第八章　Z变换、离散时间系统的Z域分析

§8.1　引言

为避免解差分方程的困难，对离散系统常用变换域分析。

①z变换.时域→z域，差分方程→代数方程。类似于连续时间系统的拉氏变换。

②离散付立叶变换(DFT)：针对有限长序列，便于计算机处理。

③快速付立叶变换(FFT)：DFT的快速算法(实用)。

④沃尔什变换及其快速算法。

§ 8.2 z变换的定义、典型序列的z变换

一、z变换的定义

z变换定义可由抽样信号的拉氏（付氏）变换引出，也可直接对离散信号定义。为便于理解z变换与拉氏变换的关系，由拉氏变换导出：

抽样信号：$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)$

其中T为抽样间隔，对上式进行拉氏变换，有：

$$F_s(s) = \int_0^{\infty} f_s(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\left[\sum_{n=o}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-st}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-snT}$$

令$z = e^{sT}$ $(s = \frac{1}{T}\ln z)$有：　$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$

令$T = 1$有：$\boxed{F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}}$

单边Z变换

二、 典型序列的Z变换

- 单位样值序列
- 单位阶跃序列
- 斜变序列
- 指数序列
- 正弦余弦序列

$$(1)\quad ZT[\delta(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

$$(2)\quad ZT[\delta(n-m)]=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n-m)z^{-n}$$

$$=\sum_{r=m}^{\infty}\delta(r)z^{-(r+m)}=z^{-m}$$

$$(3)\quad ZT[\delta(n+1)]=\sum_{n=-\infty}^{-1}\delta(n+1)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n+1)z^{-n}$$

$$=z^{1}+0=z$$

$$ZT[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \qquad (|z| > 1)$$

$$ZT[nu(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nu(n) z^{-n} = \frac{1}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z}{(z - 1)^2}$$

$$ZT[a^n u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \qquad (|z| > a)$$

余弦序列的 Z 变换:

$$ZT[e^{j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}$$

$$ZT[e^{-j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}$$

$$ZT[\cos \omega_0 n] = ZT[(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})/2]$$

$$= (\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}})/2$$

$$= \frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z\cos \omega_0 + 1}$$

正弦序列的 Z 变换:

$$ZT[e^{j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}$$

$$ZT[e^{-j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}$$

$$ZT[\sin \omega_0 n] = ZT[(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})/2j]$$

$$= \left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}\right)/2j$$

$$= \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z\cos \omega_0 + 1}$$

例

$$ZT[\beta^n e^{j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - \beta e^{j\omega_0}}$$

$$ZT[\beta^n e^{-j\omega_0 n}] = \frac{z}{z - \beta e^{-j\omega_0}}$$

$$ZT[\beta^n \cos\omega_0 n] = ZT[\beta^n (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})/2]$$

$$= \left(\frac{z}{z - \beta e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - \beta e^{-j\omega_0}}\right)/2$$

$$= \frac{z(z - \beta\cos\omega_0)}{z^2 - 2z\beta\cos\omega_0 + \beta^2}$$

$$(|z| > \beta)$$

§8.3　Z变换的收敛域

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+\frac{x(1)}{z}+\frac{x(2)}{z^{2}}+\cdots$$

收敛域：当$x(n)$为有界时，令上述级数收敛的 z 的所有可取的值的集合称为收敛域

1）比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$$

2) 根值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$$

$$\begin{cases}\rho<1，& 收敛\\ \rho>1，& 发散\\ \rho=1，& 方法失效\end{cases}$$

例：

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| az^{-1} \right| = \rho$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| az^{-1} \right|^n} = \left| az^{-1} \right| = \rho$$

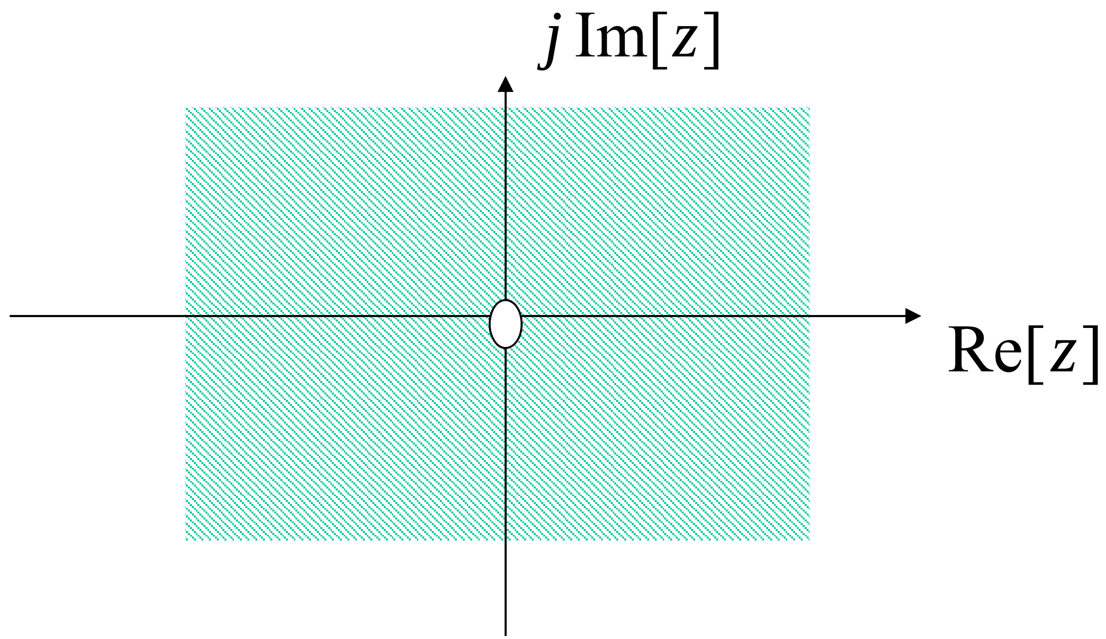
$$\begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow |a| < |z| & \text{收斂} \\ \rho > 1 \Rightarrow |a| > |z| \\ \rho = 1 \Rightarrow |a| = |z| \end{cases}$$

几类序列的收敛域

（1）有限序列：在有限区间内，有非零的有限值的序列 $x(n)$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad n_1 \le n \le n_2$$

收敛域为除了0和 ∞ 的整个 Z 平面



（2）右边序列：只在 $n \ge n_1$ 区间内，有非零的有限值的序列 $x(n)$

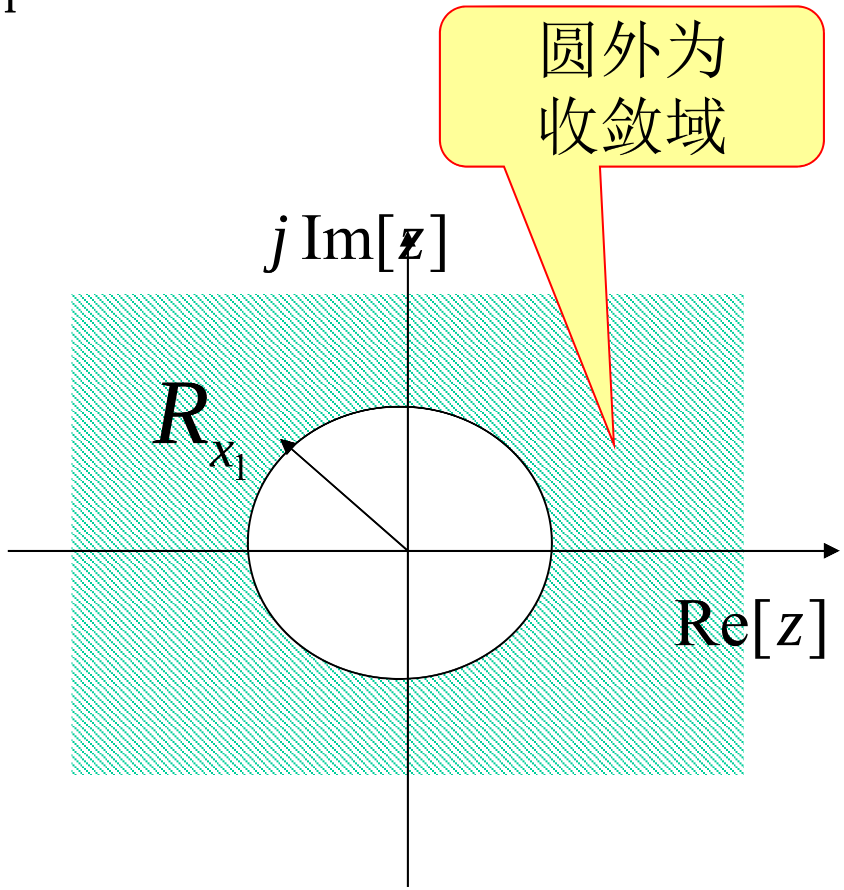
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad n_1 \le n \le \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(n) z^{-n}\right|} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(n)\right|} = R_{x_1} < |z|$$

$$|z| > R_{x_1}$$

收敛半径



（3）左边序列：只在$n \le n_2$区间内，有非零的有限值的序列 $x(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n} \qquad -\infty \le n \le n_2$$

$$X(z) \overset{m=-n}{=} \sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m) z^{m} \overset{n=m}{=} \sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n) z^{n}$$

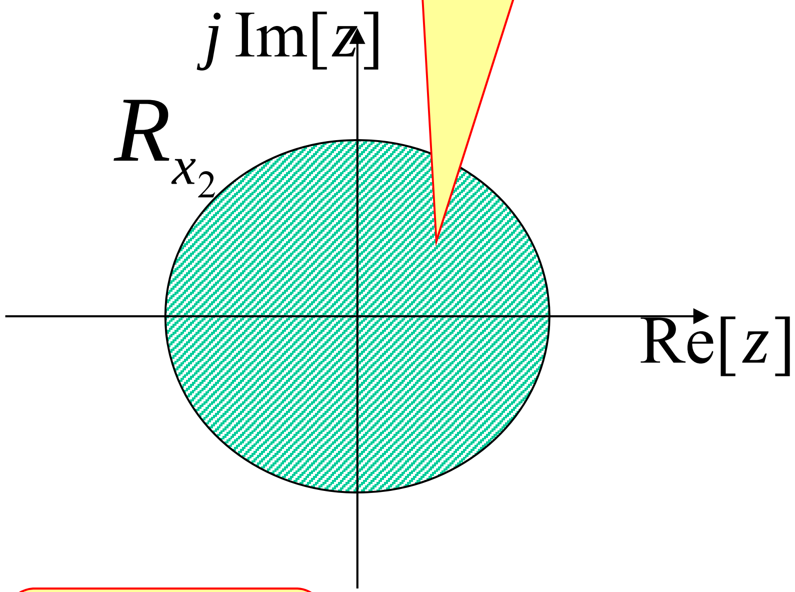
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(-n)z^{n}\right|}<1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(-n)\right|}<\left|z\right|^{-1}$$

$$\left|z\right|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x(-n)\right|}}=R_{x_2}$$

收敛半径

圆内为收敛域，
若$n_2>0$
则不包括z=0点



（4）双边序列：只在 $-\infty \le n \le \infty$ 区间内，

有非零的有限值的序列 $x(n)$

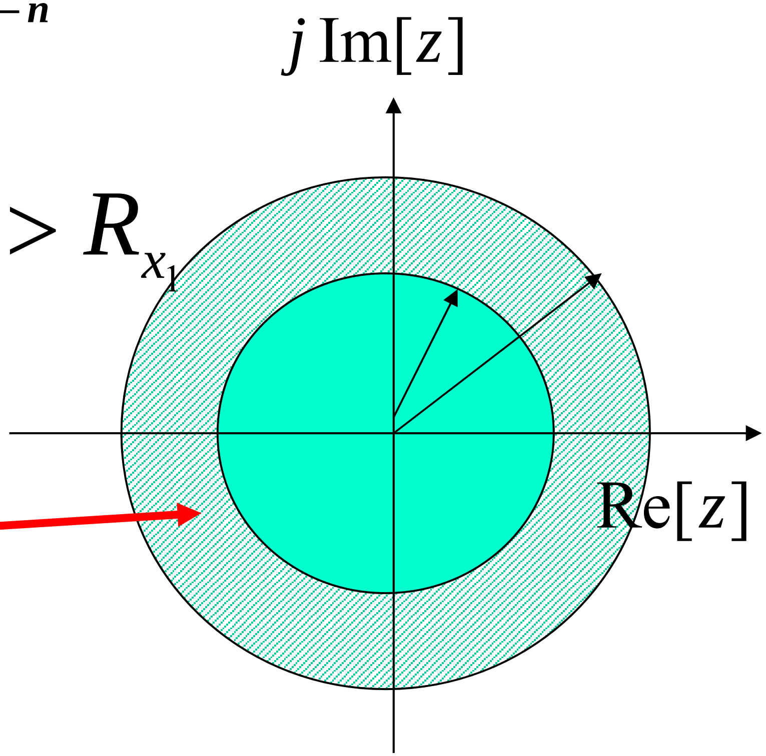
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le \infty$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

圆内收敛

圆外收敛

$R_{x_2} > R_{x_1}$



$R_{x_2} > R_{x_1}$ 有环状收敛域

$R_{x_2} < R_{x_1}$ 没有收敛域

例：

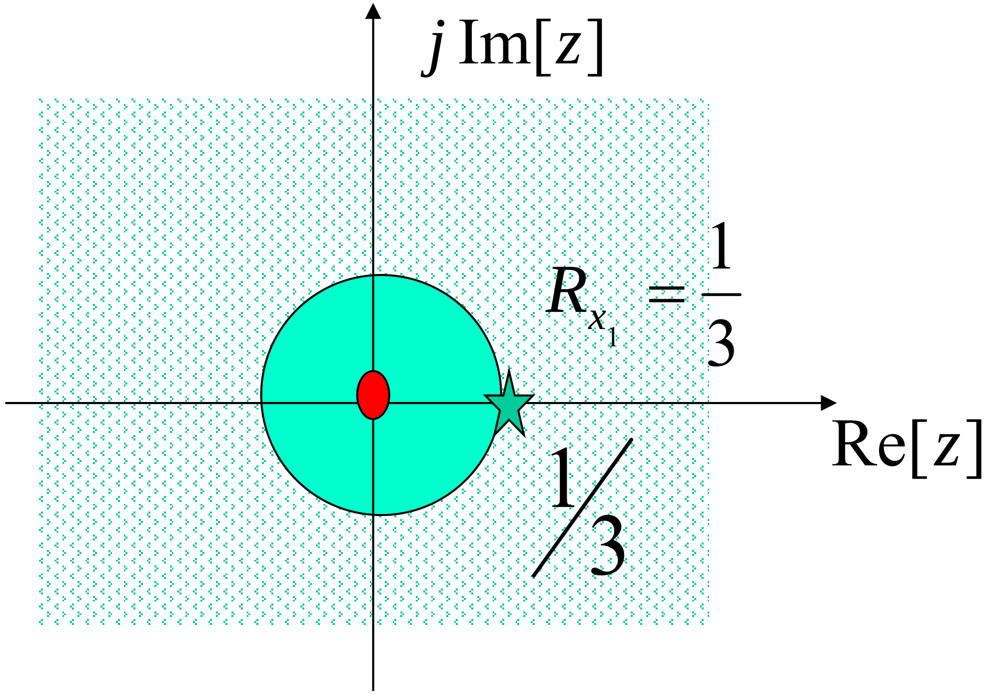
(1) $$x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

右边序列

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$R_{x_1}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore |z|>\frac{1}{3}$$



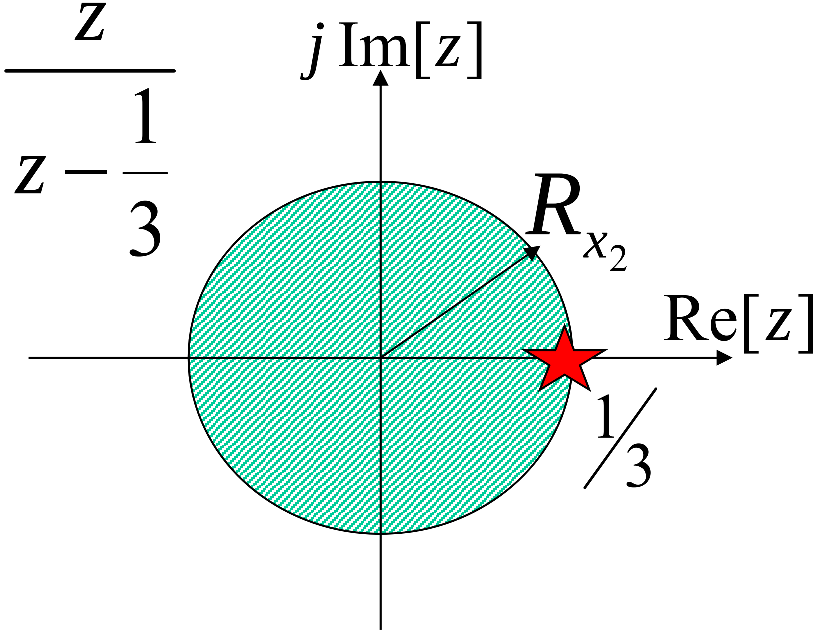
例：

$$(2)\quad x(n) = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

左边序列

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n \overset{n=-m}{=} -\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{-m}$$

$$= 1 - \sum_{m=0}^{\infty}(3z)^m = 1 - \frac{1}{1-3z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$



$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(3z)^n\right|} < 1$$

$$|z| < \frac{1}{3} = R_{x_2}$$

收敛半径

例：(3) $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}[u(n)-u(n-8)]$

有限长序列

$$X(z)=\sum_{n=0}^{8}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^{n}=\frac{-(-\frac{1}{3}z^{-1})^{8}+1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z^{8}-(\frac{1}{3})^{8}}{z^{7}(z-\frac{1}{3})}$$

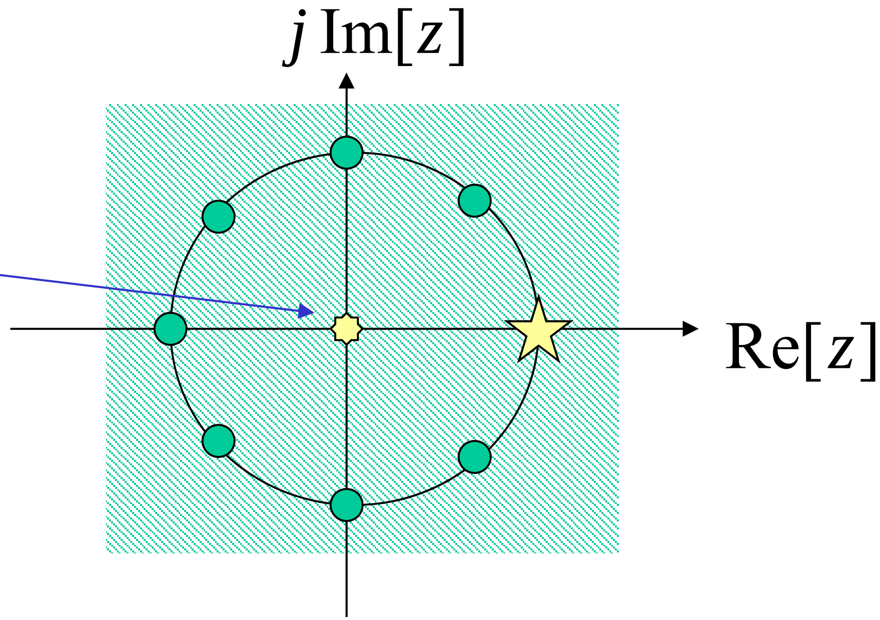
收敛域为除了 **0** 和 ∞ 的整个 Z 平面

$$z^{8}=(\tfrac{1}{3})^{8}e^{j2k\pi}$$

$z=\frac{1}{3}e^{j\frac{2K\pi}{8}}$ → 8个零点

$z=0$ → 7阶极点

$z=\frac{1}{3}$ → 一阶极点



例：

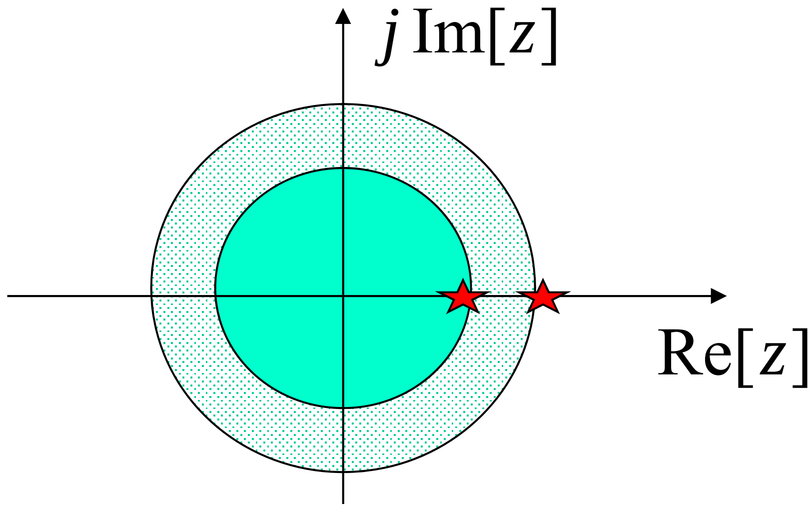
$$(4) \quad x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$$

双边序列

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^{n}$$

$$= \frac{-z}{z-3} + \frac{1}{z - \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{8}{3} z}{(z-3)(z-\frac{1}{3})}$$

$$\frac{1}{3} < |z| < 3$$



非因果信号的Z变换

非因果信号无始，终于n=-1点。

1、对x(n)求反，令-k=n,构成因果序列x(-k)

2、对x(-k)求单边Z变换

3、令$w=z^{-1}$代$x(w)$有：$F(Z)=F(w)\big|_{w=z^{-1}}$,并标注收敛域。

例：求双边指数序列$v^{|n|}$的Z变换。$(v>0)$

解：$v^{|n|}=v^{n}u(n)+v^{-n}u(-n-1)=f_a(n)+f_b(n)$

$$F_a(Z)=ZT[f_a(n)]=\frac{Z}{Z-a},|Z|>v$$

求$F_b(Z)$如下：

$$1: \ x(-k)=f_b(n)\big|_{n=-k}=v^{k}u(k-1)=v^{k}u(k)-\delta(k)$$

$$2: X(w)=ZT[x(-k)]=\frac{w}{w-v}-1=\frac{v}{w-v},|w|>v$$

$$3: F_b(z)=X(w)\big|_{w=z^{-1}}=\frac{z}{z-v^{-1}},|z|<v^{-1}$$

$$\therefore F(z)=F_a(z)+F_b(z)=...,v<|z|<v^{-1}$$

§8.4 Z变换的逆变换

（1）留数法

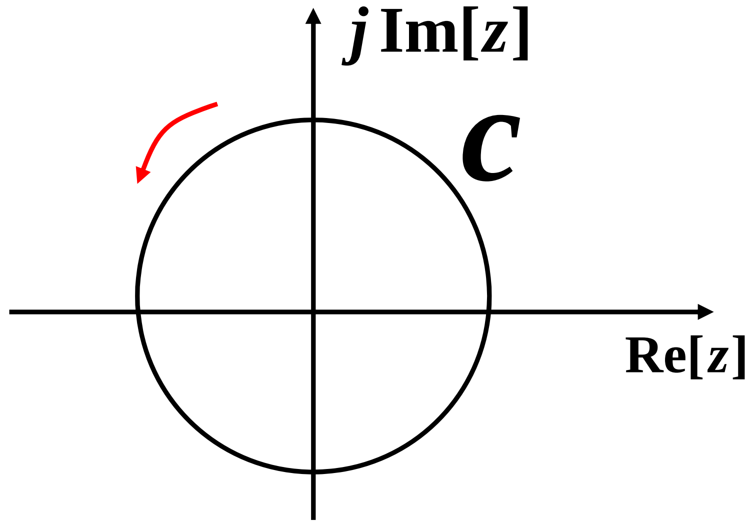
（2）幂级数展开法

（3）部分分式法

（1）留数法

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

- 假设有一固定的围线C，它包围原点，沿围线逆时针转一圈，两边乘以 z^{m-1} ，然后沿着围线积分，得到：



$$\int_C z^{m-1}X(z)dz=\oint_C z^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}dz=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)\oint_C z^{-n+m-1}dz$$

- 由复变函数中的柯西定理

$$\oint_C z^{k-1} dz = \begin{cases} 2\pi j & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

- 只有右边的 $-n+m-1=-1$ 即$n=m$一项，
- 于是

$$\oint_C X(z) z^{n-1} dz = 2\pi j x(n)$$

- 逆变换 $x(n) = \dfrac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$

当X(Z)为有理分式，用留数定理，有：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

用留数求围线积分

$$=\sum_n \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},\text{c内各极点}]_{z=z_m}$$

一阶极点：

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}=[(z-z_m)X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}$$

S 阶极点：

$$\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}[X(z)z^{n-1}(z-z_m)^s]\right\}_{z=z_m}$$

例 $X(z)=\dfrac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.5)}$ $(|z|>1)$ $x(n)=?$

解 $\because |z|>1$ $\therefore x(n)$ 必然是因果序列，右边序列

$$x(n)=\sum_n \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}$$

$$=\sum \mathrm{Res}\left[(z-z_m)\frac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.5)}z^{n-1}\right]_{z=z_m}$$

$n\geq 2,\quad z_1=1,\quad z_2=0.5$

$n=0,\quad z_1=1,\quad z_2=0.5,\quad z_{3,4}=0$

$n=1,\quad z_1=1,\quad z_2=0.5,\quad z_3=0$

$$(1)n\geq 2 \quad x(n)=z^{n-2}\frac{z^3+2z^2+1}{z-0.5}\Big|_{z=1}+z^{n-2}\frac{z^3+2z^2+1}{z-1}\Big|_{z=0.5}$$

$$=8-13(0.5)^n$$

$$(2)n=0 \quad x(n)=\frac{z^3+2z^2+1}{z^2(z-1)(z-0.5)}\Big|_{z=0}+8-13(0.5)^0$$

$$=6+8-13=1$$

$$(3)n=1 \quad x(n)=\frac{z^3+2z^2+1}{z\ \ (z-1)(z-0.5)}\Big|_{z=0}+8-13(0.5)^1$$

$$=2+8-13(0.5)\ \ =3.5$$

（2）部分分式法

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z+\cdots b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k}$$

若x(z)的极点是单阶的

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{b_0+b_1z+\cdots b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{z(a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k)}$$

$$=\frac{B_0}{z}+\frac{B_1}{z-v_1}+\ldots+\frac{B_k}{z-v_k}$$

$$X(z)=B_0+\sum_{m=1}^{k}\frac{zB_m}{z-v_m}$$

$$(|z| > R) \quad x(n) = \sum_{m=1}^{k} v_m z_m^n u(n) + B_0 \delta(n)$$

$$(|z| < R) \quad x(n) = -\sum_{m=1}^{k} B_m v_m^n u(-n-1) + B_0 \delta(n)$$

若x(z)含高阶极点，最好用留数法。

例：$X(z)=\dfrac{5z}{z-3z^2-2}\quad(\dfrac{1}{3}<|z|<2)\quad x(n)=?$

双边序列

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}-\frac{z}{z-2}$$

右边序列

左边序列

$$x(n)=(\tfrac{1}{3})^n u(n)+2^n u(-n-1)$$

§8.5 Z变换的基本性质

- 线性和位移性
- 序列线性加权（Z 域微分）
- 序列指数加权（Z 域尺度变换）
- 初值定理和终值定理
- 时域卷积和 Z 域卷积定理
- 帕斯瓦尔定理

1、线性

若$ZT[x_1(n)] = X_1(z) \quad (R_{11} \le |z| \le R_{12})$

$ZT[x_2(n)] = X_2(z) \quad (R_{21} \le |z| \le R_{22})$

则：$ZT[c_1x_1(n)+c_2x_2(n)] = C_1X_1(z)+C_2X_2(z)$

$$(\max[R_{11}, R_{21}] < |z| < \min[R_{12}, R_{22}])$$

2、位移特性：

①双边z变换

若$x(n)$ 的双边z变换为：$ZT[x(n)] = X(z)$

则：$ZT[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$

②单边z变换

a.若 $x(n)$为双边序列，其单边变换为：$ZT[x(n)u(n)] = X(z)$

则移序后的单边变换为：

$$ZT[x(n+m)u(n)] = z^m\left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}\right]$$

$$ZT[x(n-m)u(n)] = z^{-m}\left[X(z) - \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}\right]$$

b.若为因果序列：

$$ZT[x(n-m)u(n)] = z^{-m}x(z)$$

$$ZT[x(n+m)u(n)] = z^{m}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}\right]$$

例：求因果离散线性时不变系统的零状态响应: $y(n) - 2y(n-2) = u(n)$

解：对方程两边同取z变换，有：

$$Y(z) - 2z^{-2}Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\therefore Y(z) = \frac{z}{(z-1)(1-2z^{-2})} = \frac{z^3}{(z-1)(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})}$$

$$\therefore \frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-\sqrt{2}} + \frac{A_3}{z+\sqrt{2}}$$

$$A_1 = \left.\frac{z^2}{z^2-2}\right|_{z=1} = -1 \qquad A_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \qquad A_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore y(n) = \left[-1 + \frac{2+\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}\right)^n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{2}\right)^n\right]u(n)$$

3、序列线性加权特性

若$x(n) \leftrightarrow X(z)$则：$nx(n) \leftrightarrow -z\dfrac{d}{dz}X(z)$

例：已知$ZT[u(n)] = \dfrac{z}{z-1}$求 $nu(n), n^2u(n)$ 的z变换

解：

$$ZT[nu(n)] = -z\frac{d}{dz}[ZT[u(n)]] = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}, |z| > 1$$

$$ZT[n^2u(n)] = (-z)^2\frac{d^2}{dz^2}[ZT[u(n)]] = z^2\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}, |z| > 1$$

4、尺度变换特性

若$x(n) \leftrightarrow X(z)$则：$a^n x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$ ；$a^{-n} x(n) \leftrightarrow X(az)$

例：1、求$x(n)=a^n u(n)$ 的单边z变换

解：由于$ZT[u(n)]=\frac{z}{z-1}=X_1(z), |z|>1$

由域尺度变换性可知：$ZT[a^n u(n)]=X_1\left(\frac{z}{a}\right), \left(\left|\frac{z}{a}\right|>1\right)$

$$\therefore ZT[a^n u(n)]=\frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a}-1}=\frac{z}{z-a}, (|z|>|a|)$$

特别地：当a=-1时，有：

$$\therefore ZT[(-1)^n u(n)]=\frac{z}{z+1}, (|z|>1)$$

2、求$x(n)=na^{-n}u(n)$的单边z变换

解：$X_1(z)=ZT[u(n)]=\dfrac{z}{z-1},(|z|>1)$

$$X_2(z)=ZT[a^{-n}u(n)]=X_1(az)=\frac{az}{az-1}=\frac{z}{z-\frac{1}{a}},\left(|z|>\left|\frac{1}{a}\right|\right)$$

$$X(z)=ZT[na^{-n}u(n)]=-z\frac{d}{dz}[X_2(z)]=\frac{\frac{z}{a}}{\left(z-\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{\frac{z}{a}}{\left(z-\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{az}{(az-1)^2},\left(|z|>\left|\frac{1}{a}\right|\right)$$

5、初值定理

若 $x(n)$ 为因果序列，$x(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$ 则：$x(0)=\lim_{z\to\infty}x(z)$

例：求 $x(z)=\frac{z(z+2)}{(z-1)(z-0.5)},(|z|>1)$ 的初值

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}x(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z(z+2)}{(z-1)(z-0.5)}=1$$

6、终值定理

若 $x(n)$ 为因果序列，$x(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$

则：$\lim_{n\to\infty}x(n)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)x(z)\right]$

运用条件：x(n)收敛。

7、时域卷积定理：

若两序列的$x(n), h(n)$ z变换分别为：

$$X(z)=ZT[x(n)], H(z)=ZT[h(n)]$$

有：$ZT[x(n)*h(n)]=X(z)H(z)$

$R(z)=X(z)H(z)$的收敛域，一般说来是与收敛域的公共部分（两者收敛域的交集）但特别地：

$$X(z)=\frac{z}{(z-a)(z-0.5)},(|z|>a) \qquad H(z)=\frac{z-a}{(z-b)(z-0.1)},(|z|>b)$$

$$R(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{(z-b)(z-0.1)(z-0.5)},(|z|>R_1)$$

当b>0.5时，$R_1=b$ 即收域为$|z|>b$

当b<0.5时，$R_1=0.5$ 即收敛域为$|z|>0.5$

显然R_1可能大于a也可能小于a

例：某因果系统，描述为：$y(n)-0.9y(n-1)=x(n)$

求输入$x(n)=a^{n}u(n)$ 时，系统的零状态响应.

解：$$H(z)=\frac{1}{1-0.9z^{-1}}=\frac{z}{z-0.9},\left(|z|>0.9\right)$$

$$x(z)=ZT\left[a^{n}u(n)\right]=\frac{z}{z-a},\left(|z|>a\right)$$

$$\therefore R(z)=H(z)x(z)=\frac{z}{z-0.9}\frac{z}{z-a}=\frac{z^{2}}{(z-0.9)(z-a)},\left(|z|>\max[0.9,a]\right)$$

$$R(z)=z\left(\frac{1}{z-0.9}\frac{9}{9-10a}+\frac{1}{z-a}\frac{a}{a-0.9}\right)=\frac{9}{9-10a}\frac{z}{z-0.9}+\frac{a}{a-0.9}\frac{z}{z-a}$$

$$\therefore r(n)=\left[\frac{9}{9-10a}(0.9)^{n}+\frac{a}{a-0.9}a^{n}\right]u(n)$$

§8.6 Z变换与拉氏变换的关系

（一）从 S 平面到 Z 平面的映射

（二）连续信号与抽样信号的拉氏变换的关系

（三）连续信号的拉氏变换与Z变换的关系

（一）从 S 平面到 Z 平面的映射

$$z = e^{sT}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| e^{j\omega T}$$

(1) $\sigma = 0 \quad s = j\omega$

$$|z| = e^{\sigma T} = 1$$

(2) $\sigma < 0 \quad s = \sigma + j\omega$

$$|z| < 1$$

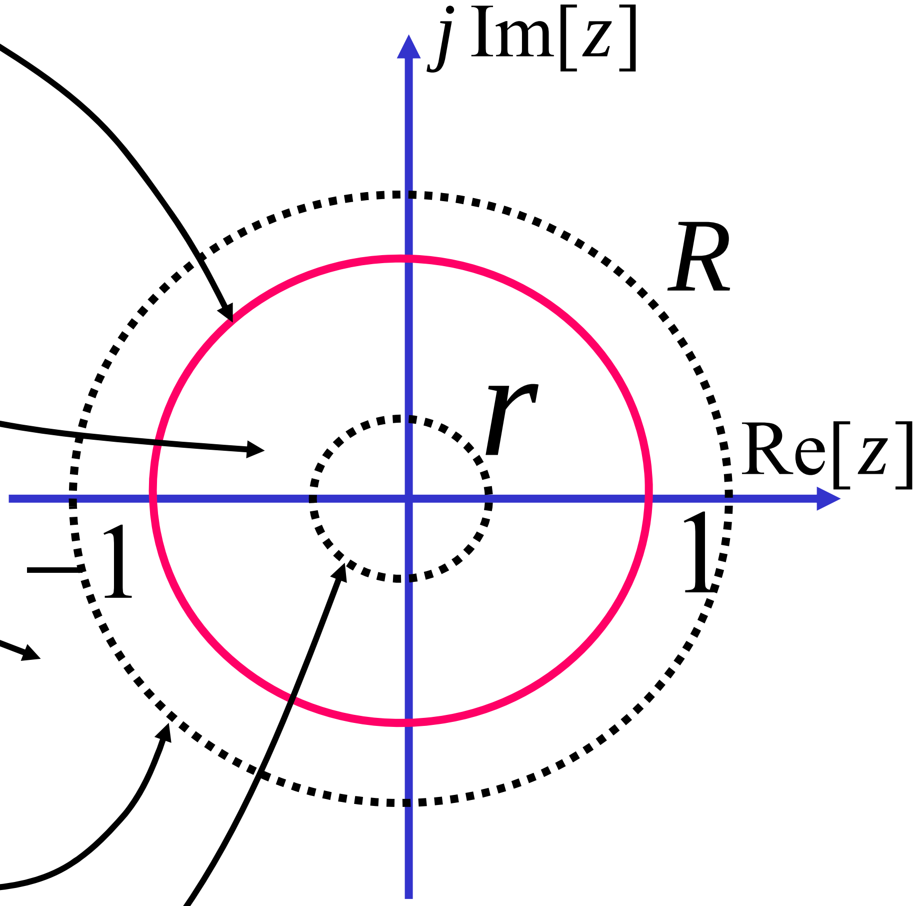
(3) $\sigma > 0 \quad |z| > 1$

(4) $\sigma = constent > 0$

$$|z| = R > 1$$

(5) $\sigma = constent < 0$

$$|z| = r < 1$$

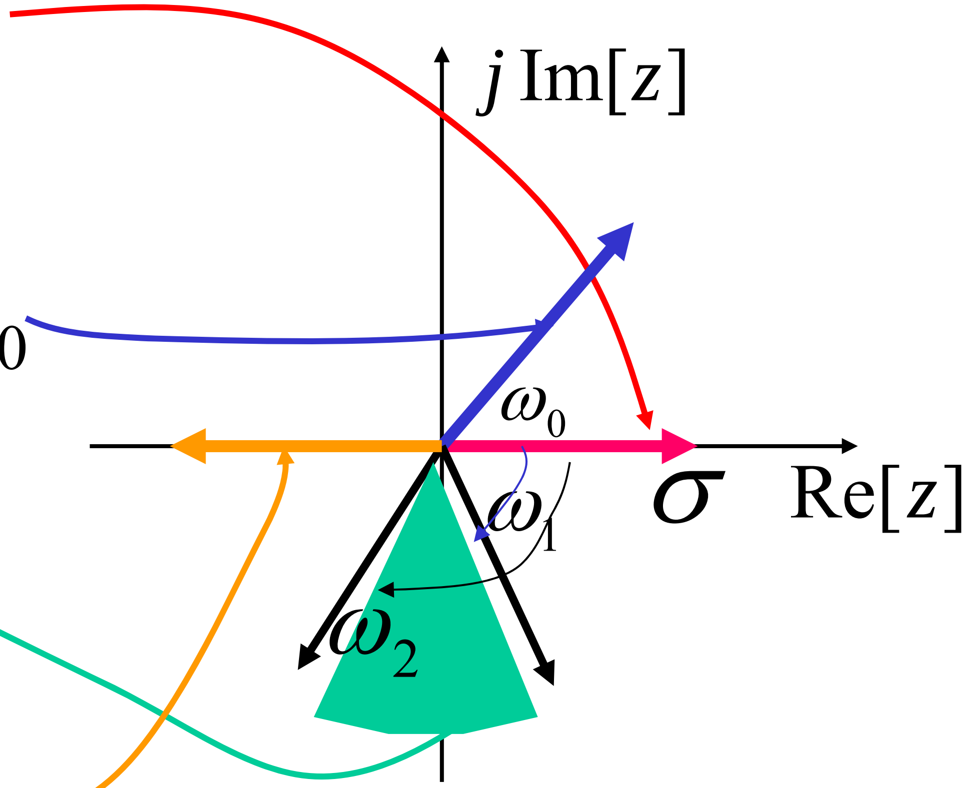


$$(6)\ \omega = 0 \quad s = \sigma$$

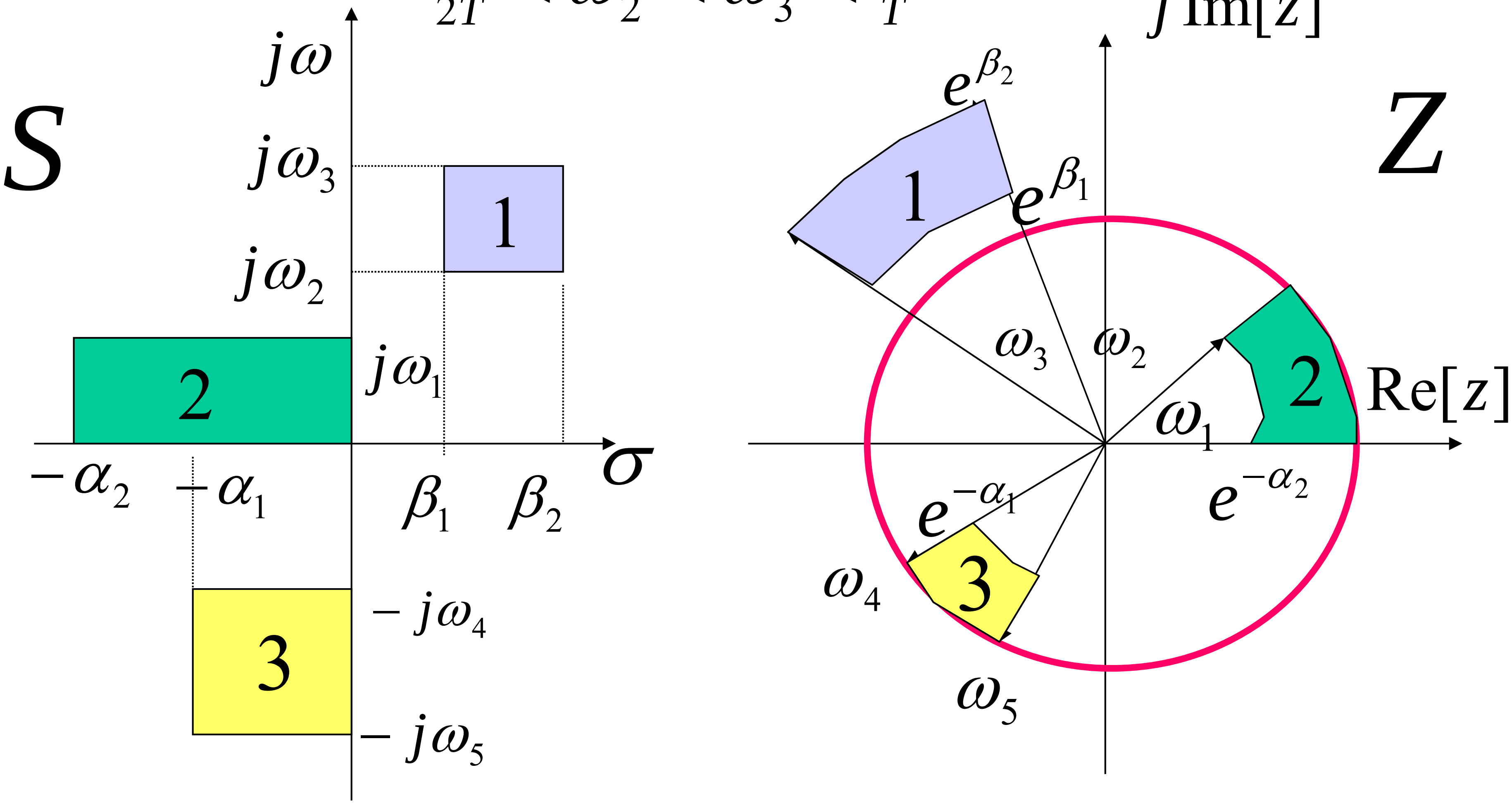
$$(7)\ \omega = constent = \omega_0$$

$$(8)\ \omega = \omega_1 \to \omega_2$$

$$\mathbf{(9)\ \omega = (2}\boldsymbol{k}\mathbf{+1)\pi}$$



$$\frac{\pi}{2T} < \omega_2 < \omega_3 < \frac{\pi}{T}$$



$$\frac{\pi}{T} < \omega_4 < \omega_5 < \frac{3\pi}{2T}$$

（二）连续信号的拉氏变换与其Z变换的关系

- 抽样信号的拉氏变换与 Z 变换的关系

$$X(z)\Big|_{z=e^{sT}} = X_s(s)$$

- 连续信号与抽样信号的拉氏变换的关系

$$X_s(s) = \sum_i \operatorname{Res}\left[\frac{X(p)}{1-e^{-(s-p)T}}\right]_{p=p_i}$$

$$= \sum_i \operatorname{Res}\left[\frac{X(p)}{1-z^{-1}e^{pT}}\right]_{p=p_i} = X(z)$$

- 连续信号的拉氏变换与 Z 变换的关系

若 $X(p)$只含一阶极点 $X(p)=\sum_i \frac{A_i}{p-p_i}$

则

$$\boxed{X(z)=\sum_i \frac{A_i}{1-z^{-1}e^{p_i T}}}$$

§ 8.7 用单边Z变换解差分方程

解差分方程的方法：

（1）时域经典法

（2）卷积和解法

（3）Z变换解法

用单边Z变换解差分方程的步骤和思路

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

- **x(n-r),y(n-k)均为右移序列**
- 两边取单边Z变换

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}]=\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}[X(z)+\sum_{m=-r}^{-1} x(m)z^{-m}]$$

初始状态

若因果信号此项为零

例：

$$y(n)-by(n-1)=x(n)$$

$$x(n)=a^n u(n) \quad y(-1)=2 \quad y(n)=?$$

里面已含有初始条件

$$Y(z)-bz^{-1}[Y(z)+zy(-1)]=X(z)$$

$$[1-bz^{-1}]Y(z)=X(z)+by(-1)$$

$$Y(z)=\frac{X(z)+by(-1)}{1-bz^{-1}}$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{az}{z-a}-\frac{bz}{z-b}\right]+\frac{2bz}{z-b}$$

完全解

$$y(n)=ZT^{-1}[Y(z)]=\left[\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})+2b^{n+1}\right]u(n)$$

例：

$$y(n)+0.1y(n-1)-0.02y(n-2)=10u(n)$$

$$y(-1)=4 \quad y(-2)=6 \qquad y(n)=?$$

$$Y(z)+0.1z^{-1}[Y(z)+zy(-1)]-0.02z^{-2}[Y(z)+z^{2}y(-2)+zy(-1)]=\frac{10z}{z-1}$$

$$(1+0.1z^{-1}-0.02z^{-2})Y(z)=\frac{10z}{z-1}+0.08z^{-1}-0.28$$

$$Y(z)=\frac{9.26}{1-z^{-1}}+\frac{0.66}{1+0.02z^{-1}}-\frac{0.2}{1-0.1z^{-1}}$$

完全解

$$y(n)=[9.26+0.66(-0.2)^{n}-0.2(0.1)^{n}]u(n)$$

§8.8 离散系统的系统函数

一、定义：

（1）系统零状态响应的Z变换与输入的Z变换之比

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=G\frac{\prod_{r=0}^{M}(1-z_r z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1-p_k z^{-1})}$$

（2）系统单位样值响应**h(n)**的Z变换

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

（1）定义一：系统零状态响应的Z变换与输入的Z变换之比

- 若x(n)是因果序列, 则在系统零状态下：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

请注意这里与解差分有何不同？

零状态

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

因果！

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

（2）定义二：系统单位样值响应h(n)的Z变换

- 激励与单位样值响应的卷积为系统零状态响应

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

- 由卷积定理

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \qquad H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

二、系统零、极点对系统特性的影响

- 由极点分布决定系统单位样值响应
- 由极点分布决定系统稳定性

（1）由极点分布决定系统单位样值响应

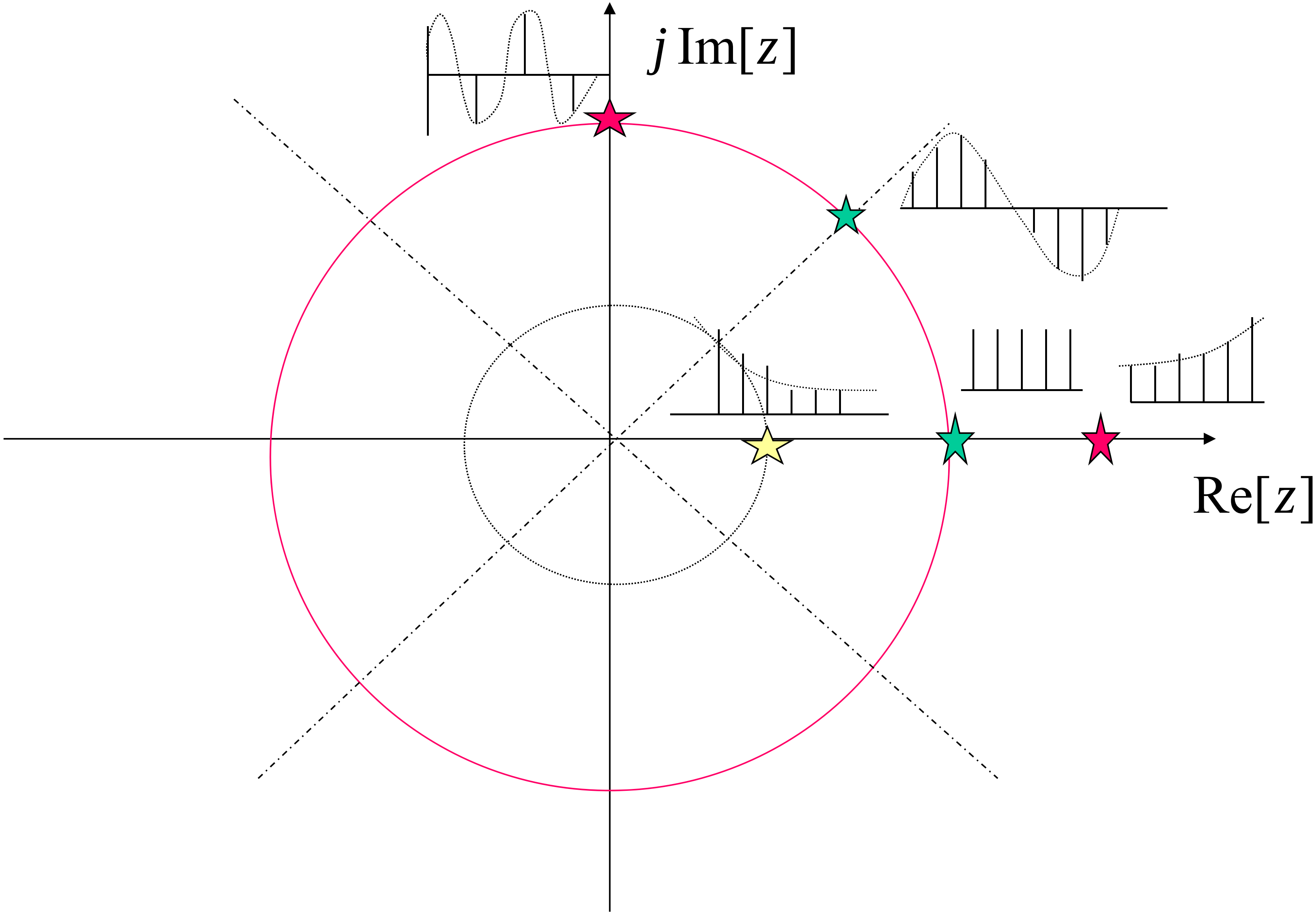
$$h(n)=FT^{-1}[H(z)]=FT^{-1}\left[G\frac{\prod_{r=0}^{M}(1-z_r z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1-p_k z^{-1})}\right]$$

$$=FT^{-1}\left[A_0+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k z}{z-p_k}\right]$$

$$=A_0\delta(n)+\sum_{k=1}^{N}A_k(p_k)^n u(n)$$

一般 p_k 为复数
它在 Z 平面的
分布位置决定
了系统$h(n)$特性

极点分布对h(n)的影响



（2）由极点分布决定系统稳定性

- 系统稳定的充要条件是单位样值响应绝对可和。即：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

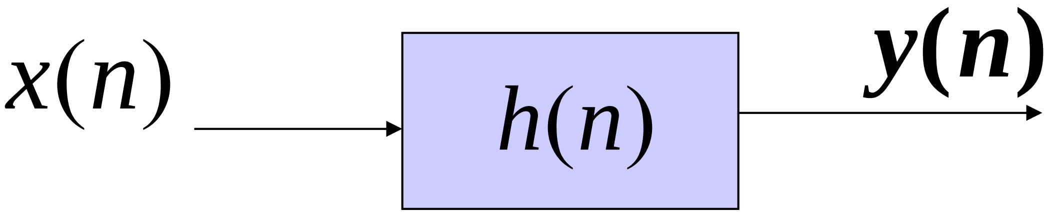
- 因果稳定系统的充要条件为：**h(n)**是单边的而且是有界的。即：

因果

稳定

$$\begin{cases} h(n) = h(n)u(n) \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \end{cases}$$

非因果也可以稳定



$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

$$|x(n)| < M < \infty$$

$$|y(n)| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \le M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

$$\therefore \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

离散系统稳定的充要条件为**h(n)**绝对可和

H(z)的极点都在单位原内

例：已知因果系统的系统函数如下：

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$

试说明该系统是否稳定？

解：

$$H(z)=\frac{z(z+1)}{(z-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})(z-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$p_1=\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad p_2=\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left|p_{1,2}\right|=1$$

临界稳定

例：已知系统函数如下，试说明分别在（1）（2）两种情况下系统的稳定性：

$$H(z)=\frac{-9.5z}{(z-0.5)(z-10)}$$

（1）$10\le|z|\le\infty$

（2）$0.5\le|z|\le 10$

解：（1）$10\le|z|\le\infty$ 因果系统，右边序列

$$H(z)=\frac{0.5}{z-0.5}-\frac{10}{z-10}$$

$$z_1=0.5\quad z_2=10\quad |z_2|>1$$

因果系统但极点在单位圆外不稳定

$$h(n)=[(0.5)^{n+1}+(10)^{n+1}]u(n)$$

发散

（2）$0.5 \le |z| \le 10$ 非因果系统，

右序　　左序

$$h(n) = (0.5)^{n+1}u(n) - \underline{(10)^{n+1}u(-n-1)}$$

$10^{-\infty}$ 有界

所以，该非因果系统是稳定的

§8.10 离散系统的频率响应

一、什么是离散系统的频率响应？

定义一：单位样值响应的傅立叶变换

定义二：离散系统在正弦序列作用下的稳态响应

二、系统的频率响应的几何确定

定义一：序列的傅立叶变换

序列的傅立叶变换：

由**S_Z**的映射来看，当 $\sigma=0$，则 $s=j\omega$，
于是相当于自变量沿着**z=1**单位圆周变化，
则：

$$z=e^{sT}=e^{j\omega T}\overset{T=1}{=}e^{j\omega}$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=X(e^{j\omega})$$

序列的傅立叶正变换

$$\boxed{X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}}$$

定义一：系统频率响应即系统单位样值函数的傅立叶变换

$$\delta(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow \delta(n) * h(n) = r(n) = h(n)$$

- 当**h(n)**已知时，下列表达式表示系统频率响应函数，

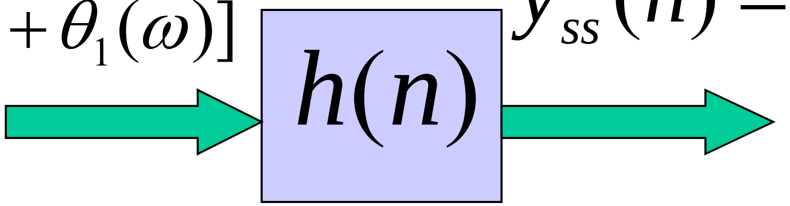
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

- $H(e^{j\omega})$是以 **h(n)** 为加权系数，对各次谐波进行加权或改变的情况（物理意义）。

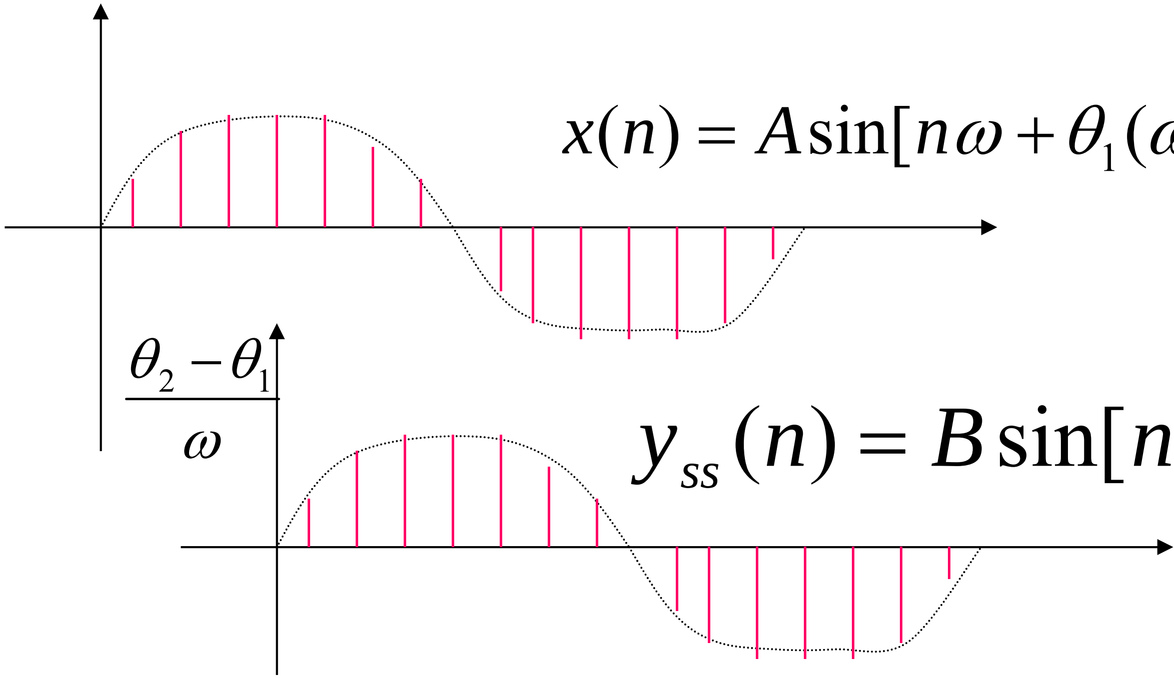
对比**H(z),H(e^{jw})**定义式有：$\boldsymbol{H(e^{jw}) = H(z)\big|_{z=e^{jw}}}$

定义二：正弦序列及其作用下系统的稳态响应的傅立叶变换之比

$$x(n)=A\sin[n\omega+\theta_1(\omega)]$$



$$y_{ss}(n)=B\sin[n\omega+\theta_2(\omega)]$$



$$x(n)=A\sin[n\omega+\theta_1(\omega)]$$

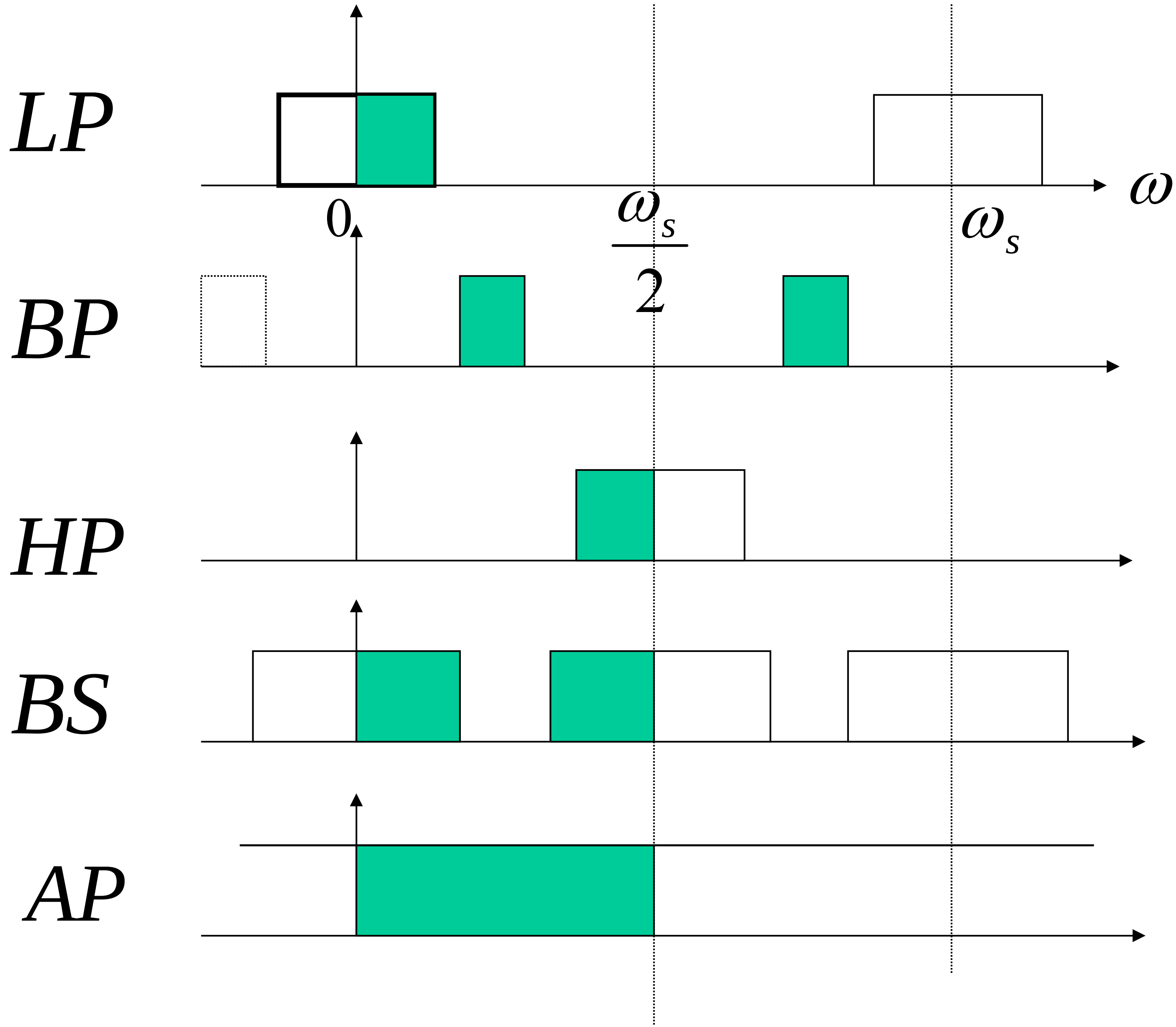
$$y_{ss}(n)=B\sin[n\omega+\theta_2(\omega)]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{B}{A} e^{j[\theta_2(\omega)-\theta_1(\omega)]}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{B}{A} \qquad \varphi(\omega) = \theta_2(\omega) - \theta_1(\omega)$$

因为$e^{j\omega}$ 是周期的，所以 $H(e^{j\omega})$也是周期的，其周期为重复频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$。


LP
BP
HP
BS
AP
0
$\frac{\omega_s}{2}$
ω_s
ω

二、系统的频率响应的几何确定

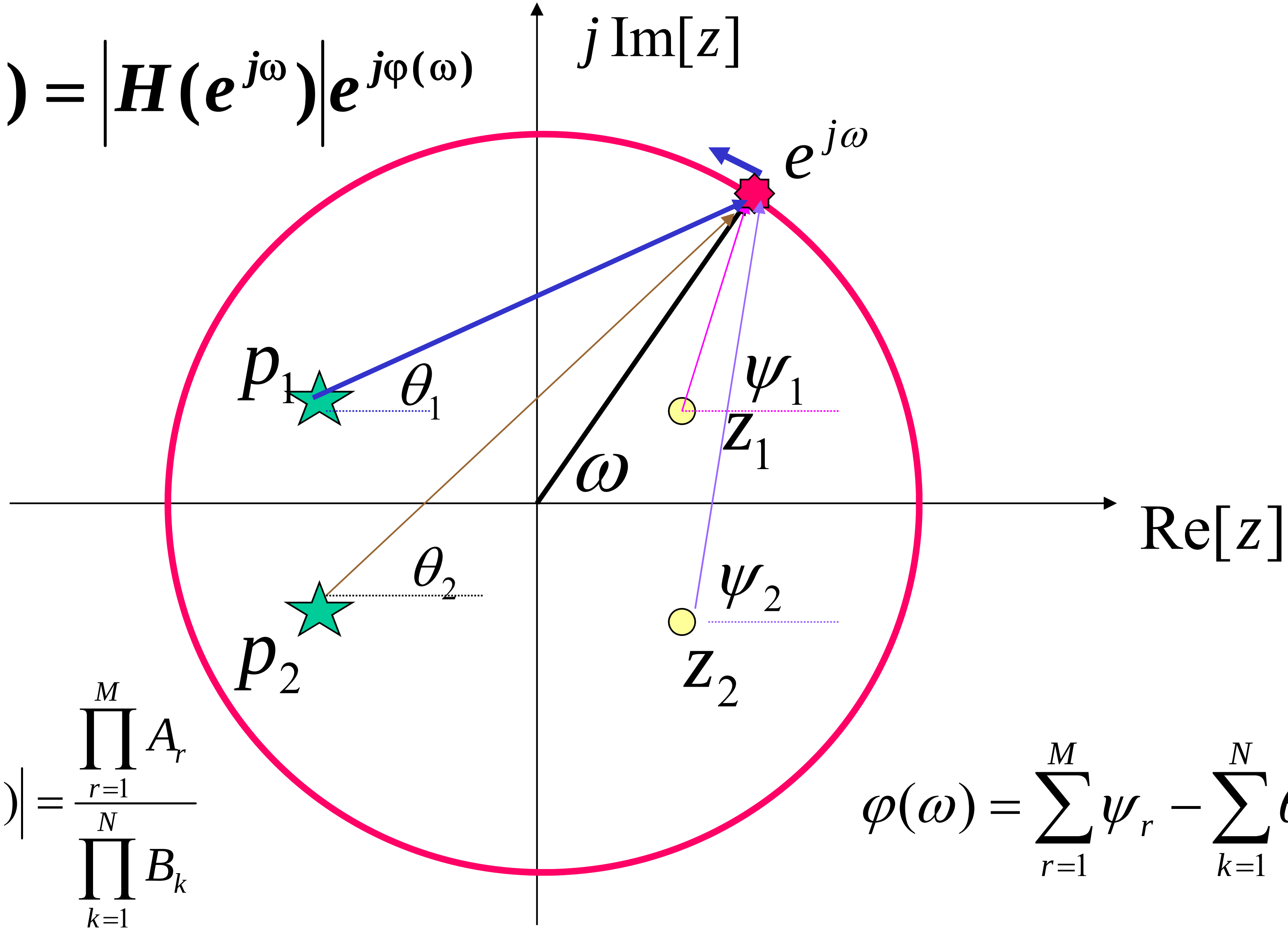
$$H(z)=\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}=\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$e^{j\omega}-z_r=A_re^{j\psi_r} \qquad e^{j\omega}-p_k=B_ke^{j\theta_k}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{\prod_{r=1}^{M}A_r}{\prod_{k=1}^{N}B_k} \qquad \varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\psi_r-\sum_{k=1}^{N}\theta_k$$

系统的频率响应的几何确定法

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$



$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{\prod_{r=1}^{M} A_r}{\prod_{k=1}^{N} B_k}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{r=1}^{M} \psi_r - \sum_{k=1}^{N} \theta_k$$

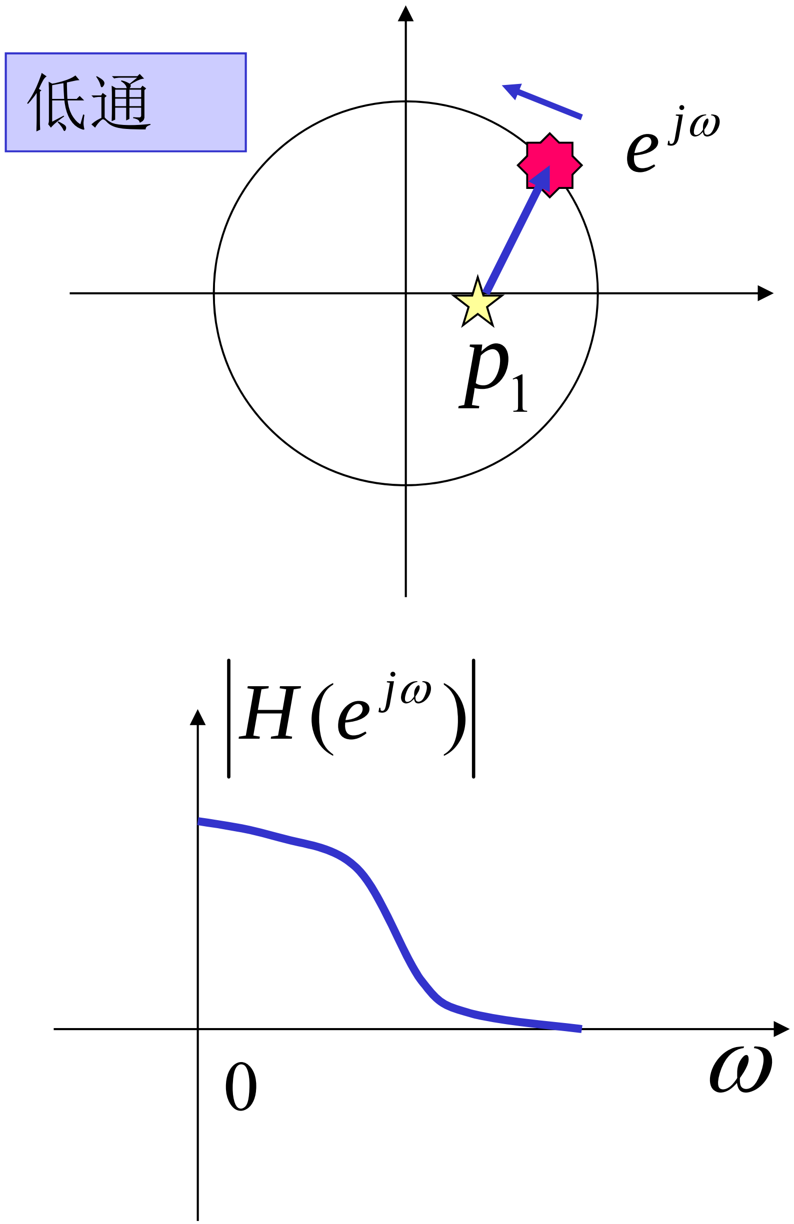
由几何法可以看出：

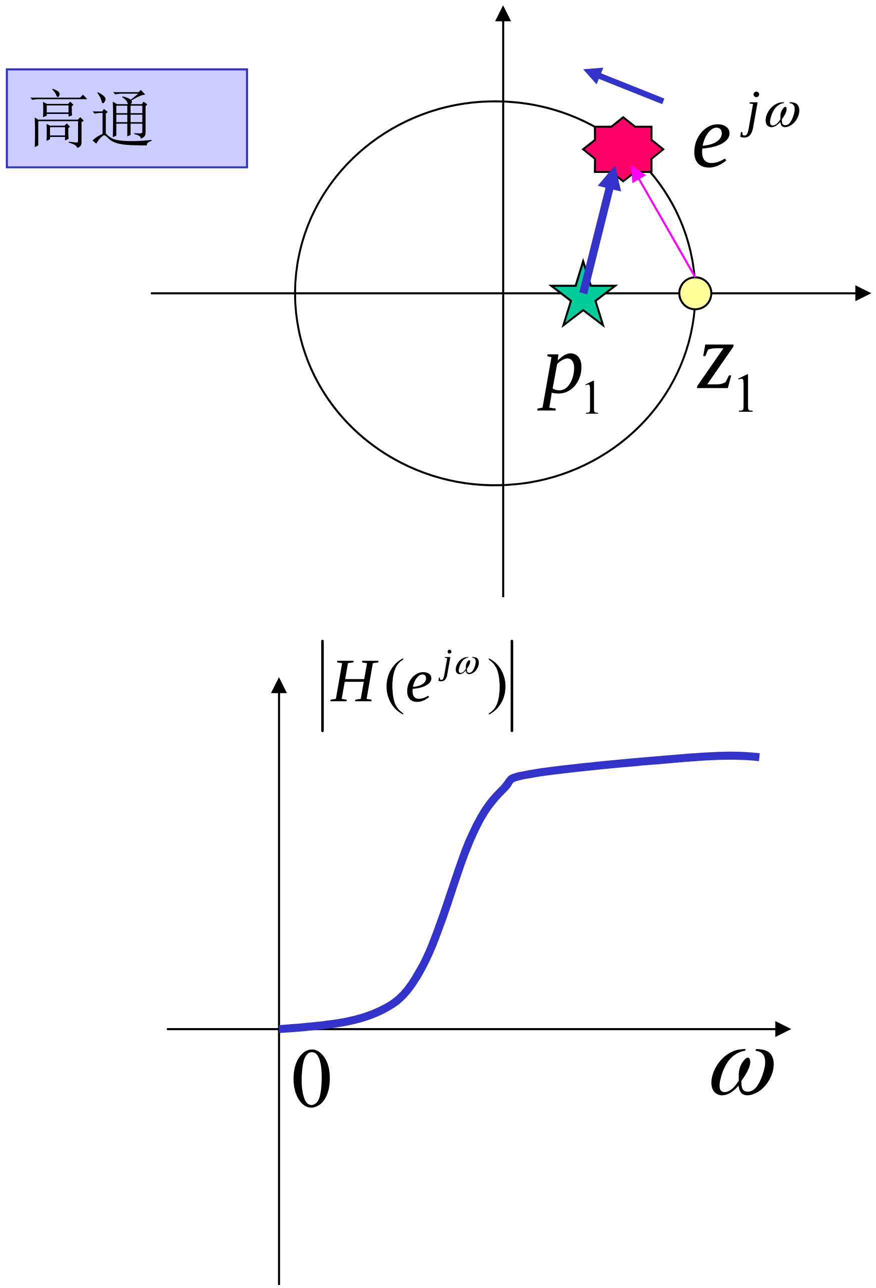
（1）**z=0**处的零极点对幅频特性$\left|H(e^{j\omega})\right|$没有影响，只对相位有影响

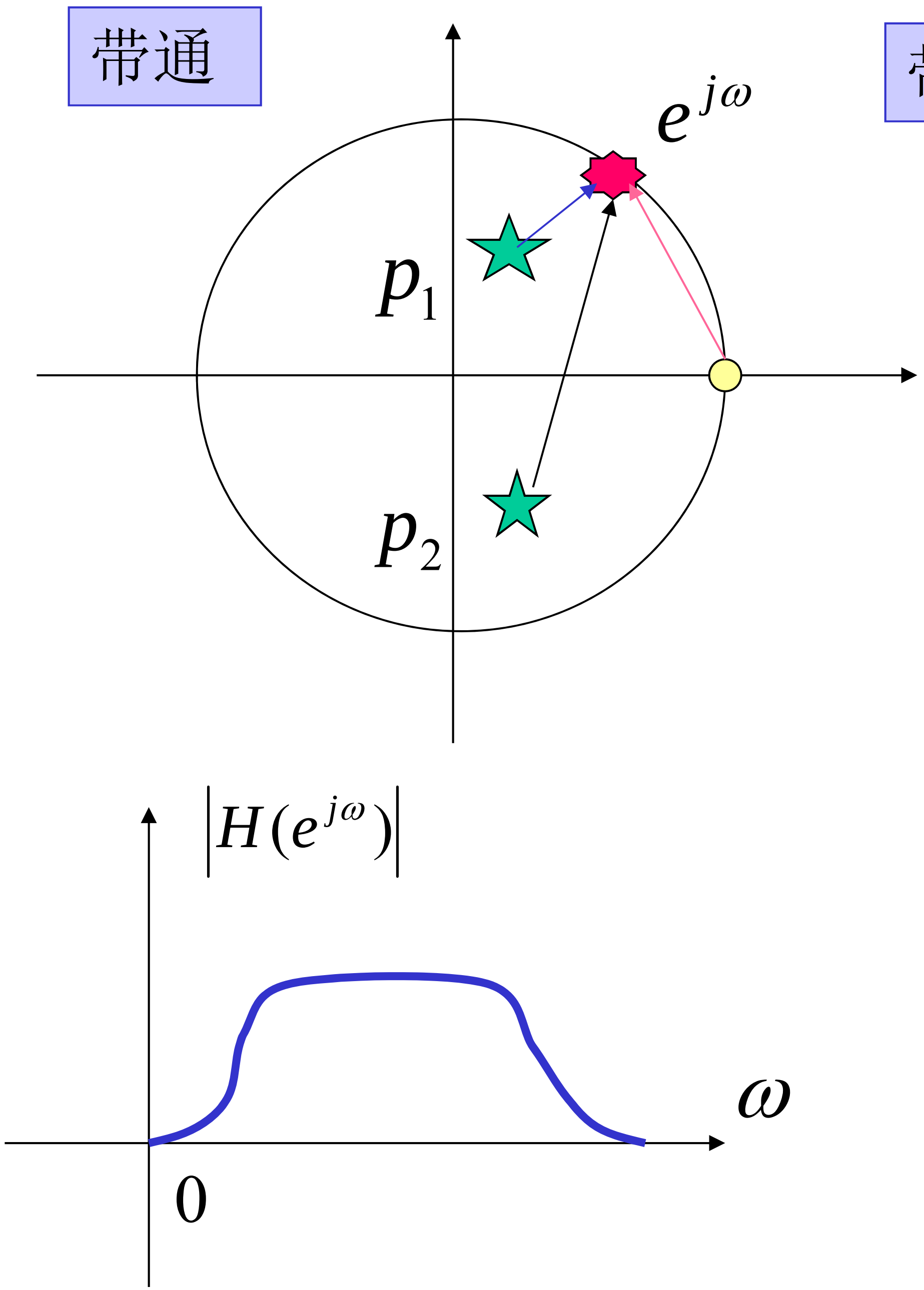
（2）当 $\boldsymbol{e^{jw}}$ 旋转某个极点 p_i 附近时，例如在同一半径上时， B_i 较短，则 $\left|H(e^{j\omega})\right|$ 在该点应当出现一个峰值， B_i 越短，p_i 附近越尖锐。若 p_i 落在单位圆上，则

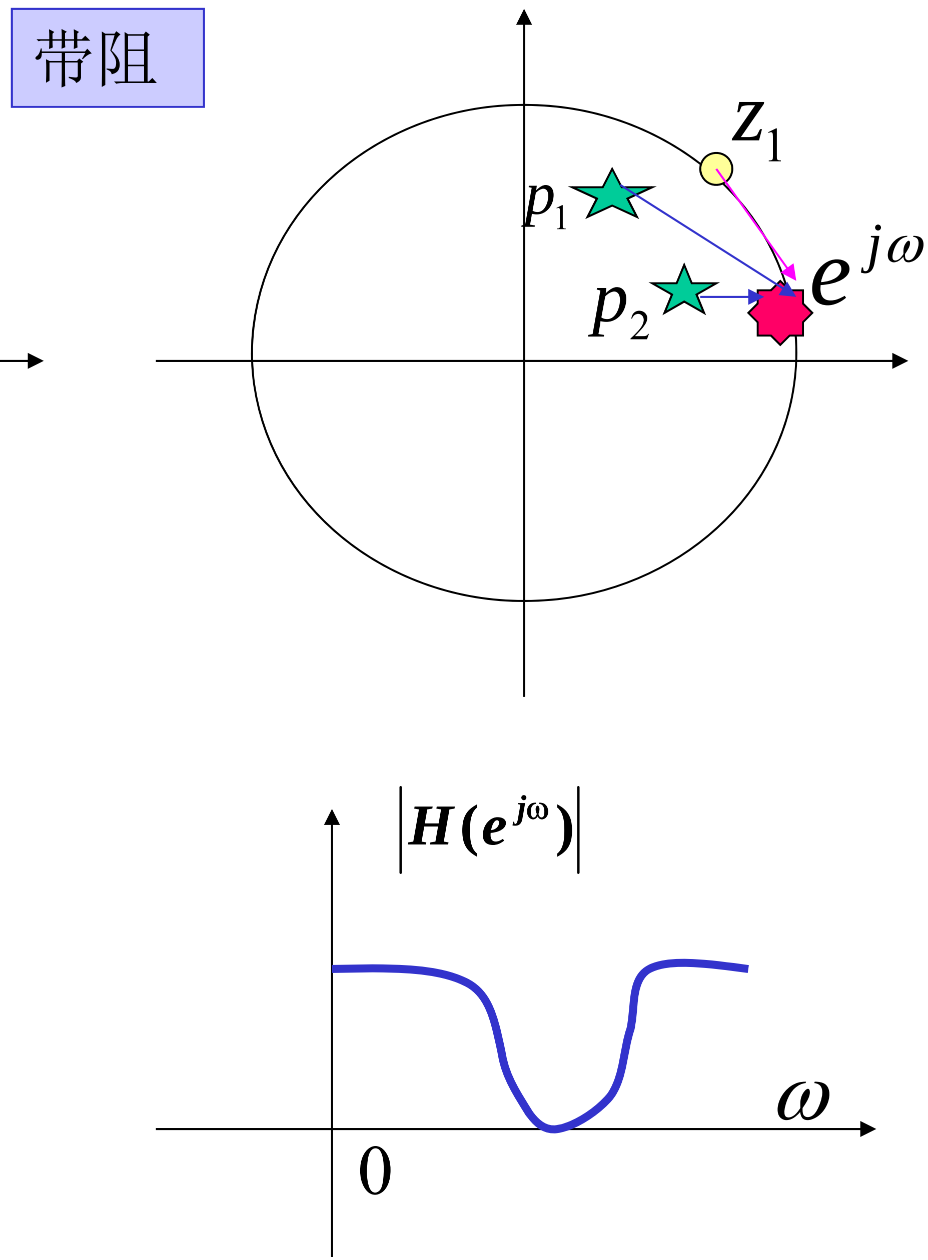
$B_i=0$，则 p_i 处的峰值趋于无穷大。

（3）对于零点则其作用与极点的作用正好相反。

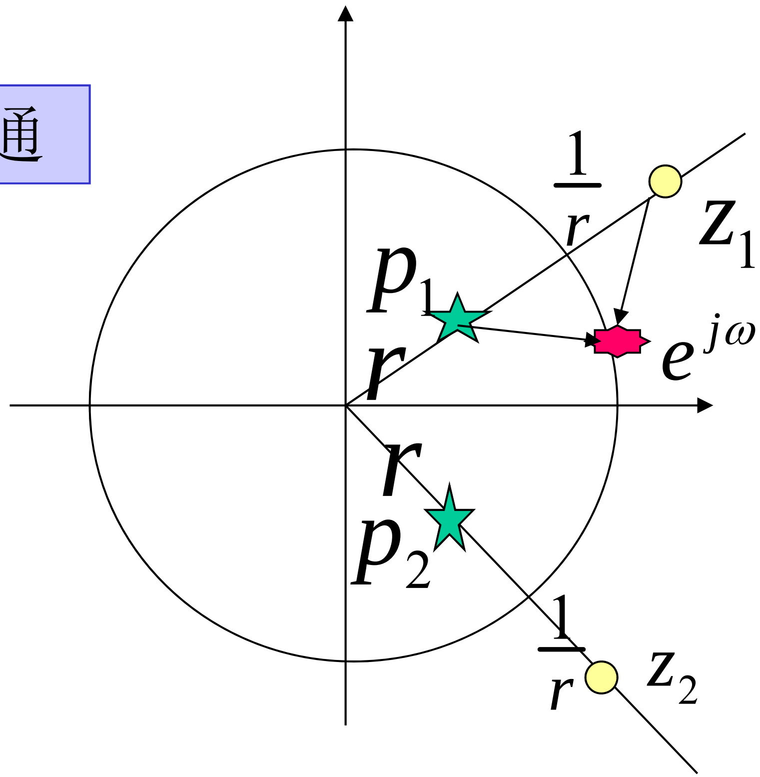

低通
$e^{j\omega}$
p_1
$|H(e^{j\omega})|$
0
ω

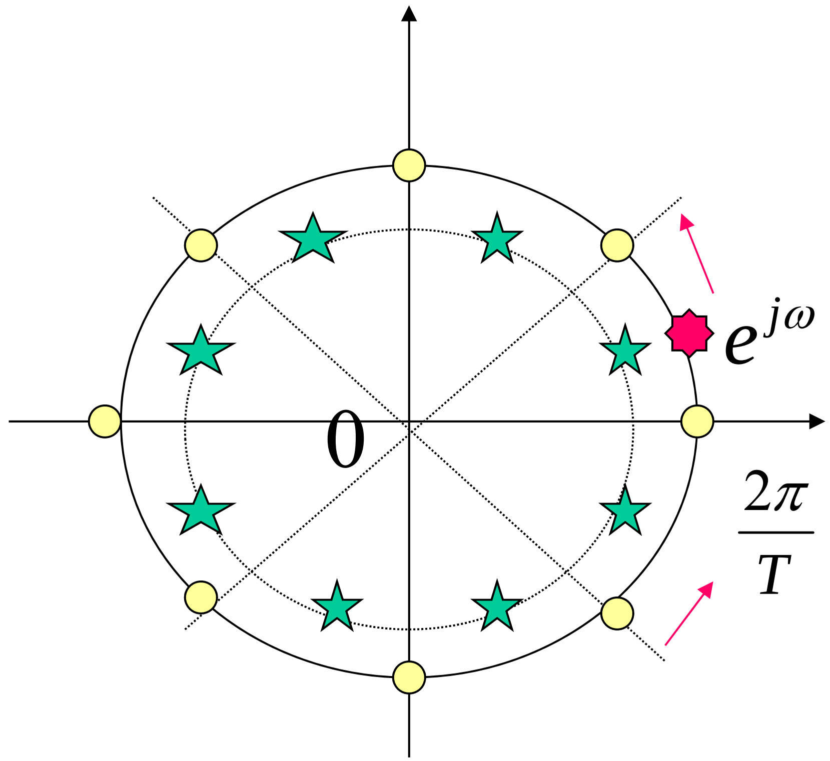

高通
$e^{j\omega}$
p_1
z_1
$|H(e^{j\omega})|$
0
ω


带通
$e^{j\omega}$
p_1
p_2
$|H(e^{j\omega})|$
ω
0

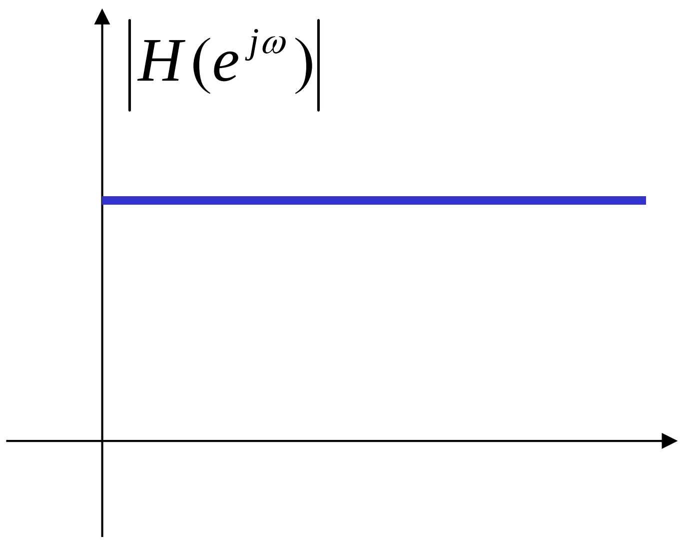

带阻
z_1
p_1
p_2
$e^{j\omega}$
$|H(e^{j\omega})|$
ω
0

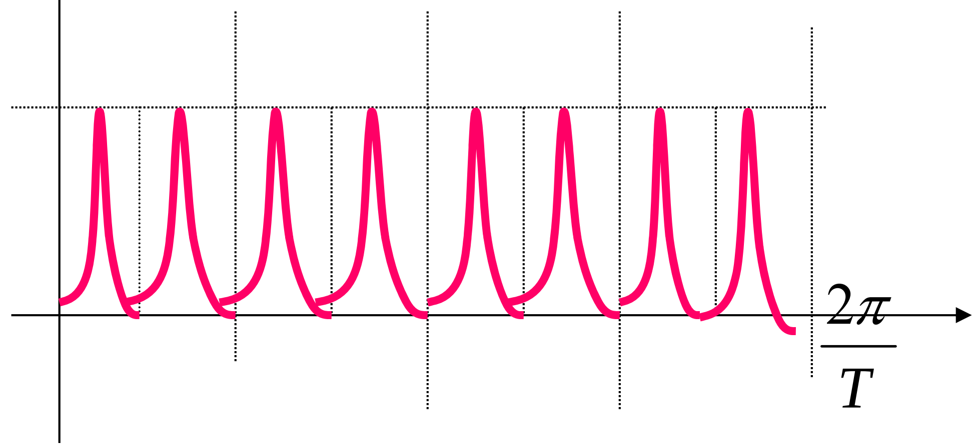
全通



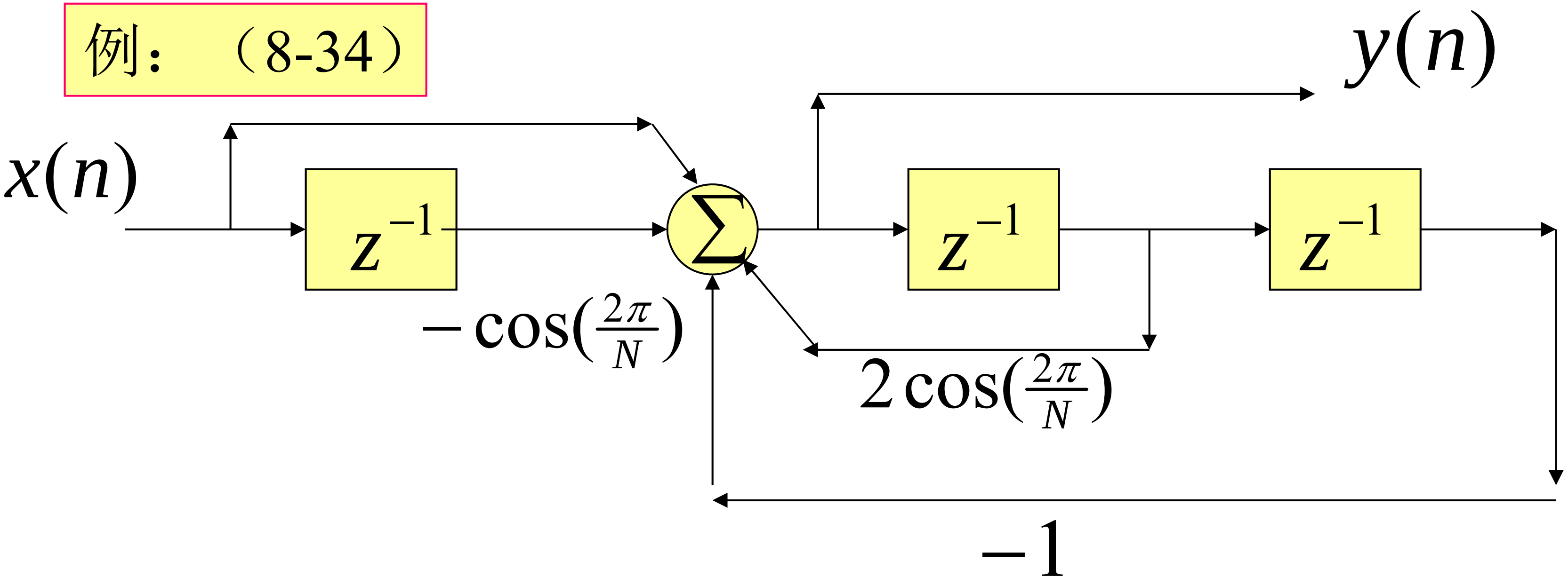


靠近单位圆周的极点附近有尖峰





例：（8-34）



$(1)\, h(n)=?\quad (2)\, H(z)=?$

$(3)\, p_k=?\quad z_r=?\quad (4)\, H(e^{j\omega})=?$

解

$$y(n)=x(n)-\cos(\frac{2\pi}{N})x(n-1)+2\cos(\frac{2\pi}{N})y(n-1)-y(n-2)$$

$$H(z)=\frac{1-\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}}{1-2\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}+z^{-2}}=\frac{z[z-\cos(\frac{2\pi}{N})]}{1-2\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}+z^{-2}}$$

$$=\frac{z[z-\cos(\frac{2\pi}{N})]}{(z-e^{j\frac{2\pi}{N}})(z-e^{-j\frac{2\pi}{N}})}$$

$$z_1=0 \qquad z_2=\cos(\tfrac{2\pi}{N})$$

$$p_1=e^{j\frac{2\pi}{N}} \qquad p_2=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$h(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)u(n)$$