第六章 信号的空间分析

*.基本概念(6.1和6.2节内容)

信号与多维矢量

空间

线性(矢量)空间

内积(Inner product)空间

线性赋范空间

信号能量与矢量(范数)对应

内积运算与正交、相关概念的联系

范数(Norm)(p318)

矢量 $x=(x_1,x_2......x_N)$(N维)

一般情况下,二阶范数为： $\|x\|_2=[\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_n|^2]^{\frac{1}{2}}$

与此对应,在连续信号空间 $\|x\|_2=[\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt]^{\frac{1}{2}}$

其平方表示信号的能量

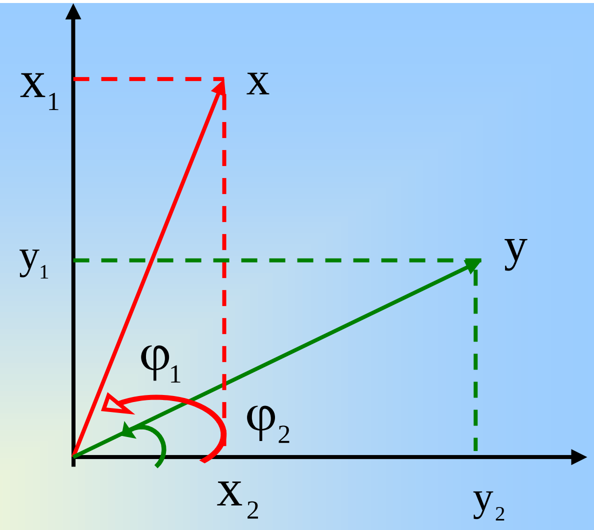
在二维空间中 $\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\rightarrow$ 即矢量之长度

内积(点积)

研究两矢量·相对位置之关系(对应两信号波形之相对关系)

二维矢量空间之关系(推导见p321面)

$$x = (x_1, x_2) \quad y = (y_1, y_2) \quad \text{夹角} \quad \varphi_1 - \varphi_2$$

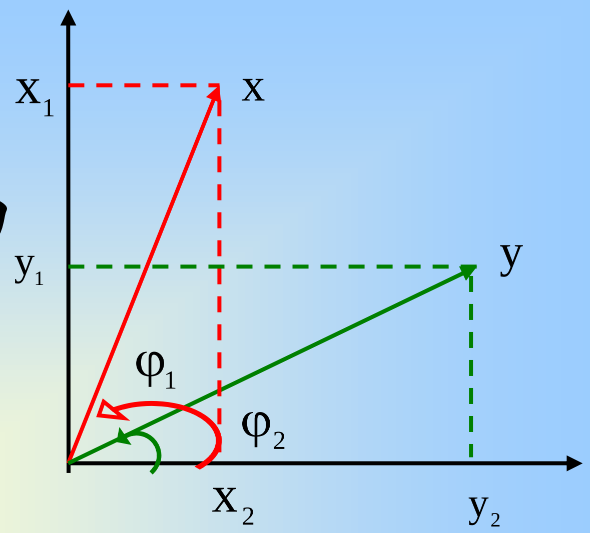


$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

$$= \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \cdot \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{1/2}} + \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \cdot \frac{y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{x_1 y_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \cdot \frac{x_2 y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{1/2}}$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 = \|x\|_2\|y\|_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$



此式反映了两矢量之间的相对位置的“校准”情况。

$x_1y_1 + x_2y_2$为二维矢量的内积。

两矢量夹角90^0 $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ 内积为零

两矢量夹角0^0 $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$ 内积为最大值

多维情况内积符号及表达式

离散:$<x, y> = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = x^T y$

连续:$<x.y> = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt$

柯西－施瓦慈（Caycy－Schwarz)不等式

$$\left|<x,y>\right|^2 \le <x,x><y,y>$$

内积平方小于等于各自范数平方之积。

对于二维：$\dfrac{<x,y>}{\|x\|_2\|y\|_2} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$

$$-1 \le \frac{<x,y>}{\|x\|_2\|y\|_2} \le 1 \qquad \frac{\left\|<x,y>\right\|^2}{<x,x><y,y>} \le 1$$

内积空间,信号能量受限。

§6.3-6.4信号的正交函数分解

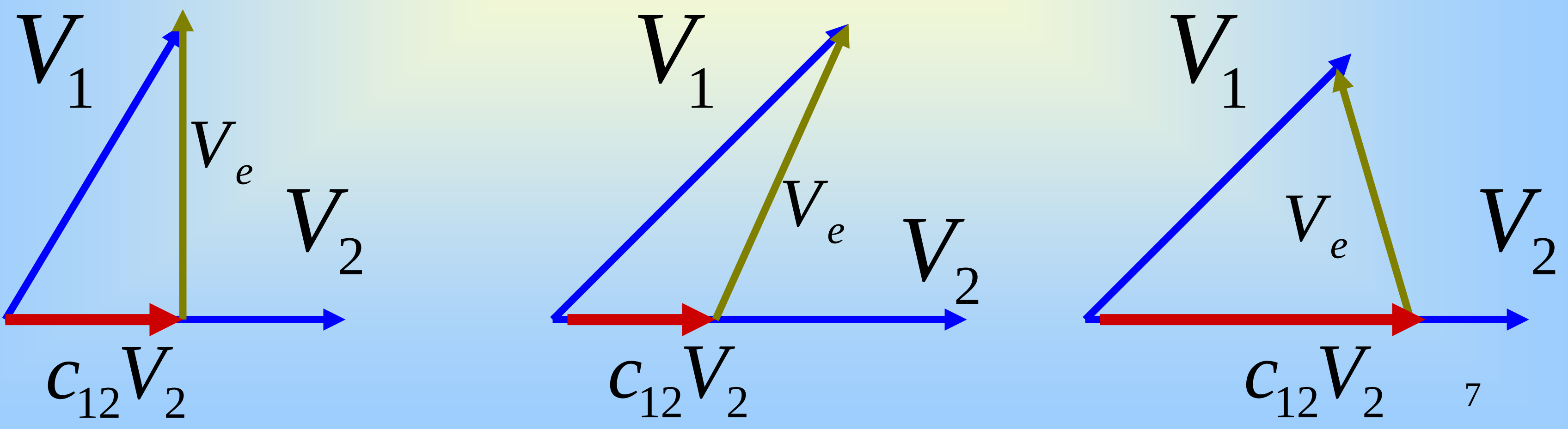
- 正交矢量
- 正交函数
- 正交函数集

- 帕塞瓦尔定理

一、正交矢量

矢量：V_1 和 V_2 参加如下运算，V_e 是它们的差，如下式：

$$V_1 - c_{12}V_2 = V_e$$



$$c_{12}V_2 = V_1\cos\theta = \frac{V_1 V_2\cos\theta}{V_2} = \frac{V_1.V_2}{V_2}$$

$$c_{12} = \frac{V_1.V_2}{{V_2}^2}$$

c_{12}表示V_1和V_2互相接近的程度

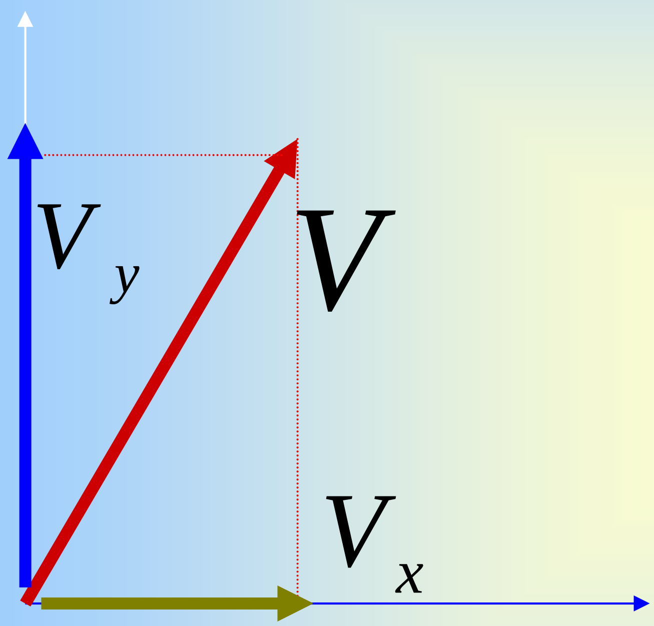
当V_1，V_2完全重合，则$\theta=0, c_{12}=1$

随夹角增大，C_{12}减小；

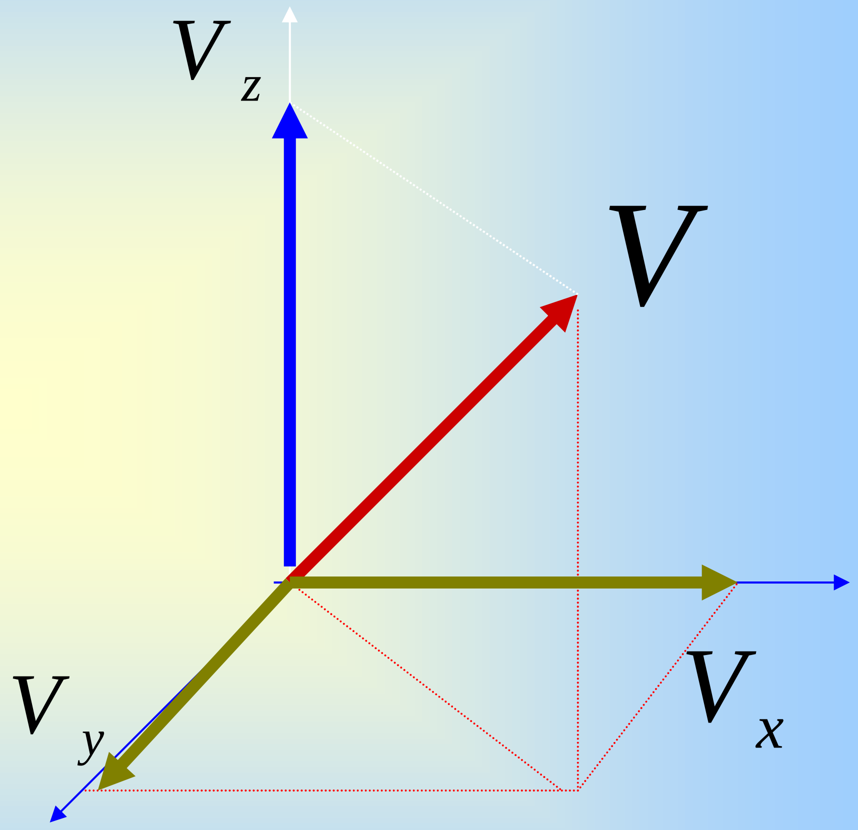
当$\theta=90^o, c_{12}=0$，V_1和V_2相互垂直

$$V = V_x + V_y$$

$$V = V_x + V_y + V_z$$



二维正交集



三维正交集

二、 正交函数

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t) \qquad (t_1 < t < t_2)$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{(t_1 - t_2)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12} f_2(t)]^2 dt$$

令 $\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{dc_{12}} = 0$ 则误差能量 $\overline{\varepsilon^2}$ 最小

$$\frac{d}{dc_{12}}\left\{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f_1(t) - c_{12} f_2(t)]^2 dt\right. = 0$$

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dc_{12}} f_1^2(t)dt - 2\int_{t}^{t_2} f_1(t) f_2(t)dt\right.$$

$$+ 2c_{12}\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)dt = 0$$

解得 $$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)dt}$$

正交条件

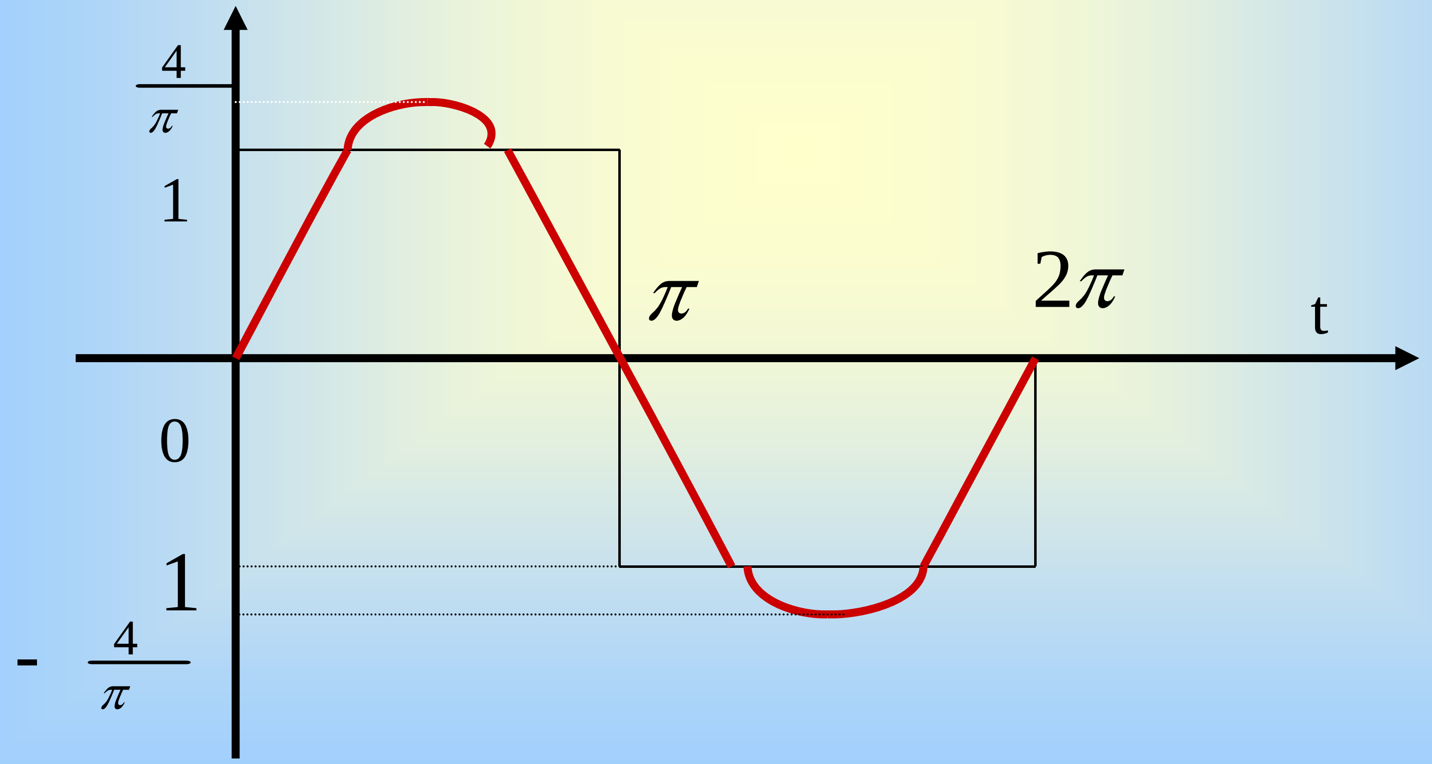
若$c_{12}=0$,则$f_1(t)$不包含$f_2(t)$的分量,则称正交。

正交的条件:

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\, f_2(t)\, dt = 0$$

例：
$$f(t)=\begin{cases}+1 & (0<t<\pi)\\ -1 & (\pi<t<2\pi)\end{cases}$$

试用sint 在区间（0，2π ）来近似 $f(t)$



解：

$$c_{12} = \frac{\int_0^{2\pi} f(t)\sin t dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t da}$$

$$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t) dt = \frac{4}{\pi}$$

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin t$$

例：试用正弦sint在（0，2π）区间内来表示余弦cost

显然

$$\int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt = 0$$

所以

$$c_{12} = 0$$

说明cost中不包含sint分量，

因此cost和sint正交.

三、 正交函数集

n个函数 $g_1(t),g_2(t),\ldots g_n(t)$ 构成一函数集，如在区间 (t_1,t_2) 内满足正交特性，即

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t)g_j(t)dt=0 \qquad (i\neq j)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt = K_i$$

则此函数集称为正交函数集

任意函数由n个正交的函数的线性组合所近似

$$f(t) \approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_n g_n(t)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

由最小均方误差准则，要求系数 C_i 满足

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt} = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt$$

在最佳逼近时的误差能量

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^{n} c_r^{\ 2} K_r\right]$$

归一化正交函数集：

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt = 1 \qquad\qquad c_i = \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t)dt$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^{n} c_r^{\ 2}\right]$$

复变函数的正交特性

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t)$$

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_2^*(t) dt}$$

两复变函数正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t) f_2(t) dt = 0$$

§6.4　用完备正交集，帕塞瓦尔定理

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^{n} c_r^{\ 2} K_r\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\varepsilon^2} = 0$$

$$f(t) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r g_r(t)$$

另一种定义：在正交集 $\{g_i(t)\}$ 之外再没有一有限能量的x(t)满足以下条件

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_i(t) dt = 0$$

- 三角函数集 $\{\cos n\omega_1 t\}_{n\to\infty}$

  $\{\sin n\omega_1 t\}_{n\to\infty}$

- 复指数函数集 $\{e^{jn\omega_1 t}\}_{n\to\infty}$

*.信号的表示

1.规范量:用信号在其定义域内的总量来表示信号的大小(Norm).

2.模可积或模可和

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad \text{或} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

3 .信号的一阶规范量

$$\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \ , \qquad \|x(n)\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|$$

$$\|x(t)\|_1 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)| dt$$

$$\|x(n)\|_1 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|$$

4.信号的二阶规范量

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \qquad \|x(n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2}$$

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt}$$

$$\|x(n)\|_2 = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2}$$

*.相关函数的引入

$$f_2(t) = f_1(t-T)$$

$$\rho_{12} = 0$$

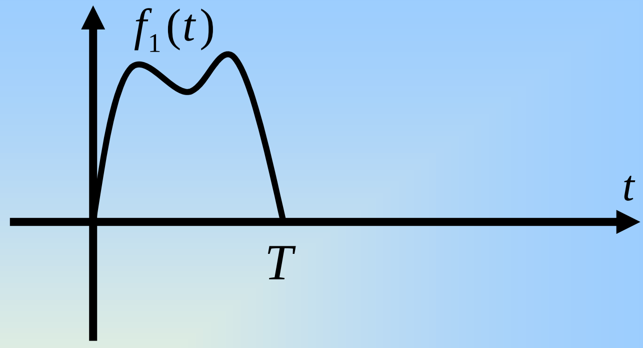
由柯西－施瓦茨不等式可知

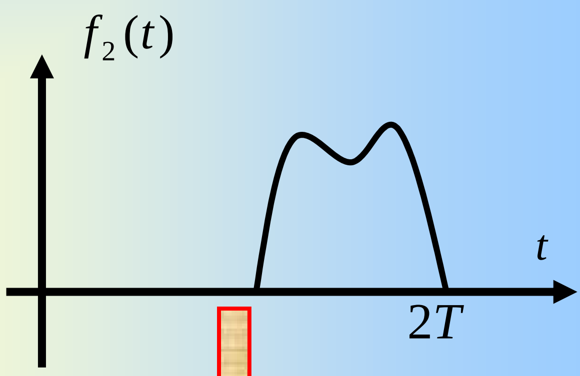
$$|\rho_{12}| \le 1$$

若 $f_1(t) = f_2(t)$ 则 $\rho_{12} = 1$

若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 正交 $\rho_{12} = 0$

ρ_{12} 表明两固定波形之相关性。





需引入相关函数的概念

*相关与卷积的比较

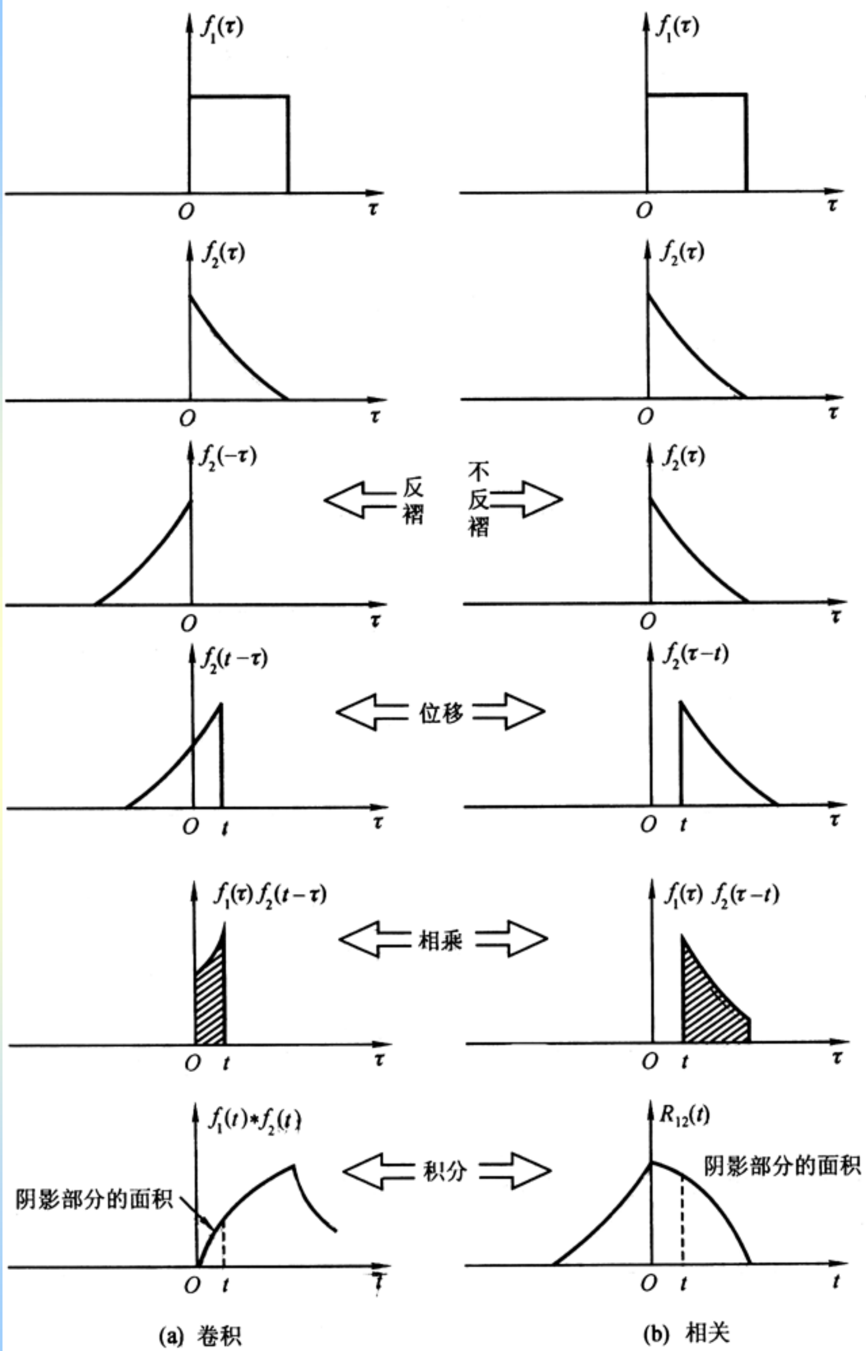
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau$$

变量置换

$$R_{12}(t) = f_1(t) * f_2(-t)$$

两种运算都包含移位，相乘和积分三个步骤，其差别仅在于卷积多了一个折叠的过程



*.已知$x(t)=1 \quad 0<t<T$在其于时间内$x(t)=0$;另一信号$y(t)=x(t-T)$,试求它们的互相关函数$R_{xy}(\tau)$和$R_{yx}(\tau)$.

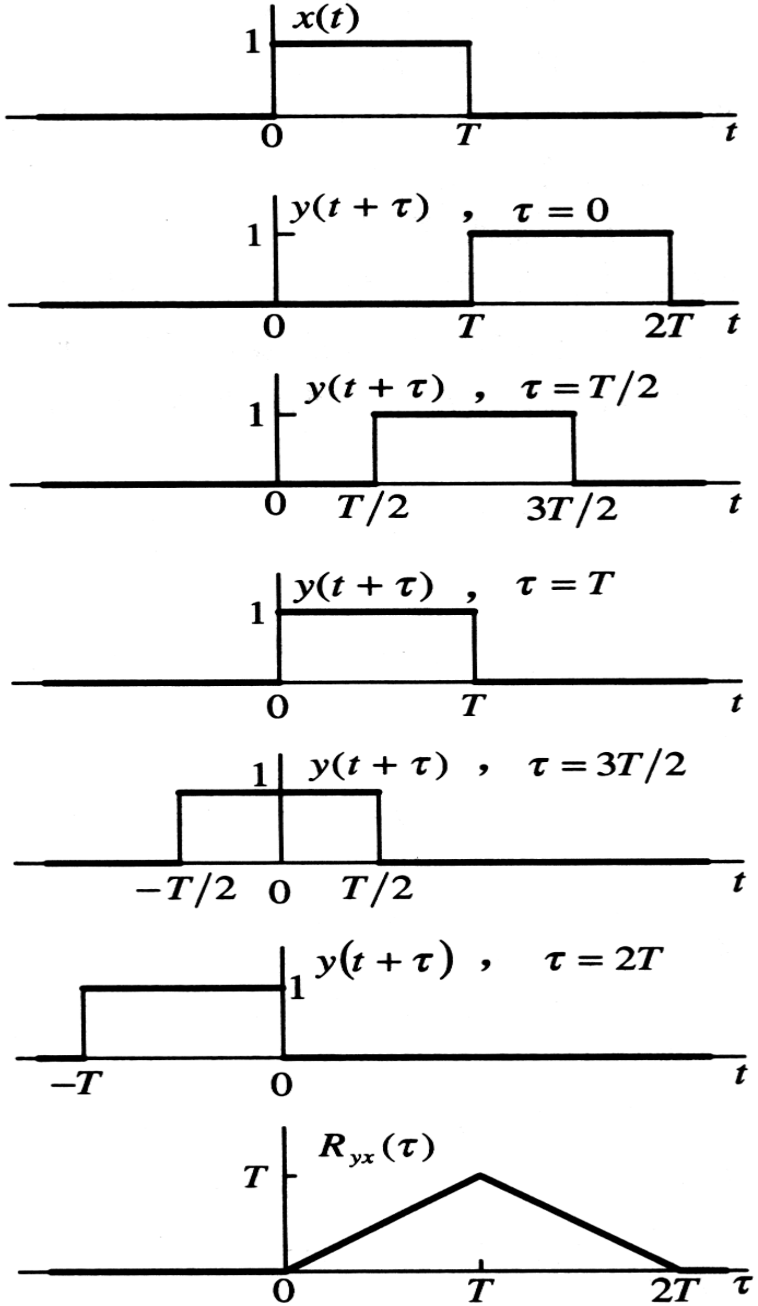
解: $$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)y(t)dt$$

$$R_{yx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t+\tau)x(t)dt$$

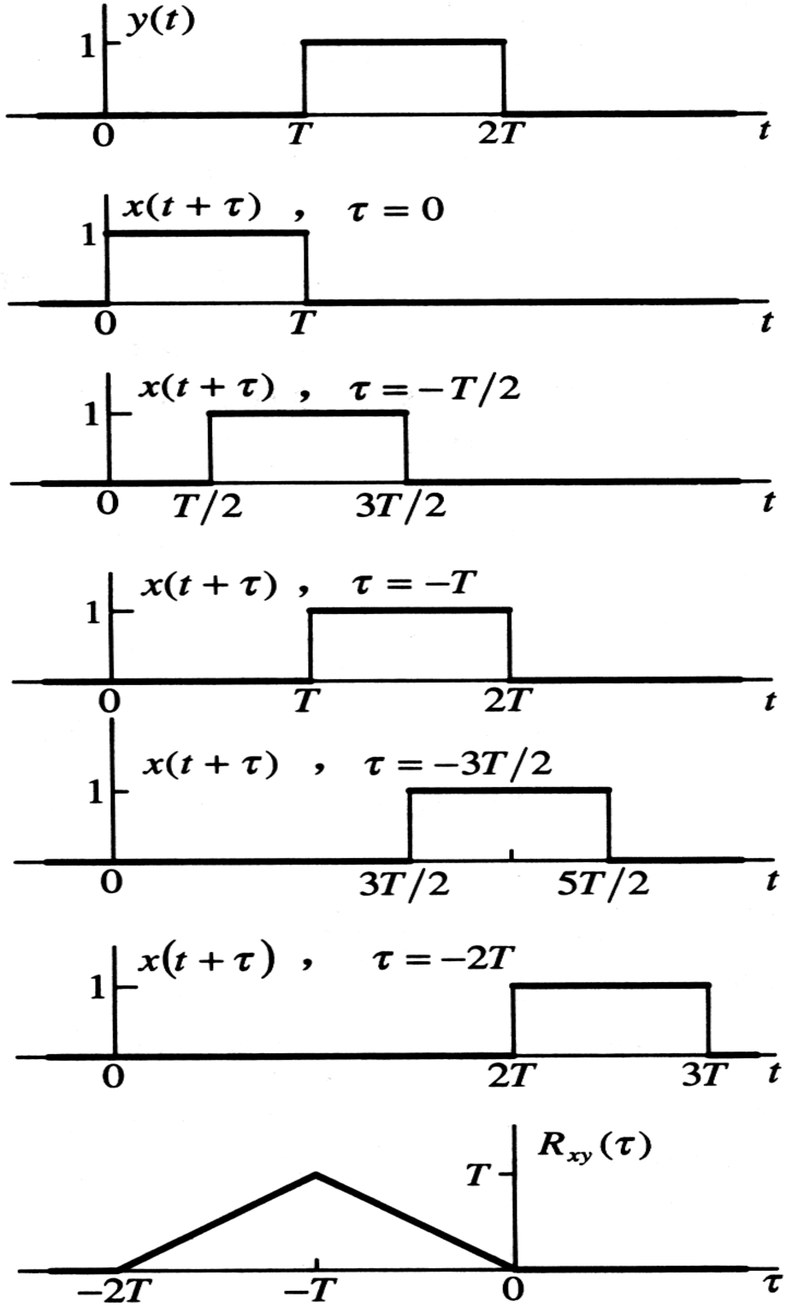
由下述分析可知:

$$R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau)$$

实函数的自相关函数是时移τ的偶函数。



(a) 求 $R_{yx}(\tau)$ 的图解过程



(b) 求 $R_{xy}(\tau)$ 的图解过程

§6.6相关定理

若已知：$FT[x(t)] = X(\omega) \quad FT[y(t)] = Y(\omega)$

证明：$FT[R_{xy}(\tau)] = X(\omega).Y^*(\omega)$

$$\mathbf{FT[R_{xy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt\right].e^{-j\omega\tau}d\tau}$$

$$\mathbf{= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} y^*(t-\tau).e^{-j\omega\tau}d\tau\right]dt}$$

$$\mathbf{= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)Y^*(\omega)e^{-j\omega t}dt = X(\omega)Y^*(\omega)}$$

$FT[R_{xy}(\tau)] = X(\omega)Y^*(\omega) \rightarrow$ 相关定理

• 自相关函数与幅度谱的平方是一对**FT**

$$FT[R_{xx}(\tau)] = X(\omega)X^*(\omega) = \left|X(\omega)\right|^2$$

• 若有y(t)是实偶函数, $Y(\omega)$ 也是实偶函数

则此时相关定理与卷积定理等价

去共轭

$y(\tau-t)$

变量互换

$$FT[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)d\tau]$$

$$= X(\omega).Y^*(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

§6.7 能量谱和功率谱

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t-\tau)dt \Rightarrow R(0)=\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 .e^{j\omega\tau}d\omega \Rightarrow R(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

帕斯瓦尔定理

$$R(0)=\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \ dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$|F(\omega)|^2$没有相位信息,只保留了幅度信息,凡是相同幅度谱但相位谱不同之信号,都具有相同之能谱。

证明：Paseval定理或Paseval恒等式。

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$$

解：由频域卷积定理得

$$F[f_1(t)\bullet f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (*)$$

由奇偶虚实特性可知 $: f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega)$

设(*)式中 $f_1(t) = f(t); f_2(t) = f^*(t)$

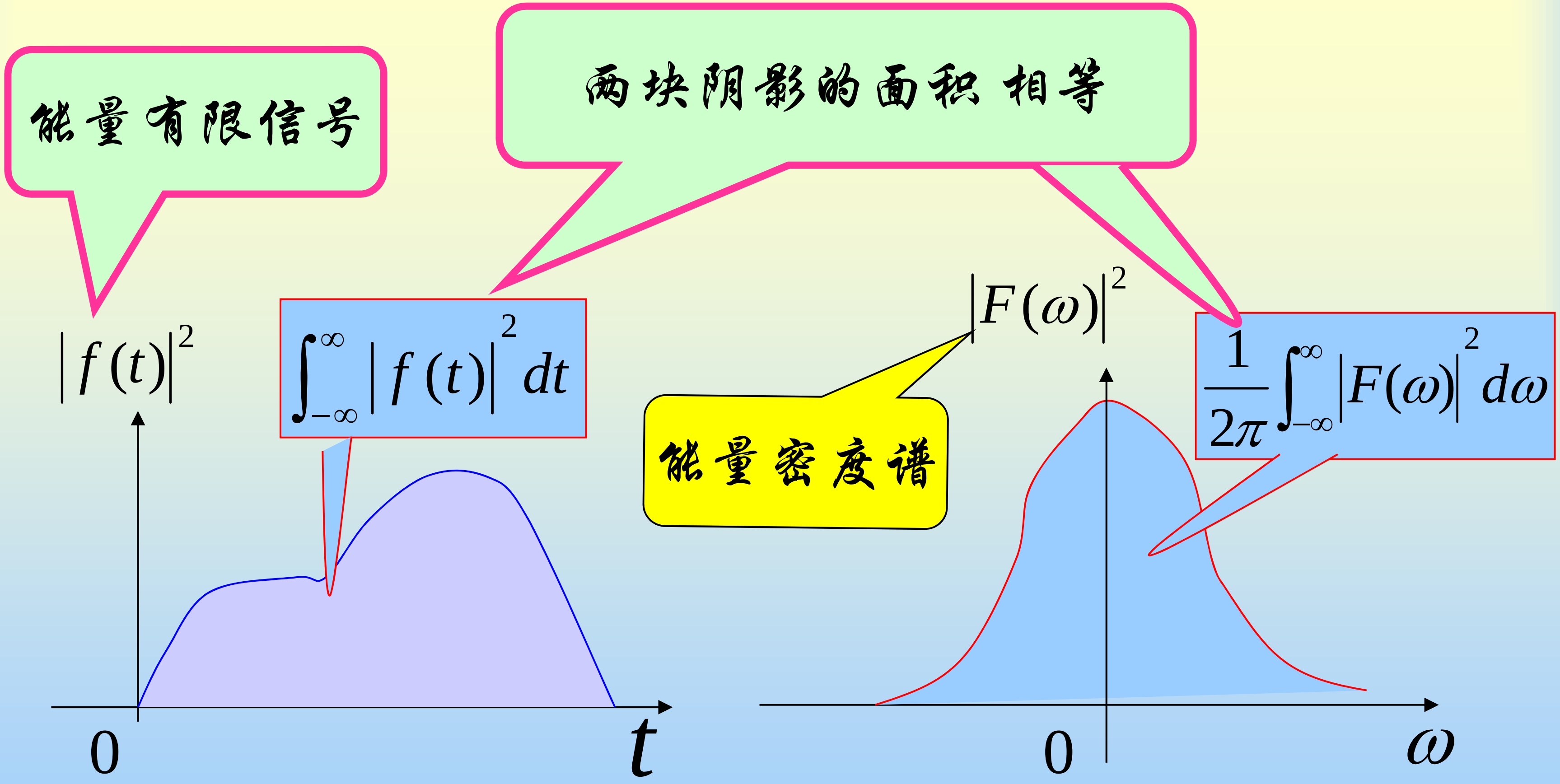
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(-\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$ 证明完毕。

物理意义:非周期能量信号的归一化能量在时域中与在频域中相等，保持能量守恒。

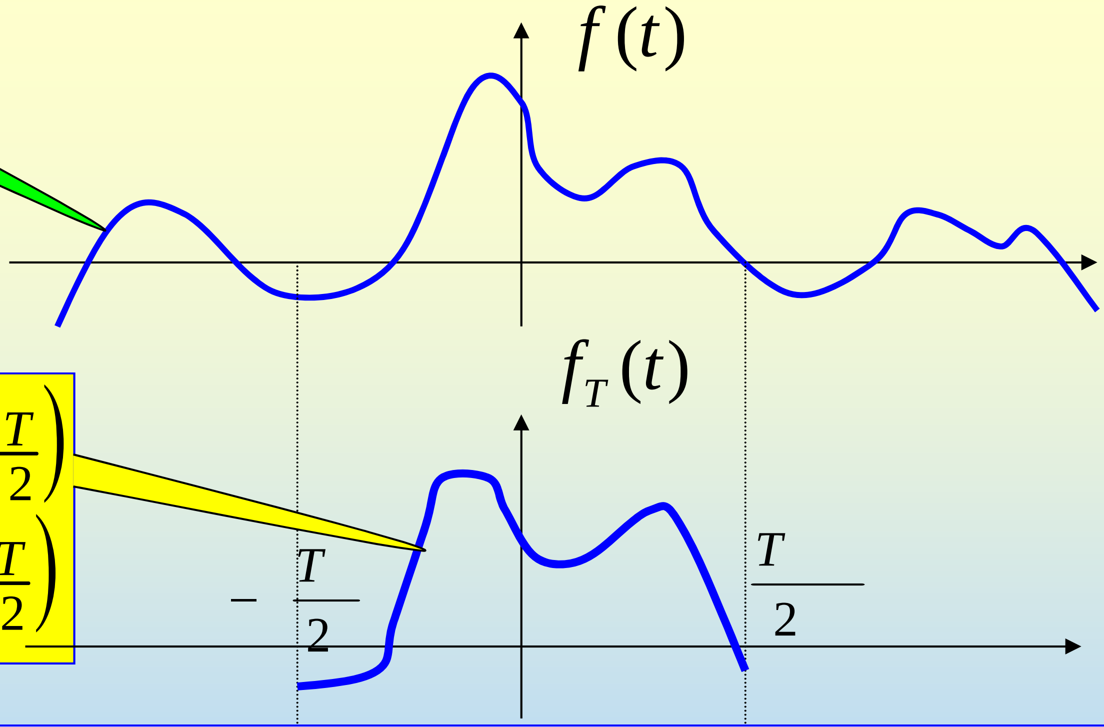
数学解释:内积不变性、范数不变性。

能量谱——帕斯瓦尔定理


能量有限信号
两块阴影的面积 相等
能量密度谱
$|f(t)|^2$
$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$
$|F(\omega)|^2$
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$
0
t
0
ω

平均功率

功率有限信号f(t)



$$f_T(t)=\begin{cases} f(t) & \left(|t|\le \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \left(|t|>\frac{T}{2}\right) \end{cases}$$

平均功率

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}\,d\omega$$

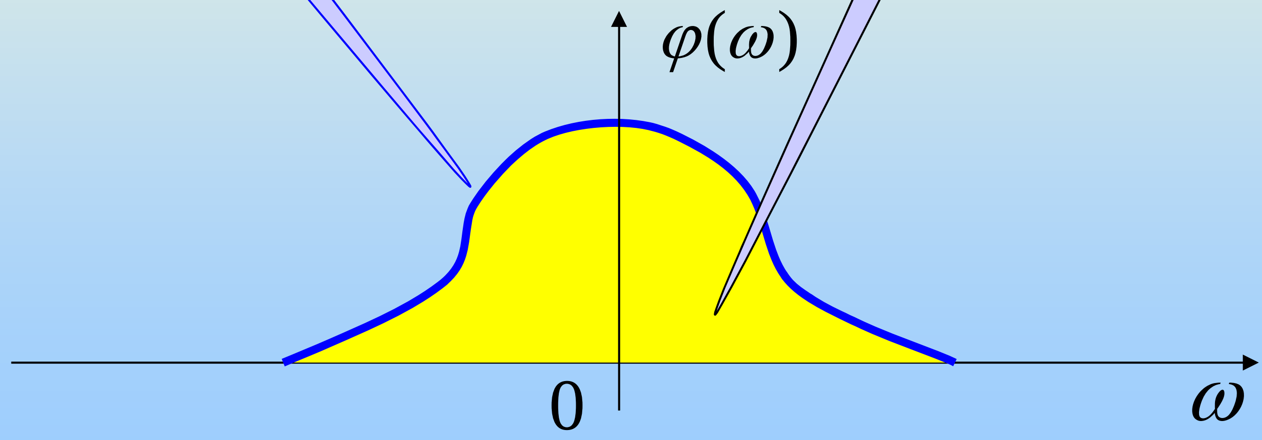
功率谱

功率密度函数

$$\varphi(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\left|F_T(\omega)\right|^2}{T}$$

平均总功率

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)d\omega$$



例：周期信号 $f(t)$ 的功率谱，周期为 T_1

$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$$

$$G(\omega)=TSa(\frac{\omega T}{2})$$

$$F_T(\omega)=\frac{T}{2\pi}Sa(\frac{\omega T}{2})*F(\omega)=T\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n Sa\left[\frac{(\omega-n\omega_1)T}{2}\right]$$

$$\varphi(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{\left|F_T(\omega)\right|^2}{T}=\lim_{T\to\infty}T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|F_n\right|^2 Sa^2\left[\frac{(\omega-n\omega_1)T}{2}\right]$$

$$\varphi(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|F_n\right|^2\delta(\omega-n\omega_1)$$

维纳—欣钦定理

$$R(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f^*(t-\tau) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\lim_{T \to \infty} \frac{|F(\omega)|^2}{T} e^{j\omega\tau}} d\omega$$

$\varphi(\omega)$

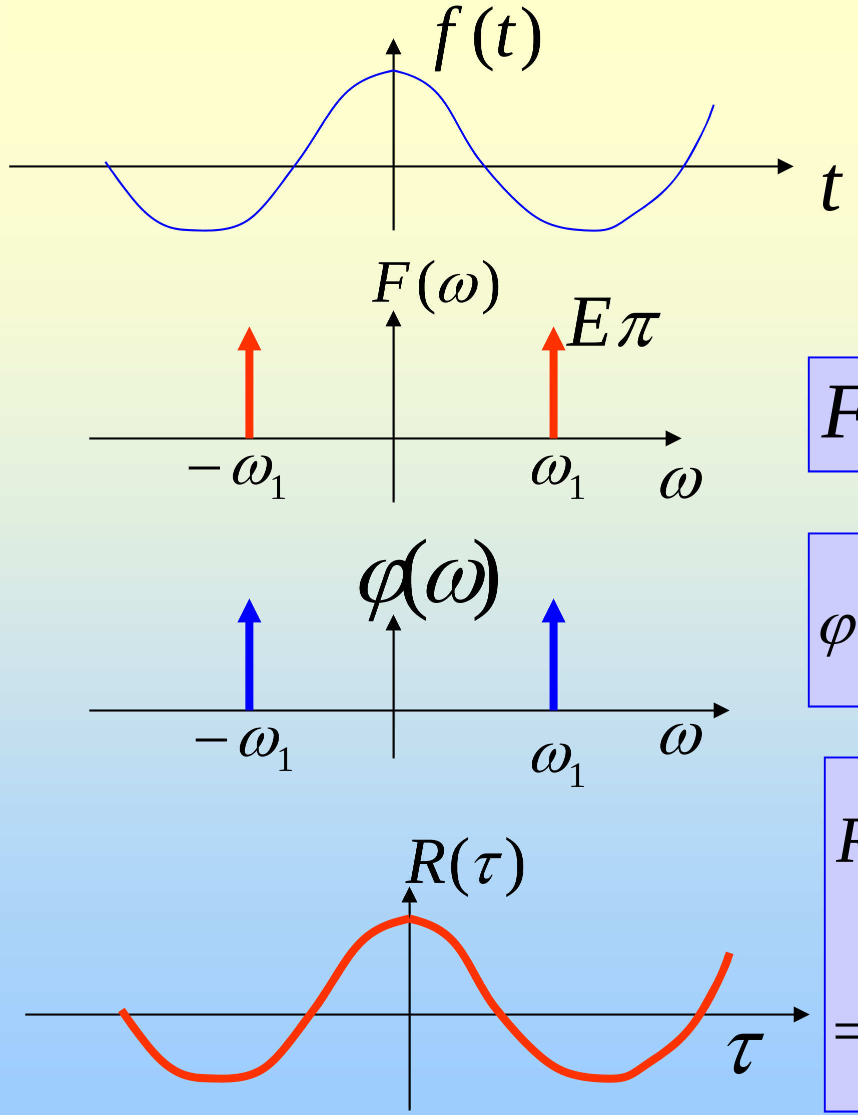
一对傅立叶变换

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$\rightarrow$ Wiener – Khintchine定理

例：求周期余弦的功率谱$\varphi(\omega)$和自相关$R(\tau)$



$$f(t) = E\cos\omega_1 t$$
$$= \tfrac{E}{2}(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t})$$

$$F(\omega) = E\pi[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)]$$

$$\varphi(\omega) = \frac{E^2\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)]$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$
$$= \frac{E^2}{4}[e^{j\omega_1\tau} + e^{-j\omega_1\tau}] = \frac{E^2}{2}\cos\omega_1\tau$$

周期信号的自相关仍然同周期

$$x(t) = E\cos\omega_1 t$$

对功率有限信号

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

同周期

$$= \lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\omega_1 t.\cos[\omega_1(t-\tau)]dt$$

$$= \frac{E^2}{2}\cos\omega_1\tau$$

§6.8 激励和响应的功率谱和能量谱

$$r(t)=e(t)*h(t) \qquad R(j\omega)=E(j\omega)H(j\omega)$$

$$\psi_r(j\omega)=|R(j\omega)|^2=|H(j\omega)|^2|E(j\omega)|^2$$

响应的能量谱

$$=|H(j\omega)|^2\psi_e(j\omega)$$

$$\mathbf{|H(j\omega)|^2=|H(j\omega)||H^*(j\omega)|}$$

$$\mathbf{F[h(t)]=H(j\omega) \quad F[h(-t)]=H^*(j\omega)}$$

冲激响应的自相关函数：$\mathbf{R_r(\tau)=R_h(\tau)*R_e(\tau)}$

$$\boxed{\text{响应之相关函数}} = \boxed{h(t)\text{之自相关函数}} * \boxed{\text{激励之自相关函数}}$$

功率谱

取一段时间间隔
功率有限信号

$$\varphi_r(j\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|R_T(j\omega)\right|^2$$

$$= \left|H(j\omega)\right|^2 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|E_T(j\omega)\right|^2$$

$$= \left|H(j\omega)\right|^2 \varphi_e(j\omega)$$

激励和响应的自相关

$$\psi_r(j\omega) = H(j\omega)H^*(j\omega)\psi_e(j\omega)$$

$$\varphi_r(j\omega) = H(j\omega)H^*(j\omega)\varphi_e(j\omega)$$

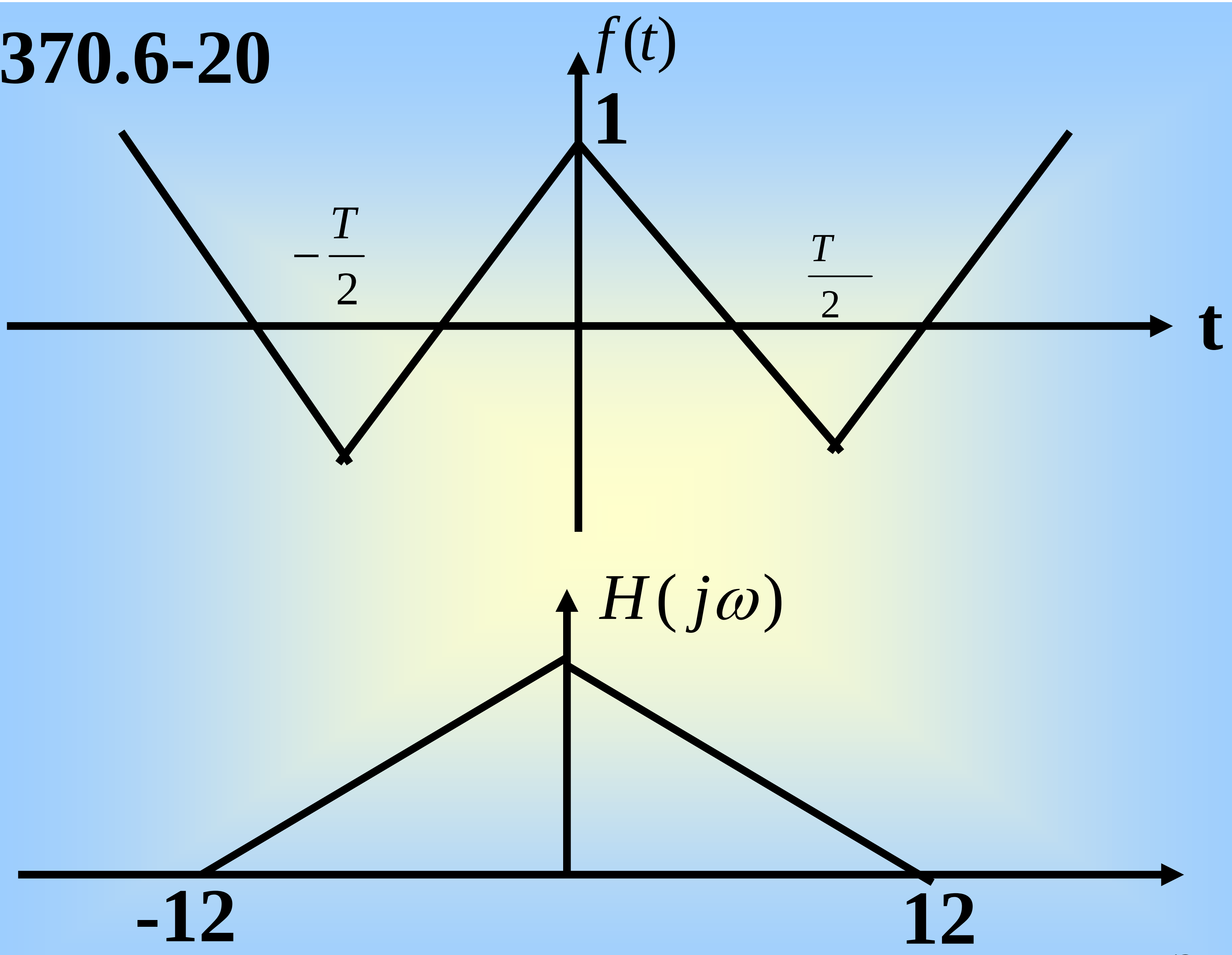
$$FT[h(t)] = H(j\omega)$$

$$FT[h^*(-t)] = H^*(j\omega)$$

$$R_r(\tau) = R_e(\tau) * h(t) * h(-t)$$

$$= R_e(\tau) * R_h(\tau)$$

P370.6-20



*.周期信号的功率

$$p = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}d\omega$$

当 $T\uparrow, |F_T(\omega)|\uparrow; T\to\infty$ 时， $f_T(t) = f(t)$

$$\varphi(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$ …功率密度函数

$$p253.(3-130),\ s_f(\omega)=2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\left|F_n\right|^2\delta(\omega-n\omega_1)$$

$$F_n=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos n\omega_1 t\,dt=$$

$$\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\frac{4}{T}\left(\frac{T}{4}-t\right)\cos n\omega_1 t\,dt=\frac{4}{(n\pi)^2}(1-\cos n\pi)$$

$$=\frac{4}{(n\pi)^2}[1-(-1)^n]=\begin{cases}0 \ldots\ldots n\text{为偶数}\\ \dfrac{8}{n^2\pi^2}\ldots n\text{为奇数}\end{cases}$$

$\because\ f(t)$无直流分量， $\therefore\ F_0=0$

$$\therefore \varphi(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|F_n\right|^2 \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$= \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots n\text{为偶数} \\ 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{64}{(n\pi)^4} \delta(\omega - n\omega_1) \end{cases}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{12}(\omega + 12)[u(\omega + 12) - u(\omega)]$$

$$+ \frac{1}{12}(12 - \omega)[u(\omega) - u(\omega - 12)]$$

$$\therefore \left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{144}(\omega + 12)^2[u(\omega + 12) - u(\omega)] +$$

$$\frac{1}{144}(12 - \omega)^2[u(\omega) - u(\omega - 12)]$$

*.输出信号的功率谱为:(p523-524)(6-93)

$$S_r(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega)$$

1.当 $T = \dfrac{\pi}{3}$ 时, $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T} = 6$, 故只有基波可通过 $H(\omega)$, 其它各次谐波均被滤出:

$$\therefore S_r(\omega) = 2\pi \frac{16}{\pi^4}[\delta(\omega+6) + \delta(\omega-6)]$$

2.当 $\mathrm{T} = \dfrac{\pi}{6}, \omega_1 = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}} = 12, \therefore \mathrm{S_r}(\omega) = 0; \overline{\mathrm{r}^2}(\omega) = 0$