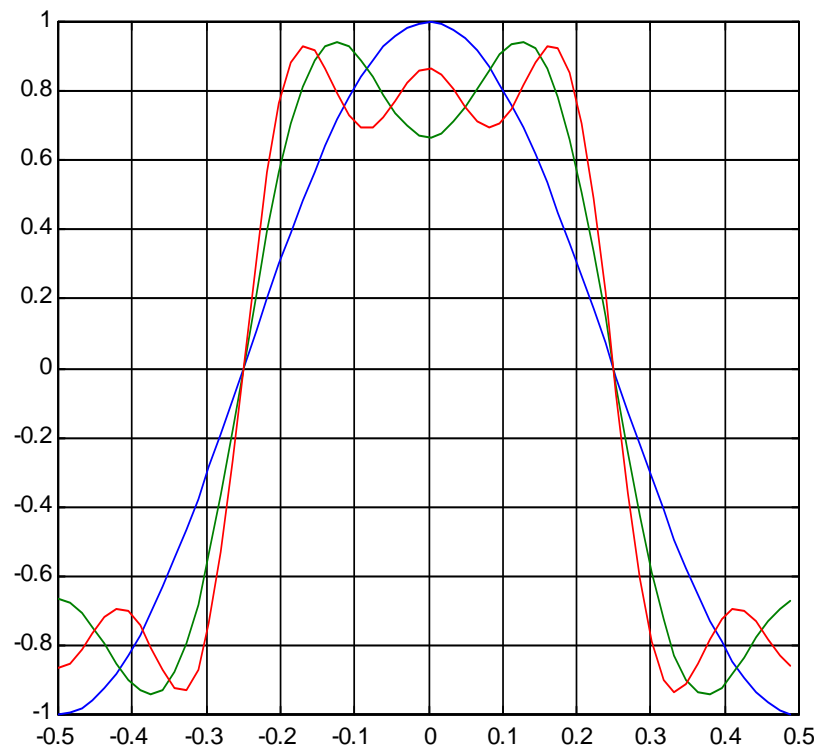
$$S_2 = \frac{2E}{\pi} (\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t)$$

$$E_2 = 0.02 E^2$$

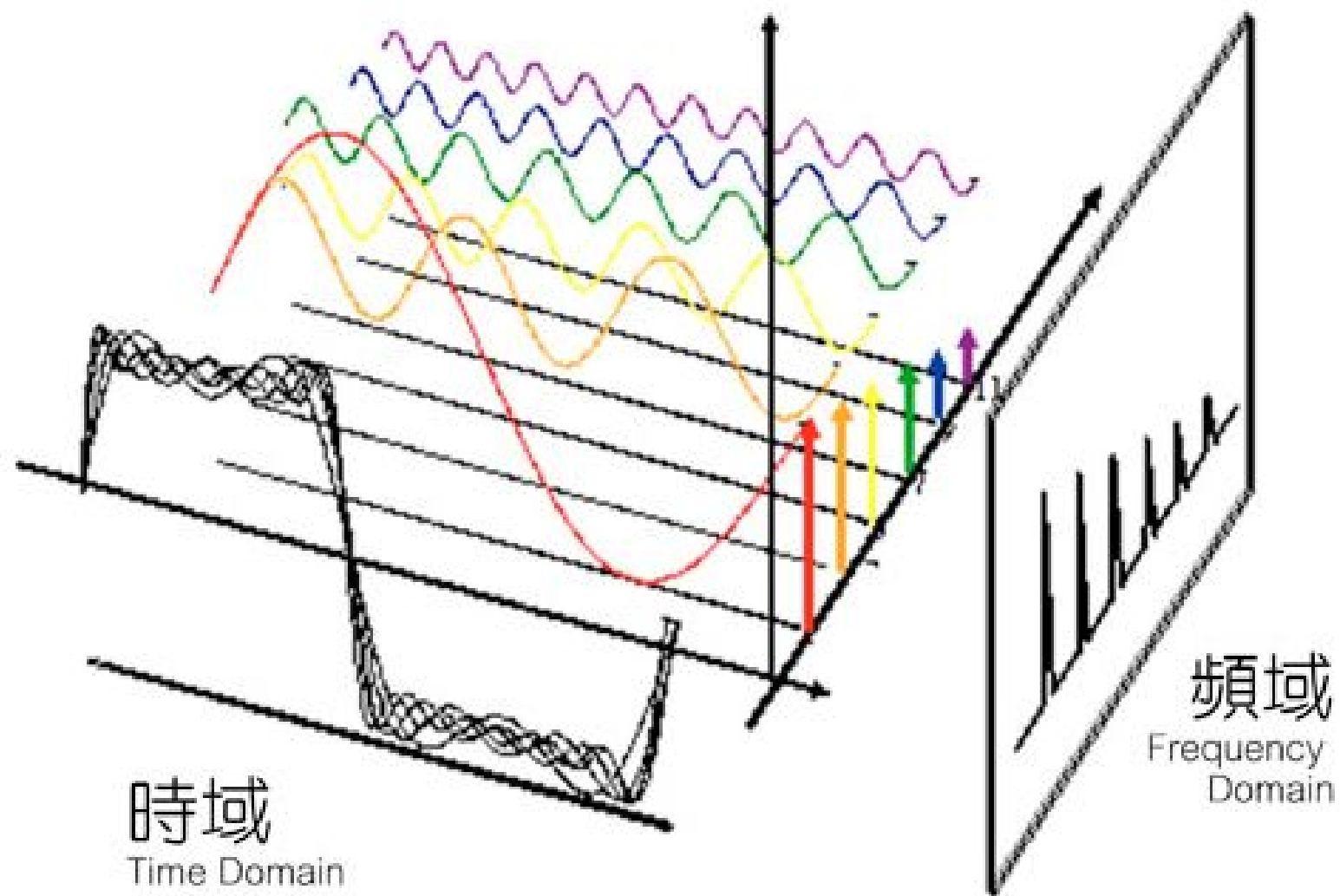
- N=3

$$S_3 = \frac{2E}{\pi} (\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t)$$

$$E_3 = 0.01 E^2$$

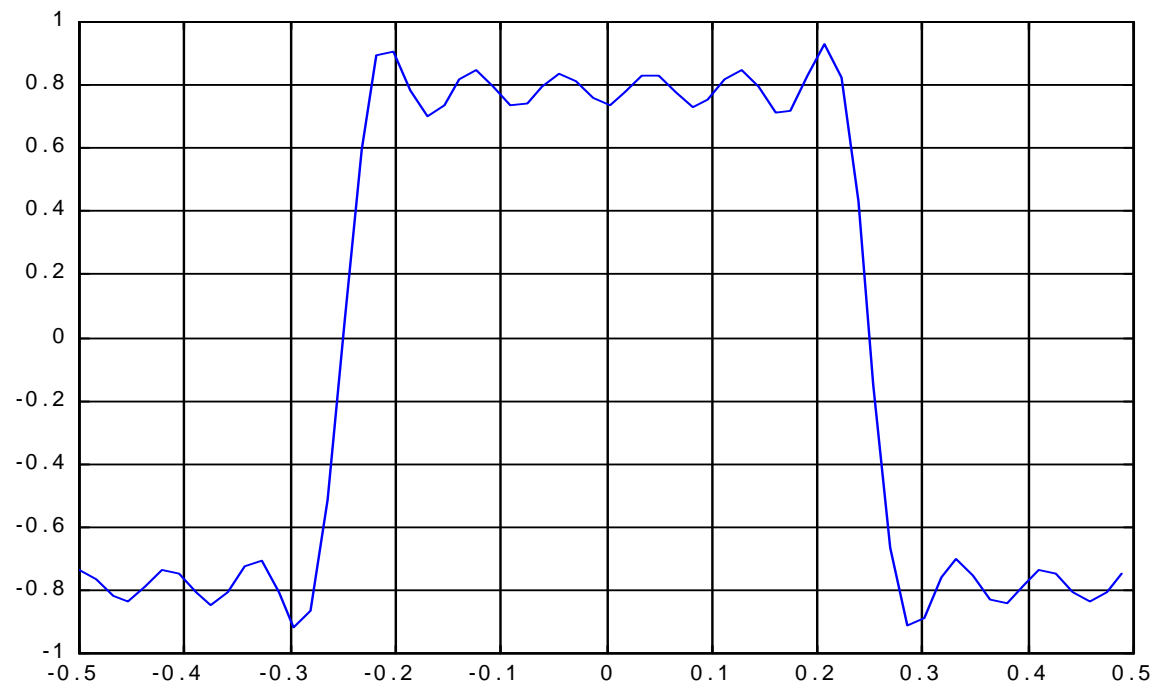


对称方波有限项的傅里叶级数



有限项的N越大，误差越小例如： N=11

$$S_9 = \frac{2E}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t + \cdots - \frac{1}{11} \cos 11\omega_1 t \right)$$



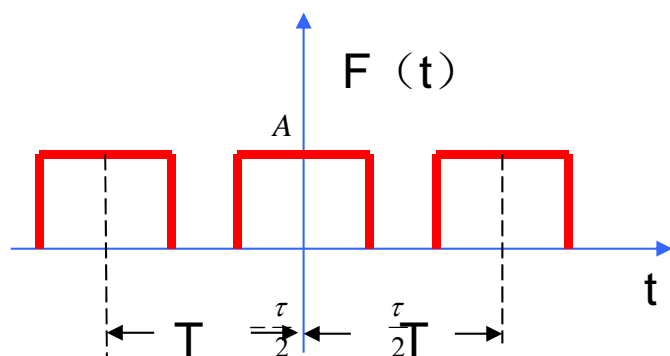
由上可见：

- N越大，越接近方波 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = f(t)$
- 快变信号，高频分量，主要影响跳变沿；
- 慢变信号，低频分量，主要影响顶部；
- 任一分量的幅度或相位发生相对变化时，波形将会失真
- 有吉伯斯现象发生

§ 3.3 典型周期信号的频谱

- 周期矩形脉冲信号
- 周期锯齿脉冲信号
- 周期三角脉冲信号
- 周期半波脉冲信号
- 周期全波脉冲信号

一、典型周期信号的频谱



T: 脉冲周期

τ : 脉冲宽度

A: 脉冲幅度

$T = \frac{2\pi}{\omega}$: 三角函数公共周期

周期矩形脉冲信号

第一步：首先展开为三角形式的傅立叶级数

$\because f(t)$ 是偶函数 $\longrightarrow b_n=0$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A dt = \frac{2 A \tau}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{2A}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} = \frac{2A\tau}{T} \times \frac{\sin \frac{n\pi\tau}{T}}{\frac{n\pi\tau}{T}} = \frac{2A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A\tau}{T} \sum_{n=1}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cos(n\omega_1 t)$$

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2\tau\omega_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \cos(n\omega_1 t)$$

第二步：频谱分析

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = \frac{2A\tau}{T} \left| \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \right| = \frac{2A\tau}{T} \left| \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \right|$$

$$A_n = A_n e^{-j\phi_n} = \frac{2A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

A_n 与 $\frac{\tau}{T}$ 之比值有关，取 $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{5}$

A_n 包络线为 $\text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$ $n\omega_1$ 为离散频率

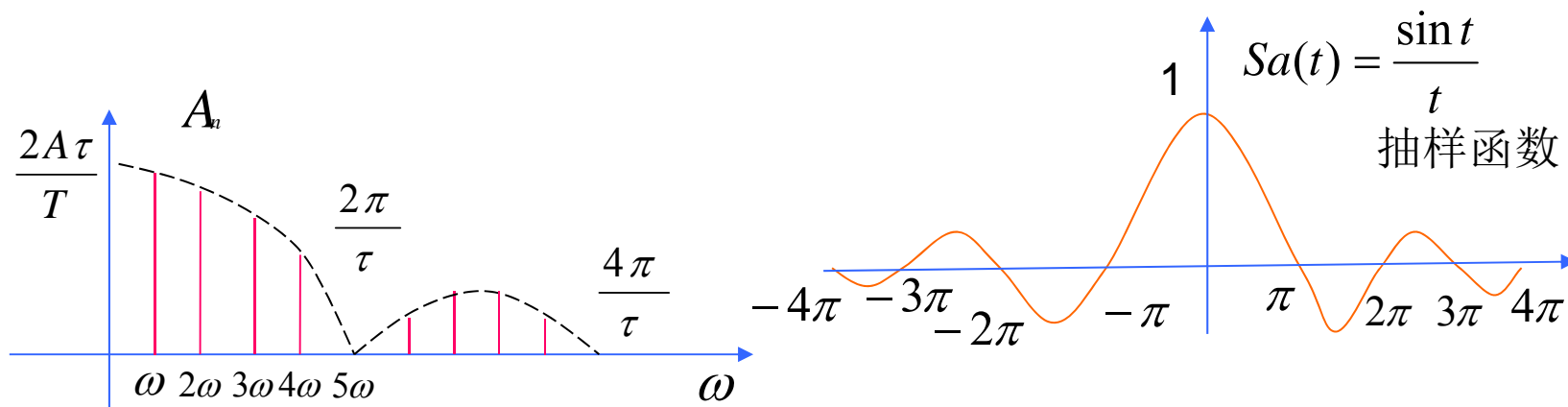
$$\text{当 } \frac{\omega\tau}{2} = \pm\pi, \pm2\pi, \dots, \pm n\pi \quad \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 0$$

$$\text{即 } \omega = \pm\frac{2\pi}{\tau}, \pm\frac{4\pi}{\tau}, \dots, \pm\frac{2n\pi}{\tau} \quad \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 0$$

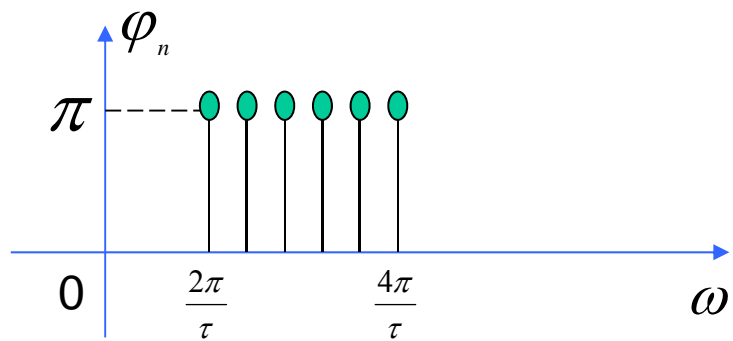
计算第一个振幅为零的谐波次数n

$$\text{令 } \frac{n\omega_1\tau}{2} = \pi \quad \text{将 } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \text{ 带入得 } \frac{n2\pi\tau}{2T} = \pi$$

$$\text{即 } n = \frac{T}{\tau} = 5 \quad \left(\text{取 } \frac{\tau}{T} = \frac{1}{5}\right)$$



幅度频谱图



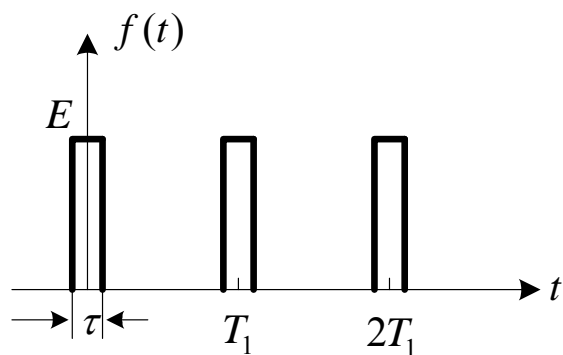
相位频谱图

$$\varphi_n = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} 0 & a_n > 0 \\ \pi & a_n < 0 \end{cases}$$

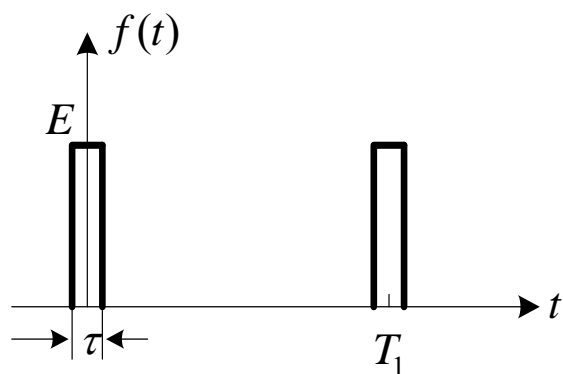
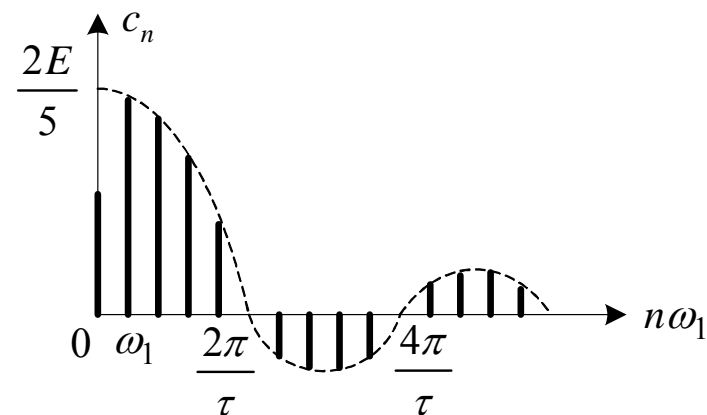
$$\dot{A}_n = A_n e^{-j\varphi_n} = 2C_n = \frac{2A\tau}{T} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} 0 & \operatorname{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) > 0 \quad \text{即} \quad C_n > 0 \\ \pi & \operatorname{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) < 0 \quad \text{即} \quad C_n < 0 \end{cases}$$

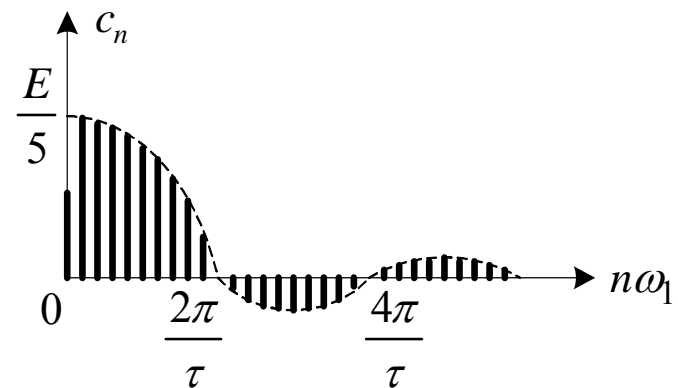
$$C_n = \frac{1}{2} A_n e^{-j\varphi_n} \text{——称复数频谱}$$



(a) $T_1 = 5\tau$

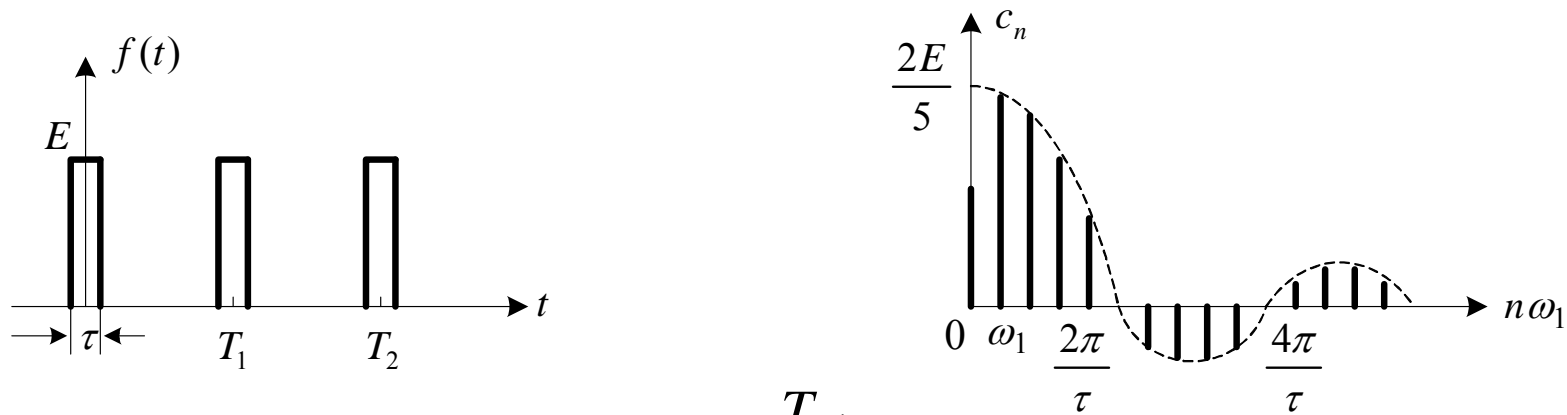


(b) $T_1 = 10\tau$

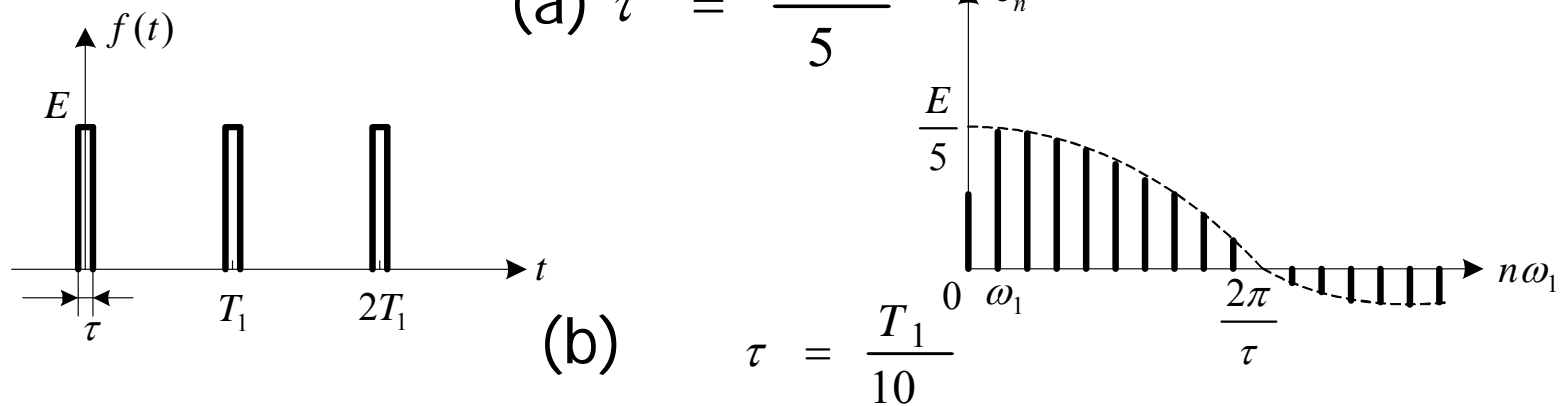


不同周期值下周期矩形脉冲信号的频谱

1. 当 τ 不变, T 增大, 谱线间隔 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ 减小, 谱线逐渐密集, 幅度 $\frac{A\tau}{T}$ 减小



$$(a) \quad \tau = \frac{T_1}{5}$$



(b)

$$\tau = \frac{T_1}{10}$$

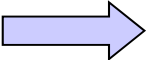
不同脉宽值下周期矩形脉冲信号的频谱

2. 当 T 不变 τ 减小时

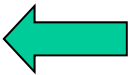

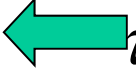

T 不变 $\longrightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ 间隔不变

$\tau \downarrow \longrightarrow \frac{A\tau}{T} \downarrow$ 振幅为0的谐波频率 $\left\{ \frac{2\pi}{\tau}, \frac{4\pi}{\tau}, \dots \right\} \uparrow$

3. 频带宽度的定义

对于一般频谱，常以0频率开始  振幅将为包络线最大值的1/10
的频率之间的频带定义为信号的频带宽度 B_w

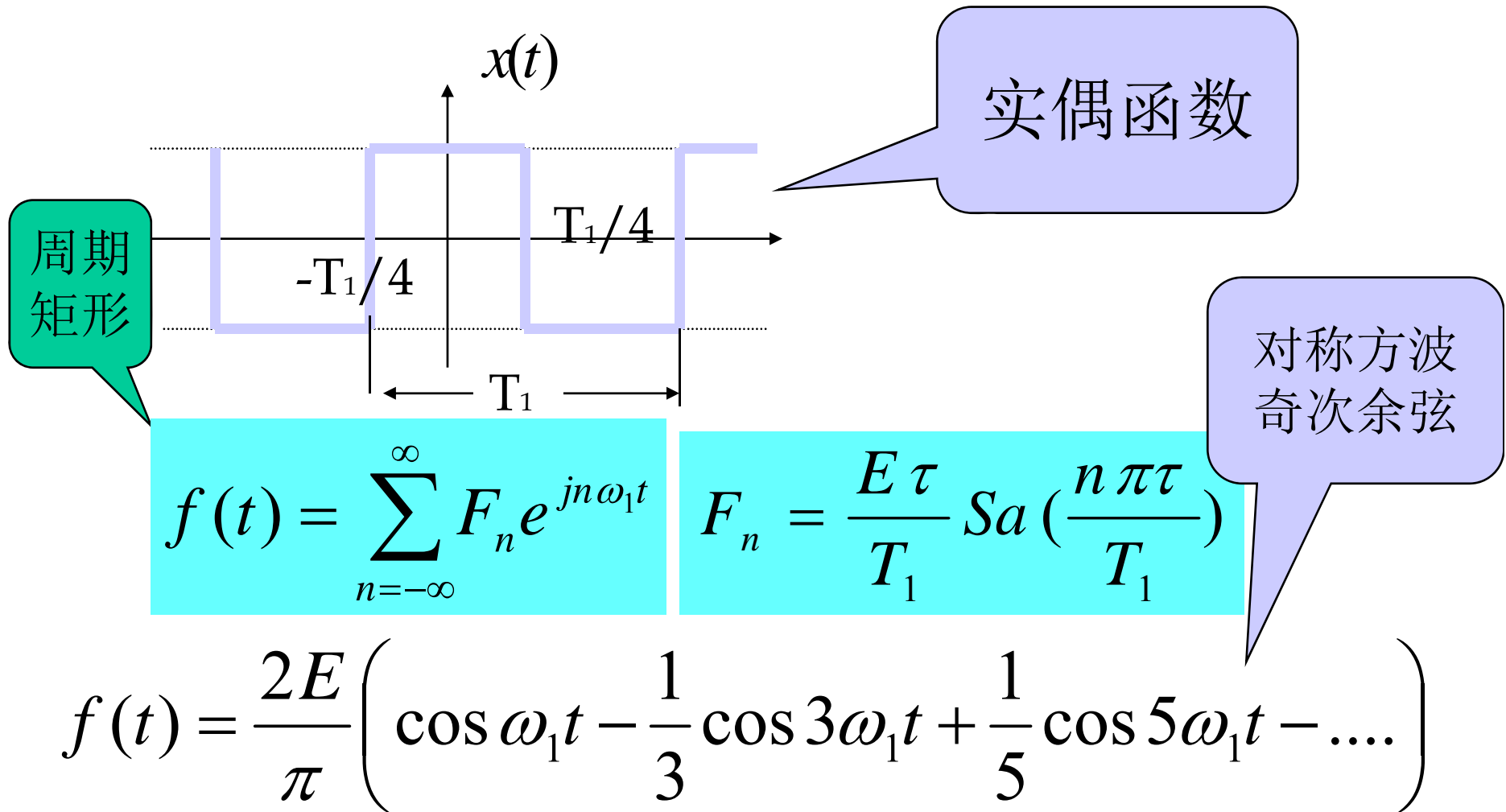
对于周期矩形信号，一般 $B_w = \frac{2\pi}{\tau}$ 或 $B_f = \frac{1}{\tau}$

周期矩形信号的时间特性： $f(t)$ 变化快  τ 
 $f(t)$ 变化慢  τ 

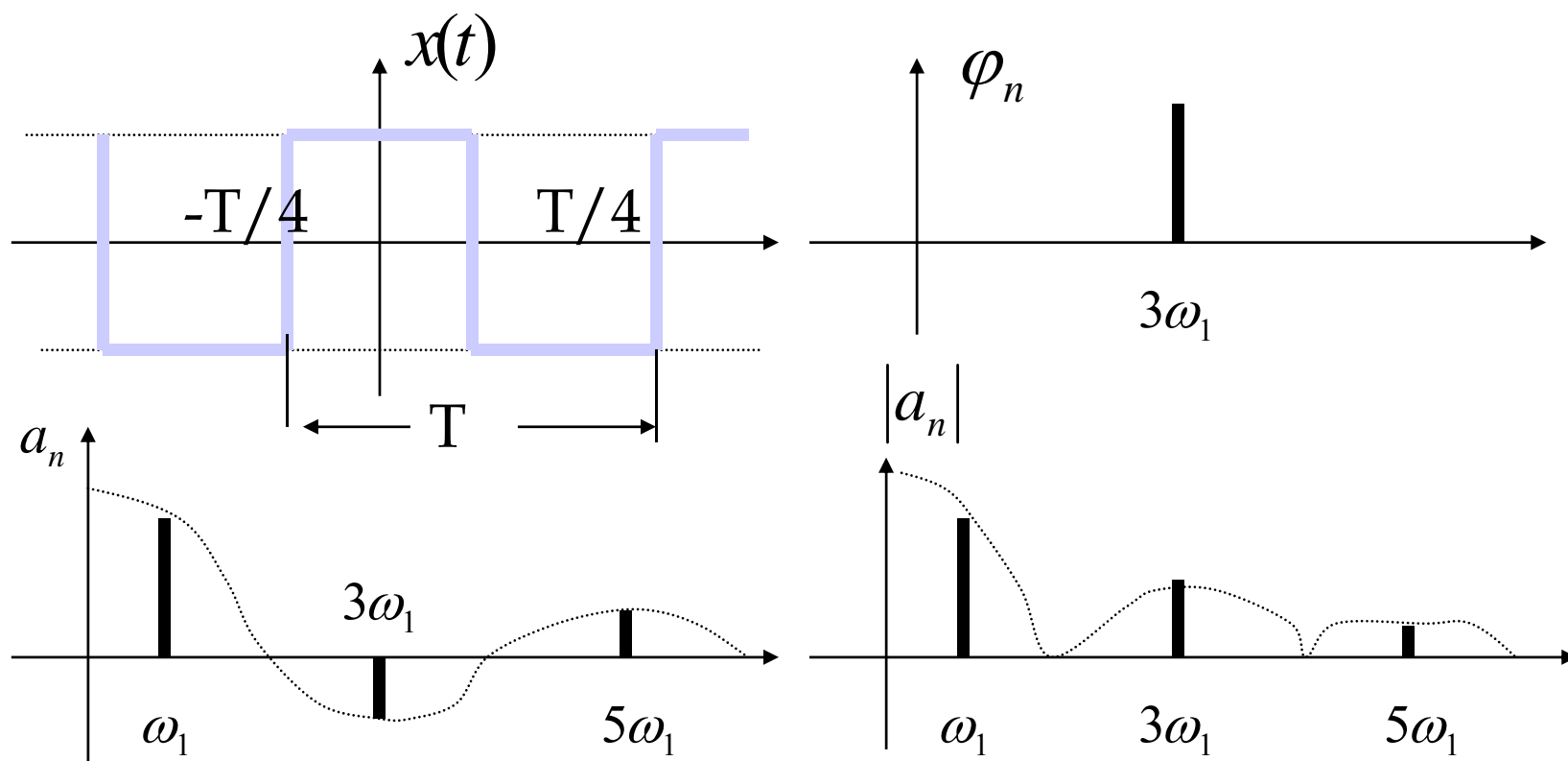
得出： B_w 反比于 τ ，即
脉冲信号的宽度与频
宽成反比，构成传输速
度与频宽之间不可调和
的矛盾。

频率特性： $\tau \downarrow \rightarrow B_w \uparrow$ 变化快的信号必然具有较宽的频带

对称方波是周期矩形的特例



对称方波的频谱变化规律



比较周期矩形脉冲，周期锯齿脉冲，周期三角脉冲信号可以看出：

" Δ " $\rightarrow \frac{1}{n^2}$ 收敛，"锯齿" $\rightarrow \frac{1}{n}$ 收敛，"矩形" $\rightarrow Sa(t)$ 收敛。

即没有跃变的“三角波”较有跃变的“矩形”或“锯齿”的级数收敛快，即频宽较窄。结论：

时间函数中变化较快的信号必定有较宽的频带。

周期信号的频谱特点

- (1) 离散性——谱线是离散的而不是连续的，谱线之间的间隔为 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ 。这种频谱常称为离散频谱。
- (2) 谐波性——谱线在频谱轴上的位置是基频 ω 的整数倍。
- (3) 收敛性——各频谱的高度随着谐波次数增高而逐渐减小，当谐波次数无限增高时，谱线的高度也无限减小

§ 3.4 非周期信号的频谱分析

当周期信号的周期 T_1 无限大时,就演变成了
非周期信号的单脉冲信号

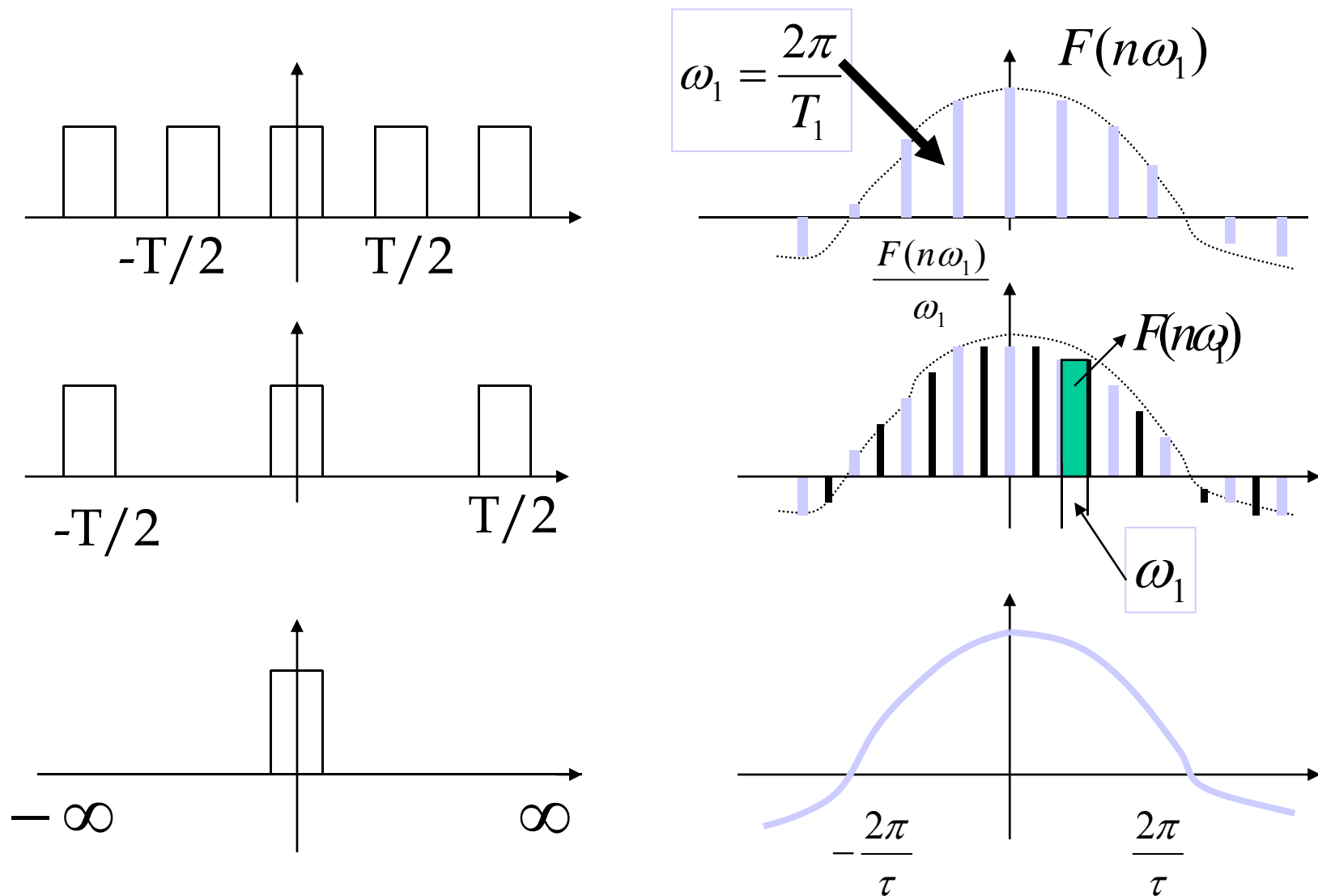
$$T_1 \rightarrow \infty$$

频率也变成连续变量

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow 0 \rightarrow d\omega$$

$$n\omega_1 \rightarrow \omega$$

频谱演变的定性观察





海洛创意

www.hellorf.com - 348001016

Powered by Shutterstock

每一点对地的压力是多少？
作用力的线密度描述！

从周期信号FS推导非周期的FT

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \tilde{f}(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} \cdot dt$$

$$F(n\omega_1) \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} \cdot dt$$

傅立叶
变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅立叶的逆变换

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot e^{jn\omega_1 t}$$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} \cdot e^{jn\omega_1 t} \cdot \omega_1 = \frac{T_1}{2\pi} \sum_{\Delta n\omega_1=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot e^{jn\omega_1 t} \cdot \Delta(n\omega_1)$$

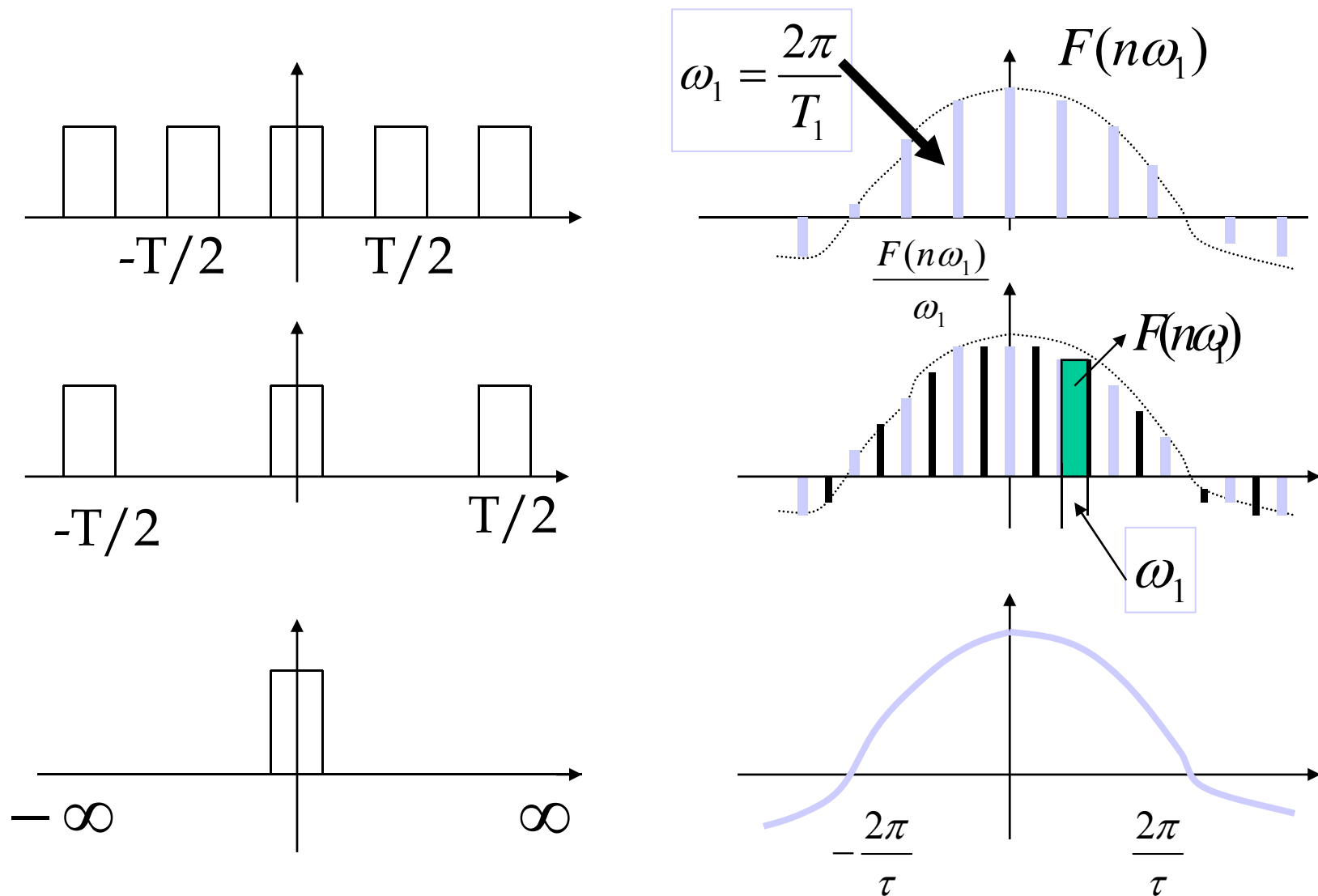
$$T_1 \rightarrow \infty \quad \omega_1 \rightarrow 0 \quad n\omega_1 \rightarrow \omega \quad \Delta(n\omega_1) \rightarrow d\omega$$

$$F(n\omega_1) \rightarrow F(\omega) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$$

傅立叶
逆变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

频谱演变的定性观察



三、从物理意义来讨论FT

- (a) $F(\omega)$ 是一个密度函数的概念
- (b) $F(\omega)$ 是一个连续谱
- (c) $F(\omega)$ 包含了从零到无限高频的所有频率分量,分量的频率不成谐波关系

傅立叶变换一般为复数

FT一般为复函数 $F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega$$

若 $f(t)$ 为实数，则幅频为偶,相频为奇

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega$$

傅立叶变换存在的充分条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

用广义函数的概念，允许奇异函数也能满足上述条件，因而象阶跃、冲激一类函数也存在傅立叶变换

§ 3.5 典型非周期信号的频谱

- 单边指数信号
- 双边指数信号
- 矩形脉冲信号
- 符号函数
- 冲激函数信号
- 冲激偶函数信号
- 阶跃函数信号

单边指数信号

- 信号表达式

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

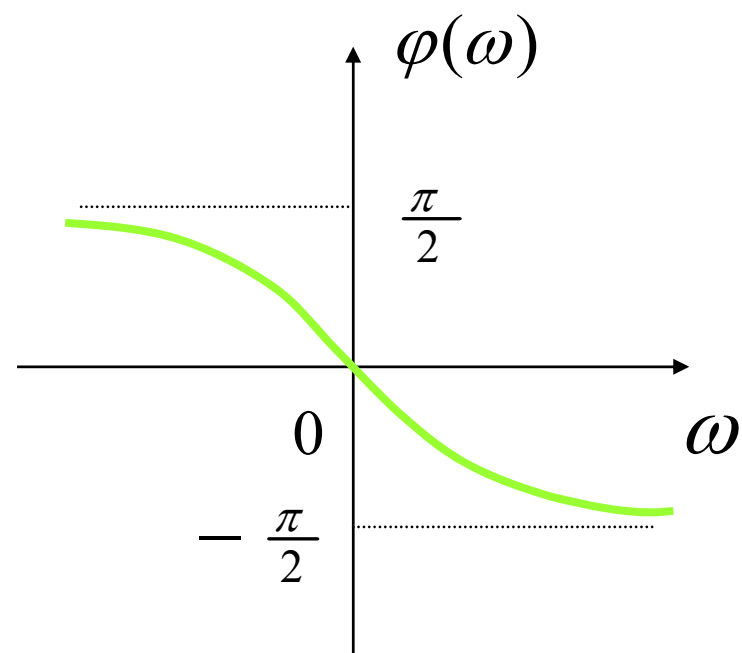
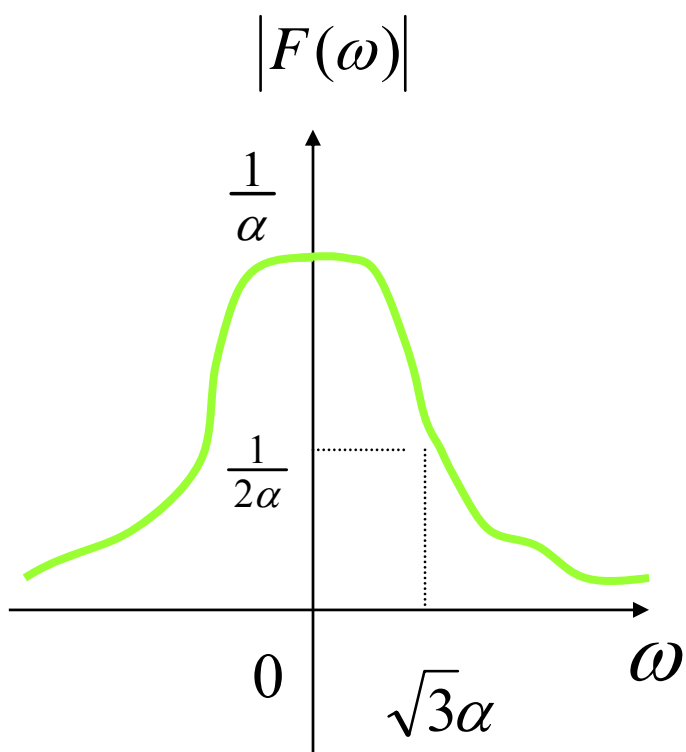
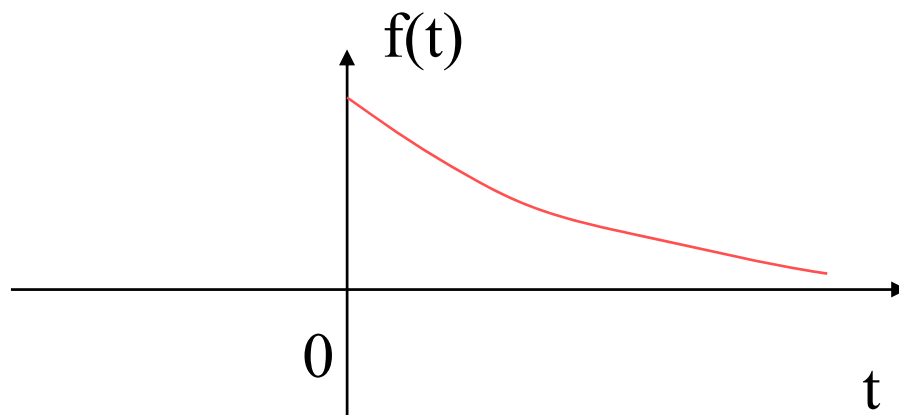
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (\alpha > 0)$$

– 幅频

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

– 相频

$$\varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$



思考: $\alpha \rightarrow 0$?

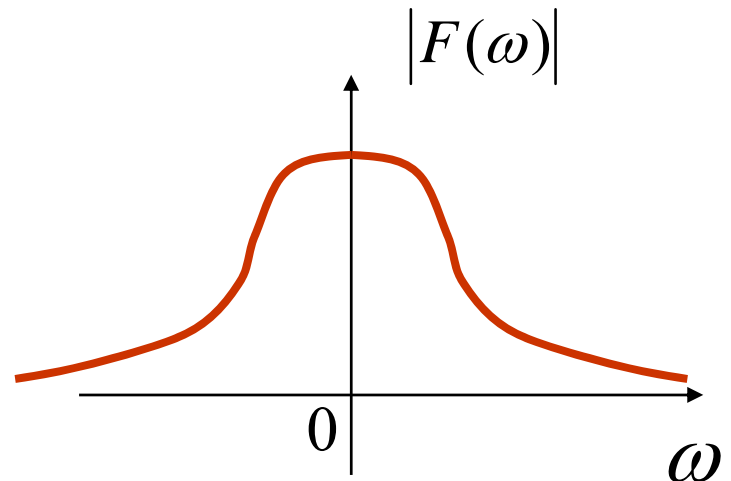
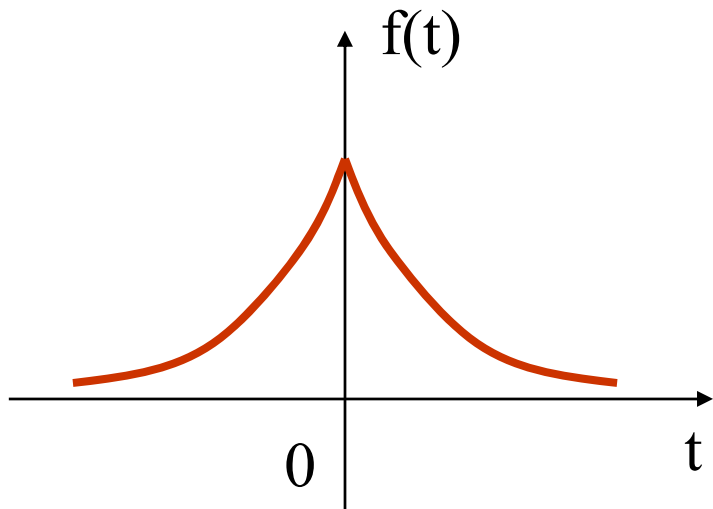
双边指数信号

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \varphi(\omega) = 0$$



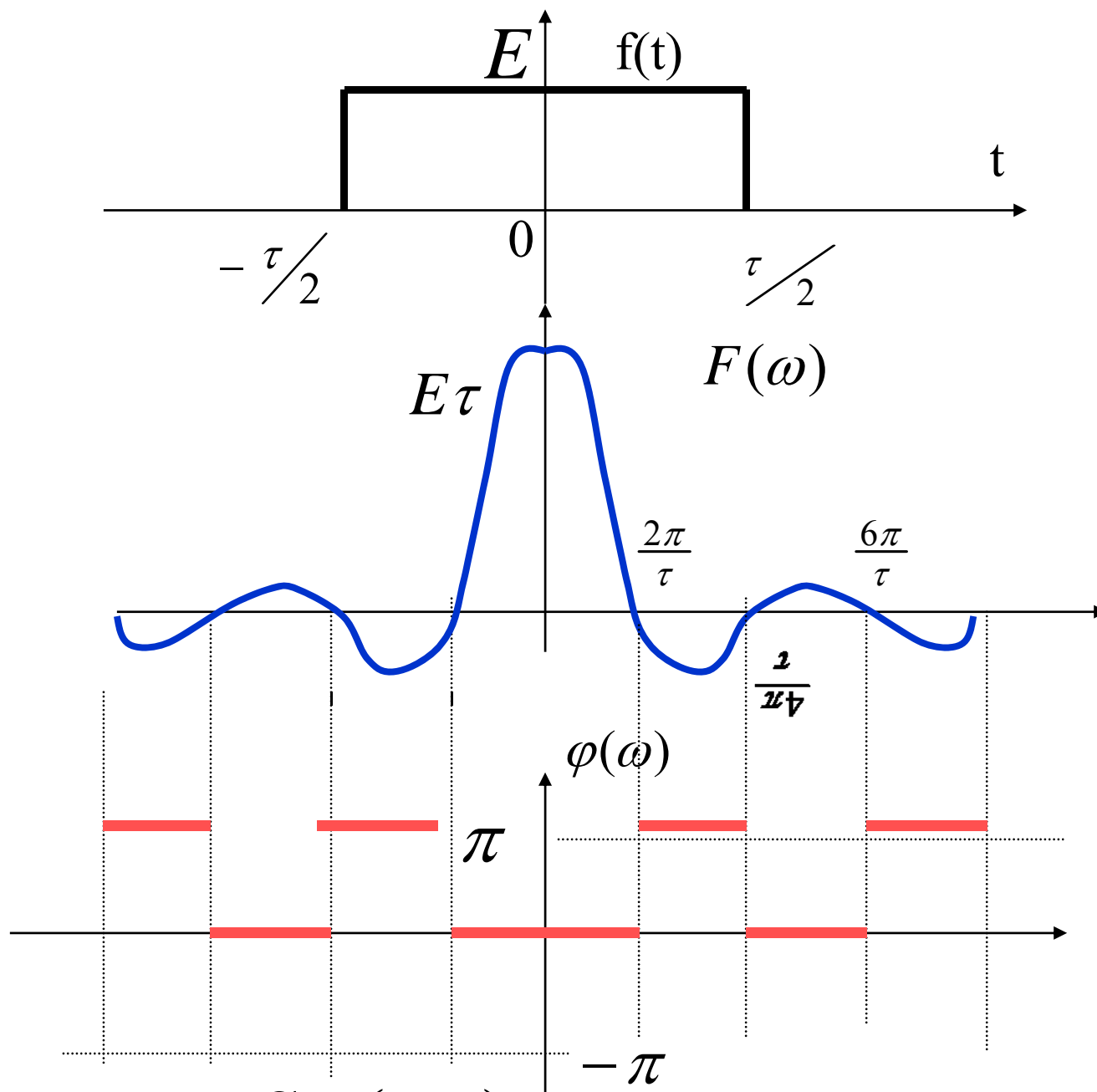
矩形脉冲信号 $f(t) = \begin{cases} E & (|t| \leq \frac{\tau}{2}) \\ 0 & (|t| > \frac{\tau}{2}) \end{cases}$

$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j\omega t} dt = \frac{2E}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$= E\tau \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \right) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$|F(\omega)| = E\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \left(\frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \right) \\ \pi & \left(\frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{4(n+1)\pi}{\tau} \right) \end{cases}$$



$$F(\omega) = E\tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

符号函数

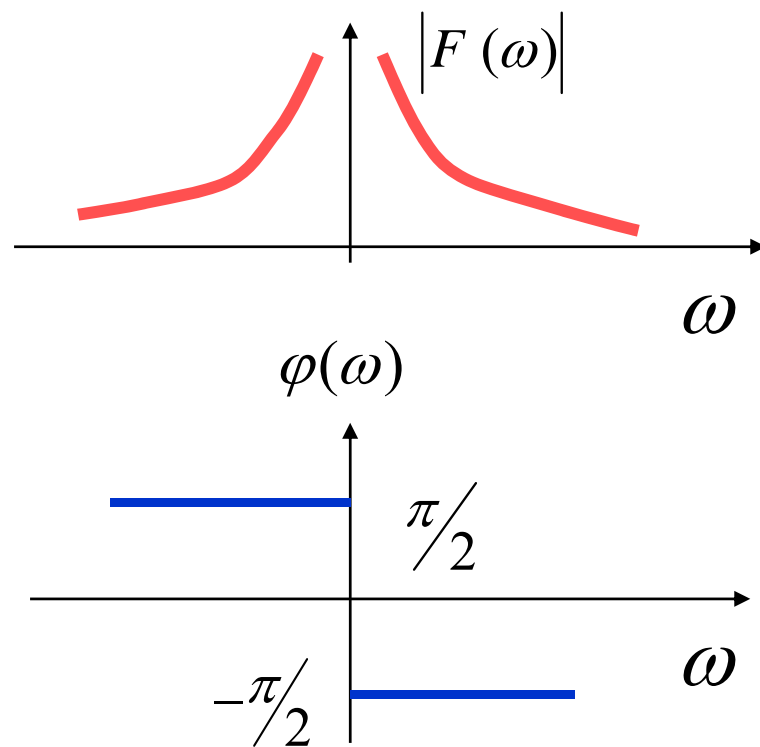
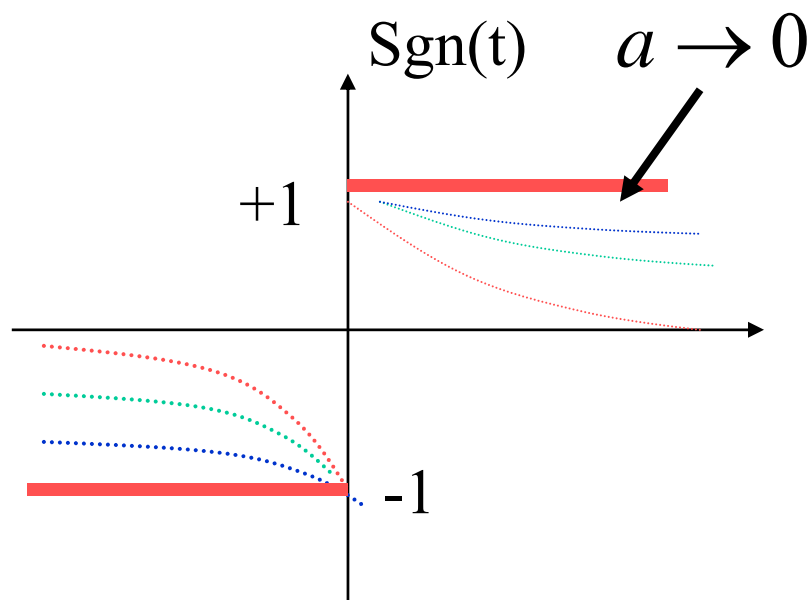
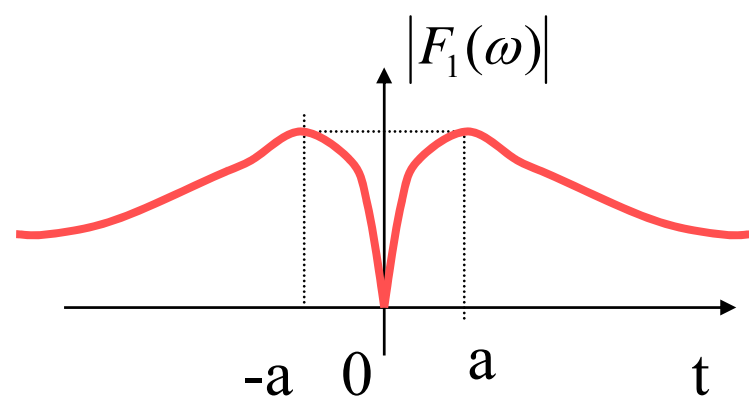
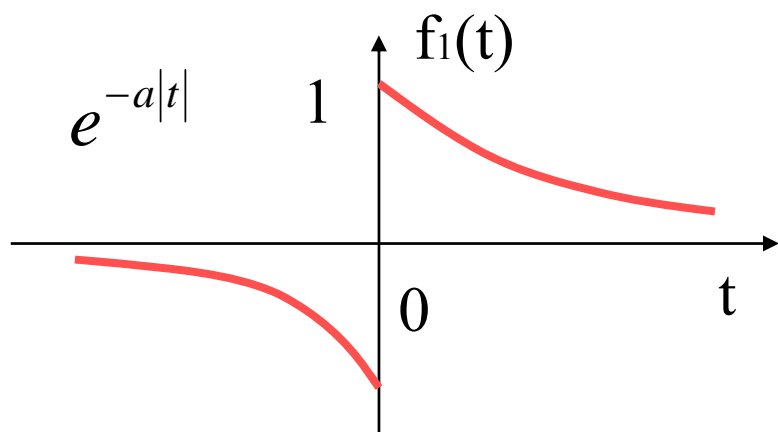
$$f(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & (t > 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases}$$

$$f(t) = \lim_{a \rightarrow 0} f_1(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [\text{sgn}(t) \cdot e^{-a|t|}]$$

$$F_1(\omega) = -\int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{-2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$F(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} F_1(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

$$|F(\omega)| = \frac{2}{|\omega|} \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (\omega > 0) \\ +\frac{\pi}{2} & (\omega < 0) \end{cases}$$

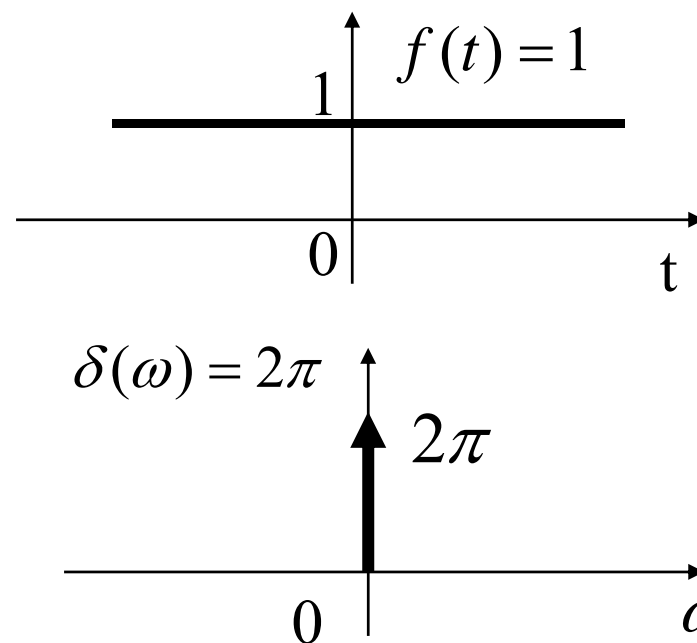
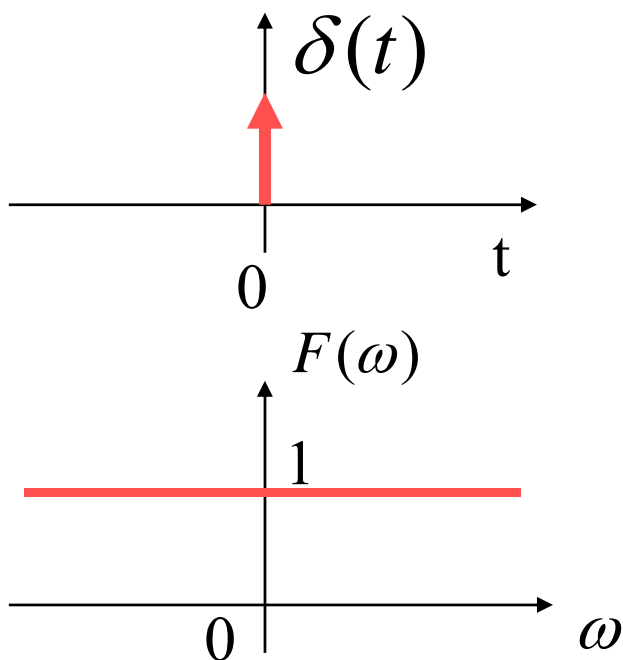


§ 3.5 冲激函数傅立叶变换对

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$FT^{-1}[\delta(\omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$



冲激偶的傅立叶变换

$$FT[\delta(t)] = 1 \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{d}{dt}[\delta(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

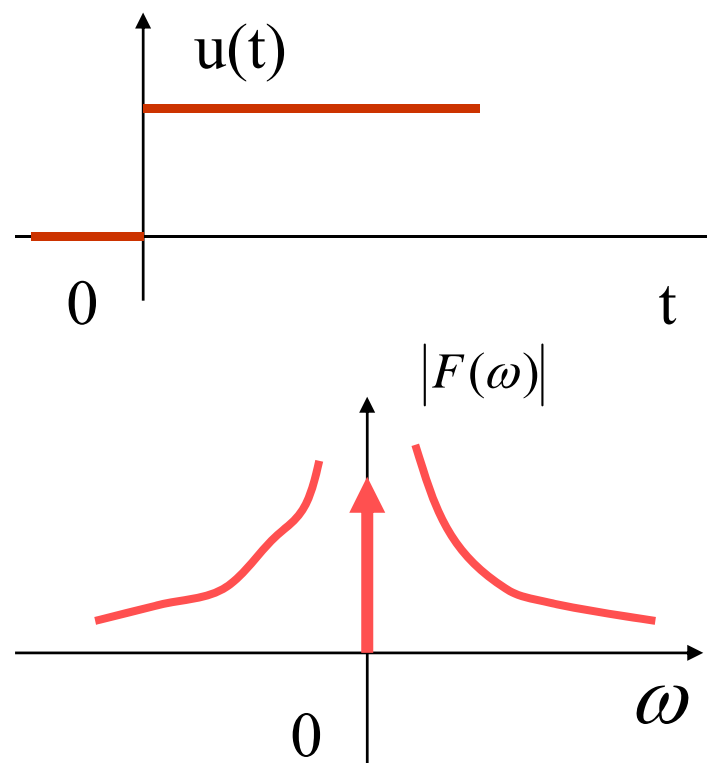
$$FT\left[\frac{d}{dt}\delta(t)\right] = j\omega$$

$$FT\left[\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)\right] = (j\omega)^n$$

§ 3.6 阶跃信号的傅立叶变换

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

$$FT[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



§ 3.7 傅立叶变换的基本性质

- 对称性和叠加性
- 奇偶虚实性
- 尺度变换特性
- 时移特性和频移特性
- 微分和积分特性
- 卷积定理

一、对称性

- 若已知
- 则

$$\begin{aligned} F(\omega) &= FT[f(t)] \\ FT[F(t)] &= 2\pi f(-\omega) \end{aligned}$$

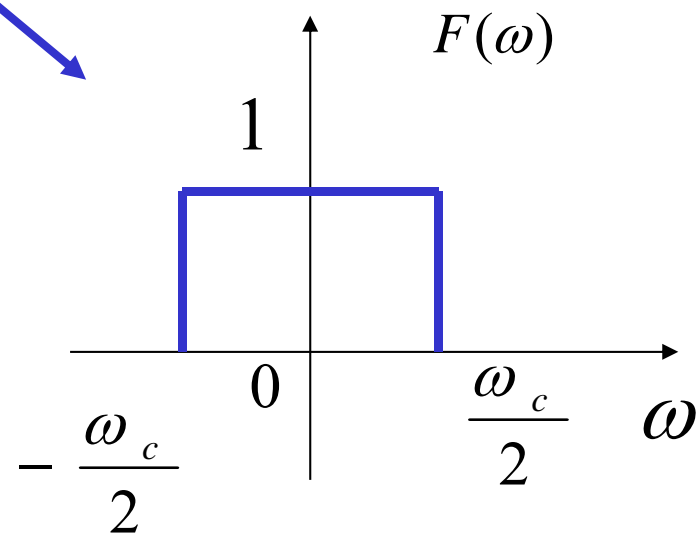
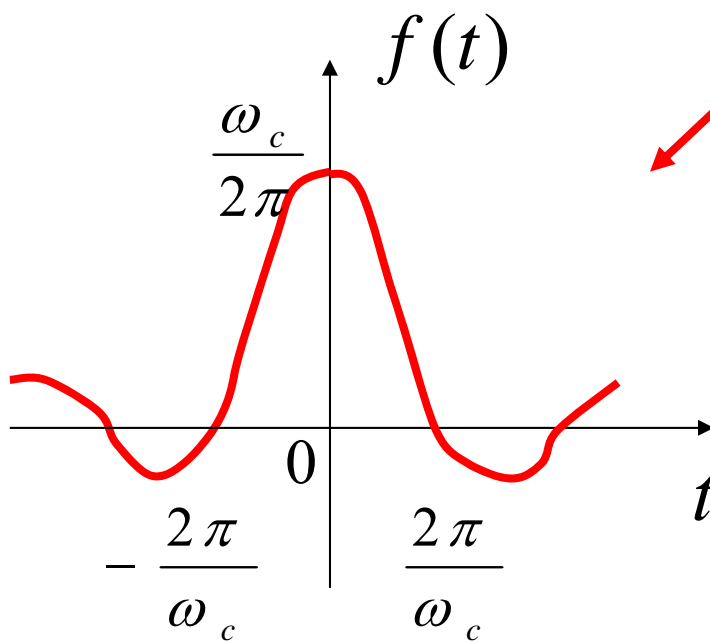
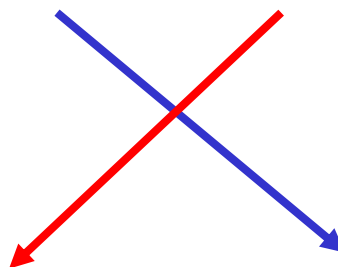
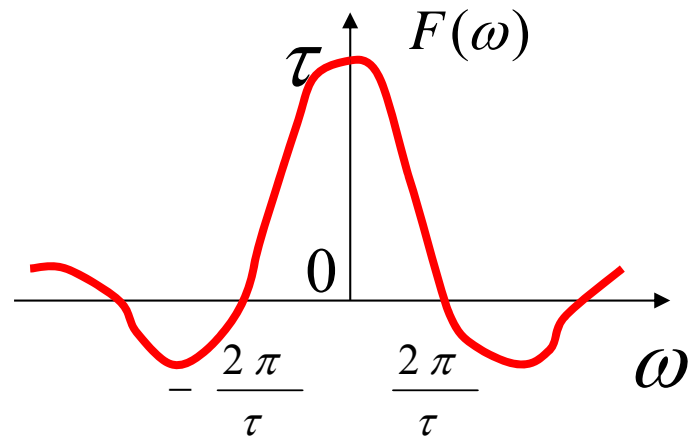
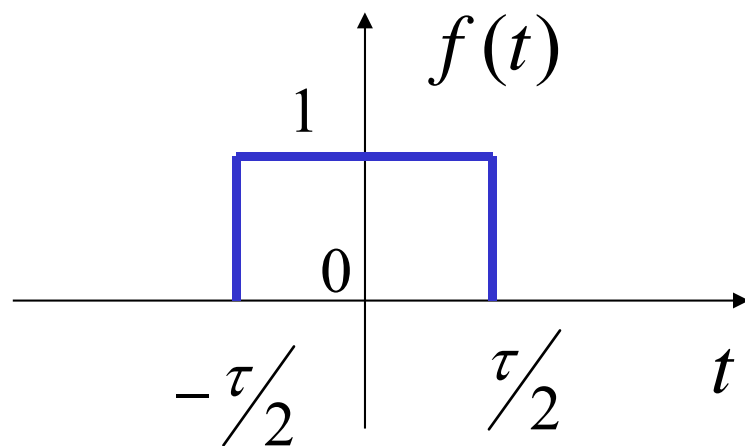
证明:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega,$$

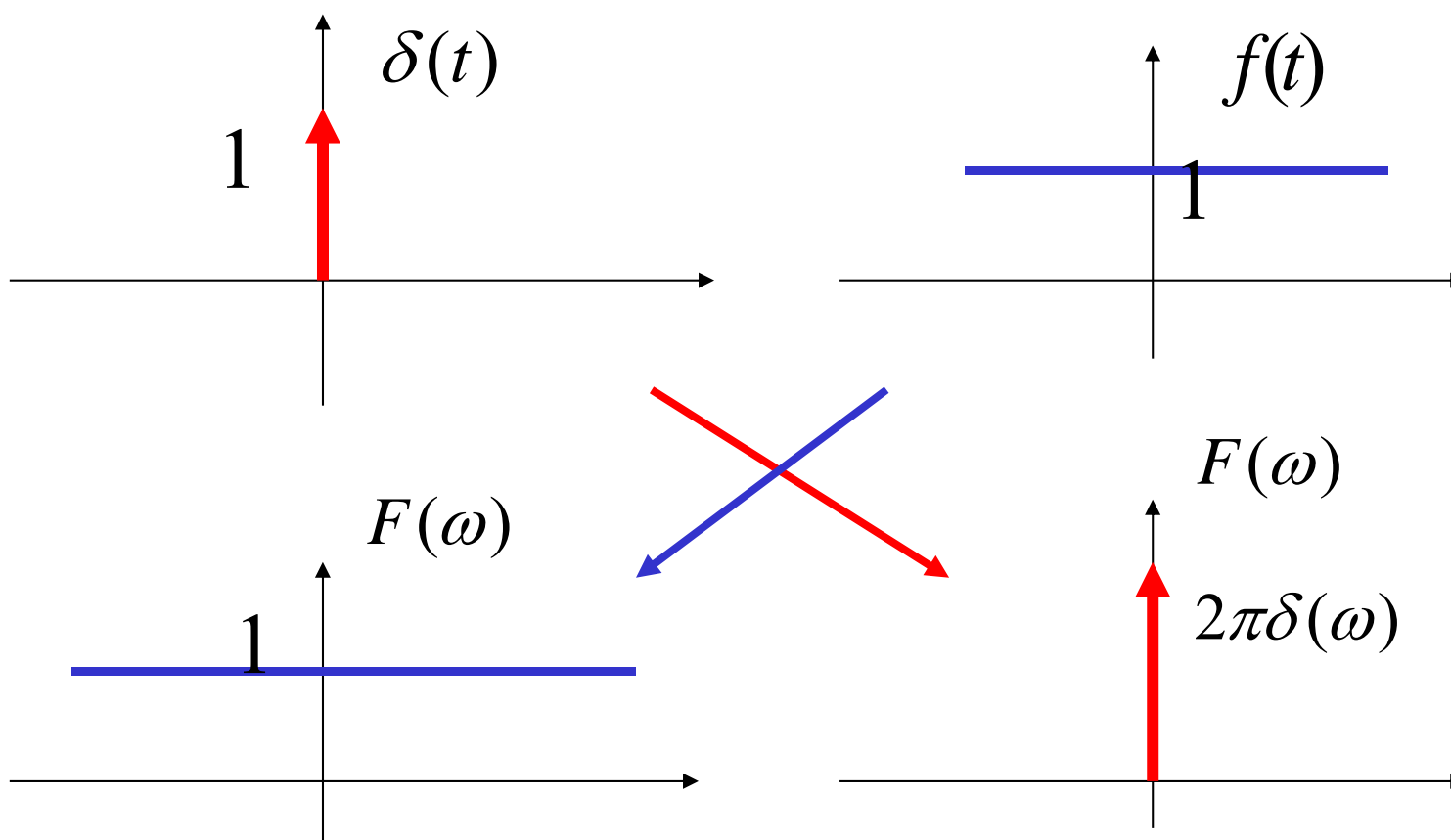
$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$FT[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$



又见

若 $f(t)$ 为偶函数，则时域和频域完全对称
直流和冲激函数的频谱的对称性是一例子



$$a > 1, \quad t > 0$$

$$f(t) = e^{-at}$$

FT

$$F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

f 换成
 F_1

$$F_1(\omega) = FT \left[\frac{1}{a + jt} \right] = ?$$

t 换成
 ω

对称性

$$F_1(\omega) = 2\pi f(-\omega) = 2\pi e^{+a\omega}$$

二、线性（叠加性）

$$\text{若 } FT[f_i(t)] = F_i(\omega)$$

$$\text{则 } FT\left[\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n a_i F_i(\omega)$$

证明： 令 $f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= FT[f(t)] = FT[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(t)] e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} [a_2 f_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \end{aligned}$$

即： 信号在时域叠加与在频域叠加相对应。

三、奇偶虚实性

- 无论 $f(t)$ 是实函数还是复函数，下面两式均成立

$$FT[f^*(t)] = F^*(-\omega)$$

$$FT[f^*(-t)] = F^*(\omega)$$

又分 $f(t)$ 是实函数和虚函数两种情况

一、 $f(t)$ 是实函数

$$F(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt}_{\text{偶函数}} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt}_{\text{奇函数}}$$

• $\begin{matrix} \text{偶函数} & \uparrow & \text{奇函数} \\ & R(\omega) & X(\omega) \end{matrix}$

$$R(\omega) = R(-\omega) \quad X(\omega) = -X(-\omega) \quad F(-\omega) = F^*(\omega)$$

$$FT[f(-t)] = F(-\omega)$$

$$FT[f(-t)] = F^*(\omega)$$

实偶函数的傅立叶变换仍为实偶函数

实奇函数的傅立叶变换为虚奇函数

二、 $f(t) = jg(t)$ 是虚函数

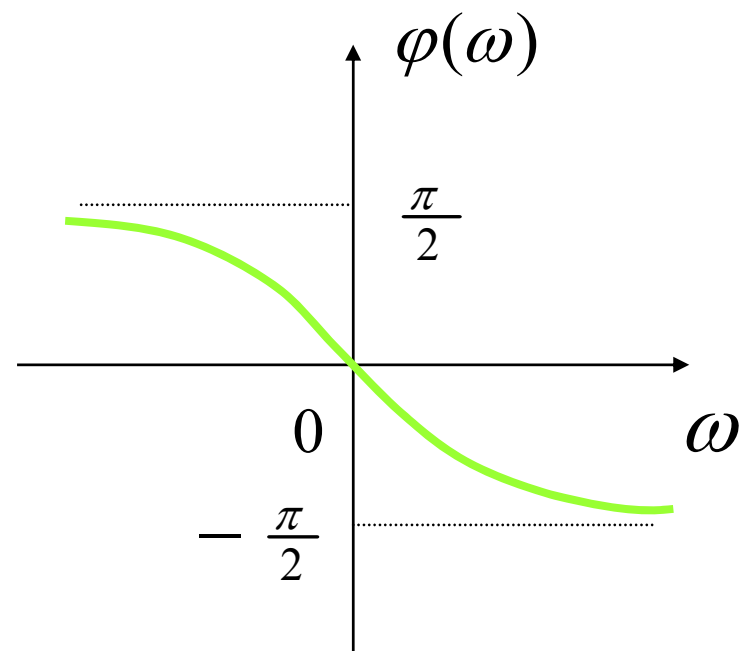
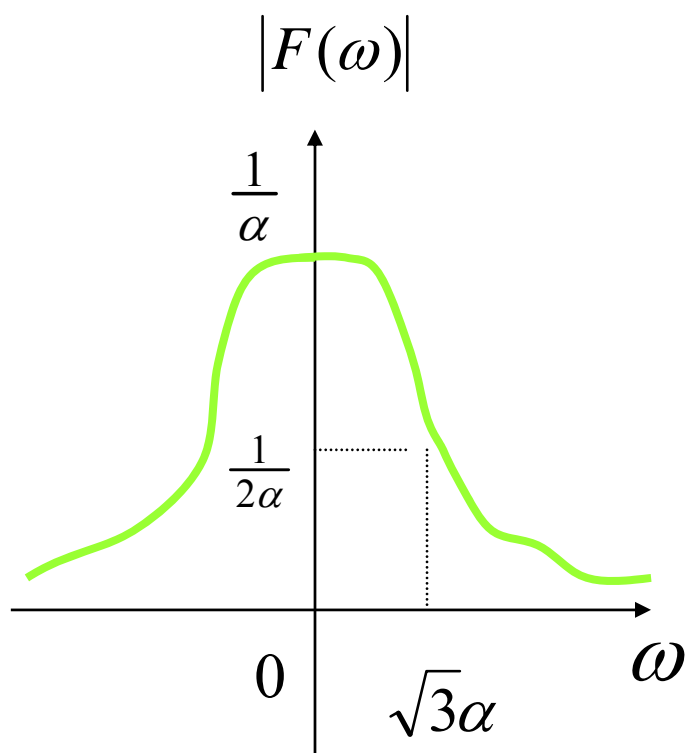
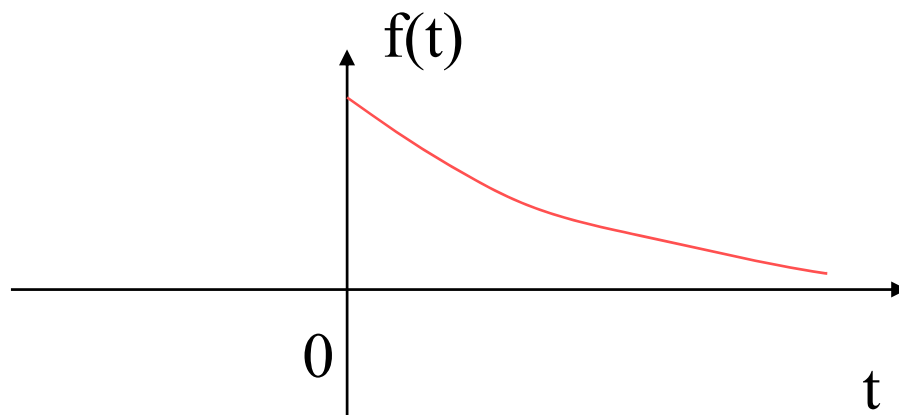
$$F(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin \omega t dt}_{\text{奇函数 } \uparrow R(\omega)} + j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos \omega t dt}_{\text{偶函数 } \uparrow X(\omega)}$$

$$R(\omega) = -R(-\omega) \quad X(\omega) = X(-\omega) \quad F(-\omega) = F^*(\omega)$$

$$FT[f(-t)] = F(-\omega)$$

$$FT[f^*(-t)] = F^*(\omega)$$

$$FT[f(t)] = F^*(-\omega)$$



四、尺度变换特性

- 若
- 则

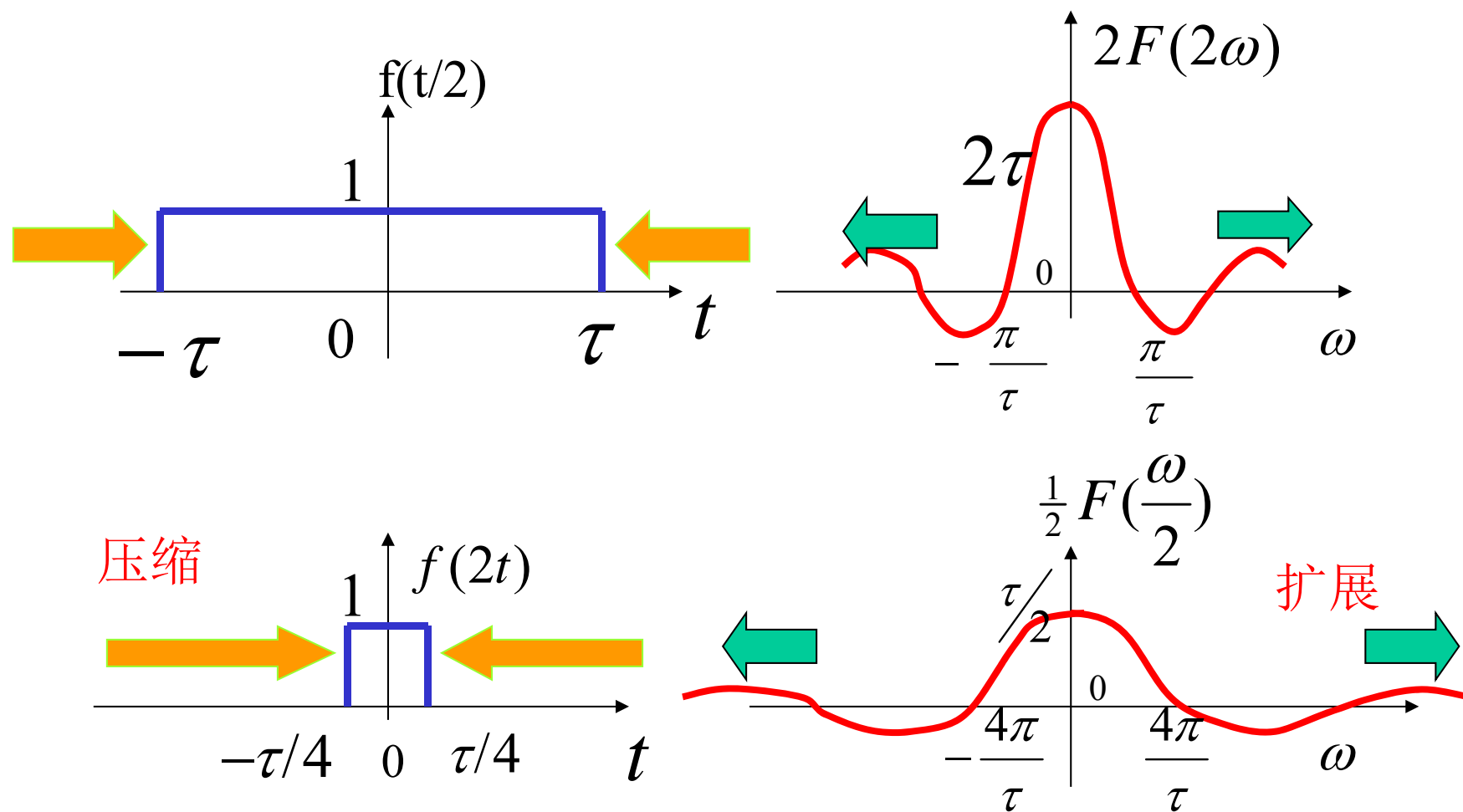
$$FT[f(t)] = F(\omega)$$

$$FT[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$a > 0 \quad FT[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$a < 0 \quad FT[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx = \frac{-1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

时域中的压缩等于频域中的扩展



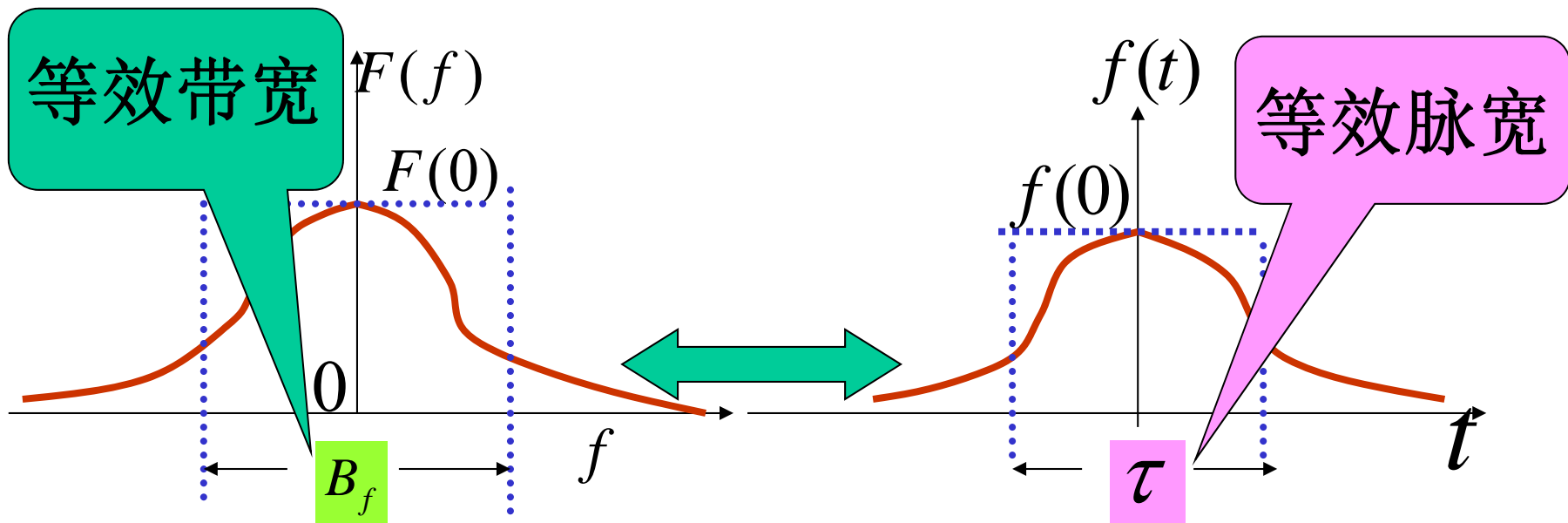
动态演示

等效脉宽与等效频带宽

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(f) df = f(0)$$

$$f(0) \cdot \tau = F(0) \quad F(0) \cdot B_f = f(0) \quad B_f = \frac{1}{\tau}$$



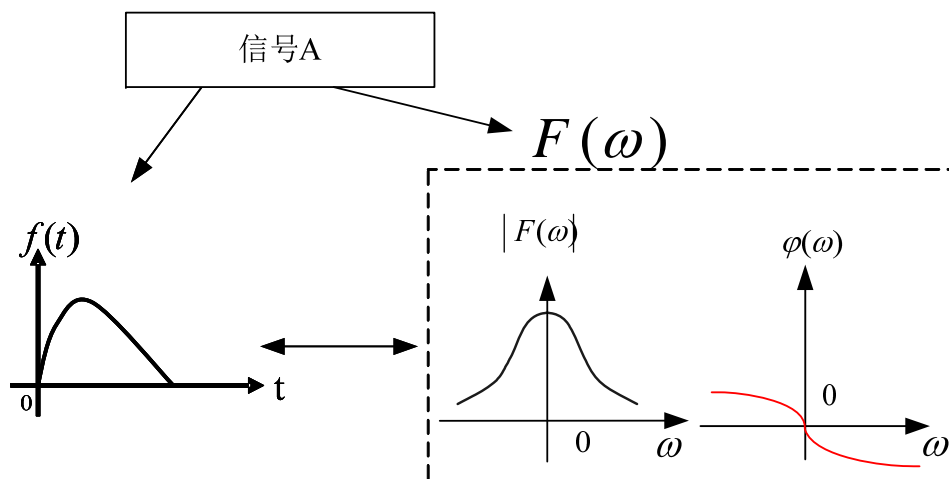
3.7 傅立叶变换的性质

性质五 时移特性

一、傅立叶变换定义回顾

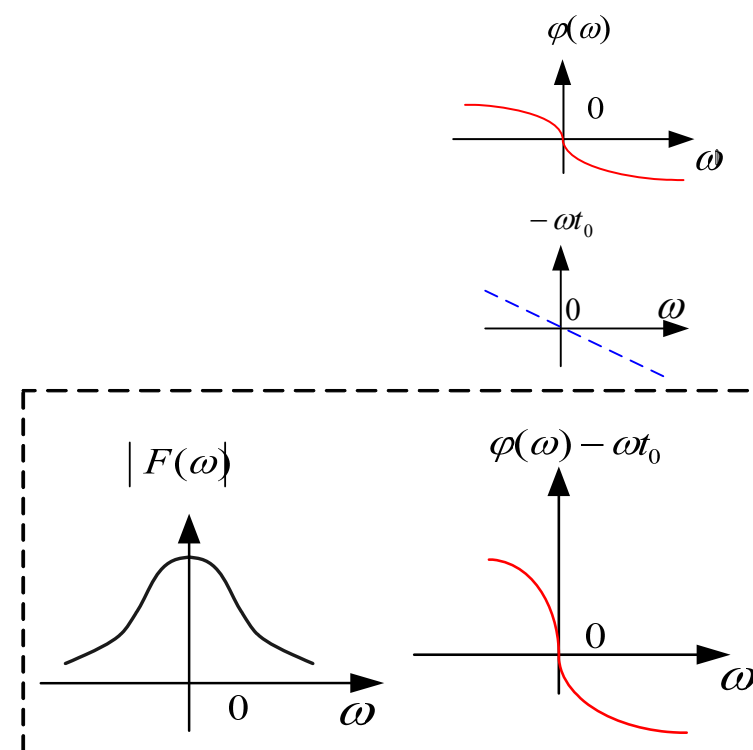
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$



$$F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$= |F(\omega)| e^{j[\varphi(\omega) - \omega t_0]}$$



二、时移特性的表达与证明

$$\text{若 } FT[f(t)] = F(\omega)$$

$$\text{则 } FT[f(t - t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

证明: $FT[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt$

令 $x = t - t_0$,

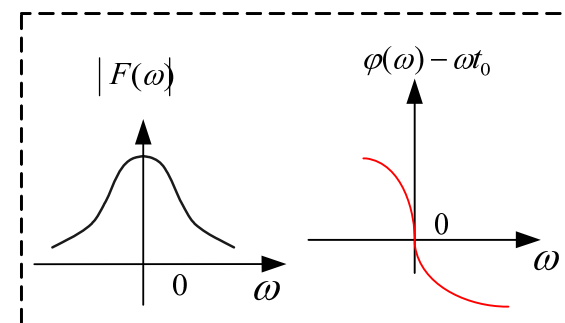
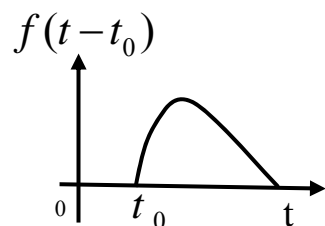
$$\begin{aligned} FT[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} F(\omega) \end{aligned}$$

例 已知 $FT[e^{-5t}u(t)] = \frac{1}{5 + j\omega}$, 求 $FT[e^{-5(t-3)}u(t-3)] = ?$

解: 由时移特性有: $FT[e^{-5(t-3)}u(t-3)] = \frac{1}{5 + j\omega} e^{-j3\omega} = \frac{e^{-j3\omega}}{5 + j\omega}$

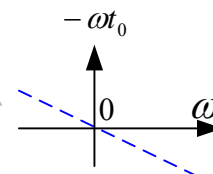
三、时移特性的物理含义与应用（重点）

1、物理含义与工程指导

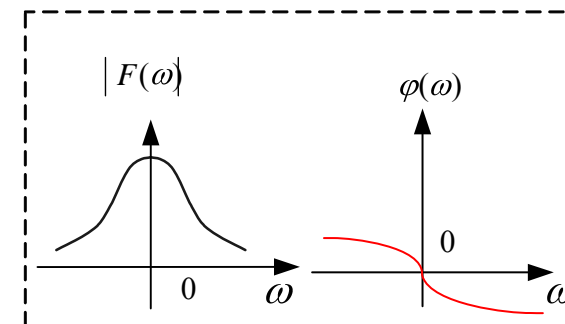
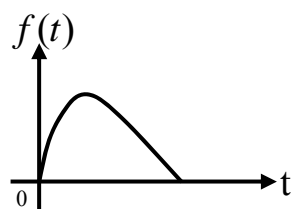


$$f(t-t_0) \longleftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

↑ 时域时间延迟 t_0 等效于 频域相位附加 $(-\omega t_0)$ ↑



$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

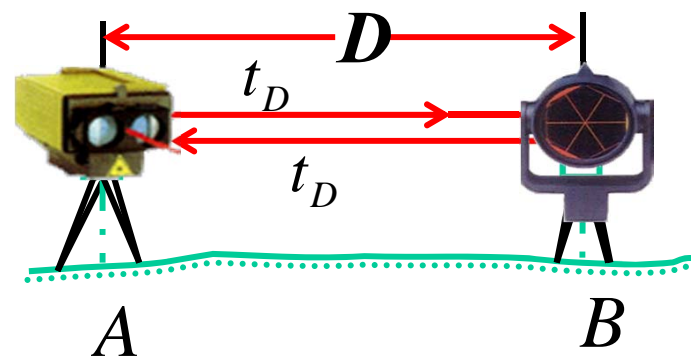


- 运用频域的移相实现连续时间信号的延时
- 延时与相位改变的五测量

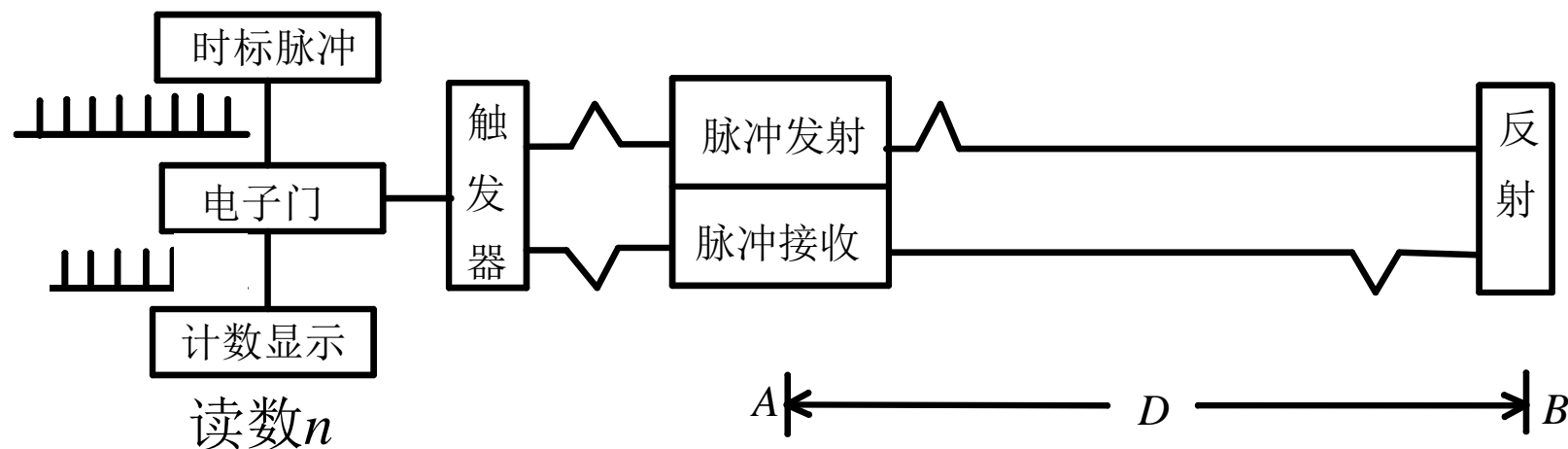
2、应用举例

例 右图为电磁波测距基本原理图，A发送电磁波（如激光）为目标B所反射，若A探测出发送电磁波到收到发射波的时延为 t_{2D} ，那么A、B距离D

为：
$$D = \frac{1}{2} c \cdot t_{2D}$$



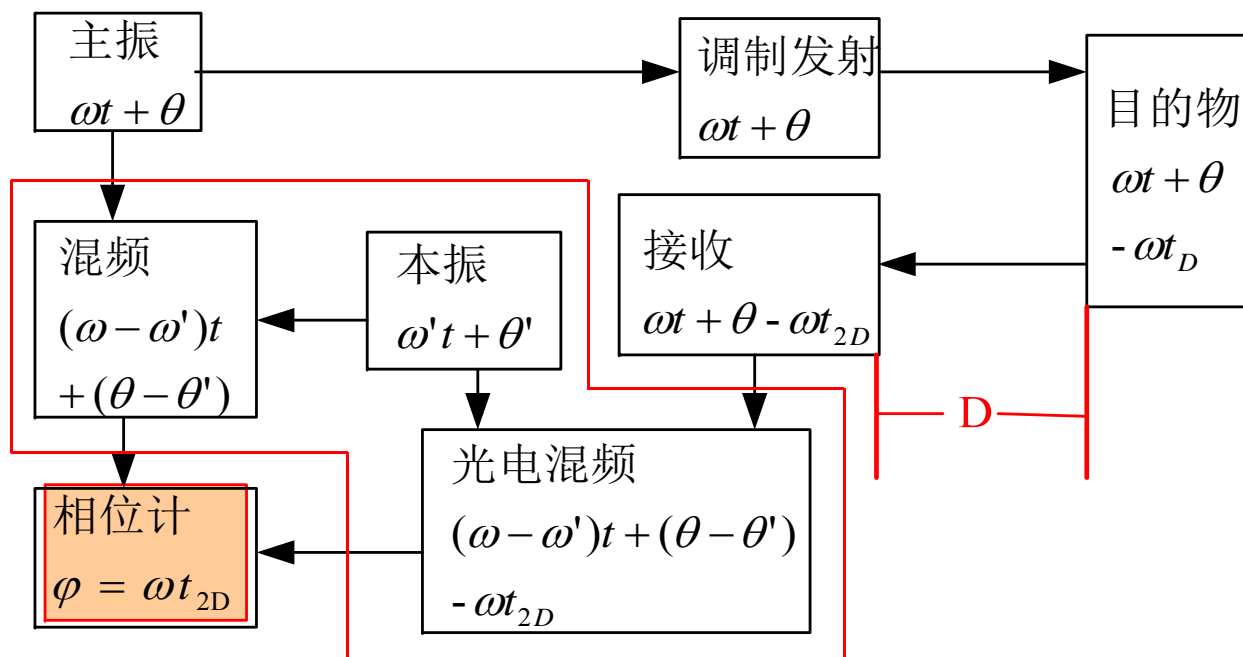
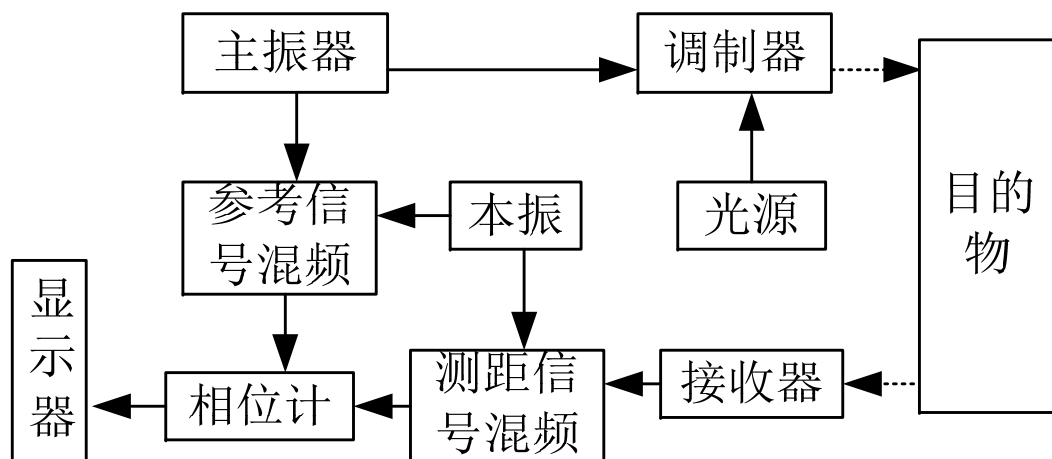
方案一：直接测时延 （精度低，成本低）



如果时标脉冲间隔 τ ，计数器值 n ，有时延 $t_{2D} = (n-1)\tau \pm 1$ 误差引发时延测量精度问题，导致精度低

方案二：测量相移计算时延

(精度高, 成本上升)



思考：右图为什么要加红色框部分？

由相位计读数 φ 计算

$$t_{2D} = \frac{\varphi}{\omega}$$

四、总结

- 时域的时间延迟与频域的相位更改等效: $f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
- 运用频域的移相实现连续时间信号的延时
- 延时与相位改变的互测量

例：求三脉冲信号的频谱

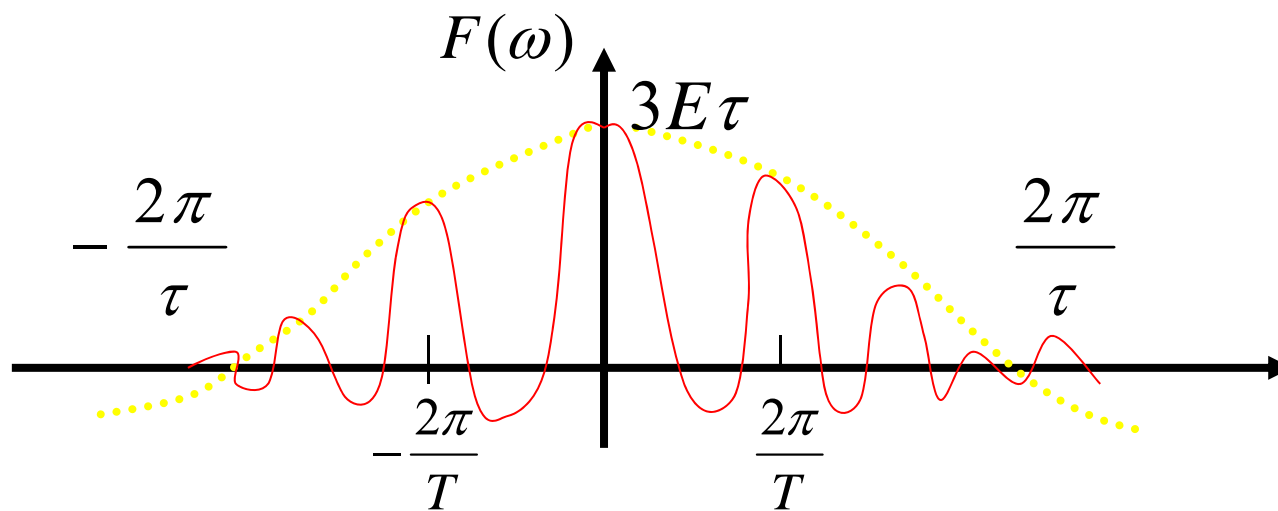
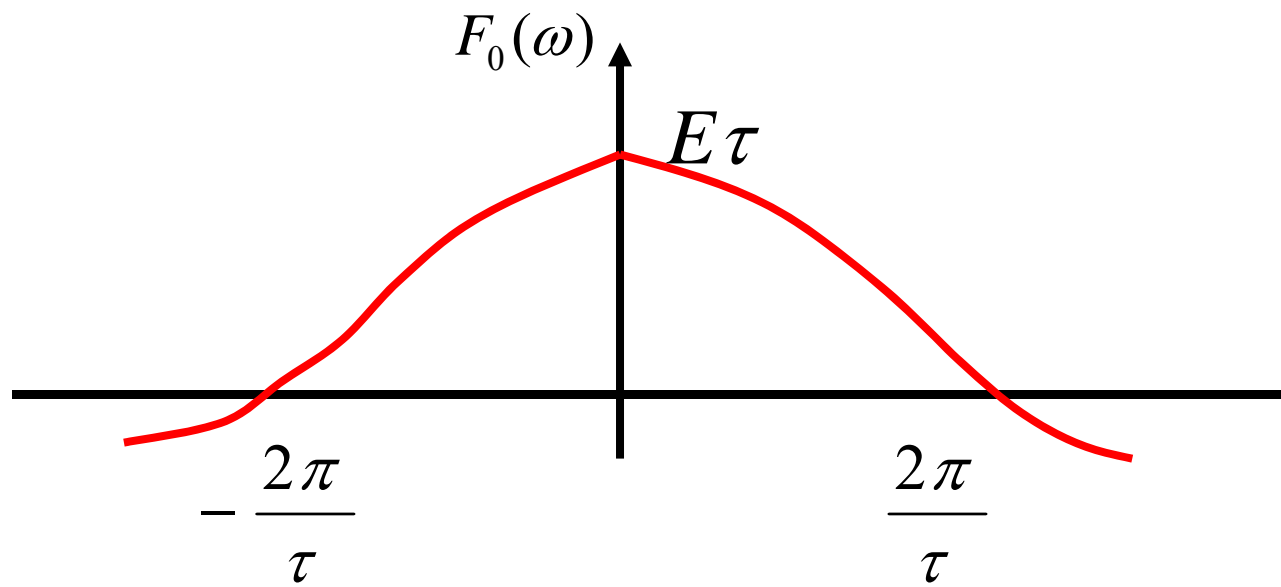
单脉冲 $f_0(t)$ 的频谱为 $F_0(\omega) = E\tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$

则有如下三脉冲信号

$$f(t) = f_0(t) + f_0(t+T) + f_0(t-T)$$

其频谱为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F_0(\omega)(1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) \\ &= E\tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})(1 + 2\cos \omega T) \end{aligned}$$



六、频移特性

$$\text{若 } FT[f(t)] = F(\omega)$$

$$\text{则 } FT[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } FT[f(t)e^{j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= F(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

$$\text{同理: } FT[f(t)e^{-j\omega_0 t}] = F(\omega + \omega_0)$$

频谱搬移技术

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$FT[f(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$FT[f(t)\sin\omega_0 t] = \frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

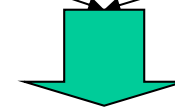


$$f(t)$$

$$\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$f(t)$$



$$\frac{1}{2}F(\omega - \omega_0)$$

$$\frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$$

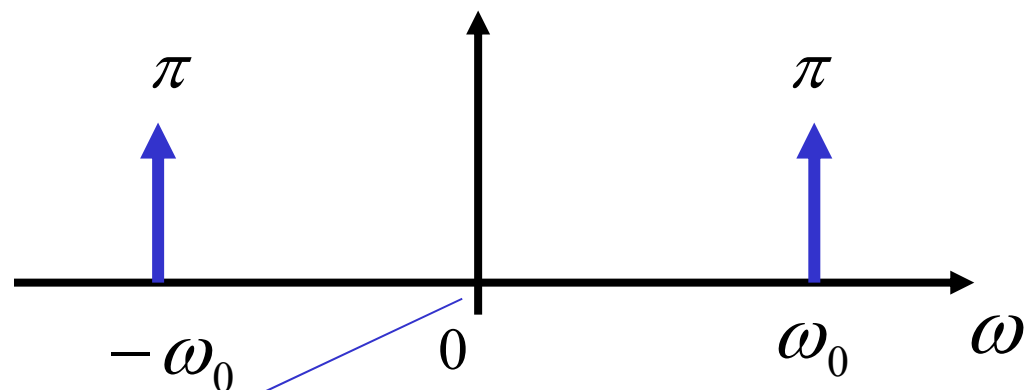
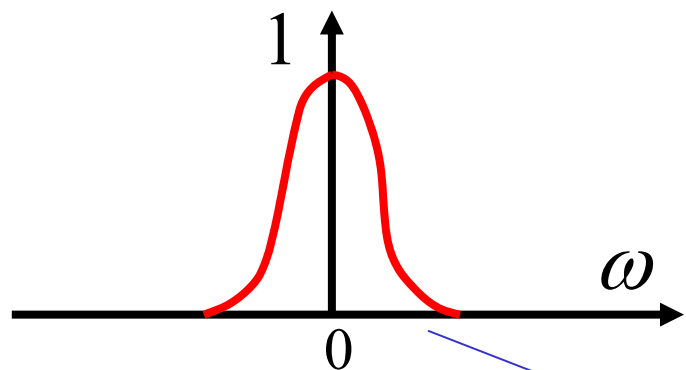
$$\frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

另一种方法

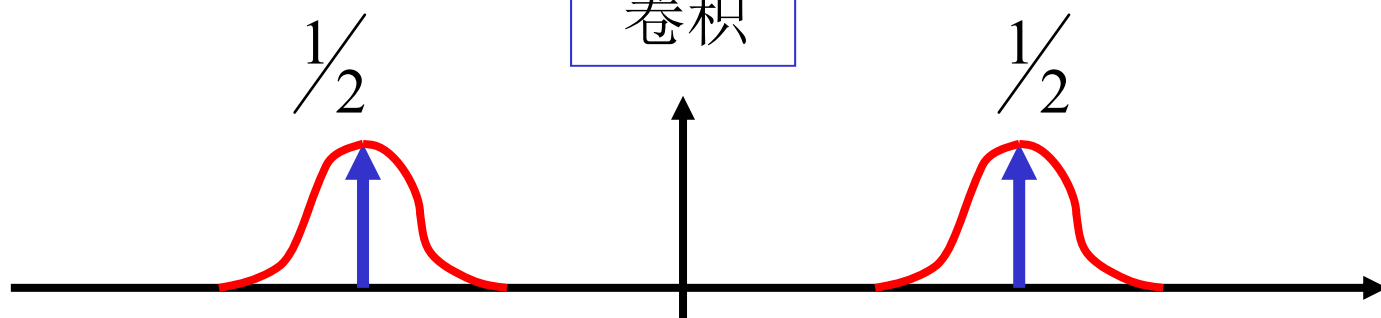
$$FT[f(t) \cos \omega_0 t]$$

$$FT[f(t)]$$

$$FT[\cos \omega_0 t]$$



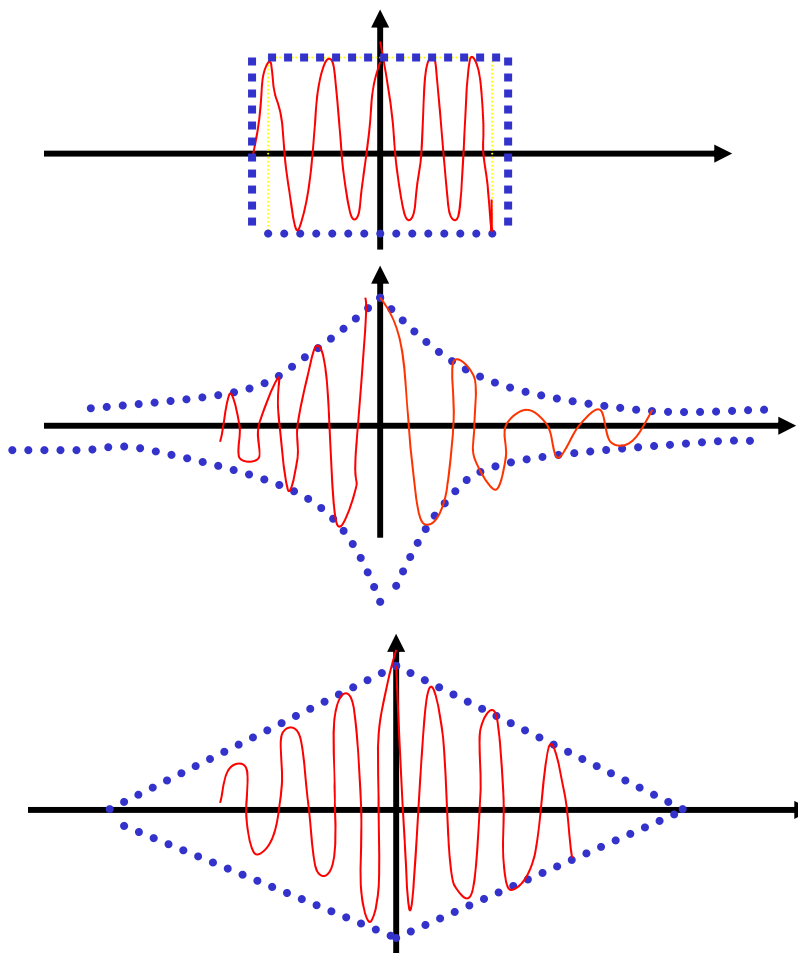
卷积



$$\frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

调幅信号都可看成乘积信号 $f(t)\cos\omega_0t$

- 矩形调幅
- 指数衰减振荡
- 三角调幅



调幅原理

调幅波及其频谱

一、为什么要调制？

为了有效传输信号

①天线尺寸可实现。天线尺寸 $\geq \frac{1}{10} \lambda$ (信号波长)

$$\lambda \downarrow = \frac{v}{f} = \frac{c \text{ 光速一定}}{f \uparrow} \quad \text{变频信号 } f \uparrow \rightarrow \lambda \downarrow$$

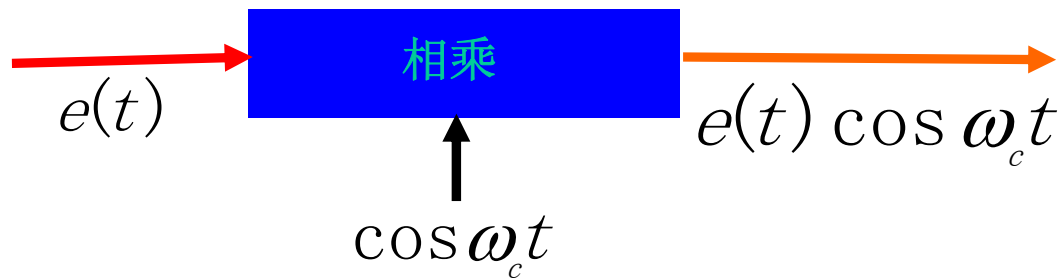
②不同信号在同一信道里传输不产生重叠。

(用多路复用技术解决：在一个信道中传输多路信号。)

调制是实现多路复用的关键技术。

二、调制原理 theory of modulation 。

调制——将信号频谱搬移到任何所需的较高频率范围的过程。

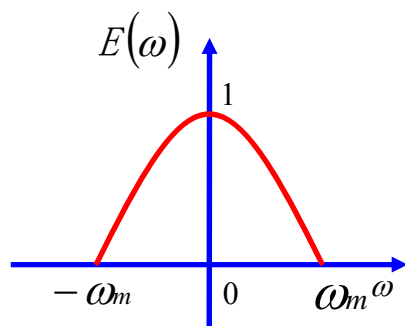


$e(t)$ ——待传输的信号，称为调制信号

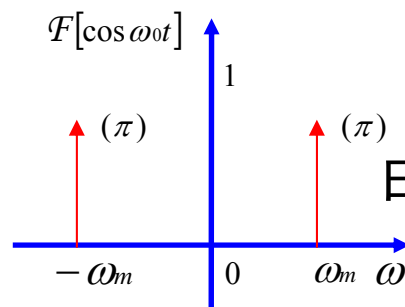
$\cos \omega_c t$ ——运载 $g(t)$ 的高频振荡信号称为载波。

$f(t) = e(t) \cos \omega_c t$ ——为经调制后的高频信号称为已调波。

应用付里叶变换的性质说明频谱搬迁的原理



$$\mathcal{F}[e(t)] = E(j\omega)$$

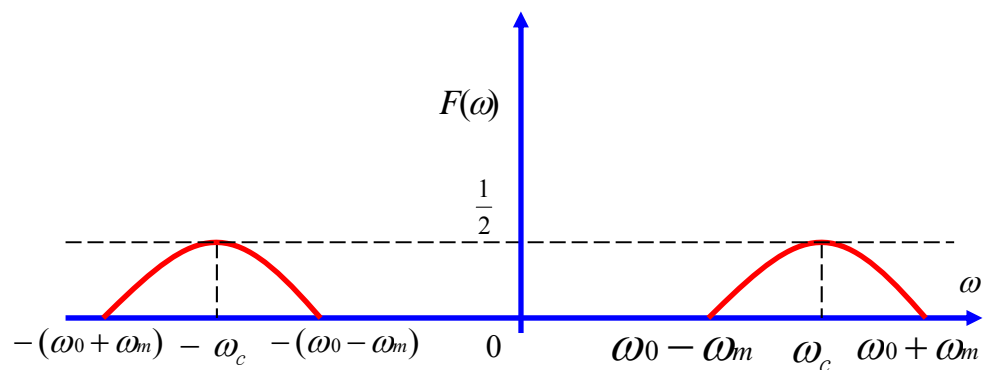


由复指数函数的付里变换

$$\mathcal{F}(\cos \omega_0 t) = \frac{1}{2} \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$$

$$= \frac{2\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$= \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

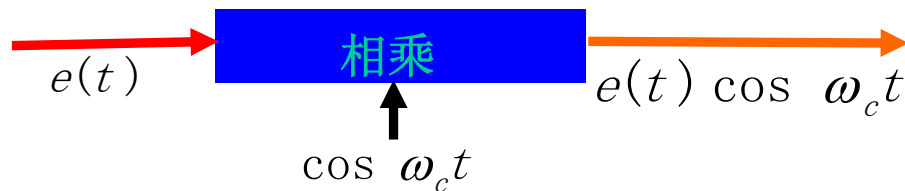


$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(t)] &= \mathcal{F}[e(t) \cos \omega_0 t] \\
 &= \frac{1}{2} \{E[j\omega + \omega_0] + E[\omega - \omega_0]\} \\
 &= \frac{1}{2} [E(\omega + \omega_0) + E(\omega - \omega_0)]
 \end{aligned}$$

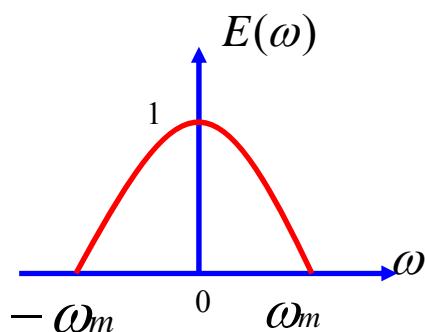
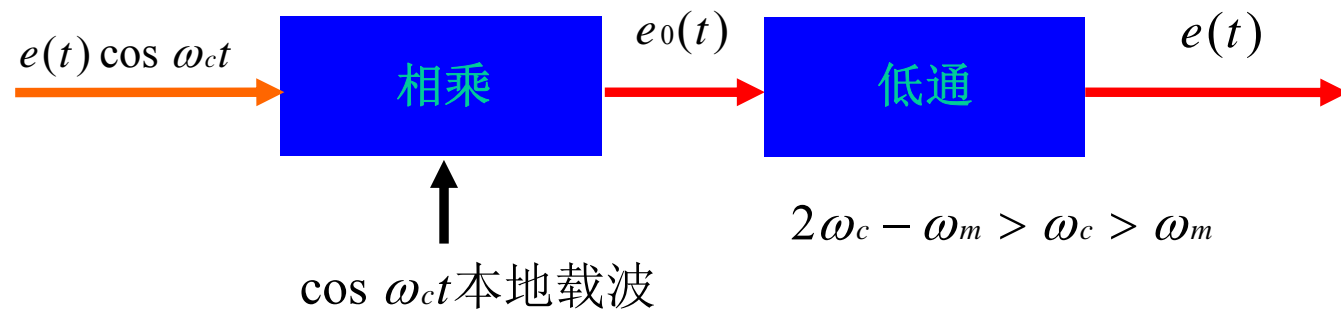
分析例中已调波 $f(t) = e(t) \cos \omega_c t$

振幅随调制信号而变，这种调制称为调幅

调制	{	调幅	}	这些内容在后续课本 中学习如高频电子线 路、通信原理
		调频		
		调相		
		脉冲调制（分两步进行）		



乘法解调



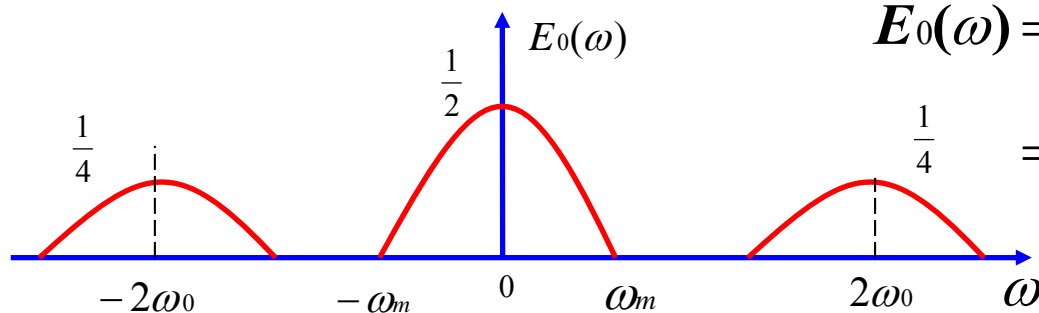
$$e_0(t) = [e(t) \cos \omega_c t] \cos \omega_c t$$

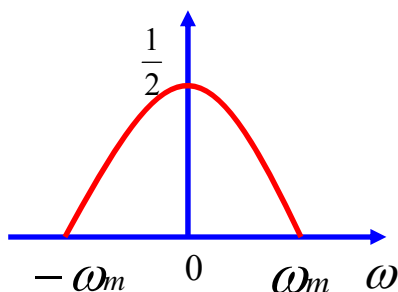
$$= \frac{1}{2} e(t) (1 + \cos 2\omega_c t)$$

$$= \frac{1}{2} e(t) + \frac{1}{2} e(t) \cos 2\omega_c t$$

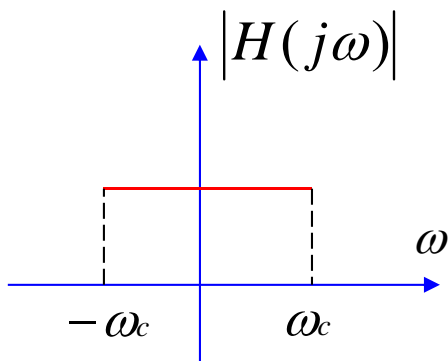
$$E_0(\omega) = F[g_0(t)]$$

$$= \frac{1}{2} E(\omega) + \frac{1}{4} [E(\omega + 2\omega_c) + E(\omega - 2\omega_c)]$$



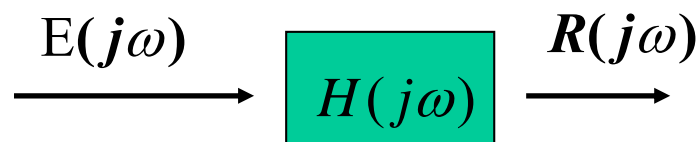


再利用一个理想低通，滤除在频率为 $2\omega_c$ 附近的分量，即可取出 $e(t)$



$$|H(j\omega)| = \begin{cases} k & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

理想低通滤波器



$$\varphi(\omega) = t_0 \omega$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{-j\omega t_0}$$

三、调幅波的频谱分析举例

$$a_0 = A_0 \cos(\omega_c t + \varphi_0) \text{——载波}$$

$$e(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{nm} \cos(\Omega_{nt} + \phi_n) \text{——调制信号}$$

$$a(t) = A(t) \cos(\omega_c t + \varphi_0) \text{——调幅波（已调信号）}$$

$$A(t) = A_0 + ke(t)$$

$$\begin{aligned} a(t) &= [A_0 + ke(t)] \cos(\omega_c t + \varphi_0) \\ &= \left[A_0 + k \sum_{n=1}^{\infty} E_{nm} \cos(\Omega_{nt} + \phi_n) \right] \cos(\omega_c t + \varphi_0) \\ &= A_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \cos(\Omega_{nt} + \phi_n) \right] \cos(\omega_c t + \varphi_0) \end{aligned}$$

$$\text{令 } m_n = \frac{kE_{nm}}{A_0} \text{——调幅系数}$$

1、正弦调制

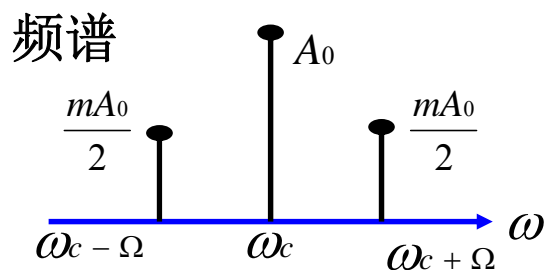
$$\text{设 } e(t) = E_m \cos(\Omega t + \phi), \quad m = \frac{kE_m}{A_0}$$

$$a(t) = A_0 [1 + m \cos(\Omega t + \phi)] \cos(\omega t + \varphi_0)$$

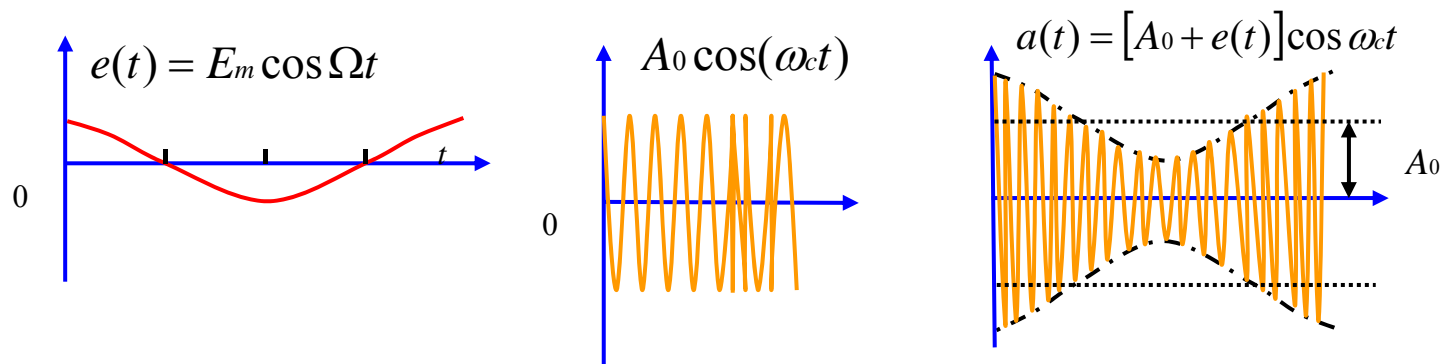
$$= \underbrace{A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}_{\text{载频分量}} + \underbrace{\frac{m}{2} A_0 \cos[(\omega + \Omega)t + \varphi_0 + \phi]}_{\text{上边频分量}} + \underbrace{\frac{m}{2} A_0 \cos[(\omega - \Omega)t + \varphi_0 - \phi]}_{\text{下边频分量}}$$

载频分量 上边频分量 下边频分量

边频分量



调幅波的频宽为调制频率的两倍



这种调制中载波的振幅随信号 $e(t)$ 成比例的改变，称为调幅，简称AM

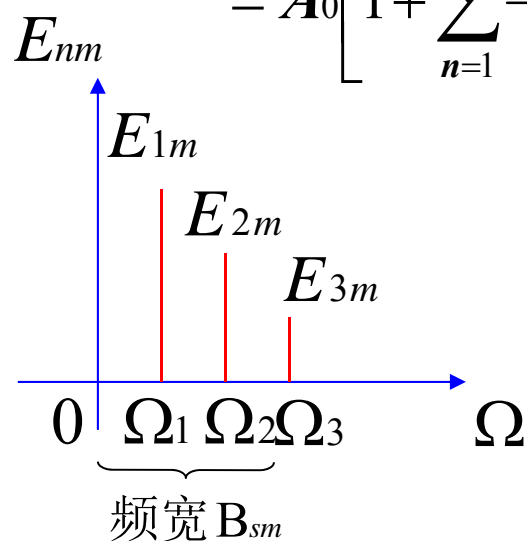
$a(t)$ 中含有载波分量，当 $m \leq 1$ 时，解调不需本地载波，直接用简单的包络检波器（二极管、电阻、电容组成）即可提取包络恢复 $e(t)$ 。接收机简单，成本降低，但代价是使用价格昂贵的发射机。

2、复杂周期信号调制

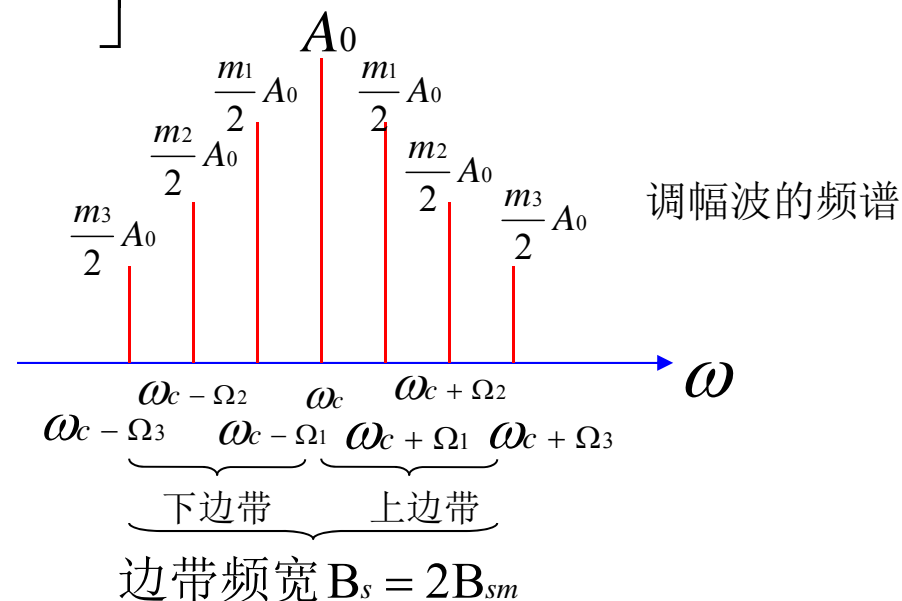
$$a(t) = A_0 \cos(\omega_c t + \varphi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{2} A_0 \cos[(\omega_c + \Omega_n)t + \varphi_0 + \phi_n]$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{2} A_0 \cos[(\omega_c - \Omega_n)t + \varphi_0 - \phi_n]$$

$$= A_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k E_n m}{A_0} \cos(\Omega + \phi_n) \right] \cos(\omega_c t + \varphi_0)$$



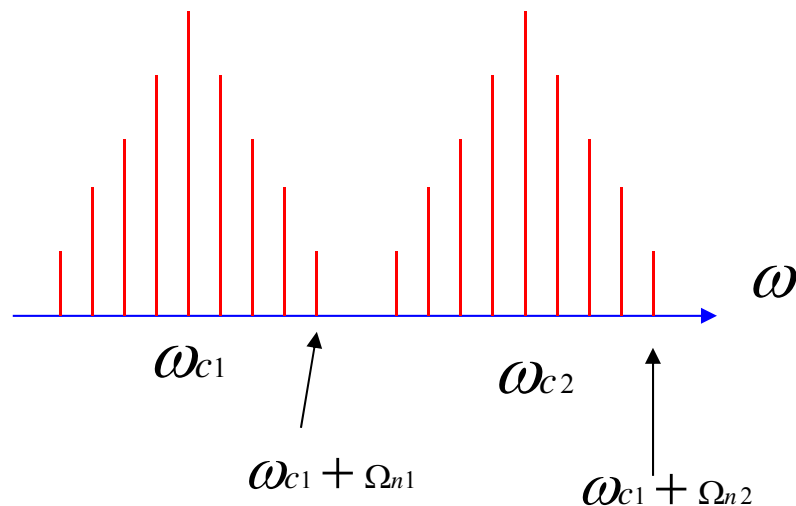
调制信号频谱



分析:1、边带频谱结构与 E_{nm} 相同。

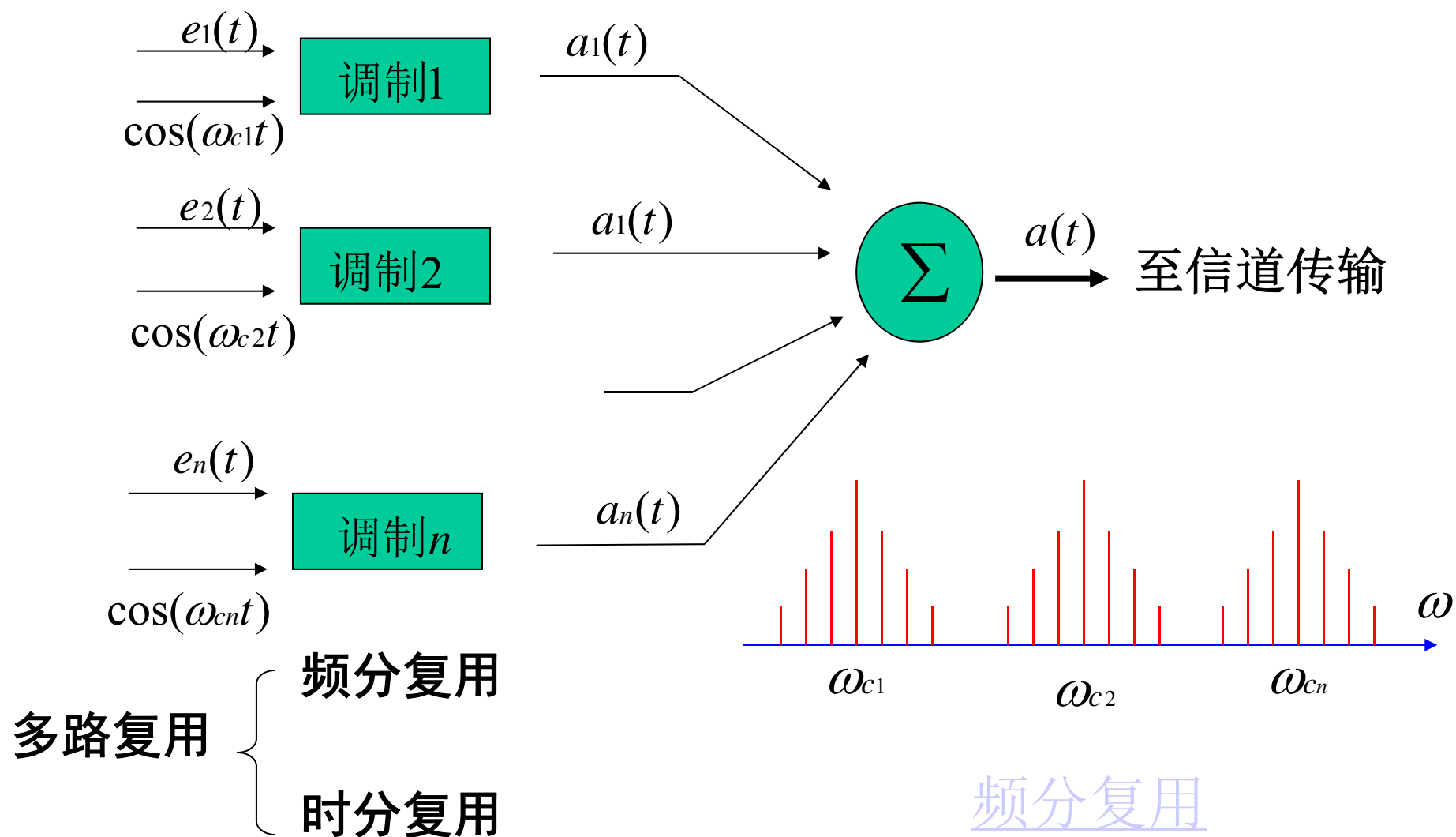
2、信号的频谱被搬移到载频 ω_c 附近。

3、 $\omega_{c2} - \omega_{c1} \geq 2\Omega_n$ (最高调制频率) $\Omega_n = \max(\Omega_{n1}, \Omega_{n2})$



例如：电台广播声音信号
频段50—4500赫
 \therefore 两临近电台的载
频 $\omega_{c2} - \omega_{c1} \geq 9$ 千赫

3、频分复用（多路复用技术之一）



四、解调 demodulation

解调——由已调信号 $a(t)$ 恢复原始信号 $e(t)$ 的过程称为解调。

$a(t) = [A_0 + ke(t)]\cos(\omega_c t + \varphi_0)$ ——振幅调制或调幅（AM）接受机结构简单，成本低（民用）。

但发射机功率大，成本高。

若将载波分量抑制掉而不发送出去，则

可用较小发射功率去传输信号。此时调

波幅表示为：

$a(t) = e(t)\cos(\omega_c t)$ ——抑制载波振幅调制(AM-SC)

还有单边带调制(SSB).残留边带调制(VSB)

七、微分特性

若： $FT[f(t)] = F(\omega)$

则： $FT\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega)$

且： $FT\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n F(\omega)$

微分特性可以将微分方程转化为代数方程

微分方程：

$$r''(t) + 3r'(t) + 2r(t) = e'(t) + e(t)$$

两边同时取傅立叶变换：

$$(j\omega)^2 R(\omega) + 3j\omega R(\omega) + 2R(\omega) = j\omega E(\omega) + E(\omega)$$

八、积分特性

若 $FT[f(t)] = F(\omega)$

如果 $F(0) \neq 0$

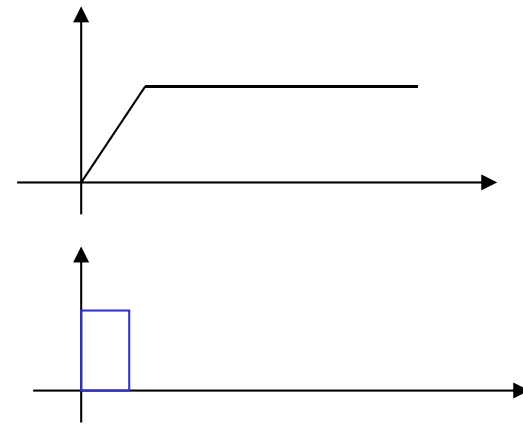
$$\text{则 } FT\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

积分特性的证明

$$\begin{aligned} FT\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t-\tau) d\tau\right] e^{-j\omega t} dt \quad (P_{67}, 2-57) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \pi \delta(\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega \tau} d\tau \end{aligned}$$

$$\text{则 } FT\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$$

$$\text{求 } y(t) = \begin{cases} 0 & (\tau < 0) \\ 1/t_0 & (0 < \tau < t_0) \text{ 的频谱} \\ 0 & (\tau > t_0) \end{cases}$$



视 $y(t)$ 为脉宽为 t_0 , 脉幅为 $1/t_0$ 的矩形脉冲的积分。

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & (\tau < 0) \\ 1/t_0 & (0 < \tau < t_0) \\ 0 & (\tau > t_0) \end{cases} \quad y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

$$F(\omega) = \text{Sa}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{2}} \text{ 且有: } F(0) = 1 \neq 0$$

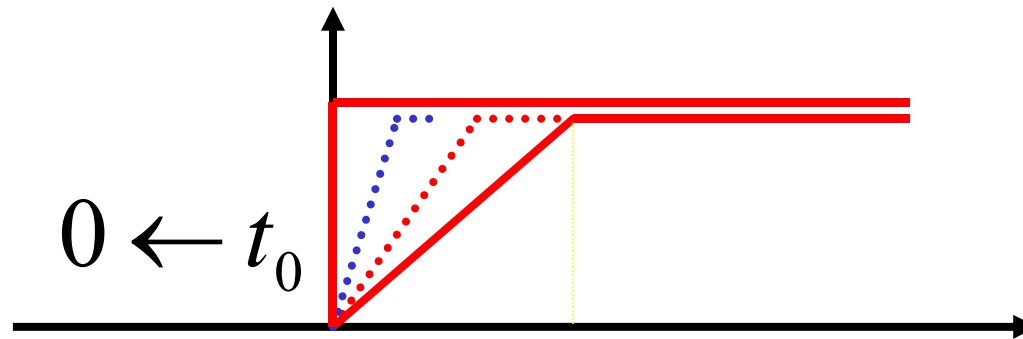
$$Y(\omega) = FT[y(t)] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$$

$$= \frac{1}{j\omega} \text{Sa}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{2}} + \pi \delta(\omega)$$

用FT积分特性求阶跃的FT

$$f(\tau) = \delta(\tau) \quad y(t) = u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$Y(\omega) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[\frac{1}{j\omega} \text{Sa}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{2}} + \pi\delta(\omega) \right]$$



$$Y(\omega) = FT[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

例：如下图所示梯形脉冲，求其频谱。

解：如图示，对 $f(t)$ 两次求导，有：

$$f''(t) = \frac{A}{b-a} [\delta(t+b) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-b)]$$

由于 $\delta(t) \leftrightarrow 1$ ，用延时特性有：

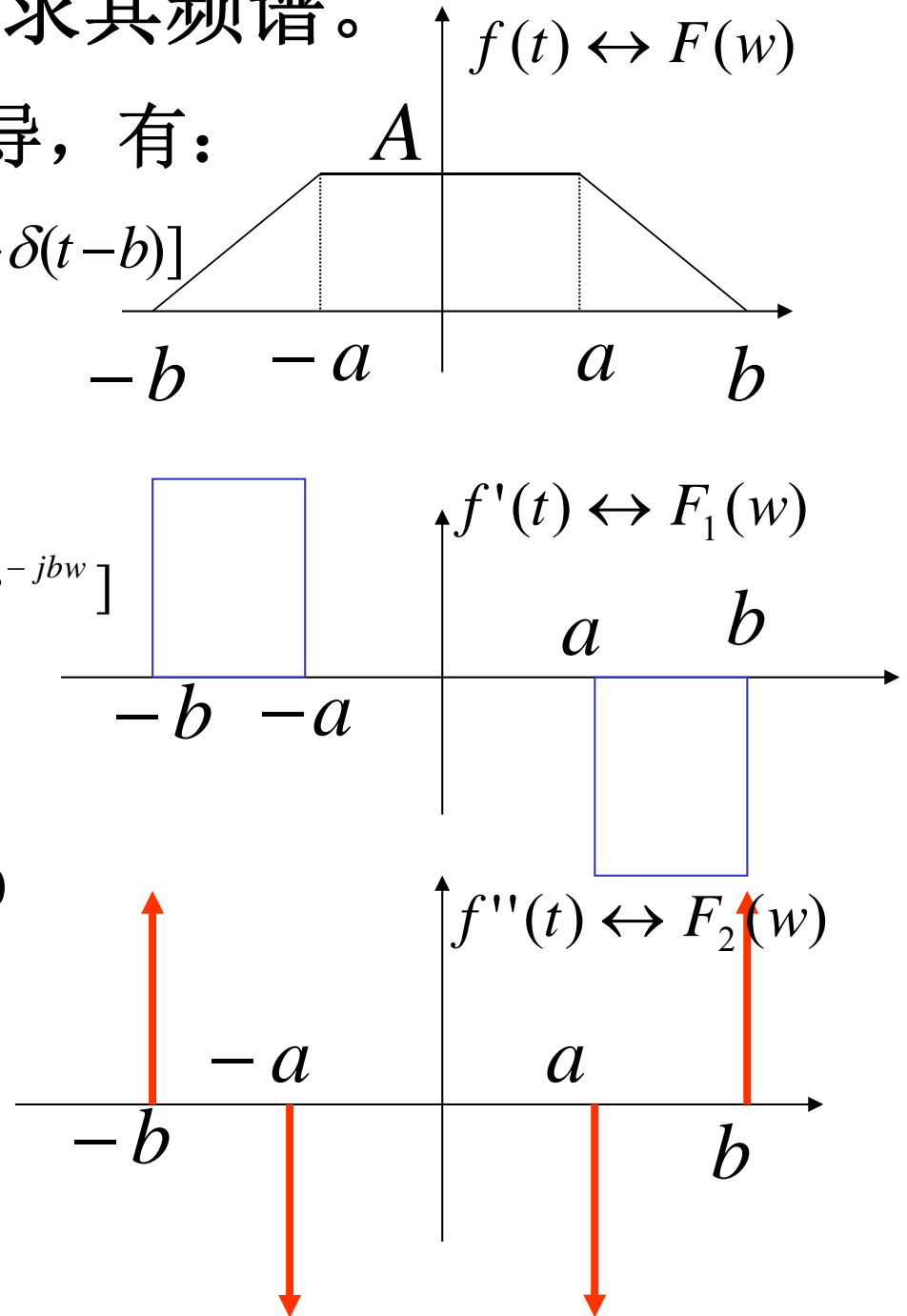
$$\delta(t - t_1) \leftrightarrow e^{-j\omega t_1}$$

$$F_2(\omega) = \frac{A}{b-a} [e^{j\omega b} - (e^{j\omega a} + e^{-j\omega a}) + e^{-j\omega b}]$$

$$= \frac{2A}{b-a} (\cos \omega b - \cos \omega a) \leftrightarrow f''(t)$$

$$F_2(0) = \frac{2A}{b-a} (\cos \omega b - \cos \omega a) \Big|_{\omega=0} = 0$$

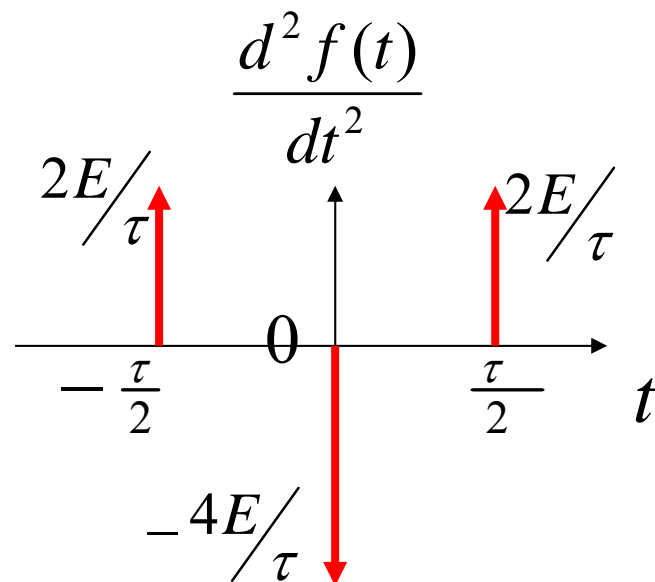
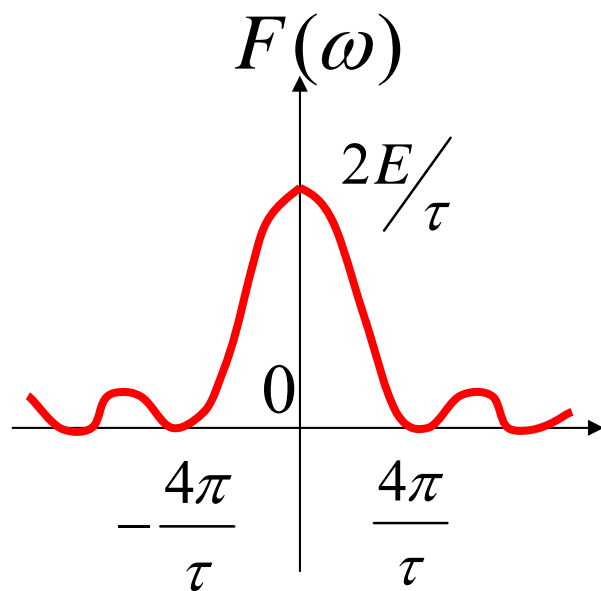
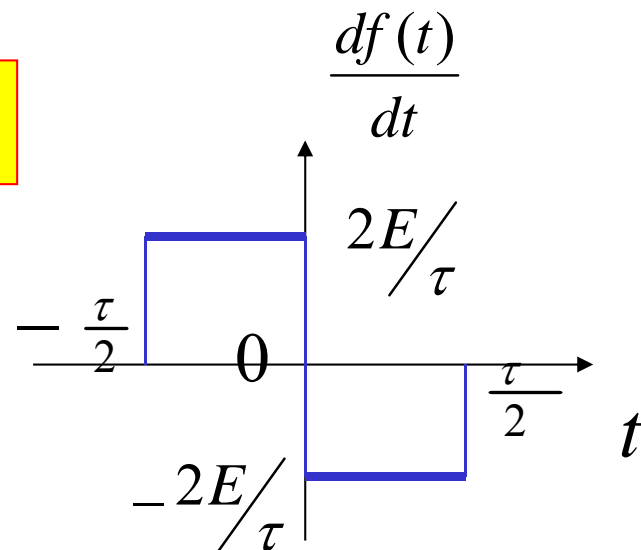
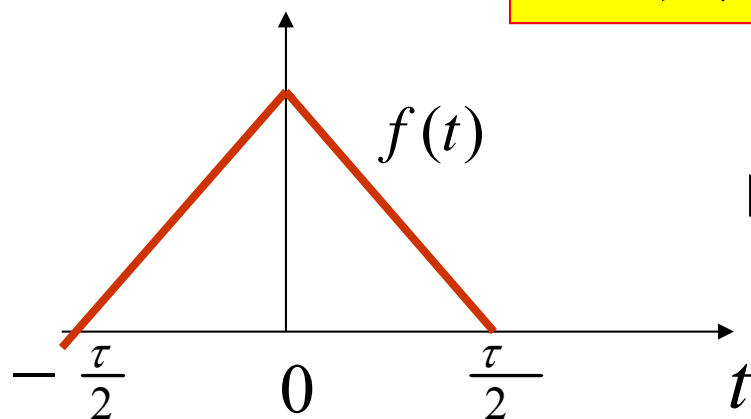
$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{F_2(\omega)}{j\omega} + \pi F_2(0) \delta(\omega) \\ &= \frac{2A}{b-a} \frac{(\cos \omega b - \cos \omega a)}{j\omega} \end{aligned}$$



$$F_1(0) = \frac{2A}{b-a} \frac{(\cos bw - \cos aw)}{jw} \bigg|_{w=0} = 0$$

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{F_1(w)}{jw} + \pi F_1(0) \delta(w) \\ &= \frac{2A}{b-a} \frac{(\cos bw - \cos aw)}{(jw)^2} \\ &= \frac{2A}{b-a} \left[\frac{\cos aw - \cos bw}{w^2} \right] \end{aligned}$$

三角脉冲



三角脉冲 $f(t) = \begin{cases} E(1 - \frac{2}{\tau}|t|) & (|t| < \frac{\tau}{2}) \\ 0 & (|t| > \frac{\tau}{2}) \end{cases}$ 的频谱

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{2E}{\tau} \left[\delta(t + \frac{\tau}{2}) + \delta(t - \frac{\tau}{2}) - 2\delta(t) \right]$$

$$F_2(\omega) = \frac{2E}{\tau} (e^{j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - 2) = \frac{2E}{\tau} (e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau})^2$$

$$F_1(\omega) = \frac{F_2(\omega)}{j\omega} + \pi F_2(0)\delta(\omega) = \frac{2E}{\tau} \frac{(e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau})^2}{j\omega}$$

$$F(\omega) = \frac{F_1(\omega)}{j\omega} + \pi F_1(0)\delta(\omega) = \frac{2E}{\tau} \frac{(e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau})^2}{j\omega \cdot j\omega} = \frac{E\tau}{2} Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

§ 3.8 时域 卷积定理

- 若

$$FT[f_1(t)] = F_1(\omega)$$

$$FT[f_2(t)] = F_2(\omega)$$

- 则

$$FT[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

$$\text{证明: } f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx$$

$$\therefore FT[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x) e^{-j\omega t} dt \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-j\omega(u+x)} du \right] dx$$

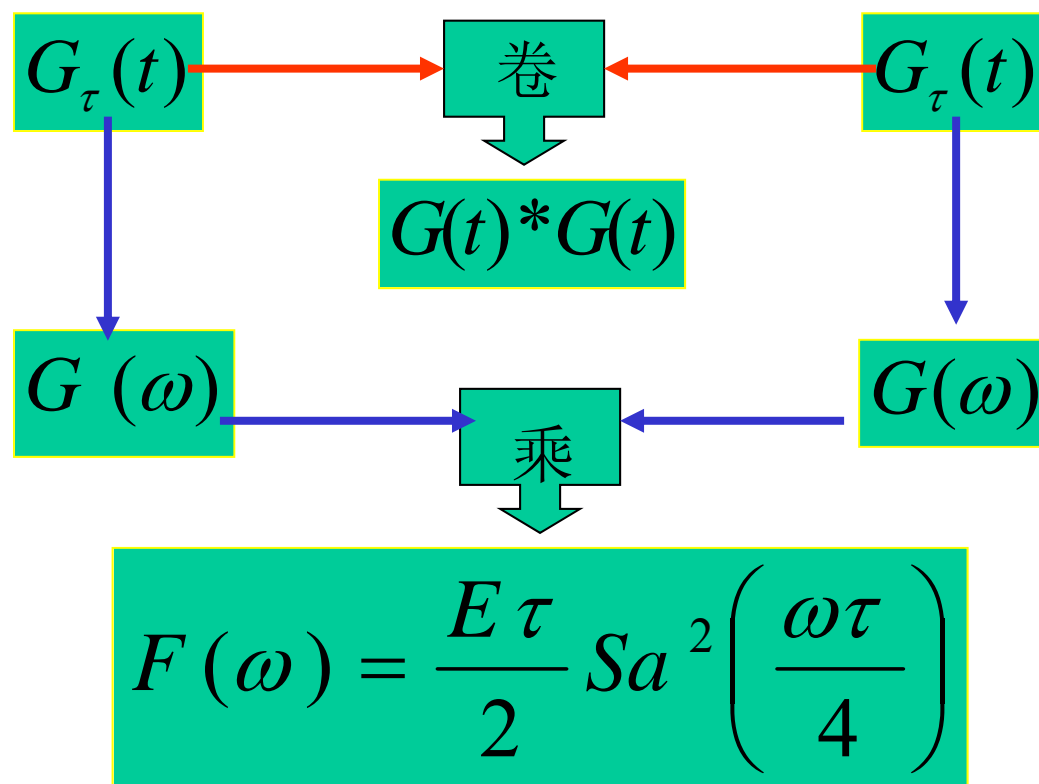
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) F_2(\omega) e^{-j\omega x} dx$$

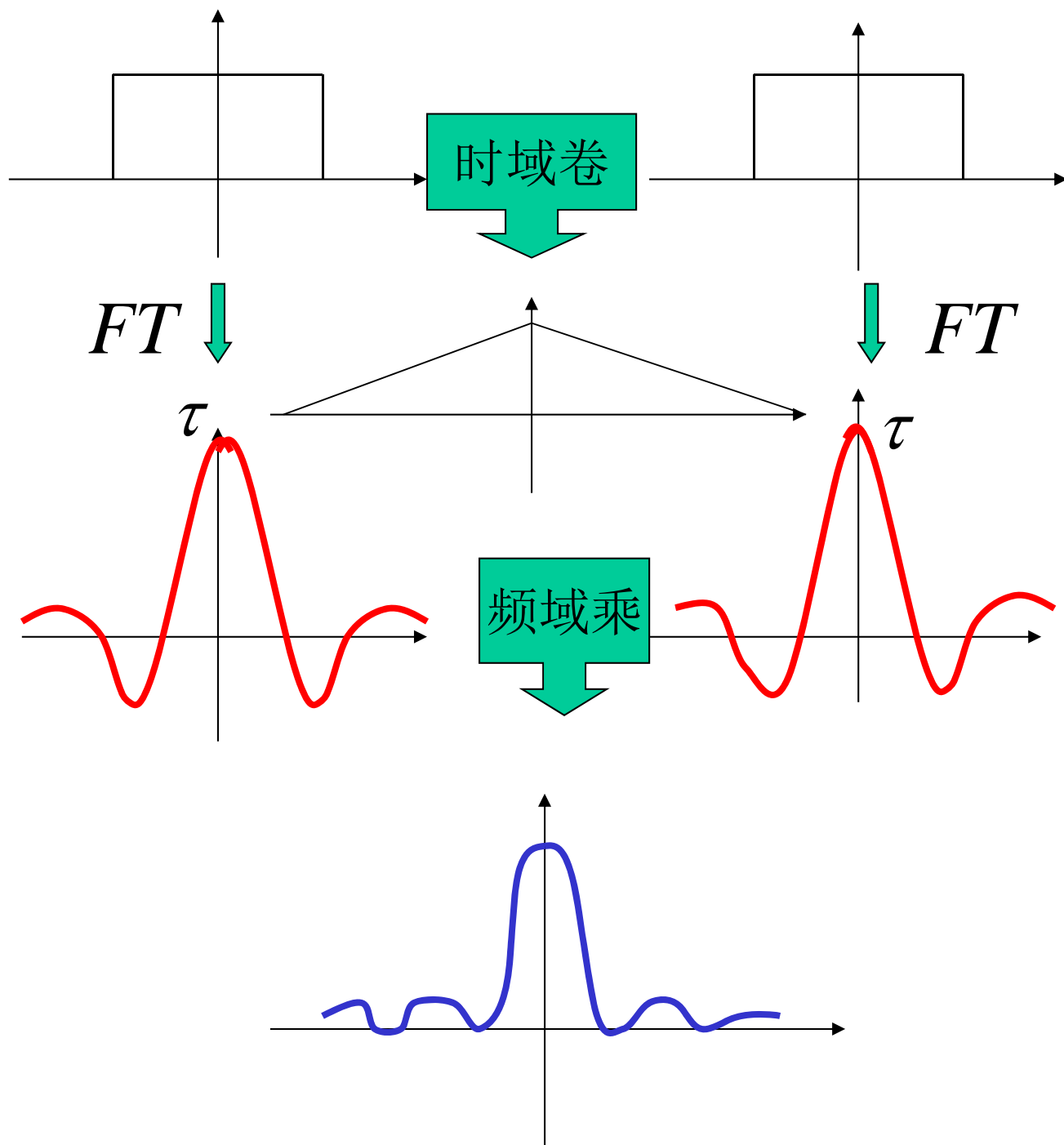
$$= F_2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-j\omega x} dx$$

$$= F_1(\omega) F_2(\omega)$$

例：求三角脉冲的频谱

三角脉冲可看成两个同样矩形脉冲的卷积





§ 3.8 频域 卷积定理

- 若

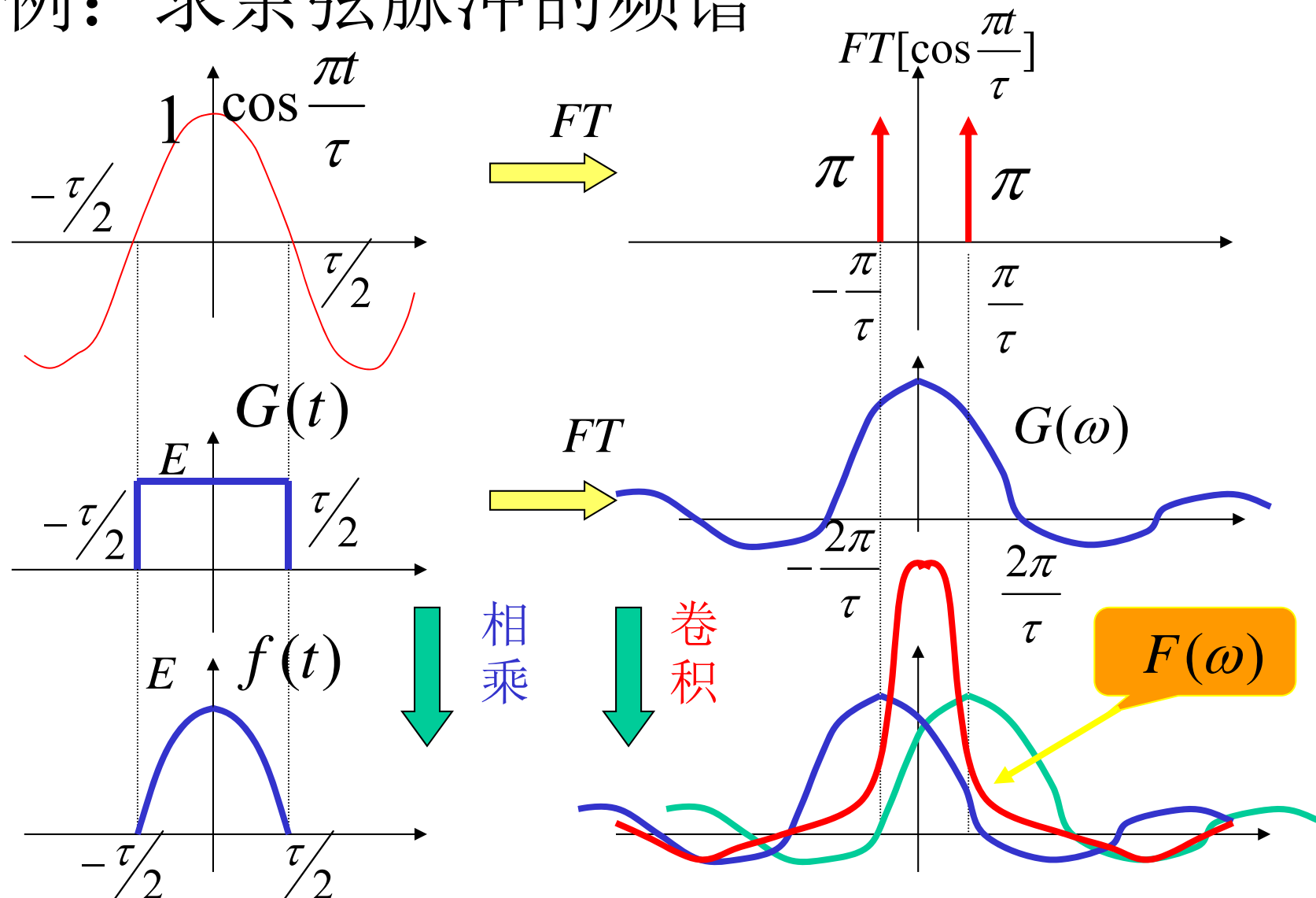
$$FT[f_1(t)] = F_1(\omega)$$

$$FT[f_2(t)] = F_2(\omega)$$

- 则

$$FT[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

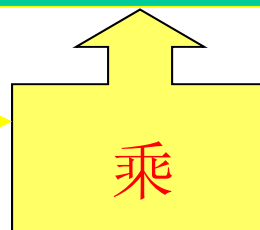
例：求余弦脉冲的频谱



$$f(t) = G(t) \cos \frac{\pi t}{\tau}$$

$$G(t)$$

$$\cos \frac{\pi t}{\tau}$$



FT

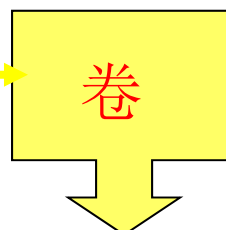


$$G(\omega) = E \tau \text{Sa} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)$$

FT

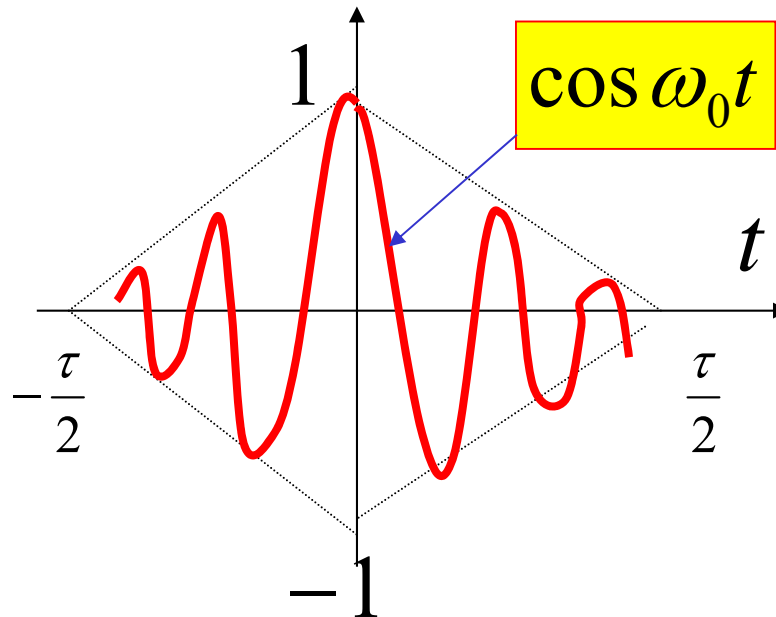


$$\pi \delta \left(\omega + \frac{\pi}{\tau} \right) + \pi \delta \left(\omega - \frac{\pi}{\tau} \right)$$



$$F(\omega) = \frac{2 E \tau \cos \left(\frac{\omega \tau}{2} \right)}{\pi \left[1 - \left(\frac{\omega \tau}{\pi} \right)^2 \right]}$$

求图中所示的三角调幅波信号的频谱



$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

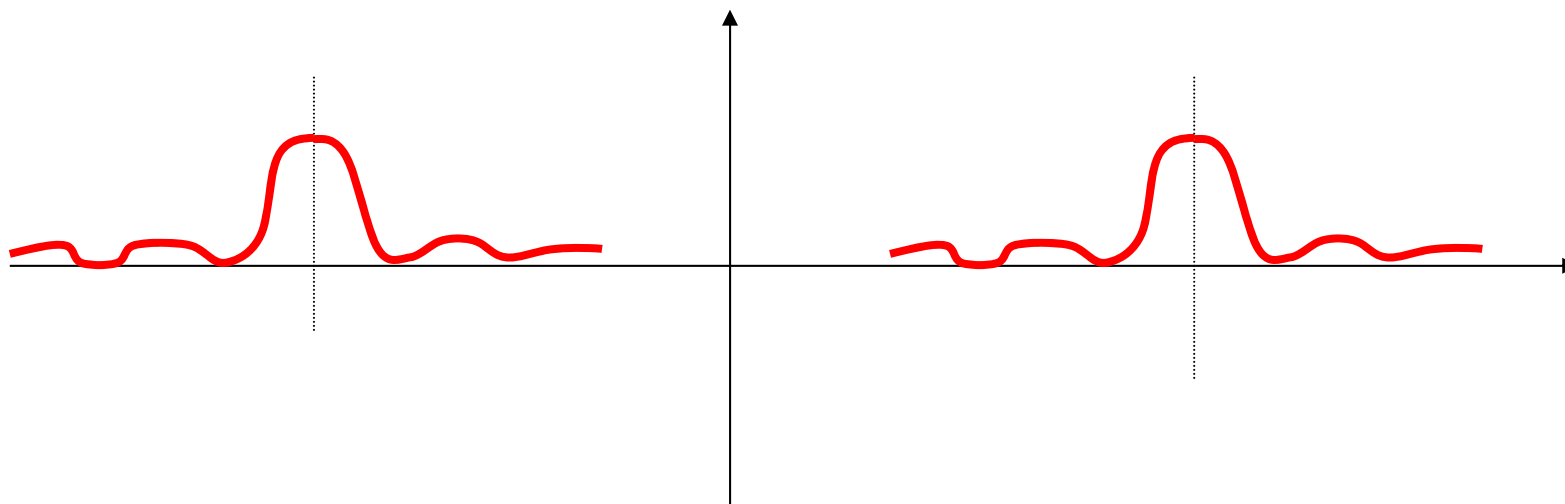
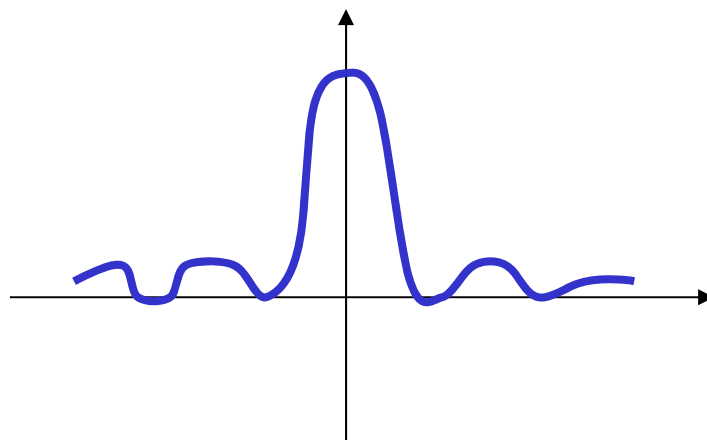
$$f_0(t) = 1 - \frac{2|t|}{\tau}$$

三角波

$$F(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$E = 1$$

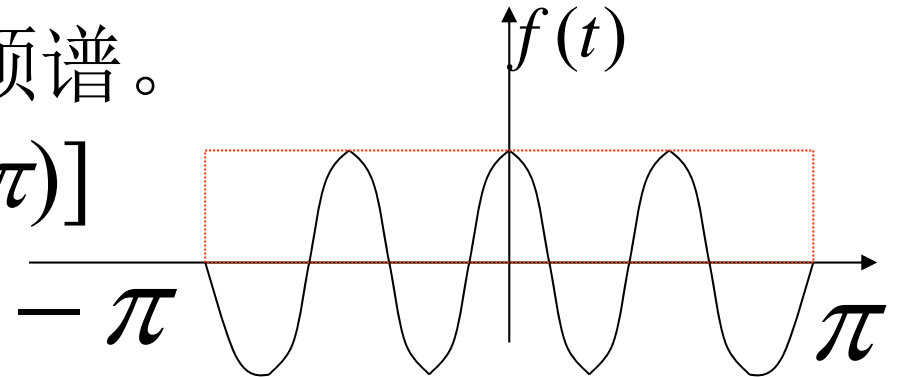
$$F(\omega) = \frac{E\tau}{4} \left\{ \text{Sa}^2\left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{4}\right) + \text{Sa}^2\left(\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{4}\right) \right\}$$



例：用卷积积分求解 $f(t)$ 的频谱。

$$f(t) = \cos 5t [u(t + \pi) - u(t - \pi)]$$

解： $f(t) = G_{2\pi}(t) \cos 5t$



$$F_1(\omega) = FT[G_{2\pi}(t)] = 2\pi Sa(\pi\omega)$$

$$F_2(\omega) = FT[\cos 5t] = \pi[\delta(\omega + 5) + \delta(\omega - 5)]$$

$$F(\omega) = FT[f(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} 2\pi Sa(\pi\omega) * \pi[\delta(\omega + 5) + \delta(\omega - 5)]$$

$$= \pi \{ Sa[\pi(\omega + 5)] + Sa[\pi(\omega - 5)] \}$$

§ 3.9 周期信号的傅立叶变换

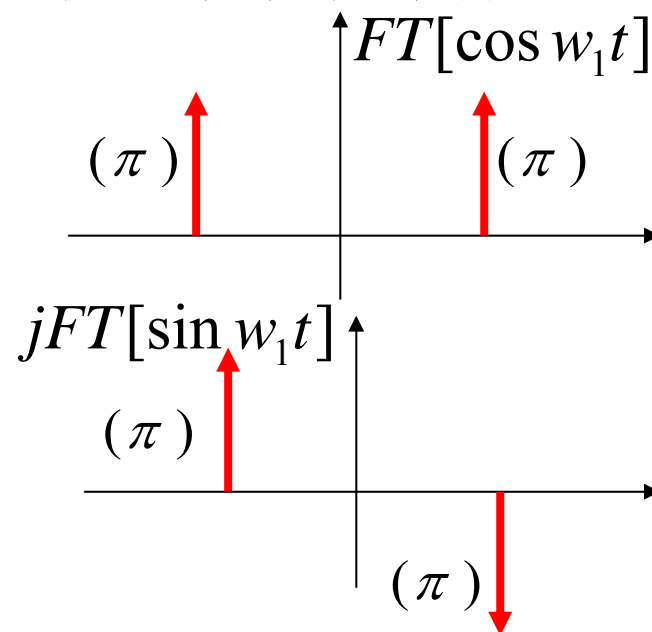
目的：使周期信号与非周期信号的分析方法统一。

周期信号不满足绝对可积条件，但引入冲激表示频谱的条件下，其傅立叶变换存在。

一：正、余弦信号的傅立叶变换

由欧拉公式：

$$\begin{cases} \cos w_1 t = \frac{1}{2}(e^{jw_1 t} + e^{-jw_1 t}) \\ j \sin w_1 t = \frac{1}{2}(e^{jw_1 t} - e^{-jw_1 t}) \end{cases}$$



$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(w)$$

由移频特性： $1 \cdot e^{jw_1 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(w - w_1)$; $1 \cdot e^{-jw_1 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(w + w_1)$

$$\cos w_1 t \leftrightarrow \pi[\delta(w + w_1) + \delta(w - w_1)]$$

$$\sin w_1 t \leftrightarrow j\pi[\delta(w + w_1) - \delta(w - w_1)]$$

§ 3.9 周期信号的傅立叶变换

二：一般周期信号的傅立叶变换

A：设周期信号的周期为 T_1 ,角频率 ω_1 ($\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$), $f(t)$ 展开

成傅立叶级数形式则： $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$

两边取傅立叶变换，则：

$$FT[f(t)] = FT\left[\sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}\right]$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} FT(F_n e^{jn\omega_1 t}) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$\therefore F(\omega) = FT[f(t)] = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$\text{其中： } F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

§ 3.9 周期信号的傅立叶变换

B:周期性脉冲与单脉冲的傅立叶变换的关系

周期信号傅立叶级数: $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$

其中: $F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (1)$

若从 $f(t)$ 中取一个周期, 记为 $f_0(t)$, 记其傅立叶

变换为 $F_0(\omega)$, 则: $F_0(\omega) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2)$

对比(1),(2)式, 显然有:

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$$

§ 3.9 周期信号的傅立叶变换

例1：若单位冲激函数的间隔为 T ，用 $\delta_T(t)$ 表示单位冲激序列，即： $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 求其傅立叶级数与傅立叶变换。

解： $\delta_T(t)$ 为周期函数，展开成傅立叶级数可写为：

$$\delta_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jnw_1 t} \quad ; w_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \delta_T(t) e^{-jnw_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \delta(t) e^{-jnw_1 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\therefore \delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{jnw_1 t}$$

$$F(w) = FT[\delta_T(t)] = 2\pi \left[\sum_{-\infty}^{\infty} F_n \delta(w - nw_1) \right] = w_1 \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(w - nw_1)$$

$$* F_n \text{ 另解: } \frac{1}{T} F_0(w) \Big|_{w=nw_1} = \frac{1}{T} \times 1 = \frac{1}{T}$$

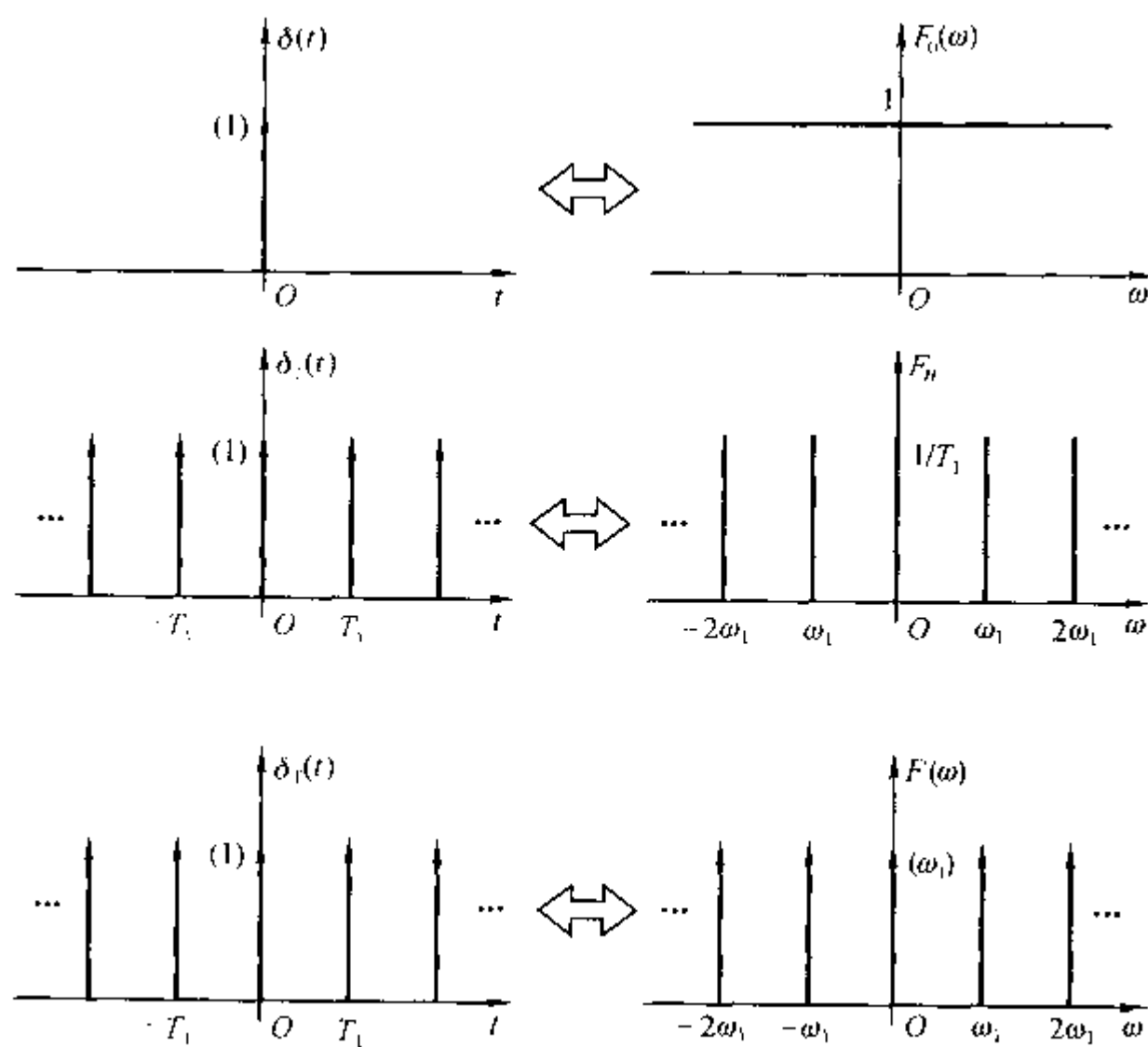


图 3-46 周期冲激序列的傅里叶级数系数与傅里叶变换

§ 3.9 周期信号的傅立叶变换

例2、求下图矩形脉冲的傅立叶变换与傅立叶级数。

解：如图取 $f_0(t)$, 则：

$$f_0'(t) = [\delta(t + \tau/2) - \delta(t - \tau/2)]E$$

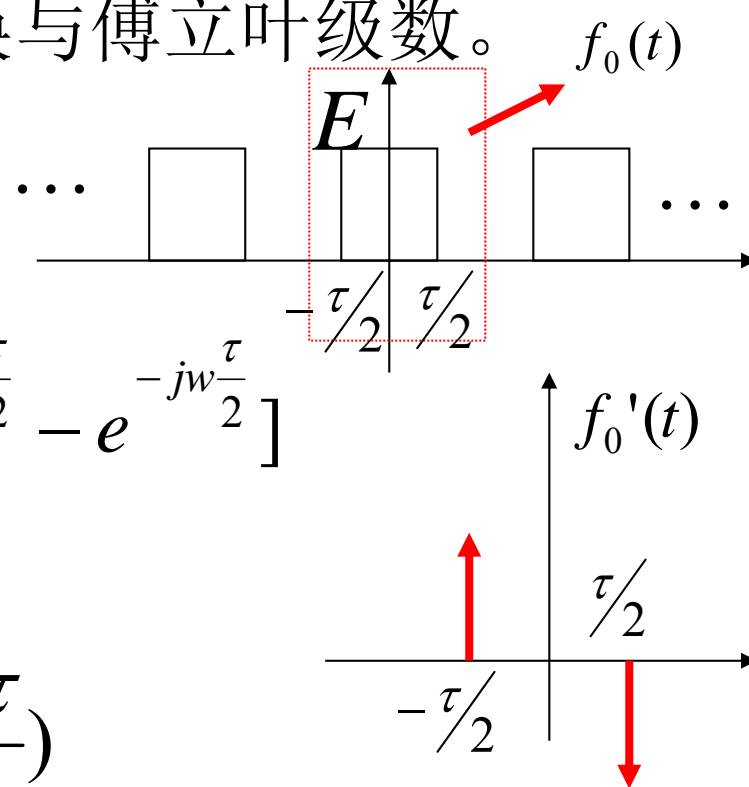
$$\therefore f_0(t) \leftrightarrow F_1(\omega) = j\omega F_0(\omega) = E[e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}]$$

$$\therefore F_0(\omega) = E\tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$\therefore F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})$$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) = E\tau\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2}) \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2}) e^{jn\omega_1 t}$$



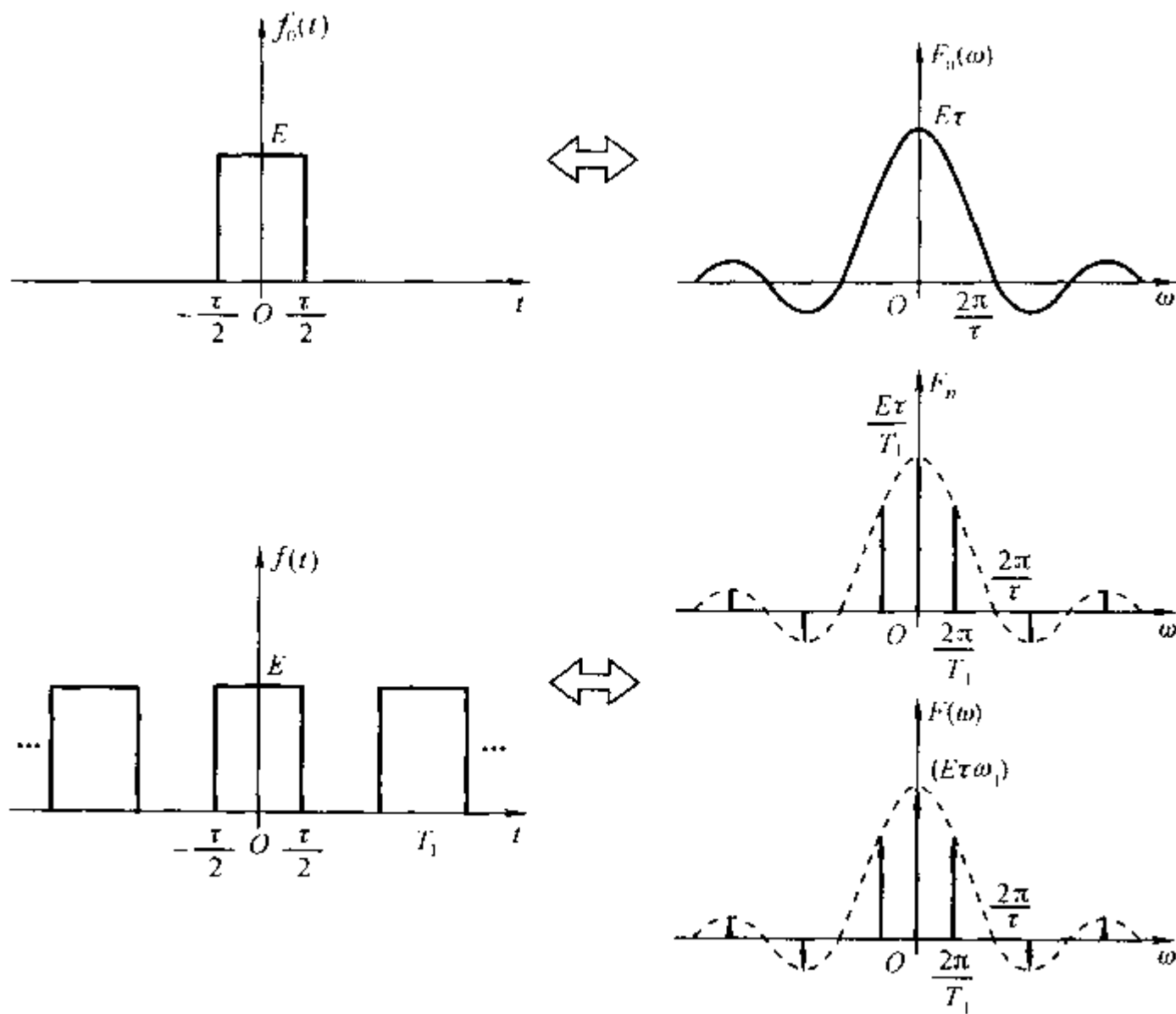
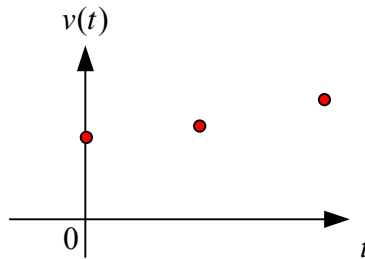
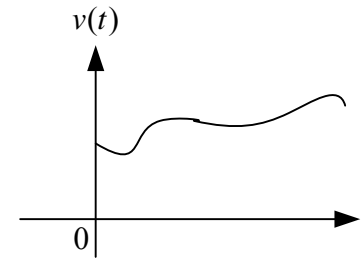
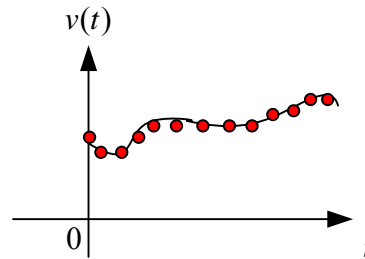
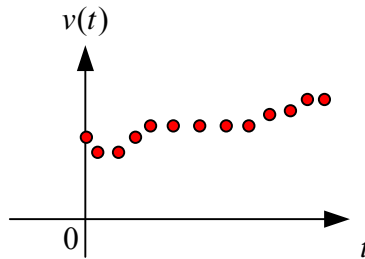


图 3-47 周期矩形脉冲信号的傅里叶级数系数与傅里叶变换

3.10 时域函数抽样

一、引言

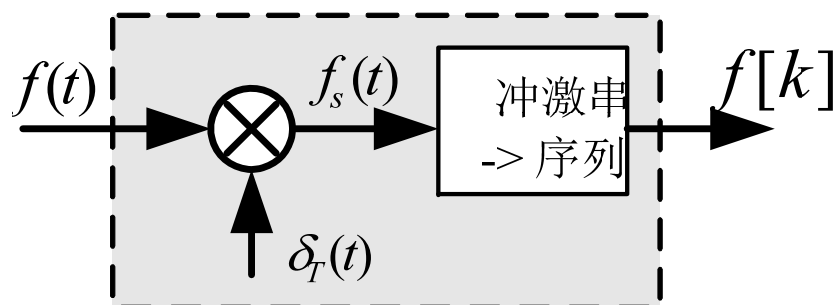
- 1、连续信号数字化需求
- 2、运动系统的启迪



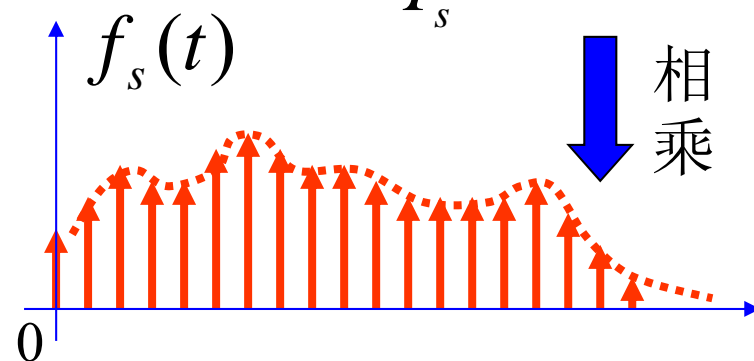
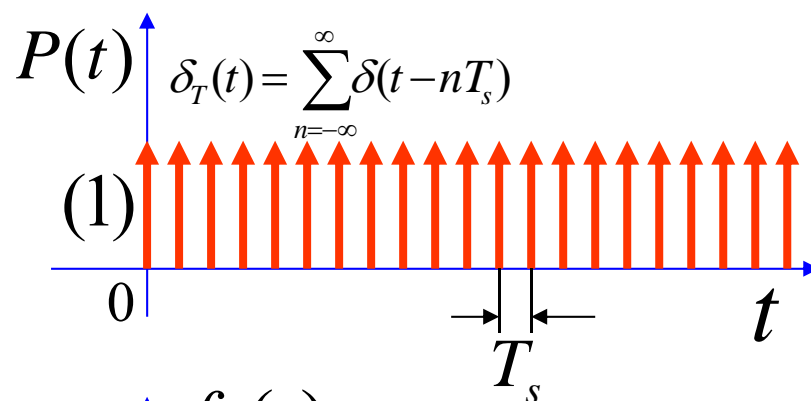
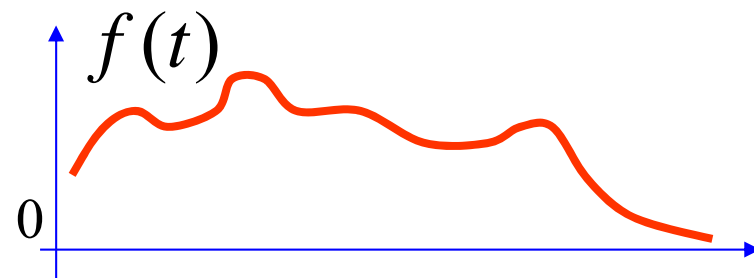
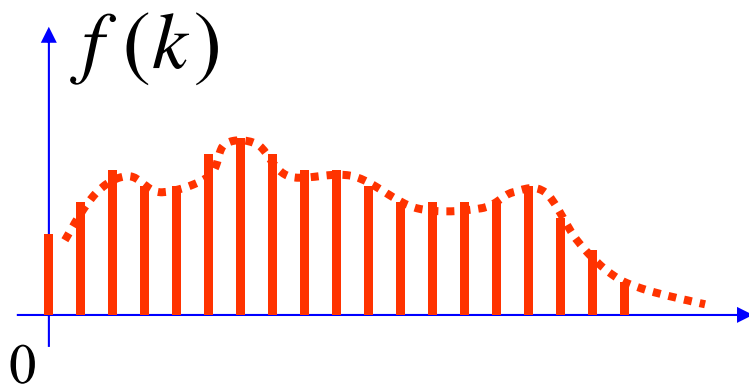
时间间距过大，不能得到速度曲线

二、时域理想抽样

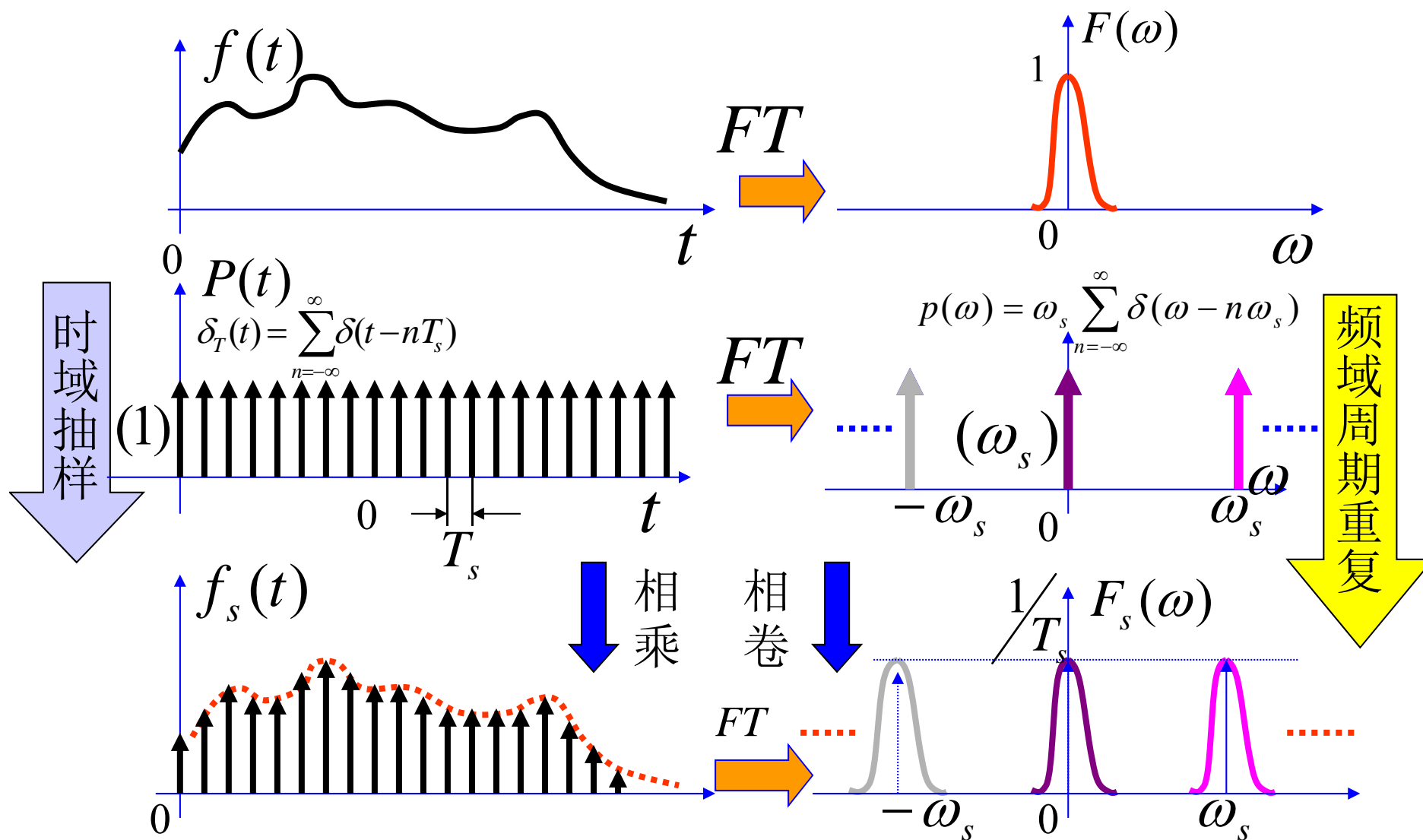
1、时域理想取样原理

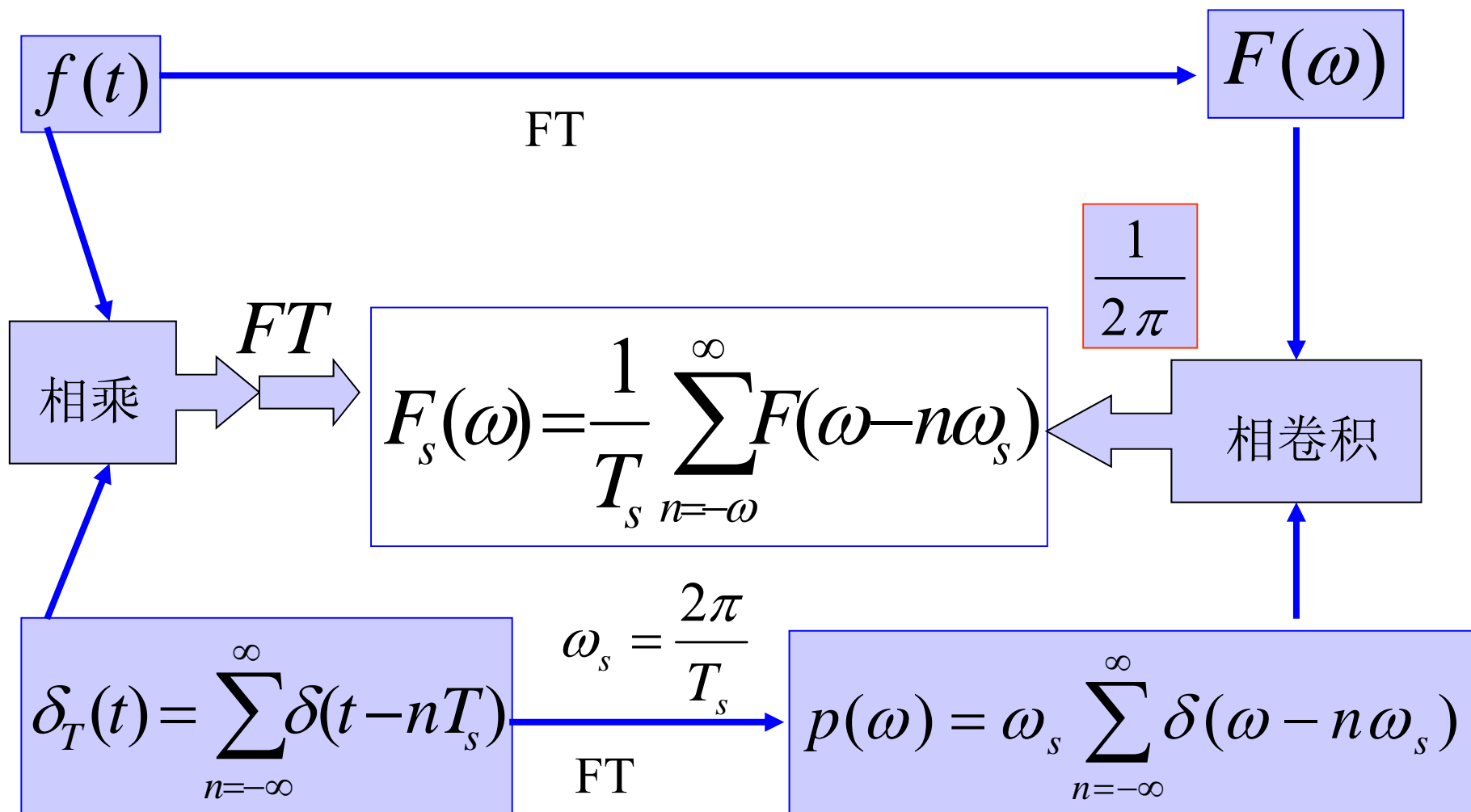


抽样模型



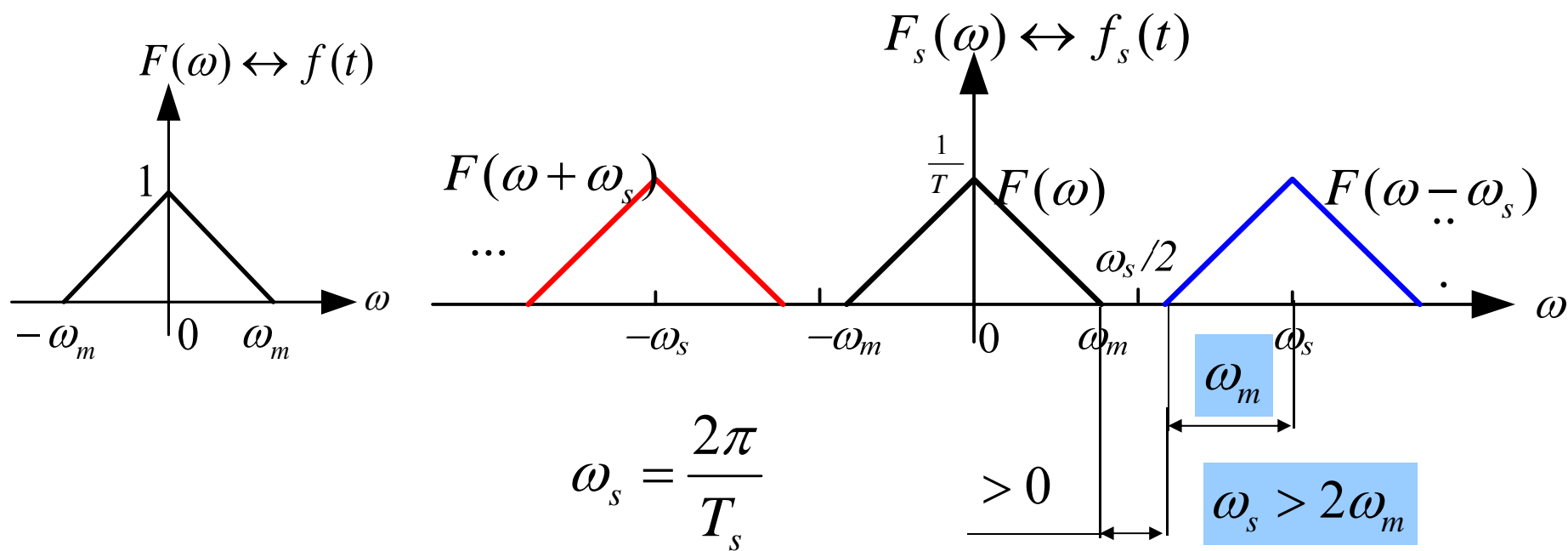
2、时域理想取样的傅立叶分析





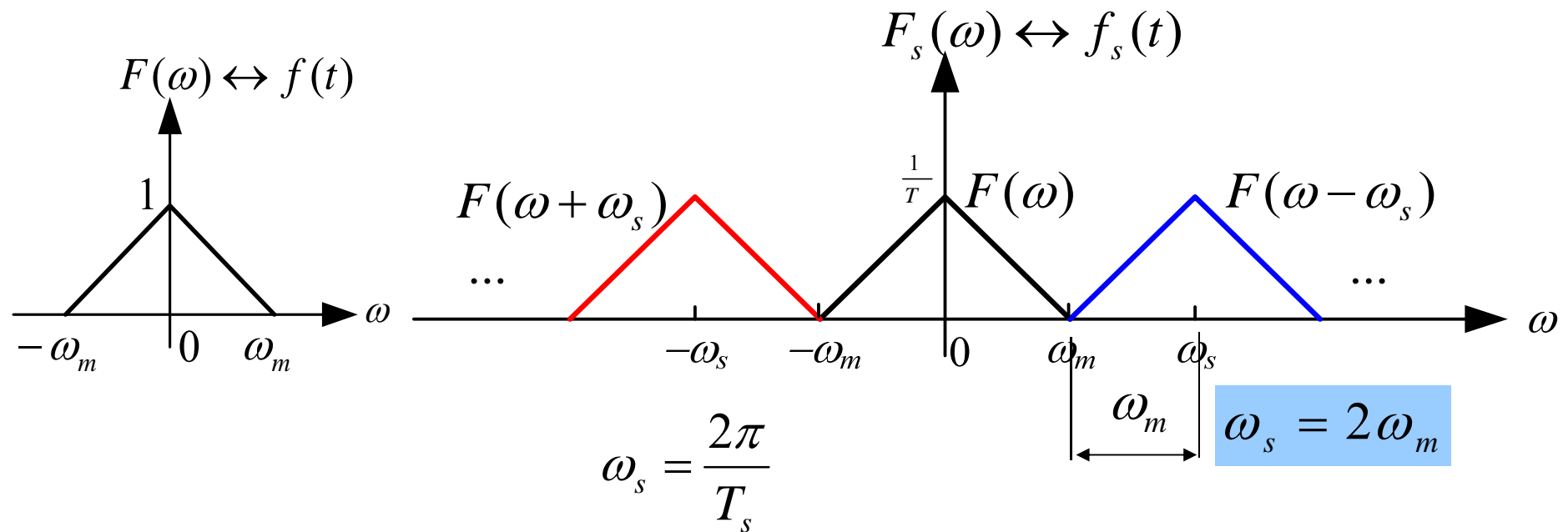
抽样信号的频谱 $F_s(\omega)$ = 连续信号 $f(t)$ 频谱 $F(\omega)$ 的周期化，
周期为抽样角频率 ω_s ，幅度除以抽样间隔 T_s

3、抽样信号 $f_s(t)$ 频谱与抽样间隔 T_s 的关系 (1)



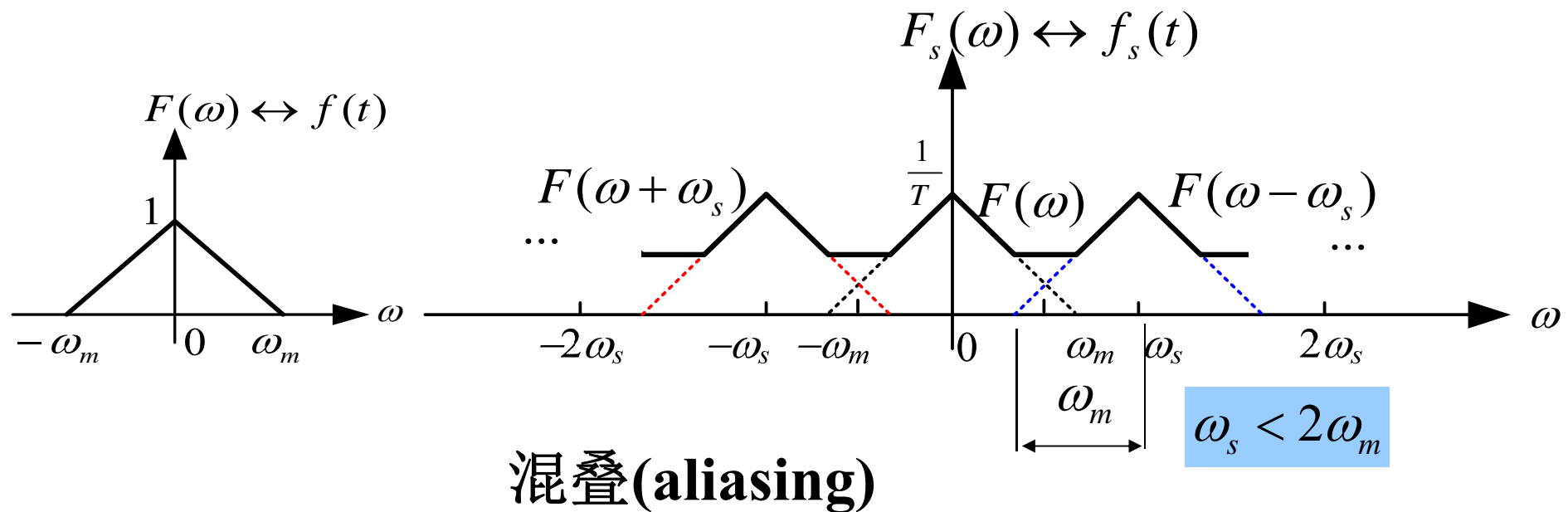
$\omega_s > 2\omega_m$, 即 $T_s < \frac{2\pi}{2\omega_m}$ 时, $F_s(\omega)$ 包含 $F(\omega)$ 所有信息

3、抽样信号 $f_s(t)$ 频谱与抽样间隔 T_s 的关系 (2)



$\omega_s > 2\omega_m$, 即 $T_s = \frac{2\pi}{2\omega_m}$ 时, $F_s(\omega)$ 包含 $F(\omega)$ 所有信息

3、抽样信号 $f_s(t)$ 频谱与抽样间隔 T_s 的关系 (3)



$\omega_s > 2\omega_m$, 即 $T_s > \frac{2\pi}{2\omega_m}$ 时, $F_s(\omega)$ 不包含 $F(\omega)$ 所有信息

三、时域抽样定理（重点）

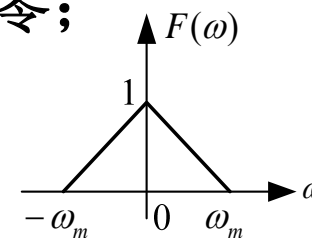
1、时域抽样定理的表述

若带限信号 $f(t)$ 的最高角频率为 ω_m ，则信号 $f(t)$ 可以用等间隔的抽样值唯一地表示。而抽样间隔 T 需不大于 $1/2f_m$ ，或最低抽样频率 f_s 不小于 $2f_m$ 。

若从抽样信号 $f_s(t)$ 中恢复原信号 $f(t)$ ，需满足两个条件：

(1) $f(t)$ 是带限信号，即其频谱函数在 $|\omega| > \omega_m$ 各处为零；

(2) 抽样间隔 T 需满足 $T \leq \pi / \omega_m = 1 / (2f_m)$ ，



或抽样频率 f_s 需满足 $f_s \geq 2f_m$ （或 $\omega_s \geq 2\omega_m$ ）。

$f_s = 2f_m$ 为最小取样频率，称为Nyquist Rate.

例1 人的语音频率分布在**300Hz-3400Hz**之间，那么对人的语音进行采样时，最低采样频率应取多大？

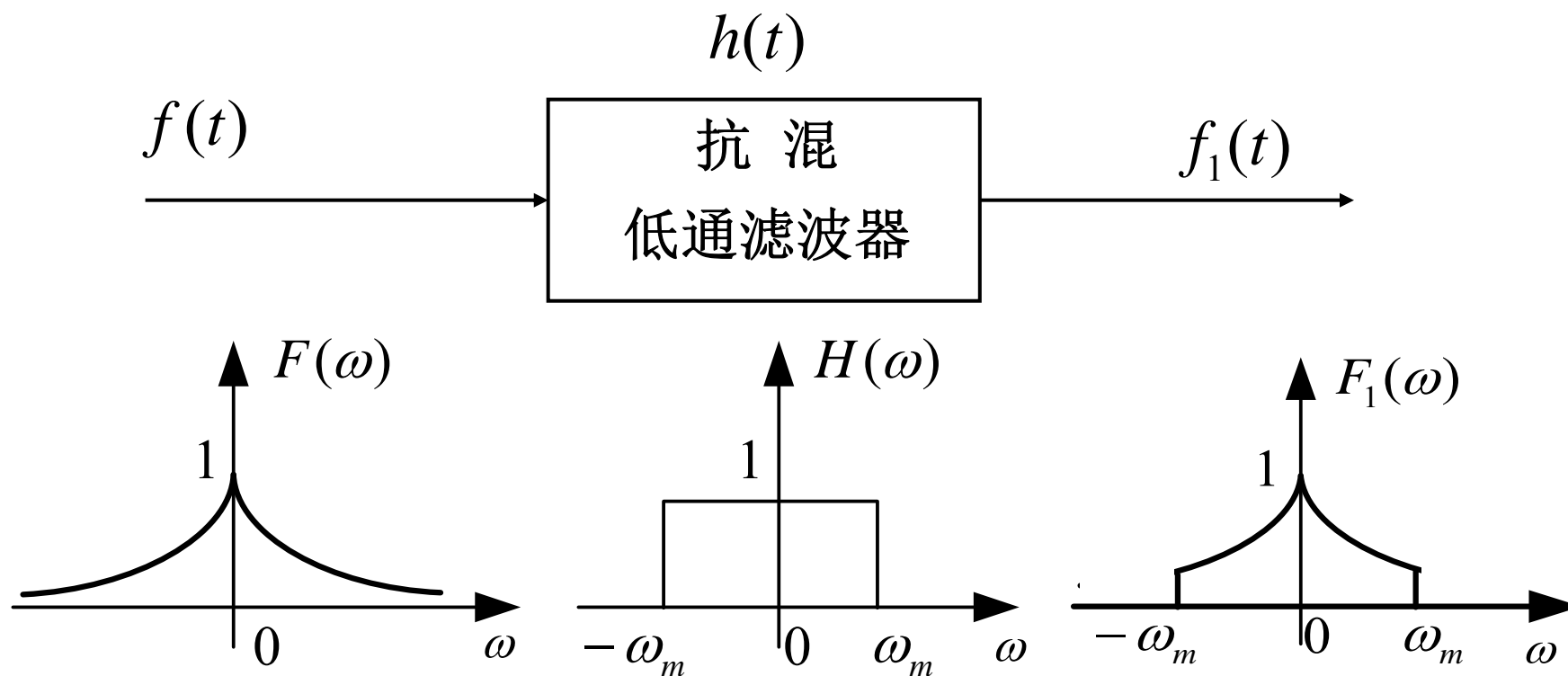
解：由题意可知人的语音最高频率 $f_m = 3400\text{Hz}$

由抽样定理有，最低采样频率应为

$$2f_m = 2 \times 3400 = 6800\text{Hz}$$

2、抽样定理的工程应用（1）

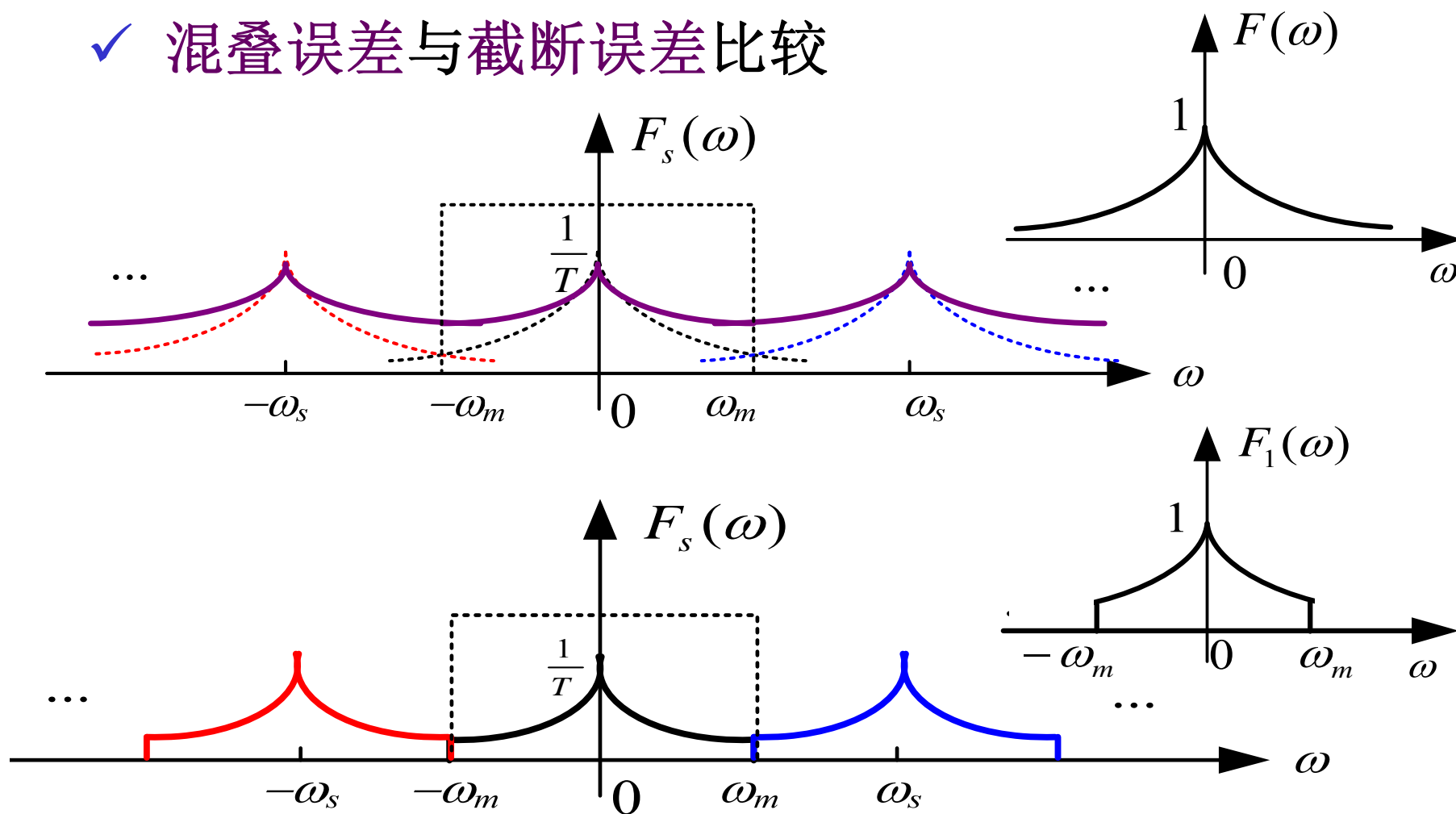
许多实际工程信号**不满足带限条件**

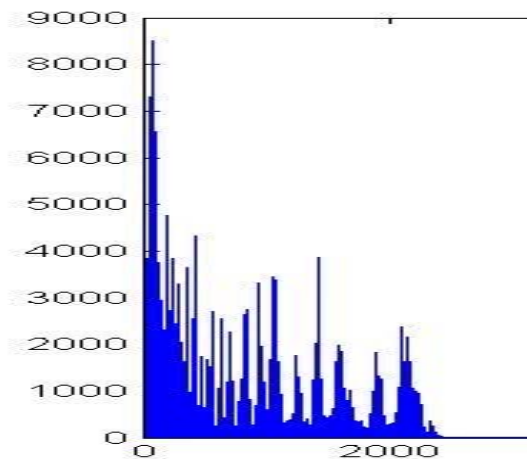


将振幅较小的高频分量截断

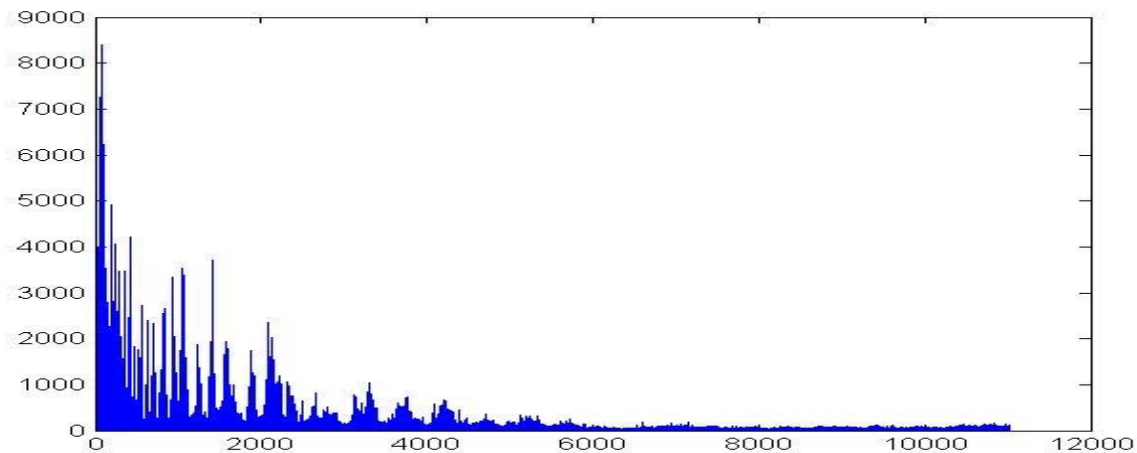
2、抽样定理的工程应用（2）

✓ 混叠误差与截断误差比较





➤ 原信号x



➤ 未抗混叠滤波

WAV格式,
fs=44100Hz
大小1.12M

fs=4410Hz

大小230K



➤ 原信号x抗混叠滤波, fs=2205Hz



fs=4410Hz

230K

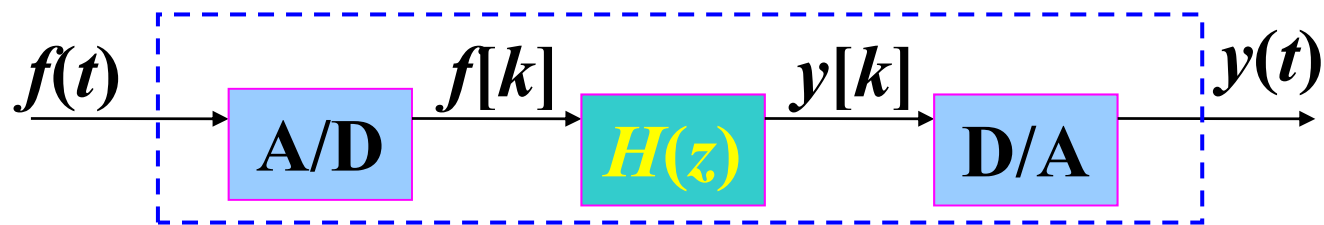
➤ 1.12M

2、抽样定理的工程应用（3）

思考题

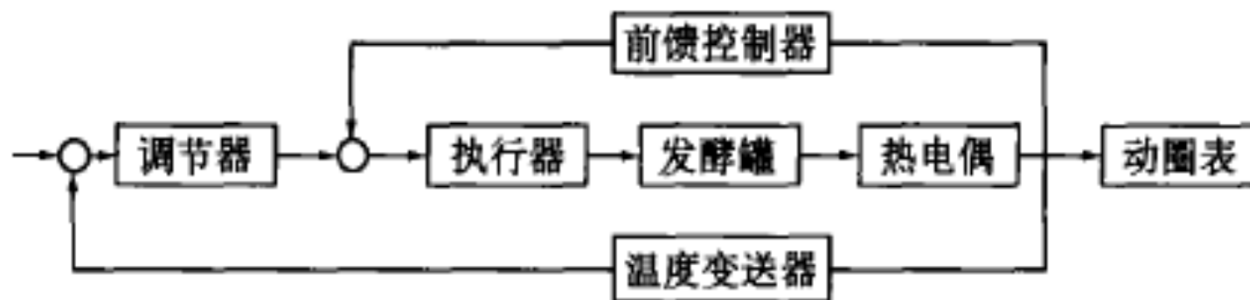
- (1) 根据时域抽样定理，对连续时间信号进行抽样时，只需抽样速率 $f_s \geq 2f_m$ 。在工程应用中，抽样速率常设为 $f_s \geq (3\sim 5)f_m$ ，为什么？
- (2) 若连续时间信号 $f(t)$ 的最高频率 f_m 未知，如何确定抽样间隔 T_s ？

3、抽样定理的实际应用举例

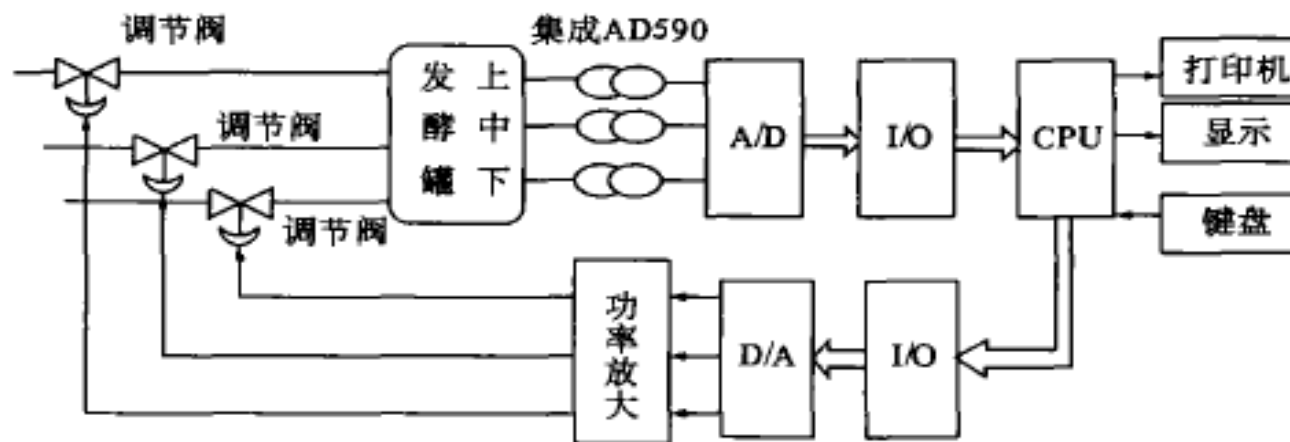


利用离散系统处理连续时间信号

啤酒发酵温度控制系统



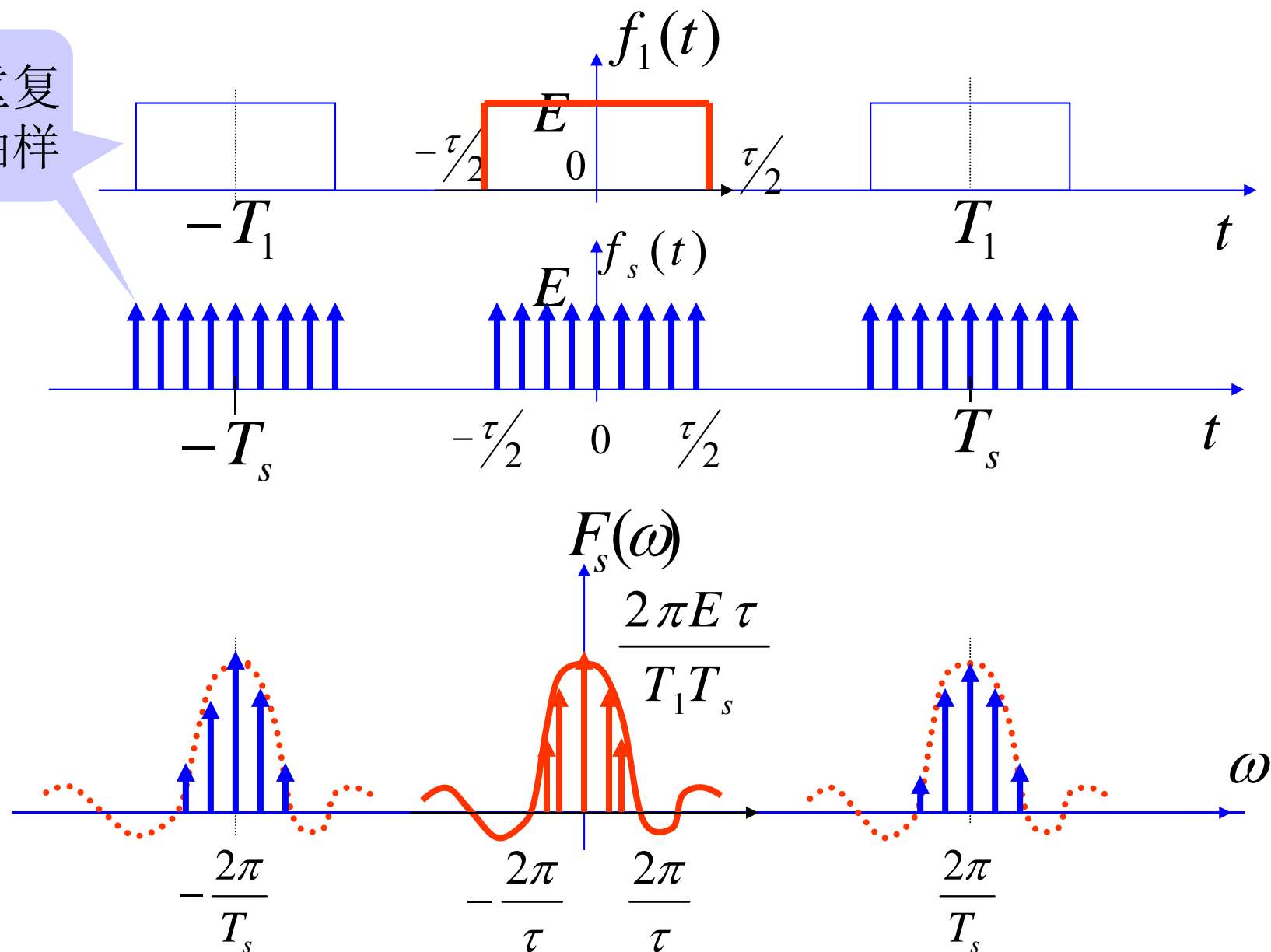
啤酒发酵温度控制系统

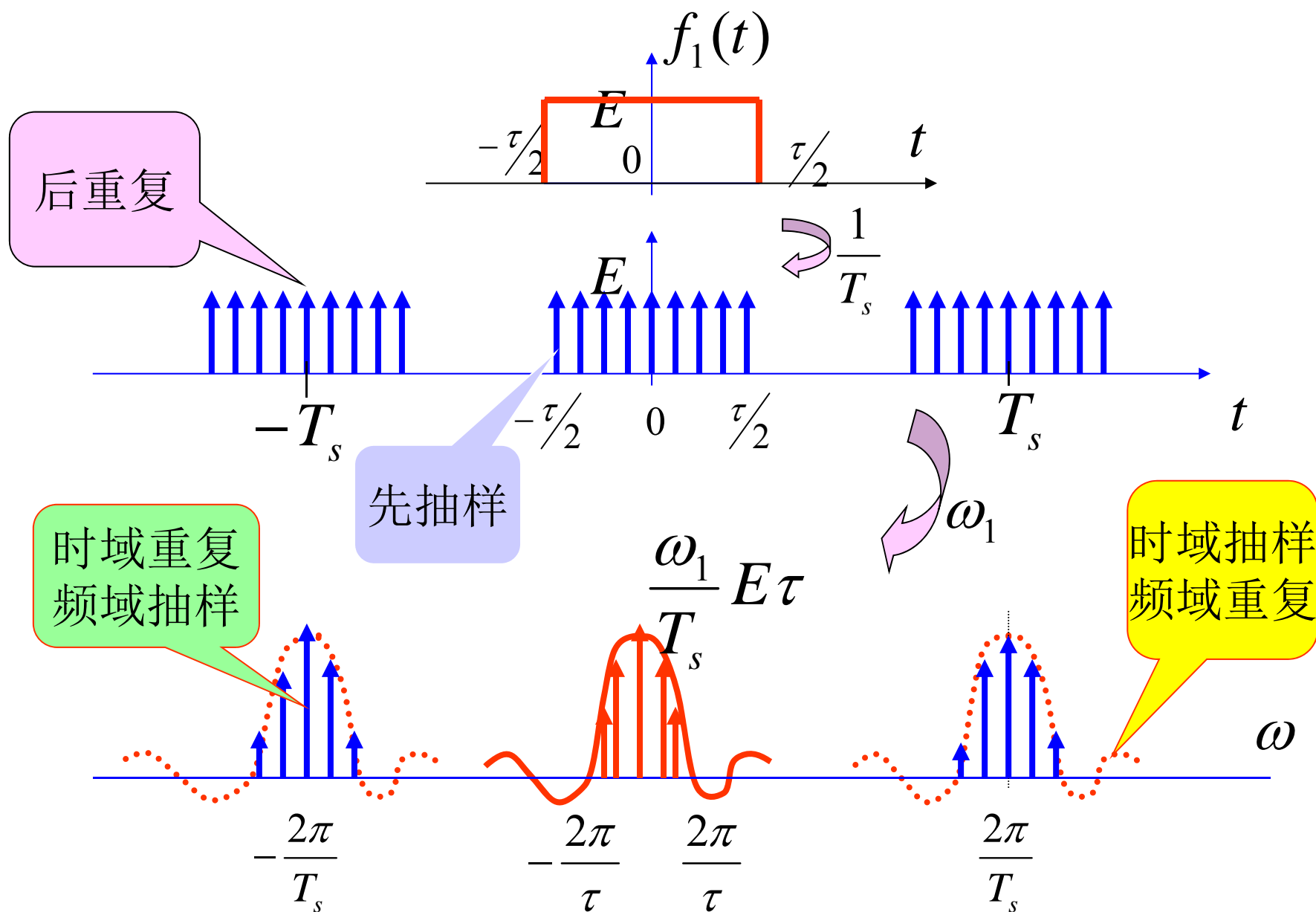


AD590 在啤酒发酵温度控制中的应用

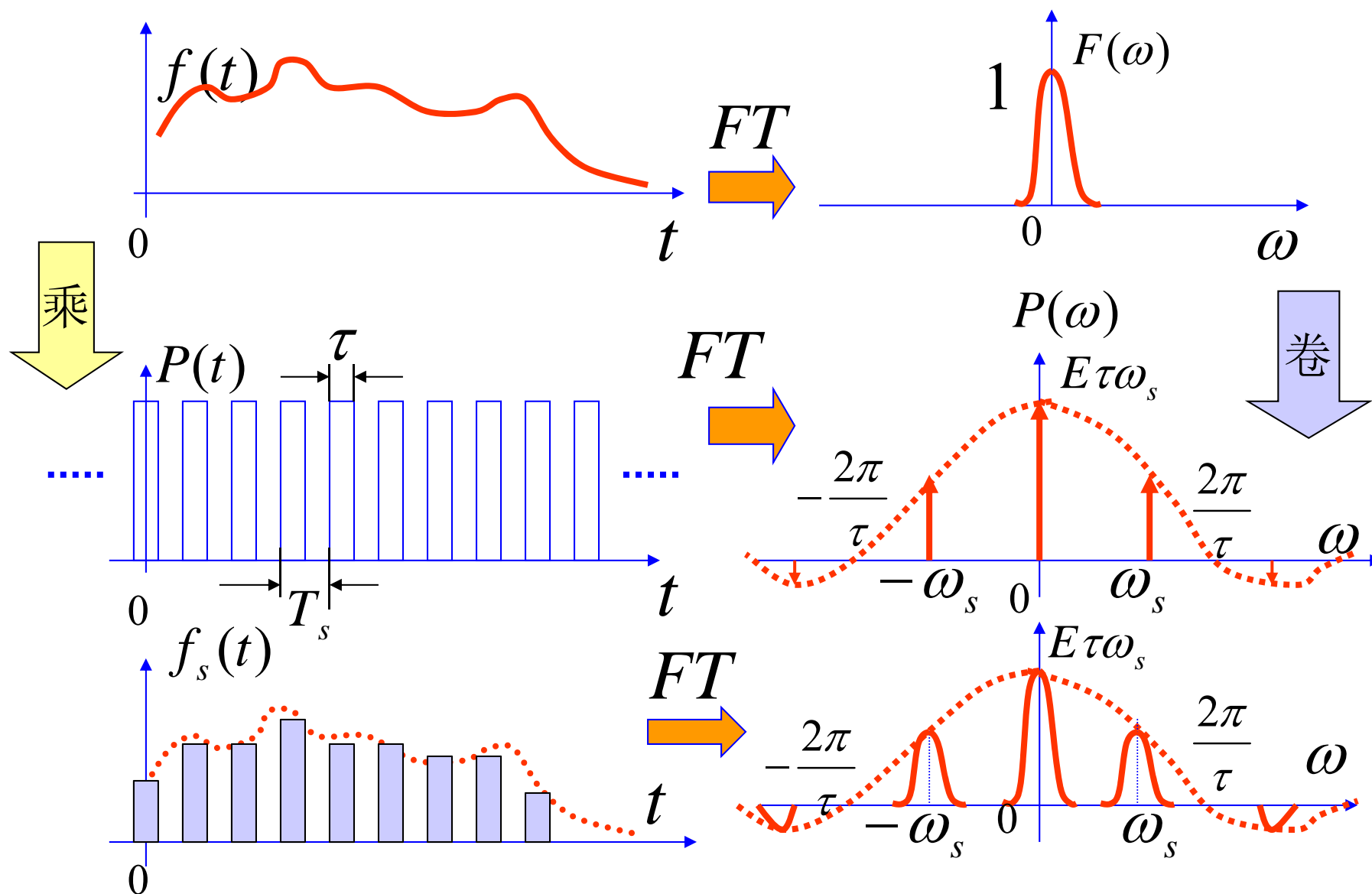
4. 周期矩形被冲激抽样的频谱

先重复
后抽样





5. 非理想抽样信号的傅立叶变换



关于非理想抽样

$$P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{E\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$$

$$p(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * p(\omega)$$

$$F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$$

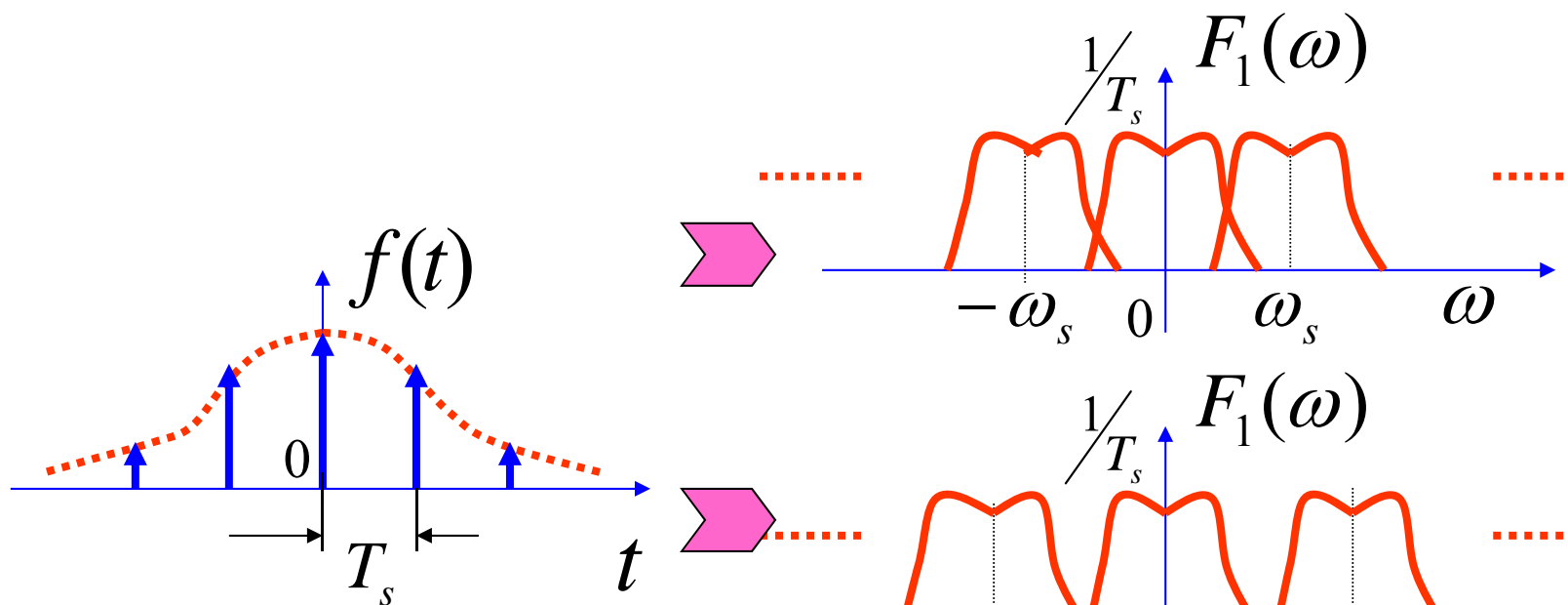
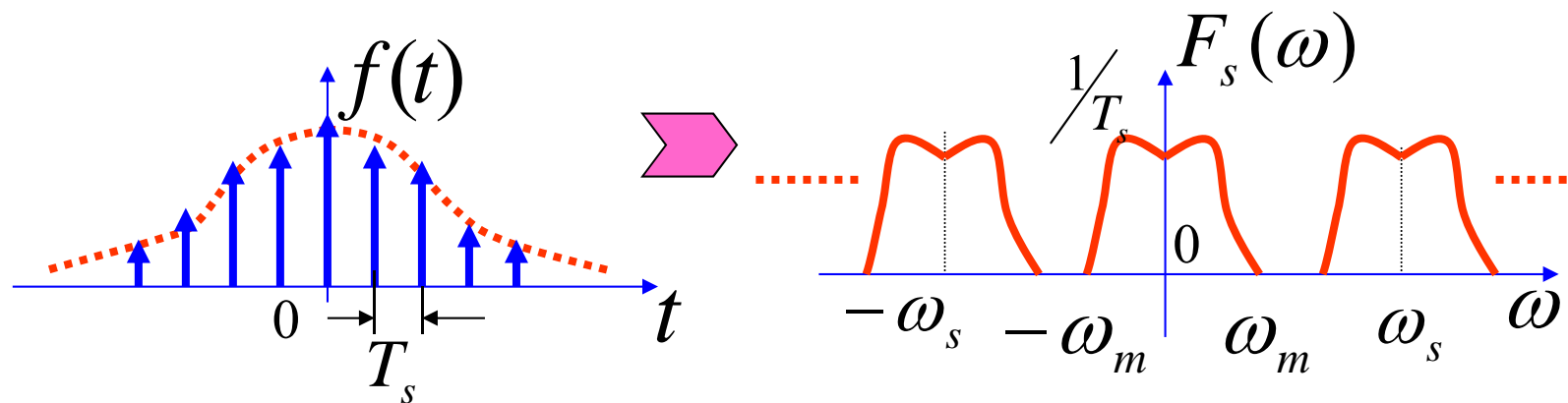
§ 3.11 抽样定理

- （一）时域抽样定理——
一个频率有限信号 $f(t)$ 如果频谱只占据 $-\omega_m \rightarrow +\omega_m$ 的范围，则信号 $f(t)$ 可以用等间隔的抽样值来唯一地表示。而抽样间隔不大于 $\frac{1}{2f_m}$ （其中 $\omega_m = 2\pi f_m$ ），或者说最低抽样频率为 $2f_m$ 。

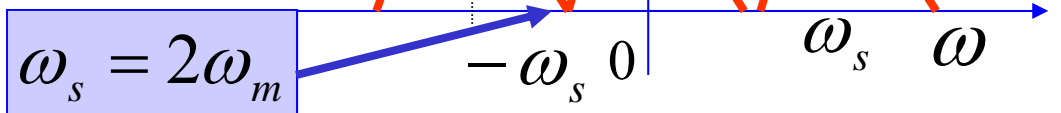
奈奎斯特频率：

$$\omega_s = 2\omega_m$$

不满足抽样定理时产生频率混叠现象



动态演示



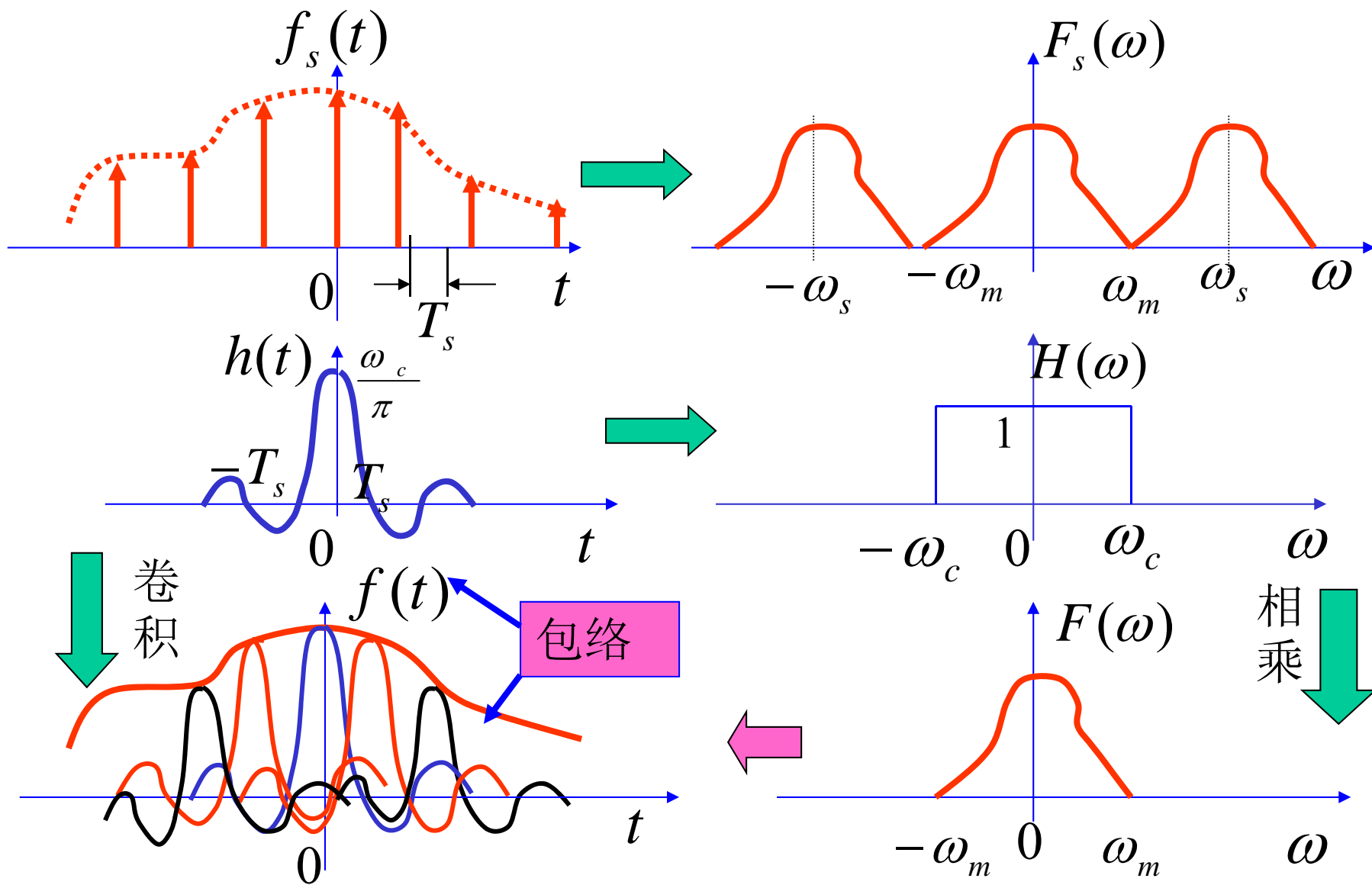
(二)、由抽样信号恢复原连续信号

- 取主频带 $F(\omega)$: $F(\omega) = F_s(\omega)H(\omega)$
- 时域卷积定理:

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s) \quad h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t)$$

$$f(t) = f_s(t) * h(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_c}{\pi} f(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)]$$

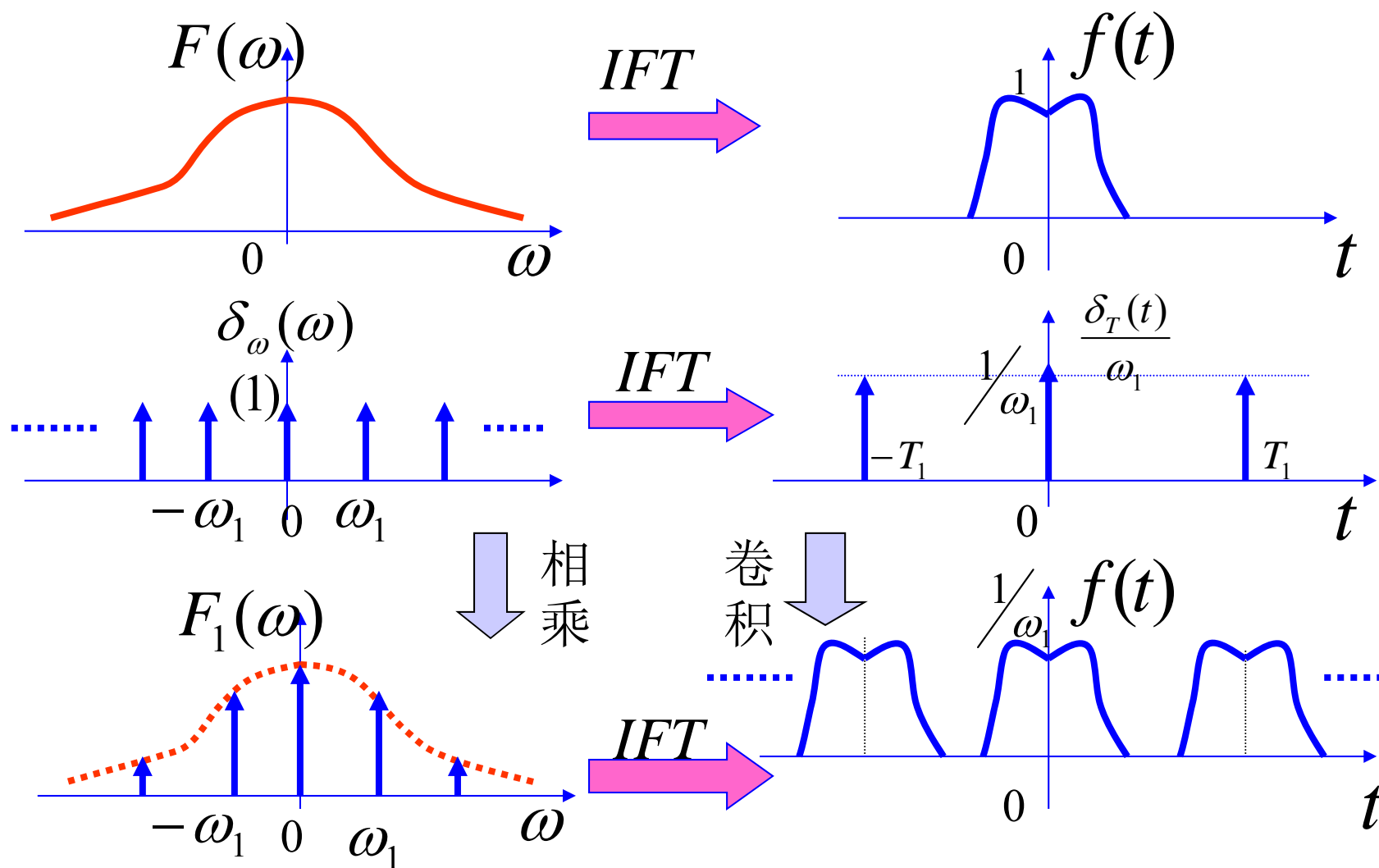


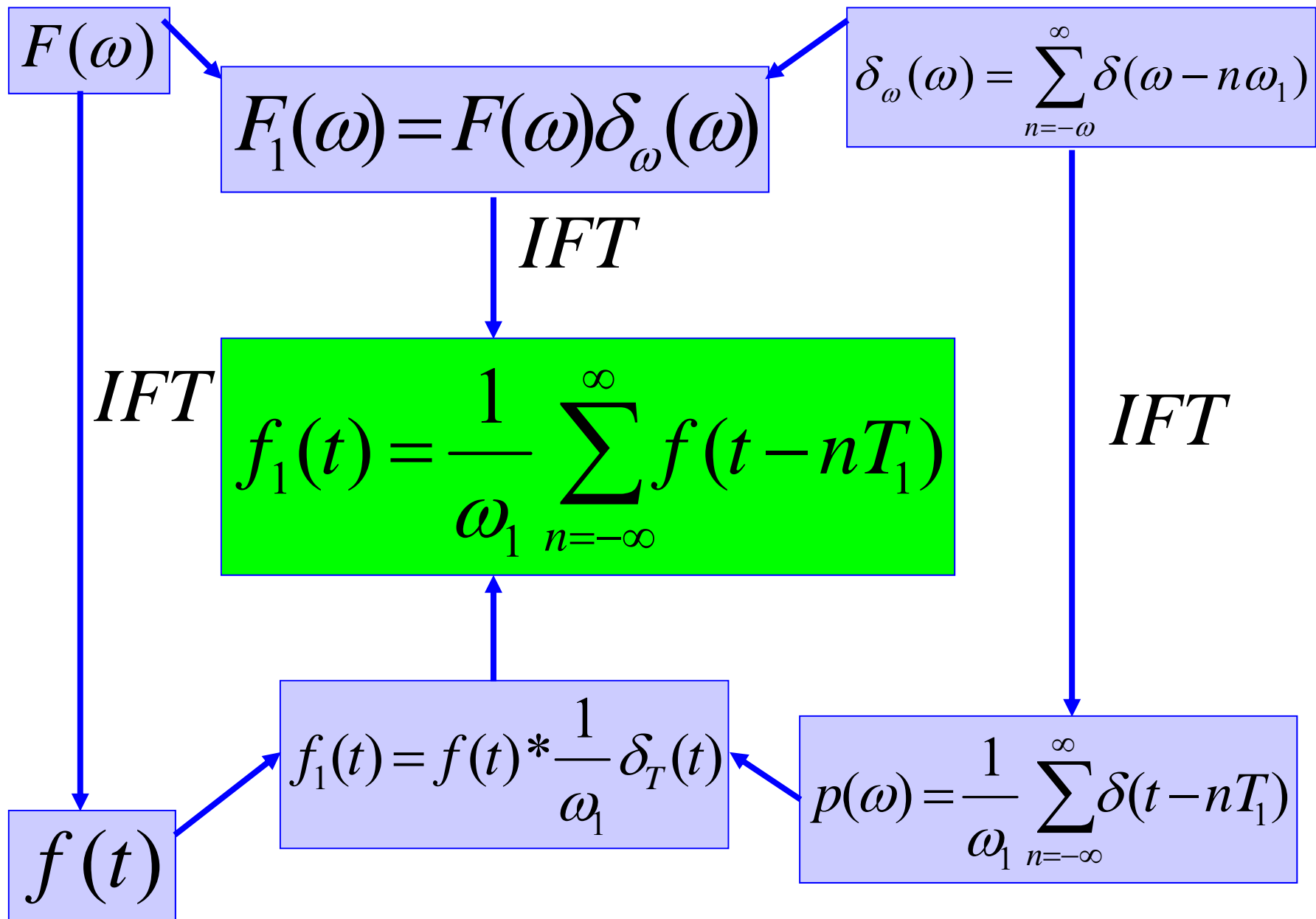
动态演示

（三）、频域抽样定理

若信号 $f(t)$ 为时限信号，它集中在 $-t_m \rightarrow t_m$ 的时间范围内，若在频域中，以不大于 $1/2t_m$ 的频率间隔对 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 进行抽样，则抽样后的频谱 $F_1(\omega)$ 可以唯一地表示原信号。

频域抽样后的时间函数





根据时域和频域对称性，可推出频域
抽样定理

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_c}{\pi} f(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)]$$

偶函数

变量置换

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n\pi}{t_m}\right) \text{Sa}\left[t_m\left(\omega - \frac{n\pi}{t_m}\right)\right]$$

抽样定理小结

- 时域对 $f(t)$ 抽样等效于频域对 $F(\omega)$ 重复
时域抽样间隔不大于 $\frac{1}{2\omega_m}$ 。
- 频域对 $F(\omega)$ 抽样等效于时域对 $f(t)$ 重复
频域抽样间隔不大于 $\frac{1}{2t_m}$ 。
- 满足抽样定理，则不会产生混叠。

傅立叶变换的局限

- 存在间断点的函数出现Gibbs现象。由于三角基函数的频点等距分布，对有突变性质的非平稳信号无能为力
- 三角基函数在时域上不能局部变化，无法实现时域上的局部分析。
- 经典的傅立叶积分不能同时进行时域与频域的分析。傅立叶变换以后，时间特性消失，只能进行频率信息的分析。
- 适用于线性系统

在不少实际问题中，我们关心的是信号在局部范围中的特征，例如：

- 在音乐信号中人们关心的是什么时候演奏什么样的音符；
- 对地震波的记录人们关心的是什么位置出现什么样的反射波；
- 图像识别中的边缘检测关心的是信号突变部分的位置，即纹理结构。



这些FT不能完成，需要引入时频局部化分析

短时Fourier变换

若 $w(t), \hat{w}(\omega)$ 都是窗函数,

则短时Fourier变换定义为

$$(\tilde{G}_b f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \overline{w(t-b)} dt$$

- 短时Fourier变换也叫窗口Fourier变换
- 短时FT是说明时频局部化分析思想的很好例子

令 $W_{b,\omega}(t) = e^{i\omega t} w(t-b)$, 则短时FT为

Parseval 恒等式

$$(\tilde{G}_b f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{W_{b,\omega}(t)} dt = \langle f, W_{b,\omega} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{W}_{b,\omega} \rangle$$

- 可以证明 $W_{b,\omega}$ 和 $\hat{W}_{b,\omega}$ 都是窗函数，其确定的矩形窗口为

$$[t_0 + b - \Delta_w, t_0 + b + \Delta_w] \times [\omega_0 + \omega - \Delta_{\hat{w}}, \omega_0 + \omega + \Delta_{\hat{w}}]$$

- 短时FT同时给出了函数时域和频域的信息

窗函数 $W_{b,\omega}$ 的特点：

- 随着 b, ω 的变换，窗口在相空间不断平移；
- 短时Fourier变换就是通过这些移动的窗口来提取被变换函数的信息；
- 函数族 确定的时频窗口只是随 发生平移, $W_{b,\omega}$ 窗口的大小和形状固定不变, ω

实际中信号分析的要求：

- 信号高频部分对应时域中的快变成分，如陡峭的前沿、后沿、尖脉冲等，分析时对时域分辨率要求高，对频域分辨率要求低。
- 信号低频成分对应时域中的慢变成分，分析对时域分辨率要求低，对频域分辨率要求高。

😊 因此，短时Fourier变换不能敏感地反映信号的突变，不能很好地刻画信息。

哲学与研究

- 哲学是人类认识世界的最高层次的思考。
 - 寻找世界的本原问题；
 - 人类在世界中的位置，即人类作为认识的主体在研究中的重要性。
 - 了解哲学是从总体上、大局上把握世界；把握研究的方向，不至于走入死胡同。

付里叶变换

- Fourier是法国大革命时期的数学家，他在频谱分析领域做有卓越的贡献。
- 在当时，拿破仑时代，科学界流行一种哲学：世界是有“基元”组成的，任何一种物质只是基元的加权的代数 and。基元是什么？
- 运动是物质的一种存在形态，也应该具有一种相同的特性，即运动应由基元组成。

付里叶变换（续）

- Fourier通过研究“振动弦”的运动得出一个规律：即振动弦的运动可以分解为多个“正弦”信号的和。
- 又通过对很多现象的研究，Fourier得出一个结论：任何一个信号可以分解为多个“简谐周期函数”的加权和，而 $\sin(x)$ 、 $\cos(x)$ 是最简单的“简谐周期函数”。

付里叶变换（续）

- 由此，付里叶得出如下的结论：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n \sin(n\omega t) + ib_n \cos(n\omega t))$$

Diagram illustrating the components of the Fourier series formula:

- $f(t)$ is labeled as "任意时间周期信号" (Arbitrary time-periodic signal).
- $\frac{a_0}{2}$ is labeled as "常量" (Constant).
- a_n and b_n are labeled as "权值" (Weight).
- $\sin(n\omega t)$ and $\cos(n\omega t)$ are labeled as "基元" (Elementary).

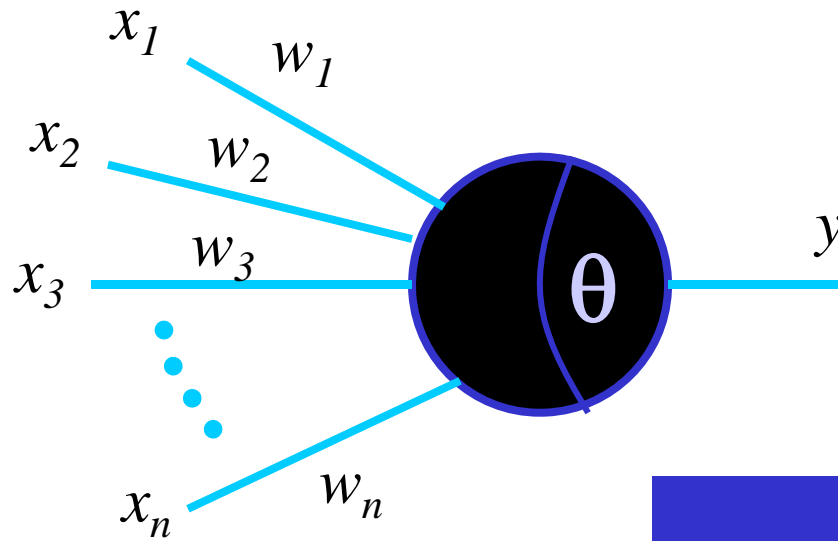
付里叶变换（续）

- 从当时的角度（哲学观点）来看，是任何一个信号可以表示为“正弦”信号的加权和，符合哲学观点，推导正确。
- 当Fourier将论文提交给法国研究院，由Lagrangri等三名数学家组成的委员会没有允许该论文的发表，原因是该数学推导不严格，Lagrangri提出对于处处不可导的信号（函数）该理论不成立。

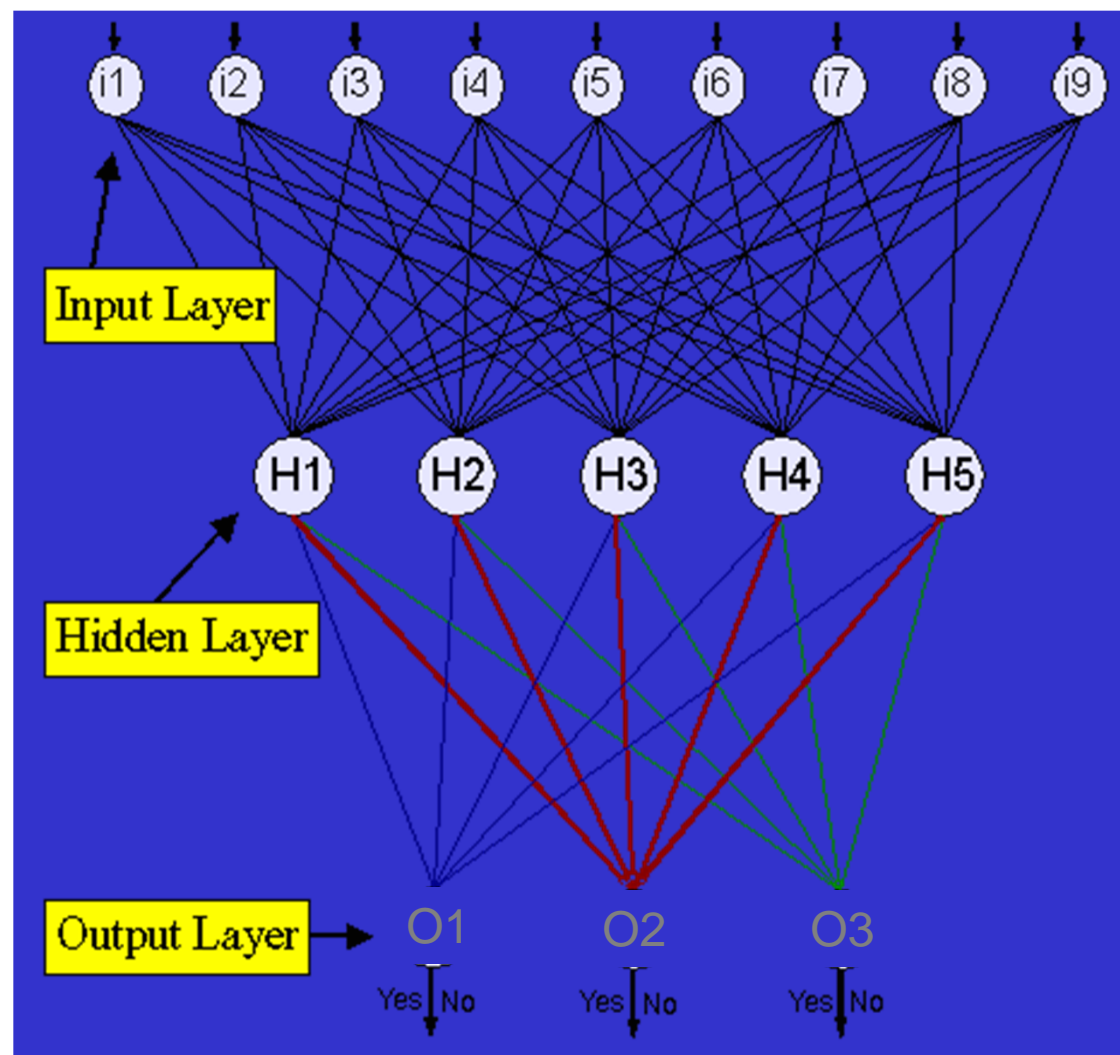
神经元理论

- 神经网络：神经网络(Nerual Net)指由大量神经元互连而成的网络，有点象服务器互连而成的国际互连网(Internet). 人脑有1000亿个神经元，每个神经元平均与10000个其他神经元互连，这就构成了人类智慧的直接物质基础。

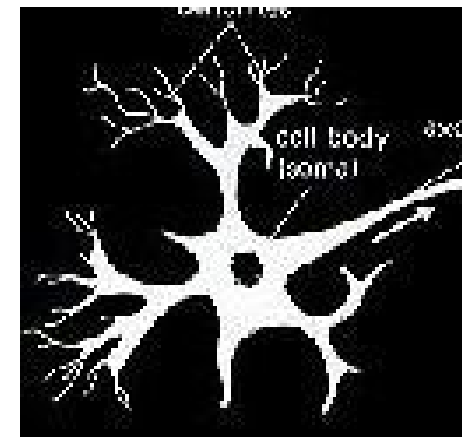
Artificial Neural Network(ANN)



$$y = f\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta\right)$$



神经元网络



- 是根据生物的神经元组成而得来的
- 两态工作，即只有兴奋和抑制两个状态
- 阈值作用，超过某个阈值，神经元兴奋
- 多输入、单输出
- 空间、时间叠加
- 可塑性连接

神经网络（续）

- 每个神经元是基元，任何一个函数 $f(x)$ 可以通过神经元的加权和而得到。神经元的数目可以选择，层次的个数可以选择，原则上三层以上即可以模拟任何一个函数（包括线性函数、非线性函数）功能十分强大！
- 网络模型构建后，需要获得权值，权值的获取方法是训练。即选择足够的训练样本空间，对模型中的连接进行训练，训练完成，既可以用于相关的应用。

神经元网络（续）

- 一个非常好的思路，可以同时解决线性和非线性问题！
- 问题是：训练样本空间与应用样本空间不是一个集合，用训练样本空间训练出来的神经元模型对于样本空间的样本是最优的结果，而对于应用样本空间就不一定是最优的结果！
- 例如：应用神经元网络识别0~9个数字，选定三层神经网络（输入层、隐含层、输出层），隐含层包含128个节点，训练样本空间选择0~9的手写数字分别为100个，共1000个样本集。

神经元网络（续）

- 训练结束后，对于样本空间的样本的识别率可以达到100%，而如果一个手写的字母“A”作为识别样本，发现他也会得出一个0~9之间的一个结果，显然出现了误识。
- 那么误识率会是多大？

结 论

- 在世界是由基元组成这一哲学思想下，产生了一系列的十分有效的技术，可见哲学对研究的意义。
- 相反，如果没有一种哲学思想，我们的研究如何归纳总结出一种一般的规律？总结出的规律正确与否？

分形几何的基本思想

研究对象

- 欧几里得几何学的研究对象是具有特征长度的几何物体：
 - 一维空间：线段，有长度，没有宽度；
 - 二维空间：平行四边形，有周长、面积；
 - 三维空间：球，表面积、体积；
- 自然界中很多的物体具有特征长度，诸如：人有高度、山有海拔高度等。

研究对象

- 有一类问题却比较特别，Mandelbrot就提出了这样一个问题：英国的海岸线有多长？



英国的海岸线地图

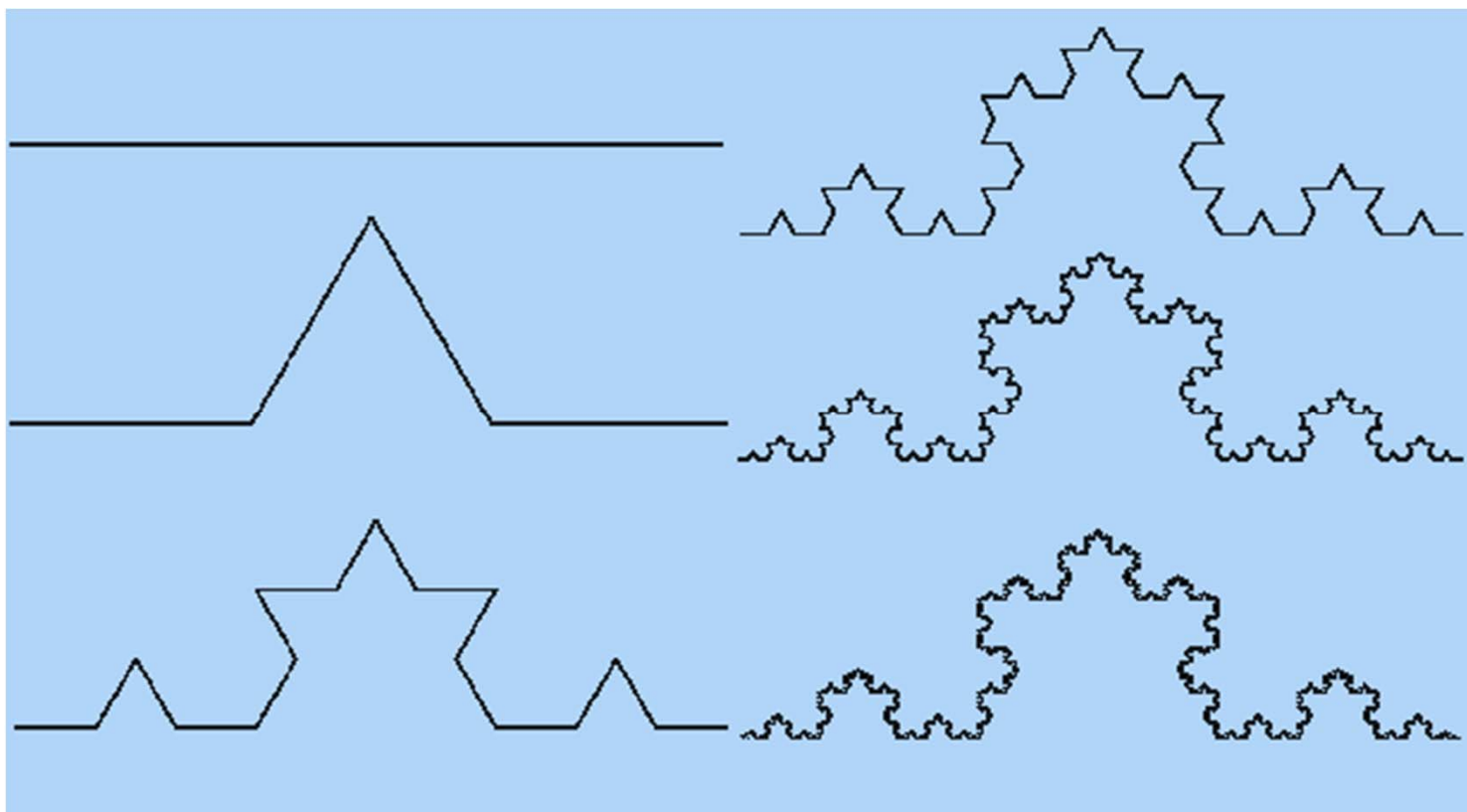
研究对象（续）

- 当你用一把固定长度的直尺(没有刻度)来测量时，对海岸线上两点间的小于尺子尺寸的曲线，只能用直线来近似。因此，测得的长度是不精确的。
- 如果你用更小的尺子来刻画这些细小之处，就会发现，这些细小之处同样也是无数的曲线近似而成的。随着你不停地缩短你的尺子，你发现的细小曲线就越多，你测得的曲线长度也就越大。
- 如果尺子小到无限，测得的长度也是无限。

研究对象（续）

- 得到的结论是：海岸线的长度是多少：决定与尺子的长短。
- 海岸线的长度是无限的！
- 而显然海岸线的面积为零；

Koch 曲线



Koch 曲线（续）

- Koch曲线曾经在数学界成为一个魔鬼。
- 同样的道理：长度无限、面积为零、而曲线还有“界”。
- 另外，有一个特点：当取其中的一部分展开，与整体有完全的自相似性，似乎是一个什么东西的无数次的自我复制。

自然界中的其他事物

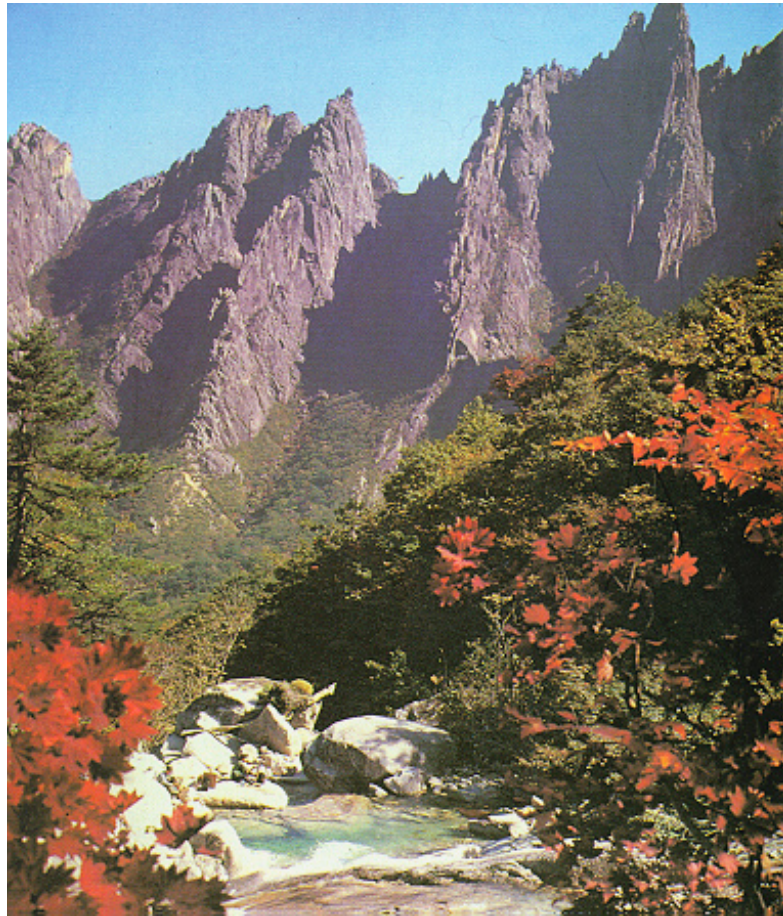
- 取下一片蕨类植物叶子似乎与整体有某种相似性。
- England的海岸线从视觉上也感觉有某种自相似性



分形的概念（续）

- 分形看作具有如下所列性质的集合 F :
 - F 具有精细结构，即在任意小的比例尺度内包含整体。
 - F 是不规则的，以致于不能用传统的几何语言来描述。
 - F 通常具有某种自相似性，或许是近似的或许是统计意义下的。
 - F 的定义常常是非常简单的，或许是递归的。

自然界中的分形



山



星 云



天空中的云朵



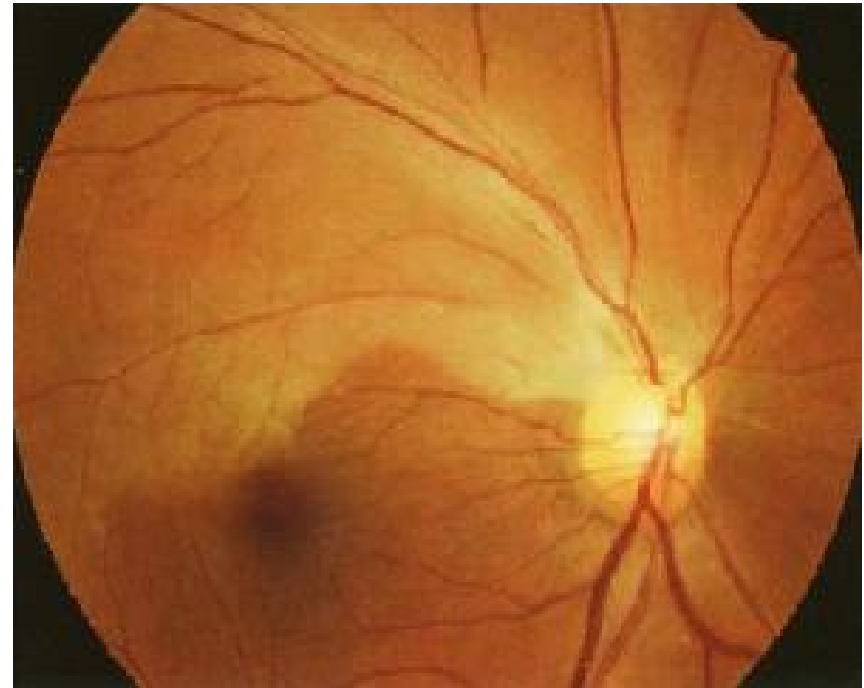
植物的叶子

毛细血管分布

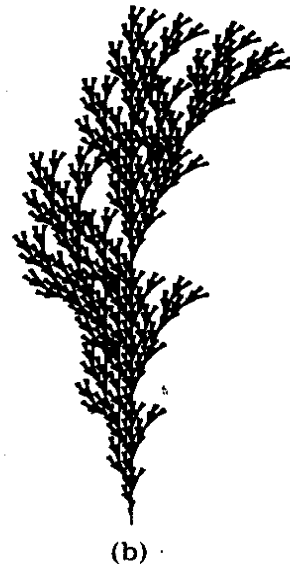
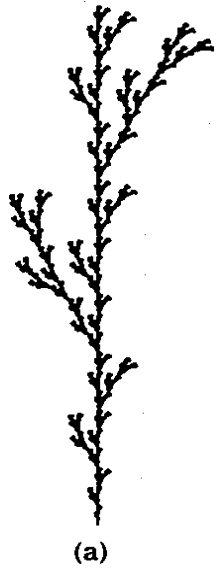
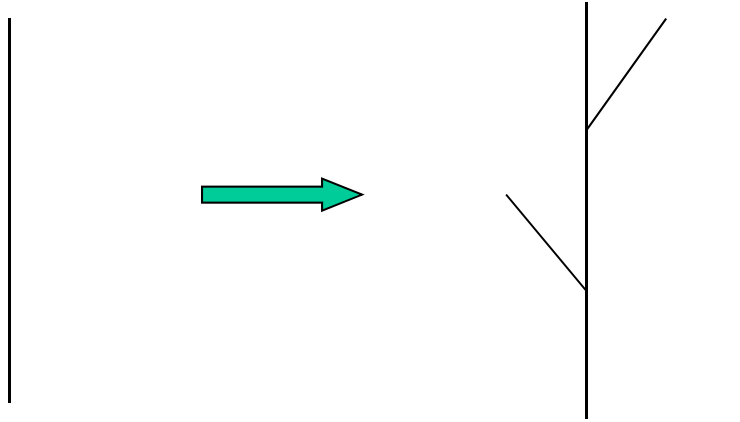
毛细血管瘤



视网膜中央动脉颞上支阻塞



花草树木

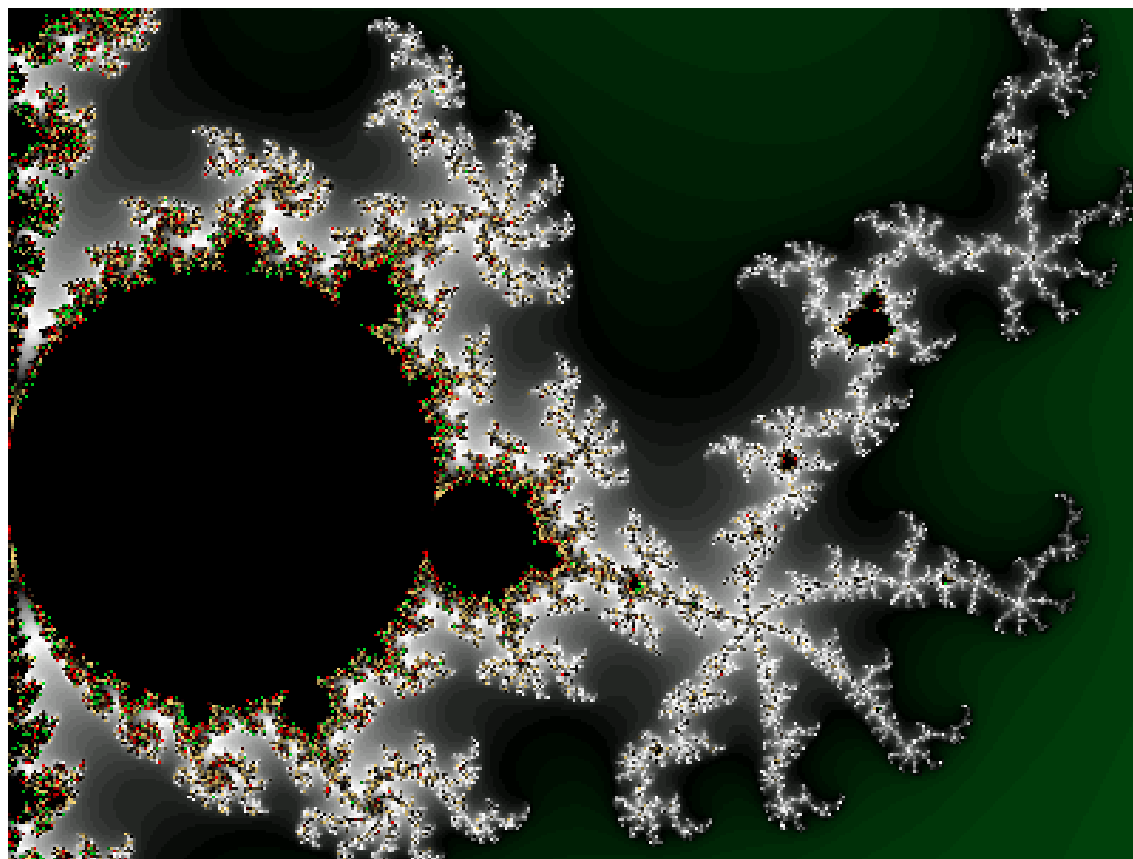


自然界中的分形

- 股票价格曲线
- 岩石裂缝
- 金属损伤裂缝
- 道路分布
- 神经末梢的分布

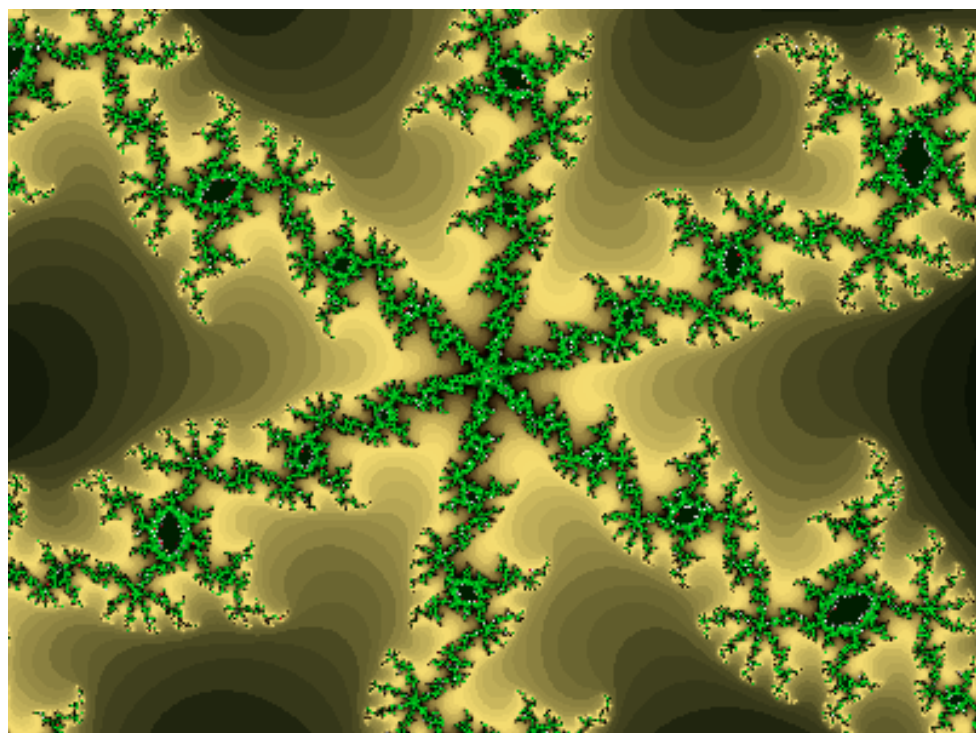
.....

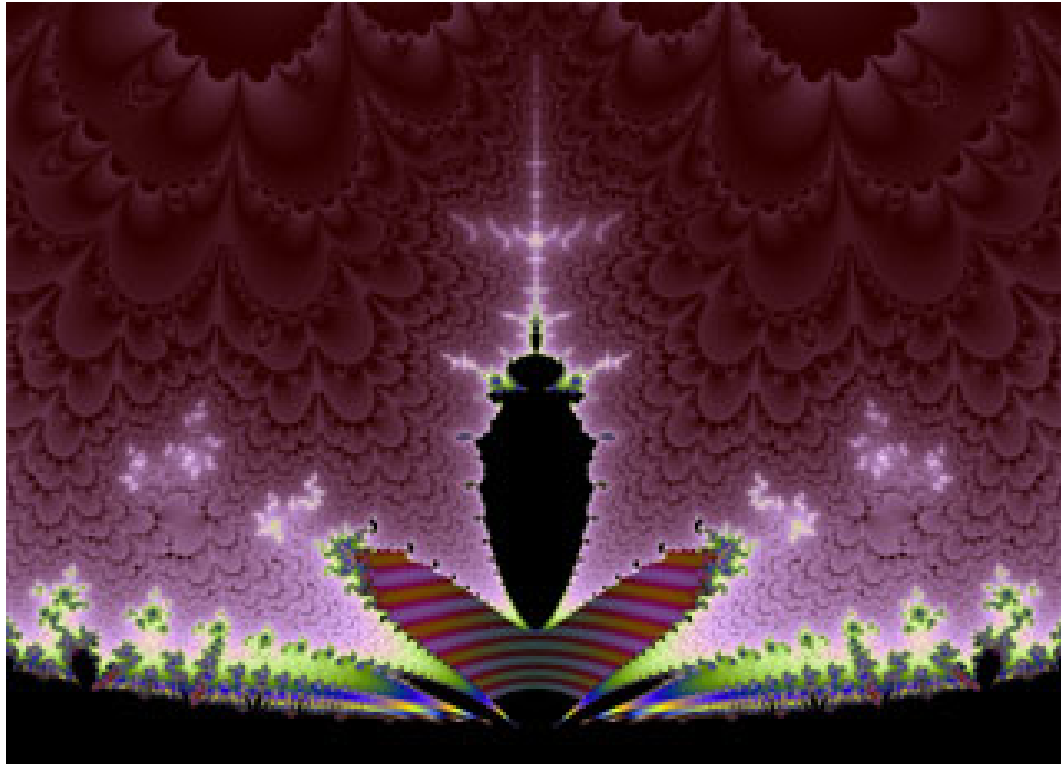
分形欣赏

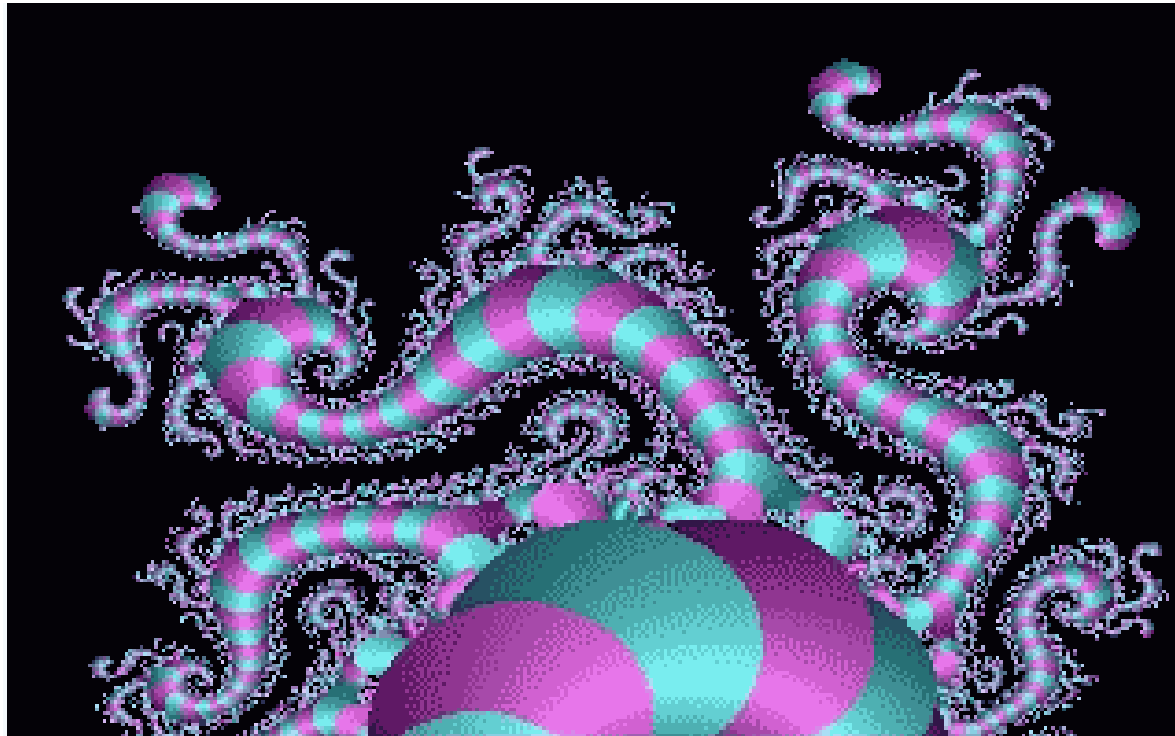


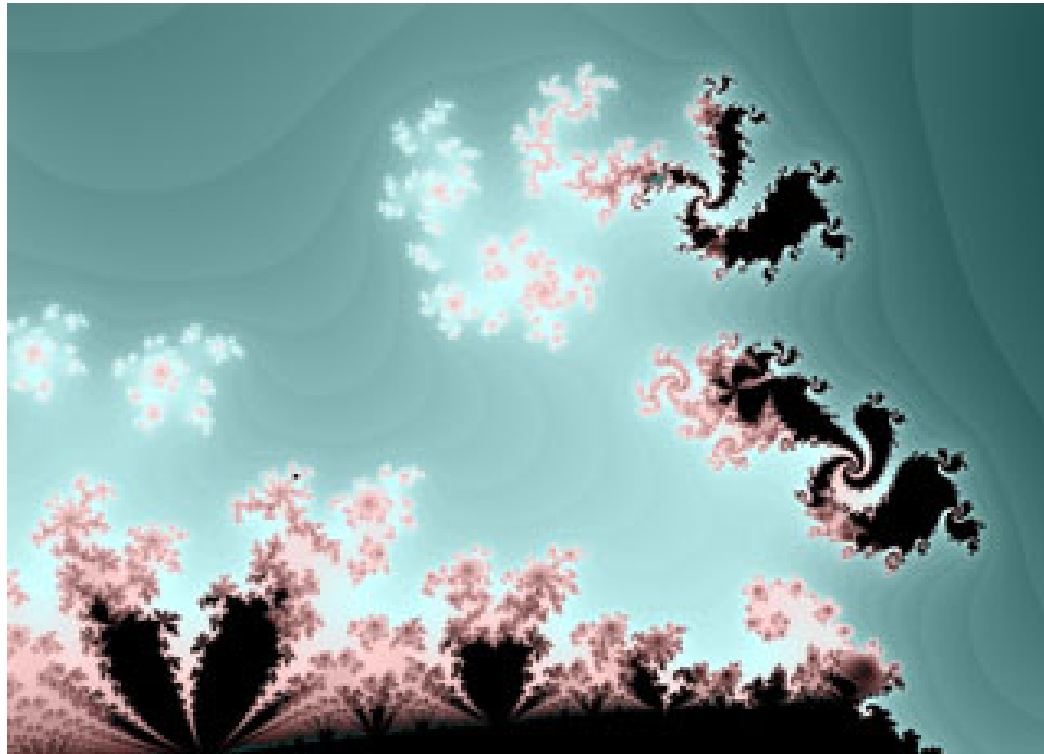


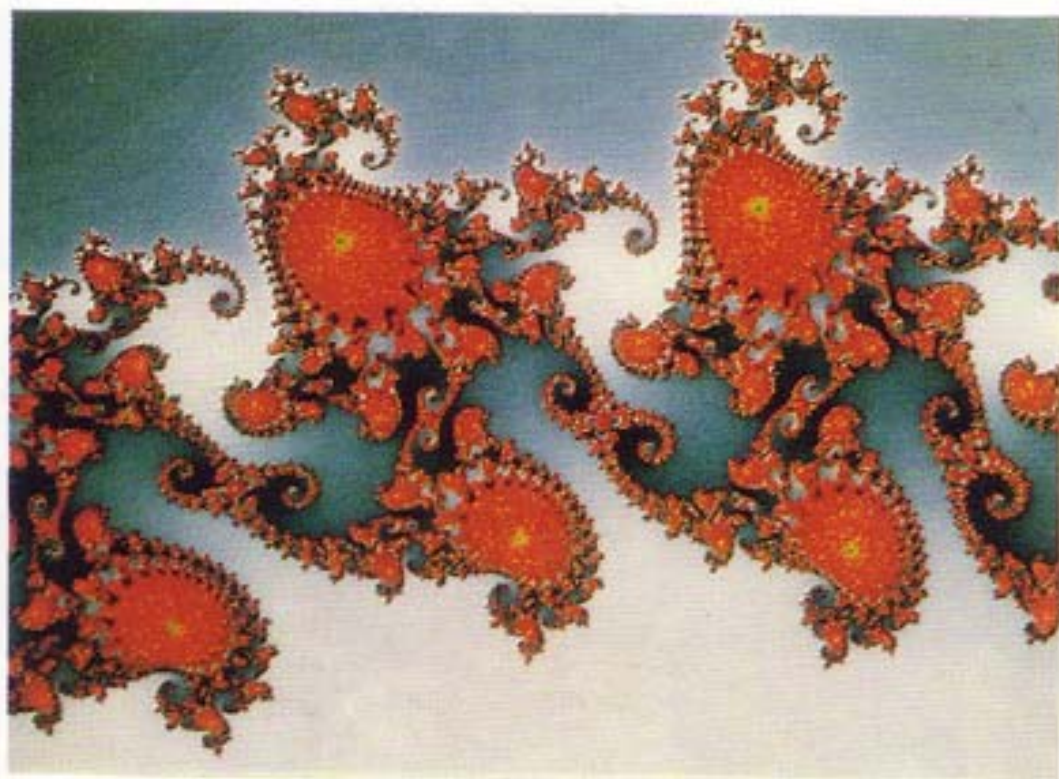
5. 四元数二次映射之下的一个 Julia 集





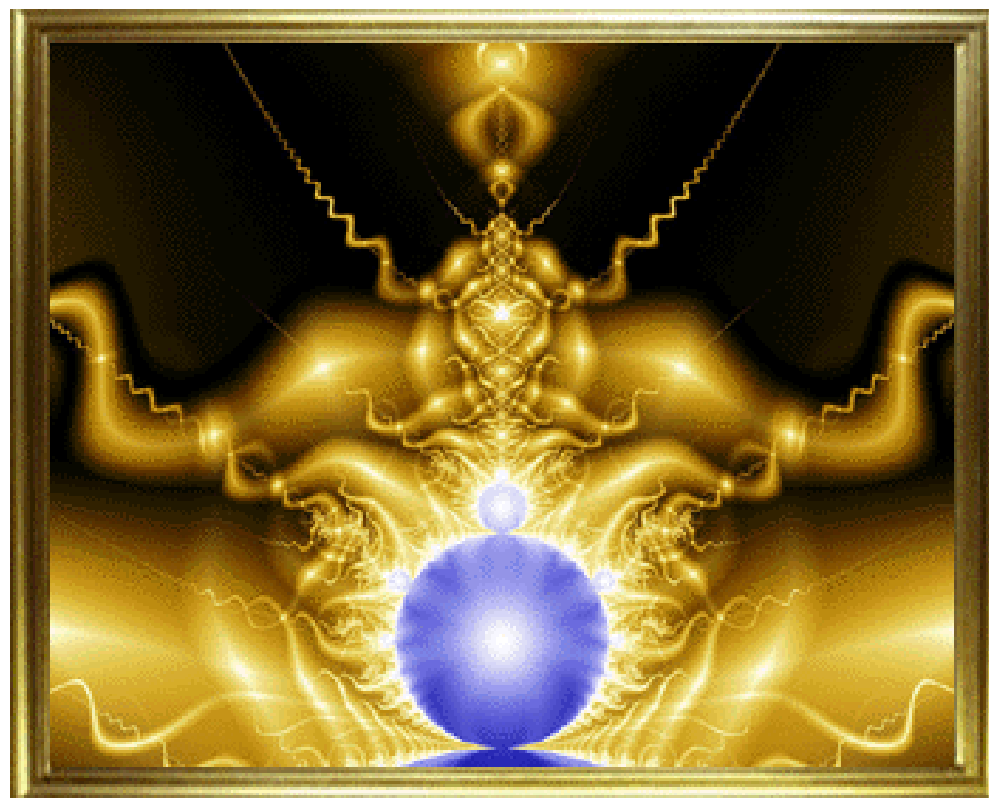


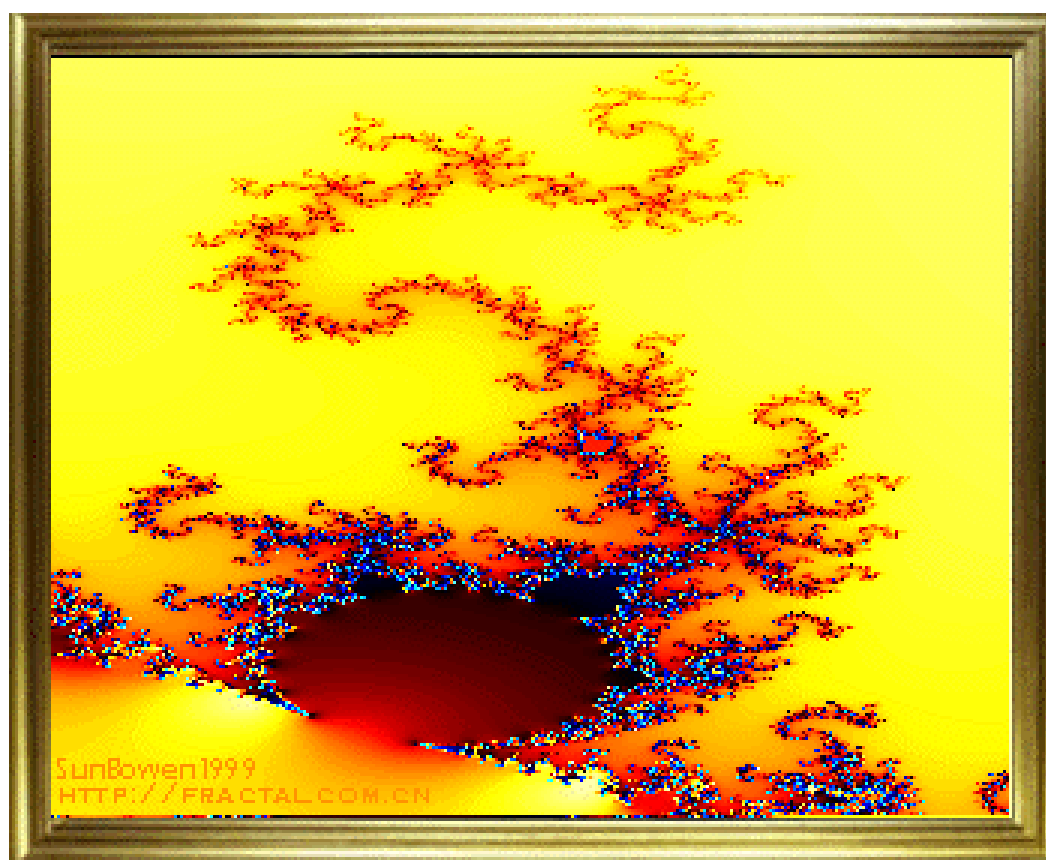


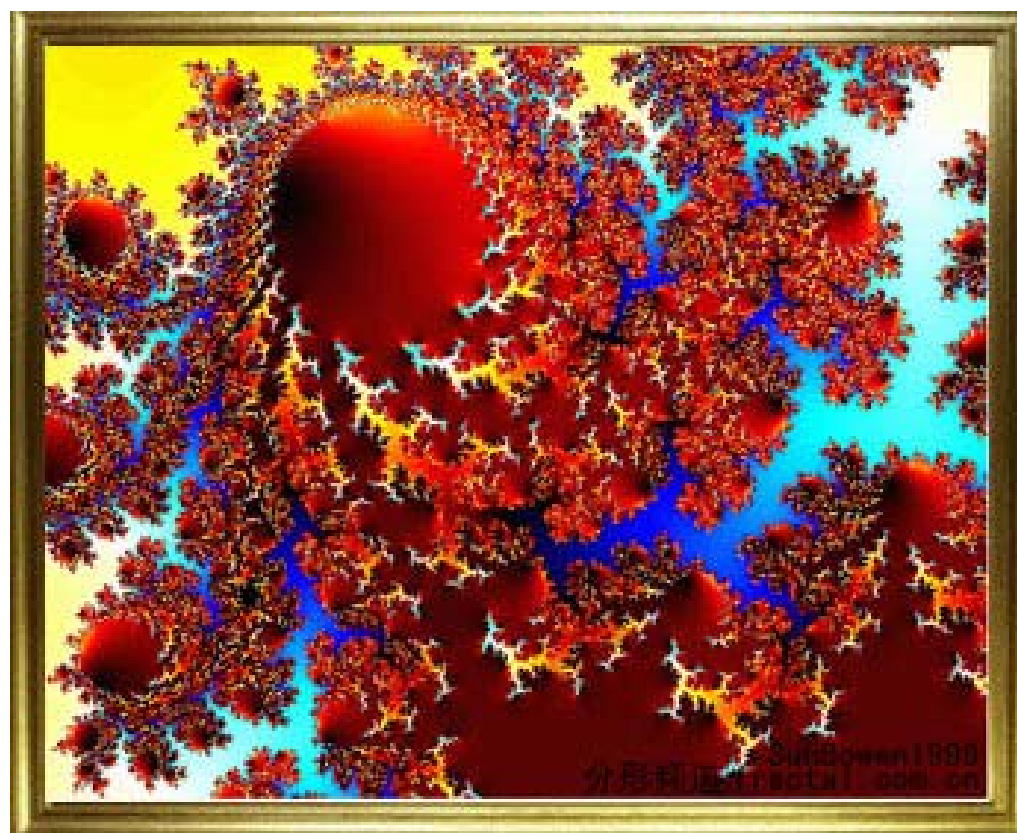


2. Julia 集

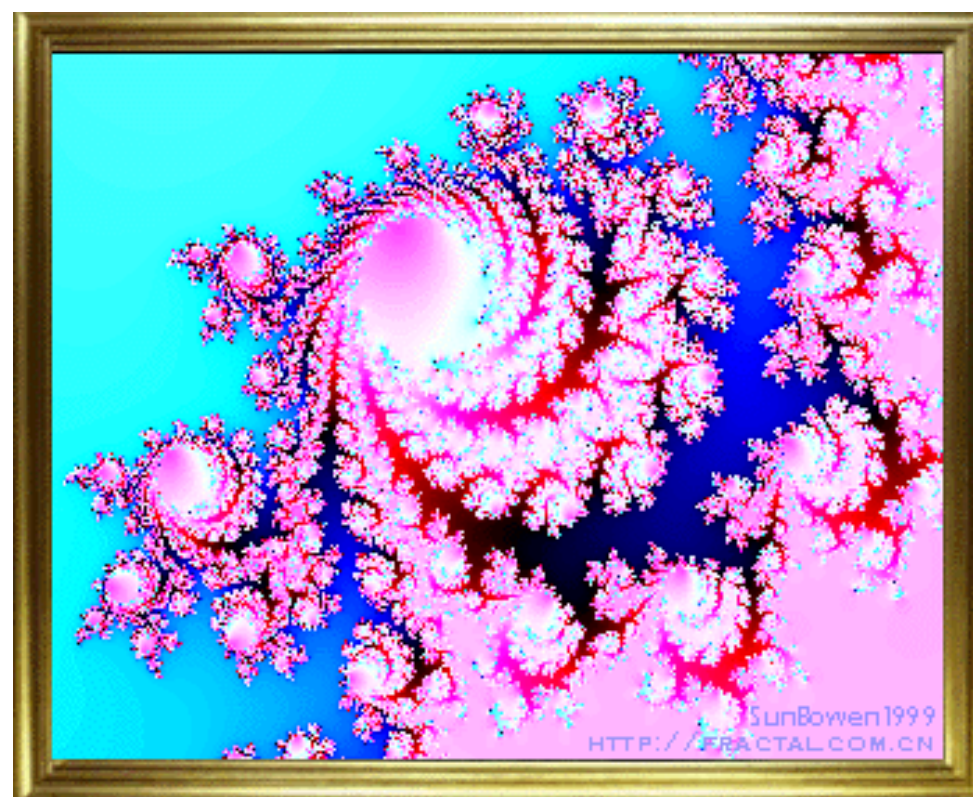








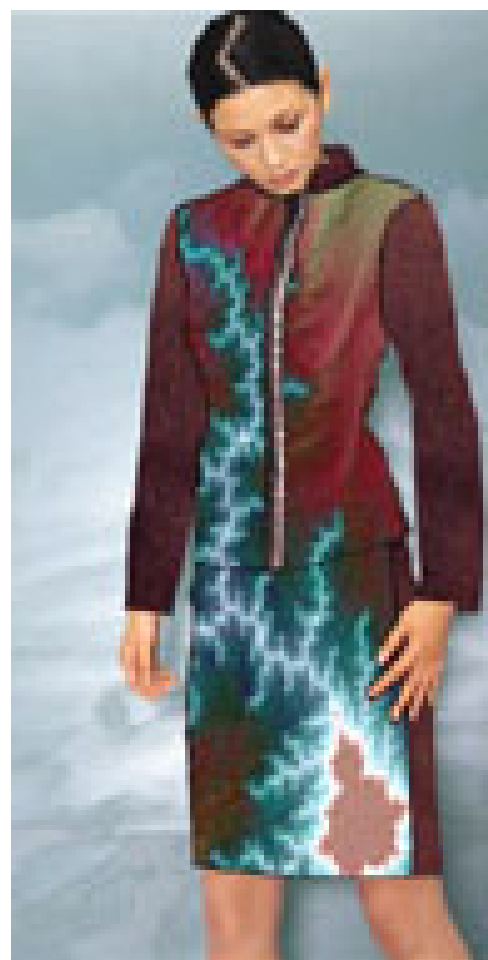
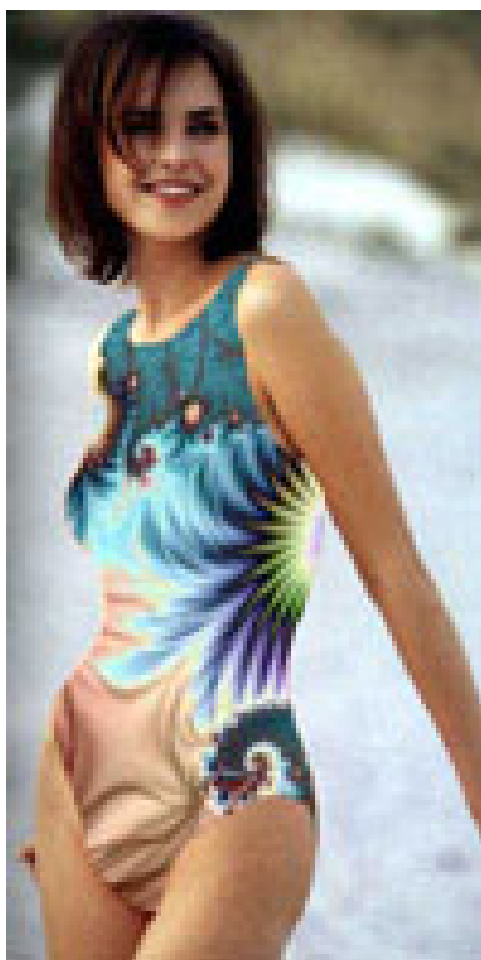








分形时装



分形时装

