信号与系统习题

- 同学们先讨论、练习，老师再讲
- 面向毕业要求指标点进行训练
- 建立数学与物理之间的联系

第1、2章 习题

第一章典型习题

例1:作出下列信号的波形

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

$$(1)\ tU(t)-\sum_{n=1}^{\infty}U(t-n)$$

解:

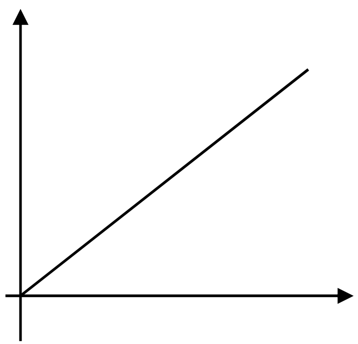
$$tU(t)-U(t-1)-U(t-2)-U(t-3)-\cdots=$$

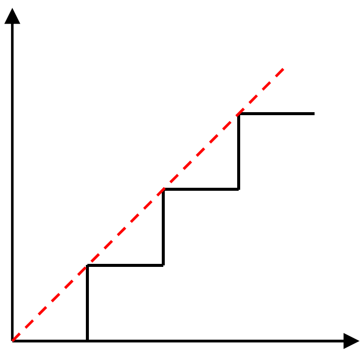
$$tU(t)+tU(t-1)-tU(t-1)-U(t-1)+tU(t-2)-$$

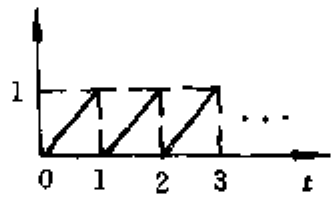
$$tU(t-2)-U(t-2)+tU(t-3)-tU(t-3)-U(t-3)+\cdots=$$

$$t[U(t)-U(t-1)]+(t-1)[U(t-1)-U(t-2)]+$$

$$(t-2)[U(t-2)-U(t-3)]+\cdots$$

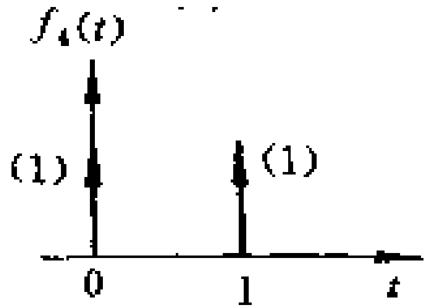






(2) $$f_4(t)=\pi\sin(\pi t)[u(t)-u(t-1)]+\frac{d}{dt}\{\cos(\pi t)[u(t)-u(t-1)]\}$$

解： $$f_4(t)=\pi\sin(\pi t)[u(t)-u(t-1)]+\cos(\pi t)[\delta(t)-\delta(t-1)]$$
$$-\pi\sin(\pi t)[u(t)-u(t-1)]$$

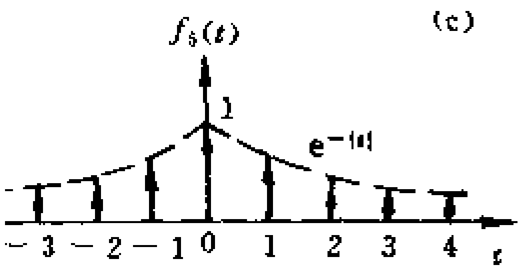


(3) $$f_5(t)=e^{-|t|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)$$

解：

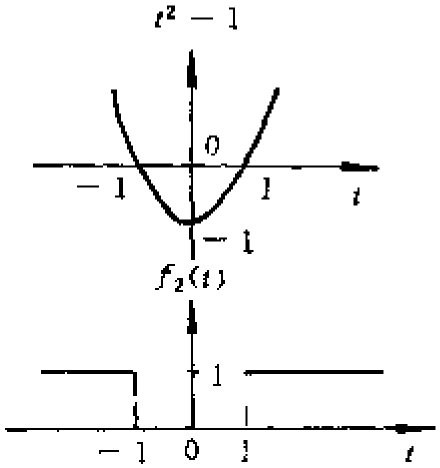
$$f_5(t)=e^{-|t|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-|t|}\delta(t-n)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-|n|}\delta(t-n)$$



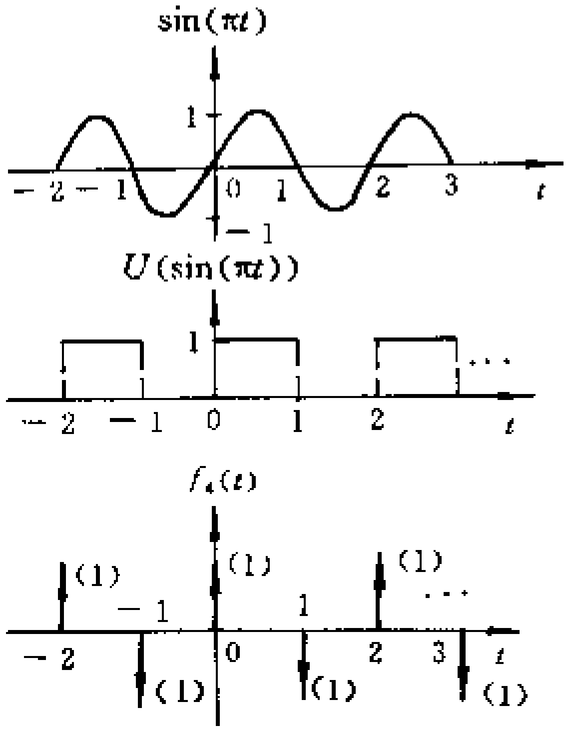
$(4)\ f_2(t)=u(t^2-1)$

解：



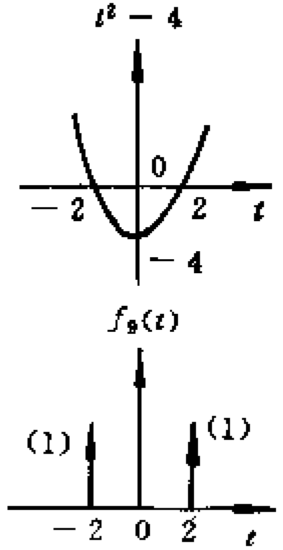
$(5)\ f_5(t)=\dfrac{d}{dt}\left[u(\sin(\pi t))\right]$

解：



$$(5)\ f_2(t)=\delta(t^2-4)$$

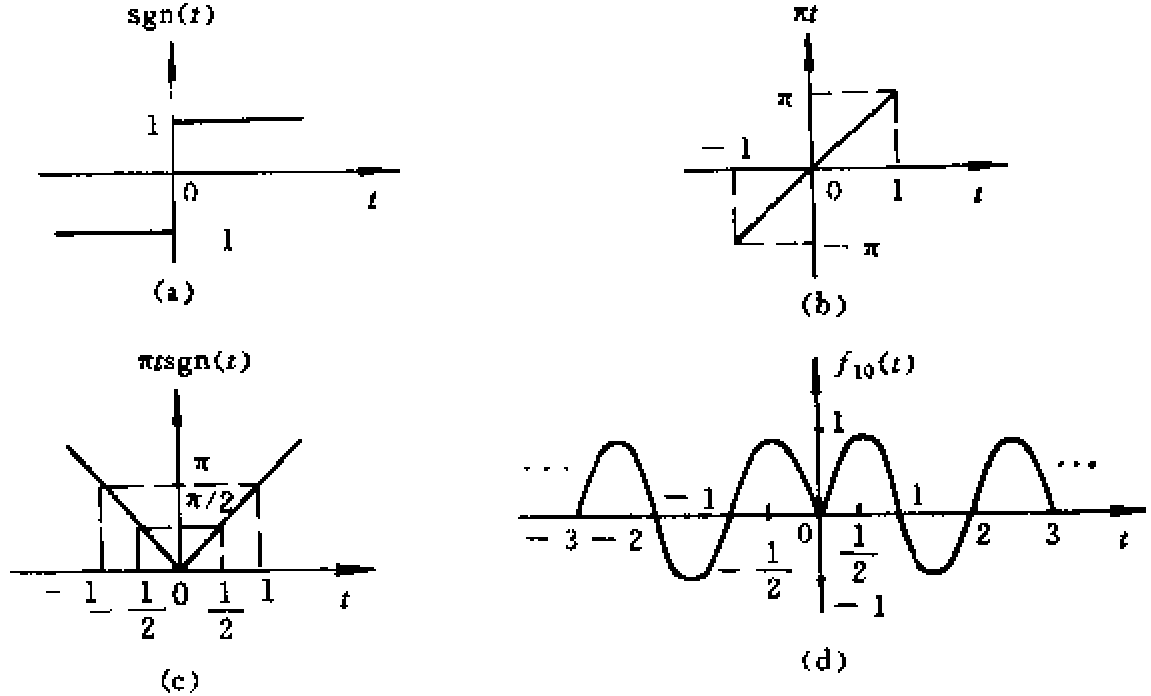
解：



$$\delta(t-2)+\delta(t-2)\ \ ?$$

$$(6)\ f_2(t)=\sin\left[\pi t\,\mathrm{sgn}(t)\right]$$

解：



例2:求积分　指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(t)\frac{\sin(2t)}{t}dt$　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(t-8)u(t-4)dt$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(t-4)u(t-8)dt$　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(1-t)(t^3+4)dt$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+3)e^{-t}dt$　　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3t-1}\delta(t)dt$

解：

(1) 原式=$\int_{-\infty}^{+\infty} 4\delta(t)\frac{\sin(2t)}{2t}dt=4$　　(2) 原式=$\int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(t-8)\times 1dt=2$

(3) 原式=$\int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(t-4)\times 0dt=0$

(4)原式=$\int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(-(t-1))(1^3+4)dt=10$

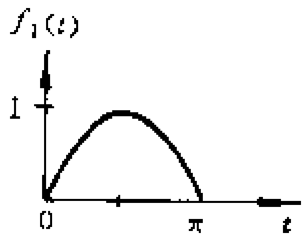
(5)原式=$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+3)e^{-(-3)}dt=e^3$　　(6)原式=$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3\times 0-1}\delta(t)dt=e^{-1}$

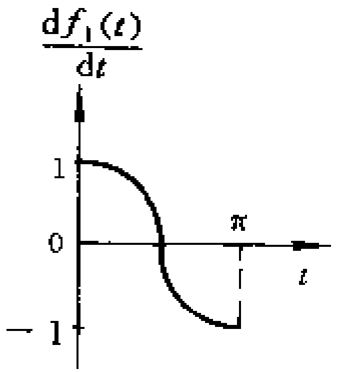
例3:求下列式子的一阶、二阶导数，并作图

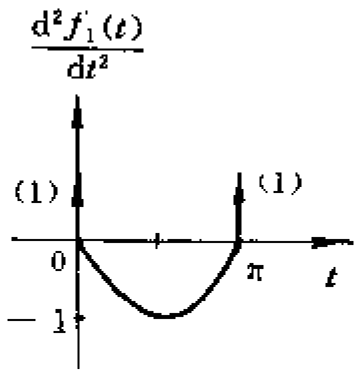
指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

(1) $f_4(t)=\sin t[u(t)-u(t-\pi)]$

解:
$$f_4'(t)=\cos t[u(t)-u(t-\pi)]+\sin t[\delta(t)-\delta(t-\pi)]$$
$$=\cos t[u(t)-u(t-\pi)]$$
$$f_4''(t)=\delta(t)-\sin t[u(t)-u(t-\pi)]+\delta(t-\pi)$$



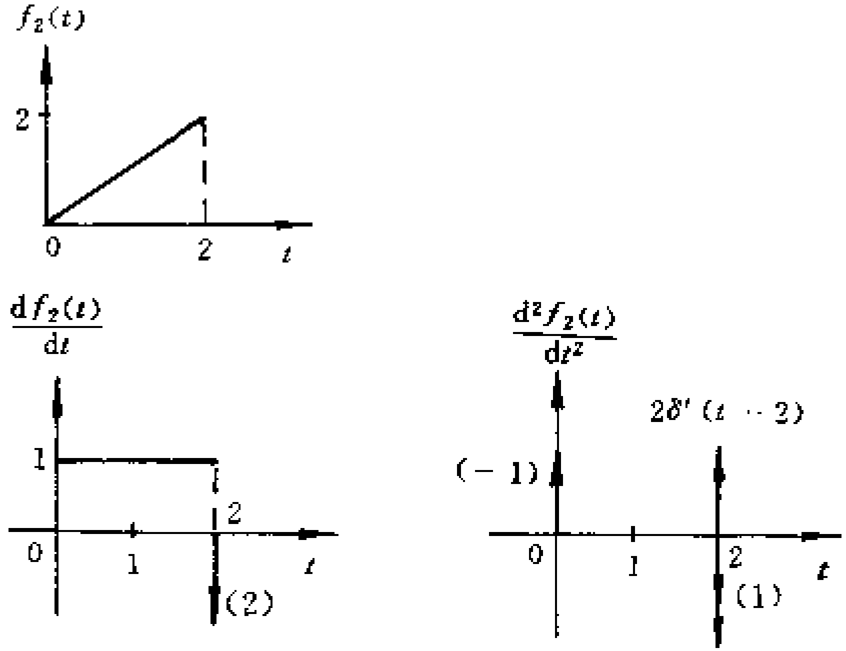




(2) $f(t)=t[u(t)-u(t-2)]$

解：$f'(t)=u(t)-u(t-2)-2\delta(t-2)$

$f''(t)=\delta(t)-\delta(t-2)-2\delta'(t-2)$



例4:已知f(5-2t)作f(t)波形

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

解：f(5-2t)是f(t)经过折叠、时移、展缩三种变换后得到。

方法一：时移----折叠----展缩

$$f(5-2t)=f[-2(t-\frac{5}{2})]\xrightarrow{\text{左时移}5/2}f[-2(t+\frac{5}{2}-\frac{5}{2})]=f(-2t)$$

$$=f[2(-t)]\xrightarrow{\text{折叠}}f(2t)\xrightarrow{\text{展宽1倍}}f(2\times\frac{1}{2}t)=f(t)$$

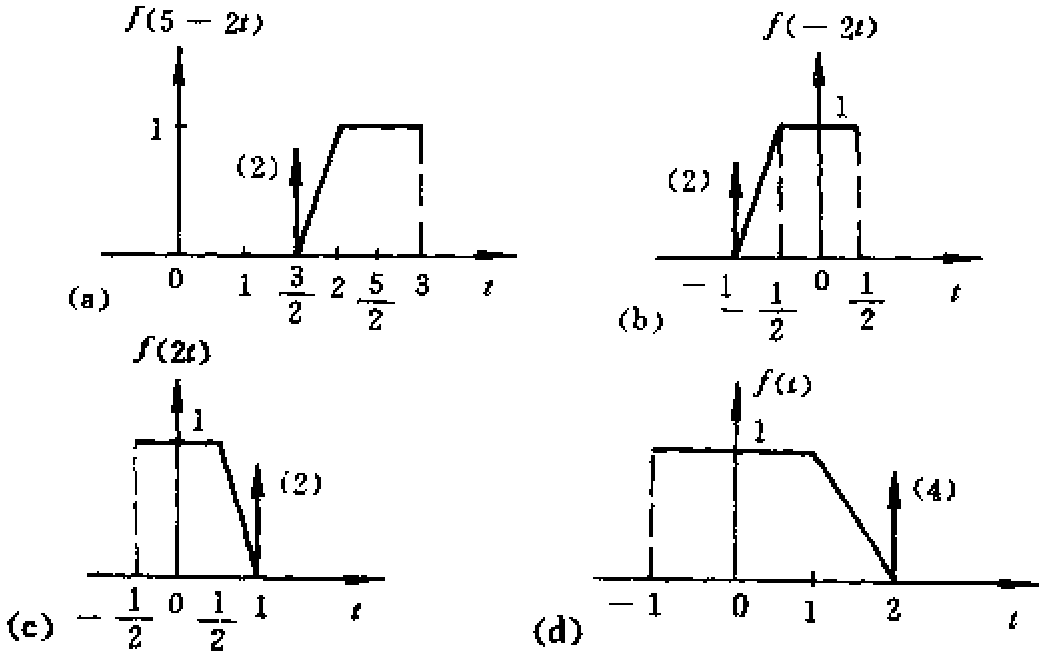
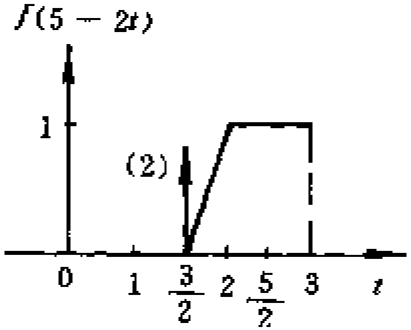


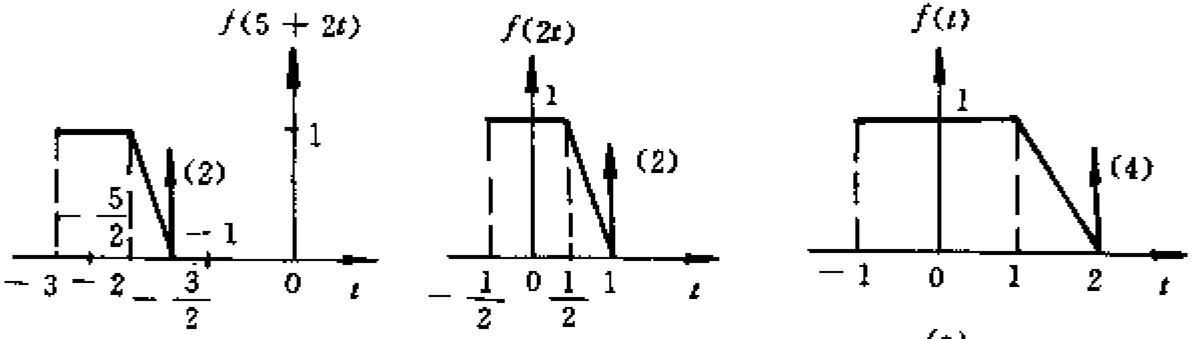
图 1.29

方法二：折叠----时移----展缩

$$f(5-2t)\xrightarrow{\text{折叠}}f(5+2t)=f[2(t+\frac{5}{2})]\xrightarrow{\text{右时移5/2}}f[2(t-\frac{5}{2}+\frac{5}{2})]$$

$$=f(2t)\xrightarrow{\text{展宽1倍}}f(2\times\frac{1}{2}t)=f(t)$$



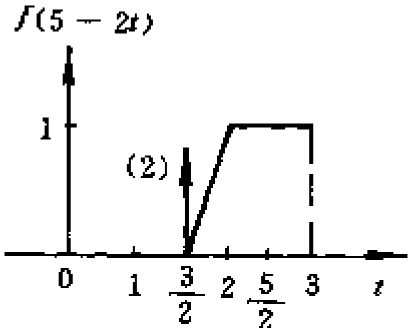


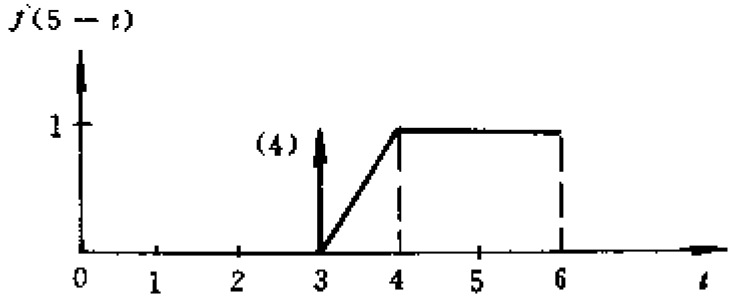
(a) (b) (c)

方法三：展缩----折叠----时移

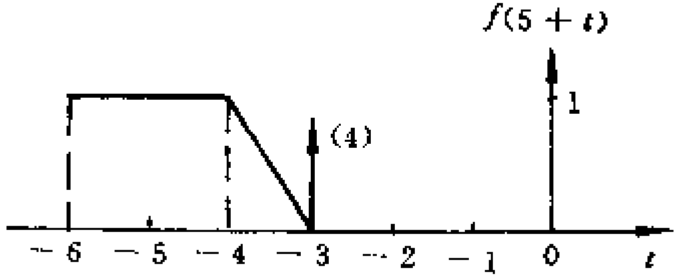
$$f(5-2t)\xrightarrow{\text{展宽1倍}} f(5-2\times\frac{1}{2}t)=f(5-t)\xrightarrow{\text{折叠}} f(5+t)$$

$$\xrightarrow{\text{右时移5}} f(5+t-5)=f(t)$$

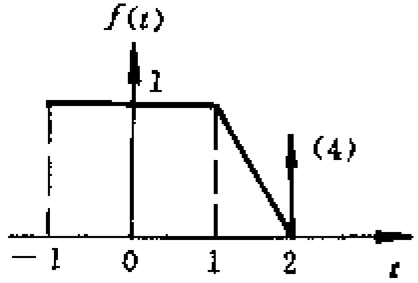




(a)



(b)

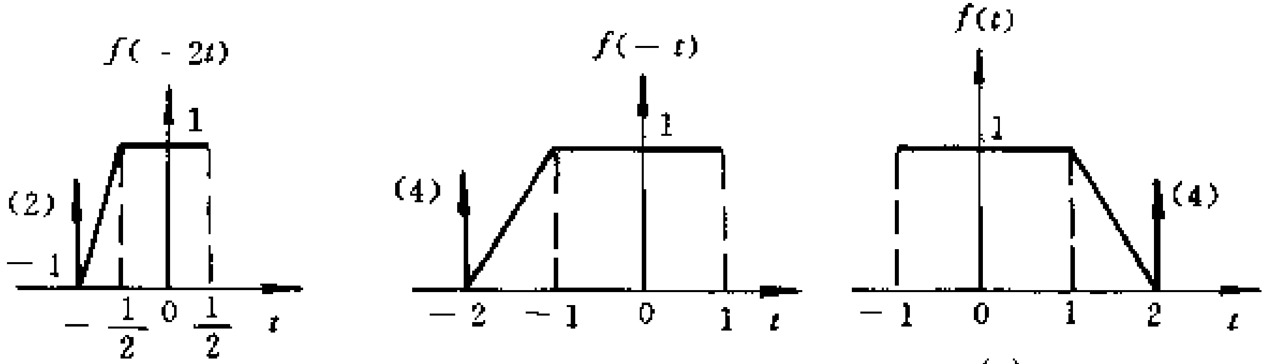


(c)

方法四　时移→展缩→折叠

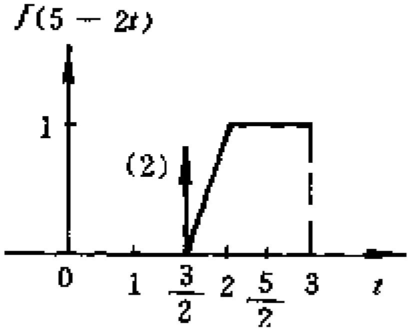
$$f(5-2t)=f\left[-2\left(t-\frac{5}{2}\right)\right]\xrightarrow{\text{左时移}\frac{5}{2}}f(-2t)\xrightarrow{\text{展宽 1 倍}}f\left(-2\times\frac{1}{2}t\right)=f(-t)$$

$\xrightarrow{\text{折叠}}f(t)$，其波形依次如图 1.32(a)，(b)，(c) 所示。



(a)　(b)　(c)

图　1.32



例5：一个LTI系统，在相同的初始条件下，当激励为$f(t)$时，其全响应为$y_1(t)=[2e^{-3t}+\sin(2t)]u(t)$;当激励为$2f(t)$时，其全响应为$y_2(t)=[e^{-3t}+2\sin(2t)]u(t)$。求：

（1）初始条件不变，当激励为$f(t-t_0)$时的全响应$y_3(t)$

（2）初始条件增大1倍，当激励为$0.5f(t)$时的全响应$y_4(t)$

解：（1）设零输入响应为$y_x(t)$,零状态响应为$y_f(t)$,有：

$$y_x(t)+y_f(t)=[2e^{-3t}+\sin(2t)]u(t)$$

$$y_x(t)+2y_f(t)=[e^{-3t}+2\sin(2t)]u(t)$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

解得

$$y_x(t)=3e^{-3t}u(t)$$

$$y_f(t)=[-e^{-3t}+\sin(2t)]u(t)$$

$$y_3(t)=y_x(t)+y_f(t-t_0)=3e^{-3t}u(t)+[-e^{-3(t-t_0)}+\sin(2(t-t_0))]u((t-t_0))$$

(2)

$$y_4(t)=2y_x(t)+0.5y_f(t)=2\cdot 3e^{-3t}u(t)+0.5\cdot[-e^{-3t}+\sin(2t)]u(t)$$

$$=[5.5e^{-3t}+0.5\sin(2t)]u(t)$$

例6：一个LTI系统，在两个初始条件$x_1(0), x_2(0)$,已知：

(1)当$x_1(0)=1$，$x_2(0)=0$时，其零输入响应为$(e^{-t}+e^{-2t})u(t)$;

(2)当$x_1(0)=0$，$x_2(0)=1$时，其零输入响应为$(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$;

(3)当$x_1(0)=1$，$x_2(0)=-1$,激励为$f(t)$时，其全响应为$(e^{-t}+2)u(t)$

求$x_1(0)=3$，$x_2(0)=2$,激励为$2f(t)$时的全响应$y(t)$

解：$x_1(0)=1$时产生的零输入响应

$$y_{x1}(t)=(e^{-t}+e^{-2t})u(t)$$

$x_2(0)=1$时产生的零输入响应

$$y_{x2}(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

设$f(t)$产生的零状态响应为$y_f(t)$,有：

$$(e^{-t}+2)u(t)=y_{x1}(t)+(-1)y_{x2}(t)+y_f(t)$$

$$(e^{-t}+2)u(t)=(e^{-t}+e^{-2t})u(t)-(e^{-t}-e^{-2t})u(t)+y_f(t)$$

$$y_f(t)=(e^{-t}-2e^{-2t}+2)u(t)$$

当$x_1(0)=3$，$x_2(0)=2$,激励为$2f(t)$时的全响应是：

$$y(t)=3y_{x1}(t)+2y_{x2}(t)+2y_f(t)=(7e^{-t}-3e^{-2t}+4)u(t)$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

连续系统时域分析

第二章典型习题

例1：已知电路如图。求响应$i_1(t),i_2(t),i_3(t)$对$f(t)$的转移算子，以及描述$i_2(t)$与$f(t)$关系的微分方程。

解：对电路列网孔方程

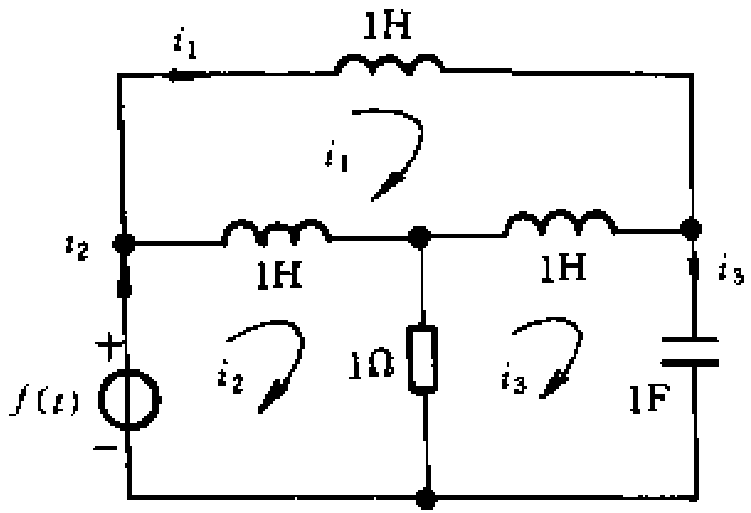


图 2.1

$$\begin{cases} 3pi_1(t)-pi_2(t)-pi_3(t)=0 \\ -pi_1(t)+(p+1)i_2(t)-i_3(t)=f(t) \\ -pi_1(t)-i_2(t)-(p+1+\dfrac{1}{p})i_3(t)=0 \end{cases}$$

$$i_1(t)=\frac{p(p^2+2p+1)}{p(p^3+2p^2+2p+3)}f(t)=H_1(p)f(t)$$

$$i_2(t)=\frac{p(2p^2+3p+3)}{p(p^3+2p^2+2p+3)}f(t)=H_2(p)f(t)$$

$$i_3(t)=\frac{p^2(p+3)}{p(p^3+2p^2+2p+3)}f(t)=H_3(p)f(t)$$

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

$$H_1(p)=\frac{p(p^2+2p+1)}{p(p^3+2p^2+2p+3)}$$

$$H_2(p)=\frac{p(2p^2+3p+3)}{p(p^3+2p^2+2p+3)}$$

$$H_3(p)=\frac{p^2(p+3)}{p(p^3+2p^2+2p+3)}$$

描述$i_2(t)$与$f(t)$关系：

$$p(p^3+2p^2+2p+3)i_2(t)=p(2p^2+3p+3)f(t)$$

$$(p^4+2p^3+2p^2+3p)i_2(t)=(2p^3+3p^2+3p)f(t)$$

$$\frac{d^4i_2(t)}{dt^4}+2\frac{d^3i_2(t)}{dt^3}+2\frac{d^2i_2(t)}{dt^2}+3\frac{di_2(t)}{dt}=2\frac{d^3f(t)}{dt^3}+3\frac{d^2f(t)}{dt^2}+3\frac{df(t)}{dt}$$

例2: $(1)\ f_1(t) * tu(t) = (t + e^{-t} - 1)u(t)$

$(2)\ f_2(t) * [e^{-t}u(t)] = (1 - e^{-t})u(t) - (1 - e^{-t+1})u(t-1)$

求$f_1(t)$和$f_2(t)$

解 由于卷积积分不易求逆运算，故解此题可利用卷积的微分性质求解。

(1) 因有$\dfrac{d^2}{dt^2}[f_1(t) * tU(t)] = \dfrac{d^2}{dt^2}(t + e^{-t} - 1)U(t)$，即

$$f_1(t) * \frac{d^2}{dt^2}[tU(t)] = e^{-t}U(t)$$

即
$$f_1(t) * \delta(t) = e^{-t}U(t)$$

所以
$$f_1(t) = e^{-t}U(t)$$

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解

(2) 因有$\dfrac{d}{dt}\{f_2(t) * [e^{-t}U(t)]\} = \dfrac{d}{dt}\{(1 - e^{-t})U(t) - [1 - e^{-(t-1)}]U(t-1)\}$

即
$$f_2(t) * [\delta(t) - e^{-t}U(t)] = e^{-t}U(t) - e^{-(t-1)}U(t-1)$$

$$f_2(t) - f_2(t) * e^{-t}U(t) = e^{-t}U(t) - e^{-(t-1)}U(t-1)$$

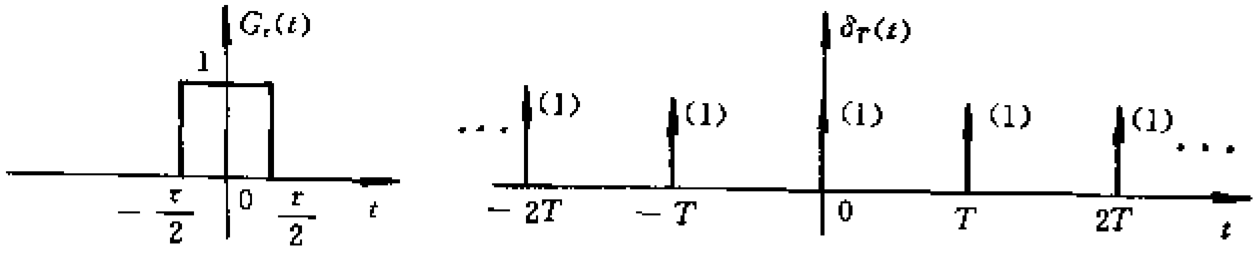
即 $f_2(t) - \{(1 - e^{-t})U(t) - [1 - e^{-(t-1)}]U(t-1)\} = e^{-t}U(t) - e^{-(t-1)}U(t-1)$

所以
$$f_2(t) = U(t) - U(t-1)$$

讨论 求此类问题应首先求卷积的微分，使其出现冲激函数，然后再利用已知条件即可求出所需的函数。若不限制用时域方法求解，此类问题用复频域分析则比较简便。

例3:单位门函数 $G_\tau(t)$ 与单位冲激序列 $\delta_T(t)$ 的波形如图 2.6(a)，(b) 所示。求 $G_\tau(t) * \delta_T(t)$，并画出其波形。设 $\tau \leqslant T$。

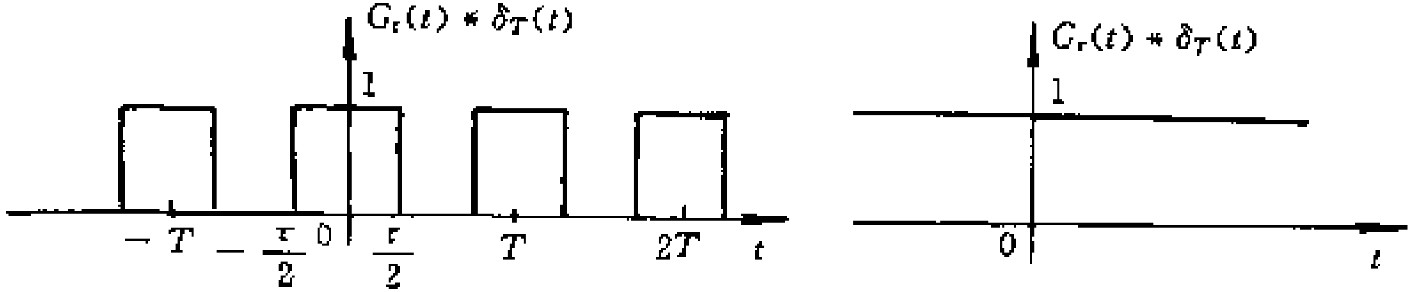
指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解



(a) (b)

解： $$G_\tau(t) * \delta_T(t) = G_\tau(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_\tau(t-kT)$$

当 $T = \tau$ 时，$G_\tau(t) * \delta_T(t)$ 的波形如图 2.6(d) 所示。

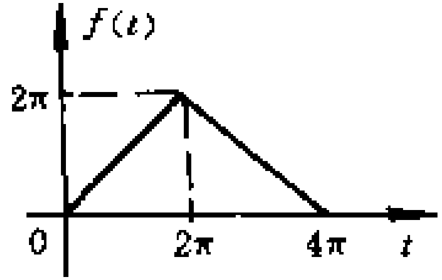


(c) (d)

讨论 当 $T < \tau$ 时，$G_\tau(t) * \delta_T(t)$ 的波形应为何形状？

例4: 一个LTI系统$h(t)=\sin t u(t)$, 激励$f(t)$如图，求零状态响应 $y(t)$。

解：$y(t)=h(t)*f(t)=h^{(-2)}(t)*f^{(2)}(t)$



$h(t)$积分两次，有：

$$h^{(-1)}(t)=\int_0^t \sin\tau u(\tau)d\tau=(1-\cos t)u(t)$$

$$h^{(-2)}(t)=\int_0^t (1-\cos\tau)u(\tau)d\tau=(t-\sin t)u(t)$$

$f(t)$微分两次，有：

$$f^{(2)}(t)=\delta(t)-2\delta(t-2\pi)+\delta(t-4\pi)$$

$$y(t)=h^{(-2)}(t)*f^{(2)}(t)$$
$$=[(t-\sin t)u(t)]*[\delta(t)-2\delta(t-2\pi)+\delta(t-4\pi)]$$
$$=(t-\sin t)u(t)-2[(t-2\pi)-\sin(t-2\pi)]u(t-2\pi)$$
$$+[(t-4\pi)-\sin(t-4\pi)]u(t-4\pi)$$

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解

例5：一个LTI系统$H(p)=\dfrac{p+3}{p^2+3p+2}$，激励$f(t)=e^{-4t}u(t)$时，系统的全响应为：$y(t)=[\dfrac{14}{3}e^{-t}-\dfrac{7}{2}e^{-2t}-\dfrac{1}{6}e^{-4t}]u(t)$，求系统的冲激响应$h(t)$，零状态响应$y_f(t)$，零输入响应$y_x(t)$；自由响应与强迫响应；稳态响应与瞬态响应

解：(1)求系统的冲激响应$h(t)$

$$H(p)=\frac{p+3}{p^2+3p+2}=\frac{-1}{p+2}+\frac{2}{p+1}$$

$$h(t)=(-e^{-2t}+2e^{-t})u(t)$$

(2)求零状态响应$y_f(t)$

$$y_f(t)=f(t)*h(t)=e^{-4t}u(t)*(-e^{-2t}+2e^{-t})u(t)$$

$$=-e^{-4t}u(t)*e^{-2t}u(t)+e^{-4t}u(t)*2e^{-t}u(t)$$

$$=-\frac{1}{4-2}(e^{-2t}-e^{-4t})u(t)+\frac{2}{4-1}(e^{-t}-e^{-4t})u(t)$$

$$=(\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{6}e^{-4t})u(t)$$

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解

(3)求零输入响应$y_x(t)$

$$y_x(t) = y(t) - y_f(t)$$

$$= (\frac{14}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t})u(t) - (\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t})u(t)$$

$$= (4e^{-t} - 3e^{-2t})u(t)$$

(4)响应的划分

$$y(t) = (\underbrace{\frac{14}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t}}_{\text{自由响应}} \underbrace{- \frac{1}{6}e^{-4t}}_{\text{强迫响应}})u(t)$$

$$y(t) = (\underbrace{\frac{14}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}}_{\text{瞬态响应}})u(t) + \underbrace{0}_{\text{稳态响应}}$$

例5: 图 2.13 所示电路，已知 $f(t)=18\mathrm{e}^{-3t}U(t)$ V，$i_1(0^-)=i_2(0^-)=i_3(0^-)=1$ A。求全响应 $i_3(t)$。

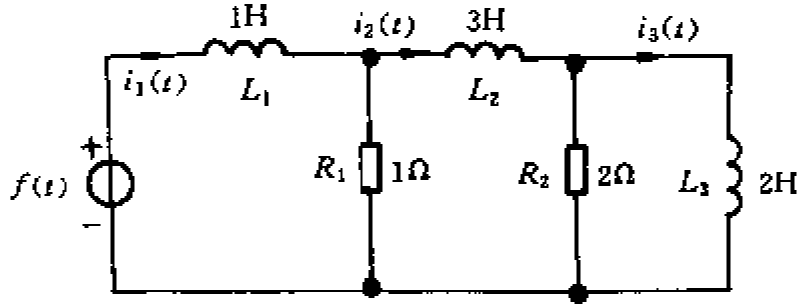


图 2.13

解 (1) 求零状态响应 i_{3f}。由两孔法列方程

$$\begin{cases}(1+p)i_1(t)-i_2(t)=f(t)\\ -i_1(t)+(3+3p)i_2(t)-2i_3(t)=0\\ -2i_2(t)+(2+2p)i_3(t)=0\end{cases}$$

联立解得

$$i_3(t)=\frac{1/3}{p^3+3p^2+2p}f(t)=H_3(p)f(t)$$

其中

$$H_3(p)=\frac{1/3}{p^3+3p^2+2p}=\frac{1/6}{p}-\frac{1/3}{p+1}+\frac{1/6}{p+2}$$

冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t)=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2t}\right)U(t)\ \mathrm{A}$$

故

$$i_{3f}(t)=f(t)*h(t)=18\mathrm{e}^{-3t}U(t)*(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2t})U(t)=$$
$$(1-3\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t})U(t)\ \mathrm{A}$$

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解

（2）求零输入响应 $i_{3x}(t)$。由于

$$H(p) = \frac{1/3}{p^3 + 3p^2 + 2p}$$

故电路自然频率为 $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$，则有

$$i_{3x}(t) = A_1 + A_2 e^{-t} + A_3 e^{-2t} \qquad ①$$

其一阶和二阶导数为

$$i'_{3x}(t) = -A_2 e^{-t} - 2A_3 e^{-2t} \qquad ②$$

$$i''_{3x}(t) = A_2 e^{-t} + 4A_3 e^{-2t} \qquad ③$$

又由初始条件 $i_1(0^-) = i_2(0^-) = i_3(0^-) = 1$，故当 $f(t) = 0$ 时有

$$i_{1x}(0^+) = i_{2x}(0^+) = i_{3x}(0^+) = 1$$

又
$$i'_{3x}(0) = \frac{u_{L3}(0)}{2} = \frac{u_{R2}(0)}{2} = \frac{[i_2(0) - i_3(0)] \times 2}{2} = 0$$

$$i''_{3x}(0) = i'_{2x}(0) - i'_{3x}(0) = i'_{2x}(0) = \frac{u_{L2}(0)}{3} = \frac{u_{R1}(0)}{3} = \frac{[i_1(0) - i_2(0)] \times 1}{3} = 0$$

将上述初始值代入式 ①,②,③ 得

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ -A_2 - 2A_3 = 0 \\ A_2 + 4A_3 = 0 \end{cases}$$

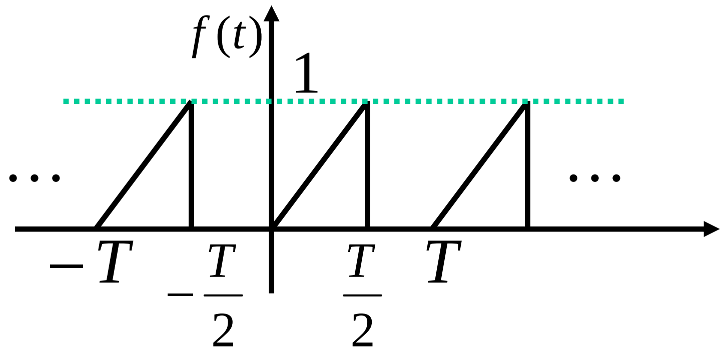
联立解得 $A_1 = 1, A_2 = A_3 = 0$ 得

$$i_{3x}(t) = 1\ \text{A} \qquad (t \geqslant 0)$$

故
$$i_3(t) = i_{3x}(t) + i_{3f}(t) = (2 - 3e^{-t} + 3e^{-2t} - e^{-3t})\ \text{A} \qquad (t \geqslant 0)$$

第三章 傅立叶变换习题

例1、求f(t)的傅立叶级数



解法一：直接用傅立叶级数公式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{1}{T}\int_0^{T/2}t\frac{2}{T}e^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$=\frac{2}{T^2}\int_0^{T/2}\left(-\frac{1}{jnw_1}\right)tde^{-jn\omega_1 t}$$

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解

$$=-\frac{2}{jnw_1T^2}\left[te^{-jn\omega_1 t}\Big|_0^{T/2}-\int_0^{T/2}e^{-jn\omega_1 t}dt\right]$$

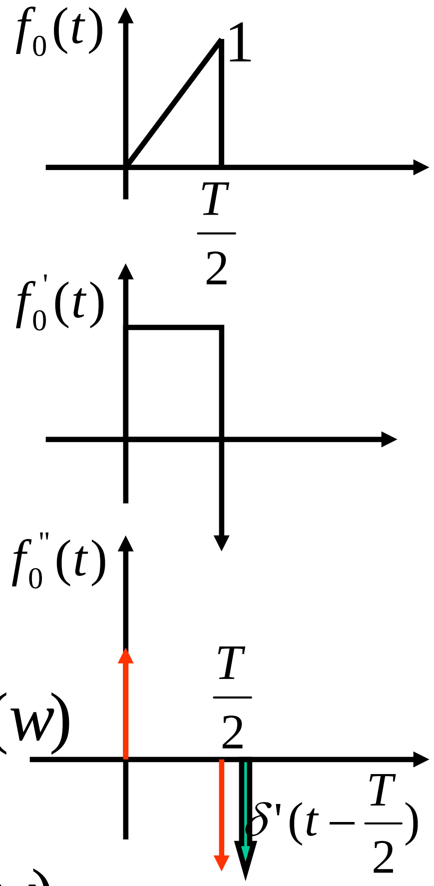
$$=-\frac{2}{jnT\bullet 2\pi}\left[\frac{T}{2}e^{-jn\pi}+\frac{1}{jn\pi}(e^{-jn\pi}-1)\right]$$

$$\because e^{-jn\pi}=\cos n\pi-j\sin n\pi=\begin{cases}-1\ , & n\text{为偶}\\ 1\ , & n\text{为奇}\end{cases}$$

$$\therefore F_n = \begin{cases} \dfrac{1}{jn\pi} - \dfrac{1}{(n\pi)^2}, n\text{为奇} \\ -\dfrac{1}{jn\pi} \qquad\qquad, n\text{为偶} \end{cases}$$

$$\therefore \ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = \dots \qquad , \quad w_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

解法二：利用傅立叶级数与傅立叶变换的关系求傅立叶级数



令$f_0(t)=f(t)\quad , \quad t\in(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$

$$f_0''(t)=\frac{2}{T}\delta(t)-\frac{2}{T}\delta(t-\frac{T}{2})-\delta'(t-\frac{T}{2})$$

$$F_2(w)=FT[f_0''(t)]=\frac{2}{T}-\frac{2}{T}e^{-j\frac{wT}{2}}-jwe^{-j\frac{wT}{2}}$$

设$F_1(w)=FT[f_0'(t)], F_0(w)=FT[f_0(t)]$

$$F_2(0)=0 \qquad \therefore F_1(w)=\frac{1}{jw}F_2(w)+\pi F_2(0)\delta(w)=\frac{1}{jw}F_2(w)$$

$$F_1(0)=0 \qquad \therefore F_0(w)=\frac{1}{jw}F_1(w)+\pi F_1(0)\delta(w)=\frac{1}{jw}F_1(w)$$

$$\therefore F_0(w)=FT[f_0''(t)]=-\frac{2}{w^2T}+\frac{2}{w^2T}e^{-j\frac{wT}{2}}-\frac{1}{jw}e^{-j\frac{wT}{2}}$$

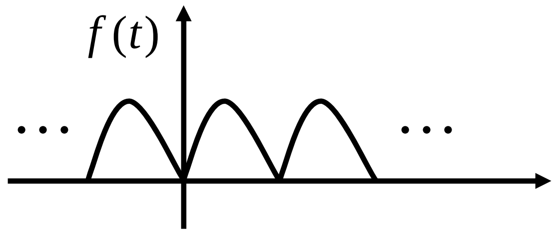
$$\therefore F_n = \frac{1}{T}F_0(w)\Big|_{w=nw_1} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{n^2\pi^2}+\frac{1}{n^2\pi^2}e^{-jn\pi}-\frac{1}{jn\pi}e^{-jn\pi}\right]$$

$$\because e^{-jn\pi} = \cos n\pi - j\sin n\pi = \begin{cases} -1 \quad , \quad n\text{为偶} \\ 1 \quad , \quad n\text{为奇} \end{cases}$$

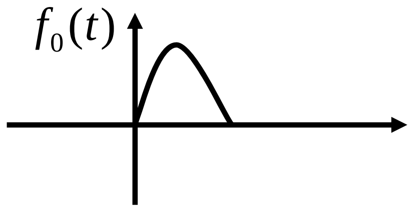
$$\therefore F_n = \begin{cases} \dfrac{1}{jn\pi}-\dfrac{1}{(n\pi)^2}, n\text{为奇} \\ -\dfrac{1}{jn\pi} \qquad , n\text{为偶} \end{cases}$$

$$\therefore \ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = \ldots \qquad , \quad w_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

例2、求 $|\sin \pi t|$ 的傅立叶级数



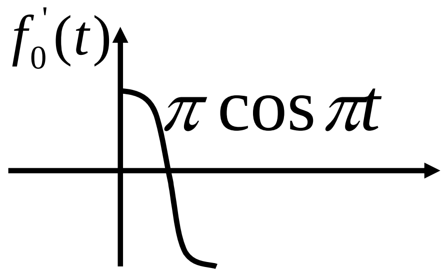
解：令 $f_0(t) = \sin \pi t \quad , t \in (0,1]$



有 $f_0''(t) = \pi\delta(t) + \pi\delta(t-1) - \pi^2 f_0(t)$

令 $F_2(w) = FT[f_0''(t)], F_0(w) = FT[f_0(t)]$ ，有：

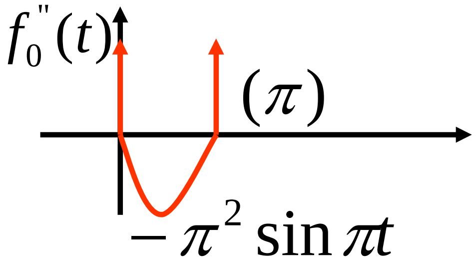
$$F_2(w) = (jw)^2 F_0(w) = \pi + \pi e^{-jw} - \pi^2 F_0(w)$$



$$\therefore F_0(w) = \frac{\pi(1+e^{-jw})}{-w^2+\pi^2}$$

?

$$\therefore F_n = \frac{1}{T} F_0(w) \Big|_{w=nw_1} = \frac{\pi(1+e^{-jw_1 n})}{-(nw_1)^2+\pi^2}$$

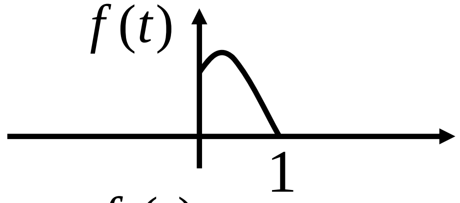


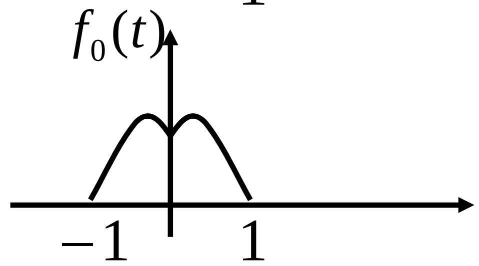
$$\therefore F_n = \frac{1}{\pi}\frac{1+e^{-j2n\pi}}{1-4n^2}$$

指标点1-1
能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解

$$\therefore f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1+e^{-j2n\pi}}{1-4n^2}e^{j2n\pi_1 t} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{1-4n^2}e^{j2n\pi t}$$

例3、图示信号f(t)的频谱函数F(w)=a(w)-jb(w),a(w)与b(w)均为实函数，求$x(t)=[f_0(t+1)+f_0(t-1)]\cos w_0 t$的频谱函数$X(w)$,其中$f_0(t)=f(t)+f(-t)$.





解：$f(t)\leftrightarrow F(w)=a(w)-jb(w)$

$\therefore f(-t)\leftrightarrow F(-w)=a(-w)-jb(-w)=a(w)+jb(w)$

$\therefore f_0(t)=f(t)+f(-t)\leftrightarrow 2a(w)$

$\therefore f_0(t+1)+f_0(t-1)\leftrightarrow 2a(w)e^{jw}+2a(w)e^{-jw}=4a(w)\cos w$

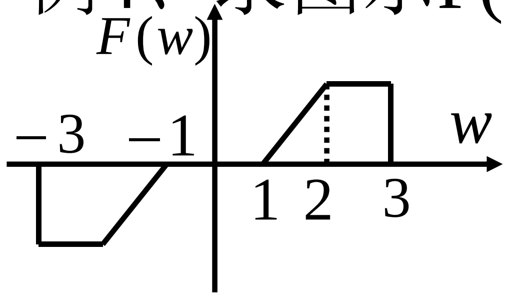
$$X(w)=FT[f_0(t+1)+f_0(t-1)]\cos w_0 t$$

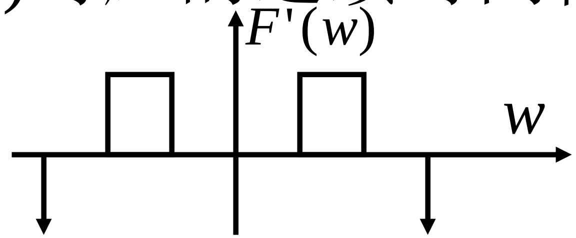
$$=\frac{1}{2\pi}4a(w)\cos w*\pi[\delta(w+w_0)+\delta(w-w_0)]$$

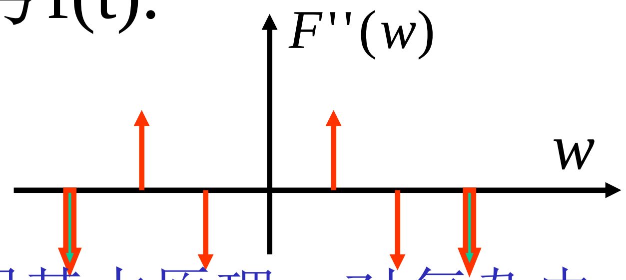
$$=2a(w+w_0)\cos(w+w_0)+2a(w-w_0)\cos(w-w_0)$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

例4、求图示F(w)对应的连续时间信号f(t).







指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

解：对F(w)两次求导有：

$$\frac{d^2F(w)}{dw^2}=-\delta'(w+3)+\delta(w+2)-\delta(w+1)+\delta(w-1)-\delta(w-2)-\delta'(w-3)$$

$$\because (-jt)^2 f(t)\leftrightarrow F''(w)$$

$$\therefore (-jt)^2 f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[-\delta'(w+3)+\delta(w+2)-\delta(w+1)+\delta(w-1)$$

$$-\delta(w-2)-\delta'(w-3)]e^{jwt}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\int_{-\infty}^{\infty}-\delta'(w+3)e^{jwt}dw+\int_{-\infty}^{\infty}-\delta'(w-3)e^{jwt}dw+e^{-2jt}-e^{-jt}+e^{jt}-e^{2jt}]$$

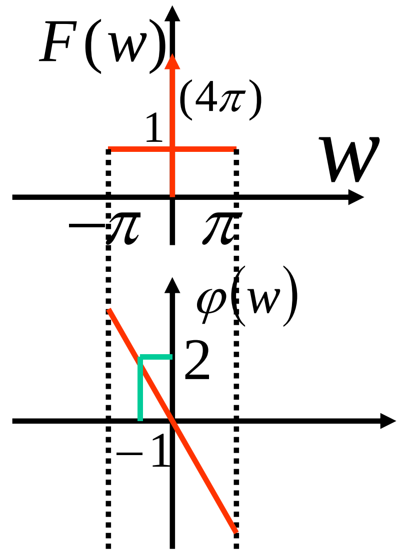
$$=[jte^{-3jt}+jte^{3jt}-2j\sin 2t+2j\sin t]\Big/2\pi$$

$$=[jt\cos 3t-j\sin 2t+j\sin t]\Big/\pi$$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{\pi(-jt)^2}[j\sin t-j\sin 2t+jt\cos 3t]$$

$$\therefore \ f(t)=\frac{1}{j\pi t}[\frac{1}{t}(\sin t-\sin 2t)+\cos 3t]$$

例5、求图示频谱图对应的连续时间信号f(t).



解：由图示有：$F(w)=4\pi\delta(w)+G_{2\pi}(w)e^{-2jw}$

$$\because\ G_{\tau}(t)\leftrightarrow \tau Sa(\frac{w\tau}{2})$$

$$\therefore\ \tau=2\pi\text{时有}:G_{2\pi}(t)\leftrightarrow 2\pi Sa(\pi w)$$

$$\therefore\ 2\pi G_{2\pi}(-w)\leftrightarrow 2\pi Sa(\pi t)$$

$$G_{2\pi}(w)\text{为偶函数},\ \therefore\ G_{2\pi}(w)\leftrightarrow Sa(\pi t)$$

$$\therefore\ G_{2\pi}(w)e^{-2jw}\leftrightarrow Sa[\pi(t-2)]$$

$$\text{又}\because 1\leftrightarrow 2\pi\delta(w)$$

$$\therefore 4\pi\delta(w)\leftrightarrow 2$$

$$\therefore\ f(t)=FT^{-1}[F(w)]=2+Sa[\pi(t-2)]$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

例6、在$t\in[-T,T]$上，信号$f(t)$用$v(t)$来近似，若误差$E(t)$满足：

$$E(t)=\begin{cases}\left|f(t)-v(t)\right|\le\varepsilon & ,t\in[-T,T]\\ 0 & ,\quad 其他\end{cases}$$

且$F(w)\leftrightarrow f(t)$ ， $V(w)\leftrightarrow v(t)$，试证明：

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(w)-V(w)\right|^2dw\le 4\pi T$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

证明：用帕色伐尔定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(w)-V(w)\right|^2dw=2\pi\int_{-T}^{T}\left|f(t)-v(t)\right|^2dt$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(w)-V(w)\right|^2dw\le 2\pi\int_{-T}^{T}\varepsilon^2dt=4\pi\varepsilon^2T$$

$$\therefore\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(w)-V(w)\right|^2dw\le 4\pi T$$

例7、一个连续信号x(t)的傅立叶变换的幅频关系满足下面条件：$\ln|X(w)| = -|w|$ 若x(t)为 a. 时间t的偶函数，b. 时间t的奇函数。分别求x(t)。

解：由 $\ln|X(w)| = -|w|$ 有：$|X(w)| = e^{-|w|}$

a. 若x(t)实的偶函数，那么X(w)也是实偶函数，即：

$$X(w) = X(-w) \quad , \quad X(w) = \pm e^{-|w|}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w)e^{jwt}dw$$

$$= \frac{\pm 1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-(-w)+jwt}dw + \int_{0}^{\infty} e^{-w+jwt}dw\right]$$

$$= \frac{\pm 1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+jt} - \frac{1}{jt-1}\right) = \frac{\pm 1}{2\pi}\frac{-(jt-1-1-jt)}{t^2+1}$$

$$= \frac{\pm 1}{\pi}\frac{1}{t^2+1}$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

b. 若x(t)实的奇函数，那么X(w)也是虚的奇函数，即：

$$\boldsymbol{X(w)=\begin{cases} je^{w},(w<0) \\ -je^{-w},(w>0) \end{cases}} \quad 或 \quad \boldsymbol{X(w)=\begin{cases} -je^{w},(w<0) \\ je^{-w} \quad ,(w>0) \end{cases}}$$

即: $X(w)=\pm j\,\mathrm{sgn}(w)e^{-|w|}$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(w)e^{jwt}dw$$

$$=\frac{\pm j}{2\pi}[-\int_{-\infty}^{0}e^{-(-w)+jwt}dw+\int_{0}^{\infty}e^{-w+jwt}dw]$$

$$=\frac{\mp j}{2\pi}\frac{(-jt+1-1-jt)}{t^{2}+1}$$

$$=\mp\frac{t}{\pi(t^{2}+1)}$$

例8、二维时间信号 $x(t_1,t_2)$的二维傅立叶变换定义为：

$$X(w_1,w_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t_1,t_2)e^{-j(w_1t_1+w_2t_2)}dt_1dt_2$$

A:证明上述双重积分可以看作两个相继的一维傅立叶变换来完成。

B:用A的结果确定其傅立叶逆变换。(即用 $X(w_1,w_2)$表示 $x(t_1,t_2)$)

$C:$ 求$x(t_1,t_2)=e^{-t_1+2t_2}u(t_1-1)u(2-t_2)$的傅立叶变换.

A:证明：

$$X(w_1,w_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t_1,t_2)e^{-j(w_1t_1+w_2t_2)}dt_1dt_2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}x(t_1,t_2)e^{-jw_1t_1}dt_1]e^{-jw_2t}dt_2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(w_1,t_2)e^{-jw_2t_2}dt_2=X(w_1,w_2)$$

指标点1-1
能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

B: 解：$x(t_1,t_2) = FT_{w_1}^{-1}\{FT_{w_2}^{-1}[X(w_1,w_2)]\}$

$$= FT_{w_1}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w_1,w_2)e^{jw_2t_2}dw_2\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(w_1,w_2)e^{j(w_1t_1+w_2t_2)}dw_1dw_2$$

C: 解：

$$X(w_1,w_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1,t_2)e^{-j(w_1t_1+w_2t_2)}dt_1dt_2$$

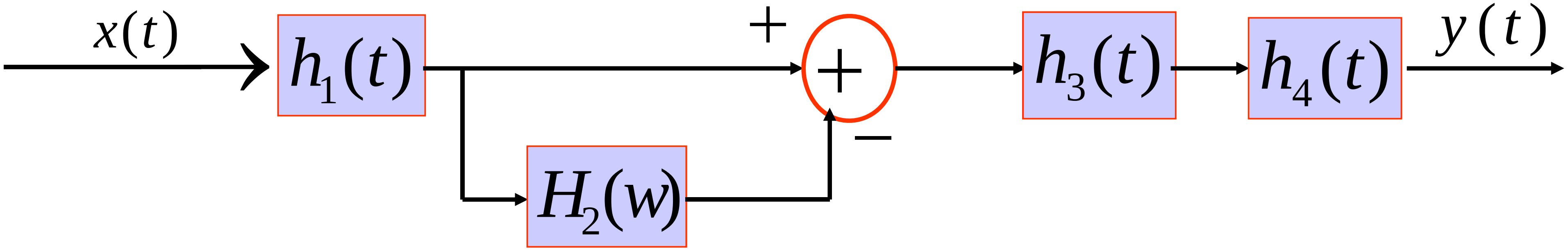
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t_1+2t_2}u(t_1-1)u(2-t_2)e^{-j(w_1t_1+w_2t_2)}dt_1dt_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t_1}u(t_1-1)e^{-jw_1t_1}dt_1 \bullet \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t_2}u(2-t_2)e^{-jw_2t_2}dt_2$$

$$= \int_{1}^{\infty} e^{-(1+jw_1)t_1}dt_1 \bullet \int_{-\infty}^{2} e^{(2-jw_2)t_2}dt_2 = \frac{e^{-(1+jw_1)}}{1+jw_1}\frac{e^{2(2-jw_2)}}{2-jw_2}$$

例9、系统图如下且四个分系统均为LTI系统

$$h_1(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin w_c t}{2\pi t}\right];H_2(w)=e^{-\frac{j2\pi w}{w_c}};h_3(t)=\frac{\sin 3w_c t}{\pi t};h_4(t)=u(t)$$



求解：

$a.$确定$H_1(w)$

$b.$整个系统的冲激响应$h(t)$

$c.$输入$x(t)=\sin 2w_c t+\cos(\frac{w_c t}{2})$时，求系统零状态响应$y(t)$.

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

$a.$ 解: $\because G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau Sa(\frac{w\tau}{2})$

$\therefore \tau = 2w_c$时有 $: G_{2w_c}(t) \leftrightarrow 2w_c Sa(w_c w)$

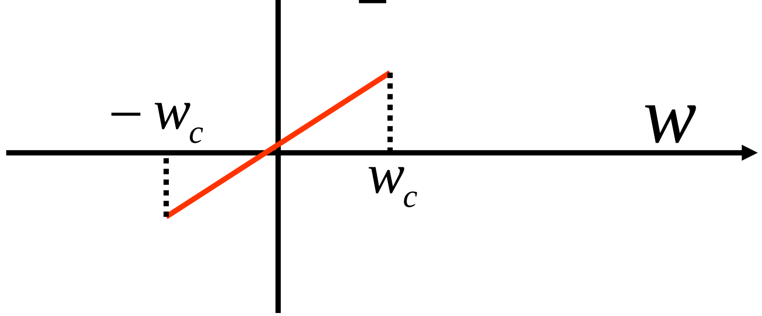
$\therefore 2\pi G_{2\pi}(-w) \leftrightarrow 2w_c Sa(w_c t)$

$G_{2w_c}(w)$为偶函数 $, \therefore G_{2w_c}(w) \leftrightarrow \frac{w_c}{\pi} Sa(w_c t)$

即 $: \frac{\sin w_c t}{\pi t} \leftrightarrow G_{2w_c}(w)$ $\therefore \frac{\sin w_c t}{2\pi t} \leftrightarrow \frac{1}{2} G_{2w_c}(w)$

由微分特性有 $: \frac{d}{dt}[\frac{\sin w_c t}{2\pi t}] \leftrightarrow jw \bullet \frac{1}{2} G_{2w_c}(w)$

即 $H_1(w) = \frac{1}{2} jwG_{2w_c}(w)$



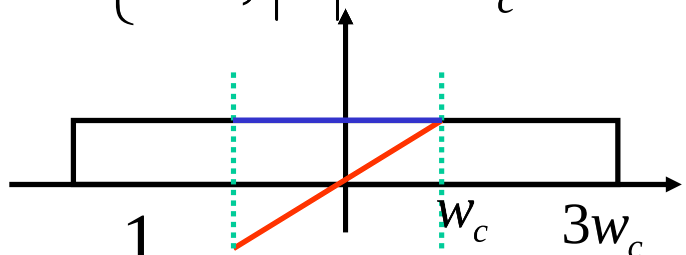
$b.$解:由图知系统的冲激响应为:$h(t)=[h_1(t)-h_2(t)]*h_3(t)*h_4(t)$

由卷积定理有:$H(w)=H_1(w)[1-H_2(w)]H_3(w)H_4(w)$

$$H_1(w)=\frac{1}{2}jwG_{2w_c}(w)=\begin{cases}0.5jw & , \quad |w|\le w_c \\ 0 & , \quad |w|>w_c\end{cases};H_2(w)=e^{-\frac{j2\pi w}{w_c}}$$

同样用对称特性可求:$H_3(w)=G_{2\bullet 3w_c}(w)=\begin{cases}1 & ,|w|\le 3w_c \\ 0 & ,|w|>3w_c\end{cases}$

$$H_4(w)=FT[u(t)]=\frac{1}{jw}+\pi\delta(w)$$



$$H(w)=\frac{1}{2}jwG_{2w_c}(w)[1-e^{-\frac{j2\pi w}{w_c}}]G_{6w_c}(w)[\frac{1}{jw}+\pi\delta(w)]$$

$\therefore$ 当$|w|\le w_c$时:

$$H(w)=\frac{1}{2}jw\bullet 1\bullet[\frac{1}{jw}+\pi\delta(w)][1-e^{-\frac{j2\pi w}{w_c}}]=\frac{1}{2}[1-e^{-\frac{j2\pi w}{w_c}}]$$

$$\therefore h(t) = FT^{-1}[H(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}[1-e^{-\frac{j2\pi w}{w_c}}]e^{jwt}dw$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-w_c}^{w_c}[1-e^{-\frac{j2\pi w}{w_c}}]e^{jwt}dw$$

$$= \frac{\sin w_c t}{2\pi t} - \frac{\sin[w_c(t - {}^{2\pi}/_{w_c})]}{2\pi(t - {}^{2\pi}/_{w_c})}$$

$$= \frac{\sin w_c t}{t(2\pi - w_c t)}$$

$c.$ 解：$x(t)$的傅立叶变换式为：

$$X(w)=j\pi[\delta(w+2w_c)-\delta(w-2w_c)]+\pi[\delta(w+\frac{w_c}{2})+\delta(w-\frac{w_c}{2})]$$

由于$y(t)=x(t)*h(t)$，用卷积定理，则：$Y(w)=X(w)H(w)$

$$Y(w)=\frac{1}{2}[1-e^{-j\frac{2\pi w}{w_c}}]$$

$$\bullet\{j\pi[\delta(w+2w_c)-\delta(w-2w_c)]+\pi[\delta(w+\frac{w_c}{2})+\delta(w-\frac{w_c}{2})]\}$$

但对$H(w)$，定义域为$|w|\le w_c$

$$Y(w)=\frac{1}{2}[1-e^{-j\frac{2\pi w}{w_c}}]\bullet\pi[\delta(w+\frac{w_c}{2})+\delta(w-\frac{w_c}{2})]$$

$$=\pi[\delta(w+\frac{w_c}{2})+\delta(w-\frac{w_c}{2})]\longleftrightarrow\cos(\frac{w_c t}{2})$$

$$y(t)=FT^{-1}[Y(w)]=\cos(\frac{w_c t}{2})$$

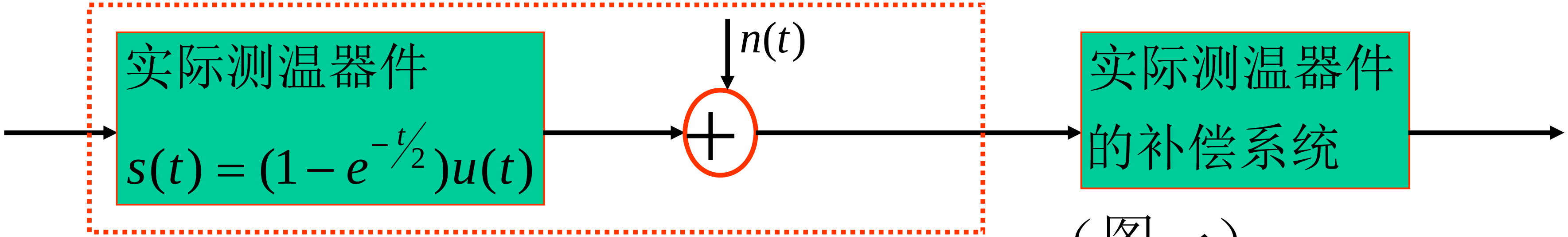
例11、可以将温度测量器件看成单位阶跃响应为

$$s(t)=(1-e^{-t/2})u(t)\text{的一个}LTI\text{系统.}$$

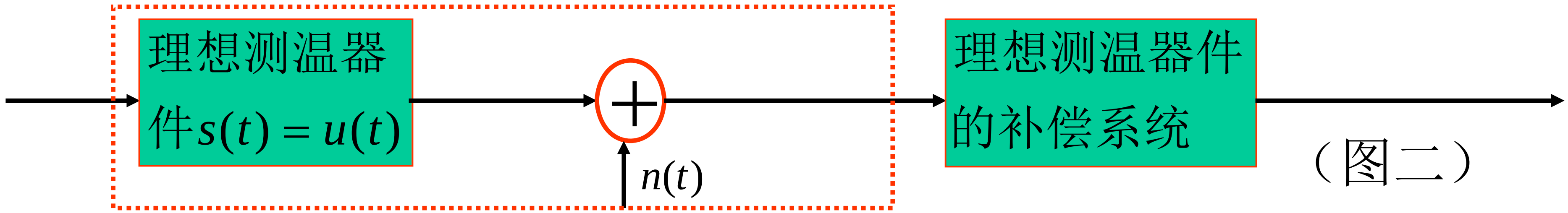
A、为该器件设计一个补偿系统，使其输出为测量的瞬时温度。

B、当温度测量器件本身包含噪声n(t)=sin(wt)时(图一示)，n(t)对A下的补偿系统的输出产生什么影响？当w增大时，该输出如何变化？

C、假定温度测量器件是瞬时地响应于温度变化的理想器件(图二示)，设计一个补偿系统来降低响应的速度，从而来衰减噪声n(t)。设这个补偿系统的冲激响应为 $h(t)=ae^{-at}u(t)$ 应如何选择a，使图二的系统尽可能快地对温度阶跃变化产生响应，而限制噪声n(t)=sin6t引起的输出部分的幅度不大于0.25。



（图一）



（图二）

解：

A、由单位阶跃响应可以求得系统的单位冲激响应

$$h(t)=s'(t)=\frac{1}{2}e^{-t/2}u(t)$$

$$H(w)=FT[h(t)]=\frac{1}{2}\frac{1}{jw+0.5}=\frac{1}{1+j2w}$$

令该补偿系统的单位冲激响应为$h_1(t)$,必有：

$$\delta(t)*h(t)*h_1(t)=\delta(t)\Rightarrow H(w)H_1(w)=1$$

$$\therefore H_1(w)=\frac{1}{H(w)}=1+j2w$$

$$\therefore h_1(t)=\delta(t)+2\delta'(t)$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

B、根据系统的线性时不变性，$n(t)$ 通过 $h_1(t)$ 产生的响应即为所求。

令 $N(w)=FT[n(t)]$ 则

$$Y_n(w)=H_1(w)N(w)=(1+j2w)N(w)=N(w)+2\bullet jwN(w)$$

连同微分特性，对上式求逆变换，有：

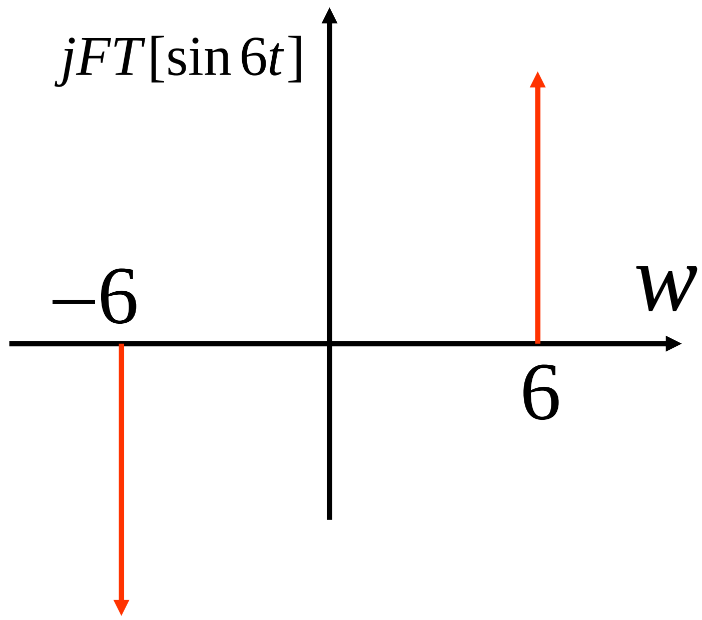
$$y_n(t)=n(t)+2\frac{dn(t)}{dt}=\sin wt+2w\cos wt$$

由上式可知，当频率w增大时，噪声输出中的第二余弦噪声干扰的幅度随频率线性增大。

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

C、根据补偿系统大的冲激响应可求得其频率特性为：

$$H(w) = FT[ae^{-at}] = \frac{a}{a + jw}$$



由题意有：

$$|H(6)| \le \frac{1}{4}$$

?

$$即: |H(w)|^2_{w=6} = \frac{a^2}{a^2 + 36} \le \frac{1}{16}$$

$$\therefore a \le \frac{6}{\sqrt{15}}$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

第四章 拉普拉斯变换习题

1、用定义求单边拉氏变换及 其收敛域。

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

(1) $f(t)=\sin(wt+\theta)$

解: $F(s)=\int_0^\infty \sin(wt+\theta)e^{-st}dt$

$$=\int_0^\infty(\sin wt\cos\theta+\cos wt\sin\theta)e^{-st}dt$$

$$=\cos\theta\int_0^\infty \sin wte^{-st}dt+\sin\theta\int_0^\infty \cos wte^{-st}dt$$

$$=\frac{w\cos\theta}{s^2+w^2}+\frac{s\sin\theta}{s^2+w^2}=\frac{w\cos\theta+s\sin\theta}{s^2+w^2}$$

$F(s)$存在,有$\sigma>0$方可满足:

$$\lim_{t\to\infty}\sin(wt+\theta)e^{-\sigma t}=0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{F(s)}$**的收敛域为** $\boldsymbol{:\sigma>0}$

(2) $f(t) = a^{t}$

解：$F(s) = \int_0^{\infty} a^{t} e^{-st} dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{t \ln a} e^{-st} dt$$

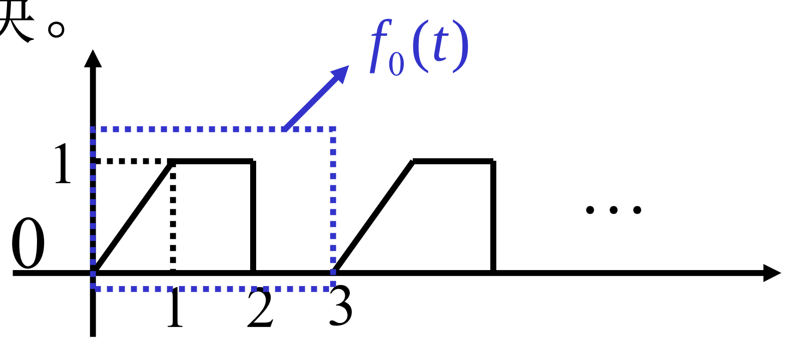
$$= \frac{1}{s - \ln a}$$

若$F(s)$存在，必须 $\sigma > \ln a$方可满足 ：

$$\lim_{t \to \infty} e^{t \ln a} e^{-\sigma t} = 0$$

$\therefore F(s)$的收敛域为 ：$\sigma > \ln a$

2、求图示因果周期的信号拉氏变换。



解：令 $f_0(t) = f(t) \quad t \in [0,3)$，则：

$f(t)$是$f_0(t)$以3为周期的延拓，其中$t > 0$

$$\therefore F(s) = F_0(s)\frac{1}{1-e^{-3s}}$$

$$f_0(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-2)$$

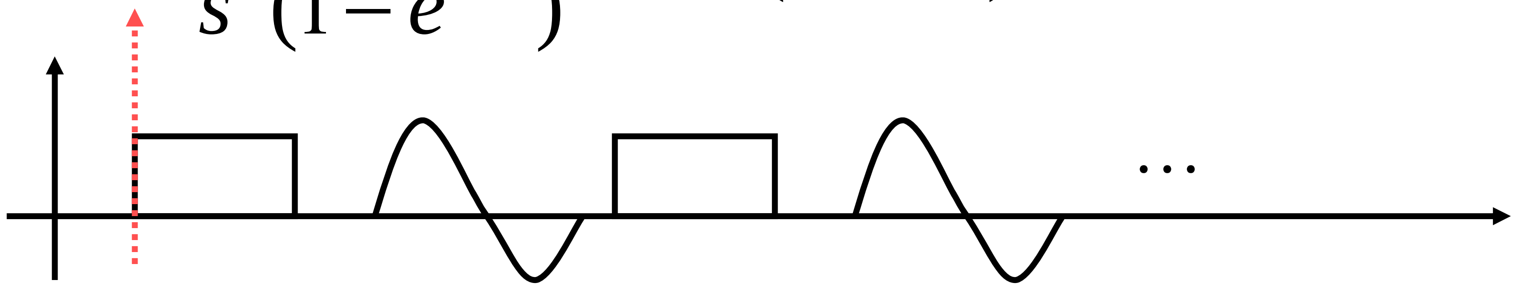
$$F_0(s) = LT[f_0(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-2s}$$

$$= \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s} - se^{-2s})$$

$$\therefore F(s) = \frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-3s})} \qquad (\sigma > 0)$$

指标点1-1
能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

思考：



3、用拉氏变换的性质求拉氏变换。

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

(1) $(t-1)e^{-t}u(t-1)$

解: $\mathrm{LT[t]}=\dfrac{1}{\mathrm{s}^2}$

由频率搬迁特性有: $\mathrm{LT[te^{-t}]}=\dfrac{1}{(s+1)^2}$

由时移特性有:

$$\mathrm{LT[(t-1)e^{-t}}u\left(t-1\right)]=\mathrm{LT[e^{-1}(t-1)e^{-(t-1)}}u\left(t-1\right)]$$

$$=e^{-1}\frac{1}{(s+1)^2}e^{-s}=\frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)^2}\quad(\sigma>-1)$$

(2) $\dfrac{d^2}{dt^2}[e^{-t}\sin t u(t)]$

解: $\mathrm{LT}[\sin t u(t)] = \dfrac{1}{s^2+1}$

由s域下的频移特性有:

$$\mathrm{F}_1(s) = LT[e^{-t}\sin t u(t)] = \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

由时间微分特性有 :

$$\mathrm{LT}[\frac{\mathrm{d}^2}{dt^2}e^{-t}\sin t u(t)] = s^2F_1(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

由于是单边信号,有: $f(0^-)=0,\ f'(0^-)=0$

$$\therefore \mathrm{LT}[\frac{\mathrm{d}^2}{dt^2}e^{-t}\sin t u(t)] = s^2F_1(s) = \frac{s^2}{(s+1)^2+1} \quad (\sigma > -1)$$

4、求下列函数的初值与终值。

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

(1) $F(s)=\dfrac{s^2+1}{(s+1)^2}$

解：由于F(s)不是真分式，不可以直接用初值定理，长除后，正分式部分用初值定理。

$$\text{解}: F(s)=\frac{s^2+1}{s^2+2s+1}=1-\frac{2s}{s^2+2s+1}=1+F_1(s)$$

$$\therefore f(0^+)=\lim_{s\to\infty} sF_1(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{-2s^2}{s^2+2s+1}=-2$$

F(s)仅有极点-1在s平面左侧,可用终值定理:

$$\therefore f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{s^2+1}{s^2+2s+1}=0$$

(2) $F(s)=\dfrac{s^2+4s+1}{(s^2+4)(s+1)}$

解：$f(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)=\lim\limits_{s\to\infty} s\dfrac{s^2+4s+1}{(s^2+4)(s+1)}=1$

由于F(s)存在极点-1,2i,-2i,即在jw轴上有共轭极点,所对应的时间函数f(t)含有振荡成分,不存在终值.

5、用部分分式展开法或留数发求拉氏反变换。

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}$

解：$1-e^{-\pi s}=0 \Rightarrow s=\pm jn \quad (n=0,2,4,6...)$ $\quad s^2+1=0 \Rightarrow s=\pm j$

$$\therefore F(s)=\frac{A}{s-j}+\frac{A^*}{s+j}+\frac{k_0}{s}+\frac{k_2}{s-j2}+\frac{k_2^*}{s+j2}+...+\frac{k_n}{s-jn}+\frac{k_n^*}{s+jn}$$

$$A=(s-j)\left.\frac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}\right|_{s=j}=\frac{1}{j4}, \quad A^*=-\frac{1}{j4}$$

$$k_0=\left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=0}=\left.\frac{1}{[(s^2+1)(1-e^{-\pi s})]'}\right|_{s=0}=\frac{1}{\pi}$$

$$k_n=\left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=jn}=\left.\frac{1}{[(s^2+1)(1-e^{-\pi s})]'}\right|_{s=jn}=\frac{1}{(1-n^2)\pi}, \quad k_n^*=\frac{1}{(1-n^2)\pi}$$

$$f(t)=LT^{-1}[F(s)]=[\frac{1}{j4}(e^{jt}-e^{-jt})+\frac{1}{\pi}-\frac{1}{3\pi}(e^{j2t}+e^{-j2t})-\frac{1}{15\pi}(e^{j4t}+e^{-j4t})-...]u(t)$$

$$=[\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin t-\frac{2}{3\pi}\cos 2t-\frac{2}{15\pi}\cos 4t-...]u(t)$$

(2) $F(s)=\dfrac{s^3}{(s+1)^3}$

解：F(s)不是真分式，不可直接用留数法

$$F(s)=\frac{s^3}{(s+1)^3}=1-\frac{3s^2+3s+1}{(s+1)^3}=1-F_1(s)$$

$$\mathrm{Re}[-1]=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dt^2}[(s+1)^3F_1(s)e^{st}]_{s=-1}$$

$$=\frac{1}{2}[6e^{st}+(12s+6)te^{st}+(3s^2+3s+1)t^2e^{st}]_{s=-1}$$

$$=3e^{-t}-3te^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}$$

$$\therefore\ f(t)=LT^{-1}[1-F_1(s)]=\delta(t)-[3-3t+\frac{1}{2}t^2]e^{-t}u(t)$$

6、LTI系统如下，用拉氏变换法求系统的零输入响应，零状态响应及全响应：$r''(t)+7r'(t)+10r(t)=u(t), r(0^-)=r'(0^-)=1$

解：对微分方程两边同时取拉氏变换，并由微分性质有：

$$s^2R(s)-sr(0^-)-r'(0^-)+7sR(s)-7r'(0^-)+10R(s)=\frac{1}{s}$$

$$\therefore (s^2+7s+10)R(s)=s+8+\frac{1}{s}$$

$$\therefore R(s)=\frac{s+8}{s^2+7s+10}+\frac{1/s}{s^2+7s+10}$$

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

零输入响应为：$\mathbf{r}_{zi}(t)\leftrightarrow\dfrac{s+8}{s^2+7s+10}$

$$r_{zi}(t)=LT^{-1}\left[\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+5}\right]=[2e^{-2t}-e^{-5t}]u(t)$$

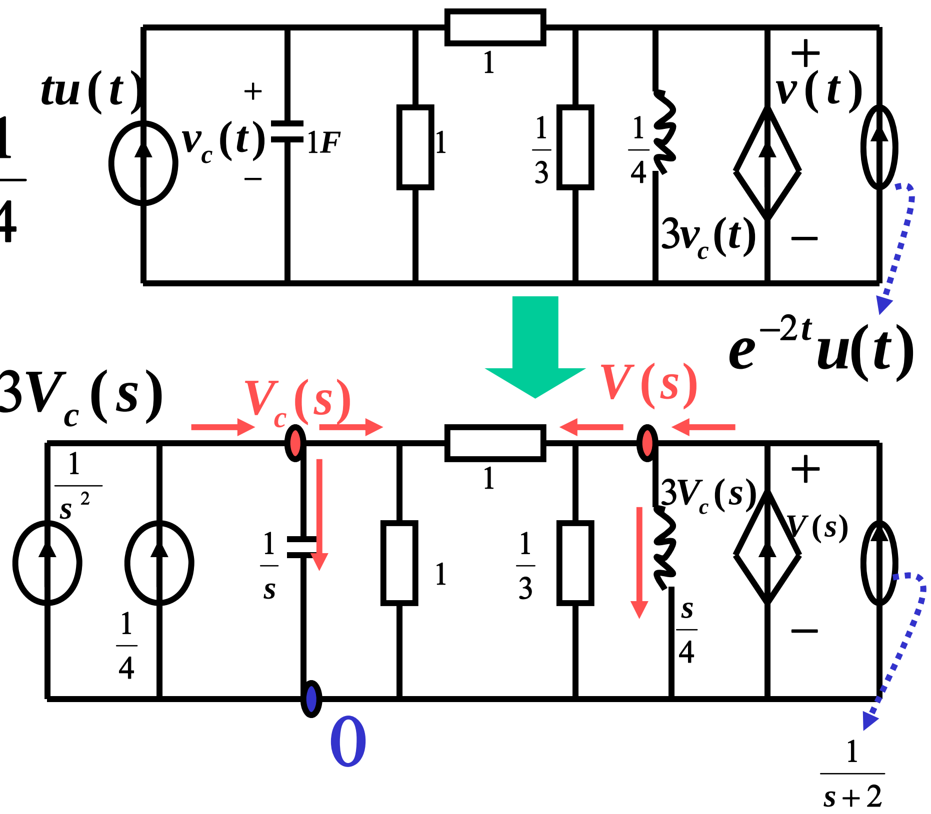
零状态响应：$\mathbf{r}_{zs}(t)\leftrightarrow\dfrac{1/s}{s^2+7s+10}=\dfrac{1}{s(s^2+7s+10)}$

$$r_{zs}(t)=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{15}e^{-5t}\right)u(t)$$

$\therefore$ 全响应$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\ldots$

7、系统如图示： $v_c(0^-)=0.25v, i_L(0^-)=0$, 求v(t)

解：作s域下的电路图如下，有：



$$\begin{cases}(1+1+\dfrac{1}{\frac{1}{s}})V_c(s)-V(s)=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{4}\\ -V_c(s)+(1+\dfrac{1}{\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\frac{s}{4}})V(s)=\dfrac{1}{s+2}+3V_c(s)\end{cases}$$

即：
$$\begin{cases}(2+s)V_c(s)-V(s)=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{4}\\ -4V_c(s)+(4+\dfrac{4}{s})V(s)=\dfrac{1}{s+2}\end{cases}$$

$$\therefore V(s)=\frac{s^2+2}{2s(s^2+2s+2)}=\frac{1}{2s}-\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$\therefore v(t)=LT^{-1}[V(s)]=[\frac{1}{2}-e^{-t}\sin t]u(t)$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

8、一个LTI系统对单位阶跃的响应s(t)为: $s(t)=[1-e^{-t}-te^{-t}]u(t)$
若该系统对某一输入x(t)的响应y(t)为: $y(t)=[2-3e^{-t}+e^{-3t}]u(t)$
求输入信号x(t).

$$\text{解：输入} x_1(t)=u(t)\leftrightarrow X_1(s)=\frac{1}{s}$$

$$\text{输出} y_1(t)=s(t)=[1-e^{-t}-te^{-t}]u(t)\leftrightarrow Y_1(s)=\frac{1}{s(s+1)^2},\sigma>0$$

$$\text{由} Y_1(s)=H(S)X_1(s)\text{有：} H(s)=\frac{Y_1(s)}{X_1(s)}=\frac{1}{(s+1)^2},\sigma>-1$$

$$\text{又} y(t)=[2-3e^{-t}+e^{-3t}]u(t)\leftrightarrow Y(s)=\frac{6}{s(s+1)(s+3)},\sigma>0$$

$$\therefore X(s)=\frac{Y(s)}{H(s)}=\frac{\dfrac{6}{s(s+1)(s+3)}}{\dfrac{1}{(s+1)^2}}=\frac{6(s+1)}{s(s+3)}=\frac{2}{s}+\frac{4}{s+3},\sigma>0$$

$$\therefore x(t)=LT^{-1}[X(s)]=[2+4e^{-3t}]u(t)$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

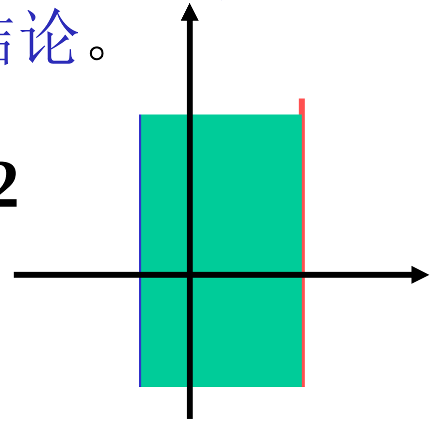
9、某系统，若输入为：$t>0,x(t)=0;t<0,X(s)=\dfrac{s+2}{s-2}$

则输出为:$y(t)=-\dfrac{2}{3}e^{2t}u(-t)+\dfrac{1}{3}e^{-t}u(t)$

a.求**H(s)**及其收敛域.　　**b.**求**h(t)**

c.求输入为:$x(t)=e^{3t},-\infty<t<\infty$时的输出

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

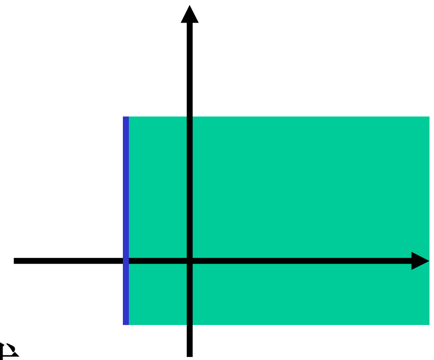


解：**a.**　$X(s)=\dfrac{s+2}{s-2}$是左边变换，收敛域为 $\sigma<2$

$$y(t)=-\frac{2}{3}e^{2t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

$$\therefore Y(s)=Y_b(s)+Y_a(s)=\frac{2}{3}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}=\frac{s}{(s-2)(s+1)},-1<\sigma<2$$

$$\therefore H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s}{(s+2)(s+1)},\sigma>-1$$



（因为y(t)有界，H(s)必然稳定，Y(s)的收敛域必然包含X(s)与Y(s)的公共收敛域，故而，H(s)的收敛域为…）

$$b.\quad H(s)=\frac{s}{(s+2)(s+1)}=\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1},\sigma>-1$$

$$\therefore h(t)=LT^{-1}[H(s)]=[2e^{-2t}-e^{-t}]u(t)$$

$$c.\quad \cancel{Y(s)=H(s)X(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)(s-3)}}$$ (错误, $\because t\in R$)

正解: $t\geq 0, LT[e^{3t}]=\dfrac{1}{s-3},\sigma>3;\quad t<0, LT[e^{3t}]=\dfrac{-1}{s-3},\sigma<3$

$$\therefore t\geq 0\text{时}: Y_{a1}(s)=H(s)X_a(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)(s-3)},\sigma>3$$

$$t<0\text{时}: Y_{b1}(s)=H(s)X_b(s)=\frac{-s}{(s+1)(s+2)(s-3)},-1<\sigma<3$$

由上知, $Y_{a1}(s)$对应的为右边变换:

$$Y_{a1}(s)=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{3}{20}\frac{1}{s-3}\Leftrightarrow y_{a1}(t)=[k_1e^{-t}+k_2e^{-2t}+\frac{3}{20}e^{3t}]u(t)$$

$Y_{b1}(s)$对应的既有右边变换, 又有左边变换:

$$Y_{b1}(s)=\frac{-k_1}{s+1}+\frac{-k_2}{s+2}+\frac{-3}{20}\frac{1}{s-3}\Leftrightarrow y_{b1}(t)$$

$$y_{b1}(t)=[-k_1e^{-t}+-k_2e^{-2t}]u(t)+\frac{3}{20}e^{3t}u(-t)$$

$$\therefore y(t) = y_{a1}(t) + y_{b1}(t) = \frac{3}{20}e^{3t}u(t) + \frac{3}{20}e^{3t}u(-t)$$

$$\therefore\ y(t) = \frac{3}{20}e^{3t}, -\infty < t < \infty$$

另解：e^{3t}是LTI系统的特征函数

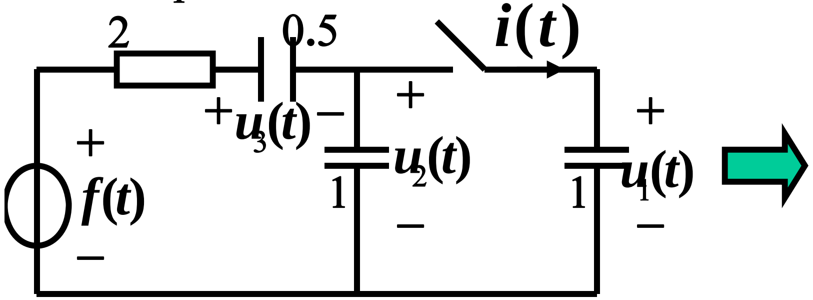
$$\therefore y(t) = H(s)e^{st}\Big|_{s=3} = H(3)e^{3t} = \frac{3}{20}e^{3t}, t \in (-\infty, \infty)$$

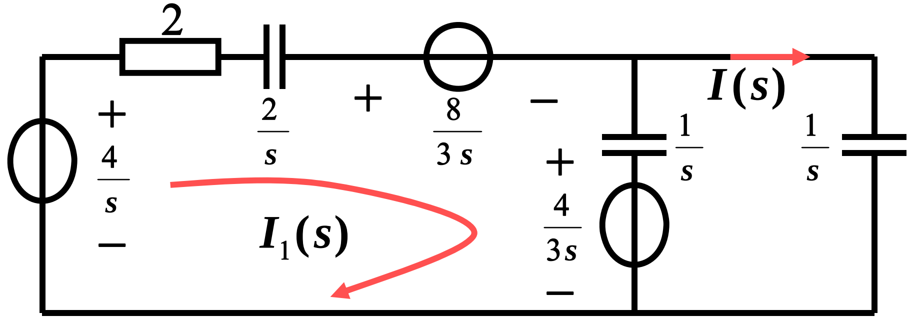
思考：一个冲激响应为h(t)的因果系统有以下特性：

(1) $-\infty < t < \infty$，输入 $x(t) = e^{2t}$，其输出为 ：$y(t) = \frac{1}{6}e^{2t}$

(2) $h(t)$的方程 ：$h'(t) + 2h(t) = e^{-4t}u(t) + bu(t)$，求 $h(t)$.

10、如图电路，f(t)=4v,t<0时，k打开，电路工作已稳定，$u_1(0^-)=0, t=0$时刻闭合 k, 求$t>0$时的$u_1(t), i(t)$.





解：$t<0, k$打开，有：$u_1(0^-)=0$

$$u_2(0^-)=\frac{0.5}{1+0.5}\times 4=\frac{4}{3}(v);\quad u_3(0^-)=\frac{1}{1+0.5}\times 4=\frac{8}{3}(v)$$

t>0时,得s域电路图如右上,列回路方程如下:

$$\begin{cases}(2+\frac{2}{s}+\frac{1}{s})I_1(s)-\frac{1}{s}I(s)=\frac{4}{s}-\frac{8}{3s}-\frac{4}{3s}\\ -\frac{1}{s}I_1(s)+(\frac{1}{s}+\frac{1}{s})I(s)=\frac{4}{3s}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I(s)=\frac{4}{3}\frac{2s+3}{4s+5}\\ U_1(s)=\frac{4}{3s}\frac{2s+3}{4s+5}\end{cases}$$

$$\therefore i(t)=LT^{-1}[I(s)]=\frac{2}{3}\delta(t)+\frac{1}{6}e^{-1.25t}u(t)$$

$$u_1(t)=LT^{-1}[U_1(s)]=[\frac{4}{5}-\frac{2}{15}e^{-1.25t}]u(t)$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

第七章 离散时间系统时域分析

习题

例1、求零输入响应

$$(1)\,y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=u(n),\ y(1)=2,\ y(2)=4$$

$$(2)\,y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=u(n-3),\ y(1)=2,\ y(2)=4$$

$(3)\,y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=u(n)$, 系统的初始条件为：$y(1)=2,\ y(2)=4$

解：1）y(1)=2,y(2)=4是系统的外加激励与系统的初始出储能共同作用而产生，不能直接用他们来确定零输入响应，应先求初始条件：

$$n=0,\ y(2)+3y(1)+2y(0)=u(0)=1\Rightarrow y(0)=-\frac{9}{2}$$

$$n=1,\ y(1)+3y(0)+2y(-1)=u(-1)=0\Rightarrow y(-1)=-\frac{23}{4}$$

上式同时说明y(1),y(0),y(-1)与外加激励无关。系统初始条件为：

$$y(0)=-\frac{9}{2},\ y(1)=2$$

系统的特征方程为：$\alpha^2+3\alpha+2=0\Rightarrow\alpha_1=-1$，$\alpha_2=-2$

$$\therefore y_{zi}(n)=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n$$

由$y(0)=-\frac{9}{2},\ y(1)=2$解得：$c_1=-\frac{9}{2},\ c_2=\frac{5}{2}$

$$\therefore y_{zi}(n)=[-\frac{9}{2}(-1)^n+\frac{5}{2}(-2)^n]u(n)$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

（2）由于n=3时，外加激励才施加于系统，故而初始条件即：

$$y(1)=2, y(2)=4$$

$$y_{zi}(n)=c_1(-1)^n+c_2(-2)^n$$

由$y(1)=2, y(2)=4$有：$c_1=8, c_2=3$

$$\therefore y_{zi}(n)=[8(-1)^n+3(-2)^n]u(n)$$

（3）由于初始条件已知，可直接做…

例2、求下面离散系统的全响应。

$y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)=u(n)$,系统初始条件为：$y(0)=1, y(1)=5$

解：1、求零输入响应：

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

系统特征方程为：

$$\alpha^2-5\alpha+6=0 \Rightarrow \alpha_1=2, \alpha_2=3$$

$$y_{zi}(n)=c_1(2)^n+c_2(3)^n$$

$$\begin{cases} y_{zi}(0)=c_1+c_2=1 \\ y_{zi}(1)=2c_1+3c_2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-2 \\ c_2=3 \end{cases} \qquad \therefore y_{zi}(n)=[-2^{n+1}+3^{n+1}]u(n)$$

2、求零状态响应：$y_{zs}(n)=h(n)*u(n)$

A、求h(n)

系统的特征根为 2,3, 有 $h(n)=c_1(2)^n+c_2(3)^n$

$$\begin{cases} h(2)-5h(1)+6h(0)=1 \\ h(1)-5h(0)+6h(-1)=0 \\ h(0)-5h(-1)+6h(-2)=0 \end{cases}$$

且$h(-1)=0, h(-2)=0$

$$\therefore h(1)=0, h(2)=1$$

$$\therefore \begin{cases} h(1)=2c_1+3c_2=0 \\ h(2)=4c_1+9c_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-\dfrac{1}{2} \\ c_2=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\therefore h(n)=[-2^{n-1}+3^{n-1}]u(n-1)$$

§7.9　杂例（4）

$\boldsymbol{B}$、求$y_{zs}(n)$

$$y_{zs}(n)=h(n)*u(n)$$

$$\therefore y_{zs}(n)=[-2^{n-1}+3^{n-1}]u(n-1)*u(n)$$

$$=[\frac{1}{2}-2^{n}+\frac{1}{2}(3)^{n}]u(n)$$

3、求全响应

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=[\frac{1}{2}-3\times2^{n}+\frac{7}{2}\times3^{n}]u(n)$$

第八章 离散时间系统Z域分析

习题

1、求Z变换并指明收敛域：$f(n)=a^n u(n)-b^n u(-n-1) \quad (a>0,b>0)$

解：$F_1(z)=ZT[a^n u(n)]=\dfrac{z}{z-a} \quad (|z|>a)$

$$F_2(z)=ZT[b^n u(-n-1)]=\sum_{n=-\infty}^{-1} b^n u(-n-1)z^{-n}$$

求$\mathbf{F_2(z)}$如下：

$$(1)\ f_0(k)=f(n)\big|_{k=-n}=b^{-k}u(k-1)=b^{-k}u(k)-1$$

$$(2)F_0(w)=ZT[f_0(k)]=\frac{w}{w-b^{-1}}-1=\frac{b^{-1}}{w-b^{-1}} \quad (|w|>b^{-1})$$

$$(3)F_2(z)=F_0(w)\big|_{w=z^{-1}}=-\frac{z}{z-b} \quad (|z|<b)$$

$$\therefore b>a, F(z)=F_1(z)-F_2(z)=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b} \quad (a<|z|<b)$$

$b<a, F_1(z),F_2(z)$无公共收敛域，$\mathbf{F(z)}$不存在。

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

2、 $F(z)=\dfrac{z^3+2z^2+1}{z^2-1.5z+0.5}\quad (\dfrac{1}{2}<|z|<1)$,求其反变换 $f(n)$.

解: $F(z)=\dfrac{z^3+2z^2+1}{(z-1)(z-0.5)}=z+3.5+\dfrac{4.75z-0.75}{(z-1)(z-0.5)}$

$$\frac{F(z)}{z}=1+\frac{3.5}{z}+\frac{4.75z-0.75}{z(z-1)(z-0.5)}=1+\frac{2}{z}+\frac{8}{z-1}-\frac{6.5}{z-0.5}$$

$$F(z)=z+2+\frac{8z}{z-1}-\frac{6.5z}{z-0.5}$$

由其收敛域 $\dfrac{1}{2}<|z|<1$, $\dfrac{8z}{z-1}$ 对应左边序列, $-\dfrac{6.5z}{z-0.5}$ 对应右边序列。

$$\therefore f(n)=\delta(n+1)+2\delta(n)-8u(-n-1)-6.5(0.5)^n u(n)$$

附: $F_l(z)=\dfrac{8z}{z-1}$ 对应左边序列的求法:

$a. F_l(w)=F_l(z)\Big|_{z=w^{-1}}=\dfrac{8w^{-1}}{w^{-1}-1}=-\dfrac{8}{w-1}$

$b. f_l(k)=ZT^{-1}[f_l(w)]=-8u(k-1)$

$c. f(n)=f_l(k)\Big|_{n=-k}=-8u(-n-1)$

指标点1-1 能将数学知识和方法用于复杂电子信息工程问题的建模和求解。

3、系统的差分方程为: $y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=f(n)+2f(n-2)$
系统初始条件为：y(-1)=2,y(-2)=-0.5,f(n)=u(n),用Z变换法求系统的饿全响应。

解:1)求零输入响应：差分方程: $y_{zi}(n)-y_{zi}(n-1)-2y_{zi}(n-2)=0$

上式两边同时Z变换：

$$Y_{zi}(z)-[z^{-1}Y_{zi}(z)+z^{-1}y_{zi}(-1)z^{-(-1)}]-2[z^{-2}Y_{zi}(z)+z^{-2}y_{zi}(-2)z^{-(-2)}+z^{-2}y_{zi}(-1)z^{1}]=0$$

$y_{zi}(-1)=2,\ y_{zi}(-2)=-0.5,$ 代入上式有：

$$Y_{zi}(z)=\frac{z^2+4z}{z^2-z-2}=\frac{-z}{z+1}+\frac{2z}{z-2}$$

$$\therefore y_{zi}(n)=[2^{n+1}-(-1)^n]u(n)$$

2)求零状态响应。原方程零状态下的Z变换为：

$$Y_{zs}(z)-z^{-1}Y_{zs}(z)-2z^{-2}Y_{zs}(z)=\frac{z}{z-1}+2z^{-2}\frac{z}{z-1}$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{(z^2+2)z}{(z-2)(z+1)(z-1)}=\frac{2z}{z-2}+\frac{0.5z}{z+1}-\frac{3z}{2(z-1)}$$

$$\therefore y_{zs}(n)=[2^{n+1}+0.5(-1)^n-1.5]u(n)$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{(z^2+2)z}{(z-2)(z+1)(z-1)}=\frac{2z}{z-2}+\frac{0.5z}{z+1}-\frac{3z}{2(z-1)}$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

4、 系统的差分方程为：$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=u(n), y(-1)=0,$
$y(-2)=0.5,$ 求系统的全响应 $y(n)$.

解：原方程两边同时Z变换有：

$$Y(z)+3[z^{-1}Y(z)+y(-1)]+2[z^{-2}Y(z)+y(-2)+z^{-1}y(-1)]=\frac{z}{z-1}$$

$$\therefore Y(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z+2)}=\frac{1}{6}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{2}{3}\frac{z}{z+2}$$

$$y(n)=[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(-1)^n-\frac{2}{3}(-2)^n]u(n)$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

5、系统的差分方程为：$y(n+2)-3y(n+1)+2y(n)= f(n+1)-2f(n)$,

初始条件为：$y(0)=0, y(1)=1$,输入某信号$f(n)$,得到全响应为：

$y(n)=[2^{n+1}-2]u(n)$,求$f(n)$.

解：1）求给定条件下系统的零输入响应：

系统的特征根为1，2则：$y_{zi}(n)=[c_1+c_2 2^n]u(n)$

$$\begin{cases} y_{zi}(0)=c_1+c_2=0 \\ y_{zi}(1)=c_1+2c_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-1 \\ c_2=1 \end{cases} \Rightarrow y_{zi}(n)=[-1+2^n]u(n)$$

$$2)\ y_{zs}(n)= y(n)-y_{zi}(n)=[2^{n+1}-2-(-1+2^n)]u(n)=(2^n-1)u(n)$$

3）求f(n)

$$H(z)=\frac{z-2}{z^2-3z+2},\quad Y_{zs}(z)=\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z-1}=\frac{z}{z^2-3z+2}$$

$$\therefore F(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{H(z)}=\frac{z}{z-2}$$

$$\therefore f(n)=2^n u(n)$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

6、某二阶离散系统的初始条件为y(0)=1,y(1)=5。当输入信号为f(n)=u(n)时，输出全响应为y(n),确定该系统的差分方程及单位函数响应。其中 $y(n)=[0.5-3\bullet 2^n+3.5\bullet 3^n]u(n)$

解：$Y(z)=ZT[y(n)]=\frac{1}{2}\frac{z}{z-1}-\frac{3z}{z-2}+\frac{7}{2}\frac{z}{z-3}$

输入 $F(z)=ZT[f(n)]=\frac{z}{z\text{-}1}$，系统为二阶的，显然，"$\frac{1}{2}\frac{z}{z\text{-}1}$"是强迫响应。

故系统的零输入响应的模式为：$y_{zi}(n)=[c_1 2^n+c_2 3^n]u(n)$

$$\begin{cases} y_{zi}(0)=c_1+c_2=1 \\ y_{zi}(1)=2c_1+3c_2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-2 \\ c_2=3 \end{cases} \Rightarrow y_{zi}(n)=[-2^{n+1}+3^{n+1}]u(n)$$

输入信号为f(n)=u(n)时,系统的零状态响应为：

$$y_{zs}(n)=y(n)-y_{zi}(n)=[0.5-2^n+0.5\bullet 3^n]u(n)\Rightarrow Y_{zs}(z)=\frac{z(-z^2+1)}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{ZT[f(n)]}=\frac{-z^2+1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{6}+\frac{3}{2}\frac{z}{z-2}-\frac{8}{3}\frac{z}{z-3}\Rightarrow h(n)=[\frac{1}{6}+\frac{3}{2}2^n-\frac{8}{3}3^n]u(n)$$

$$H(z)=\frac{-z^2+1}{z^2-5z+6}\Rightarrow \text{系统方程为：}$$

$$y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)=-f(n+2)+f(n)$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

7、用Z变换解下面差分方程组（初始条件为零）：

$$\begin{cases} y_1(n+1)+2y_2(n)=u(n) \\ 2y_1(n)+y_2(n+1)=\delta(n) \end{cases}$$

指标点2-3 能运用基本原理，对复杂电子信息工程问题进行综合分析，得出合理性和可行性结论。

解：由于初始条件为零，上式求Z变换有：

$$\begin{cases} zY_1(z)+2Y_2(z)=\dfrac{z}{z-1}----(1) \\ 2Y_1(z)+zY_2(z)=1-----(2) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{2}-\frac{(2)}{z}\text{有：}\ Y_1(z)=\frac{z^2-2z+1}{z^2-4}=1+\frac{-2z+5}{z^2-4}------(3)$$

$$\frac{(1)}{z}-\frac{(2)}{2}\text{有：}\ Y_2(z)=\frac{z(z-3)}{(z-1)(z^2-4)}--------------(4)$$

由题意，系统的初始条件为零，输入是在n>=0时才发生，故（3）、（4）对应的是右边序列。

$$Y_1(z)=-\frac{1}{4}+\frac{z}{z-2}+\frac{9}{8}\frac{z}{z+2}\Rightarrow y_1(n)=-\frac{1}{4}\delta(n)+[2^n+\frac{9}{8}(-2)^n]u(n)$$

$$Y_2(z)=-\frac{2}{3}\frac{z}{z-1}-\frac{1}{3}\frac{z}{z-2}-\frac{5}{12}\frac{z}{z+2}\Rightarrow y_2(n)=[-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}2^n-\frac{5}{12}(-2)^n]u(n)$$