复变函数

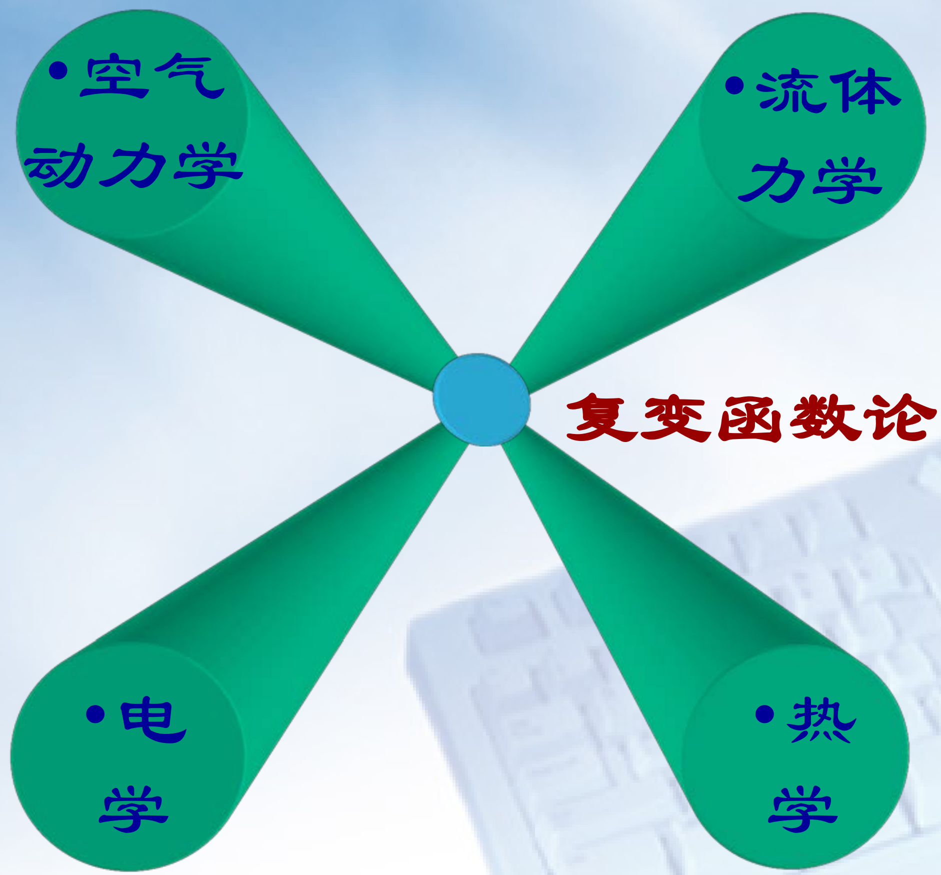
复变函数的地位

世界著名数学家 M.Kline指出：19世纪最独特的创造是复变函数理论。

象微积分的直接扩展统治了18世纪那样，该数学分支几乎统治了19世纪。

它曾被称为这个世纪的数学享受，也曾作为抽象科学中最和谐的理论。

复变函数的应用



复变函数 在电路原理、自动控制原理以及“信号与系统”方面有着重要的应用。

1）应用于积分的计算。如$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$

2）求解偏微分方程。如：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$。

3）应用于计算渗流问题。

例如：大坝、钻井的浸润曲线。

4）应用于计算绕流问题中的压力、力矩。

比如俄国的茹柯夫斯基在设计飞机的时候，就用复变函数论解决了飞机机翼的结构问题，他在运用复变函数论解决流体力学和航空力学方面的问题上也做出了贡献。

5）应用于平面热传导问题、电(磁)场强度。

例如：热炉中温度的计算。

6）Laurent级数应用于数字信号处理。

利用**Laurent**级数直接写出离散数字信号的**Z**变换。

复变函数的主要内容

1 复数与复变函数

2 解析函数

3 复变函数积分

4 级数

5 留数及应用

6 共形映射

第一章 复数与复变函数

§1-1 复数及其运算

一、复数及其代数运算

二$^{\Delta}$、复数的表示法

三、复数的乘幂与方根

一、复数的概念

为了解方程的需要，人们引入了一个新数i，称为虚数单位，并规定：

(1) $\boldsymbol{i}^2=-1$;

(2) i 可与实数进行四则运算.

复 数

形如 $z = x + yi$ 或 $z = x + iy$ 的数称为复数.

实部
记作：Re(z)=x

虚部
记作：Im(z)=y

当 $x = 0,\ y \neq 0$ 时，$z = iy$ 称为纯虚数;

当 $y = 0$ 时，$z = x + 0i$, 我们把它看作实数 x.

例 实数m取何值时，复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$是(1)实数；(2)纯虚数.

解 令 $x=m^2-3m-4,\quad y=m^2-5m-6,$

(1) 如果复数是实数，则$y=0$,

由$m^2-5m-6=0$知$m=6$或$m=-1$.

(2) 如果复数是纯虚数，则$x=0$且$y\neq 0$,

由$m^2-3m-4=0$知$m=4$或$m=-1$.

但由$y\neq 0$知$m=-1$应舍去. 即只有$m=4$.

复数相等

两个复数相等**当且仅当**它们的实部和虚部分别相等.

即设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$$

注意 两个数如果不全是实数, 不能比较大小

复数的代数运算

和与差:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

积:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

商:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}$$

轭

共轭复数

实部相同而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为共轭复数, z 的共轭复数记为 $\bar{z}$.

即：若 $z = x + yi$, 则 $\bar{z} = x - yi$.

例 计算共轭复数 $x + yi$ 与 $x - yi$ 的积.

解 $(x - yi)(x + yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$.

因此：两个共轭复数$z, \bar{z}$ 的积是一个实数.

复数和与积的运算性质

(1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$； $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

(2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

(3) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

共轭复数的运算性质:

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(2) $\bar{\bar{z}} = z$;

(3) $z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$;

(4) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

例1 设 $z_1 = 5 - 5i,\ z_2 = -3 + 4i$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$

$$= \frac{(-15-20)+(15-20)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i.$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

例2 设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1,\quad z_2 = x_2 + iy_2,$

证明 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$

证 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 =$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)$$
$$+ (x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_2y_1 + x_1y_2)$$

$$= 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$$

或 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$

二、 复数的表示方法

（1）定义表示形式

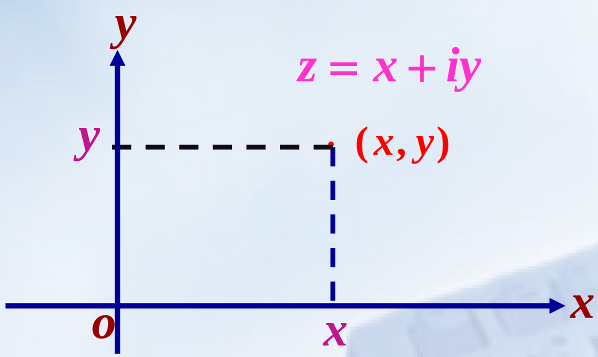
用 $x+iy$ 表示复数 z, 即 $z=x+iy$.

给定复数 $z=x+iy$，则确定了实部x和虚部y；反过来，给定实部x和虚部y,则完全确定了复数z,这样，复数z与一对有序实数（x,y)构成了一一对应关系。

因此，$x+iy$ 与（x, y)不加区别.

（2）复数的平面表示法

我们知道，(x, y)可以用平面直角坐标系 中平面上的点表示 (如图）



复数 $z = x + iy$ 可以用平面上的点 (x, y) 表示(如图）.

这种用来表示复数的平 面叫复平面. 通常把横轴叫实轴或 x 轴, 纵轴叫虚轴或 y 轴.

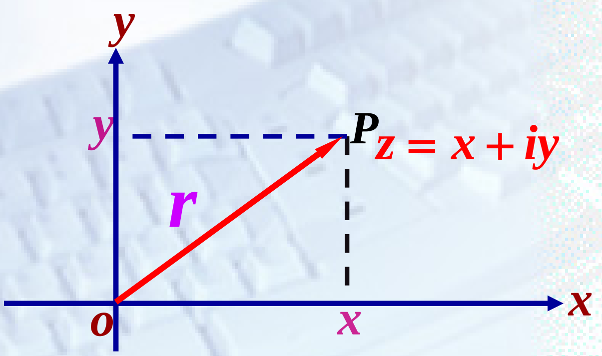
（3）复数的向量表示法

复数$z = x + iy$也可用复平面上的向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示

向量具有两个重要的属 性：长度、方向.

该向量的长度称为 z 的模或绝对值,

记为 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$



显然成立：

$$|x| \le |z|, \quad |y| \le |z|,$$

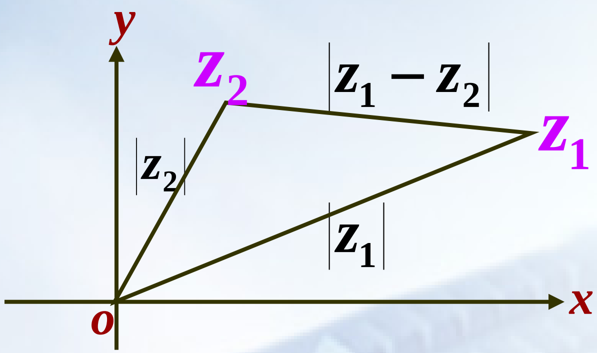
$$|z| \le |x| + |y|, \qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z^2|.$$

复数和与差的模的性质

因为 $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 和 z_2 之间的距离，故

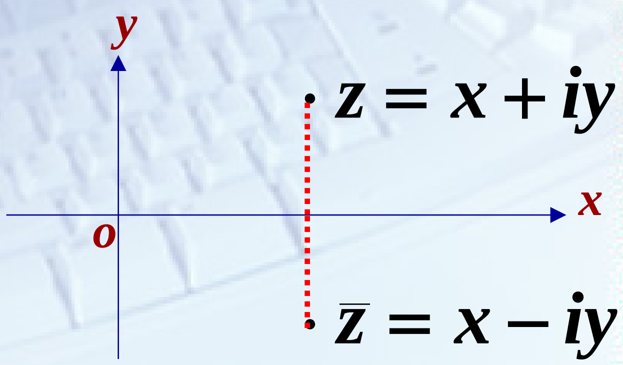
$$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$



共轭复数的几何性质

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面内的位置是关于实轴对称的.



复数辐角的定义

当 $z \neq 0$ 时，以正实轴为始边，以表示z的向量 $\overline{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角(arg$ument$)，记作 $Argz = \theta$.

注意 1 **任何一个复数 $z \neq 0$ 有无穷多个辐角,**

如果 θ_1 是其中一个辐角，那么 z 的全部辐角为

$$\mathbf{Argz} = \theta_1 + 2k\pi \quad (k\text{为任意整数})$$

注意 2 **当 $z = 0$ 时，辐角不确定，没有辐角.**

辐角主值

在 $z\ (\neq 0)$ 的辐角中, 把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值, 记作 $\theta_0 = \arg z$.

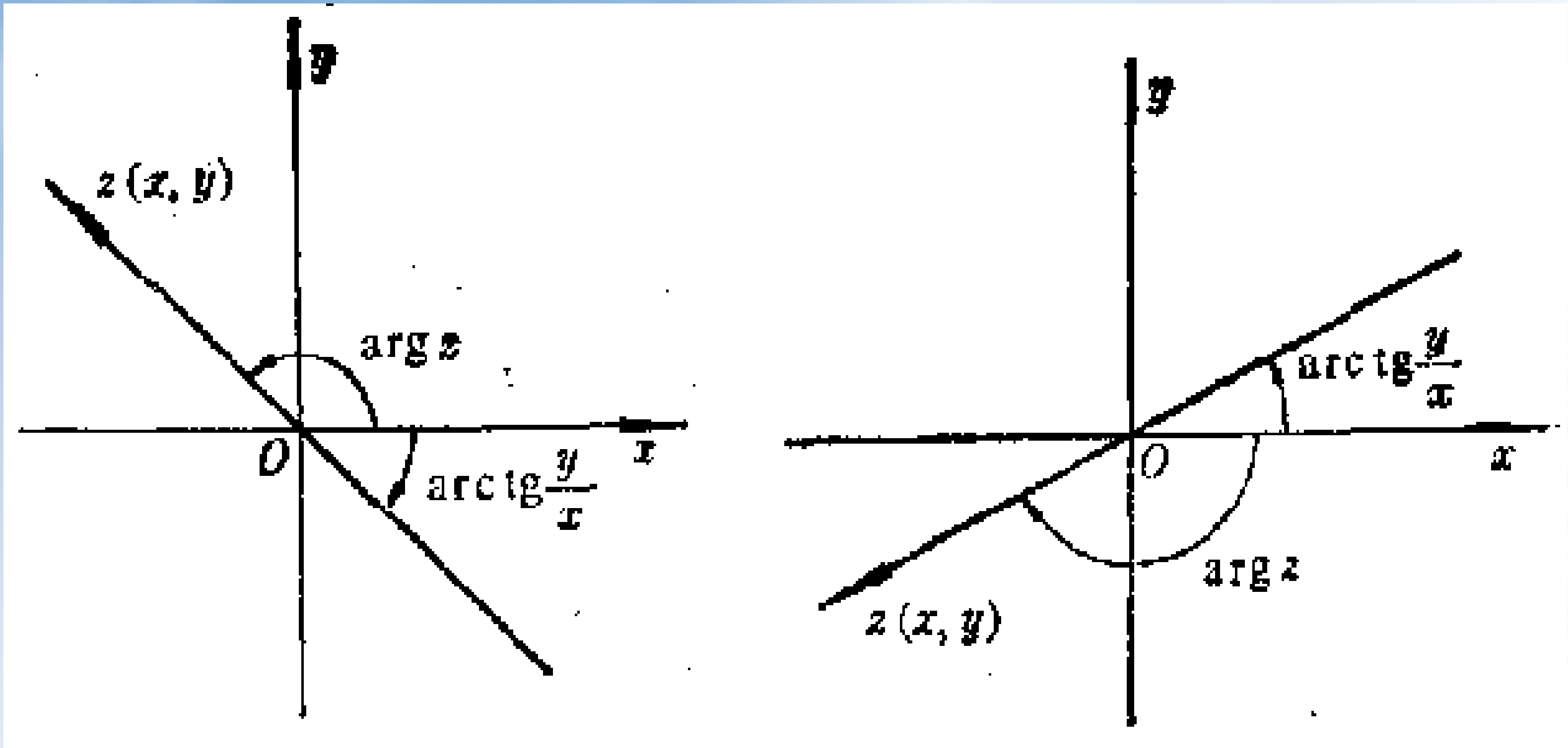
$$Argz = \arg z + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

已知复数 $z = x + iy$, 如何确定辐角?

$z \neq 0$ 辐角的主值

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y \neq 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} \pm \pi, & x < 0, y \neq 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0. \end{cases}$$

(其中$-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$)



y
z (x, y)
arg z
O
x
arc tg $\frac{y}{x}$
y
arc tg $\frac{y}{x}$
O
x
arg z
z (x, y)

（4） 复数的三角表示法

利用直角坐标与极坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

复数可以表示成

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

（5） 复数的指数表示法

利用Euler公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

则复数$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$可以表示为：

$$z = re^{i\theta}$$

例 1 将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

(1) $z=-\sqrt{12}-2i$;　　(2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$;

解　(1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$,　因 z 在第三象限,

$$\theta=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi,$$

故　$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]=4e^{-\frac{5}{6}\pi i}.$$

(2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$

显然 $r=|z|=1,$

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{10},$$

故

$$z=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}=e^{\frac{3}{10}\pi i}.$$

例 2 设 z_1, z_2 为两个任意复数，证明：

(1) $|z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$;

(2) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

证 (1) $$|z_1\bar{z}_2| = \sqrt{(z_1\bar{z}_2)\overline{(z_1\bar{z}_2)}}$$

$$= \sqrt{(z_1\bar{z}_2)(\bar{z}_1 z_2)}$$

$$= \sqrt{(z_1\bar{z}_1)(\bar{z}_2 z_2)} = |z_1||z_2|.$$

(2) $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$

$$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

$$\le|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\bar{z}_2|$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$

$$=(|z_1|+|z_2|)^2,$$

两边同时开方得 $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|.$

例 3 求下列方程所表示的曲线:

(1) $|z+i|=2;$　　(2) $|z-2i|=|z+2|;$

(3) $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=4.$

解 (1) 方程 $|z+i|=2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为 2 的点的轨迹.

即表示中心为 $-i$, 半径为 2 的圆.

设 $z=x+iy$,　$|x+(y+1)i|=2,$

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2,$$

圆方程 $x^2+(y+1)^2=4.$

(2) $|z-2i|=|z+2|$

解 表示所有与点 $2i$ 和 -2 距离相等的点的轨迹.

故方程表示的曲线就是连接点 $2i$ 和 -2 的线段的垂直平分线.

设 $z=x+iy$, 则

$|x+yi-2i|=|x+yi+2|$, 化简后得 $y=-x$.

(3) $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=4$

解 设 $z=x+iy$, 则

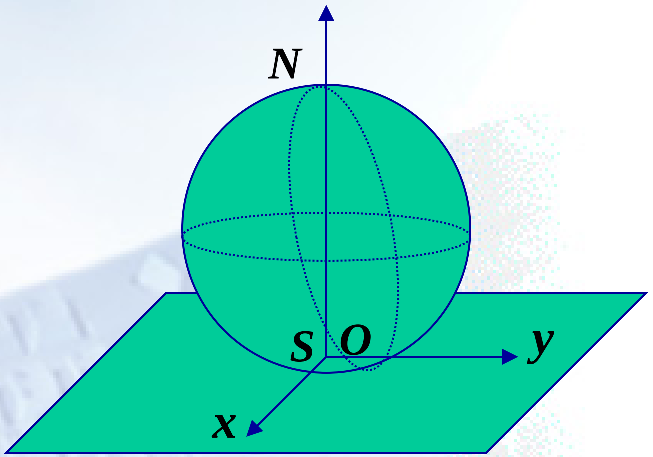
$i+\bar{z}=x+(1-y)i$, $\quad \operatorname{Im}(i+\bar{z})=1-y=4$,

所求曲线方程为 $y=-3$.

(6) 扩充复平面与复球面

取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面,

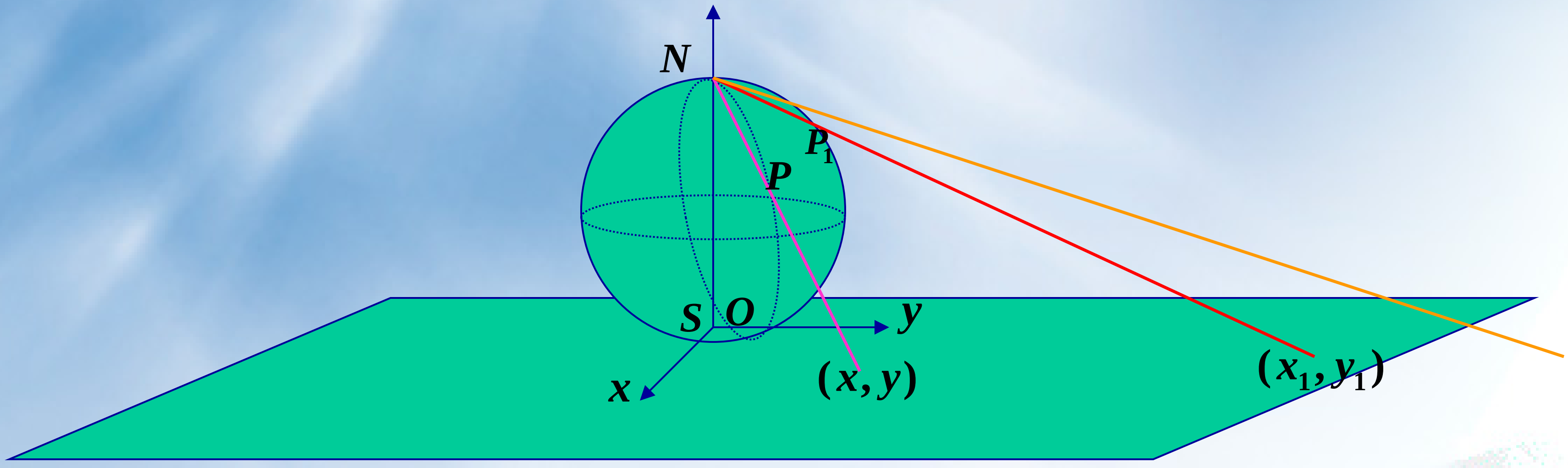
球面上一点 S 与原点重合(如图),



通过 S 作垂直于复平面的

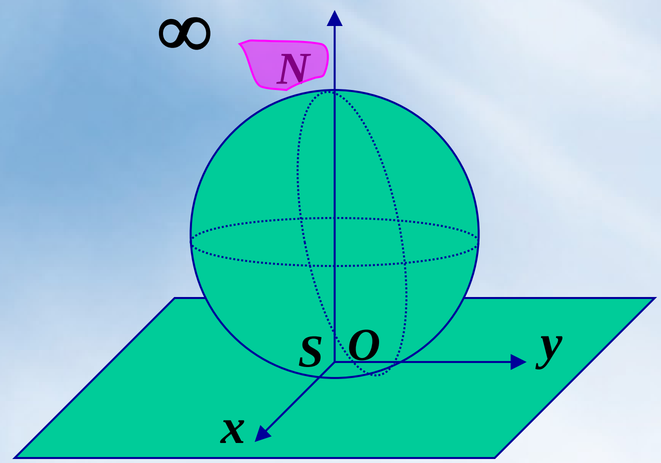
直线与球面相交于另一点 N,

称 N 为北极, S 为南极.



球面上的点，除去北极 N 外，与复平面内的点之间存在着一一对应的关系．我们用球面上的点来表示复数．

球面上的北极 N 不能对应复平面上的定点，但球面上的点离北极 N 越近，它所表示的复数的模越大．



我们规定: 复数中有一个唯一的“无穷大”与复平面上的无穷远点相对应, 记作 ∞ .

因而, 球面上的北极 N 就是复数无穷大的几何表示.

不包括无穷远点的复平面称为有限复平面，或简称复平面.

包括无穷远点的复平面称为扩充复平面.

球面上的每一个点与扩充复平面的每一个点构成了一一对应，这样的球面称为复球面.

小结

- 复数的概念 $z = x + iy$
- 复数的表示

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{定义} \\
\text{平面点表示 } P(x, y) \\
\text{平面向量表示 } \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y) \\
\text{三角表示式 } z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
\text{指数表示式 } z = re^{i\theta}
\end{array}
\right.
$$

欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

§1-4 区域

一、平面点集与区域

（1） 邻域

平面上以 z_0 为中心，δ（任意的正数）为半径的圆内部点的集合 $|z-z_0|<\delta$ 称为 z_0 的 δ 邻域．

(2) 去心邻域

称由不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 所确定的点的集合为 z_0 的去心邻域.

(3) 内点

设 G 为一平面点集, z_0 为 G 中任意一点. 如果存在 z_0 的一个邻域, 该邻域内的所有点都属于 G, 那末 z_0 称为 G 的内点.

(4) 开集

如果 E 内每一点都是它的内点, 那么称 E 为开集.

(5) 区域

连通的开集称为区域，即：如果平面点集 D 满足以下两个条件，则称它为一个区域.

D是一个开集；

D是连通的，就是说D 中任何两点都可以用完全属于D 的一条折线连结起来.

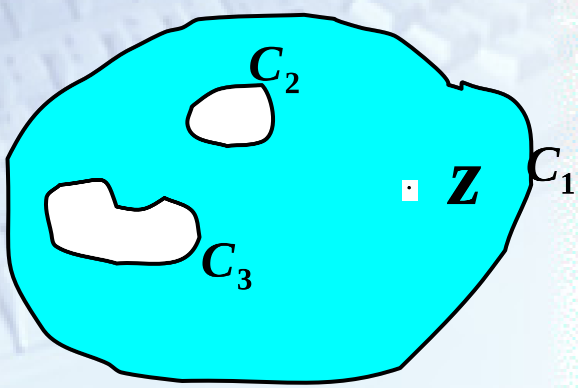
(6) 区域的边界点、边界

边界点：设 E 为一平面点集，z_1 为一定点，如果 z_1 的任一邻域内既含有属于E的点，又含有不属于E的点，那末 z_1 称为 E 的边界点.

例　如果在z_0的任意一个邻域内, 既有属于D的点, 也有不属于D的点（点本身可以属于，也可以不属于D），则称z_0为D的边界点。

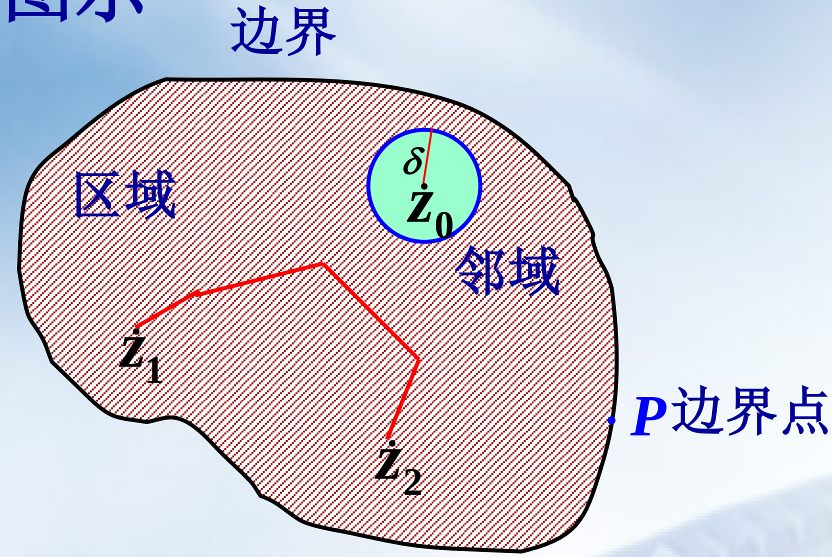
D的所有边界点组成D的边界.

注意1：区域的边界可能是由几条曲线和一些孤立的点所组成的.



注意2：区域D与它的边界一起构成闭区域或闭域$\overline{D}$.

以上基本概念的图示



(7) 有界区域和无界区域

如果一个区域 D 可以被包含在一个以原点为中心的圆里面，即存在 $M>0$，使区域的每一个点都满足 $|z|<M$，那末 D 称为有界的，否则称为无界的.

2单连通区域与多连通区域

（1） 连续曲线

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实函数，那末方程组 $x = x(t)$，$y = y(t)$，$(a \le t \le b)$ 代表一条平面曲线，称为连续曲线 .

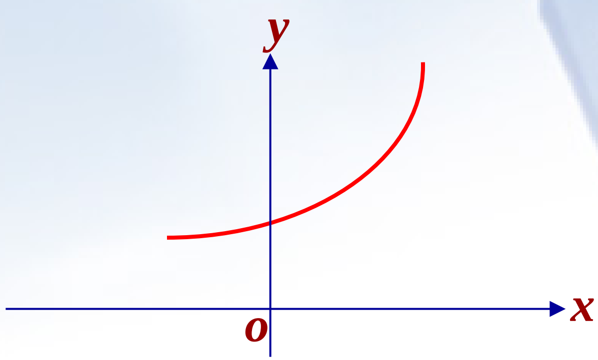
平面曲线的复数表示:

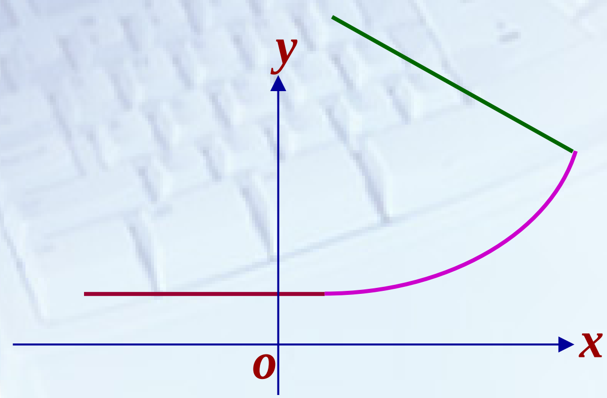
$$z = z(t) = x(t) + iy(t). \quad (a \le t \le b)$$

（2） 光滑曲线

如果在 $a \le t \le b$ 上, $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都是连续的, 且对于 t 的每一个值, 有 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \ne 0$, 那末称这曲线为光滑的 .

由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为**按段光滑曲线**.





（3） Jordan曲线

设$C: z=z(t)\ (a \le t \le b)$为一条连续曲线，$z(a)$与$z(b)$分别称为$C$的起点和终点.

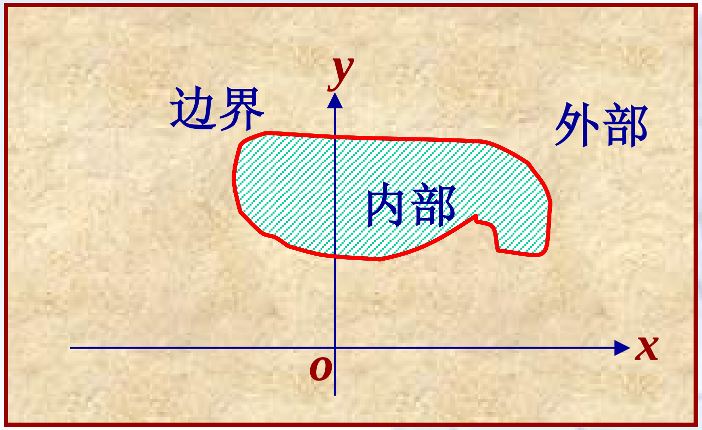
当$t_1 \ne t_2$而有$z(t_1)=z(t_2)$时，点$z(t_1)$称为曲线C的重点.

没有重点的连续曲线C称为简单曲线或Jordan(若尔当)曲线.

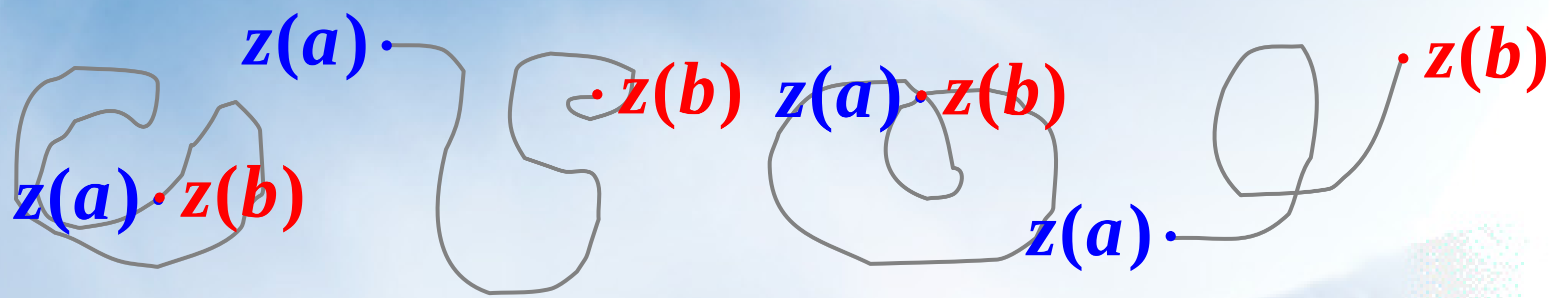
起点与终点重合的简单曲线C称为简单闭曲线.

Jordan曲线的性质

任意一条简单闭曲线C将复平面唯一地分成三个互不相交的点集.



课堂练习 判断下列曲线是否为简单曲线?

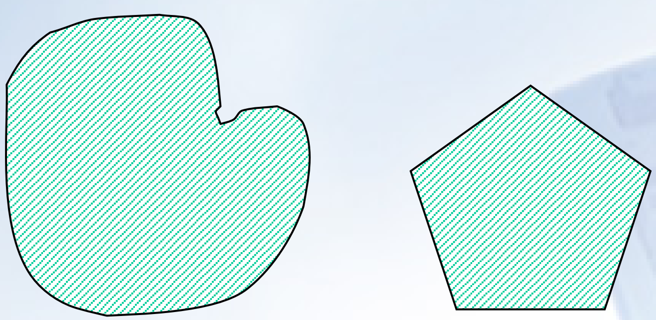


答案

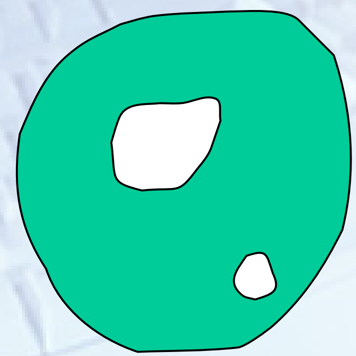
简单 闭	简单 不闭	不简单 闭	不简单 不闭

(8) 单连通域与多连通域的定义

复平面上的一个区域D，如果在其中任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于D，就称为**单连通**区域．一个区域如果不是单连通域，就称为**多连通**区域．



单连通域



多连通域

作业

- P31　1.（1）,4(1)(6), 8(1)(3)(5), 10,
- 14 (2)(3) 15, 21(2)(8)

三、乘幂与方根

设复数 z_1 和 z_2 的三角形式分别为

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+ i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$|z_1 z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2.$$

定理1 两个复数乘积的模等于它们的模的乘积; 两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

两复数相乘就是把它们的模相乘, 辐角相加.

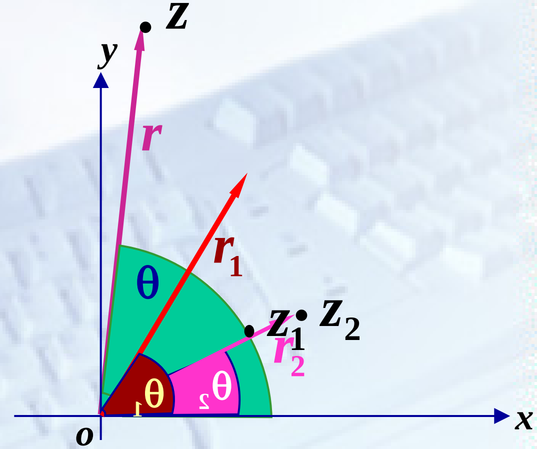
从几何上看, 两复数对应的向量分别为 $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$,

先把 $\vec{z}_1$ 按逆时针方向

旋转一个角 θ_2,

再把它的模扩大到 r_2 倍,

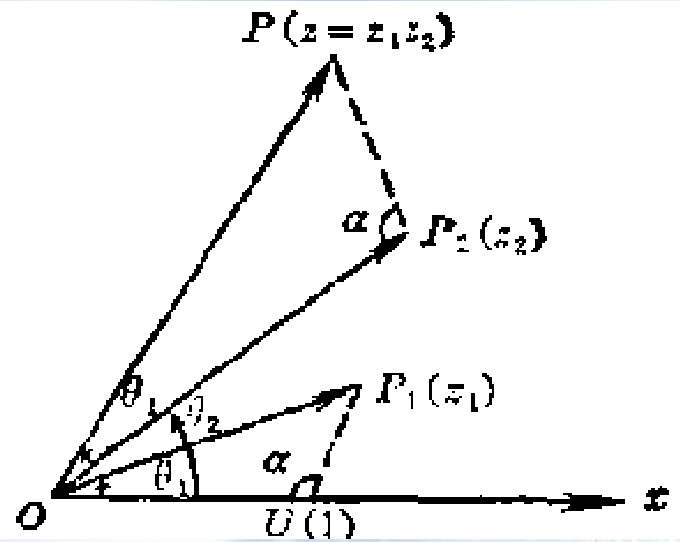
所得向量 $\vec{z}$ 就表示积 $z_1 \cdot z_2$.



复数相乘 $\longleftrightarrow$ 对应向量旋转、拉伸

指数形式

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$



则 $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

n 个复数相乘的情况:

设 $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = r_k e^{i\theta_k}, \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n)}.$$

同样，当 $z_2 \neq 0$ 时，

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{1}{|z_2|^2}|z_1|\cdot|z_2|(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

于是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\qquad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

两个复数商的模等于它们模的商；两个复数商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

设复数z_1和z_2的指数形式分别为

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

例1 已知 $z_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$, $z_2=\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}$,

求 $z_1\cdot z_2$ 和 $\frac{z_1}{z_2}$.

解 因为 $z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$,

$$z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

所以 $z_1\cdot z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=-i$,

$$\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

例2 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$与$z_2=2+i$，求它的另一个顶点.

解:

$$z_3'-z_1=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2-z_1)=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(1+i)$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})i$$

$$z_3'=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$$

类似可得 $$z_3''=\frac{3-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$$

n 次幂

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂, 记作 z^n.

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n\text{个}}.$$

对任一正整数 n, 有：$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

若定义 $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, 则当 n 为负整数时, 上式仍成立.

特别，当 $|z| = 1$ 时, 即 $z = \cos\theta + i\sin\theta$,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$ de Moivr 公式

n 次方根

给定复数 z，方程 $w^n = z$ 的根称为 z 的 n 次方根，

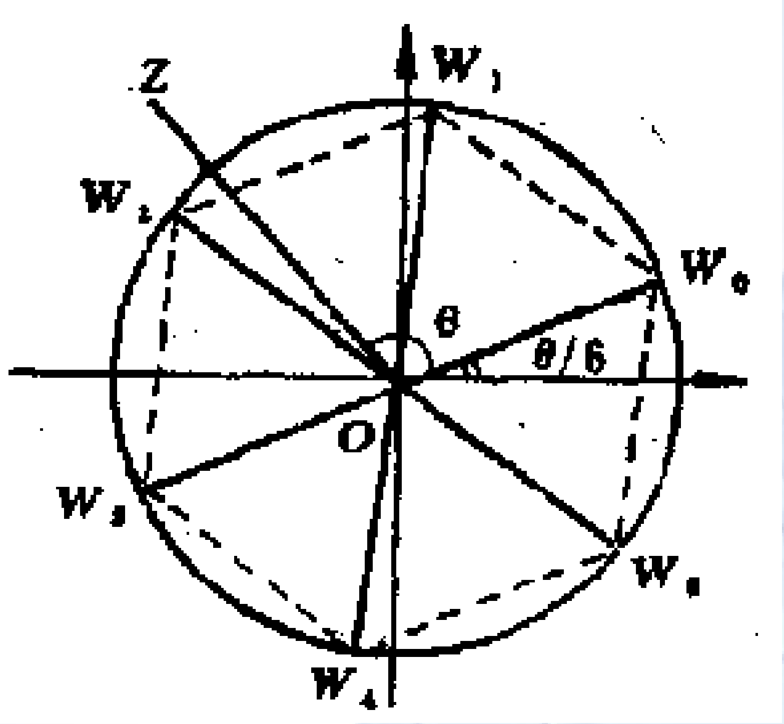
记为 $\sqrt[n]{z}$. 可以推得:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

从几何上看，$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心，

$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.



Z
W1
W2
W6
θ
θ/6
O
W3
W5
W4

推导过程如下：

$$设\ z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\quad w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

于是 $\rho^n = r,\quad \cos n\varphi = \cos\theta,\quad \sin n\varphi = \sin\theta,$

显然 $n\varphi = \theta + 2k\pi,\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

故 $\rho = r^{\frac{1}{n}},\quad \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},$

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,得到 n 个相异的根:

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

$$\cdots\quad\cdots$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当 k 以其他整数值代入时, 这些根又重复出现.

$$w_n=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

例4 计算 $\sqrt[4]{1+i}$ 的值.

解 $1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right]$$

$$(k=0,1,2,3)$$

即

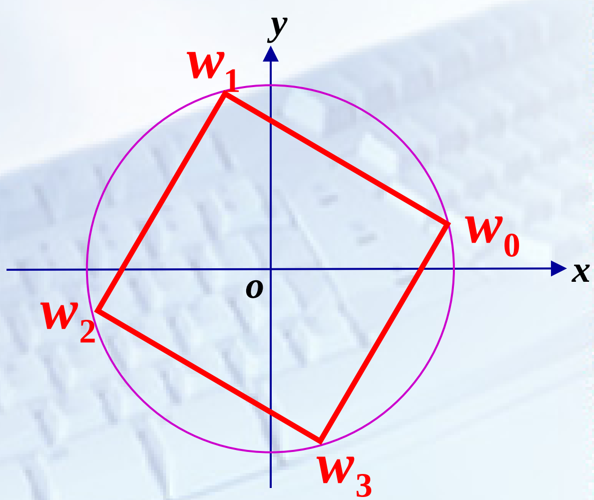
$$w_0=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right],$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right],$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right],$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right].$$

这四个根是内接于中心在原点半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆的正方形的四个顶点.



例4 化简 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

$$(1+i)^n+(1-i)^n=$$

$$(\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]^n+(\sqrt{2})^n\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$=(\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

§1-3 复变函数

一$^{\Delta}$、复变函数的概念

二、复变函数的极限和连续

1、复变函数的概念

1.复变函数的定义:

设 E 是一个复数 $z=x+iy$ 的集合. 如果有一个确定的法则 f 存在, 按这个法则 f , 对于集合E 中的每一个复数 z, 就有一个或几个复数 $w=u+iv$ 与之对应, 那末称 f 是定义在E上的复变数 z 的函数 (简称复变函数), 与z对应的复变数 w称为函数值, 记作 $w=f(z)$.

2.单(多)值函数的定义:

如果 z 的一个值对应着一个 w 的值, 那末我们称函数 $f(z)$ 是单值的.

如果 z 的一个值对应着两个或 两个以上 w 的值, 那末我们称函数 $f(z)$ 是多值的.

3.定义集合和函数值集合:

集合 E 称为 $f(z)$ 的定义集合 (定义域);

对应于 E 中所有 z 的一切 w 值所成的集合 $f(E)$, 称为函数值集合(□ □ □.

$$f(E)=\{w \mid \exists z\in E,\ f(z)=w\}$$

4. 复变函数与自变量之间的关系:

例如, 函数 $w=z^2$, 令 $z=x+iy$, $w=u+iv$,

则 $u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$,

于是函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数:

$u=x^2-y^2$, $v=2xy$.

复变函数 w 与自变量 z 之间的关系 $w=f(z)$

相当于两个关系式: $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$,

它们确定了自变量为 x 和 y 的两个二元实变函数.

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

例 若令 $z=re^{i\theta}$,则 $w=f(z)=u(r,\theta)+i\,v(r,\theta)$

$$w=r^2\cos 2\theta+r^2\sin 2\theta \Leftrightarrow u=r^2\cos 2\theta,\ v=r^2\sin 2\theta$$

5、复变函数的几何意义

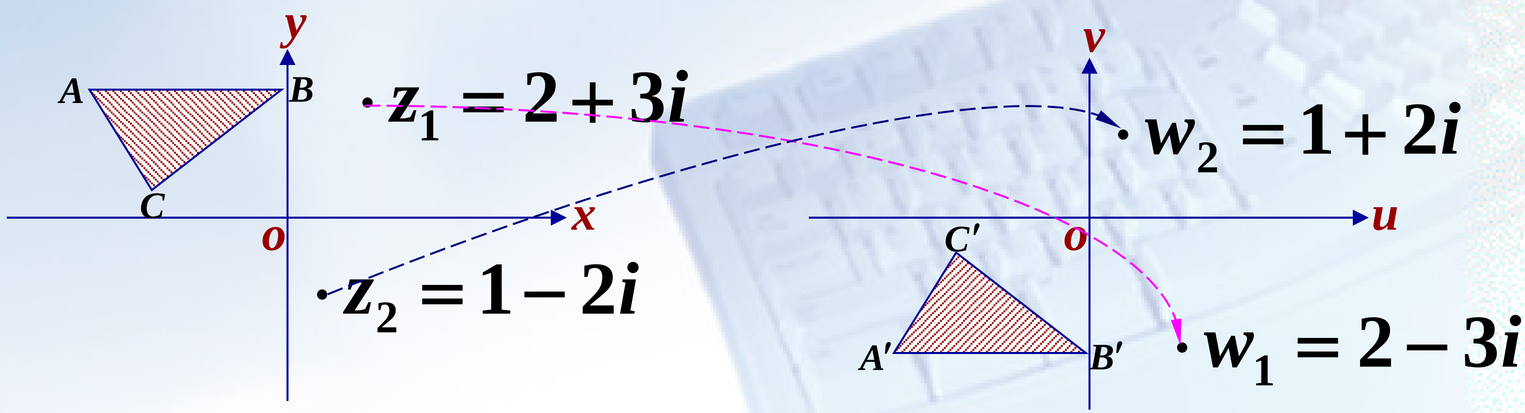
取两张复平面，分别称为z平面和w平面

如果用 z 平面上的点表示自变量 z 的值，而用另一个平面 w 平面上的点表示函数 w 的值，那末函数 $w = f(z)$ 在几何上就可以看作是把 z 平面上的一个点集 E (定义集合) 变到 w 平面上的一个点集 F (函数值集合)的映射(或变换).

这个映射通常简称为由函数 $w = f(z)$ 所构成的映射.

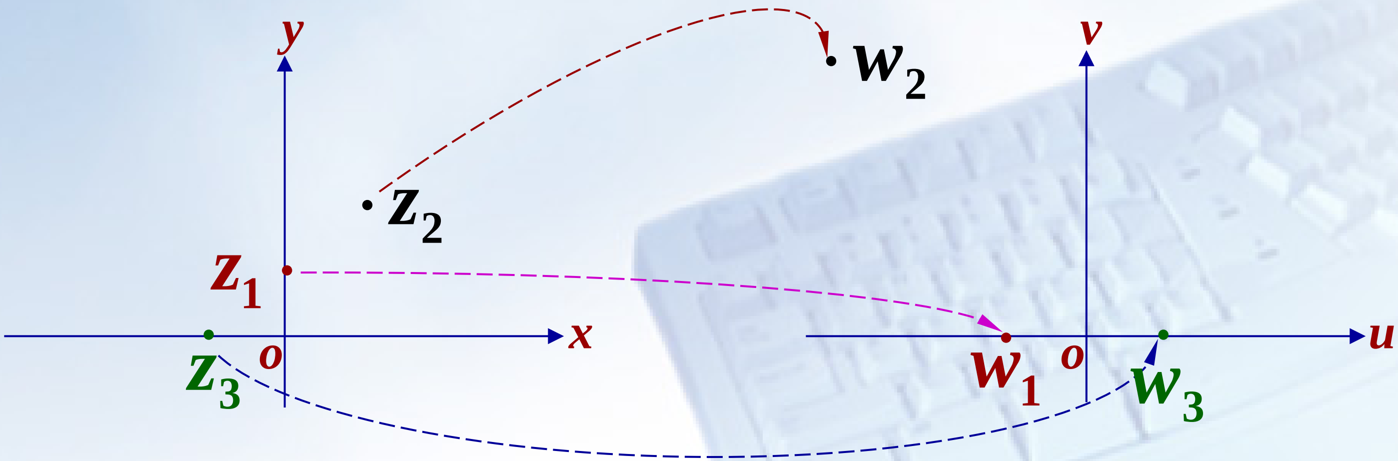
如果 E 中的点 z 被映射 $w = f(z)$ 映射成 F 中的点 w, 那末 w 称为 z 的象 (映象), 而 z 称为 w 的原象.

$$w = \overline{z}$$



2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

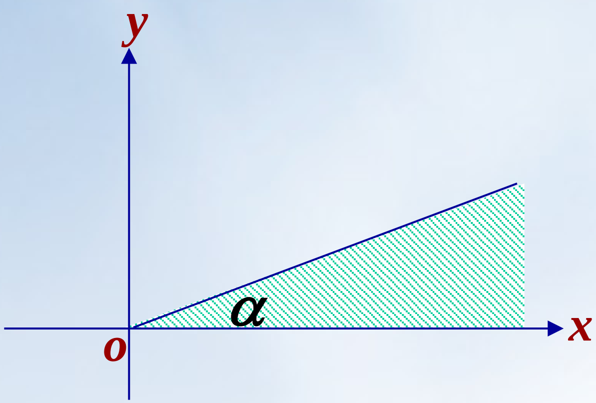
显然将 z 平面上的点 $z_1 = i, z_2 = 1 + 2i, z_3 = -1$ 映射成 w 平面上的点 $w_1 = -1, w_2 = -3 + 4i, w_3 = 1$.

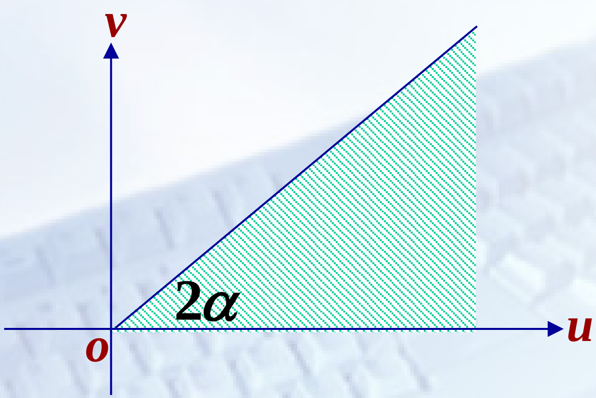


函数 $w = z^2$ 构成的映射.

根据复数的乘法公式可知,

映射 $w = z^2$ 将 z 的辐角增大一倍.





将 z 平面上与实轴交角为 α 的角形域映射成 w 平面上与实轴交角为 2α 的角形域.

6. 反函数的定义:

设 $w = f(z)$ 的定义集合为 z 平面上的集合 E,函数值集合为 w 平面上的集合 $F = f(E)$,那末 F 中的每一个点 w 必将对应着 E 中的一个(或几个)点.

于是在 F 上就确定了一个单值 (或多值)函数,□ □ □ $z = f^{-1}(w)$,它称为函数 $w = f(z)$ 的反函数,也称为映射 $w = f(z)$ 的逆映射.

如果函数(映射) $w = f(z)$ 与它的反函数(逆映射) $z = \varphi(w)$都是单值的,那末称函数(映射) $w = f(z)$ 是一一对应的.也可称集合 E 与集合 F 是一一对应的.

今后不再区别函数与映射.

2、复变函数的极限与连续

函数极限的定义:

设函数 $w = f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内, 如果有一确定的数 A 存在, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 相应地必有一正数 $\delta(\varepsilon)$ 使得当 $0 < |z - z_0| < \delta (0 < \delta \le \rho)$时, 有 $|f(z) - A| < \varepsilon$ 那末称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限.

记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$. (或 $f(z) \xrightarrow{z \to z_0} A$)

注: 定义中 $z \to z_0$ 的方式是任意的.

极限计算的性质

定理1 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $A=u_0+iv_0$, $z_0=x_0+iy_0$, 那末 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

证 (1) 必要性.

如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, 根据极限的定义

当 $0<\left|(x+iy)-(x_0+iy_0)\right|<\delta$ 时,

$\left|(u+iv)-(u_0+iv_0)\right|<\varepsilon$,

或当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

$$|(u-u_0)+i(v-v_0)|<\varepsilon, \Rightarrow |u-u_0|<\varepsilon, \ |v-v_0|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$

(2) 充分性.

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0,$

那么当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

有 $|u-u_0|<\dfrac{\varepsilon}{2}, \ |v-v_0|<\dfrac{\varepsilon}{2},$

$$|f(z)-A|=|(u-u_0)+i(v-v_0)|$$

$$\leq|u-u_0|+|v-v_0|$$

故当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时, $|f(z)-A|<\varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A.$ [证毕]

注: 该定理将求复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的极限问题,转化为求两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的极限问题.

定理2 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A,\ \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 那末

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=AB$;

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}\quad (B\neq 0)$.

例 证明函数 $f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}}\ (z\neq 0)$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.

证 令 $z=x+iy,\quad f(z)=u+iv,$

则 $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad v(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2},$

当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于零时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} v(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2k}{1+k^2},$$

随 k 值的变化而变化, 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$ 不存在,

根据定理一可知, $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

2、函数的连续性

定义1.17　如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 那末我们就说 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

$f(z)$ 在z_0连续 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$当$|z-z_0|<0$时 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

连续的三要素:

（1） $f(z)$在z_0处有定义

（2）$f(z)$在z_0处有极限

（3）$f(z)$在z_0处的极限值等于函数值

连续函数的性质

定理3 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 连续的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

定理4

(1) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商（分母在 z_0 不为零）在 z_0 处仍连续.

(2) 如果函数 $h=g(z)$ 在 z_0 连续，函数 $w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 连续，那末复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0 处连续.

例如， $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$,

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 在复平面内除原点外处处连续，$v(x,y)=x^2-y^2$ 在复平面内处处连续，

故 $f(x,y)$ 在复平面内除原点外处处连续.

如果 $f(z)$ 在 E 内处处连续,我们说 $f(z)$ 在 E内连续.记为: $f(z)\in C(E)$

函数 $f(z)$ 在曲线 C 上 z_0 处连续的意义是

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0),\quad z\in C.$$

例 $f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}\right) \quad z\neq 0,$

试证：$f(z)$在原点无极限，从而在原点不连续

证：$f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}\right)\overset{z=x+iy}{=}\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{(z-\overline{z})(z+\overline{z})}{z\overline{z}}\right)$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{2x\times 2iy}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$\because \quad \lim\limits_{(x,y)\to 0}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$不存在$\Rightarrow \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}\right)$不存在

特殊的:

(1) 有理整函数(多项式)

$$w = P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

对复平面内的所有点 z 都是连续的;

(2) 有理分式函数

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)},$$ 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式,

在复平面内使分母不为零的点也是连续的.

3、小结与思考

1. 复变函数以及映射的概念是本章的一个重点.

2. 通过本课的学习, 熟悉复变函数的极限、连续性的运算法则与性质.

思考题

“函数”、“映射”、“变换”等名词有无区别?

设复变函数 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限存在, 此极限值与 z 趋于 z_0 所采取的方式(选取的路径)有无关系?

本章主要内容

- 复数
  - 复数表示法
    - 定义表示法
    - 平面表示法
    - 向量表示法
    - 三角表示法
    - 指数表示法
    - 球面表示法
  - 曲线与区域
  - 复数的运算
    - 共轭运算
    - 代数运算
    - 乘幂与方根

本章注意两点

复数运算和各种表示法

复数方程表示曲线以及不等式表示区域

§2.1　解析函数的概念与柯西—黎曼条件

1、复变函数的导数与微分

2、解析函数及其简单性质

3、柯西—黎曼条件

4、小结与思考

1、复变函数的导数与微分

1.导数的定义:

设函数 $w = f(z)$ 定义于区域 D, z_0为D中的一点, $z_0 + \Delta z \in D$

如果极限 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在,

那末就称 $f(z)$ 在z_0可导.这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数,

记作 $$f'(z_0) = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

注: $z_0+\Delta z \to z_0$(即$\Delta z \to 0$)的方式是任意的.

即$z_0+\Delta z$在区域D内以任意方式趋于z_0时,

比值$\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$都趋于同一个数.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 我们就称 $f(z)$ 在区域内 D 可导.

例1 求$f(z)=z^2$的导数.

解 $\forall z \in C$ $\quad \because \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (2z+\Delta z) = 2z.$$

$\therefore f(z)=z^2$在z平面上处处可导.

$$(z^2)' = 2z$$

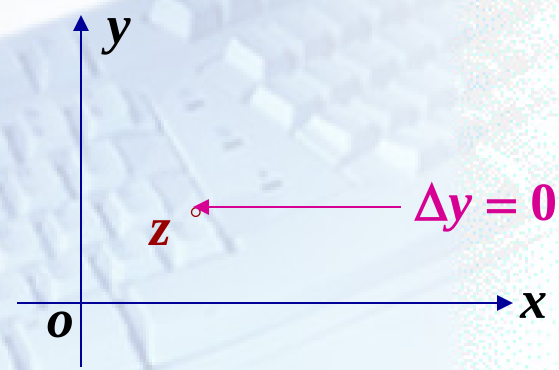
例2 问 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导？

解

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - x - 2yi}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}$$

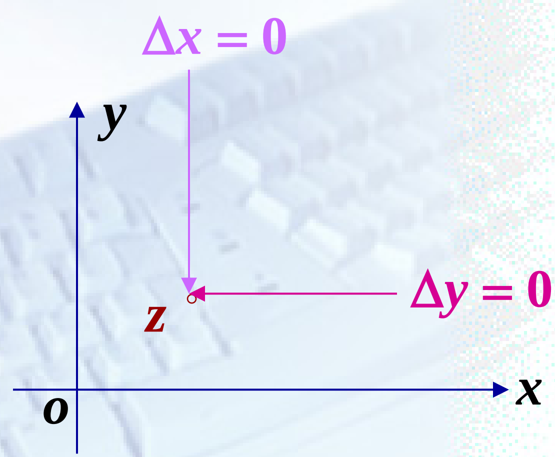


设 $z + \Delta z$ 沿着平行于 x 轴的直线趋向于 z，

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

设$z + \Delta z$沿着平行于 y 轴的直线趋向于 z,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2\Delta y i}{\Delta y i} = 2,$$



所以$f(z) = x + 2yi$的导数不存在.

2.可导与连续的关系:

函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导则在 z_0 处一定连续, 但函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续不一定在 z_0 处可导.

证 根据在 z_0 可导的定义,

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0,$ 使得当 $0 < |\Delta z| < \delta$ 时,

有 $$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

令 $$\rho(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \qquad (1)$$

则 $$\lim_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0,$$

因为 $$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z,$$

所以 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$, 即 $f(z)$ 在 z_0 连续.

例3 $f(z)=\overline{z}$在z平面上处处连续但却处处不可导

解 (1) $f(z)=\overline{z}$的连续性显然

$$(2)\because\ \frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\overset{\Delta z=\Delta x+i\Delta y}{=\!=\!=\!=}\begin{cases}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1 & (\Delta x\neq 0,\Delta y=0)\\[2ex] \dfrac{-i\Delta y}{i\Delta y}=-1 & (\Delta x=0,\Delta y\neq 0)\end{cases}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}\to 1(\Delta x\to 0,\Delta y=0)\qquad \frac{\Delta f}{\Delta z}\to -1(\Delta x=0,\Delta y\to 0)$$

$f(z)=\overline{z}$在z平面上处处不可导

3.求导法则:

(1) $(c)'=0$, 其中c为复常数.

(2) $(z^n)'=nz^{n-1}$, 其中n为正整数.

(3) $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$.

(4) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$.

(5) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$. $(g(z)\neq 0)$

(6) $\{f[g(z)]\}'=f'(w)g'(z)$. 其中$w=g(z)$

(7) $f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(w)}$, 其中$w=f(z)$与$z=\varphi(w)$是两个互为反函数的单值函数, 且$\varphi'(w)\neq 0$

4.微分的概念:

复变函数微分的概念在形式上与一元实变函数的微分概念完全一致.

设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 可导，则由(1)式得

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\cdot\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z$$

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0$, $|\eta| = |\rho(\Delta z)\Delta z|$ 是 $|\Delta z| \to 0$ 时的高阶无穷小,

$f'(z_0)\cdot\Delta z$ 是函数 $w = f(z)$ 的改变量 Δw 的线性部分.

$f'(z_0)\cdot\Delta z$ 称为函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的微分,

记作 $\quad dw = f'(z_0)\cdot\Delta z.$

如果函数在 z_0 的微分存在,则称函数 $f(z)$ 在 z_0 可微.

特别地, 当 $f(z)=z$ 时,

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}w = f'(z_0)\cdot\Delta z = \Delta z,$$

$$\mathrm{d}w = f'(z_0)\cdot\Delta z = f'(z_0)\cdot\mathrm{d}z,\text{ 即 } f'(z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}$$

函数 $w=f(z)$ 在 z_0 可导与在 z_0 可微是等价的.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微, 则称 $f(z)$ 在区域 D 内可微.

2、解析函数及其简单性质

1. 解析函数的定义

定义 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 解析.(Analysis)

如果函数 $f(z)$在区域 D内每一点解析, 则称 $f(z)$在区域D内解析. 或称 $f(z)$是区域D 内的一个解析函数(全纯函数或正则函数).

记作：$f(z) \in A(D)$

函数在区域内解析 $\Longleftrightarrow$ 函数在区域内可导

函数在z_0点解析 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 函数在z_0点可导

2. 奇点的定义

如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析，那么称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

例如：$w=\dfrac{1}{z}$ 以 $z=0$ 为奇点：

例3 研究函数 $f(z)=z^2, g(z)=x+2yi$ 和 $h(z)=|z|^2$ 的解析性.

答案： $f(z)=z^2$ 在复平面内是解析的；

$g(z)=x+2yi$ 处处不解析；

下面讨论 $h(z)=|z|^2$ 的解析性，

$$\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}=\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}$$

$$=\frac{(z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z})-z_0\overline{z_0}}{\Delta z}=\overline{z_0}+\overline{\Delta z}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

(1) $z_0=0$, $\quad \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}=0.$

(2) $z_0\neq 0$,

令 $z_0+\Delta z$ 沿直线 $y-y_0=k(x-x_0)$ 趋于 z_0,

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1-i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{1+i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1-ik}{1+ik}$$

由于 k 的任意性,

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{1-ki}{1+ki}$$不趋于一个确定的值.

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}$$不存在.

因此 $h(z)=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 处可导,而在其他点都不可导,根据定义,它在复平面内处处不解 析.

例4 研究函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 的解析性.

解 因为 $w=\dfrac{1}{z}$ 在复平面内除 $z=0$ 处处可导,

且 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{1}{z^2}$,

所以 w 在复平面内除 $z=0$ 外处处解析,

$z=0$ 为它的奇点.

定理

(1) 在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点)在 D 内解析.

(2) 设函数 $h=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析, 函数 $w=f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析. 如果对 D 内的每一个点 z, 函数 $g(z)$ 的对应值 h 都属于 G, 那末复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 D 内解析.

$$\frac{dw}{dz}=\frac{df(h)}{dh}\cdot\frac{dh(z)}{dz}$$

以上定理的证明, 可利用求导法则.

根据定理可知:

(1) 所有多项式在复平面内是处处解析的.

(2) 任何一个有理分式函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在不含分母为零的点的区域内是解析 的, 使分母为零的点是它的奇点.

3、柯西—黎曼条件

定理2.1 (可导的充要条件)

设函数 $f(z)=u(x,y)+v(x,y)i$ 定义在区域D内，则函数在点$z_0=x_0+y_0 i\in D$ 可导的充分必要条件是:

(1) $u(x,y)$与 $v(x,y)$在 $z_0=x_0+y_0 i$可微.

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad -\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\qquad (*)$$

条件(*)常称为柯西—黎曼条件（C.— R.条件）.

由该定理，可得函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处的导数公式：

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

定理2.2 (函数在区域D内解析的充要条件)

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域D内, 则 $f(z)\in A(D)$的充要条件是:

(1) $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在D内可微;

(2) $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$在D内满足C-R条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

推论2.3 函数在区域D内解析的充分条件

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域D内, 则 $f(z)\in A(D)$的充分条件是:

(1) $u_x, u_y, v_x, v_y \in C(D)$

（2） $u(x,y), v(x,y)$在D内满足C-R条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

例1 判定下列函数在何处可导, 在何处解析:

(1) $w = \bar{z}$;　　(2) $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$;

(3) $w = z\,\mathrm{Re}(z)$.

解 (1) $w = \bar{z}$,　　$u = x$,　$v = -y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

不满足柯西一黎曼方程,

故 $w = \bar{z}$ 在复平面内处处不可导, 处处不解析.

$$(2)\ f(z)=\boxed{e^{x}(\cos y+i\sin y)}$$ 指数函数

$$u=e^{x}\cos y,\quad v=e^{x}\sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\cos y,$$

四个偏导数均连续

即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

故 $f(z)$ 在复平面内处处可导，处处解析.

且 $f'(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)=f'(z).$

(3) $w = z\,\mathrm{Re}(z) = x^2 + xyi,\qquad u = x^2,\quad v = xy,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = y,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

四个偏导数均连续

仅当 $x = y = 0$ 时,满足柯西一黎曼方程,

故函数 $w = z\,\mathrm{Re}(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导,

在复平面内处处不解析.

例2 设 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$, 问常数 a,b,c,d 取何值时, $f(z)$ 在复平面内处处解析?

解 记$u(x,y)=x^2+axy+by^2,\ v(x,y)=cx^2+dxy+y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+ay, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=ax+2by,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=dx+2y,$$

欲使 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

$$2x+ay=dx+2y, \qquad -2cx-dy=ax+2by,$$

所求 $a=2,\ b=-1,\ c=-1,\ d=2.$

例3 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

证 $$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0,$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0,$$

所以 $u=$ 常数, $v=$ 常数,

因此 $f(z)$ 在区域 D 内为一常数.

例4 如果 $f(z)=u+iv$为一解析函数，且$f'(z)\neq 0$，那么曲线族$u(x,y)=c_1$和$v(x,y)=c_2$必互相正交，其中c_1,c_2为常数.

4、小结与思考

用柯西一黎曼条件判断 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析时应注意什么？

首先判断 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内是否可微;

其次再看是否满足C-R条件：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x};$

最后判定 $f(z)$ 的解析性.

课后作业1 讨论$f(z)=\operatorname{Im} z$的可导性.

解 $$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}(z+\Delta z)-\operatorname{Im} z}{\Delta z}$$

$$=\frac{\operatorname{Im} z+\operatorname{Im}\Delta z-\operatorname{Im} z}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}\Delta z}{\Delta z}$$

$$=\frac{\operatorname{Im}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

当点沿平行于实轴的方 向($\Delta y=0$)而使$\Delta z\to 0$时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=0,$$

当点沿平行于虚轴的方 向$(\Delta x=0)$而使$\Delta z\to 0$时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1}{i},$$

当点沿不同的方向使$\Delta z\to 0$时,极限值不同,

故$f(z)=\operatorname{Im} z$在复平面上处处不可导.

课后作业2 研究函数 $w=\dfrac{1}{\bar{z}}$ 的解析性.

答案 处处不可导, 处处不解析.

§ 2.3 初等函数

一、指数函数

二、对数函数

三、幂函数

四$^{\Delta}$、三角函数和双曲函数

五、反三角函数和反双曲函数

1. 指数函数

定义 设 $z = x + iy$，则复变数 z 的指数函数定义为

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$$

显然

$$\mathrm{Re}(\exp(z)) = e^x \cos y$$

$$\mathrm{Im}(\exp(z)) = e^x \sin y$$

$$|\exp(z)| = e^x$$

$$\mathrm{Arg}(\exp(z)) = y + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

为简便，常用下面记号

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

与指数函数符号一致

与Euler公式相一致

但也有不妥之处

定理　指数函数具有如下性质：

(1) $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$　即 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;

(2) $e^z \neq 0$, 当$\mathrm{Im}(z) = 0$时, $f(z) = e^x$,其中$x = \mathrm{Re}(z)$;

(3) $f(z)$在复平面内处处解析；　$f'(z) = f(z)$;

(4) e^z为周期函数，$e^{z+2n\pi i} = e^z$;

(5) $e^z = 1$ 的充分必要条件是 $z = 2n\pi i$.

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)}$$

(1) 证明加法定理 $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$

证 设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

$$左端 = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)$$

$$\cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2)]$$

$$+ i[(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)]$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)]$$

$$= e^{(z_1+z_2)} = 右端.$$

(2) 证明解析性

$$f'(z)=f(z); \quad (f(z)=e^z=e^x(\cos y+i\sin y))$$

证：令 $u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y,$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,$$

四个偏导数均连续

即 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

故 $f(z)$ 在复平面内处处可导，处处解析.

且 $f'(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=f'(z).$

例 1 设 $z = x + iy$, 求(1) $\left|e^{i-2z}\right|$; (2) $\left|e^{z^2}\right|$; (3) $\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})$;

解 因为 $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

所以 $\left|e^z\right| = e^x$, $\quad \mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y$.

(1) $e^{i-2z} = e^{i-2(x+iy)} = e^{-2x+i(1-2y)}$, $\quad \left|e^{i-2z}\right| = e^{-2x}$;

(2) $e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2+2xyi}$, $\quad \left|e^{z^2}\right| = e^{x^2-y^2}$;

(3) $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+yi}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}}$, $\quad \mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}}) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

2. 对数函数

满足方程 $e^w = z\ (z \neq 0)$ 的函数 $w = f(z)$ 称为 z 的对数函数，记为 $w = \text{Ln}z$.

令 $w = u + iv$，$z = re^{i\theta}$，则 $e^{u+iv} = re^{i\theta}$；这样

$$u = \ln r,\quad v = \theta + 2k\pi\ (k\text{为整数})$$

或

$$u = \ln|z|,\quad v = Argz;$$

因此

$$w = Lnz = \ln|z| + i\text{Arg}z$$

$$= \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\quad (k\text{为整数})$$

因Argz为多值函数，所以对数函数 $w = Ln(z)$ 也是多值函数，且每两值相差 $2\pi i$的整数倍．若记

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

则 lnz 为一单值函数，称为 Lnz 的主值．由此

$$\mathrm{Ln} z = \ln z + 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

对于每一个固定的 k，上式确定一单值函数，称为 Lnz 的一个分支.

特别地，当 $z = x > 0$时，Lnz 的主值 $\ln z = \ln x$ 就是实变数对数函数.

$$w = Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

例 2 求 Ln2，Ln(−1) 以及与它们相应的主值.

解 因为 $\mathrm{Ln}2 = \ln 2 + 2k\pi i$,

所以 Ln2 的主值就是 ln2.

因为 $\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i\mathrm{Arg}(-1)$

$$= (2k+1)\pi i \quad (k\text{为整数})$$

所以 Ln(−1) 的主值就是 πi.

注意：在实函数中，负数无对数，而复变数对数函数是实对数函数的拓广.

对数函数的性质

(1) $Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$,

(2) $Ln\dfrac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2 \quad (z_2 \neq 0)$,

(3) 在除去负实轴 (包括原点) 的复平面内，主值支和其它各分支处处连续,处处可导,且

$$(\ln z)' = \frac{1}{z},$$

对于某一固定分支，有

$$(Lnz)' = \frac{1}{z}$$

3. 幂函数

设 z 为不等于零的复变数，α 为任意一个复数，定义幂 z^{α} 为 $\exp(\alpha \mathrm{Ln} z)$，即

$$z^{\alpha}=\exp(\alpha Lnz)=e^{\alpha Lnz}.$$

注 意:

(1) 当 z 为正实变数，α 为实数时，与普通幂函数一致，即 $f(x)=x^{\alpha}$.

$$w = z^{a} = e^{a[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]}$$

(2) 幂函数是多值函数, 具有n个分支.

K取不同的值得到不同的分支，只要k定下来就是一个单值函数。

（3）解析性：它的 各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的,

幂函数的解析性

(1) 幂函数 z^n 在复平面内解析, $(z^n)' = nz^{n-1}$.

(2) 幂函数 $z^{\frac{1}{n}}$ 是多值函数，具有 n 个分支. 它的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内解析,

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \left(e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z}\right)' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}.$$

$$w = z^{a} = e^{a[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]}$$

例3 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i} 的值.

解 $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}[\ln|1| + i(\arg 1 + 2k\pi)]} = e^{2k\pi i\cdot\sqrt{2}}$

$$= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi)$$

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$

$$i^{i} = e^{i\mathrm{Ln}\, i}$$

$$= e^{i\left(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$

4. 三角函数和双曲函数

因为 $e^{iy}=\cos y+i\sin y$, $e^{-iy}=\cos y-i\sin y$,

将两式相加与相减，得

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\qquad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

下面把余弦函数和正弦函数的定义推广到自变数取复值的情况.

余弦函数： $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$,

正弦函数： $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$,

定义

双曲余弦函数： $ch z=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$,

双曲正弦函数： $sh z=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$.

正切函数： $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z},$

余切函数： $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z},$

正割函数： $\sec z = \dfrac{1}{\cos z},$

余割函数： $\csc z = \dfrac{1}{\sin z}.$

容易证明, $\sin z$ 是奇函数, $\cos z$ 是偶函数，即

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

同样, shz 是奇函数, chz 是偶函数.

正弦函数和余弦函数都是以$2\pi i$ 为周期的,

$$\sin(z + 2\pi i) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi i) = \cos z.$$

同样, shz , chz 都是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数.

正弦函数和余弦函数在复平面内都是解析函数.

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

事实上，$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$

双曲正弦函数和双曲余弦函数在复平面内也都是解析函数

$$(shz)' = chz, \quad (chz)' = shz$$

一些常用的重要公式:

$$(1)\quad \begin{cases} \cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2, \\ \sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2, \\ \sin^2 z+\cos^2 z=1. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \cos(x+yi)=\cos x\cos yi-\sin x\sin yi, \\ \sin(x+yi)=\sin x\cos yi+\cos x\sin yi. \end{cases}$$

当 z 为纯虚数 yi 时,

$$\cos yi=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}=chy,\ \sin yi=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}=ishy.$$

$$chyi=\cos y, \qquad shyi=i\sin y.$$

(3) $\begin{cases} \cos^2 z + \sin^2 z = 1 \\ ch^2 z - sh^2 z = 1 \end{cases}$

但与实函数完全不同的是：$\sin z, \cos z$ 无界

事实上，当 $y \to \infty$时，$|\sin yi| \to \infty$，$|\cos yi| \to \infty$.

5. 反三角函数和反双曲函数

设 $z=\cos w$, 那么称 w 为 z 的反余弦函数,

记作 $w=\operatorname{Arccos} z$.

由 $z=\cos w=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$, 得 $e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0$,

方程的根为 $e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$, 两端取对数得

$$\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

反正弦函数 $\mathrm{Arcsin} z = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}),$

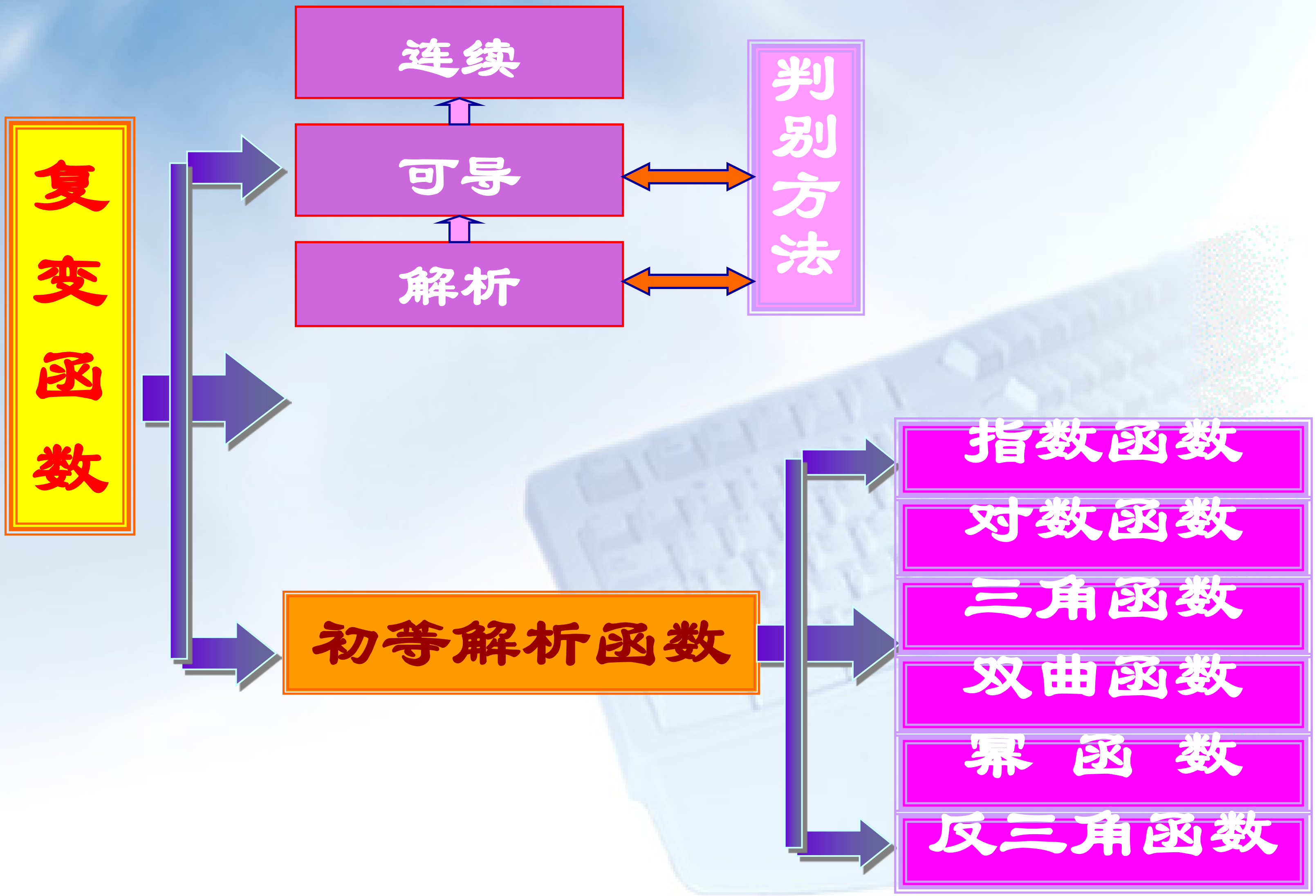
反正切函数 $\mathrm{Arctan} z = -\dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}.$

反双曲正弦 $\mathrm{Arsh} z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}),$

反双曲余弦 $\mathrm{Arch} z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$

反双曲正切 $\mathrm{Arth} z = \dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}.$

本章主要内容



第三章 复变函数的积分

1、 复变函数积分的定义

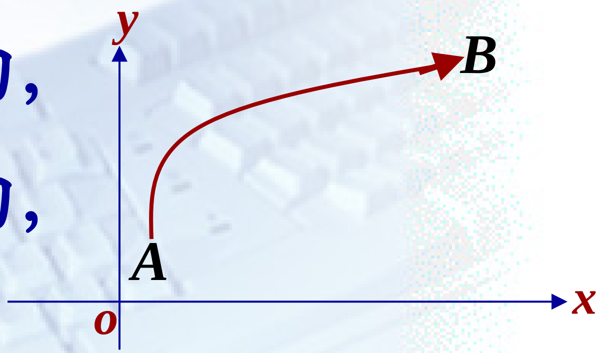
2、复变函数积分的计算问题

3、 复变函数积分的基本性质

1. 复变函数积分的概念

设 C 为平面上给定的一条连续曲线，如果选定 C 的两个可能方向中的一个作为正方向(或正向)，那么我们就把 C 理解为带有方向的曲线，称为**有向曲线**。

如果 A 到 B 作为曲线 C 的正向，那么 B 到 A 就是曲线 C 的负向，记为 C^{-}.

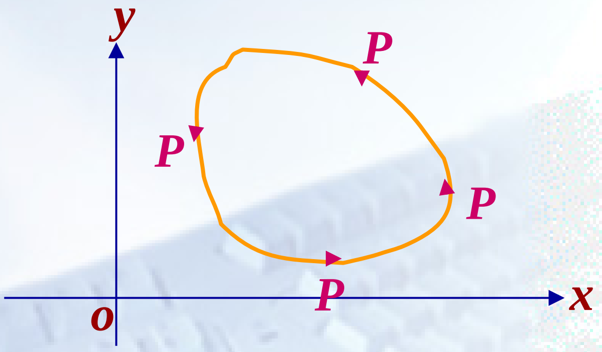


关于曲线方向的**说明**:

以后把两个端点中的一个作为起点，另一个作为终点，除特殊声明外，正方向总是指从起点到终点的方向.

注意:

简单闭曲线 C 的正向是指当曲线上的点 P 沿此方向前进时，邻近 P 点的曲线的内部始终位于 P 点的左方.



与之相反的方向就是曲线的负方向.

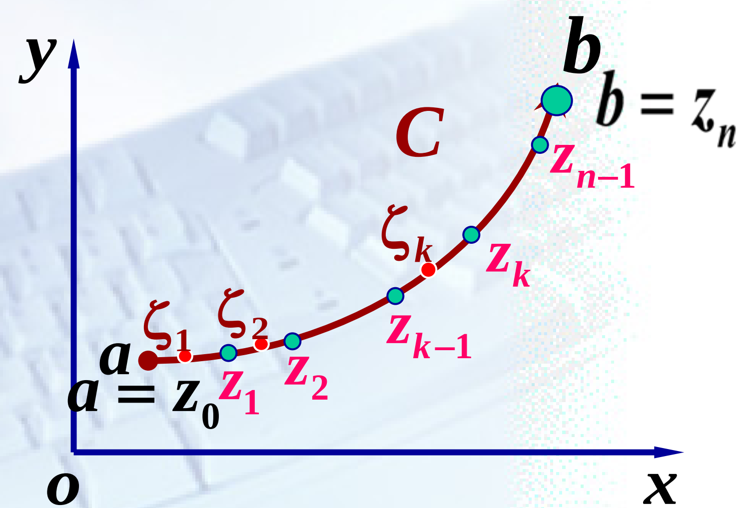
1. 积分的定义:

已知: $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ ，且c为定义域内起点为a终点为b的有向曲线，求$f(z)$沿着曲线c的积分。

(1) 分割

在 C中插入$n-1$个分点，连通两个端点，n+1个

$$a=z_0,z_1,\cdots,z_{k-1},z_k,\cdots,z_n=b,$$



(2)取近似值

在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$上任意取一点 ζ_k,

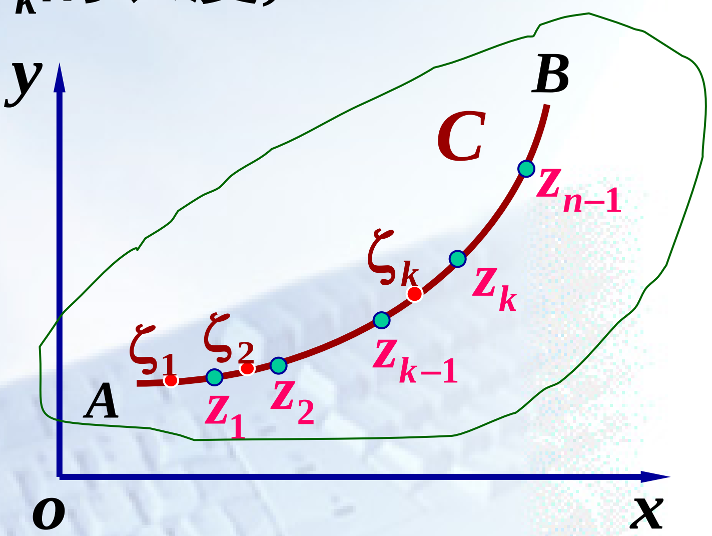
$f(\xi_k)\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ $\qquad$ $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}\approx z_k-z_{k-1}$ $\qquad$ $f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})=f(\xi_k)\triangle z_k$

(3) 求和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k = S_n,$$

这里 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\Delta s_k = \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$的长度,

记 $\delta = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$,



(4) 求极限

当 n 无限增加且 $\delta \to 0$ 时,

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k = \int_C f(z)dz.$$

则称 $f(z)$ 在曲线C上可积, 极限值称为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分,记为 $\int_C f(z)dz$

注意:

1: 对 C 的分法无关

2: 与 ζ_k 的取法无关

说明:

(1) 用 $\int_{C^-} f(z)dz$ 表示 $f(z)$ 沿着曲线C的负向的积分

(2) $f(z)$ 沿着此闭曲线 C 的积分也可记为 $\oint_C f(z)dz$.

2. 积分存在的条件及积分性质

(1) 如果 $f(z)$ 是连续函数而 C 是光滑曲线时，积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 一定存在.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k} = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$\boxed{=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]}$$

$$\boxed{+i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]}$$

$$\underline{\int_C f(z)\mathrm{d}z} = \underline{\int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y} + i\underline{\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y}$$

公式 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$

从形式上可以看成是

$f(z) = u + iv$ 与 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ 相乘后求积分得到：

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x + iv\mathrm{d}x + iu\mathrm{d}y - v\mathrm{d}y$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)$$

1. 设曲线C的参数方程为:

$z=z(t)=x(t)+iy(t)\quad \alpha\le t\le\beta$

2. $f(z)$**沿曲线C连续**

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \big(u(t)+iv(t)\big)(x'(t)+iy'(t))\mathrm{d}t$$

$$\triangleq \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t}$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

例1 计算 $\int_C z\mathrm{d}z$，C：从原点到点 $3+4i$ 的直线段.

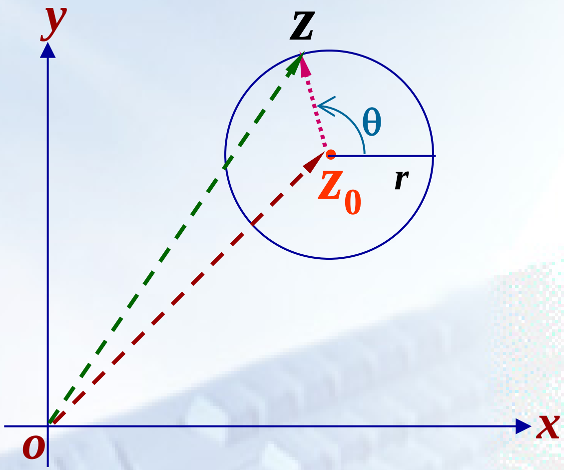
解 C的参数方程为：$z=(3+4i)t$，$0\le t\le 1$

$$\mathrm{d}z=(3+4i)\mathrm{d}t,$$

$$\int_C z\mathrm{d}z=\int_0^1(3+4i)^2 t\mathrm{d}t=(3+4i)^2\int_0^1 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(3+4i)^2}{2}=-\frac{7}{2}+i\frac{24}{2}.$$

例2 求 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$，$C$ 为以 z_0 为中心，r 为半径的正向圆周，n 为整数.



解 积分路径的参数方程为

$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi),$$

$$\mathrm{d}z = ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

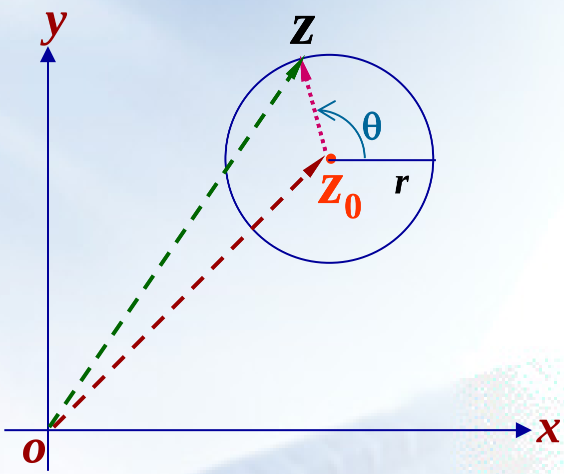
$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta,$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta,$$

当 $n=0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi i;$$



当 $n\neq 0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)\mathrm{d}\theta = 0;$$

所以
$$\boxed{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}}$$

例3 计算 $\int_c \bar{z}dz$ 的值。

C 为：(1) 从原点到 $z_0 = 1+i$ 的直线段.

(2) 沿从原点到 $z_1 = 1$的直线段c_2

与从z_1到z_0的直线段 c_3 所

连接的折线.

答案 (1) 1

(2) $1+i$

3. 复积分的性质

复积分与实变函数的定积分有类似的性质.

(1) $\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$;

(2) $\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z$;　($k$为常数)

(3) $\int_C [f(z)\pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z$;

被积函数的线性可加性

(4) 设: $C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

积分路径的可加性

(5) 设曲线 C 的长度为 L, 函数 $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \le M$, 那末 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.$

例4 设 C 为从原点到点 $3+4i$ 的直线段,

试求积分 $\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$ 绝对值的一个上界.

解 C 的参数方程为 $z=(3+4i)t$, $(0\le t\le 1)$

根据估值不等式知

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right| \le \int_C \left|\frac{1}{z-i}\right|\mathrm{d}s \le \frac{5}{3}\int_C \mathrm{d}s = \frac{25}{3}$$

因为在 C 上, $\left|\frac{1}{z-i}\right| = \frac{1}{|3t+(4t-1)i|}$

$$=\frac{1}{\sqrt{(3t)^2+(4t-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}} \le \frac{5}{3},$$

4、 小结与思考

本课我们学习了积分的定义、存在条件以及计算和性质. 应注意复变函数的积分有跟微积分学中的线积分完全相似的性质. 本课中重点掌握复积分的一般方法.

§ 3.2 柯西-古萨基本定理

1、Cauchy-Goursat基本定理

2、 Cauchy-Goursat定理的推广

3、不定积分

4、小结与思考

首先回顾高等数学中的Green定理:

设单连通区域 D 由分段光滑曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

其中，L 是 D 的取正向的边界曲线。

改进的Green定理:(Gaursat 1925)

设单连通区域 D由分段光滑曲线 L围成，函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上存在$\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$在$D$上连续，则有：

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

其中，L是D的取正向的边界曲线。

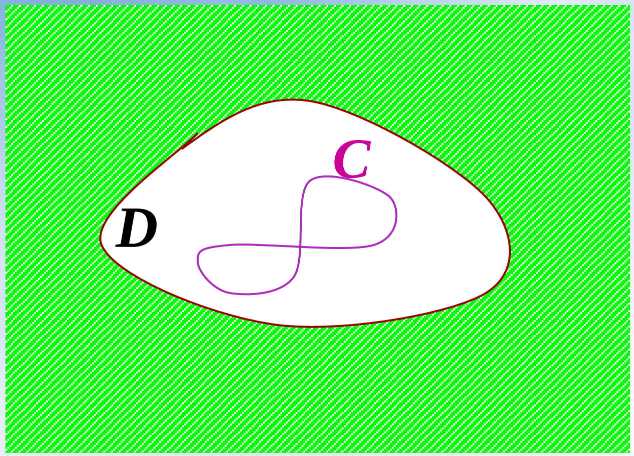
1、Cauchy积分定理

定理 柯西－古萨基本定理

设D为单连通域，如果函数 $f(z) \in A(D)$
则对 D 内的任何一条封闭曲线 C，有 $\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$

此定理常称为柯西积分定理.

注意1　定理中的 C 可以不是简单曲线.



注意2　若曲线 C 是区域 D 的边界，函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在闭区域 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

Cauchy 积分定理的证明:

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$$

由 $f(z)$解析，u, v 在D上可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由改进的Green公式

$$\int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y = \iint_D \left[\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] dxdy = 0$$

$$\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] dxdy = 0$$

例 求 $\oint_{|z|=1}\left(\frac{1}{z-3}+\frac{e^{z}-1}{z+2}\right)\mathrm{d}z$

解:

$$\oint_{|z|=1}\left(\frac{1}{z-3}+\frac{e^{z}-1}{z+2}\right)\mathrm{d}z$$

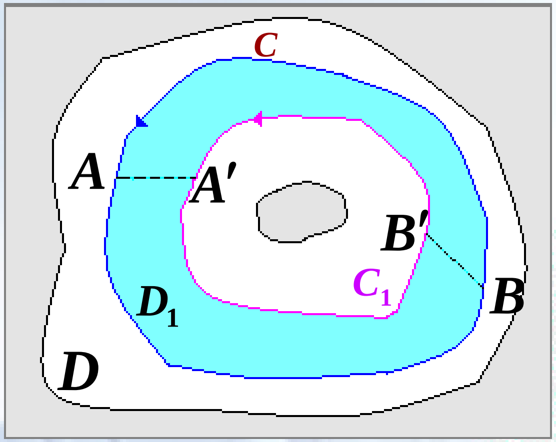
$$=\oint_{|z|=1}\frac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z+\oint_{|z|=1}\frac{e^{z}-1}{z+2}\mathrm{d}z$$

$$=0$$ （根据柯西古萨定理）

2. 复合闭路定理

设函数 $f(z)$ 在多连通域内解析,

C 及 C_1 为 D 内的任意两条简单闭曲线(正向为逆时针方向),



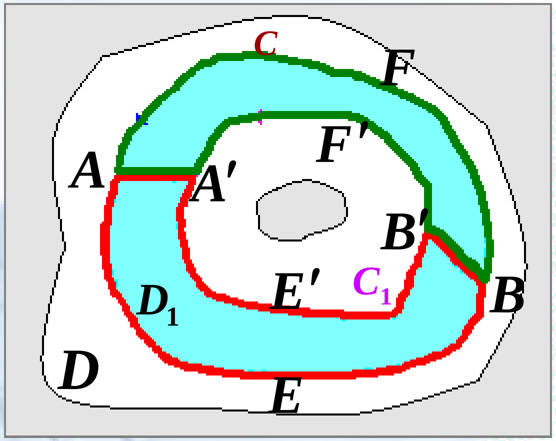
C 及 C_1 为边界的区域 D_1 全含于 D.

作两段不相交的弧段 $\widehat{AA'}$ 和 $\widehat{BB'}$,

为了讨论方便，添加字符 E, E', F, F',

显然曲线 $AEBB'E'A'A, AA'F'B'BFA$ 均为封闭曲线．

因为它们的内部全含于 D,



故 $$\oint_{AEBB'E'A'A} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

$$\oint_{AA'F'B'BFA} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

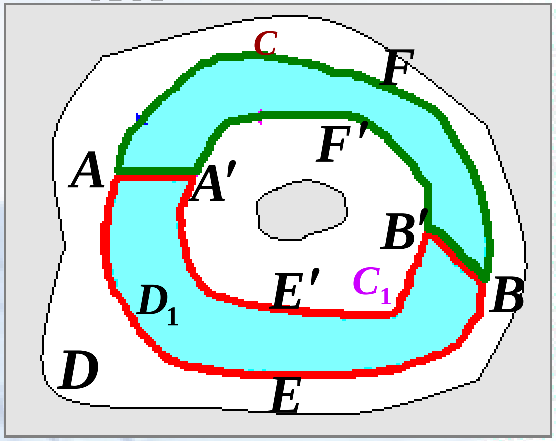
$$AEBB'E'A'A = \overset{\frown}{AEB} + \overset{\frown}{BB'} + \overset{\frown}{B'E'A'} + \overset{\frown}{A'A},$$

$$AA'F'B'BFA = \overset{\frown}{AA'} + \overset{\frown}{A'F'B'} + \overset{\frown}{B'B} + \overset{\frown}{BFA},$$

由 $\displaystyle\oint_{AEBB'E'A'A} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{AA'F'B'BFA} f(z)\mathrm{d}z = 0$, 得

$$\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\overset{\frown}{AA'}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\overset{\frown}{A'A}} f(z)\mathrm{d}z$$

$$+ \int_{\overset{\frown}{B'B}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\overset{\frown}{BB'}} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$



即 $\displaystyle\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$,

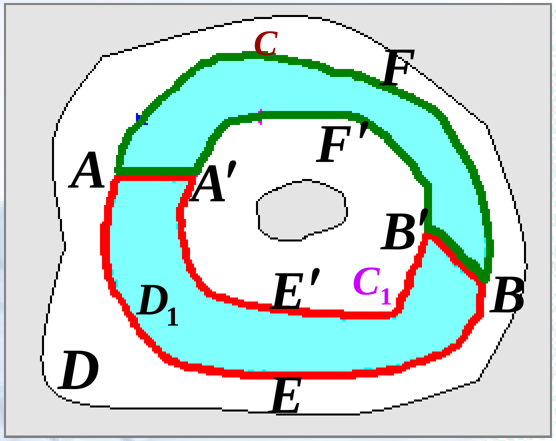
或 $\displaystyle\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z.$

如果我们把这两条简单闭曲线 C 及 C_1^- 看成一条复合闭路 Γ，Γ 的正方向为：

外面的闭曲线 C 按逆时针进行，

内部的闭曲线 C_1 按顺时针进行，

(即沿 Γ 的正向进行时，Γ 的内部总在 Γ 的左手边)，



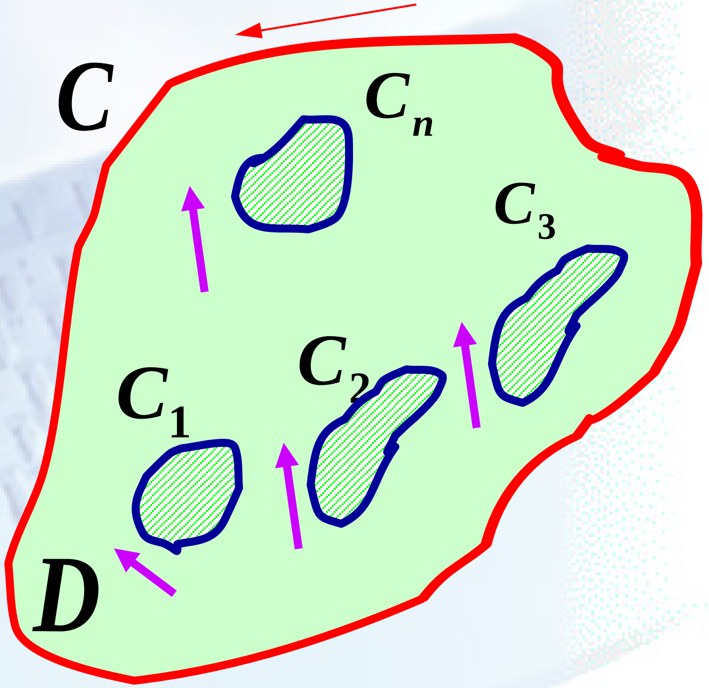
那末 $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$

解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值. **闭路变形原理**

2. 复周线情形的Cauchy定理

设 C 为周线, $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是在 C 内部的周线,它们互不包含也互不相交, 并且由 C的内部, $C_1, C_2, \cdots, C_n$的外部围城多连通区域D,

则称$C+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$为复周线,D为其内部,记为$I(C)$.



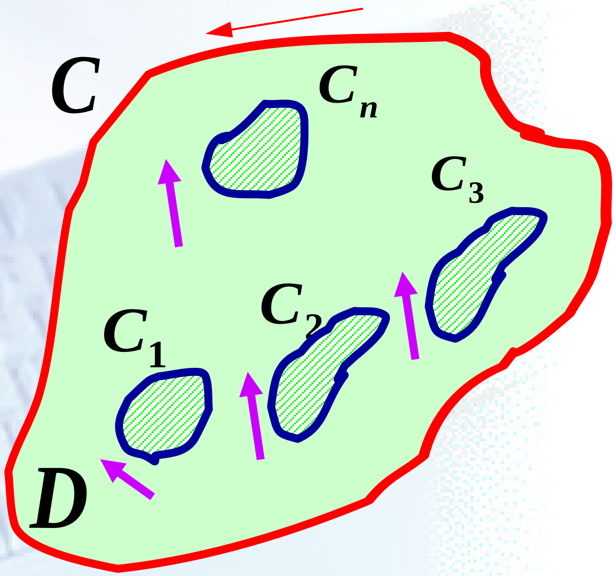
复合闭路定理

定理 设$C+C_1^-+C_2^-+\cdots C_n^-$是复周线, $D=I(C)$

如果: (1) $f(z)\in A(D)$, (2) $f(z)\in C(\bar{D})$,

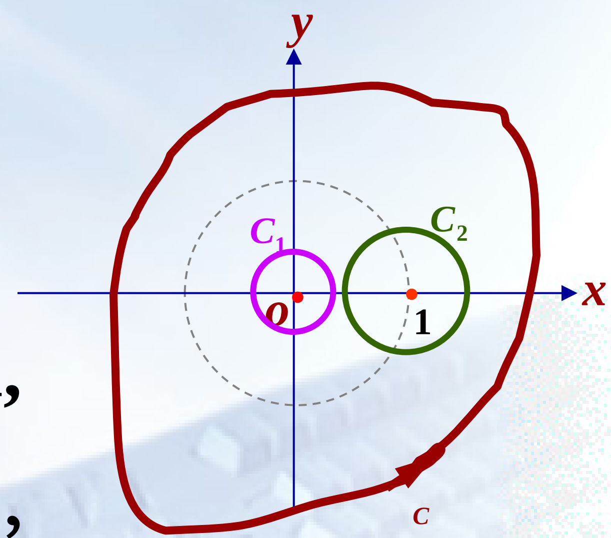
$$\Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z+\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k^-} f(z)\mathrm{d}z=0,$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z,$$



其中C及C_k均取正方向;

例 计算积分 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$, C为包含圆周 $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭曲线.



解 因为函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在复平面内有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$,

依题意知, C也包含这两个奇点,

在 C 内作两个互不包含也互不相交的圆周 C_1 和 C_2,

C_1 只包含奇点 $z=0$, C_2 只包含奇点 $z=1$,

则:$C+C_1^- + C_2^-$构成复周线

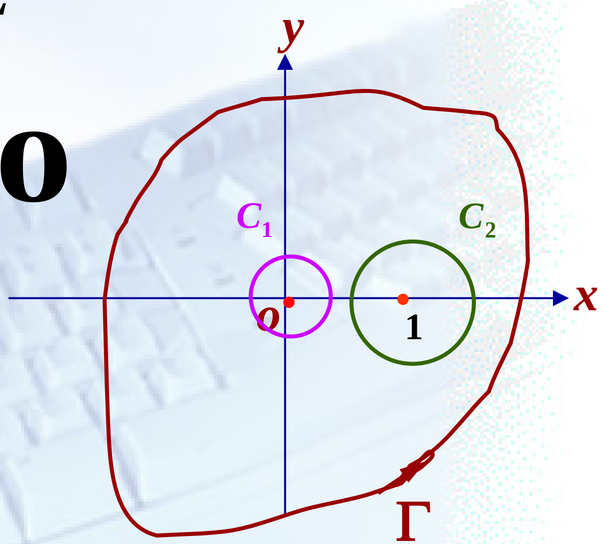
根据复合闭路定理,

$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}\mathrm{d}z + \oint_{C_1} \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z}\mathrm{d}z$$

$$= 0 + 2\pi i + 2\pi i + 0$$

$$= 4\pi i.$$



3、原函数与不定积分

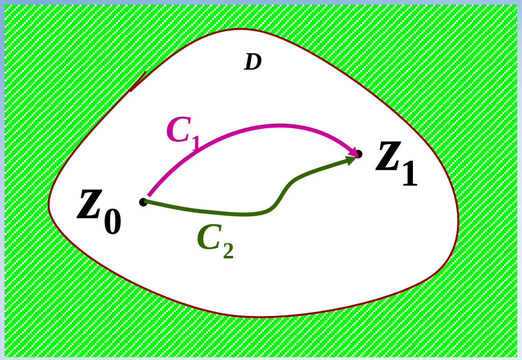
定理一

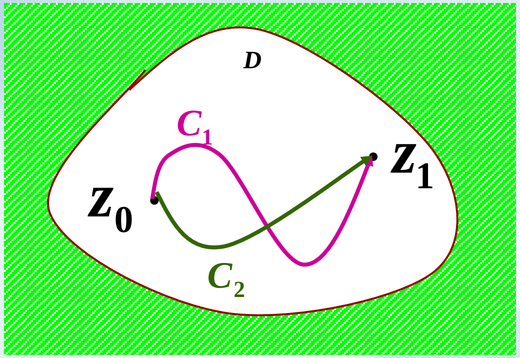
如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析，那末积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与连结起点及终点的路线 C 无关.

由定理可知:

解析函数在单连通域内的积分只与起点和终点有关

如果起点为 z_0，终点为 z_1，





$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z$$

如果固定 z_0，让 z_1 在 D 内变动，并令 $z_1 = z$，

便可确定D内的一个单值函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$

定理二

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析，那末函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 必为D 内的一个解析函数，并且 $F'(z)=f(z)$.

此定理与微积分学中的对变上限积分的求导定理完全类似.

2. 原函数的定义:

如果函数 $\Phi(z)$ 在区域 D 内的导数为 $f(z)$, 即 $\Phi'(z)=f(z)$, 那末称 $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 在区域 D 内的一个原函数.

显然 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 $f(z)$ 的一个原函数.

原函数之间的关系:

$f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数.

如果 $f(z)$ 在区域 D 内有一个原函数 $F(z)$, 那末它就有无穷多个原函数,

其全体原函数可表示为: $F(z)+c$ (c 为任意常数).

3. 不定积分的定义:

称 $f(z)$的原函数的一般表达式 $F(z)+c$ (c为任意常数)为 $f(z)$的不定积分, 记作

$$\int f(z)\mathrm{d}z = F(z)+c.$$

定理3.8 (复积分的Newton-Leibnitz公式)

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析, $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数, 那末

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = \Phi(z_1)-\Phi(z_0)$$

这里 z_0, z_1 为域 F 内的两点.

注: 有了以上定理, 复变函数的积分就可以用跟微积分学中类似的方法去计算.

例1 求 $\int_0^i z\cos z\mathrm{d}z$ 的值.

解 因为 $z\cos z$ 是解析函数,

它的一个原函数是 $z\sin z+\cos z$,

由牛顿-莱布尼兹公式知,

$$\int_0^i z\cos z\mathrm{d}z=[z\sin z+\cos z]_0^i$$

$$=i\sin i+\cos i-1$$

$$=i\frac{e^{-1}-e}{2i}+\frac{e^{-1}+e}{2}-1=e^{-1}-1.$$

另解 $$\int_0^i z\cos z\mathrm{d}z = \int_0^i z\mathrm{d}(\sin z)$$

$$= [z\sin z]_0^i - \int_0^i \sin z\mathrm{d}z$$

$$= [z\sin z + \cos z]_0^i = e^{-1} - 1.$$

例2 试沿区域 $\mathrm{Im}(z)\geq 0,\ \mathrm{Re}(z)\geq 0$ 内的圆弧 $|z|=1$,

求 $\displaystyle\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}\mathrm{d}z$ 的值.

解 函数 $\dfrac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在所设区域内解析,

它的一个原函数为 $\dfrac{\ln^2(z+1)}{2}$,

$$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}\mathrm{d}z=\left.\frac{\ln^2(z+1)}{2}\right|_1^i=\frac{1}{2}[\ln^2(1+i)-\ln^2 2]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i\right)^2-\ln^2 2\right]=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+\frac{\pi\ln 2}{8}i.$$

5、小结与思考

1. 通过本课学习, 重点掌握柯西—古萨基本定理:

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析, 那末函数 $f(z)$ 沿 D 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为零:

$$\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

并注意定理成立的条件.

2.本课所讲述的复合闭路定理与闭路变形原理是复积分中的重要定理, 掌握并能灵活应用它是本章的难点.

常用结论: $\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$

3.本课介绍了原函数、不定积分的定义以及牛顿—莱布尼兹公式. 在学习中应注意与《高等数学》中相关内容相结合, 更好的理解本课内容.

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ $\quad\quad$ $\int f(z)\mathrm{d}z = F(z) + c$

$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0)$

§3-3 Cauchy积分公式和高阶导数公式

一、解析函数的Cauchy积分公式

二、解析函数的高阶导数定理

三$^{\Delta}$、解析函数的与调和函数

1. 问题的提出

设 D 为一单连通区域, z_0 为 D 中一点.

如果 $f(z)$ 在 D 内解析, 那末 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 在 z_0 不解析.

所以 $\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$ 一般不为零,

C 为 D 内围绕 z_0 的闭曲线.

根据闭路变形原理知,

该积分值不随闭曲线 C 的变化而改变, 求这个值.

积分曲线 C 取作以 z_0 为中心, 半径为很小的 δ 的正向圆周 $|z-z_0|=\delta$,

由 $f(z)$ 的连续性,

在 C 上函数 $f(z)$ 的值将随着 δ 的缩小而逐渐接近于它在圆心 z_0 处的值,

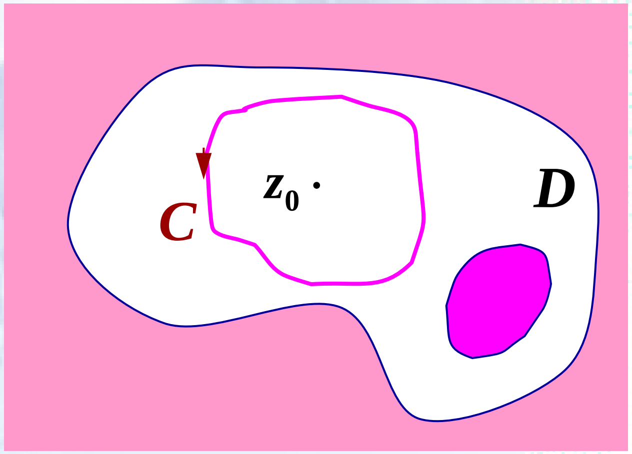
$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z}$$ 将接近于 $$\oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z. \quad (\delta \text{ 缩小})$$

$$\oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z = f(z_0)\oint_C \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = \boxed{2\pi i f(z_0)}.$$

2. Cauchy积分公式

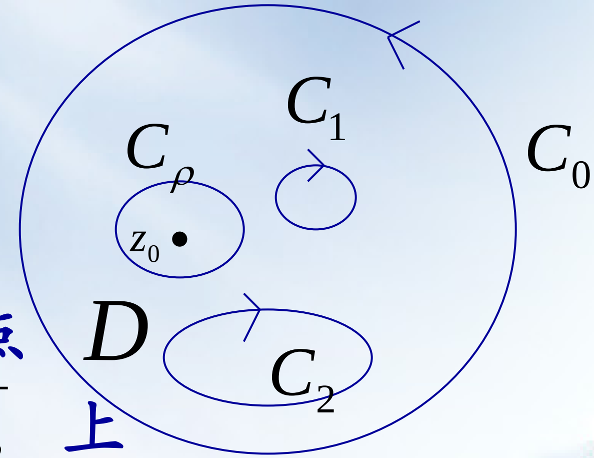
如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于 D, z_0 为 C 内任一点, 那末

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$



Cauchy积分公式

证明：以z_0为心作一完全包含于D内的圆盘 $K_\rho:|z-z_0|<\rho$ ，并且记其边界为圆$C_\rho:|z-z_0|=\rho$。



在$\overline{D}$上，挖去圆盘K_ρ ，余下的点集是一个闭区域$\overline{D_\rho}=\overline{D}\setminus K_\rho$。在$\overline{D_\rho}$ 上 $\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}$ 函数解析，由柯西定理有：

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi=\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi$$

在这里沿C 的纠纷是按照D区域的正向取的，沿 C_ρ的积分是按正向取的，即逆时针方向。

以下我们证明：

$$\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi=2\pi i f(z_0)$$

记 $$I=\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi$$

由柯西定理知：I 是个不依赖于 ρ 的常数，从而

$$I=\lim_{\rho\to0^+}\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi$$

我们证明

$$\lim_{\rho\to0^+}\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi=2\pi if(z_0) \qquad (3-3-2)$$

由于

$$\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi-2\pi if(z_0)=\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)-f(z_0)}{\xi-z_0}d\xi$$

和 $f(z)$ 在 z_0 是连续性，所以对于任意的 $\varepsilon>0$，可以找到

δ 使得当 $\rho < \delta$,$\xi \in C_\rho$ 时，有

$$|f(\xi) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

从而当 $\rho < \delta$

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi - 2\pi i f(z_0) \right| \le \int_{C_\rho} \frac{|f(\xi) - f(z_0)|}{|\xi - z_0|} |d\xi| < \varepsilon$$

故 $$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z - f(z_0) \right| = 0$$

从而 $$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z - f(z_0) = 0$$

于是证得 $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \qquad z_0 \in \mathbf{D}$$

称为积分基本公式或柯西积分公式.

定理1 对于由 $n+1$ 条围线所围成的复连通区域仍然有效. （如教材66页定理1那样构成）

定理1从揭示解析函数的性质、表示解析函数及提供计算积分的方法等三方面给我们以启示.

定理1为我们提供了计算如（*）式左端的积分的方法

$$\int_c \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0) \qquad z_0 \in G \qquad (*)$$

这类积分的特征是：积分路径是围线，被积函数为一分式，它在积分路径内部只含一个奇点，且该奇点是使分母 $z-z_0$ 为零的点，而在积分路径上无被积函数的奇点.

例 1 求下列积分

(1) $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z$;　　(2) $\oint_{|z|=4} \left(\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-3} \right) \mathrm{d}z$.

解 (1) $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z$

因为 $f(z) = \sin z$ 在复平面内解析,

$z = 0$ 位于 $|z| < 4$ 内, 由Cauchy积分公式

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sin z \big|_{z=0} = 0;$$

(2) $\oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)\mathrm{d}z.$

$$=\oint_{|z|=4}\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z+\oint_{|z|=4}\frac{2}{z-3}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot 1+2\pi i\cdot 2$$

$$=6\pi i.$$

例 2 计算积分 $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z-1}\mathrm{d}z.$

解 $f(z)=e^z$ 在复平面内解析，$z=1$ 位于 $|z|<2$ 内，

由Cauchy积分公式

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z-1}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot e^z\Big|_{z=1}=2e\pi i.$$

关于Cauchy积分公式的说明:

(1) 把函数在C内部任一点的值用它在边界上的值表示. （这是解析函数的一个重要特征）

(2) 公式不但提供了计算某些复变函数沿闭路积分的一种方法, 而且给出了解析函数的一个积分表达式. (这是研究解析函数的有力工具)

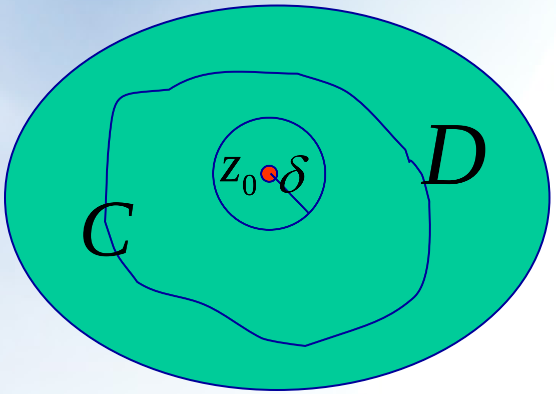
§3-3　Cauchy积分公式和高阶导数公式

一、解析函数的Cauchy积分公式

二、解析函数的高阶导数定理

三、小结 思考 作业

一、Cauchy积分公式



问题的提出

设 $z_0 \in D$, 若 $f(z)$ 在D内解析,

那么 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 在 z_0 不解析.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \;\underline{\underline{\text{闭路变形原理}}}\; \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

$$\xrightarrow{f(z)\to f(z_0)\,(\delta\to 0)} \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0)\oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

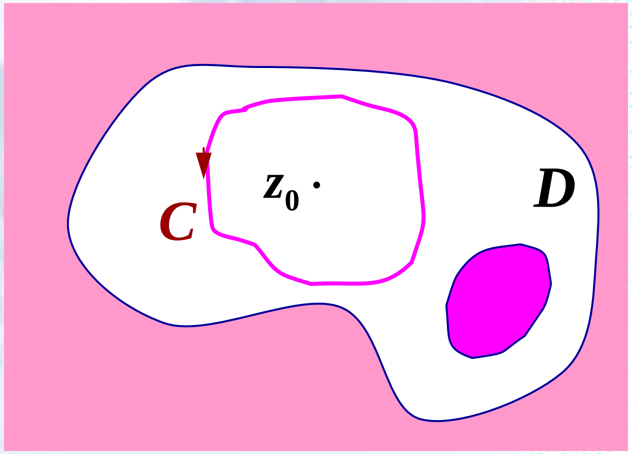
$$= 2\pi i f(z_0).$$

定理1

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于 D, z_0 为 C 内任一点, 那末

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

Cauchy积分公式



[证] 由于$f(z)$在 z_0连续, 任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta(\varepsilon)>0$, 当 $|z-z_0|<\delta$

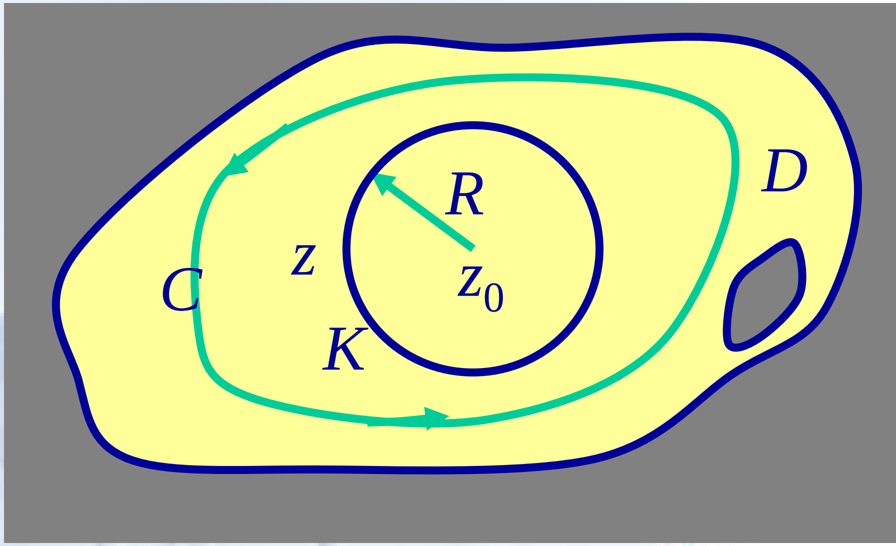
$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

作圆周K : $|z-z_0|=R$ 在C 的内部,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

$$=\oint_K \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z+\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i f(z_0)+\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$



$$\left|\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right| <\oint_K \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\,\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon}{R}\oint_K \mathrm{d}s \;=2\pi\varepsilon\,.$$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

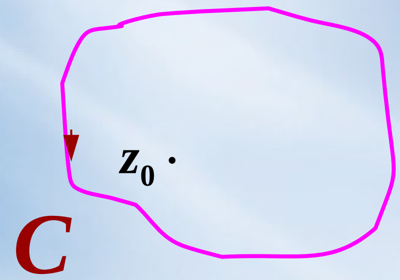
关于Cauchy积分公式的意义:

(1) 把函数在C内部任一点的值用它在边界上的值表示.（这是解析函数的一个重要特征）

(2) 公式给出了一种表示解析函数的方法,而且给出了解析函数的一个积分表达式.

(这是研究解析函数各种局部性质的有力工具)

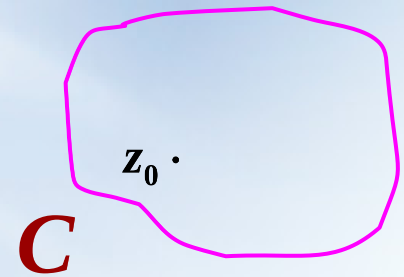
(3) 公式提供了一种计算积分的方法.



注：

如果$f(z)$在简单闭曲线C所围成的区域内解析，在C上连续，那么柯西积分公式仍然成立.

用柯西积分公式计算积分：



$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0) \qquad (*)$$

需注意：

(1) 识别积分类型(是否具有（*）式左端特征).

(2) 所求积分是否满足定理的条件.

例 求下列积分

(1) $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z$; (2) $\oint_{|z|=4} \left(\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-3} \right) \mathrm{d}z$.

解 (1) $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z$

因为 $f(z) = \sin z$ 在复平面内解析,

$z = 0$ 位于 $|z| < 4$ 内, 由Cauchy积分公式

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sin z \Big|_{z=0} = 0;$$

$$(2)\ \oint_{|z|=4}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)\mathrm{d}z.$$

$$=\oint_{|z|=4}\frac{1}{z+1}\mathrm{d}z+\oint_{|z|=4}\frac{2}{z-3}\mathrm{d}z$$ （根据柯西积分公式）

$$=2\pi i\cdot 1+2\pi i\cdot 2$$

$$=6\pi i.$$

思考与练习

求积分 $$\oint_{c:|z|=2} \frac{z}{(3-z)(z+i)}dz$$

观察下列等式

$(\sin z)' = \cos z$， $(e^z)' = e^z$， $(4z^2 + 2z)' = 8z + 2$

问题：

解析函数的导函数一定为解析函数？

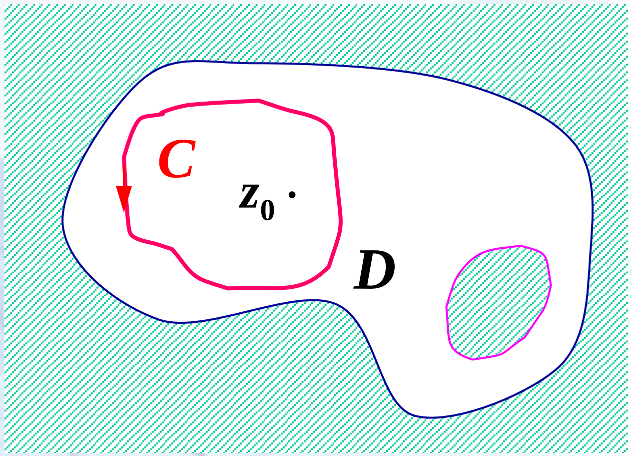
二、解析函数的高阶导数定理

定理

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内的任何一条正向简单闭曲线, 它的内部完全含于 D, z_0 为 C 内任一点, 那末

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$(n=1,2,\cdots)$$



高阶导数公式的作用: 不在于通过积分来求导, 而在于通过求导来求积分.

例1 计算下列积分，其中 C 为正向圆周：$|z| = r > 1$.

(1) $\oint_C \dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^5} \mathrm{d}z$; (2) $\oint_C \dfrac{e^z}{(z^2+1)^2} \mathrm{d}z$.

解 (1) 函数 $\dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在 C 内 $z=1$ 处不解析，

但 $\cos \pi z$ 在 C 内处处解析，

根据公式 $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(5-1)!} (\cos \pi z)^{(4)} \Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12};$$

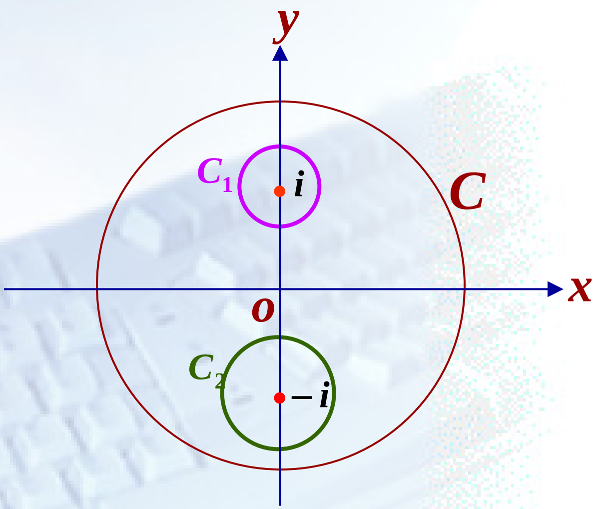
(2) 函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 C 内的 $z=\pm i$ 处不解析,

在 C 内以 i 为中心作一个正向圆周 C_1,

以 $-i$ 为中心作一个正向圆周 C_2,

则函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 C, C_1, C_2

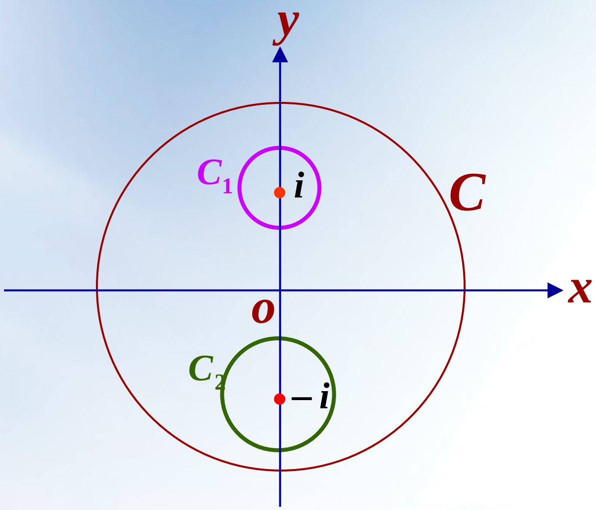
围成的区域内解析,



根据复合闭路原理

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$$

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\mathrm{d}z$$



$$= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i}{2}\pi,$$

同理可得 $\displaystyle\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi,$ 于是

$$\oint_{C} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \frac{(1-i)e^i}{2}\pi + \frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)(e^i - ie^{-i}) = \frac{\pi}{2}(1-i)^2(\cos 1 - \sin 1)$$

$$= i\pi(\sin 1 - \cos 1).$$

练习

计算积分：$I=\oint_C \frac{\cos\pi z}{z^3(z-1)^2}dz,\quad C:|z|=4.$

摩勒拉(Morera)定理

定理2 若函数$f(z)$在单连通区域D内连续,且对D内任一围线C,有

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

则$f(z)$在D内解析

证明思路: 在假设条件下, 可定义单值函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$$

用导数的定义可证$F'(z)=f(z)(z \in D)$, 即 $F(z)$ 在D内解析,而解析函数$F(z)$的导数$F'(z)$还是解析的.故$f(z)$在D内解析.（注：充要条件）

小结

1. 柯西积分公式与高阶导数公式;

难点： 2. 结合复合闭路定理进行复积分的计算.

思考题?

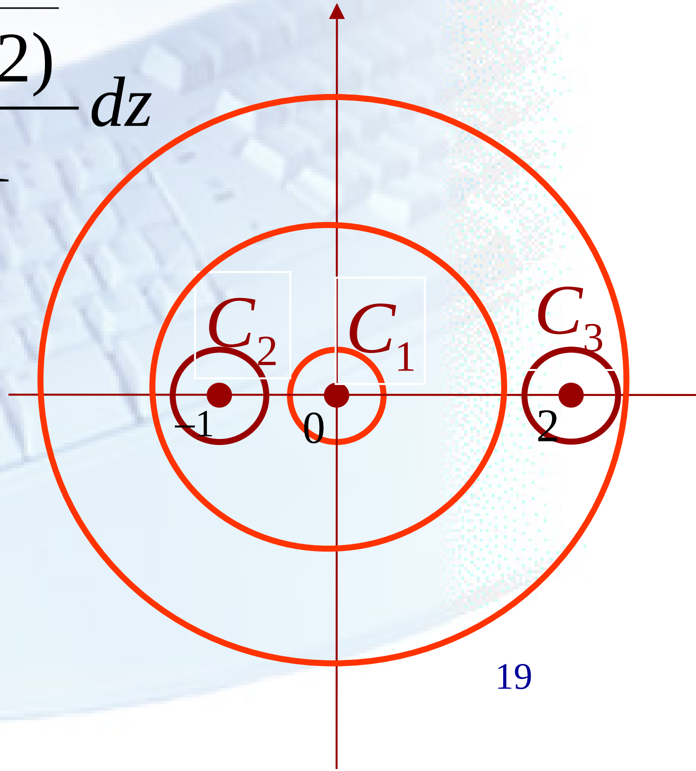
计算积分 $\mathrm{I}=\oint_C \dfrac{e^z}{z(z+1)(z-2)}dz \quad C:|z|=r\,(r\neq 1,2)$

解:

$$0<r<1,\quad \mathrm{I}=\oint_C \frac{\dfrac{e^z}{(z+1)(z-2)}}{z}dz=2\pi i\left.\frac{e^z}{(z+1)(z-2)}\right|_{z=0}=-\pi i$$

$$1<r<2,\ \mathrm{I}=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}=-\pi i+\oint_{C_2}\frac{\dfrac{e^z}{z(z-2)}}{z+1}dz$$

$$=-\pi i+2\pi i\left.\frac{e^z}{z(z-2)}\right|_{z=-1}=-\pi i+\frac{2\pi}{3e}i$$



$$r > 2,\ \mathrm{I} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3}$$

$$= -\pi i + \frac{2\pi}{3e} i + \oint_{C_3} \frac{\dfrac{e^z}{z(z+1)}}{z-2} dz$$

$$= -\pi i + \frac{2\pi}{3e} i + 2\pi i \frac{e^z}{z(z+1)}\bigg|_{z=2}$$

$$= -\pi i + \frac{2\pi}{3e} i + \frac{e^2\pi}{3} i$$

作业

P100

7. (1)—(5) , 9. (1)—(5), 10.

§3-4 调和函数

1. **调和函数的概念**
2. **解析函数与调和函数的关系**

1. 调和函数的概念

定义 如果二元实变函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数，并且满足 *Laplace* 方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

工程中的许多问题，如平面上的稳定温度场、静电场和稳定流场等都满足Laplace方程.

2. 解析函数与调和函数的关系

定理 任何在区域 D 内解析的函数, 它的实部和虚部都是 D 内的调和函数.

证明 设 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为区域 D 内的一个解析函数，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

根据解析函数的导数仍是解析函数，因此

$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 具有任意阶的连续偏导数,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$ 分别关于x, y求导

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

再由二阶导函数的连续性

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 因此 $u(x, y)$ 是调和函数.

同理 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$, 因此$v(x, y)$是调和函数.

反之，

任给区域 D 内的两个调和函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$，$u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内是否为解析函数？

例如：$f(z)=x^2+y^2+2xyi$

答：不一定.

定义 设 $u(x,y)$ 为区域 D 内给定的调和函数，我们把使 $u+iv$ 在 D 内构成解析函数的调和函数 $v(x,y)$ 称为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

推论：区域 D 内解析函数的虚部为实部的共轭调和函数.

现在提出如下问题：

已知 $u(x,y)$是区域D上的调和函数，是否存在$u(x,y)$的共轭调和函数 $v(x,y)$，使得函数 $f(z)=u+iv$ 是D上的解析函数?

或者已知调和函数 $v(x,y)$ 时，是否存在调和函数 $u(x,y)$ ，使得 $f(z)=u+iv$ 是D上的解析函数?

回答是肯定的，以下用举例的方法加以说明.

3. 计算实例

例 1 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为全平面上的调和函数，并求以其为实部的解析函数.

解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y,$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y,$$

于是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ 故 $u(x,y)$ 为调和函数.

令 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy,$

$$v=-6\int xy\mathrm{d}y$$

$$=-3xy^2+g(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+g'(x),$$

又 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2,$

$$-3y^2+g'(x)=-3y^2+3x^2,$$

$$g(x)=\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+c,$$

(c 为任意常数)

$$v(x,y)=x^3-3xy^2+c,$$

得解析函数

$$w=y^3-3x^2y+i(x^3-3xy^2+c).$$

这个函数可以化为

$$w=f(z)=i(z^3+c).$$

注：已知解析函数的实部求虚部，至多相差一个常数。

例 2 已知 $v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y$ 为调和函数，求一解析函数 $f(z)=u+iv$，使 $f(0)=1.$

解 $$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)+1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1,$$

由 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1,$$

得 $$u=\int[e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1]\mathrm{d}x$$

$$u = e^x(x\cos y - y\sin y) + x + g(y),$$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$, 得

$$e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1$$

$$= e^x(x\sin y + y\cos y + \sin y) - g'(y),$$

$$g'(y) = -1,$$

故 $g(y) = -y + c,$

于是 $u = e^x(x\cos y - y\sin y) + x - y + c,$

$$f(z) = u + iv$$

$$= xe^x e^{iy} + iye^x e^{iy} + x(1+i) + iy(1+i) + c$$

$$= ze^z + (1+i)z + c,$$

由 $f(0) = 1$, 得 $c = 1$,

所求解析函数为

$$f(z) = ze^z + (1+i)z + 1.$$

注意：当 $u(x,y)$ 在 D 内是 $v(x,y)$ 的共轭调和函数时，在D内 $u(x,y)$ 不一定是 $v(x,y)$ 的共轭调和函数。

作业

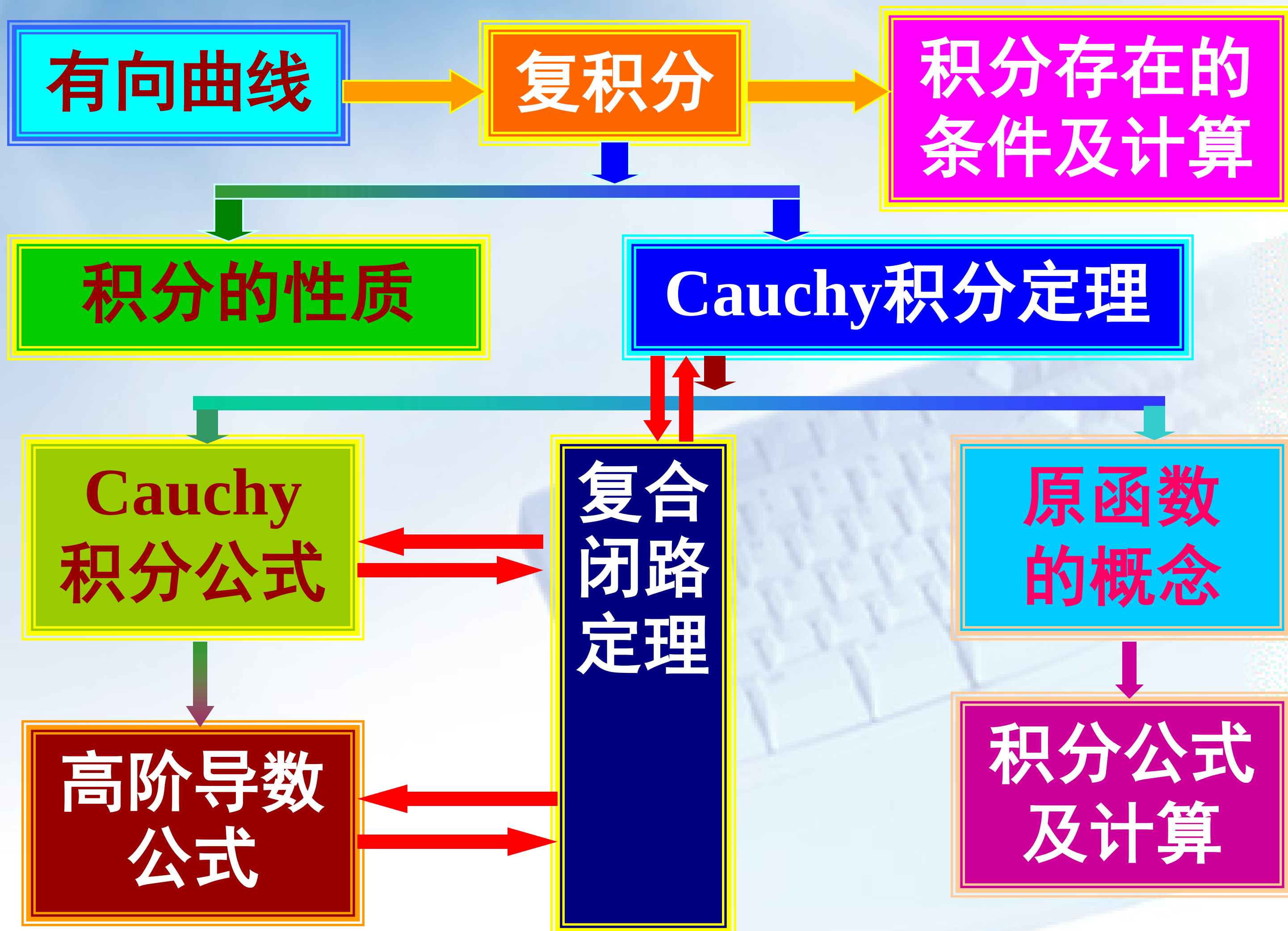
P100

7. (6)—(10)

P103

30. (1)—(2).

本章主要内容



有向曲线
复积分
积分存在的条件及计算
积分的性质
Cauchy积分定理
Cauchy积分公式
复合闭路定理
原函数的概念
高阶导数公式
积分公式及计算

第四章 复级数

- § 4-1 复数项级数和幂级数
- § 4-2 Taylor级数
- § 4-3 Laurent级数

§4-1 复数项级数和幂级数

一、复数列的收敛性及其判别法

二、复数项级数的收敛性及其判别法

三、幂级数及其收敛半径

四$^{\Delta}$、幂级数的运算性质

一、复数项级数

1. 复数列

复数列即有序的复数集

$$\{\alpha_n\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\cdots\}$$

称 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 α_0 ， 若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\alpha_n-\alpha_0\right|=0,$$

记作

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha_0.$$

复数列收敛与实数列收敛的关系

定理 复数列 $\{\alpha_n\} = \{a_n + ib_n\}\,(n = 1, 2, \cdots)$

收敛于α 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

此定理说明：可将复数列的收敛性转化为判别两个实数列的收敛性.

2. 复数项级数的收敛性及其判别法

1. 复数项级数

设 $\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}\ (n=1,2,\cdots)$为一复数列,

表达式 $$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$

称为复数项级数. 前 n 项的和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$

称为级数的前 n 项部分和.

2. 级数收敛与发散的概念

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，

且极限 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 称为级数的和.

若部分和数列 $\{S_n\}$ 不收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 发散.

说明：与实数项级数相同，判别复数项级数敛散性的基本方法是:

利用极限 $\lim_{n\to\infty} S_n = S.$

3. 复数项级数与实数项级数收敛的关系

定理2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$ 收敛的充要条件是：

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛.

证 因

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + i(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$$= \sigma_n + i\tau_n,$$

说明 复数项级数的收敛问题

$\Longleftrightarrow$ 两个实数项级数的收敛问题

级数收敛的必要条件（定理3）

因为实数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} b_n = 0 .$$

所以复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

类似于实数级数，引入**绝对收敛**概念

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛, 那末称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 为绝对收敛.

非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛级数.

绝对收敛级数的性质(定理4)

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛, 那末 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 也收敛.

且有不等式 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 成立.

$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛.

例1 **数列** $\alpha_n=(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}$是否收敛?

解 因$\alpha_n=(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}=(1+\frac{1}{n})(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n})$,

所以$a_n=(1+\frac{1}{n})\cos\frac{\pi}{n}$, $b_n=(1+\frac{1}{n})\sin\frac{\pi}{n}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

所以数列$\alpha_n=(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}$收敛, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=1$.

例2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(8i)^n}{n!}$ 是否绝对收敛?

解 因为 $\left|\dfrac{(8i)^n}{n!}\right| = \dfrac{8^n}{n!}$,

所以由正项级数的比值判别法知:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8^n}{n!}$ 收敛,

故原级数收敛, 且为绝对收敛.

例3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i]$ 是否绝对收敛?

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 也收敛,

故原级数收敛.

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为条件收敛,

所以原级数非绝对收敛.

三. 幂级数及其收敛半径

1. 幂级数的概念

设$\{f_n(z)\}$为区域 D 上的复变函数列, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

称为复变函数项级数。

级数前n项的和

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

称为该级数前n项的部分和.

$$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)=\sum_{k=1}^{n}f_k(z)$$

若对 D 内的某一点 z_0，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z_0)=S(z_0)$

存在，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 z_0 收敛，且$S(z_0)$为它的和.

如果级数在D内处处收敛，那末它的和一定

是 z 的一个函数 $S(z)$

$$S(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

称为该级数在区域D上的**和函数**.

例 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$

的收敛范围与和函数.

函数项级数的特殊情形

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

或 $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots.$$

这种级数称为**幂级数**.

2. 幂级数的敛散性

Abel(阿贝尔)定理

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 (\neq 0)$ 收敛,那末对

满足 $|z| < |z_0|$ 的 z, 级数必绝对收敛, 如果在 $z = z_0$

级数发散, 那末对满足 $|z| > |z_0|$ 的 z, 级数必发散.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \cdots$$

收敛半径的计算方法

方法1（比值法） 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$，则

(1) $\lambda = 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在复平面内处处收敛， 即 $R = \infty$.

(2) $\lambda = \infty$，则对 $z \neq 0$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 均发散， 即 $R = 0$.

(3) $0 < \lambda < \infty$, 那末收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

方法2 （根值法） 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda$，则

(1) $\lambda = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在复平面内处处收敛，即 $R = \infty$.

(2) $\lambda = \infty$，则对 $z \neq 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 均发散，即 $R = 0$.

(3) $0 < \lambda < \infty$, 那末收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

例 试求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}\ (p\text{为正整数})\text{ 的收敛半径.}$$

解 因为 $c_n = \dfrac{1}{n^p}$,

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p} = 1.$$

所以 $R = \dfrac{1}{\lambda} = 1.$

4. 幂级数的运算性质

(1) 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ R=r_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n,\ R=r_2.$

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,$$

$$f(z)\cdot g(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n\right),$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0 b_n)z^n,$$

其中 $|z|<R,\quad R=\min(r_1,r_2)$

定理4 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R，则

(1) 它的和函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$ 在收敛圆 $|z-a|<R$ 内解析.

(2) 当 $|z-a|<R$ 时，$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$.

(3) 设C为$|z-a|<R$内的一条(可求长)光滑曲线，则

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_c (z-a)^n \mathrm{d}z$$

或 $\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$.

例 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数, 其中 a与b 是不相等的复常数 .

解 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 写成如下的形式:

$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$

凑出 $\dfrac{1}{1-g(z)}$

代数变形 , 使其分母中出现 $(z-a)$

当 $\left|\dfrac{z-a}{b-a}\right|<1$时，

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}=1+\left(\frac{z-a}{b-a}\right)+\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n+\cdots,$$

故 $$\frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b-a}-\frac{1}{(b-a)^2}(z-a)-\frac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2$$

$$-\cdots-\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n-\cdots$$

设 $|b-a|=R$，那末当 $|z-a|<R$时，级数收敛，

且其和为$\dfrac{1}{z-b}$.

§4-2 Taylor级数

一、Taylor级数展开定理

二、基本初等函数的Taylor级数展开式

三$^{\Delta}$、典型例题及其说明

1. 问题的引入

高等数学中，我们学习过Taylor公式：

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0,\delta)$ 内具有直到$n+1$阶的导数，则 $\forall x \in U(x_0,\delta)$ 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$R_n(x)$是余项，且$R_n(x)=o((x-x_0)^n) \quad (x\to x_0).$

同时我们还学习过Taylor级数展开定理：

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0,\delta)$ 内有各阶导数，则 $f(x)$在 $U(x_0,\delta)$ 内能展开成$Taylor$级数的充要条件是在 $U(x_0,\delta)$ 内，$f(x)$ 的$Taylor$公式中的 $R_n(x)\to 0\ (n\to\infty)$.

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $f(z)$在D内有任一阶导数，自然提出问题：

任一解析函数能否用幂级数来表达？

2. Taylor级数展开定理

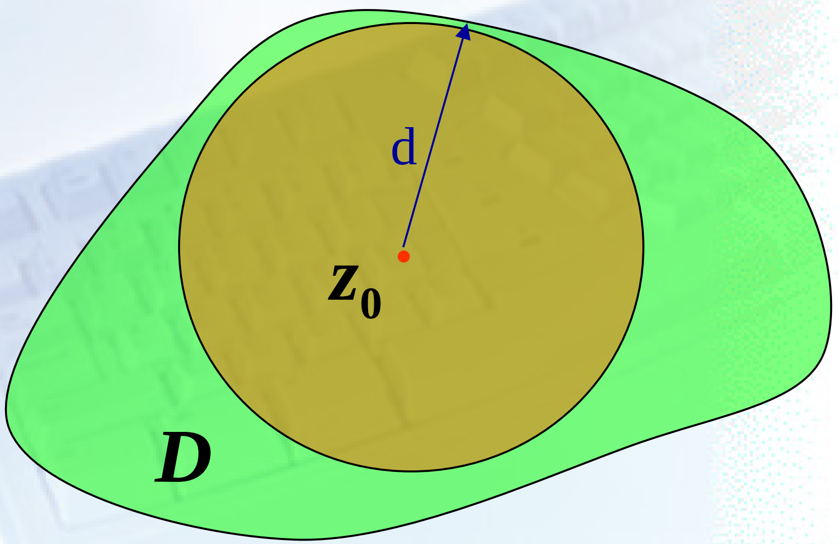
定理1 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, z_0 为 D 内的一点, d 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离, 那么当 $|z-z_0|<d$ 时, 成立,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

其中 $c_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$,

$n=0,\ 1,\ 2,\cdots$

即, $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$



在定理1中，幂级数称为函数 $f(z)$在 $z=z_0$ 点的Taylor展开式。

注1 幂级数就是它的和函数$f(z)$在收敛圆中的Taylor展开式，即

$$\alpha_0 = f(z_0), \quad \cdots, \alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

注2 （幂级数展开式的唯一性）在定理 1中，幂级数的和函数$f(z)$在收敛园盘U内不可能有另一幂级数展开式。

3. 将函数展开成Taylor级数

常用方法：直接法和间接法.

直接法： $c_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$， $n = 0,1,2,\cdots$

例如， 求 e^z 在 $z = 0$ 的泰勒展开式.

因为 $(e^z)^{(n)} = e^z$,

$$(e^z)^{(n)}\Big|_{z=0} = 1,\ (n = 0,1,2,\cdots)$$

故有 $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

因为 e^z 在复平面内处处解析,

所以级数的收敛半径 $R = \infty$.

仿照上例，

可得 sinz 与 cosz 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad ,$$

$$(R=\infty)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad ,$$

$$(R=\infty)$$

2. 间接展开法：

借助于一些已知函数的展开式，结合解析函数的性质，幂级数运算性质 (逐项求导，积分等)和其它数学技巧 (代换等)，求函数的Taylor展开式.

间接法的优点：

不需要求各阶导数与收敛半径，因而比直接展开更为简洁，使用范围也更为广泛.

如：应用 $\dfrac{1}{1-\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n \quad (|\xi|<1)$，令 $\xi=-z^2$，得

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \qquad (|z|<1)$$

例如， 求 $\sin z$ 在 $z=0$ 的 *Taylor* 展开式.

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4. 典型例题

例1 把函数 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解 由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 在 $|z|=1$ 上有一奇点 $z=-1$,

且在 $|z|<1$ 内处处解析, 可展开成 z 的幂级数,

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \qquad |z|<1$$

上式两边逐项求导, $\dfrac{1}{(1+z)^2}=-\left(\dfrac{1}{1+z}\right)'$

$$=1-2z+3z^2-\cdots+(-1)^{n-1}nz^{n-1}+\cdots, \quad |z|<1.$$

例2 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

解 -1是它的一个奇点，所以它在 $|z|<1$ 内

可以展开成 z 的幂级数.

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \qquad (|z|<1)$$

设 C 为收敛圆 $|z|<1$内从 0 到 z 的曲线,

将展开式两端沿 C 逐项积分, 得

$$\int_0^z \frac{1}{1+z}\,\mathrm{d}z = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \,\mathrm{d}z$$

即 $$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad |z|<1$$

例3 把函数 $f(z)=\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解 $$\frac{1}{3z-2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}[1+\frac{3z}{2}+(\frac{3z}{2})^2+\cdots+(\frac{3z}{2})^n+\cdots]$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3z}{2^2}-\frac{3^2z^2}{2^3}-\cdots-\frac{3^nz^n}{2^{n+1}}-\cdots$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nz^n}{2^{n+1}},\qquad \left|\frac{3z}{2}\right|<1,\text{即}|z|<\frac{2}{3}.$$

例4 求 $\arctan z$ 在 $z=0$ 的幂级数展开式.

解 因为 $\arctan z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$,

且 $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (z^2)^n, \quad |z|<1$

所以 $\arctan z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (z^2)^n dz$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z|<1.$$

例5 求$\cos^2 z$的幂级数.

解 因为 $\cos^2 z = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2z)$,

$$\cos 2z = 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{2^2 z^2}{2!} + \frac{2^4 z^4}{4!} - \frac{2^6 z^6}{6!} + \cdots \quad |z| < \infty$$

所以 $\cos^2 z = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2z)$

$$= 1 - \frac{2z^2}{2!} + \frac{2^3 z^4}{4!} - \frac{2^5 z^6}{6!} + \cdots \quad |z| < \infty$$

例6 将$\dfrac{e^z}{1+z}$在$z=0$点展开为Taylor级数.

解 因为$\dfrac{e^z}{1+z}$的唯一奇点为$z=-1$,

所以收敛半径为1, 可在$|z|<1$内进行展开,

令$f(z)=\dfrac{e^z}{1+z}$, 对 $f(z)$ 求导得$f'(z)=\dfrac{ze^z}{(1+z)^2}$,

即微分方程 $(1+z)f'(z)-zf(z)=0$

即微分方程 $(1+z)f'(z)-zf(z)=0$

对微分方程逐次求导得:

$$(1+z)f''(z)+(1-z)f'(z)-f(z)=0$$

$$(1+z)f'''(z)+(2-z)f''(z)=0$$

$$\cdots\quad\cdots$$

由 $f(0)=1$, 得 $f'(0)=0,\ f''(0)=1,\ f'''(0)=-2,\cdots$

所以$f(z)$的$Taylor$级数为

$$\frac{e^z}{1+z}=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots,\quad |z|<1.$$

思考？

怎样找函数展开成泰勒级数（幂级数）的收敛半径？

答：先找离展开点最近的奇点，则展开点到此奇点的距离就是收敛半径.

小结

- 从幂级数来讨论解析函数.
- 本节讨论解析函数的泰勒级数展开式。
    - 理解Taylor级数展开定理
    - 熟练地把一些比较简单的初等函数(e^z、sinz、cosz、ln(1+z)、$(1+z)^m$)展开成泰勒级数

附: 常见函数的泰勒展开式

$$1)\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (|z| < \infty)$$

$$2)\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$3)\ \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

$$(|z| < 1)$$

$$4)\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (|z| < \infty)$$

$$5)\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (|z| < \infty)$$

$$6)\ \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (|z| < 1)$$

$$7)\ (1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 +$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \qquad (|z| < 1)$$

§4-3　洛朗(Laurent)级数

上一节泰勒(Taylor)级数是在f(z)在D内解析，如果在D内有奇点，如何将f(z)在奇点附近将f(z)展开，这是本节所要解决的问题．此展式称为洛朗(Laurent)级数.

本节主要讨论函数在环域 $r<|z-z_0|<R$ 内的级数展开问题，并且讨论它在积分计算中的应用。

级数是研究解析函数的性质和计算其积分的重要工具

1. 问题的引入

考虑双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

Laurent级数

负幂项部分

正幂项部分

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

收敛

同时收敛

主要部分

解析部分

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \xrightarrow{\text{令}\zeta=(z-z_0)^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

收敛半径 R_2

收敛域

$$|z-z_0| < R_2$$

收敛半径 R

$|\zeta| < R$时,收敛

收敛域

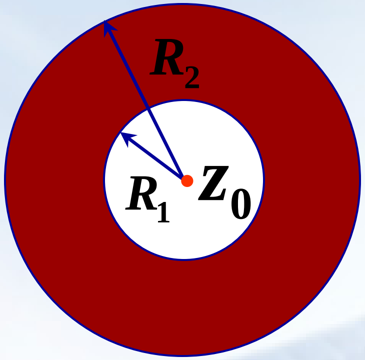
$$|z-z_0| > \frac{1}{R} = R_1$$

若(1) $R_1 > R_2$： 两收敛域无公共部分,

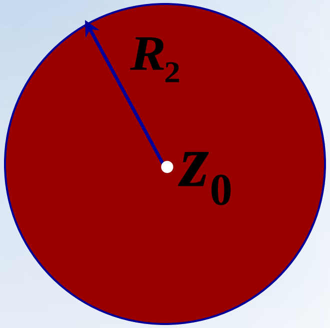
(2) $R_1 < R_2$： 两收敛域有公共部分 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

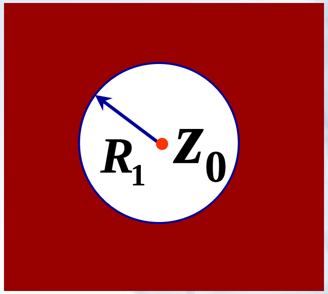
结论: 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 的收敛区域为

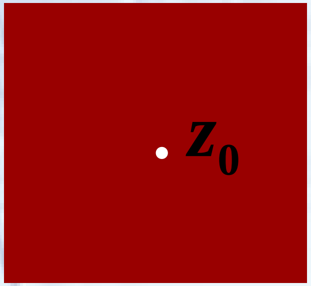
圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.



常见的特殊圆环域:







$0 < |z-z_0| < R_2$ $\quad R_1 < |z-z_0| < \infty$ $\quad 0 < |z-z_0| < \infty$

对于通常的幂级数，讨论了下面两个问题：

（1） 任一幂级数，如果收敛，必在圆域内收敛，且和函数在圆域内解析。

（2） 在圆域内的解析函数一定能展开成幂级数。

对于Laurent级数，我们也有：

如果Laurent级数收敛，必在圆环域内收敛，且和函数在圆环域内解析。

自然的问题是：在圆环域内解析的函数是否可以能展开成Laurent级数？

2. 解析函数的洛朗展开定理

定理1 设函数 $f(z)$ 在圆环 $D: r<|z-z_0|<R$ 内解析，那么对D内任意点z有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

其中，
$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

C 是环域内任意一条围绕点z_0的正向简单闭路。

讨论:

由于在圆所围区域可能有奇点，因此，不能用Cauchy公式把系数记为:

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

二、洛朗级数的性质

注（解析函数的洛朗展开式唯一）在定理1的假设条件下，在D内的 $f(z)$ 罗朗展开式是唯一的.

3. 函数的Laurent展开式

理论上应该有两种方法：**直接法与间接法**

(1) 直接展开法

利用定理公式计算系数 c_n

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

然后写出 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$

这种方法只有在找不到更好方法时才用.

(2) 间接展开法

根据解析函数 Laurent 级数展开式的唯一性，可运用代数运算、代换、求导和积分等方法去展开 .

这一方法成为Laurent 级数展开的**常用方法**。

例如，$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$在$z=0$及$z=1$都不解析，

而在圆环域$0<|z|<1$及$0<|z-1|<1$内都解析.

在圆环域 $0<|z|<1$内：

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,\ |z|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=z^{-1}+1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内，也可以展开成级数：

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$$

$$=\frac{1}{1-z}\left[\frac{1}{1-(1-z)}\right]$$

$$=\frac{1}{1-z}\left[1+(1-z)+(1-z)^2+\cdots+(1-z)^n+\cdots\right]$$

$$=(1-z)^{-1}+1+(1-z)+(1-z)^2+(1-z)^{n-1}+\cdots.$$

给定函数 $f(z)$ 与复平面内的一点 z_0 以后，函数在各个不同的圆环域中有不同的Laurent展开式 (包括Taylor展开式作为其特例).

问题：这与laurent展开式的唯一性是否相矛盾?

回答：不矛盾 .

注意唯一性：指函数在某一个给定的圆环域内的Laurent展开式是唯一的.

例1 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域：

$1)\ 0<|z|<1;$ $2)\ 1<|z|<2;$ $3)\ 2<|z|<+\infty.$

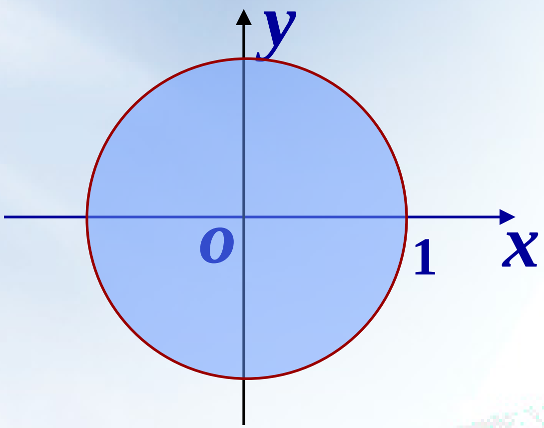
内解析，把 $f(z)$ 在这些区域内展成Laurent级数.

解 $$f(z)=\frac{1}{(1-z)}-\frac{1}{(2-z)},$$

1) 在 $0<|z|<1$ 内，

由于 $|z|<1$，从而 $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$

则 $$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$



$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$

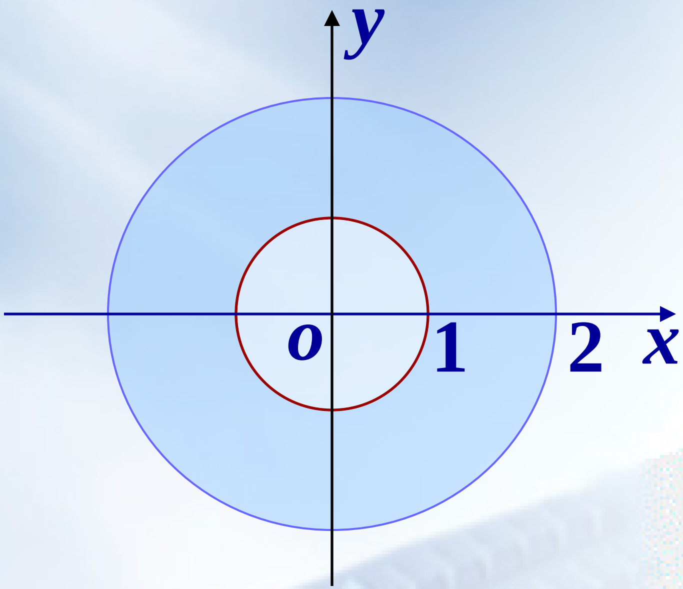
所以 $$f(z)=(1+z+z^2+\cdots)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots$$

2) 在 $1<|z|<2$ 内,

由 $|z|>1 \longrightarrow \left|\dfrac{1}{z}\right|<1$

$|z|<2 \longrightarrow \left|\dfrac{z}{2}\right|<1$



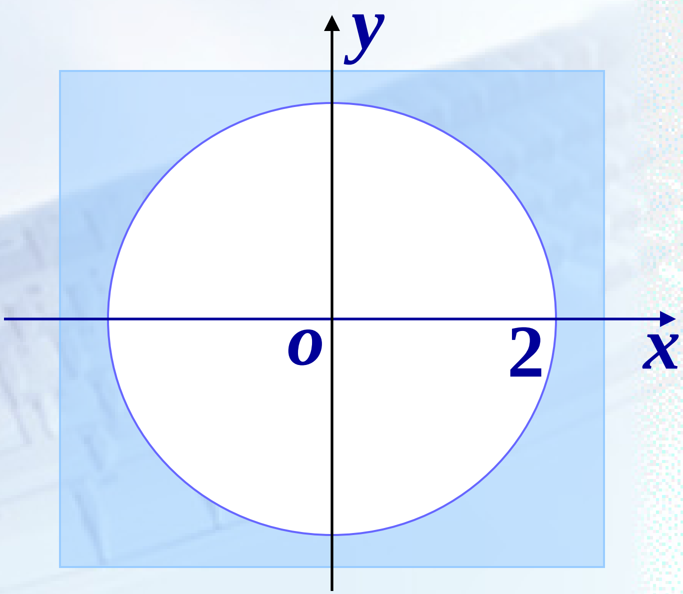
$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

且仍有 $$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$

于是 $f(z)=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots\right)$

$$=\cdots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\cdots$$

3) 在 $2<|z|<\infty$ 内,



由 $|z|>2 \longrightarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1$

此时 $\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$

$$=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right)$$ 此时 $\left|\frac{1}{z}\right|<\left|\frac{2}{z}\right|<1,$

仍有 $$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

故 $$f(z)=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right)-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots.$$

例2 将函数 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z_0=0$ 的去心邻域内展开成 *Laurent* 级数.

解 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ $\qquad 0<|z|<\infty$

$$=\frac{1}{z}\left[z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

例3 将函数 $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

由解析函数的洛朗展开定理知

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

- 令n= -1,得

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz,\text{或}\oint_c f(z)dz=2\pi i c_{-1}.$$

- 例 求积分 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$ 的值。

解 函数 $f(z)=\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内解析，

且 $|z|=2$ 在此圆环域内，把它在此圆域内展开得

$$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{-(1-\frac{1}{z})}=-(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots)$$

$$=-(1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots)$$

故 $c_{-1}=-2$，而 $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz=2\pi i c_{-1}=-4\pi i.$

小结

- 从幂级数来讨论解析函数.
- 本节讨论解析函数的Laurent级数展开式。
  - 掌握Laurent级数的性质
  - 学会应用Laurent级数展开式计算积分

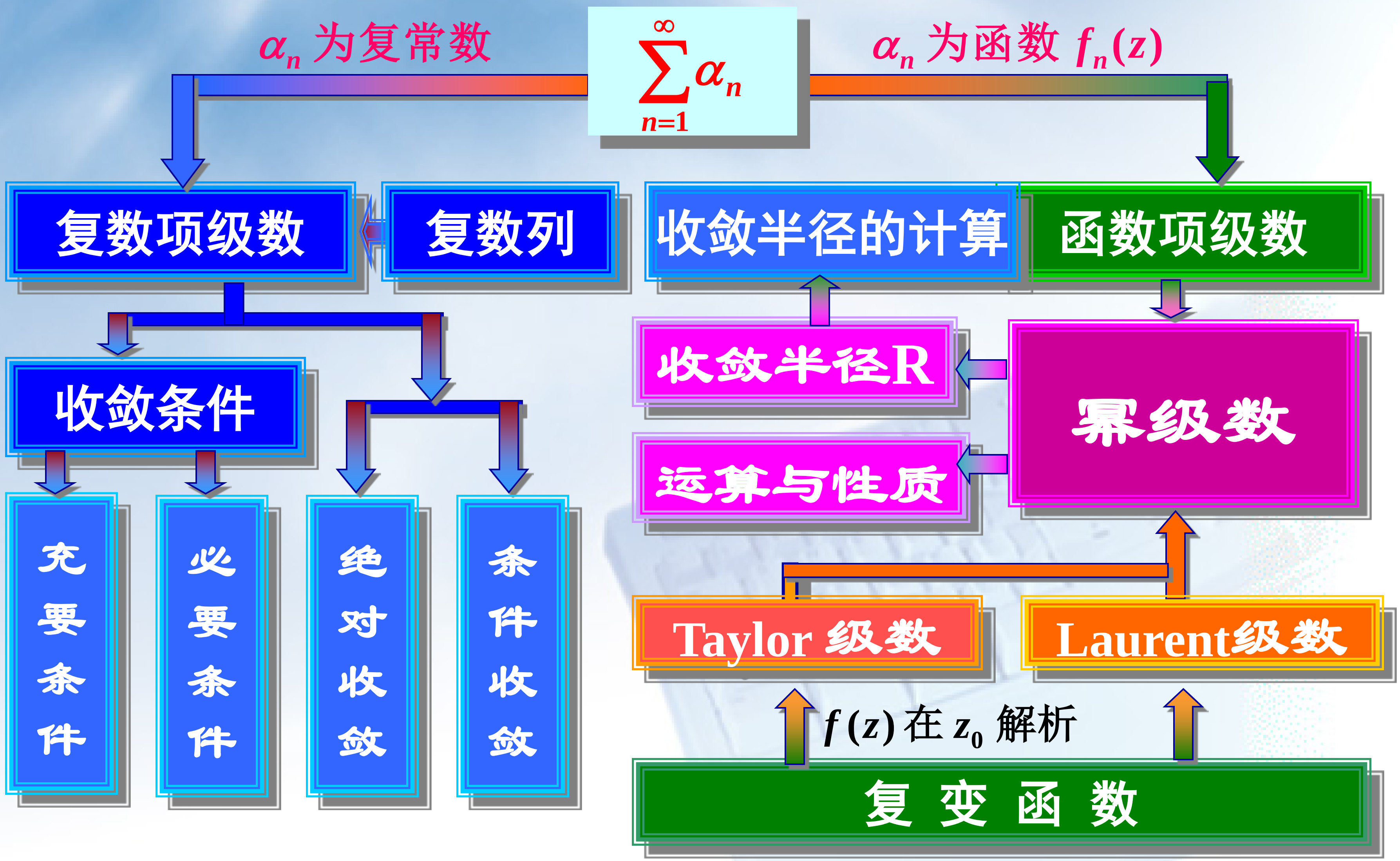
重点：函数展开成Laurent级数

思考

- 怎样找函数展开成洛朗级数的收敛圆环？

要看在哪一点（奇点）的去心邻域内展开，再找最近奇点

第四章 主要内容



$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$
α_n 为复常数
α_n 为函数 $f_n(z)$
复数项级数
复数列
收敛半径的计算
函数项级数
收敛条件
收敛半径R
幂级数
运算与性质
充要条件
必要条件
绝对收敛
条件收敛
Taylor 级数
Laurent级数
$f(z)$ 在 z_0 解析
复 变 函 数

第五章 留数及其应用

- §5-1 函数的孤立奇点及其分类
- §5-2 留数和留数定理
- §5-3 留数在定积分计算中的应用

从上一章知，利用将函数f(z)在其解析的环域$R_1<|z-z_0|<R_2$内展开成Laurent级数的方法，根据该级数的系数的积分表达式

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz$$

可以计算右端的积分。这类积分非常广泛，

其中C是该环域内围绕点z_0的正向简单闭曲线。C的内部可能有f(z)的有限个或无穷多个奇点。

有时将函数展开成Laurent级数，求系数C_{-1}很麻烦。这就需要介绍一种求C_{-1}的新方法：用留数计算积分的方法。

§5-1 函数的孤立奇点及其分类

一、函数孤立奇点的概念及其分类

二、函数各类孤立奇点的充要条件

三、用函数的零点判断极点的类型

一、函数孤立奇点的概念及其分类

定义 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 但 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

例1 $z=0$ 是函数 $e^{\frac{1}{z}}$, $\dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

$z=-1$ 是函数 $\dfrac{1}{z+1}$ 的孤立奇点.

注意: 孤立奇点一定是奇点, 但奇点不一定是孤立奇点.

例2 指出函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin\frac{1}{z}}$ 在点 $z=0$ 的奇点特性.

解 函数的奇点为

$$z_0=0,\ z_k=\frac{1}{k\pi}\qquad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k\pi}=0,$

即在 $z=0$ 的不论怎样小的去心邻域内, 总有 $f(z)$ 的奇点存在, 所以 $z=0$ 不是孤立奇点.

讨论函数在孤立奇点的情况

设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，则在去心邻域

$0<|z-z_0|<\delta$ 内，$f(z)$ 可以展开成Laurent级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

其中，c为该去心邻域内围绕点z_0的任意一条正向简单闭曲线。

根据 c_n 的不同情况，对孤立奇点分类：

若级数中含$(z-z_0)$的负幂项的项数分别为零个，有限个，无穷多个，则分别称z_0为f(z)的**可去奇点**、**极点**和**本性奇点**。

二、函数各类孤立奇点的充要条件

1 可去奇点

定义 如果Laurent级数中不含 $z-z_0$ 的负幂项，则称孤立奇点z_0为 $f(z)$ 的可去奇点.

z_0若是$f(z)$的孤立奇点，则 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内

$$f(z)=\boxed{c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots}$$

其和函数$F(z)$在 z_0 处解析.

观察 $\dfrac{\sin z}{z}=1-\dfrac{1}{3!}z^2+\dfrac{1}{5!}z^4-\cdots$ 中不含负幂项,

$z=0$ 是 $\dfrac{\sin z}{z}$ 的可去奇点 .

如果补充定义:

$z=0$ 时, $\dfrac{\sin z}{z}=1,$

那末 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$ 解析.

(由于这个原因，因此把这样的奇点叫做f(z)的可去奇点。)

且有：$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1.$

$$f(z)=\boxed{c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots}$$

设 $f(z)$在 $0<|z-z_0|<R$上解析，则 z_0为 $f(z)$的可去奇点的充要条件为：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\text{存在且有限。}$$

由定义判断：如果 $f(z)$在z_0 的 Laurent 级数无负幂项，则 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

由极限判断：若极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且为有限值，则 z_0为 $f(z)$的可去奇点.

例3 说明 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的奇点类型.

解 $$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{z}\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots-1\right)$$

$$=\underbrace{1+\frac{1}{2!}z+\cdots+\frac{1}{n!}z^{n-1}+\cdots}_{\text{无负幂项}},\quad 0<|z|<+\infty$$

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

另解 因为 $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=\lim_{z\to 0}e^z=1,$

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

2 极点

定义 如果Laurent级数中只有有限多个 $z-z_0$ 的负幂项, 其中关于 $(z-z_0)^{-1}$ 的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$,

即
$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$
$$+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots\qquad(m\geq 1,\ c_{-m}\neq 0)$$

那么孤立奇点 z_0 称为函数 $f(z)$ 的 m 级极点.

由极点的定义

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$

$$=(z-z_0)^{-m}\,[\,c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^{n+m}+\cdots]$$

$$(m\geq 1,\ c_{-m}\neq 0)$$

记 $g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^{n+m}+\cdots$

则 $$\boxed{f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)}$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$$

注意到:

$$g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+c_{-m+2}(z-z_0)^2+\cdots$$

在$|z-z_0|<\delta$内是解析函数，且 $g(z_0)\neq 0$

由此得：z_0 为函数 $f(z)$ 的m级极点的充要条件是

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

其中 $g(z)$ 在 z_0 的邻域内解析，且 $g(z_0)\neq 0.$

例5 有理分式函数 $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$,

$z=0$是二级极点， $z=-2$ 是一级极点.

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$$

由定义判别：$f(z)$的Laurent展开式中含有$z-z_0$的负幂项为有 限项.

由定义的等价形式判别：在点 z_0的某去心邻域内

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

其中 $g(z)$在z_0的邻域内解析, 且 $g(z_0)\neq 0$.

由极限判别：$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ 判断 .

3. 函数的零点

定义 设解析函数 $f(z)$ 在区域 D 内的一点 z_0 处的值为零，则称 z_0 为解析函数 $f(z)$ 的零点.

例6 $z=0$，$z=1$ 是函数 $f(z)=z(z-1)^3$ 的零点.

定义 如果 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内解析，且有

$$f(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$$

其中 $\psi(z)$ 在点 z_0 解析，且 $\psi(z_0)\neq 0$, $m\geq 1$,

则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点.

(1) m 级零点的判别方法

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 那末 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点的充要条件是

$$f^{(n)}(z_0)=0, (n=0,1,2,\cdots m-1); \quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

例7　求以下函数的零点的级数:

$$f(z)=z^3-1,$$

解　由于 $f'(1)=3z^2\big|_{z=1}=3\neq 0,$

知 $z=1$ 是 $f(z)$ 的一级零点 .

证 (必要性) 如果 z_0 为 $f(z)$的 m 级零点

由定义: $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$

设 $\varphi(z)$在z_0的Taylor级数展开为:

$$\varphi(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots,$$

其中 $c_0=\varphi(z_0)\neq 0,$

从而$f(z)$在z_0的$Taylor$级数展开式为

$$f(z)=c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+c_2(z-z_0)^{m+2}+\cdots$$

展开式的前m项系数都为零 ,由Taylor级数的系数

公式知: $f^{(n)}(z_0)=0,(n=0,1,2,\cdots m-1);$

并且 $f^{(m)}(z_0)=m!c_0\neq 0.$

(2)用函数的零点判断极点的类型:

定理 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 那末z_0就是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点. 反过来也成立.

说明

此定理为判断函数的极点提供了一个较为简便的方法.

例4 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 有些什么奇点, 如果是极点, 指出它的级.

解 函数的奇点是使 $\sin z = 0$ 的点,

这些奇点 $z = k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$ 是孤立奇点.

因为 $(\sin z)'\big|_{z=k\pi} = \cos z\big|_{z=k\pi} = (-1)^k \neq 0,$

所以 $z = k\pi$ 是 $\sin z$ 的一级零点,

即 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的一级极点.

例5 问 $z=0$ 是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的二级极点吗?

解 $$\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right)$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots=\frac{1}{z}\varphi(z),$$

解析且$\varphi(0)\neq 0$

所以 $z=0$ 不是二级极点, 而是一级极点.

注意: 不能以函数的表面形式作出结论 .

思考 $z=0$ 是 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的几级极点?

4 本性奇点

若Laurent级数中含有无穷多个 $z-z_0$ 的负幂项,

则孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的本性奇点.

例如, $e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots,$

含有无穷多个z的负幂项 $(0<|z|<\infty)$

所以 $z=0$ 为本性奇点, 同时 $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ 不存在.

特点: 在本性奇点的邻域内 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在且不为 ∞.

综上所述:

孤立奇点	Laurent级数的特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
m级极点	含有限个负幂项 关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	含无穷多个负幂项	不存在且不为∞

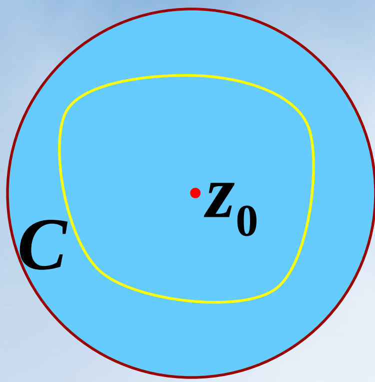
§5-2 留数和留数定理

一、留数的定义和计算

二、 留数定理

一、留数的定义和计算

设 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点;



z_0 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<R$ ，

包含 z_0 的任一条正向简单闭曲线C.

$f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内的 Laurent 级数:

$$f(z)=\cdots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+\cdots+c_0$$

$$+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$

$$= \cdots + \underbrace{c_{-n}\oint_C (z-z_0)^{-n}\mathrm{d}z}_{0} + \cdots + c_{-1}\underbrace{\oint_C (z-z_0)^{-1}\mathrm{d}z}_{2\pi i} +$$

0 (高阶导数公式)

$$+ \underbrace{\oint_C c_0\mathrm{d}z} + \underbrace{\oint_C c_1(z-z_0)\mathrm{d}z} + + \underbrace{\oint_C c_n(z-z_0)^n\mathrm{d}z + \cdots}$$

0 (柯西-古萨定理)

$$= 2\pi i \boxed{c_{-1}}$$

Laurent级数中负幂项 $c_{-1}(z-z_0)^{-1}$ 的系数

$f(z)$在z_0的留数

即 $c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}[f(z), z_0]$

定义 如果 z_0 为函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，则沿 z_0 的某个去心邻域 $0 < |z - z_0| < R$ 内，包含 z_0 的任意一条简单闭曲线 C 的积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值除以 $2\pi i$ 后所得的数称为 $f(z)$ 在 z_0 的留数. (Residue)

记作 $\mathrm{Res}[f(z), z_0]$. (即 $f(z)$ 在 z_0 为中心的圆环域内的 Laurent 级数中负幂项 $c_{-1}(z - z_0)^{-1}$ 的系数.)

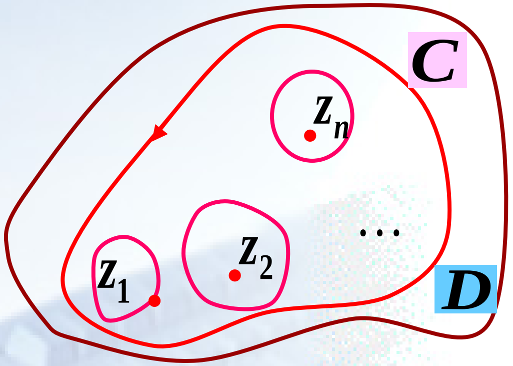
留数定理　函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析，C 是 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线，那么

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

注：　留数定理将沿封闭曲线 C 积分转化为求被积函数在 C 内各孤立奇点处的留数.

证明 如图，根据复合闭路定理

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$



两边同时除以 $2\pi i$ 则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \mathrm{Res}[f(z), z_1] + \mathrm{Res}[f(z), z_2] + \cdots + \mathrm{Res}[f(z), z_n]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$ 即可得.

计算留数的一般公式

由Laurent级数展开定理，定义留数的积分值是f(z)在环域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内Laurent级数的负一次幂系数 c_{-1}

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} \qquad \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

(1) 若z_0为函数f(z) 的可去奇点，(负幂项的项数为零个)，则它在点z_0的留数为零。

(2) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则需将 $f(z)$ 展开成Laurent级数求 c_{-1}.

(3) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的极点, 则有如下计算规则

• **规则1** 如果 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 那末

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

• **规则2** 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m（m=1，2，3，…）级极点,则有

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

说明 将函数的零阶导数看作它本身，规则1^o可看作规则2^o当m=1时的特殊情形.

证明 先证规则2º，由于z_0为f(z)的m级极点，因此可设在$0<|z-z_0|<\rho$内有

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$

用 $(z-z_0)^m$乘上式的两端得

$$(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\cdots$$

$$(0<|z-z_0|<\rho)$$

Laurent级数在其收敛环域内逐项微分得

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]=(m-1)!c_{-1}+\{含有(z-z_0)的正幂的项\}$$

令$z\to z_0$，规则2º成立。

• 规则3 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 z_0都解析，

如果 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$, 那么 z_0为

$f(z)$ 的一级极点，且有

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

3 典型例题

例1 求 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^n}$ 在 $z=0$ 的留数.

解 因为 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 n 阶极点,

所以 $$\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^n},0\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left(z^n\cdot\frac{e^z}{z^n}\right)$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}.$$

例2 计算积分 $\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}\mathrm{d}z$, **$C$为正向圆周:** $|z| = 2.$

解 函数$f(z)=\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}\mathrm{d}z$有两个一级极点$+1,-1$,

而这两个极点都在圆周$|z|=2$内，所以

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{ze^z}{z^2-1}=\lim_{z\to 1}\frac{ze^z}{z+1}=\frac{e}{2},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{ze^z}{z^2-1}=\lim_{z\to -1}\frac{ze^z}{z-1}=\frac{e^{-1}}{2},$$

因此， $\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}\mathrm{d}z=2\pi i\left(\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}\right)=2\pi i\,\mathrm{ch}1.$

我们也可以用规则3来求留数：

$$\operatorname{Res}[f(z),\ 1]=\left.\frac{ze^z}{2z}\right|_{z=1}=\frac{e}{2},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\left.\frac{ze^z}{2z}\right|_{z=-1}=\frac{e^{-1}}{2}.$$

例3 计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z$, C为正向圆周: $|z|=2.$

解 被积函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 有四个一级极点$\pm 1, \pm i$ 都

在圆周 $|z|=2$ 的内部, 所以

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]$$
$$+\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}$$

由规则3 $\frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{z}{4z^3}=\frac{1}{4z^2}$,

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right\}=0.$$

例4 计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$，$C$为正向圆周: $|z| = 2.$

解 $z = 0$ 为一级极点， $z = 1$为二级极点，

$$\mathrm{Res}[f(z),0] = \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^z}{z(z-1)^2}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2} = 1$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{z(z-1)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{e^z}{z}\right) = \lim_{z \to 1} \frac{e^z(z-1)}{z^2} = 0,$$

所以 $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$

$$= 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0] + \mathrm{Res}[f(z),1]\}$$

$$= 2\pi i(1+0)$$

$$= 2\pi i.$$

说明:

在实际计算中应灵活运用计算规则：

如 z_0 为 m 级极点，当 m 较大而导数又难以计算时，

可直接展开Laurent级数求 c_{-1} 来计算留数 .

小结：　留数的计算 $\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = c_{-1}$

1 若z_0为函数f(z) 的可去奇点，(负幂项的项数为零个)，则它在点z_0的留数为零。

2 若z_0为f(z) 的一级极点，则有

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$$

3 若z_0为f(z) 的m级极点，则对任意整数$n \geq m$有

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z - z_0)^n f(z)]$$

4 设f(z)=P(z)/Q(z)，其中P(z)和Q(z)在点z_0都解析。若 $P(z_0) \neq 0$，Q(z_0)=0且 $Q'(z_0) \neq 0$，则z_0为f(z) 的一级极点，且有 $\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

§5-3 留数在定积分计算中的应用

一、形如 $I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ 的积分

二、形如 $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 的积分

三、形如 $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx \ (a > 0)$ 的积分

思想方法：把定积分转化为一个复变函数沿某条封闭路线的积分。

两个重要工作： 1) 被积函数的转化。

2) 积分区域的转化；

1 三角有理式 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分

令 $z = e^{i\theta}$ $\longrightarrow$ $\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ $\longrightarrow$ $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$,

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

当 θ 在 $[0, 2\pi]$ 变化时,

z 沿单位圆周 $|z| = 1$ 的正方向绕行一周.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right].$$

z的有理函数，且在单位圆周上分母不为零，满足留数定理的条件．

包围在单位圆周内的诸孤立奇点.

1. 被积函数的转化:

$$R(\cos\theta,\sin\theta) \Rightarrow R\left[\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right]\cdot\frac{1}{iz}$$

2. 积分区域的转化:

当 θ 在 $[0,2\pi]$ 变化时,

z 沿单位圆周 $|z|=1$ 的正方向绕行一周.

例 1 计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}\mathrm{d}\theta\ \ (0<p<1).$

解 由于 $0<p<1,$

$$1-2p\cos\theta+p^2=(1-p)^2+2p(1-\cos\theta)$$

在 $0\le\theta\le 2\pi$ 内不为零， 故积分有意义.

$$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},\quad d\theta=\frac{1}{iz}dz$$

$$\cos 2\theta=\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}=\frac{1}{2}(z^2+z^{-2})$$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{1-2p\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}+p^2}\cdot\frac{dz}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z.$$

被积函数有三个极点 $z=0,p,\frac{1}{p}$, 但只有前两个在圆周 $|z|=1$ 内，其中z=0为二级极点，z=p为一级极点，所以被积函数在圆周 $|z|=1$ 上无奇点.

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]$$

$$=-\frac{1+p^2}{2ip^2},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),p]\ =\lim_{z\to 0}\backslash\left[(z-p)\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]$$

$$=\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)},$$

因此，根据留数定理

$$I=-\frac{1+p^2}{2ip^2}+\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)}=\frac{2\pi p^2}{1-p^2}.$$

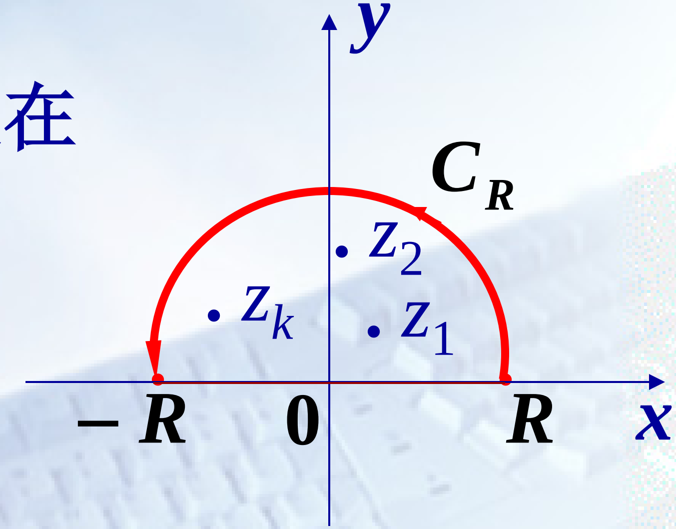
2. 有理函数的无穷积分，形如 $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

其中 $f(x)=\dfrac{x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$, $m-n\geq 2$

此时，我们设 $f(z)=\dfrac{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}$

积分存在要求: $f(x)$是 x 的有理函数而分母的次数至少比分子的次数高两次, 并且 $f(z)$ 在实轴上无孤立奇点.

补充曲线 C_R (以原点为中心，R 为半径的在上半平面的半圆周),取R足够大，使 $f(z)$ 所有的在上半平面内的极点 z_k 都包在这积分路线内.



C_R与$[-R,R]$一起构成封闭曲线C，$f(z)$在C及其内部(除去有限孤立奇点）处处解析.

$$f(z)=\frac{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}$$

根据留数定理得：

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum \mathrm{Res}[f(z),z_k],$$

$$|f(z)|=\frac{1}{|z|^{m-n}}\frac{|1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|}{|1+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|}$$

$$\leq\frac{1}{|z|^{m-n}}\cdot\frac{1+|a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|}{1-|b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|}$$

当 $|z|$ 充分大时, 总可使

$$|a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|<\frac{1}{10},\quad |b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|<\frac{1}{10},$$

因为 $m-n\geq 2,$

所以 $|f(z)|\leq \dfrac{1}{|z|^{m-n}}\cdot\dfrac{1+|a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|}{1-|b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|}<\dfrac{2}{|z|^2}$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right|\leq\int_{C_R}|f(z)|\mathrm{d}s\leq\frac{2}{R^2}\pi R=\frac{2\pi}{R},$$

$R\to+\infty:\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\to 0;\int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z\to\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{d}z,$

所以 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=2\pi i\sum\mathrm{Res}[f(z),z_k]$

1. 被积函数的转化: $f(x) \Longrightarrow f(z)$

(当 z 在实轴上的区间内变动时 , $f(z)=f(x)$)

2. 积分区域的转化:

取一条连接区间两端的按段光滑曲线, 使与区间一起构成一条封闭曲线, 并使 $f(z)$ 在其内部除有限孤立奇点外处处解析.

(此法常称为"围道积分法")

定理 有理函数$f(x) = P(x)/Q(x)$，若$Q(x)$的次数至少比$P(x)$的次数高两次，$f(z)$在实轴上无孤立奇点，则有

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$

其中，$z_k (k = 1, 2, \ldots, n,)$ 为$f(z)$在上半平面内的所有极点.

例2　计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a>0,\ b>0,\ a\neq b)$$

解 这里$m-n=2$, $f(z)$在实轴上无孤立奇点，故积分存在. 函数

$$\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$$

在上半平面有一级极点 $z=ai,\quad z=bi.$

$$\mathbf{Res}[f(z),ai] = \left.\frac{z^2}{\left[(z^2+a^2)(z^2+b^2)\right]'}\right|_{z=ai} = \frac{a}{2i(a^2-b^2)},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),bi]=\left.\frac{1}{(z^2+a^2)^2(z+bi)}\right|_{z=bi}=\frac{b}{2i(b^2-a^2)},$$

所以 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

$$=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),ai]+\operatorname{Res}[f(z),bi]\}$$

$$=\frac{\pi}{a+b}.$$

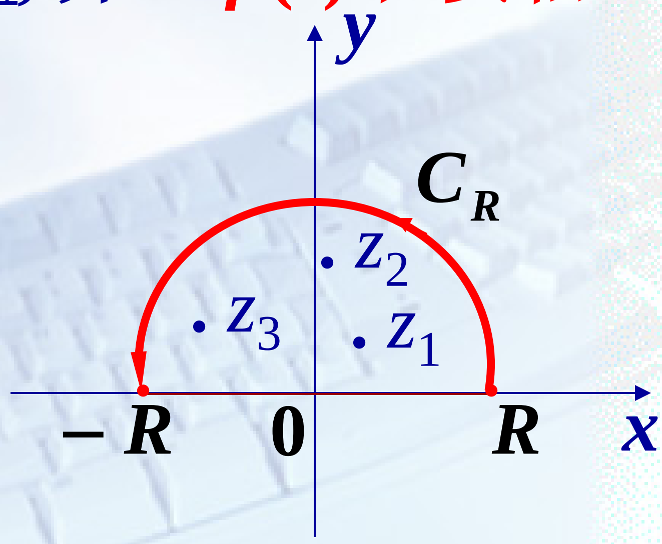
3 有理函数与三角函数乘积的积分

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) e^{iax} dx \ (a>0)$$

积分存在要求: $f(x)$是 x 的有理函数而分母的次数至少比分子的次数高一次, 并且 $f(z)$ 在实轴上无孤立奇点.

同前一情形: 补充曲线 C_R

C_R与$[-R, R]$一起构成封闭曲线 C, 使 $f(z)$ 所有的



在上半平面内的极点 z_k 都包在这积分路线内 .

由留数定理:

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{aix}\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)e^{aiz}\mathrm{d}z = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[f(z)e^{aiz}, z_k]$$

$R \to +\infty$: $\qquad \int_{C_R} f(z)e^{aiz}\mathrm{d}z \to 0.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{aix}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[f(z)e^{aiz}, z_k]$$

$$e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi i\sum \mathrm{Res}[f(z)e^{aiz}, z_k].$$

例3 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x, \quad (a>0).$

解 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$

$$令 f(z)=\frac{z}{z^2+a^2}e^{iz},$$

这里$m-n=1$, $f(z)$在实轴上无孤立奇点，故积分存在. **$f(z)$又在上半平面只有一级极点$z=ai$,**

则 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2}e^{ix}\mathrm{d}x = 2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z}{z^2+a^2}e^{iz}, ai\right]$

$$=2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2}=\pi i e^{-a}.$$

所以 $$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}e^{ix}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\pi e^{-a}.$$

注意 以上两种类型的积分中，被积函数 $R(x)$ 在实轴上无孤立奇点.

重点与难点：

留数的计算与留数定理

留数定理在定积分计算上的应用

第五章内容提要

孤立奇点

- 可去奇点
- 极点
- 本性奇点

函数的零点与极点的关系

留数

- 计算方法
- 留数定理

计算 $\oint_C f(z)dz$

留数在定积分计算中的应用

1. $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$;
3. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{aix}dx$