第四章　拉普拉斯变换　连续时间系统的S域分析

§4.1 引言

一、拉氏变换的优点

1、同时给出微分议程通解和特解，且初始条件自动计入。

2、将乘法代表微分，积分转化为除法，简化 运算。

3、指数函数，超越函数和有不连续点的函数转化为初等函数。

4、拉氏变换化卷积为乘法，减小运算难度。

二、拉氏变换依赖于系统的叠加性与齐次性，对于离散系统，非线性系统，时变系统，拉氏变换无能为力。

三、对拉氏变换的总体理解

1、可理解为求解线性微分方程的工具，类似算子法。

2、可理解为广义的傅立叶变换。即对时间函数进行复频域分解，但此时不是正交分解。

§4.2 拉氏变换的定义、收敛域

一、从傅氏变换到拉氏变换

有几种情况不满足狄里赫利条件：

- u(t)
- 增长信号e^{at} $(a>0)$
- 周期信号$\cos\omega_1 t$

- 若乘一衰减因子$e^{-\sigma t}$ σ 为任意实数，则 $f(t)\cdot e^{-\sigma t}$ 收敛，于满足狄里赫利条件

$u(t)e^{-\sigma t}$

$e^{at}.e^{-\sigma t}$ $(\sigma>a)$

$e^{-\sigma t}\cos\omega_1 t$

拉普拉斯正变换

因果

$$f_1(t) = f(t)e^{-\sigma t}$$

$$F_1(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$s=\sigma+j\omega$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

单边拉氏正变换

FT: 实频率　ω是振荡频率

LT: 复频率S　ω是振荡频率，　σ　控制衰减速度

拉普拉斯反变换

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{jwt}dw$$

两边同时乘以 $e^{\sigma t}$ 有：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{(\sigma + jw)t}dw$$

$$s=\sigma+jw \Rightarrow ds=d\sigma+djw \quad \therefore dw=\frac{1}{j}ds$$

于是上式写为：

反变换式

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s)e^{st}ds}$$

三、拉氏变换与傅氏变换的区别

1、傅氏：FT[f(t)]=F(w)　　t,w为实数，w表示频率

　拉氏：LT[f(t)]=F(s)　　t为实数，s为复数，

s表示复频率

2、傅氏：建立时域与频域的关系。将时域信号分解成正弦和的形式。

　拉氏：建立时域与s域（复频域）的关系。将时域信号分解成[illegible]的和的形式。

四、复频域与复频率

1、$s = \sigma + jw$ 称复频率

2、以σ为横轴，jw为纵轴建立起来的坐标系，

称复平面（s平面）。

四、复频域与复频率

3.复平面上任意一点对应一个s值,s值决定

$e^{st}=e^{\sigma t}e^{jwt}$的值.

4、由s平面上点的位置，易分析$e^{st}=e^{\sigma}\cdot e^{jwt}$的变化规律：

A：σ反应幅度变化规律，　w反应频率。

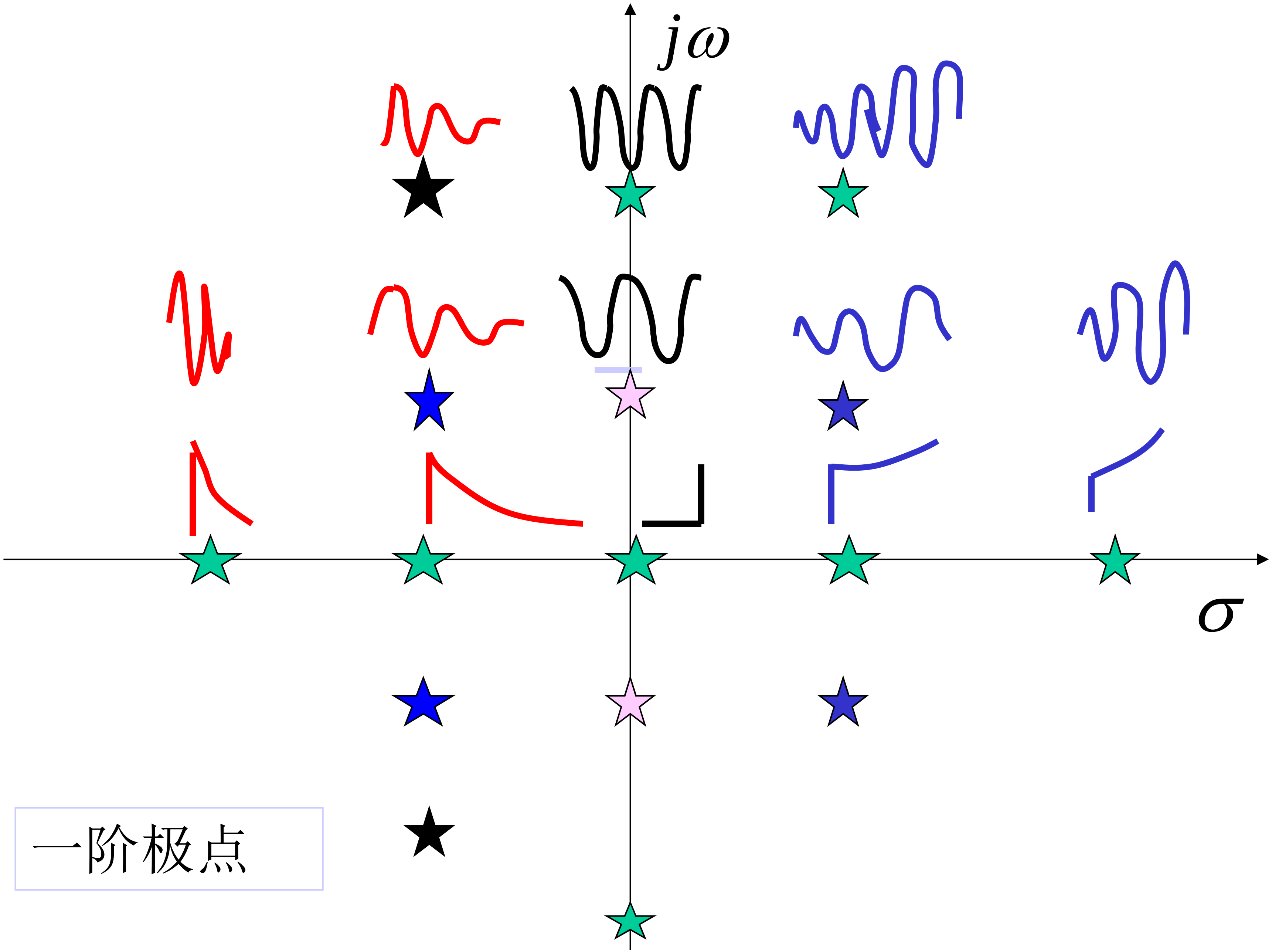
B：$|\sigma|$大,e^{st}幅度变化快；$|w|$大，频率高。

C：一对共轭复频率$\sigma \pm jw$对应一个正弦振荡

$$e^{(\sigma+jw)t}+e^{(\sigma-jw)t}=2e^{\sigma t}\cdot\cos wt$$

5、傅立叶变换是拉氏变换的特殊情况：

即：$\sigma=0$时，$s=jw$



一阶极点

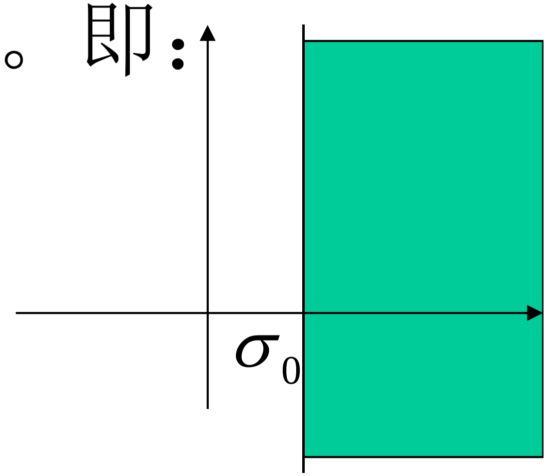
拉氏变换的收敛

一、收敛区：使 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积的 σ 的取值范围，收敛区内拉氏变换存在，收敛区外拉氏变换不存在。(收敛区可记为ROC.)

二、收敛条件：

对$f(t)e^{-\sigma t}$而言，取$t \to \infty$,若当$\sigma > \sigma_0$时，其极限为0，则$f(t)e^{-\sigma t}$在$\sigma > \sigma_0$内是收敛的。即：

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \sigma_0)}$$



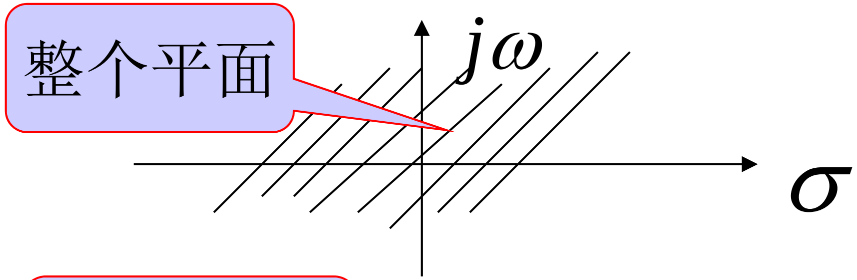
$\sigma > \sigma_0$为$f(t)$的收敛条件，坐标系下 σ_0将S平面划成两个区域。

$\sigma = \sigma_0$为收敛边界（一线）;σ_0为收敛坐标（一点）;$\sigma > \sigma_0$收敛域(半面)

三、几种特殊信号的收敛域

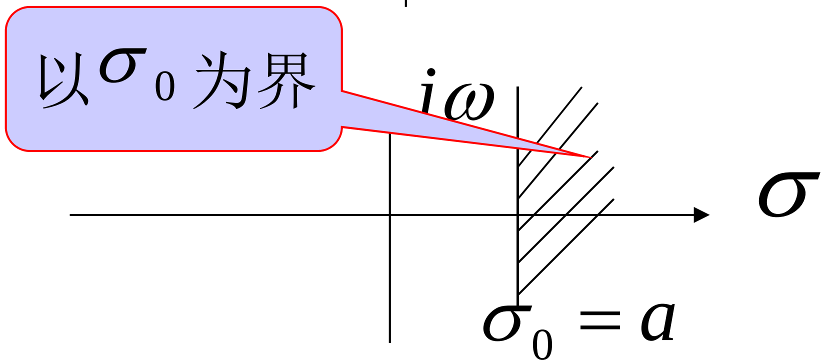
$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \sigma_0)}$$

- 有始有终信号和能量有限信号



- $\sigma_0 = 0$ 或 $\sigma_0 = a$

等幅振荡信号和随时间增长信号 t^n



- 不收敛信号 $e^{t^2}, \quad te^{t^2} \quad (0 \le t \le \infty)$

除非

$$(0 \le t \le T)$$

常用信号的拉氏变换（单边）

一、傅立叶变换与拉普拉斯变换的互推

1、互推条件：函数f(t)的拉普拉斯变换收敛区包含jw轴在内。

2、互推法：$F(s)=F(jw)\Big|_{jw=s}$ ；$F(jw)=F(s)\Big|_{s=jw}$

二、常用信号的拉氏变换

1、指数函数e^{at} (a为常数）

$$F(s)=LT[e^{at}]=\int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt=\frac{1}{s-a}$$

由此公式可得一系列三角代数的拉氏变换：

A：正弦函数$\sin wt$ $\quad \sin wt=\frac{1}{2j}(e^{jwt}-e^{-jwt})$

$$F(s)=LT[\sin wt]=\frac{1}{2j}[\frac{1}{s-jw}-\frac{1}{s+jw}]=\frac{w}{s^2+w^2}$$

常用信号的拉氏变换

B：余弦函数coswt

$$\cos wt = \frac{1}{2}(e^{jwt} + e^{-jwt})$$

$$F(s) = LT[\cos wt] = \frac{1}{2}[\frac{1}{s - jw} + \frac{1}{s + jw}] = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

C：衰减正弦函数 $e^{-at}\sin\ wt$

$$e^{-at}\sin wt = e^{-at}\frac{1}{2j}(e^{jwt} - e^{-jwt}) = \frac{1}{2j}[e^{-(a-jw)t} - e^{-(a+jw)t}]$$

$$F(s) = LT[e^{-at}\sin wt] = \frac{1}{2j}[\frac{1}{s + (a - jw)} - \frac{1}{s + (a + jw)}]$$

$$= \frac{w}{(s+a)^2 + w^2}$$

常用信号的拉氏变换

二、t 的正幂级数$t^n\ (n\in z^+)$

$$F(s)=LT[t^n]=\int_0^\infty t^n e^{-st}dt$$

用分部积分，设：$u=t^n\quad ,dv=e^{-st}dt$

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}dt=\frac{e^{-st}t^n}{-s}\Big|_0^\infty-(-\frac{n}{s})\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt$$

$$=\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt=\frac{n}{s}LT[t^{n-1}]$$

$$\therefore LT[t^n]=\frac{n}{s}LT[t^{n-1}]$$

$n=1$时，$LT[t]=\dfrac{1}{s}LT[u(t)]=\dfrac{1}{s}\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{s^2}$

类推有：$LT[t^n]=\dfrac{n}{s}LT[t^{n-1}]=\dfrac{n}{s}\cdots\dfrac{2}{s}\dfrac{1}{s^2}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

常用信号的拉氏变换

三、冲激函数$A\delta(t)$

$$LT[A\delta(t)] = \int_0^\infty A\delta(t)e^{-st}dt = A \qquad LT[\delta(t)] = 1$$

例：求下列拉氏变换与收敛域：

(1) $2e^{-5t}ch3tu(t)$

解：$f(t) = 2e^{-5t}ch3t$

$$= 2e^{-5t} \cdot \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-3t})$$

$$= e^{-2t} + e^{-8t}$$

收敛域:$\sigma > -2$且$\sigma > -8$

$$\therefore LT[f(t)] = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+8}, (\sigma > 2)$$

(2) $\dfrac{1}{s_2 - s_1}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t})u(t)$

解：收敛域：$\sigma > s_1$且$\sigma > s_2$

即：$\sigma > \max[s_1, s_2]$

$$LT[f(t)] = \frac{1}{s_2 - s_1}[\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2}]$$

$$= \frac{-1}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

常用信号的拉氏变换

$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$u(t)a^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+a}$
t^{n}	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}

§4.4　拉普拉斯反变换(1)

一、部分分式展开法

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s\ +b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

与算子法相似：系数为实数；m,n为正整数。F(s)为假分式时，用分式长除法化为真分式与多项式之和。

例如：$F(s)=\dfrac{6s^3-5s^2+4s+3}{2s^2+s+1}$

$$\begin{array}{r}
3s-4\\
2s^2+s+1\,\overline{)\,6s^3-5s^2+4s+3}\\
6s^3+3s^2+3s\\
\hline
-8s^2+s+3\\
-8s^2-4s-4\\
\hline
5s+7
\end{array}$$

化为：$F(s)=3s-4+\dfrac{5s+7}{2s^2+s+1}$

由$LT^{-1}[s]=\delta'(t)$　,$LT^{-1}[1]=\delta(t)$可得多项式反变换

以下讨论真分式部分的拉氏变换

§4.4　拉普拉斯反变换(2)

1、m<n,D(s)=0无重根且根为实数。D(s)分解因式，有：

$$D(s)=(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_k)\cdots(s-s_n)$$

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_k)\cdots(s-s_n)}$$

$$F(s)=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{k_k}{s-s_k}+\cdots+\frac{k_n}{s-s_n}\qquad（*）$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_n$为待定系数，有以下两种求法：

A:式（*）两边同乘以$(s-s_k)$有：

$$(s-s_k)F(s)=\frac{(s-s_k)k_1}{s-s_1}+\frac{(s-s_k)k_2}{s-s_2}+\cdots+k_k+\cdots+\frac{(s-s_k)k_n}{s-s_n}$$

$F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$　,当$s=s_k$时，有：　$k_k=[(s-s_k)\dfrac{N(s)}{D(s)}]_{s=s_k}$

故：　$LT^{-1}[\dfrac{k_k}{s-s_k}]=k_k e^{s_k t}=\cdots$

§4.4　拉普拉斯反变换(3)

B:由A有：$k_k=[(s-s_k)\dfrac{N(s)}{D(s)}]_{s=s_k}$

显然$s=s_k$时:$(s-s_k)N(s)=0\quad ,D(s)=0$

k_k为$\dfrac{0}{0}$型，可以用罗比塔法则：

$$k_k=\lim_{s\to s_k}[(s-s_k)\frac{N(s)}{D(s)}]_{s=s_k}=\lim_{s\to s_k}[\frac{\frac{d}{ds}(s-s_k)N(s)}{\frac{d}{ds}D(s)}]_{s=s_k}$$

$$\lim_{s\to s_k}[\frac{d}{ds}(s-s_k)N(s)]=\lim_{s\to s_k}[(1-0)N(s)+(s-s_k)N'(s)]=N(s)$$

$$\therefore k_k=[\frac{N(s)}{D'(s)}]_{s=s_k}$$

故：$LT^{-1}[\dfrac{k_k}{s-s_k}]=k_k e^{s_k t}=[\dfrac{N(s)}{D'(s)}]_{s=s_k}e^{s_k t}$

§ 4.4　拉普拉斯反变换(4)

综上，有：

$$LT^{-1}[\frac{N(s)}{D(s)}]=LT^{-1}[\sum_{k=1}^{n}\frac{k_k}{s-s_k}]=\sum_{k=1}^{n}[(s-s_k)\frac{N(s)}{D(s)}]\Big|_{s=s_k}e^{s_k t}$$

或$$LT^{-1}[\frac{N(s)}{D(s)}]=\sum_{k=1}^{n}[\frac{N(s)}{D'(s)}]\Big|_{s=s_k}e^{s_k t}$$

2. $m<n, D(S)=0$包含共轭复根，（设为 $-\alpha\pm j\beta$）

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{B(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}=F_1(s)\frac{1}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}$$

则$F(S)$可以分解为：$F(s)=\dfrac{k_1}{s+\alpha-j\beta}+\dfrac{k_2}{s+\alpha+j\beta}+\cdots$

由$k_k=[(s-s_k)\dfrac{N(s)}{D(s)}]_{s=s_k}$有：

§4.4　拉普拉斯反变换(5)

$$k_1=(s+\alpha-j\beta)F(s)\Big|_{s=-\alpha+j\beta}$$

$$=\left(s+\alpha-j\beta\right)\frac{F_1(s)}{\left(s+\alpha-j\beta\right)\left(s+\alpha+j\beta\right)}\Big|_{s=s_k}=F_1\left(-\alpha+j\beta\right)\Big/2j\beta$$

同理：$k_2=(s+\alpha+j\beta)F(s)\Big|_{s=-\alpha-j\beta}=F_1\left(-\alpha-j\beta\right)\Big/-2j\beta$

$\therefore k_1$与k_2共轭，即 $k_1^*=k_2$ ，设$k_1=A+jB=k_2^*$

令$f_c(t)=LT^{-1}[\dfrac{k_1}{s+\alpha-j\beta}+\dfrac{k_2}{s+\alpha+j\beta}]=LT^{-1}\left[\dfrac{k_1}{s+\alpha-j\beta}+\dfrac{k_1^*}{s+\alpha+j\beta}\right]$

$$f_c(t)=k_1e^{-\alpha t}e^{j\beta t}+k_1^*e^{-\alpha t}e^{-j\beta t}=e^{-\alpha t}(k_1e^{j\beta t}+k_1^*e^{-j\beta t})$$

$$=e^{-\alpha t}[(A+jB)e^{j\beta t}+(A-jB)e^{-j\beta t}]$$

$$=2e^{-\alpha t}[A\cos\beta t-B\sin\beta t]$$

§4.4　拉普拉斯反变换(6)

例：求下列函数的拉氏逆变换

$$1.F(s)=\frac{s^2+7s+10}{s^3+4s^2+3s}$$

解：$F(S)=\dfrac{k_1}{s}+\dfrac{k_2}{s+1}+\dfrac{k_3}{s+3}$

$$k_1=sF(s)\Big|_{s=0}=\frac{10}{1\times 3}=\frac{10}{3}\quad\left(\text{或}k_1=\frac{s^2+7s+10}{(s^3+4s^2+3s)'}\ \Big|_{s=0}=\frac{10}{3}\right)$$

$$k_2=(s+1)F(s)\Big|_{s=-1}=\frac{(-1)^2-7+10}{-1\times(-1+3)}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$\left(\text{或}k_2=\frac{s^2+7s+10}{(s^3+4s^2+3s)'}\ \Big|_{s=-1}=\frac{(-1)^2-7+10}{3\times(-1)^2+8\times(-1)+3}=\frac{-4}{2}=-2\right)$$

$$k_3=(s+3)F(s)\Big|_{s=-3}=\frac{(-3)^2-7\times(-3)+10}{-3\times(-3+1)}=\frac{-1}{3}$$

§ 4.4 拉普拉斯反变换(7)

$$\left(或\ k_3 = \frac{s^2 + 7s + 10}{(s^3 + 4s^2 + 3s)'} \Big|_{s=-3} = \frac{-1}{3} \right)$$

$$\therefore F(s) = \frac{10}{3s} + \frac{-2}{s+1} + \frac{-1}{3(s+3)}$$

$$\therefore f(t) = \left[\frac{10}{3} - 2e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-3t} \right] u(t)$$

§4.4　拉普拉斯反变换(8)

2. $F(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{s^2+3s+2}$

解：$F(s)$化为真分式$F(s)=s+2+\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

$$\therefore F(s)=s+2+\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}$$

$$k_1=(s+1)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-1}=2$$

$$k_2=(s+2)\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-2}=-1$$

$$\therefore F(s)=s+2+\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+[2e^{-t}-e^{-2t}]u(t)$$

§4.4　拉普拉斯反变换(9)

$$3.F(s)=\frac{s^2+3}{(s^2+2s+5)(s+2)}$$

解：

$$F(s)=\frac{s^2+3}{(s+1+j2)(s+1-j2)(s+2)}$$

$$=\frac{k_0}{s+2}+\frac{k_1}{s+1-j2}+\frac{k_2}{s+1+j2}$$

$$k_0=(s+2)F(s)\Big|_{s=-2}=\frac{(-2)^2+3}{(-2)^2+2\times(-2)+5}=\frac{7}{5}$$

$$k_1=(s+1-j2)\frac{s^2+3}{(s+1+j2)(s+1-j2)(s+2)}\Big|_{s=-1+j2}=\frac{-1+j2}{5}$$

即：$A=\frac{-1}{5},B=\frac{2}{5}$；又 $f_c(t)=2e^{-at}(A\cos\beta t-B\sin\beta t)$

$$f(t)=\frac{7}{5}e^{-2t}+2e^{-t}(-\frac{1}{5}\cos 2t-\frac{2}{5}\sin 2t)$$

$$=[\frac{7}{5}e^{-2t}-2e^{-t}(\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{2}{5}\sin 2t)]u(t)$$

§4.4　拉普拉斯反变换(10)

3. 若m<n,D(s)=0有重根（设s_1为p重根），有：

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-s_1)^p B(s)}$$

$$=\frac{k_{1p}}{(s-s_1)^p}+\frac{k_{1(p-1)}}{(s-s_1)^{p-1}}+\cdots+\frac{k_{11}}{s-s_1}+\cdots+\frac{A(s)}{B(s)}$$

其中$\frac{A(s)}{B(s)}$为展开式中与 s_1无关的部分，对 k_{1p}可有：

$$k_{1p}=[(s-s_1)^p F(s)]_{s=s_1}$$

但其他k值不可用类似方法，因如此分母将出现零，而得不到k值。

令$F_1(s)=(s-s_k)^p F(s)$,有：

$$F_1(s)=k_{1p}+(s-s_1)k_{1(p-1)}+\ldots+k_{11}\left(s-s_1\right)^{p-1}+\frac{A(s)}{B(s)}(s-s_1)^p \quad ※$$

对上式求导有：$F_1'(s)=k_{1(p-1)}+2k_{1(p-2)}(s-s_1)\ldots+k_{11}\left(s-s_1\right)^{p-2}+\ldots$

§ 4.4 拉普拉斯反变换(11)

$$\therefore k_{1(p-1)} = \frac{d}{ds} F_1(s)\Big|_{s=s_1} \qquad k_{1(p-2)} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2} F_1(s)\Big|_{s=s_1}$$

$$\therefore k_{1r} = \frac{1}{(p-r)!}\frac{d^{p-r}}{ds^{p-r}} F_1(s)\Big|_{s=s_1} \quad (r = p, p-1, p-2 \cdots 1)$$

又$F_1(s) = (s-s_1)^p F(s)$

$$\boxed{\therefore k_{1r} = \frac{1}{(p-r)!}\frac{d^{p-r}}{ds^{p-r}} [(s-s_1)^p \frac{N(s)}{D(s)}]\Big|_{s=s_1} \quad (r = p, p-1, p-2 \cdots 1)}$$

由于 $LT^{-1}[\frac{k_{1r}}{(s-s_1)^r}] = \frac{k_{1r}}{(r-1)!} t^{r-1} e^{s_1 t}$

$$\therefore LT^{-1}[\frac{N(s)}{D(s)}] = [\frac{k_{1p}}{(p-1)!} t^{p-1} + \frac{k_{1(p-1)}}{(p-2)!} t^{p-2} + \ldots + k_{12} t + k_{11}] e^{s_1 t} + LT^{-1}[\frac{A(s)}{B(s)}]$$

§4.4　拉普拉斯反变换(12)

例：求下列单边拉氏反变换：

$$1.F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^4(s+2)s} \qquad \therefore f(t)=[(\frac{-1}{6}t^3-3t+72)e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}]u(t)$$

解：$$F(s)=\frac{k_{14}}{(s+1)^4}+\frac{k_{13}}{(s+1)^3}+\frac{k_{12}}{(s+1)^2}+\frac{k_{11}}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{s}$$

$$k_{14}=\frac{1}{(4-4)!}\frac{d^{4-4}}{ds^{4-4}}[(s-s_1)^4F(s)]_{s=s_1=-1}=(s+1)^4F(s)\Big|_{s=-1}=-1$$

$$k_{13}=\frac{1}{(4-3)!}\frac{d^{4-3}}{ds^{4-3}}[(s-s_1)^4F(s)]_{s=s_1=-1}=\frac{d}{ds}[\frac{s^2+2s+3}{s^2+2s}]_{s=-1}=0$$

$$k_{12}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[\frac{s^2+2s+3}{s^2+2s}]_{s=-1}=-3 \qquad k_{11}=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{ds^3}[\frac{s^2+2s+3}{s^2+2s}]_{s=-1}=72$$

$$k_2=\frac{(s+2)(s^2+2s+3)}{(s+1)^4(s+2)s}\Big|_{s=-2}=\frac{-3}{2} \qquad k_3=\frac{s(s^2+2s+3)}{(s+1)^4(s+2)s}\Big|_{s=0}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore f(t)=[\frac{-1}{(4-1)!}t^{4-1}+\frac{0}{(4-2)!}t^{4-2}+\frac{-3}{(4-3)!}t^{4-3}+72]e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}$$

§4.4 拉普拉斯反变换(13)

$$2.F(s)=\frac{1}{(s^2+2)(s^2+4)s^2}$$

解：令$a=s^2$,有：$F_1(a)=\dfrac{1}{(a+2)(a+4)a}=\dfrac{k_1}{a+2}+\dfrac{k_2}{a+4}+\dfrac{k_3}{a}$

$$k_1=(a+2)F_1(a)\big|_{a=-2}=-\frac{1}{4}\qquad k_2=(a+4)F_1(a)\big|_{a=-4}=\frac{1}{8}$$

$$k_3=aF_1(a)\big|_{a=0}=\frac{1}{8}$$

$$F_1(a)=\frac{1}{(a+2)(a+4)a}=\frac{-1}{4}\frac{1}{a+2}+\frac{1}{8}\frac{1}{a+4}+\frac{1}{8}\frac{1}{a}$$

$$F(s)=\frac{-1}{4\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}+\frac{1}{16}\frac{2}{s^2+2^2}+\frac{1}{8}\frac{1}{s^2}$$

$$\sin wt\leftrightarrow\frac{w}{s^2+w^2}\qquad t\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$$

$$\therefore\ f(t)=[\frac{-\sqrt{2}}{8}\sin\sqrt{2}t+\frac{1}{16}\sin 2t+\frac{1}{8}t]u(t)$$

§4.4　拉普拉斯反变换(14)

二、留数法（围线积分法）：

1、零极点与零极图：

a、零点：使$F(s)=0$的s值。若$F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$，则$N(s)=0$的解为$F(s)$的零点。

b、极点：使$F(s)=\infty$的s值。若$F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$，则$D(s)=0$的解为$F(s)$的极点。

c、s平面上用×表示极点，○表示零点

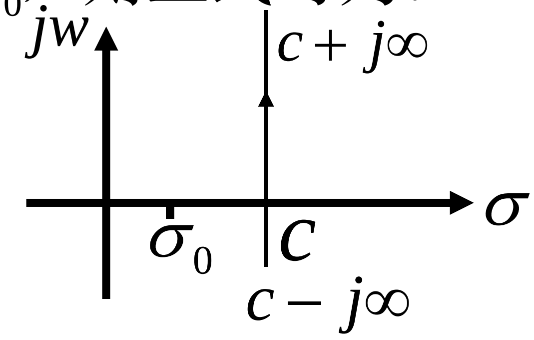
d、不同的极点位置对应不同的时间函数f(t)。

2、围线积分法：

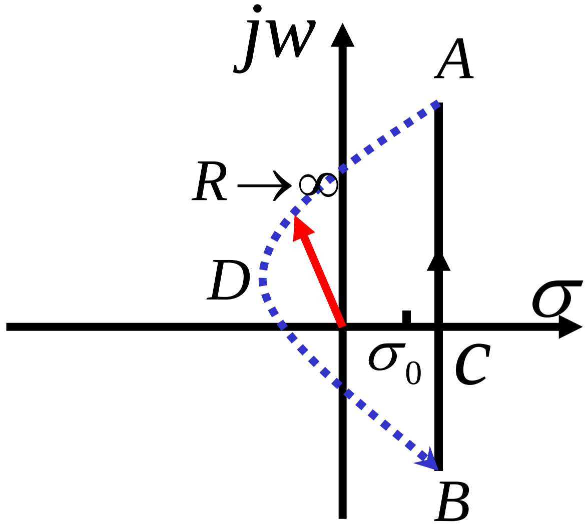
拉氏反变换为：　$f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$

a：若$F(s)$的收敛区为$\sigma>\sigma_0$，则上式积分上、下限的实部在$\sigma>\sigma_0$内。对特定的$F(s)$，令$c=\sigma$，其中$c>\sigma_0$，则上式写为：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds$$



§4.4　拉普拉斯反变换(15)



上积分不易求，作辅助线如图，由图有：

$$\oint_{c_c} F(s)e^{st}ds = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds + \int_{c_R} F(s)e^{st}ds$$

其中c_c为整个积分路径$ADBA$，c_R表示$R \to \infty$的部分ADB,对该围线积分用留数定理有：

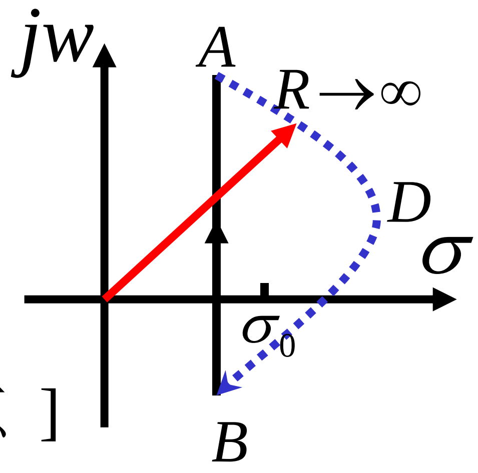
$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{c_c} F(s)e^{st}ds = \sum[F(s)e^{st},\text{直线}\ s = c + jw\text{左边所有极点}\ ]$$

若$\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$由约当引理，有：$\int_{c_R} F(s)e^{st}ds = 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi j}\oint_{c_c} F(s)e^{st}ds$$

$$= \sum \mathrm{Re}\,s[F(s)e^{st},\text{直线}\ s = c + jw\text{左边所有极点}\ ]$$

§ 4.4 拉普拉斯反变换(16)



b、若F(s)的收敛域为$\sigma < \sigma_0$同上理，有：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi j}\oint_{c_c} F(s)e^{st}ds$$

$$= \sum \mathrm{Re}\, s[F(s)e^{st}, 直线\, s = c + jw 右边所有极点\ ]$$

c.综上有： $f(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\, s_i$

i.当F(s)为有理函数时，若 s_k 为一阶极点，有：

$$\boxed{\mathrm{Re}\, s_k = [(s - s_k)F(s)e^{st}]_{s=s_k}}$$

ii.当F(s)为有理函数时，若 s_k 为p阶极点，有：

$$\boxed{\mathrm{Re}\, s_k = \frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}(s - s_k)^p F(s)e^{st}\right]_{s=s_k}}$$

iii.由于冲激函数及其导数不满足$\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$ 的条件，不可用留数法求之，即用留数法时F(s)要为真分式。

§4.4　拉普拉斯反变换(17)

例：求下列F(S)的原函数：

$$1: F(s)=\frac{s+2}{s(s+1)^2}$$

解：其极点为0与-1，分别求留数，有：

$$\operatorname{Re}s_1=[(s-s_1)F(s)e^{st}]_{s=s_1=0}=\frac{s+2}{(s+1)^2}\Big|_{s=0}=2$$

$$\operatorname{Re}s_2=\frac{1}{(2-1)!}[\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}(s-s_2)^2F(s)e^{st}]_{s=s_2=-1}$$

$$=\frac{d}{ds}\left[\frac{s+2}{s}e^{st}\right]_{s=-1}=\frac{[-2+s(s+2)t]e^{st}}{s^2}\Big|_{s=-1}$$

$$=[-(2+t)e^{-t}]u(t)$$

$$\therefore f(t)=\operatorname{Re}s_1+\operatorname{Re}s_2=[2-(2+t)e^{-t}]u(t)$$

§4.4 拉普拉斯反变换(18)

$$2: F(s)=\frac{s+3}{(s+2)(s+1)^2}$$

解：其极点分别为一阶极点-2与二阶极点-1，分别求留数，有：

$$\mathrm{Re}\, s_1=[(s-s_1)F(s)e^{st}]_{s=s_1=-2}=e^{-2t}$$

$$\mathrm{Re}\, s_2=\frac{1}{(2-1)!}[\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}(s-s_2)^2F(s)e^{st}]_{s=s_2=-1}$$

$$=\frac{d}{ds}\left[\frac{s+3}{s+2}e^{st}\right]_{s=-1}=2te^{-t}-e^{-t}$$

$$\therefore f(t)=\mathrm{Re}\, s_1+\mathrm{Re}\, s_2=[e^{-2t}-e^{-t}+2te^{-t}]u(t)$$

§4.3　拉普拉斯变换的性质(1)

一、线性：若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s)$　　$f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$有

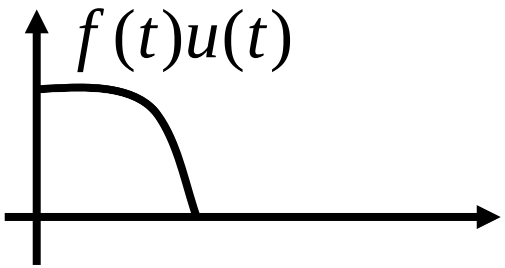
$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

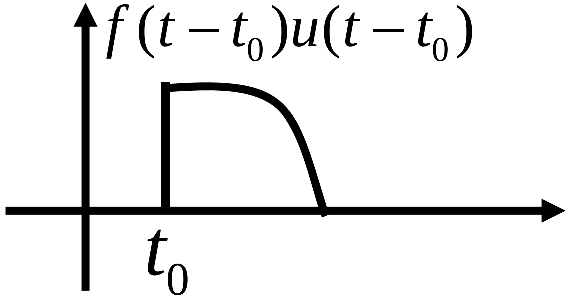
例：求f(t)=coswt的拉氏变换F(s)

$$LT[\cos wt] = \frac{1}{2} LT[e^{jwt} + e^{-jwt}] = \frac{1}{2}[\frac{1}{s-jw} + \frac{1}{s+jw}] = \frac{s}{s^2+w^2}$$

二、时间平移

设$f(t) \leftrightarrow F(s)$则：$f(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$

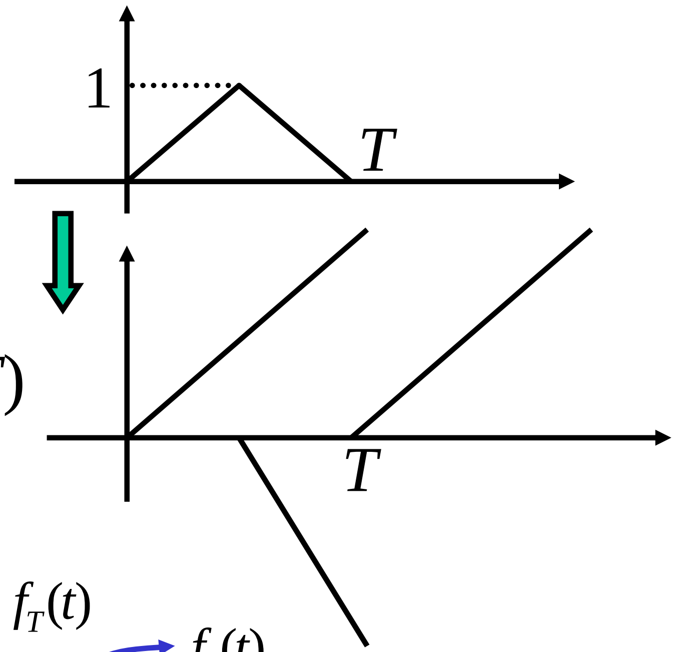




即：若时域中波形延迟t_0，则其拉氏变换乘以e^{-st_0}。如$u(t-t_0)$，

其拉氏变换为$\frac{1}{s} \bullet e^{-st_0}$

§ 4.3　拉普拉斯变换的性质(2)



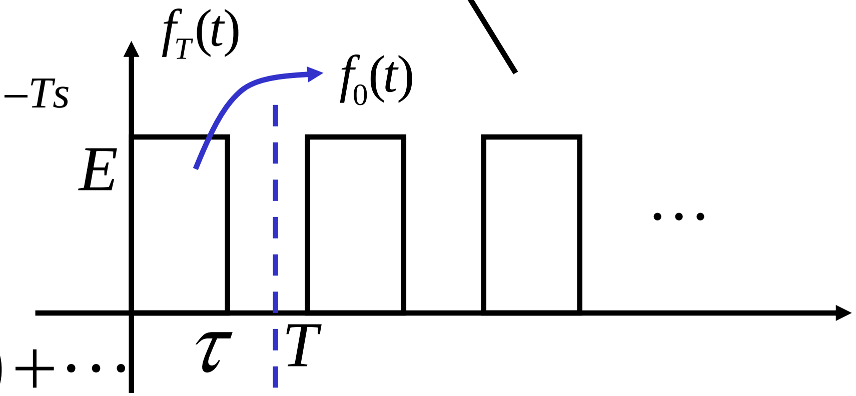
例1：求右图三角脉冲的拉氏变换

解：该三角脉冲可分解成三个斜坡函数：

$$f(t)=\frac{2}{T}tu(t)-\frac{4}{T}(t-\frac{T}{2})u(t-\frac{T}{2})+\frac{2}{T}(t-T)u(t-T)$$

由拉氏变换的线性和延时性有：

$$LT[f(t)]=\frac{2}{Ts^2}-\frac{4}{Ts^2}e^{-\frac{T}{2}s}+\frac{2}{Ts^2}e^{-Ts}$$



例2：求因果矩形脉冲的拉氏变换。

解: $f_T(t)=f_0(t)+f_0(t-T)+f_0(t-2T)+\cdots$

由时间平移特性有：

$$F_T(s)=F_0(s)+F_0(s)e^{-sT}+F_0(s)e^{-2sT}+\cdots$$

$$=F_0(s)(1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots)=F_0(s)\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

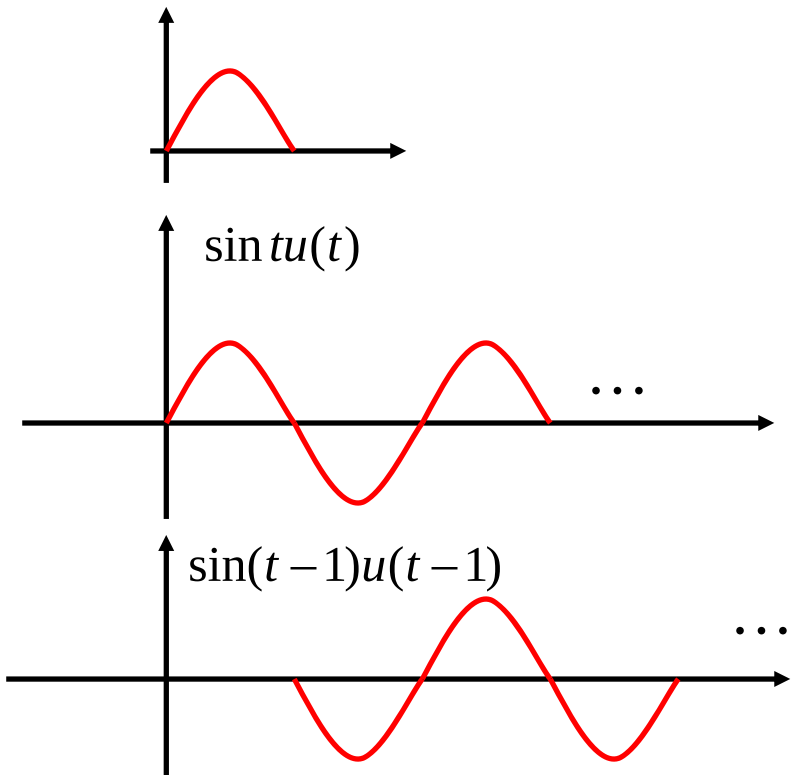
公式

§ 4.3　拉普拉斯变换的性质(3)

对$f_0(t)$有： $F_0(s)=\int_0^T f_0(t)e^{-st}dt=\int_0^\tau Ee^{-st}dt=\frac{E}{s}(1-e^{s\tau})$

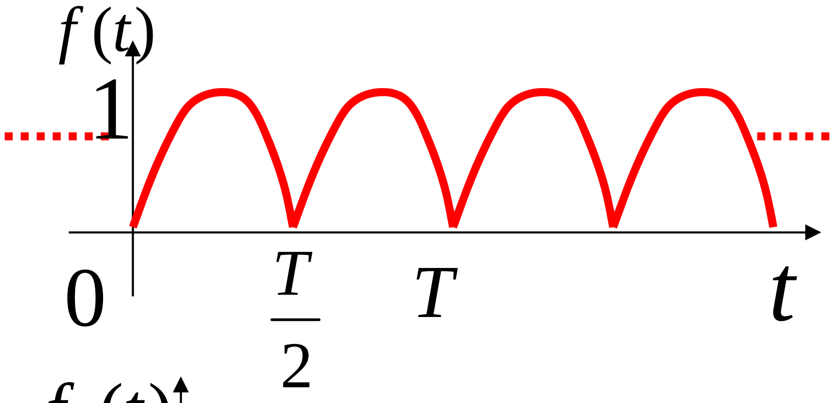
$$\therefore F_T(s)=\frac{E}{s}\frac{1-e^{-s\tau}}{1-e^{-sT}}$$

又如下页图示信号的拉氏变换，同样用平移特性。

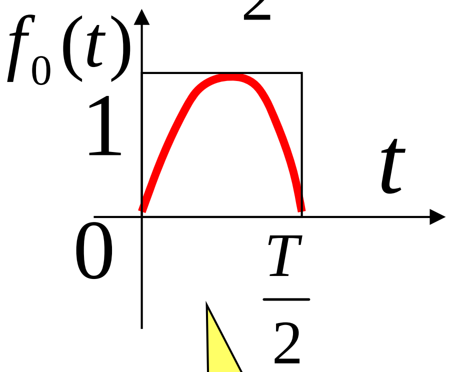


§ 4.3 拉普拉斯变换的性质(4)

求周期信号的拉氏变换



$$\frac{\omega(1+e^{-\frac{T}{2}})}{S^2+\omega^2}\ \frac{1}{1-e^{-s\frac{T}{2}}}$$



$$\sin\frac{\pi}{T}t[u(t)-u(t-\frac{T}{2})]$$

LT

$$\frac{\omega(1+e^{-\frac{T}{2}})}{S^2+\omega^2}$$

信号加窗
第一周期

$\omega=\frac{2\pi}{T}$

§4.3　拉普拉斯变换的性质(5)

三：尺度变换

$$\text{若} f(t) \leftrightarrow F(s) \qquad \text{有：} f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$$

例：若 $f(t)u(t) \leftrightarrow F(s) \quad a > 0, b > 0$

证明：$f(at-b)u(at-b) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}s}$

解：a:先进行标度变换再时移

$$\because f(t)u(t) \leftrightarrow F(s) \qquad \therefore f(at)u(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad ※$$

对f(t)在时间轴上压缩a倍后，沿t轴时移b有：

$$f(at-b)u(at-b) \leftrightarrow f\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]u\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]$$

在※式下，标度变换已完成，现于※式上推迟 b/a 即可

$$f\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]u\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right] \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}s}$$

§4.3　拉普拉斯变换的性质(6)

b.先时间平移再标度变换

$$f(t-b)u(t-b) \leftrightarrow F(s)e^{-sb}$$

对t进行尺度变换a倍，有：

$$f(at-b)u(at-b) \leftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})e^{-\frac{b}{a}s}$$

4、频率平移

若$f(t) \leftrightarrow F(s)$　　有$f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s-s_0)$

$$如:\sin wt \leftrightarrow \frac{w}{s^2+w^2}有$$

$$e^{at}\sin wt \leftrightarrow \frac{w}{(s-a)^2+w^2}$$

§4.3　拉普拉斯变换的性质(7)

5、时间微分

$$\text{若} f(t) \leftrightarrow F(s) \qquad \text{有}: \frac{df}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$

$$\text{证明}: LT[\frac{df}{dt}] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

$$\text{令} u = e^{-st}, dv = \frac{df}{dt} dt, \text{用分部积分法有}:$$

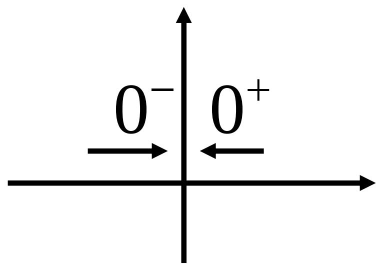
$$LT[\frac{df}{dt}] = f(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = -f(0^-) + sF(s)$$

$$\text{同理有}: LT[\frac{d^2 f}{dt^2}] = s[sF(s) - f(0^-)] - \frac{df}{dt}\Big|_{t=0^-} = s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

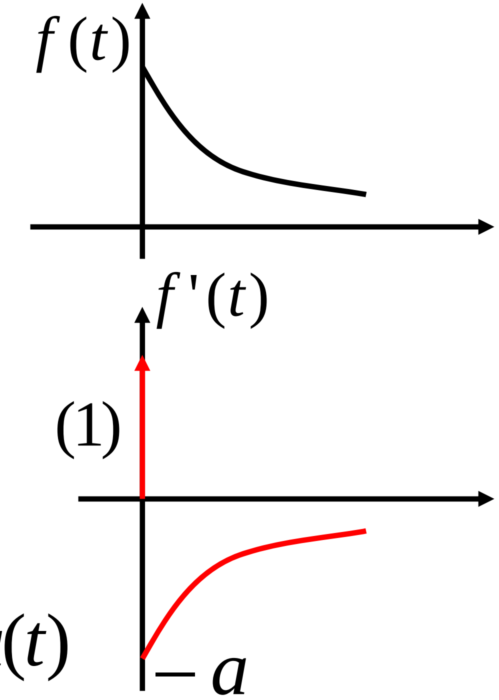
用数学归纳法或类推均可证明:

$$LT[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{(n-2)} f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$$

注意0^+系统与0^-系统的差别.



§ 4.3　拉普拉斯变换的性质(8)



例：求 $f(t)=e^{-at}u(t)$的导数的拉氏变换(a>0)

$$解: F(s)=LT[e^{-at}u(t)]=\frac{1}{s+a}$$

a.采用 0^- 系统

i.用定义求解

$$\frac{df(t)}{dt}=\frac{d}{dt}[e^{-at}u(t)]=e^{-at}\delta(t)-ae^{-at}u(t)=\delta(t)-ae^{-at}u(t)$$

$$LT[\frac{df(t)}{dt}]=LT[\delta(t)-ae^{-at}u(t)]=1-\frac{a}{s+a}=\frac{s}{s+a}$$

ii.用微分特性求解

$$LT[\frac{df(t)}{dt}]=sF(s)-f(0^-)=sF(s)-0=\frac{s}{s+a}$$

§ 4.3 拉普拉斯变换的性质(9)

b.采用0^+系统时:

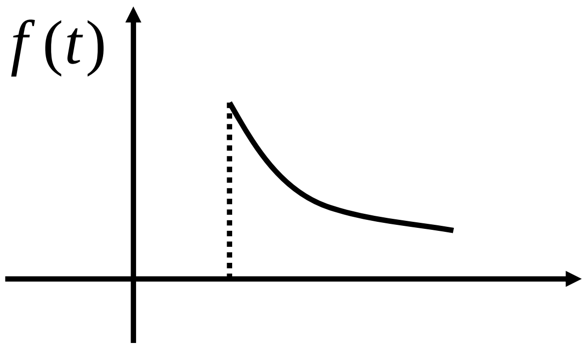
i.用定义求解

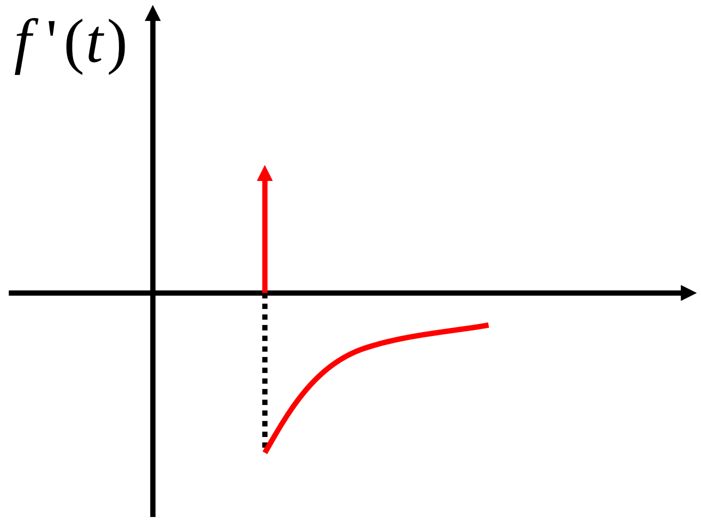
$$\frac{df(t)}{dt}=\frac{d}{dt}[e^{-at}u(t)]=-ae^{-at}u(t)=-ae^{-at}u(t)\leftrightarrow-\frac{a}{s+a}$$

ii.用微分特性求解

$$LT[\frac{df(t)}{dt}]=sF(s)-f(0^+)=sF(s)-1=-\frac{a}{s+a}$$

思考：$f(t)=e^{-a(t-2)}u(t-2)$的导数的拉氏变换 $(a>0)$

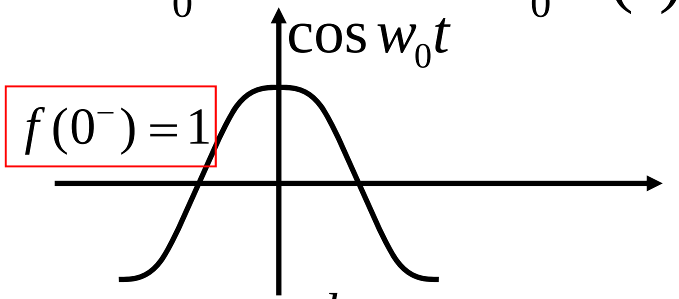


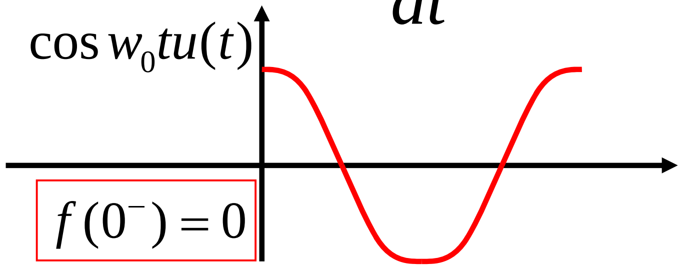


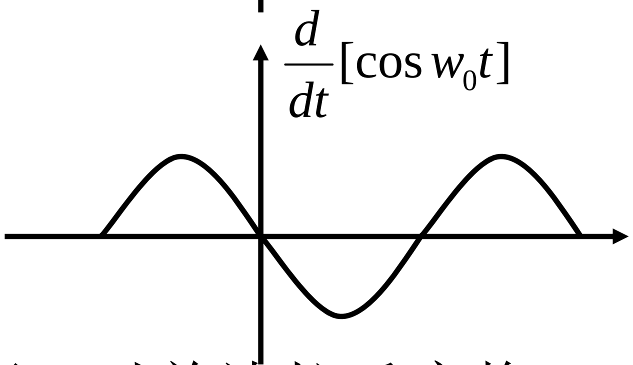
§ 4.3 拉普拉斯变换的性质(10)

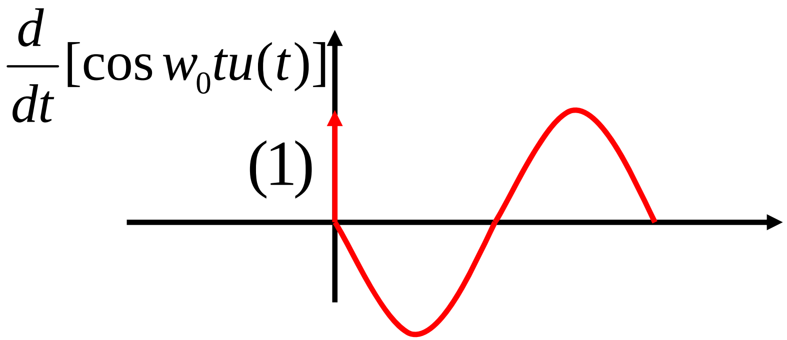
例:求下列拉氏变换

$1.\cos w_0 t$ $\quad$ $2.\cos w_0 t u(t)$ $\quad$ $3.\dfrac{d}{dt}[\cos w_0 t]$ $\quad$ $4.\dfrac{d}{dt}[\cos w_0 t u(t)]$









解：对单边拉氏变换

$$F(s)=LT[\cos w_0 t]=LT[\cos w_0 t u(t)]=\frac{s}{s^2+w_0^2}$$

$$LT[\frac{d}{dt}(\cos w_0 t)]=LT[-w_0\sin w_0 t]=-\frac{w_0^2}{s^2+w_0^2}$$

§ 4.3　拉普拉斯变换的性质(11)

$$LT[\frac{d}{dt}(\cos w_0 tu(t))] = LT[\delta(t) - w_0 \sin w_0 tu(t)] = \frac{s^2}{s^2 + w_0^2}$$

若用微分特性有：

$$LT[\frac{d}{dt}(\cos w_0 t)] = sF(s) - f(0^-) = s \bullet \frac{s}{s^2 + w_0^2} - 1 = -\frac{w_0^2}{s^2 + w_0^2}$$

$$LT[\frac{d}{dt}(\cos w_0 tu(t))] = sF(s) - f(0^-) = s \bullet \frac{s}{s^2 + w_0^2} - 0 = \frac{s^2}{s^2 + w_0^2}$$

§4.3　拉普拉斯变换的性质(12)

6、时间积分

若$f(t)\leftrightarrow F(s)$有：$\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$以及$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}+\frac{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau}{s}$

证明：$LT[\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau]=\int_{0^-}^{\infty}[\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau]e^{-st}dt$

令$u=\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau$　　　$dv=e^{-st}dt$,用分部积分法有 ：

$$\int_{0^-}^{\infty}[\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau]e^{-st}dt=\frac{-1}{s}e^{-st}\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\Big|_{0^-}^{\infty}+\frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$=0+\frac{1}{s}F(s)$$

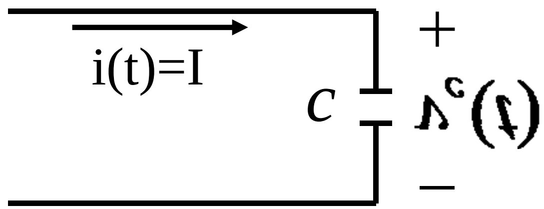
$\therefore\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$ (可推广至n重积分下变换为$\frac{F(s)}{s^n}$)

而$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)d\tau+\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}+\frac{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau}{s}$

§4.3　拉普拉斯变换的性质(13)

例：图中，电容的充电电流为i(t)=I,电容的初始状态为

$v_c(0^-)=v_0$ 求电容电压的拉氏变换



解: $v_c(t)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{0^-} i(\tau)d\tau+\frac{1}{c}\int_{0^-}^{t} i(\tau)d\tau$

$$=v_c(0^-)+\frac{1}{c}\int_{0^-}^{t} i(\tau)d\tau$$

$$\therefore LT[v_c(t)]=LT[v_c(0^-)+\frac{1}{c}\int_{0^-}^{t} i(\tau)d\tau]$$

用积分性质有: $V_c(s)=\frac{v_c(0^-)}{s}+\frac{I(s)}{cs}=\frac{v_0}{s}+\frac{I(s)}{cs}$

又 $I(s)=LT[I]=\frac{I}{s}$ 　　　$\therefore V_c(s)=\frac{v_0}{s}+\frac{I}{cs^2}$

对上式反变换有 : $v_c(t)=v_0+\frac{I}{c}t \qquad ,t\geq 0$

§4.3　拉普拉斯变换的性质(14)

7、复频域积分与微分：

$$若 f(t) \leftrightarrow F(s) 有:$$

$$tf(t) \leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds} \quad ; \qquad \frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^{\infty} F(s)ds$$

8、对参数的积分与微分：

$$若 f(t,a) \leftrightarrow F(t,a) \quad (a 为参变量), 则:$$

$$\frac{\partial f(t,a)}{\partial a} \leftrightarrow \frac{\partial F(t,a)}{\partial a} \quad 及 \quad \int_{a_1}^{a_2} f(t,a)da \leftrightarrow \int_{a_1}^{a_2} F(s,a)da$$

§4.3　拉普拉斯变换的性质(15)

9、初值定理：（出值与终值多用于检查响应函数是否符合系统的初始条件）

若$f(t)$与$f'(t)$可以进行拉氏变换，且$f(t)\leftrightarrow F(s)$，有：

$$f(0^+)=\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

证明：由时域的微分特性有：

$$sF(s)-f(0^-)=\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt=\int_{0^-}^{0^+}\frac{df}{dt}e^{-st}dt+\int_{0^+}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt$$

$$=f(t)\Big|_{0^-}^{0^+}+\int_{0^+}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt=f(0^+)-f(0^-)+\int_{0^+}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt$$

$$\therefore sF(s)=f(0^+)+\int_{0^+}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt$$

$$s\to\infty\text{时},\lim_{s\to\infty}\left[\int_{0^+}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt\right]=\int_{0^+}^{\infty}\frac{df}{dt}\underbrace{\boxed{[\lim_{s\to\infty}e^{-st}]}}_{}dt=0$$

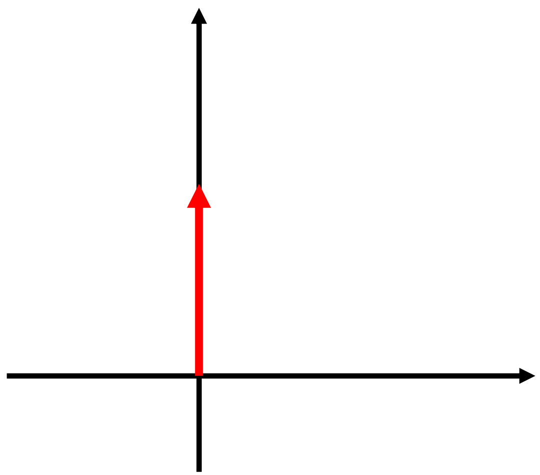
$$\therefore f(0^+)=\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

§4.3　拉普拉斯变换的性质(16)

特别地：f(t)在t=0处有冲激及其导数，即：

$$LT[f(t)] = a_0 + a_1 s + \dots + a_p s^p + F_p(s)$$

初值定理表示为：$f(0^+) = \lim\limits_{s\to\infty} sF_p(s)$



例：若$F(s) = \dfrac{2s}{s+1}$求$f(0^+)$

解：$F(s) = 2 - \dfrac{2}{s+1}$

$$\therefore\ f(0^+) = \lim_{s\to\infty}\left[s\bullet\left(-\frac{2}{s+1}\right)\right] = -2$$

§4.3 拉普拉斯变换的性质(17)

10、终值定理

若$f(t)$与$f'(t)$可以进行拉氏变换，且$f(t) \leftrightarrow F(s)$，有：

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

证明：初值定理中已证明 $sF(s) = f(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$

上式下，$s \to 0$时有：

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(0^+) + \lim_{s\to 0}\left[\int_{0^+}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt\right] = f(0^+) + \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0^+)$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$\text{即} f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

终值定理的应用是有条件的，即使$\lim_{t\to\infty} f(t)$存在：F(s)的极点全部位于s左半平面，但允许原点处 F(s)有一阶极点。

§4.3 拉普拉斯变换的性质(18)

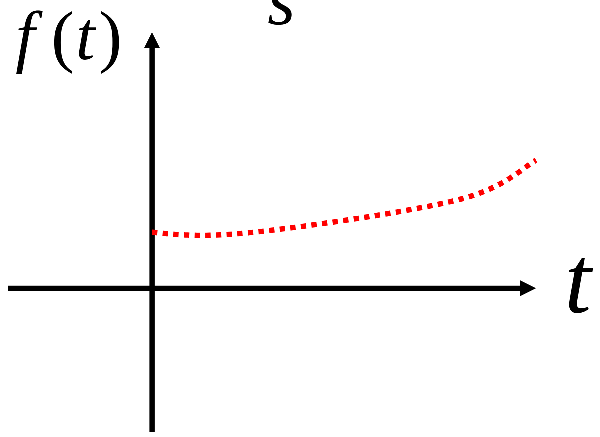
例: $F(s)=\dfrac{a}{s(s+a)},a>0,$ 求 $f(\infty)$

解: $F(s)$的极点为$s_1=-a,s_2=0,$

即极点在左半平面且原点极点单阶

$\therefore$ 终值为 $f(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} sF(s)=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{as}{s(s+a)}=1$

相反若$F(s)=\dfrac{a}{s^2}$或$F(S)=\dfrac{s}{s+a},(a<0)$是无终值的.



§ 4.3　拉普拉斯变换的性质(19)

11、卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s)$　，　$f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$ 则：

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s) \quad \text{———— 时域卷积}$$

$$f_1(t)\, f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s) \quad \text{———— 频域卷积}$$

由于 $r(t) = h(t) * e(t)$

两边同时取拉氏变换有:R(s)=H(s)E(s)

$$\begin{tikzcd}
h(t) \arrow[dr] \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & H(s) \arrow[dl] \\
& r(t) = h(t) * e(t) \arrow[r, leftrightarrow] & R(s) = H(s)E(s) & \\
e(t) \arrow[ur] \arrow[rrr, leftrightarrow] & & & E(s) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

§4.3 拉普拉斯变换的性质(20)

例：已知$LT\left[e^{-at}\right]=\dfrac{1}{s+a}$　求$F(s)=\dfrac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$的原函数$f(t)$

解：令$LT\left[e^{-\alpha t}\right]=LT[f_1(t)]=\dfrac{1}{s+\alpha}=F_1(s)$

$$LT\left[e^{-\beta t}\right]=LT[f_2(t)]=\frac{1}{s+\beta}=F_2(s)$$

$$LT^{-1}[F(s)]=LT^{-1}[F_1(s)F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t)$$

$$=\int_0^t e^{-\alpha t}e^{-\beta(t-\tau)}d\tau=\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$$

当$\alpha=\beta$,即$f(t)$有重根时有　：

$$\lim_{\beta\to\alpha}\left[\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}\right]=\lim_{\beta\to\alpha}\left[\frac{0-(-t)e^{-\beta t}}{1-0}\right]=te^{-\alpha t}$$

§4.5　线性系统的拉氏变换分析法（1）

一、积分、微分方程的拉氏变换一般取 0^- 系统

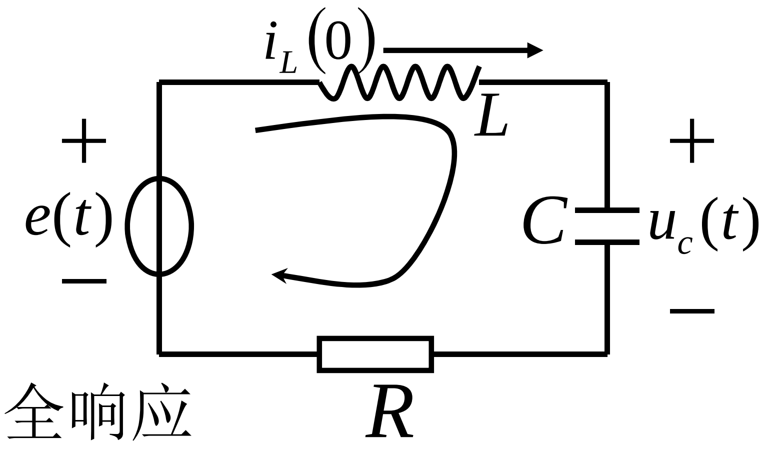
1、微、积分方程的变换步骤

A、根据系统列写系统方程

B、将上方程变换到s域

C 、取s域下系统的响应R(s)

D、将R(s)反变换为r(t)，则r(t)为全响应



例：上图所示系统，求i的拉氏变换I(s)。

(1)列写微分方程　$: L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = e(t)$

(2)取拉氏变换: 取0^-系统

由微分性质　$: LT[L\dfrac{di(t)}{dt}] = LsI(s) - Li_L(0)$

由积分性质　$: LT[\dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau] = \dfrac{I(s)}{cs} + \dfrac{u_c(0)}{s}$

§4.5　线性系统的拉氏变换分析法（2）

所以原方程的拉氏变换式为：

$$LsI(s)-Li_L(0)+RI(s)+\frac{1}{cs}I(s)+\frac{u_c(0)}{s}=E(s)$$

$$\therefore I(s)=\frac{E(s)+Li_L(0)-\dfrac{u_c(0)}{s}}{Ls+R+\dfrac{1}{cs}}\left(=\frac{E(s)}{Ls+R+\dfrac{1}{cs}}+\frac{Li_L(0)-\dfrac{u_c(0)}{s}}{Ls+R+\dfrac{1}{cs}}\right)$$

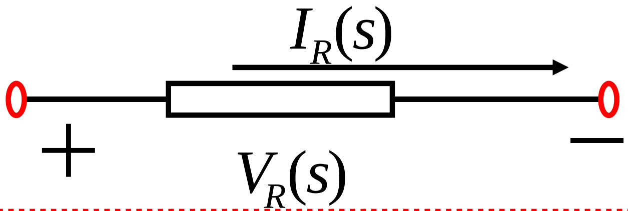
显然，上过程中，初始条件 $i_L(0), u_c(0)$ 被自动计入 .若对 $I(s)$ 反变换得 $i(t)$，则 $i(t)$ 为全响应 .

§4.5　线性系统的拉氏变换分析法（3）

2、s域元件模型

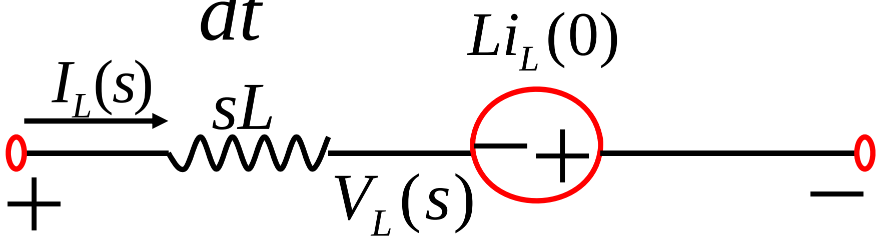
A、回路分析下的s域元件模型

$$v_R(t)=Ri_R(t)\xleftrightarrow{\text{拉氏变换}}V_R(s)=RI_R(s)$$



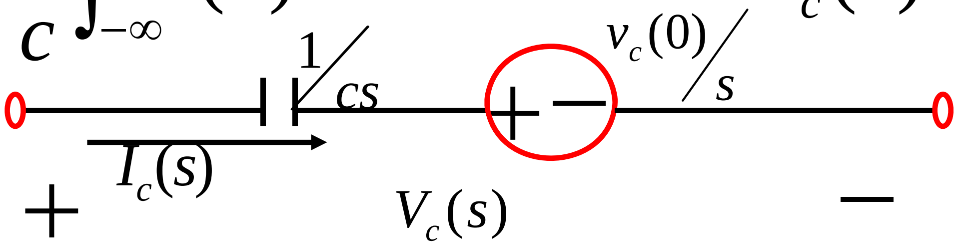
电阻

$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}\xleftrightarrow{\text{拉氏变换}}V_L(s)=sLI_L(s)-Li_L(0)$$



电感

$$v_c(t)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau\xleftrightarrow{\text{拉氏变换}}V_c(s)=\frac{I_c(s)}{cs}+\frac{u_c(0)}{s}$$

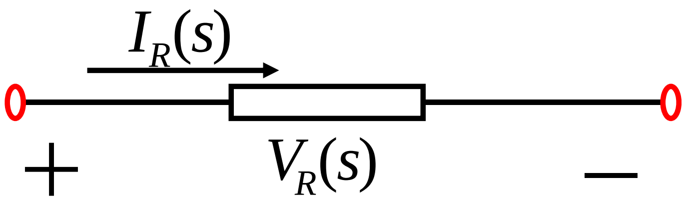


电容

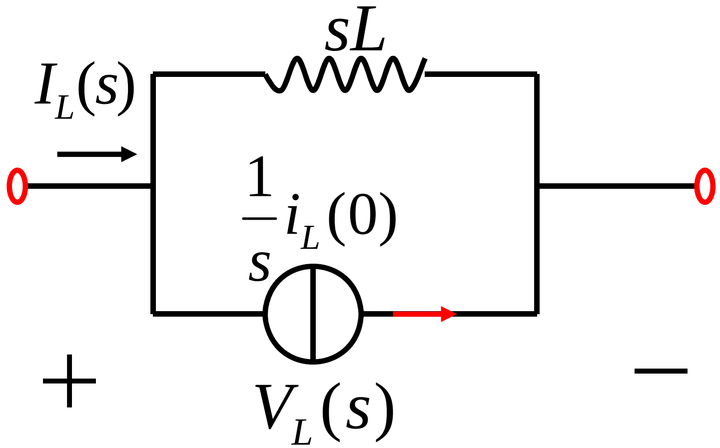
§ 4.5　线性系统的拉氏变换分析法（4）

B、节点分析下的s域元件模型

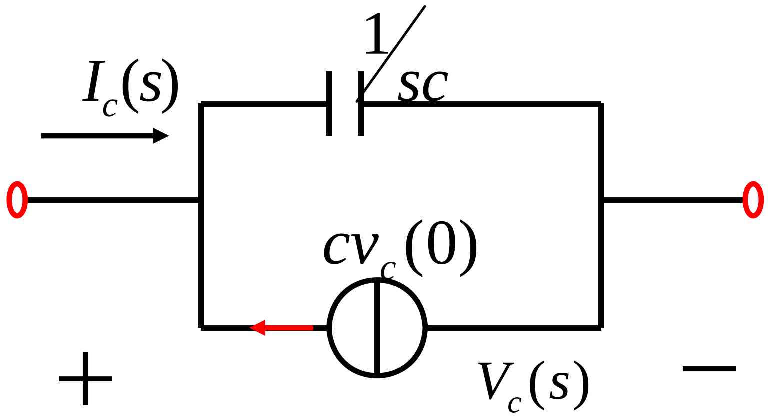
电阻 : $I_R(s)=\dfrac{1}{R}V_R(s)$



电感: $I_L(s)=\dfrac{1}{sL}V_L(s)+\dfrac{1}{s}i_L(0)$

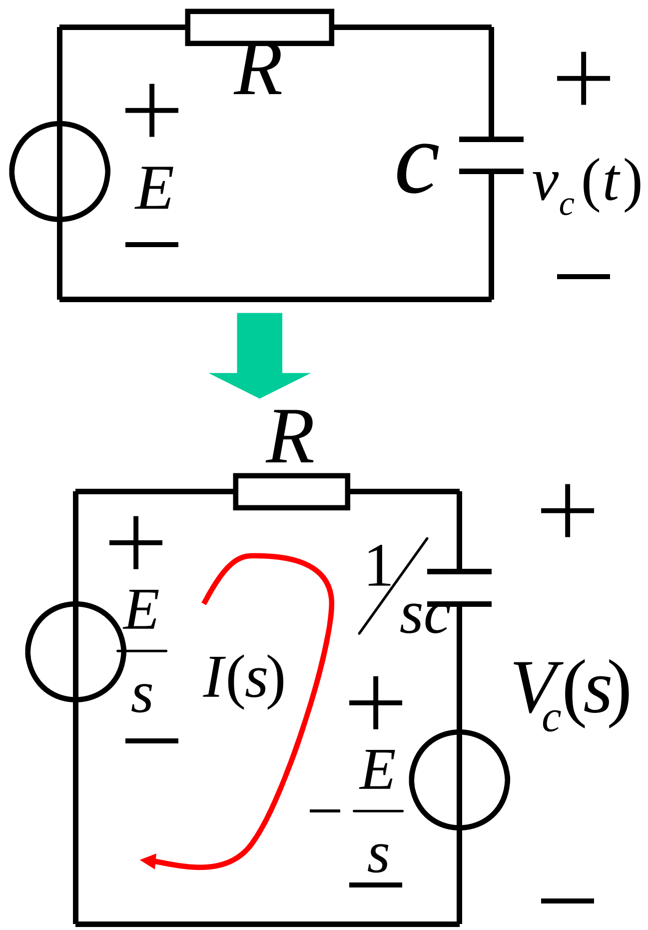


电容 : $I_c(s)=scV_c(s)-cv_c(0)$



§4.5　线性系统的拉氏变换分析法（5）

C、对于任意复杂电路，均可以根据上两种模型列写s域下的回路与节点方程。



例：用s域元件模型法求下图的 $v_c(t)$

解：作出s域网络模型如图，有：

$$\left(R+\frac{1}{sc}\right)I(s)=\frac{E}{s}-\left(-\frac{E}{s}\right)$$

$$\therefore I(s)=\frac{2E}{s\left(R+\frac{1}{sc}\right)}$$

$$V_c(s)=\frac{I(s)}{sc}-\frac{E}{s}=\frac{2E}{s(scR+1)}-\frac{E}{s}$$

$$=E\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s+\frac{1}{Rc}}\right)\Longrightarrow v_c(t)=[E-2Ee^{-\frac{t}{Rc}}]u(t)$$

§4.5　线性系统的拉氏变换分析法（6）

二、从信号分解的角度看拉氏变换

1: 零状态响应$r_{zs}(t)$

拉氏变换下激励信号被分解为无穷多个具有 e^{st} 形式的指数分量之和。依照系统的叠加性和齐次性，求系统的零状态响应，可如下处理。

$a.$求激励函数$e(t)$的拉氏变换$E(s)$.(即将激励分解成指数分量)

$b.$求转移函数 $H(s)$

$c.$求$R(s)=E(s)H(s)$:即求每一分量的响应之和(叠加).

$d.$将$R(s)$反变换到$r(t)$,即得$r_{zs}(t)$.

※ 转移函数H(s)

$a.H(s)$的定义:系统的零状态响应的拉氏变换与激励的拉氏变换之比.$(h(t)\leftrightarrow H(s))$

(初始值取0,相当于取0^+系统)

§4.5　线性系统的拉氏变换分析法（7）

b.由于求零状态响应时，取0^+ 系统，则：

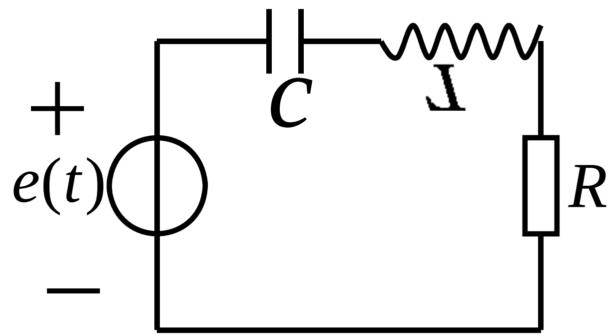
电感的运算阻抗$Z_L(s)=Ls\ (\because v_L(s)=sLI_L(s)-\overset{0}{\boxed{Li_L(0^+)}})$

电容的运算阻抗$Z_c(s)=\dfrac{1}{cs}\ (\because v_c(s)=\dfrac{1}{sc}I_c(s)+\underset{0}{\boxed{\dfrac{1}{s}v_c(0^+)}})$

c.若系统有多激励，在计算各激励源单独作用时，应分别用该激励源相对响应的$H_i(s)$。

(一般而言各 $H_i(s)$分母相同)

例：求右图电路的转移函数H(s)。



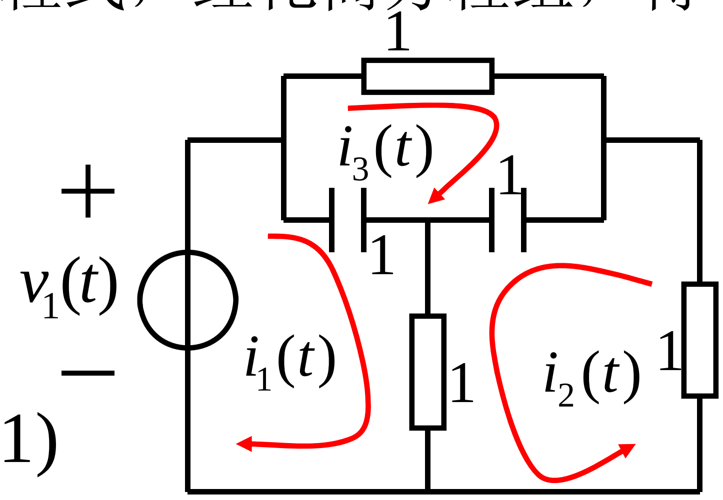
$$解:H(s)=\frac{I(s)}{E(s)}=\frac{1}{\frac{1}{sc}+Ls+R}=\frac{sc}{s^2Lc+Rcs+1}$$

$$\left[(\frac{1}{sc}+Ls+R)I(s)=E(s)\right]\Rightarrow\cdots$$

§4.5　线性系统的拉氏变换分析法（8）

当电路较复杂时，用电路理论列写有关方程式，经化简方程组，得出H(s)。如下例：

例1：求右电路图中$H(s)=\dfrac{I_2(s)}{V_1(s)}=?$



解：列回路方程：

$$\begin{cases}(\frac{1}{s}+1)I_1(s)+I_2(s)-\frac{1}{s}I_3(s)=V_1(s) & (1)\\ I_1(s)+(\frac{1}{s}+1+1)I_2(s)+\frac{1}{s}I_3(s)=0 & (2)\\ -\frac{1}{s}I_1(s)+\frac{1}{s}I_2(s)+(\frac{2}{s}+1)I_3(s)=0 & (3)\end{cases}$$

由(2)、(3)式有：

$$\begin{cases}I_3(s)=\dfrac{3s+1}{s^2+2s+1}I_2(s)\\ I_1(s)=-\dfrac{2s^2+2s+1}{s^2+2s+1}I_2(s)\end{cases}$$

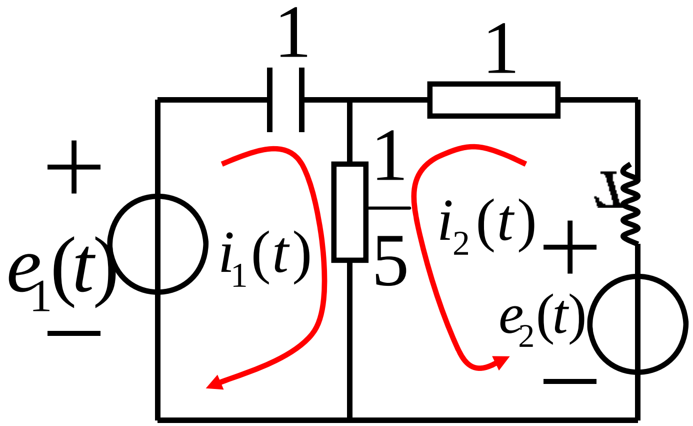
左式代入(1),解得:

$$H(s)=\frac{I_2(s)}{V_1(s)}=-\frac{s^2+2s+1}{s^2+5s+1}$$

§ 4.5　线性系统的拉氏变换分析法（9）

例2: 求图示系统的零状态响应$i_2(t)$.其中$e_1(t)=3e^{-t}u(t)$,

$e_2(t)=e^{-2t}u(t)$.



解: 先求$e_1(t)$单独作用下的$i_{21}(t)$,

再求$e_2(t)$单独作用下的$i_{22}(t)$,

然后$i_2(t)=i_{21}(t)+i_{22}(t)$即所求.

$a.\ e_1(t)$单独作用下,列回路方程,有:

$$\begin{cases}(\frac{1}{s}+\frac{1}{5})I_1(s)+\frac{1}{5}I_2(s)=E_1(s)\\ \frac{1}{5}I_1(s)+(\frac{1}{2}s+1+\frac{1}{5})I_2(s)=0\end{cases} \Rightarrow H_1(s)=\frac{I_2(s)}{E_1(s)}=-\frac{2s}{s^2+7s+12}$$

$$E_1(s)=LT[e_1(t)]=\frac{3}{s+1} \qquad \therefore I_{21}(s)=H_1(s)E_1(s)=\frac{8}{s+4}-\frac{9}{s+3}+\frac{1}{s+1}$$

$$\therefore i_{21}(t)=LT^{-1}[I_{21}(s)]=[8e^{-4t}-9e^{-3t}+e^{-t}]u(t)$$

§4.5　线性系统的拉氏变换分析法（10）

$b.\ e_2(t)$单独作用下，s域内列回路方程：

$$\begin{cases}(\frac{1}{s}+\frac{1}{5})I_1(s)+\frac{1}{5}I_2(s)=0\\ \frac{1}{5}I_1(s)+(\frac{1}{2}s+1+\frac{1}{5})I_2(s)=E_2(s)\end{cases} \Longrightarrow H_1(s)=\frac{I_2(s)}{E_2(s)}=\frac{2(s+5)}{s^2+7s+12}$$

$$E_1(s)=LT[e_2(t)]=\frac{1}{s+2}$$

$$\therefore I_{22}(s)=H_2(s)E_2(s)=\frac{1}{s+4}-\frac{4}{s+3}+\frac{3}{s+2}$$

$$\therefore i_{22}(t)=LT^{-1}[I_{22}(s)]=[e^{-4t}-4e^{-3t}+3e^{-2t}]u(t)$$

$$\therefore i_2(t)=i_{21}(t)+i_{22}(t)=\ldots$$

§4.5　线性系统的拉氏变换分析法（11）

2、零输入响应 $r_{zi}(t)$

(1)可将系统的初始条件视为等效源（不常用）

(2)由系统转移函数H(s)确定

a. S域内，系统对单位冲激函数的响应就是H(s)

$$\because R(s)=H(s)E(s)$$

当$E(s)=1$ ，即$e(t)=\delta(t)$时:

$$R(s)=H(s)$$

即:系统对单位冲激函数的响应就是H(s)

b. 系统的初始储能，可视为冲激源。其响应模式由H(s)极点确定:

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{K_1}{s-\lambda_1}+\frac{K_2}{s-\lambda_2}+\ldots+\frac{K_n}{s-\lambda_n}$$

$$\therefore h(t)=k_1e^{\lambda_1 t}+k_2e^{\lambda_{21} t}+\ldots+k_ne^{\lambda_n t}$$

§4.5　线性系统的拉氏变换分析法（12）

相应地，系统的零输入响应为：

$$\boxed{r_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_{21} t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}}$$

其中 $c_1, c_2 \ldots c_n$待定 ,由系统的初始状态确定

★ $H(s)$中若有一对相同的零极点,即: $H(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$可写为:

$$H(s) = \frac{(s-\lambda_k)A(s)}{(s-\lambda_k)B(s)} \neq \frac{A(s)}{B(s)}$$

$(s-\lambda_k)$是不可约分的,因约去后,$H(s)$的零极点都不是完全的,

特别是$D(s)=0$不再是系统的特征方程.

§4.5　线性系统的拉氏变换分析法（13）

例：输入$e(t)=e^{-t}u(t)$,初始条件$r(0)=2, r'(0)=1, H(s)=\dfrac{s+5}{s^2+5s+6}$,求全响应。

解：　a.　求系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$

$$H(s)=\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}\text{极点为}s_1=-2, s_2=-3,\text{有}:$$

$$r_{zi}(t)=[c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}]u(t)$$

$$\begin{cases} r_{zi}(0)=c_1+c_2=2 \\ r_{zi}'(0)=-2c_1-3c_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=7 \\ c_2=-5 \end{cases}$$

$$\therefore r_{zi}(t)=[7e^{-2t}-5e^{-3t}]u(t)$$

b.　求系统的零状态响应 $r_{zs}(t)$　　$\because E(s)=LT[e^{-t}]=\dfrac{1}{s+1}$

$$\therefore R(s)=H(s)E(s)=\frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{2}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

$\therefore r_{zs}(t)=[2e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t}]u(t)$　　　$c.r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\ldots$

§4.7 由系统函数的极零点分布决定时域特性

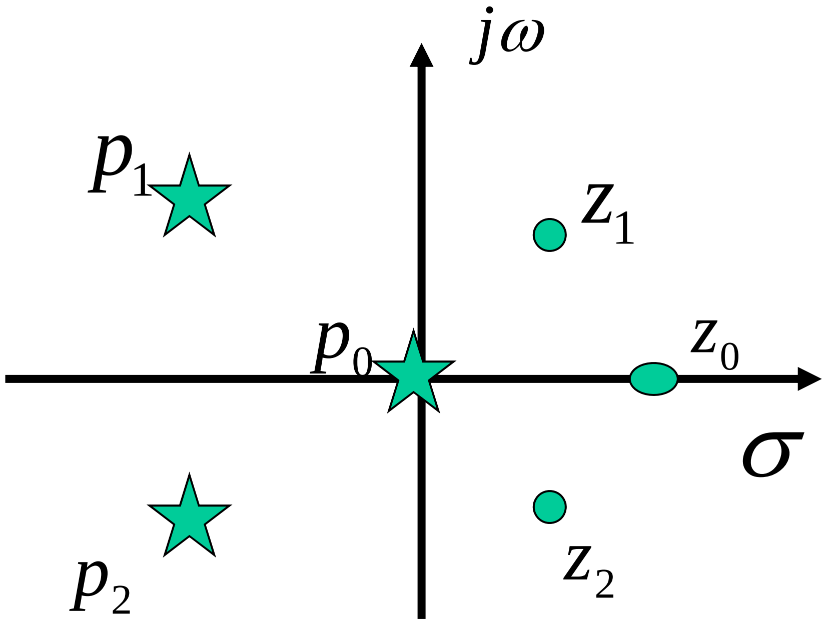
1、由H(s)确定零、极点

$$极点: \lim_{s\to p} H(s)=\infty, 用\times表示$$

$$零点: \lim_{s\to z} H(s)=0, 用o表示$$

2、由确定零、极点确定H(s)

$$H(s)=\frac{k\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$



（1）时域特性——h(t)

$$H(s)=\frac{k\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

反变换

$$h(t)=L^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}\right]$$

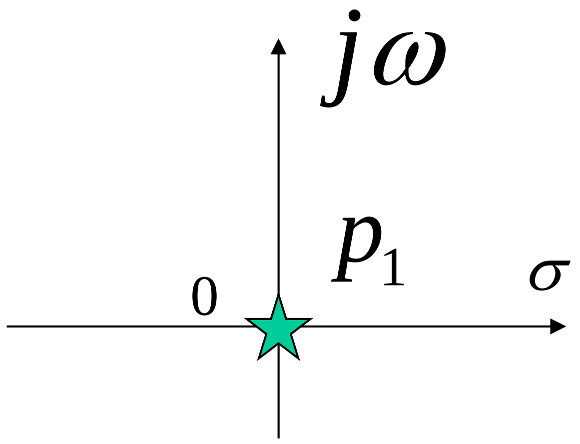
Ki与零点分布有关

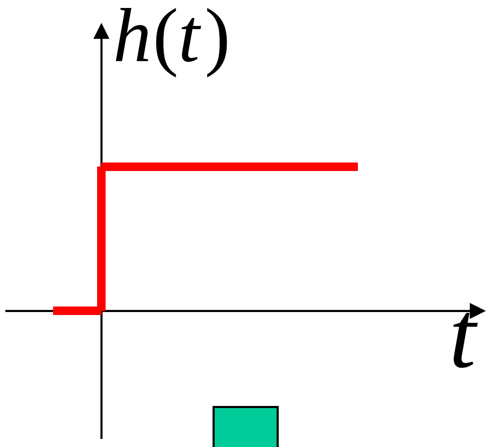
$$=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{p_i t}=\sum_{i=1}^{n}h_i(t)$$

总特性

第 i个极点决定

（2） 几种典型的极点分布——
(a)一阶极点在原点

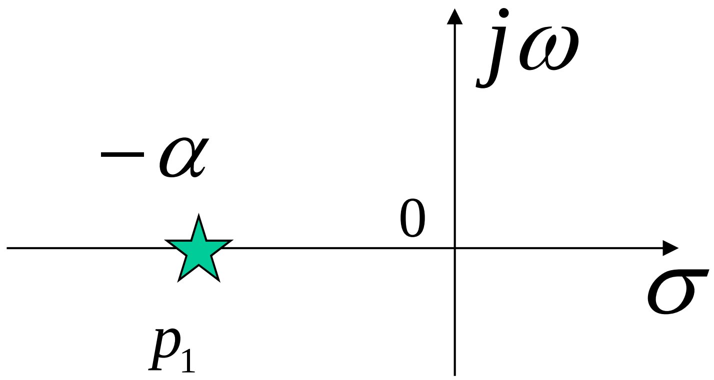


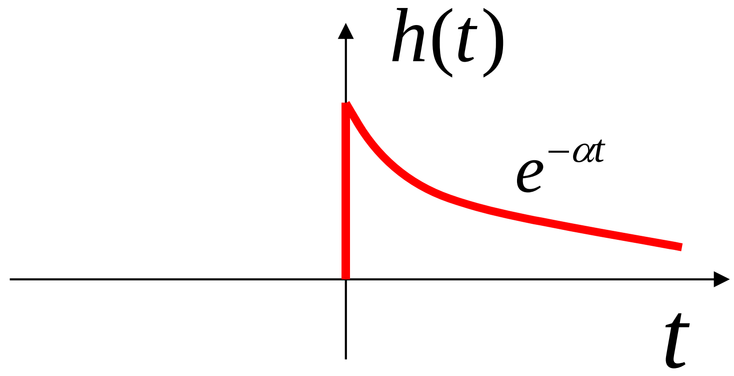


$$H(s) = \frac{1}{S}$$

$$h(t) = u(t)$$

（2）几种典型的极点分布——(b)一阶极点在负实轴

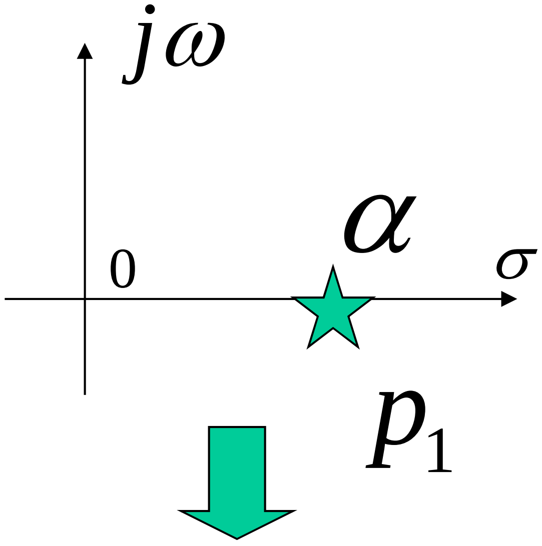


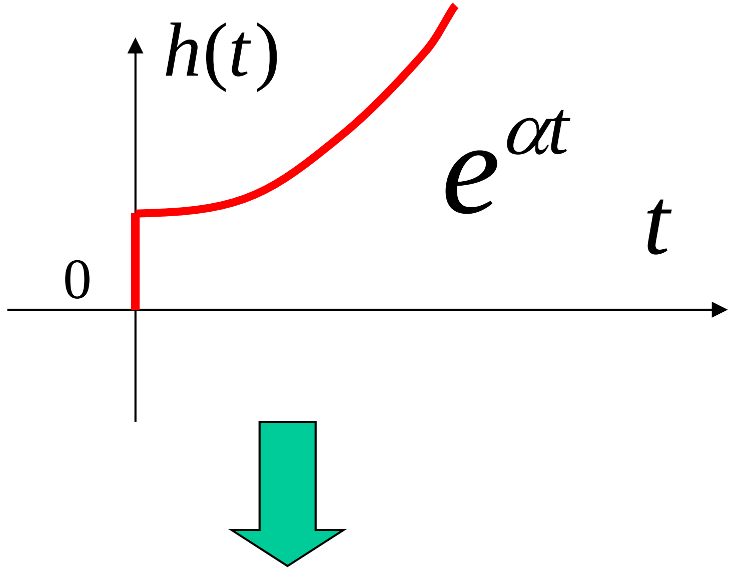


$$H(s) = \frac{1}{S+\alpha}$$

$$h(t) = e^{-\alpha t}$$

（2） 几种典型的极点分布——
(c)一阶极点在正实轴

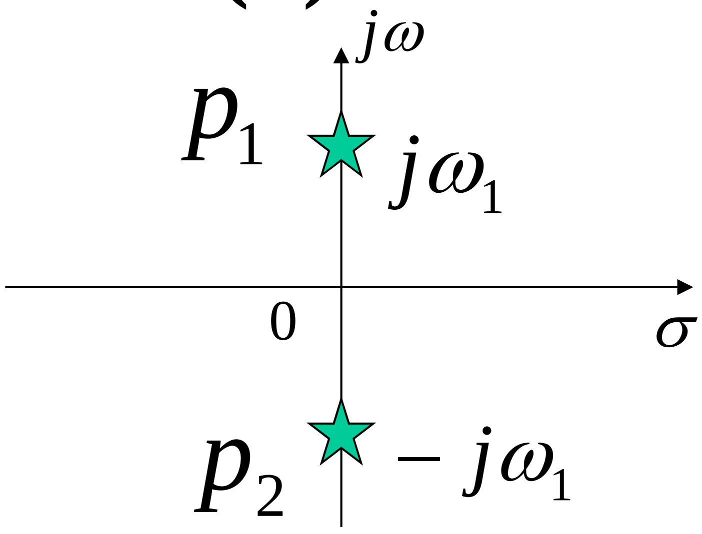


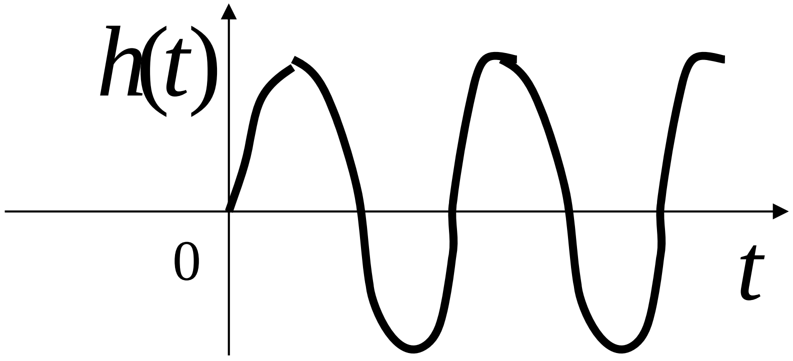


$$H(s)=\frac{1}{S-\alpha}$$

$$h(t)=e^{\alpha t}$$

（2） 几种典型的极点分布——(d)一阶共轭极点在虚轴上



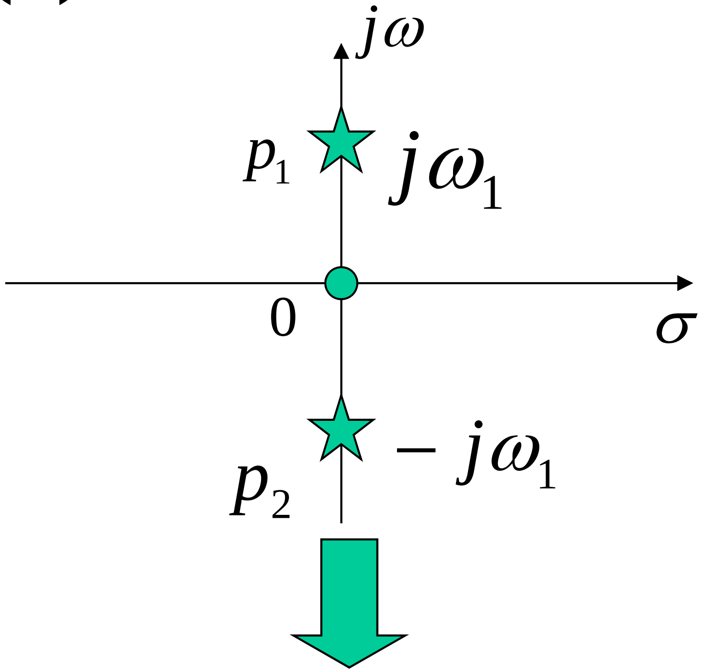


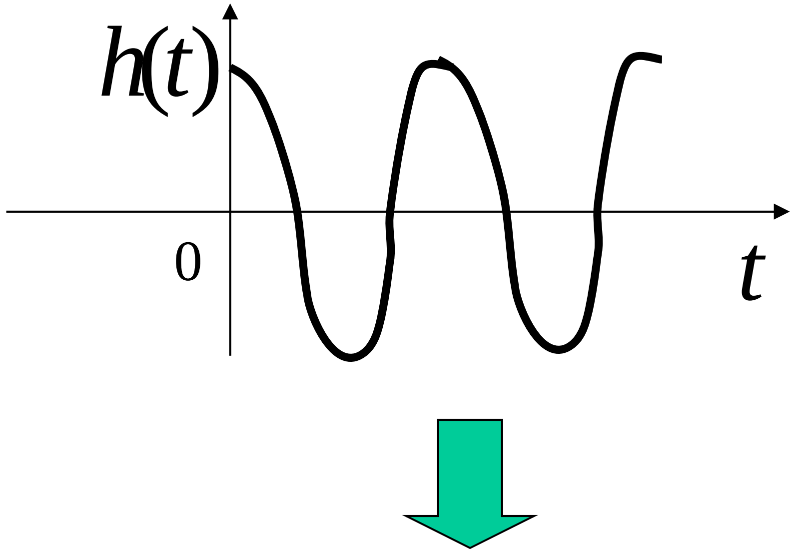
$$H(s)=\frac{\omega_1}{S^2+\omega_1^2}$$

$$h(t)=\sin\omega_1 t.u(t)$$

（2） 几种典型的极点分布——

(e)共轭极点在虚轴上，原点有一零点

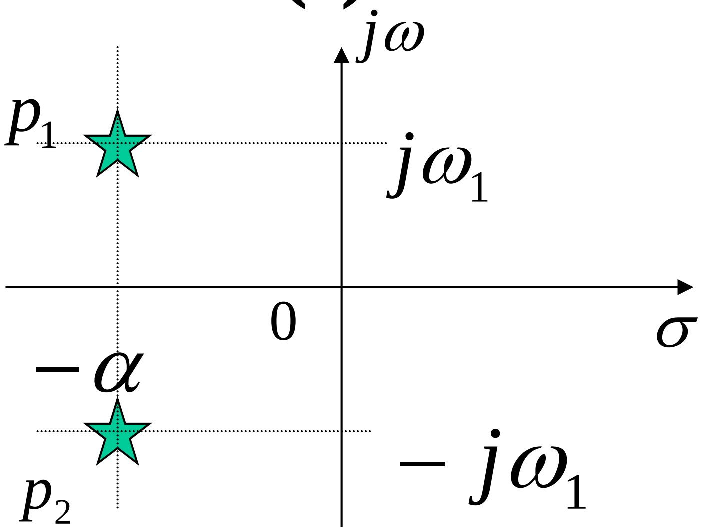


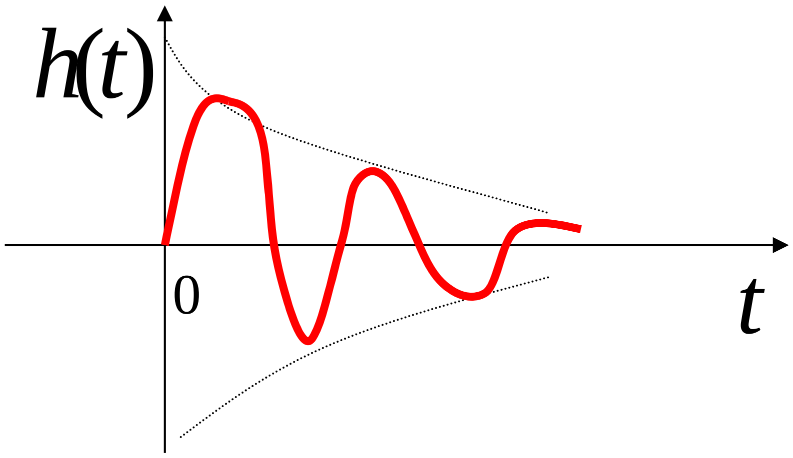


$$H(s) = \frac{S}{S^2 + \omega_1^2}$$

$$h(t) = \cos \omega_1 t . u(t)$$

（2） 几种典型的极点分布——
(f)共轭极点在左半平面

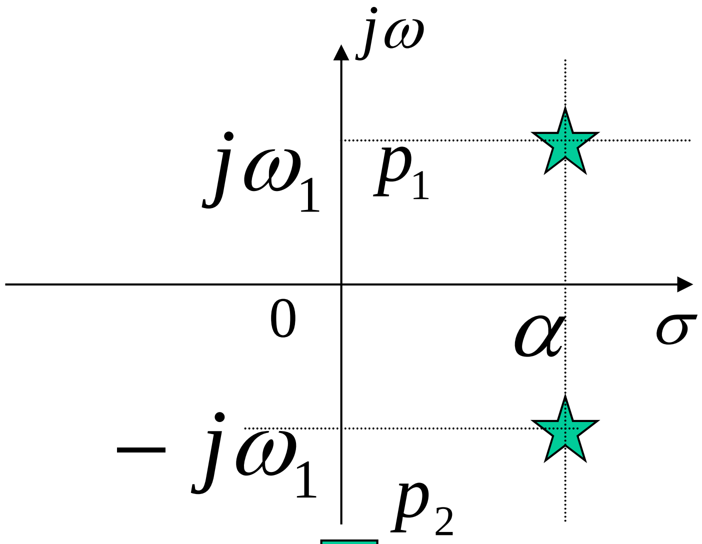


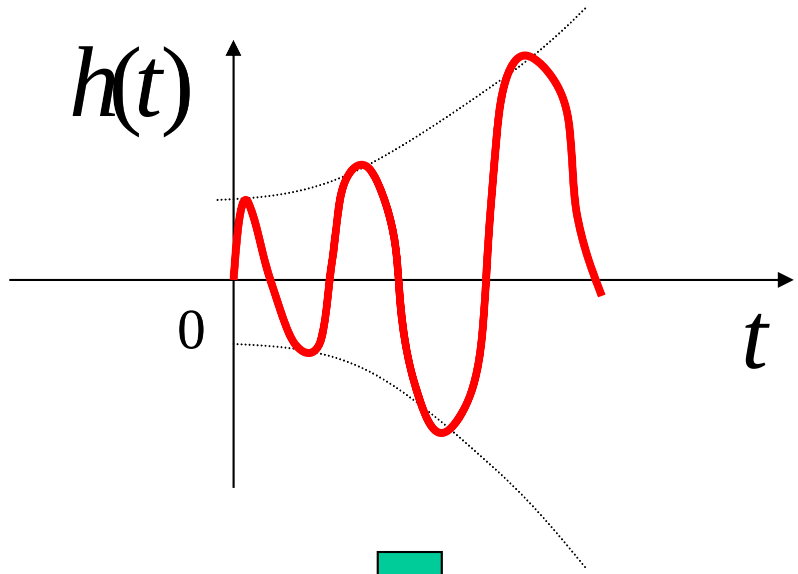


$$H(s)=\frac{\omega_1}{(S+\alpha)^2+\omega_1^2}$$

$$h(t)=e^{-\alpha t}\sin\omega_1 t.u(t)$$

（2） 几种典型的极点分布——(g)共轭极点在右半平面

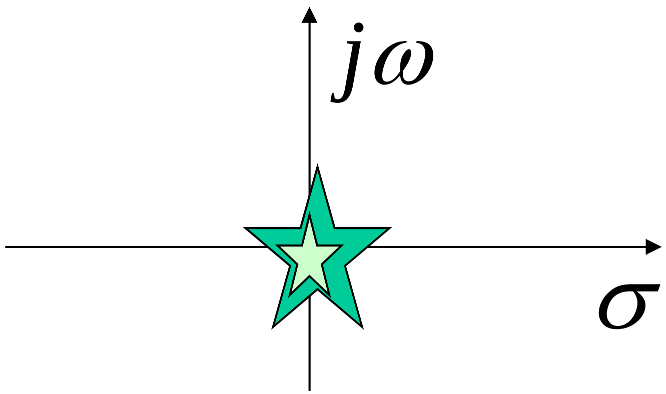


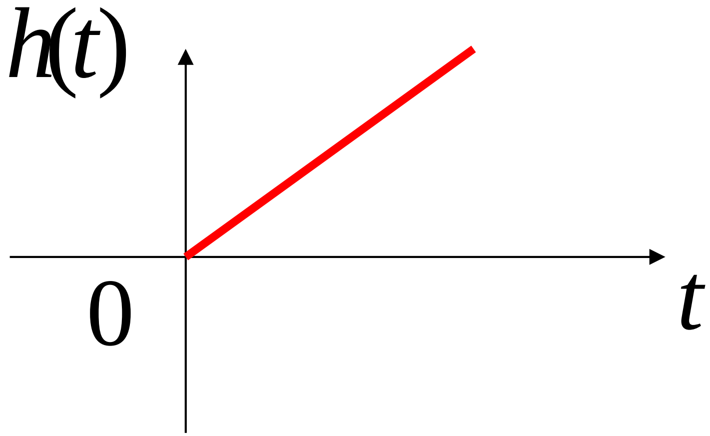


$$H(s)=\frac{\omega_1}{(S-\alpha)^2+\omega_1^2}$$

$$h(t)=\sin\omega_1 t.u(t)$$

（3）有二重极点分布——
(a)在原点有二重极点



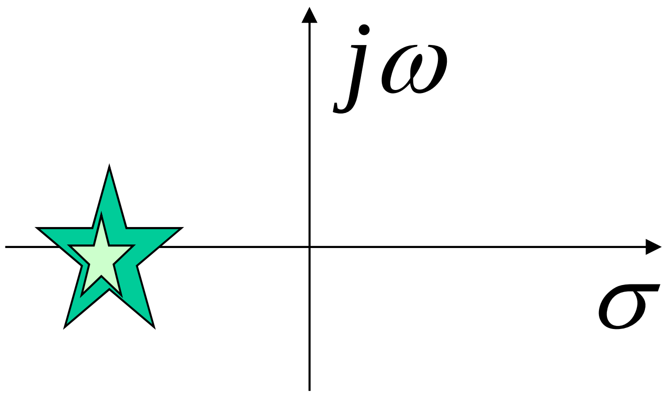


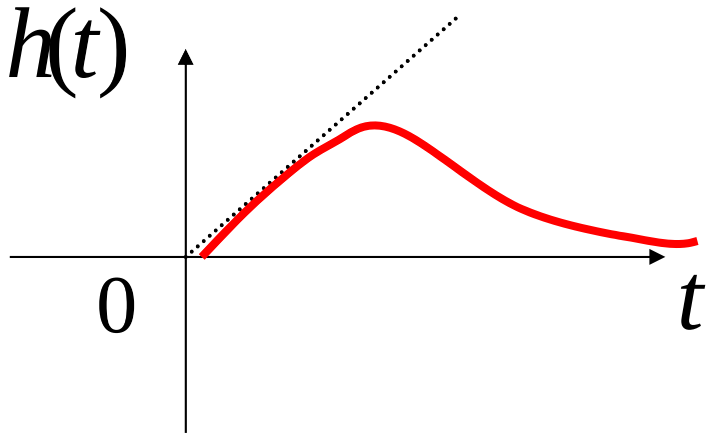
$$H(s)=\frac{1}{S^2}$$

$$h(t)=t$$

（3）有二重极点分布——

(b)在负实轴上有二重极点

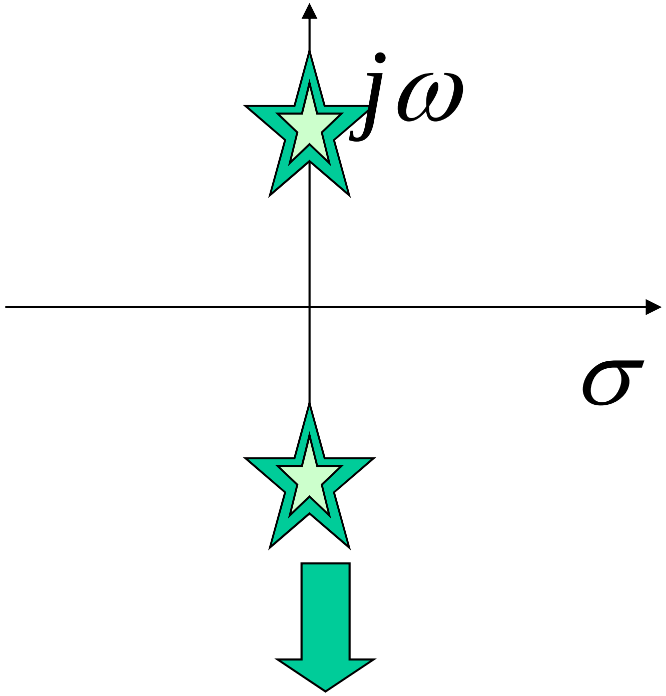


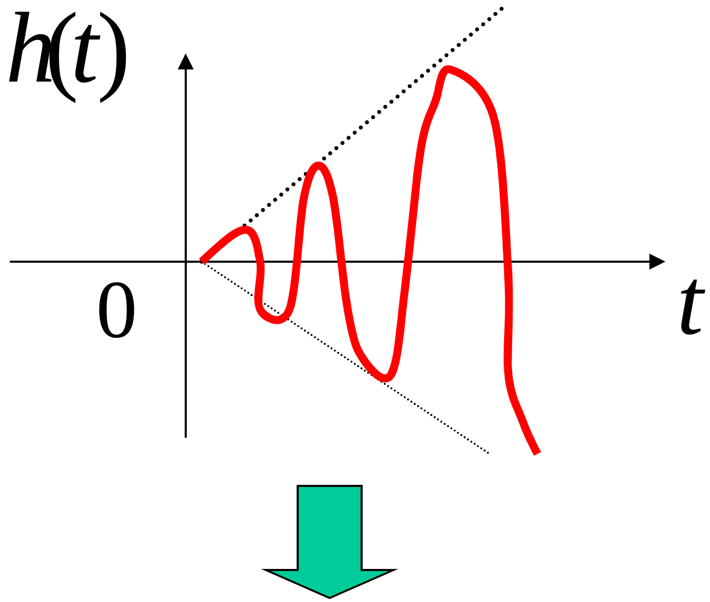


$$H(s)=\frac{1}{(S+\alpha)^2}$$

$$h(t)=te^{-\alpha t}$$

（3）有二重极点分布——
(c)在虚轴上有二重极点

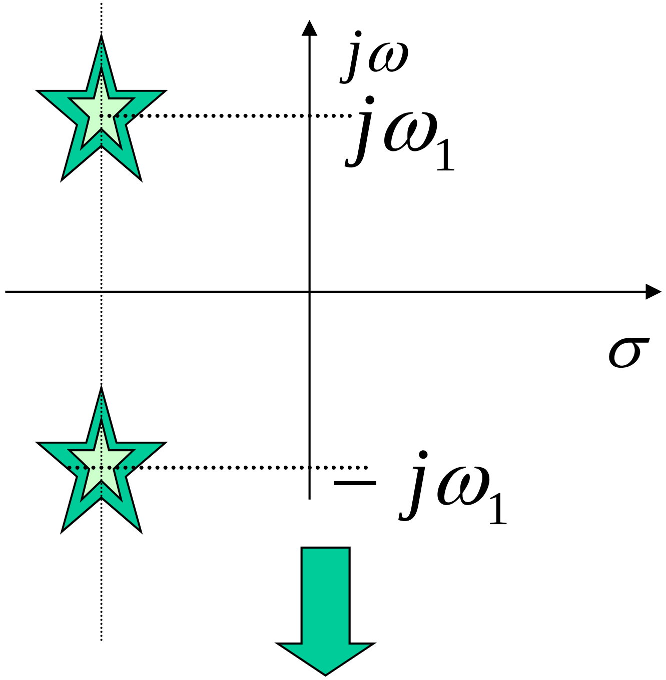


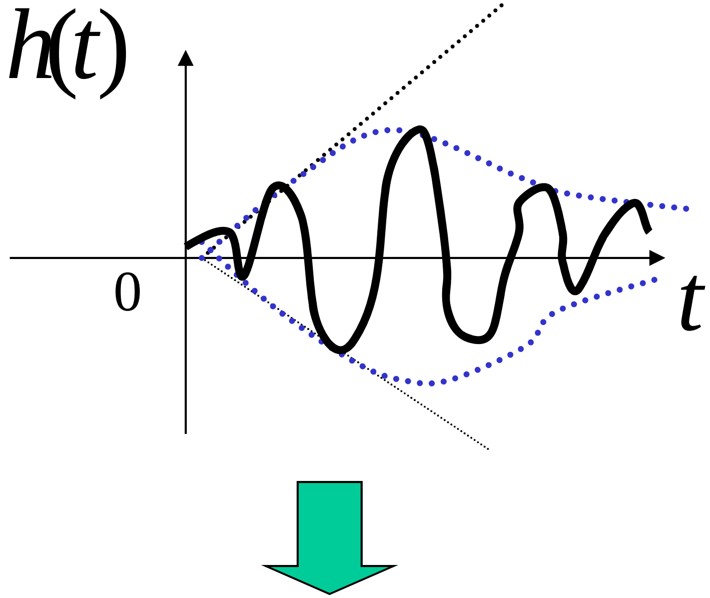


$$H(s)=\frac{2\omega S}{(S^2+\omega_1^2)^2}$$

$$h(t)=t\sin\omega_1 t$$

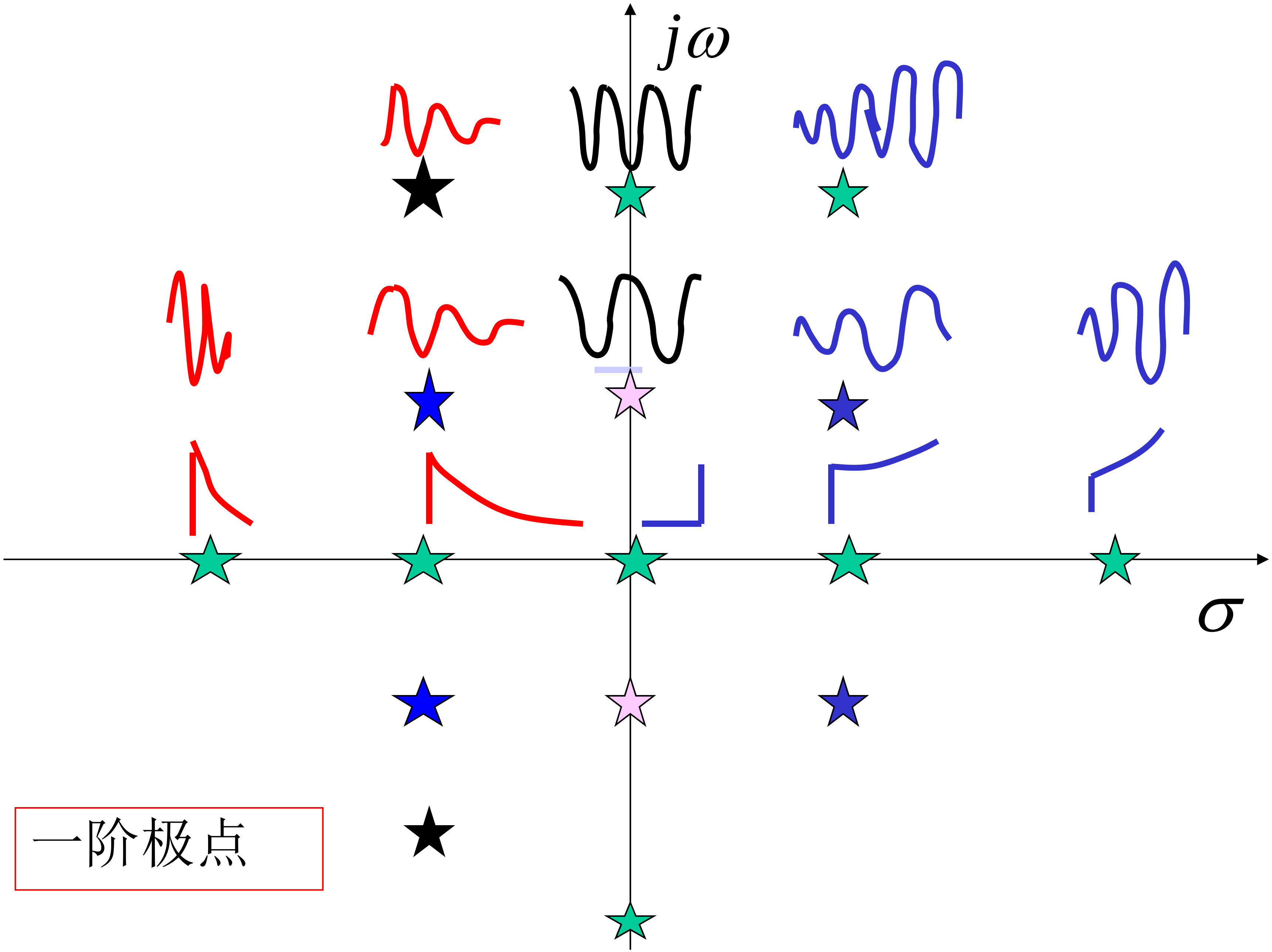
（3）有二重极点分布——
(d)在左半平面有二重共轭极点



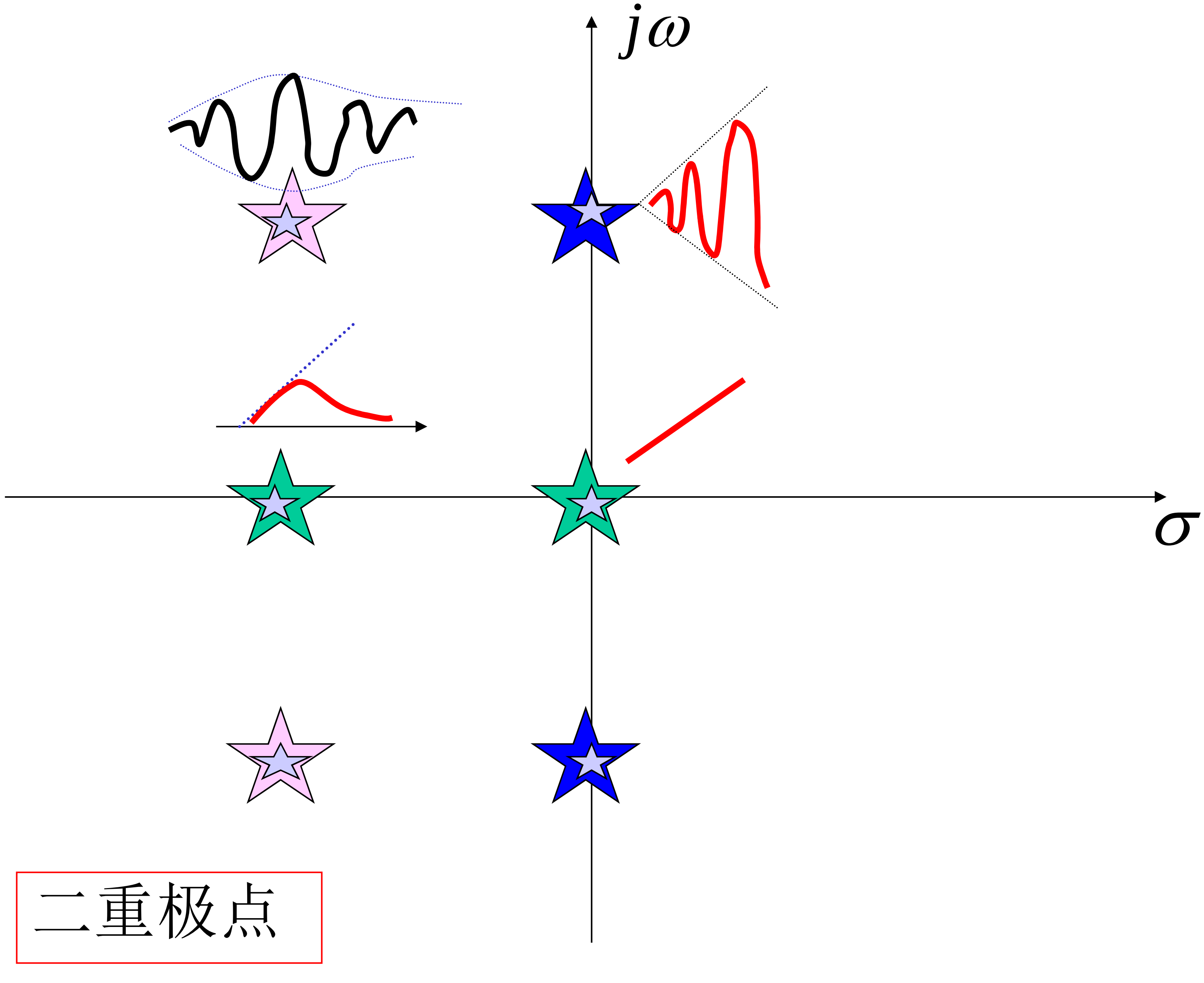


$$H(s)=\frac{2\omega(S+\alpha)}{[(S+\alpha)^2+\omega_1^2]^2}$$

$$h(t)=te^{-\alpha t}\sin\omega_1 t$$



一阶极点



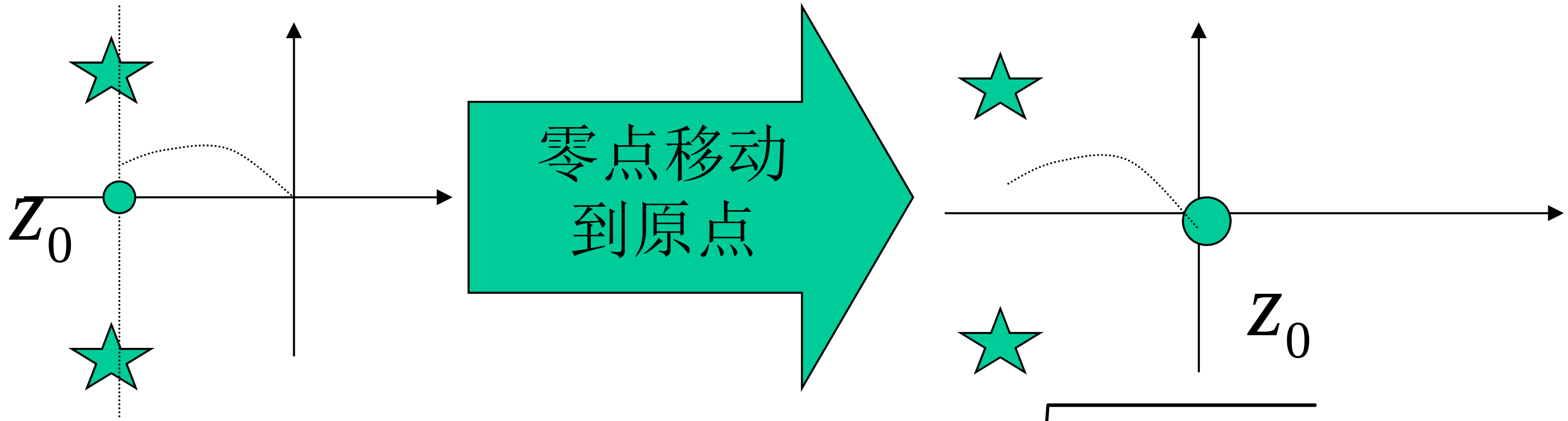
$j\omega$
σ
二重极点

极点影响小结：

- 极点落在左半平面— **h(t)** 逞衰减趋势
- 极点落在右半平面— **h(t)**逞增长趣势
- 极点落在虚轴上只有一阶极点— **h(t)** 等幅振荡，不能有重极点
- 极点落在原点— **h(t)**等于 **u(t)**

（4） 零点的影响

$$H_1(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \qquad H_2(s)=\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2}$$



$$h(t)=e^{-at}\cos\omega t$$

$$h(t)=e^{-at}\sqrt{1+\left(\frac{a}{\omega}\right)^2}\cos(\omega t-\varphi)$$

$$\varphi=tg^{-1}\left(-\frac{a}{\omega}\right)$$

（4） 零点的影响

- 零点的分布只影响时域函数的幅度和相移，不影响振荡频率

$$h(t)=e^{-at}\cos\omega t$$

幅度多了一个因子

$$h(t)=e^{-at}\sqrt{1+\left(\frac{a}{\omega}\right)^2}\cos(\omega t-\varphi)$$

多了相移

$$\varphi=tg^{-1}\left(-\frac{a}{\omega}\right)$$

自由响应与强迫响应

$$R(s)=E(s).H(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-z_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-p_k)}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

来自H(s)的极点

$$R(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}+\sum_{k=1}^{v}\frac{k_k}{s-p_k}$$

来自E(s)的极点

$$r(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{p_i t}+\sum_{k=1}^{v}k_k e^{p_k t}$$

自由响应

强迫响应

结论

- **H(s)**的极点决定了自由响应的振荡频率，与激励无关
- 自由响应的幅度和相位与**H(s)**和**E(s)**的零点有关，即零点影响 $\mathbf{K}_{\mathbf{i}}$，$\mathbf{K}_{\mathbf{k}}$ 系数
- **E(s)**的极点决定了强迫响应的振荡频率，与**H(s)** 无关
- 用**H(s)**只能研究零状态响应， **H(s)**中零极点相消将使某固有频率丢失。

暂态响应与稳态响应

- 系统**H(s)**的极点一般是复数，讨论它们实部和虚部对研究系统的稳定性很重要
- 不稳定系统 $\mathrm{Re}\left[p_i\right] > 0$ 增幅
- 临界稳定系统 $\mathrm{Re}\left[p_i\right] = 0$ 等幅
- 稳定系统 $\mathrm{Re}\left[p_i\right] < 0$ 衰减

激励E(s)的极点影响

- 激励**E(s)**的极点也可能是复数
- 增幅，在稳定系统的作用下稳下来，或与系统某零点相抵消

$$\boxed{\mathrm{Re}[p_k] > 0}$$

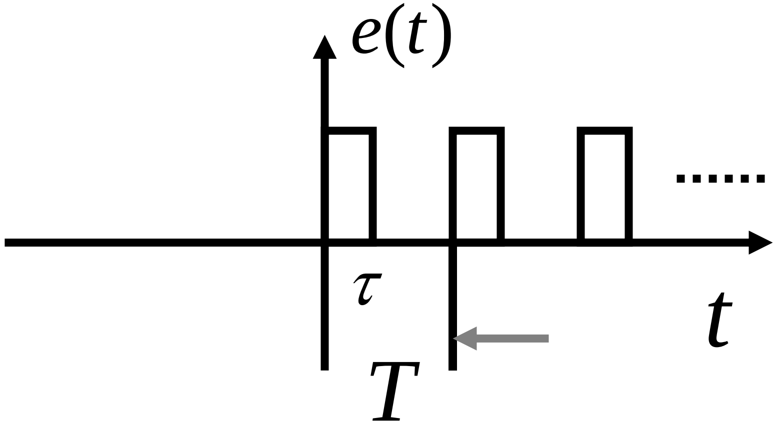
- 等幅，稳态

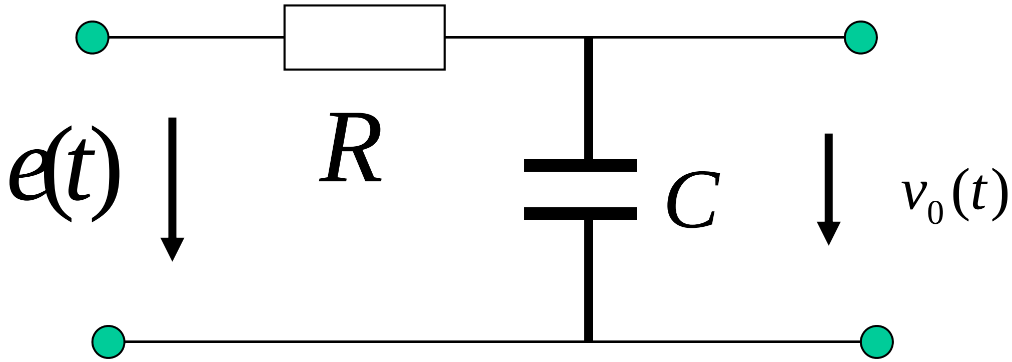
$$\boxed{\mathrm{Re}[p_k] = 0}$$

- 衰减趋势，暂态

$$\boxed{\mathrm{Re}[p_k] < 0}$$

例：周期矩形脉冲输入下图电路，求其暂态和稳态响应。



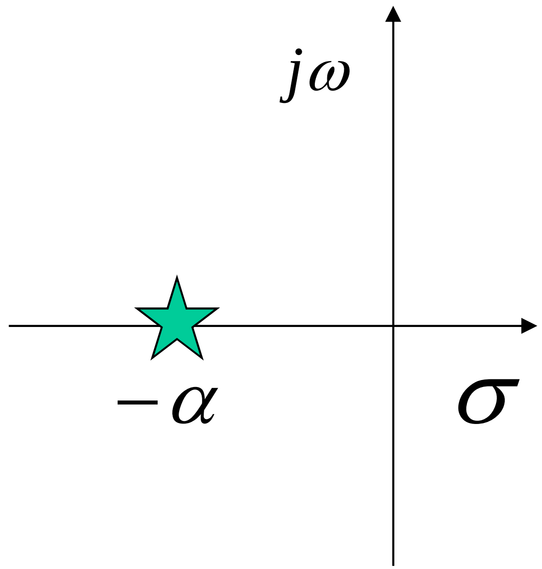


（**1**）求**e(t)**的拉氏变换

$$E(s)=\frac{1}{s}(1-e^{-s\tau})\sum_{n=0}^{\infty}e^{-snT}=\frac{1}{s}\frac{(1-e^{-s\tau})}{(1-e^{-sT})}$$

（2）求系统函数**H(s)**

$$H(s)=\frac{\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}}\overset{\alpha=\frac{1}{RC}}{=}\frac{\alpha}{s+\alpha}$$



（3）求系统完全响应的拉氏变换 $V_0(s)$

$$V_0(s)=E(s).H(s)=\frac{\alpha(1-e^{-s\tau})}{s(s+\alpha)(1-e^{-sT})}$$

$$V_0(s)=V_{ot}(s)+V_{0s}(s)$$

暂态

稳态

（4）求暂态响应，它在整个过程中是一样的。

$$V_{0t}(s)=\frac{K_1}{s+\alpha} \qquad K_1=V_0(s)(s+\alpha)\Big|_{s=-\alpha}=\frac{1-e^{\alpha\tau}}{1-e^{\alpha T}}$$

固定常数

$$v_{0t}(t)=\boxed{-\frac{1-e^{\alpha\tau}}{1-e^{\alpha T}}}.e^{-\alpha t}$$

衰减因子

(5) 求第一个周期引起的响应的拉氏变换V[01](t)

$$V_{01}(s)=H(s).E_1(s)=\frac{\alpha(1-e^{-s\tau})}{s(s+\alpha)}$$

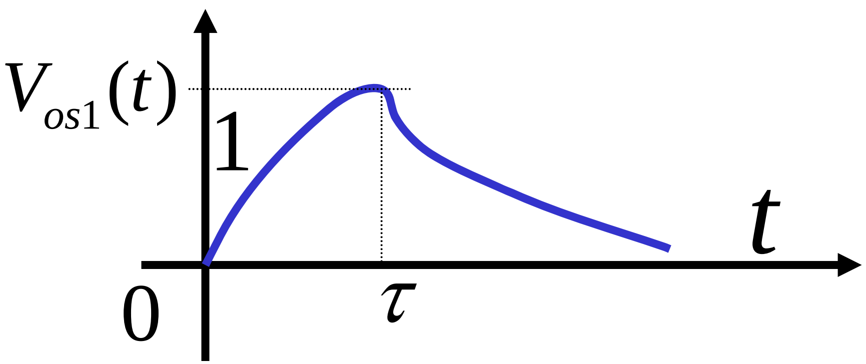
（7）求第一周期的稳态响应

$$V_{0s1}(s)=V_{01}(s)-V_{0t}(s)$$

$$=\frac{\alpha(1-e^{-s\tau})}{s(s+\alpha)}+\frac{1-e^{\alpha\tau}}{1-e^{\alpha T}}\cdot\frac{1}{s+\alpha}$$

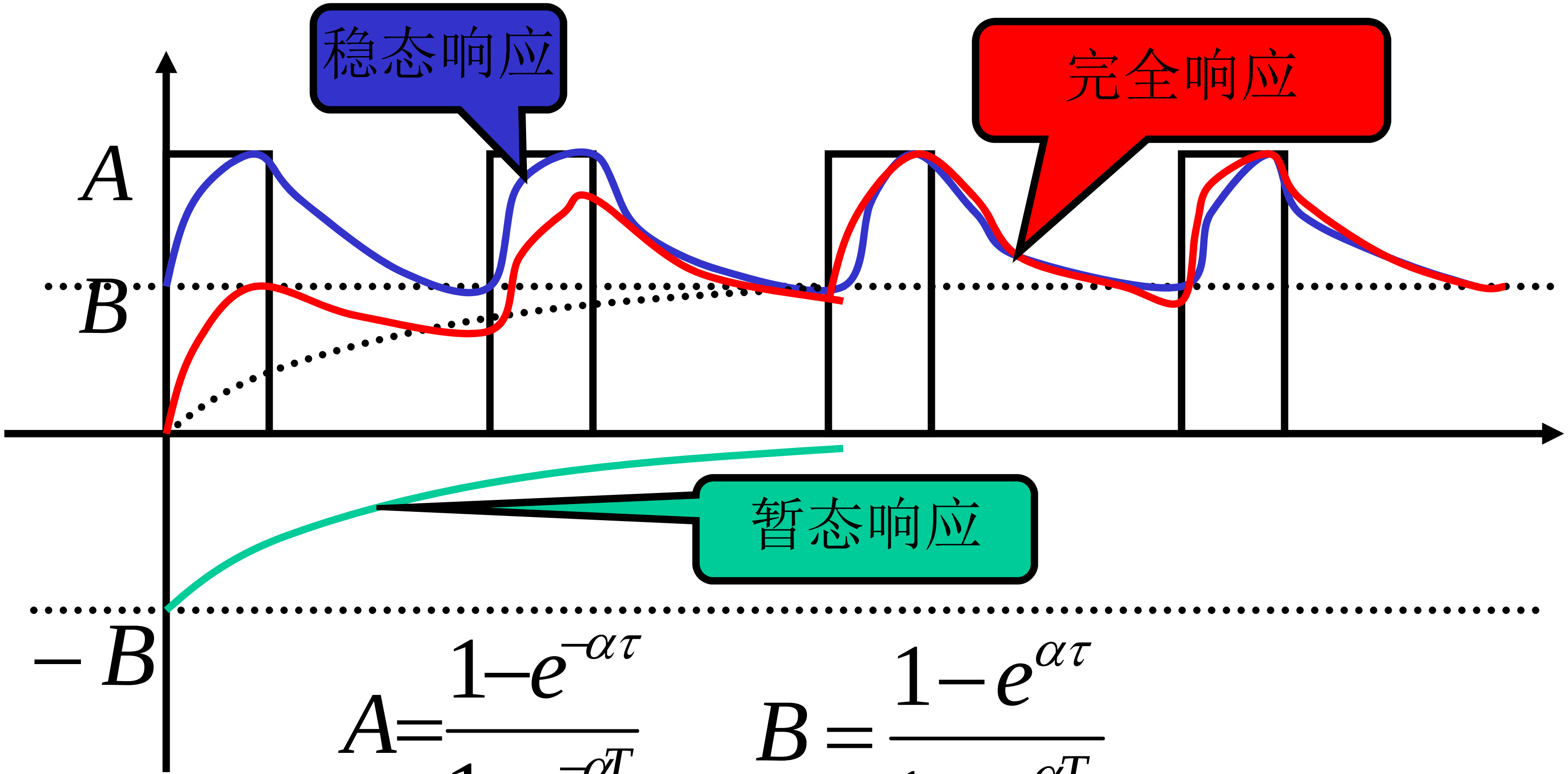
$$v_{0s1}(t)=[1-\frac{1-e^{-\alpha(T-\tau)}}{1-e^{-\alpha T}}.e^{-\alpha t}].u(t)-$$

$$(1-e^{-\alpha(t-\tau)}).u(t-\tau)$$



（8）整个周期矩形信号的稳态响应

$$v_{0s}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}v_{0s1}(t-nT)[u(t-nT)-u(t-(n+1)T)]$$



$$A=\frac{1-e^{-\alpha\tau}}{1-e^{-\alpha T}}\qquad B=\frac{1-e^{\alpha\tau}}{1-e^{\alpha T}}$$

§ 4.8　由系统函数决定系统频率特性

一、什么是系统频率响应？

频响特性：不同频率的正弦激励下系统的稳态响应随信号频率的变化情况。

包括幅度响应和相位响应两个方面。可表示为下列两种形式：

$$\boxed{\begin{aligned} H(j\omega) &= R(j\omega) + jI(j\omega) \\ H(j\omega) &= \left|H(j\omega)\right| e^{j\varphi(j\omega)} \end{aligned}}$$

$$e(t) = E_m \sin\omega_0 t \quad \Rightarrow \quad E(s) = \frac{E_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$R(s) = E(s)H(s)$$

$$= \frac{k_{-j\omega_0}}{s + j\omega_0} + \frac{k_{j\omega_0}}{s - j\omega_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s - p_i}$$

由正弦激励的极点
决定的稳态响应

如系统是稳定的，
该项最后衰减为零

$$H(j\omega_0) = H_0 e^{j\varphi_0} \qquad H(-j\omega_0) = H_0 e^{-j\varphi_0}$$

$$k_{-j\omega_0} = (s + j\omega)R(s)\Big|_{s=-j\omega_0} = \frac{E_m H_0 e^{-j\varphi_0}}{-2j}$$

$$k_{j\omega_0} = (s - j\omega)R(s)\Big|_{s=j\omega_0} = \frac{E_m H_0 e^{j\varphi_0}}{2j}$$

稳态响应有关的

$$R_w(s) = \frac{E_m H_0}{2j}\left[e^{j(\omega_0 t+\varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t+\varphi_0)}\right]$$

$$e(t) = E_m \sin\omega_0 t \qquad r(t) = E_m H_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

幅度改变

相位偏移

$$H(j\omega_0) = H_0 e^{j\varphi_0}$$

若 ω_0 换成变量 ω

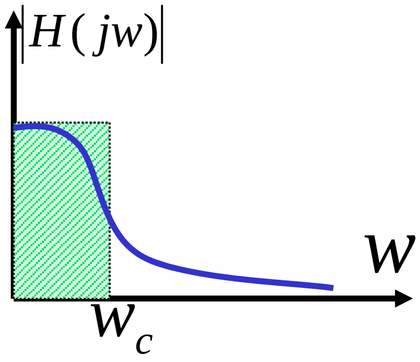
$$H(j\omega) = \left|H(j\omega)\right| e^{j\varphi(j\omega)}$$

系统频率特性

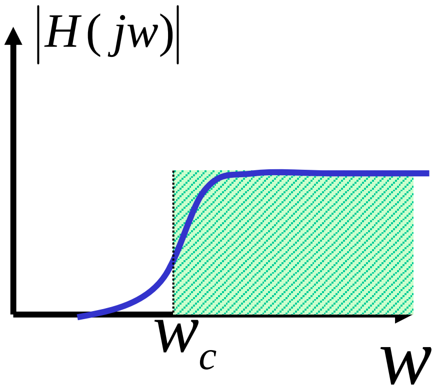
幅频特性

相位特性

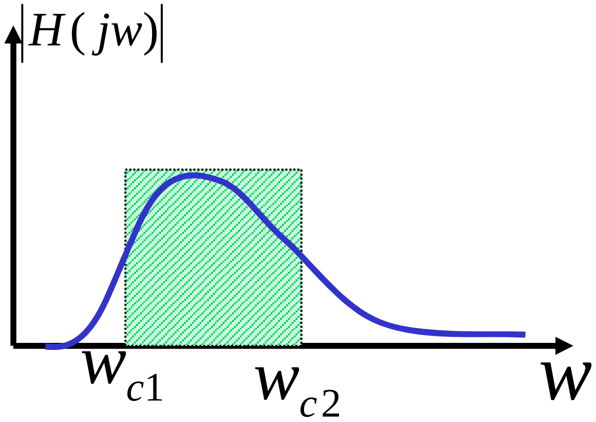
二、按滤波网络幅频特性不同，可以划分为低通、高通、带通、带阻、全通几种类型。



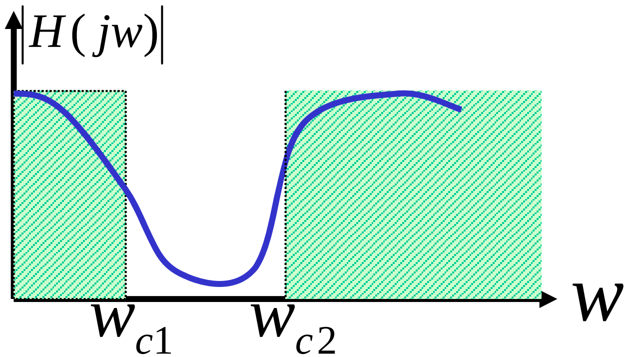
低通



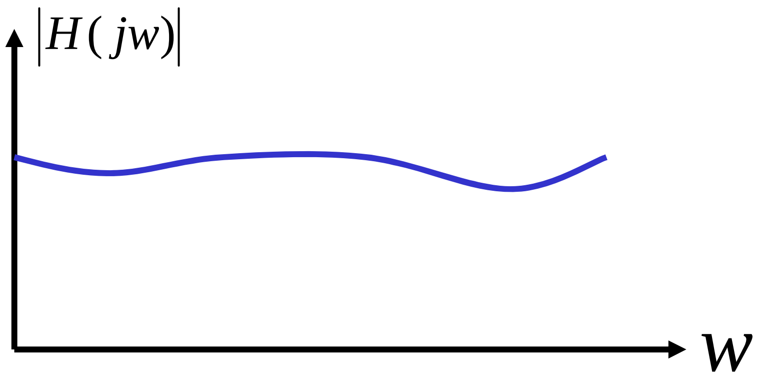
高通



带通



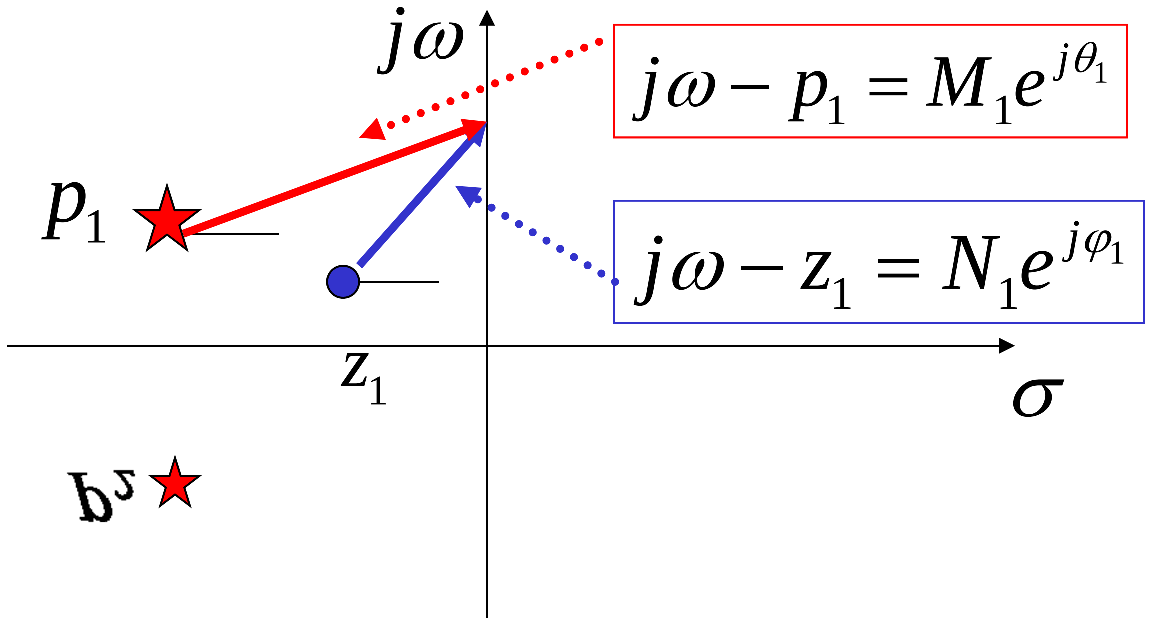
带阻



全通

三、用几何法求系统频率特性

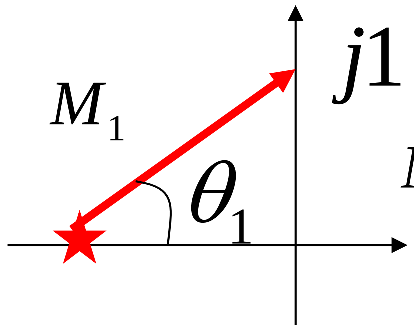
$$H(j\omega)=\frac{k\prod_{j=1}^{m}(j\omega-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(j\omega-p_i)}=k\frac{N_1N_2\cdots N_m}{M_1M_2\cdots M_n}e^{j(\sum_{i=1}^{m}\psi_i-\sum_{l=1}^{n}\theta_l)}$$



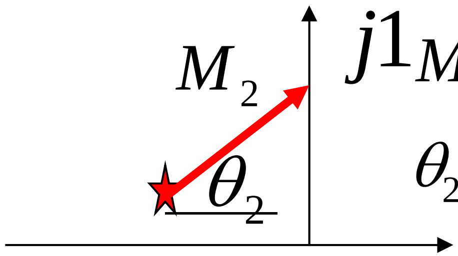
例：已知$H(s)=\dfrac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$ 试求当$\omega=1$

时的幅频和相位

$$H(s)=\frac{1}{(s+1)\left(s-\frac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)\left(s-\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)}$$



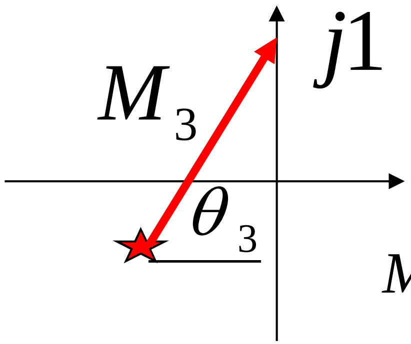
$M_1=1.414$ $\theta=45^0$



$M_2=0.517$

$\theta_2=15^0$

$$\left|H(j1)\right|=\frac{1}{M_1M_2M_3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\theta(j1)=-(45^0+15^0+75^0)=135^0$$

$M_3=1.932$ $\theta_3=75^0$

一阶系统和二阶非谐振系统的S平面分析

- 已知该系统的**H(s)**的极零点在**S**平面的分布，确定该系统的幅频特性和相频特性的渐近线

（1）一阶系统

$$H(s)=K\frac{s-z_1}{s-p_1}$$

- 一零点，一在实轴的极点

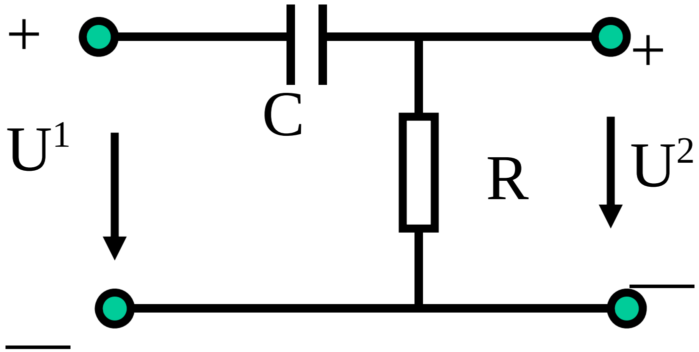
$$H(s)=K\frac{s}{s-p_1}$$

- 一在原点的零点，一在实轴的极点

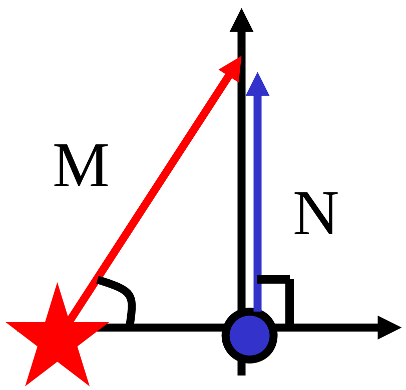
$$H(s)=\frac{k}{s-p_1}$$

- 只有无穷远处的零点
  一在实轴的极点

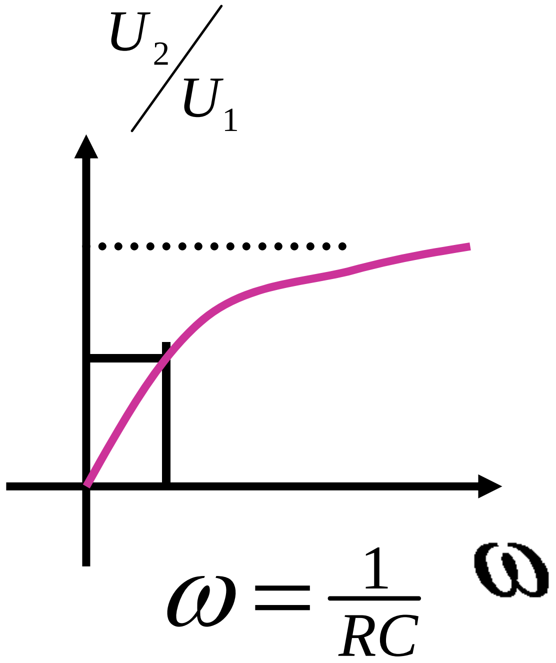
例：求一高阶系统的频率特性



$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{R}{R+\frac{1}{sc}}=\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$$



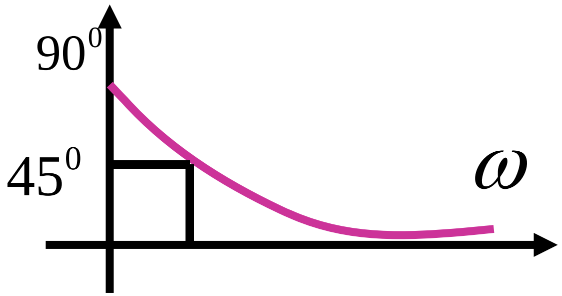
$$H(j\omega)=\frac{N}{M}e^{j(\psi-\theta)}$$



$$\omega=0, \quad N=0, \quad M=\frac{1}{Rc}, \quad \frac{N}{M}=0$$

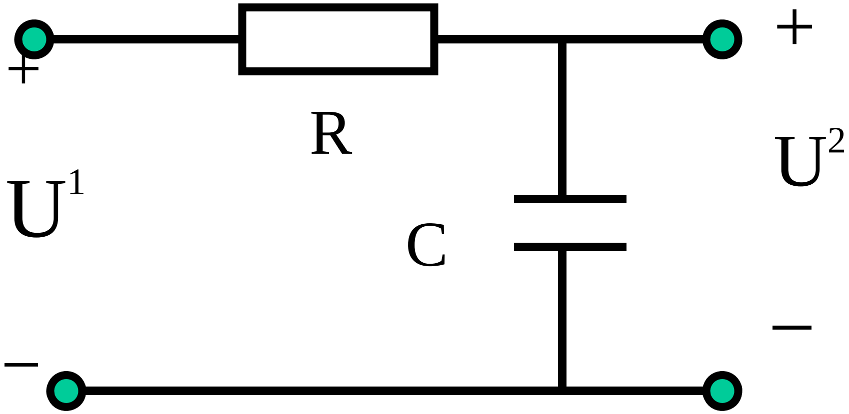
$$\omega = \frac{1}{Rc}, \quad N = \frac{1}{Rc} \quad ,\theta = 45^0,$$

$$M = \frac{\sqrt{2}}{Rc}, \quad \frac{N}{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



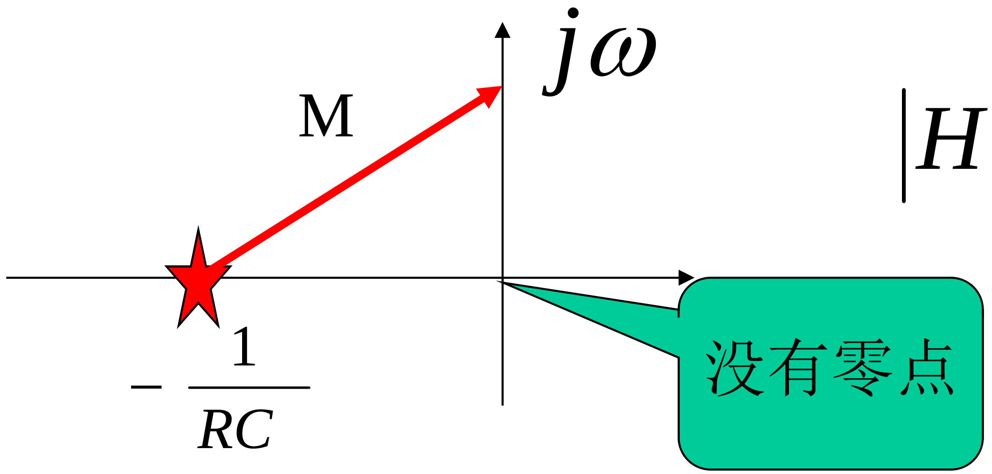
$$\omega = \infty, \quad \frac{N}{M} \approx 1, \quad \varphi - \theta = 0$$

例： 求一阶低通滤波器的频率特性

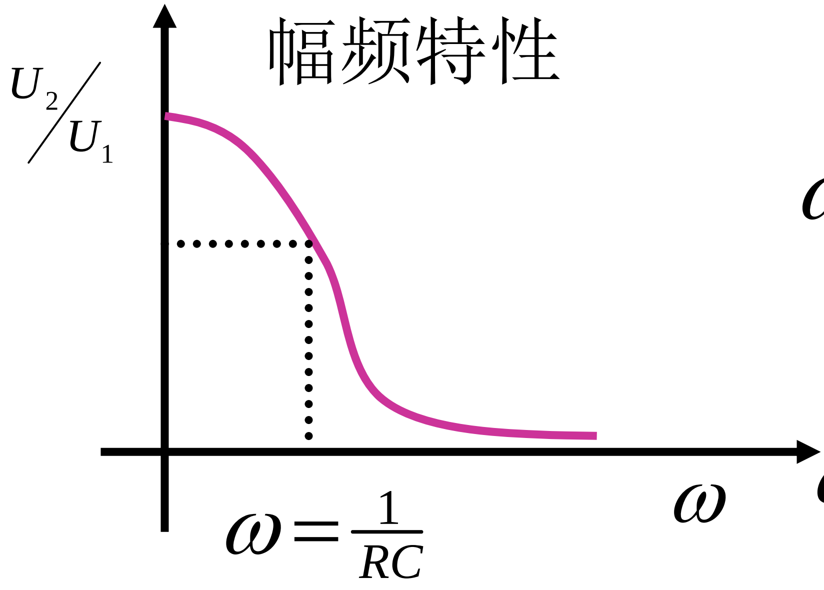


$$H(s)=\frac{U_2}{U_1}=\frac{\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}}$$

$$=\frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$



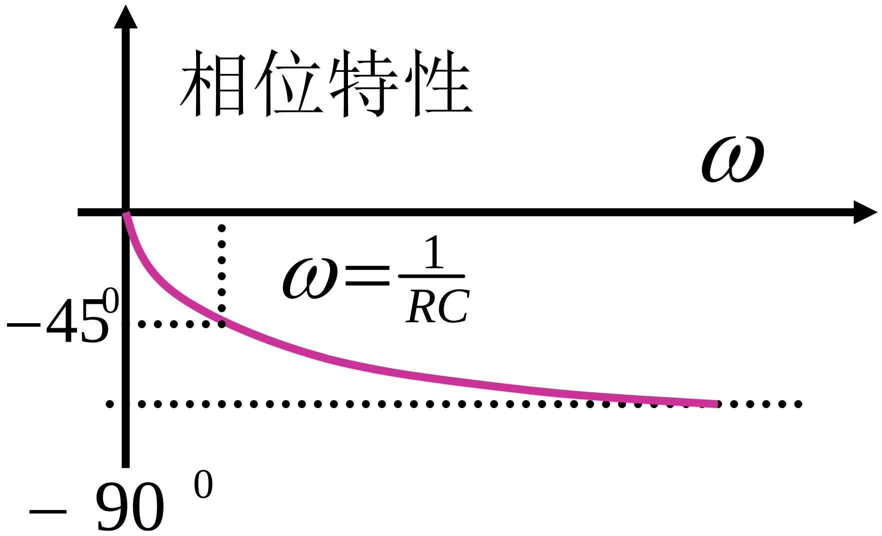
$$\left|H(j\omega)\right|=k\frac{1}{M}e^{j(\varphi-\theta_1)}$$



$$\omega=0,\quad M=1/RC,\ U_2/U_1=1$$

$$\omega=\frac{1}{RC},\quad M=\frac{\sqrt{2}}{RC},\quad U_2/U_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

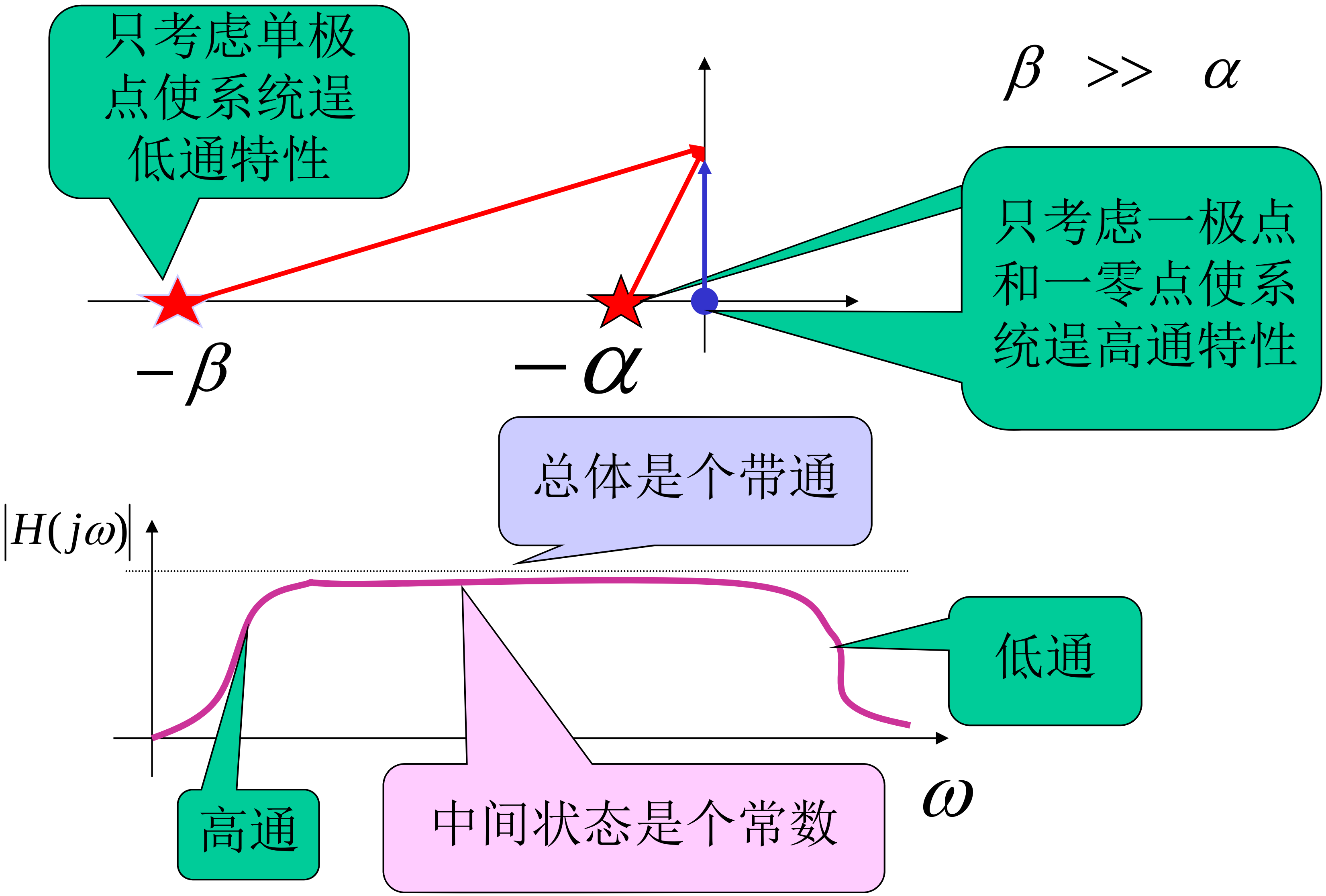
$$\varphi=-45^0$$



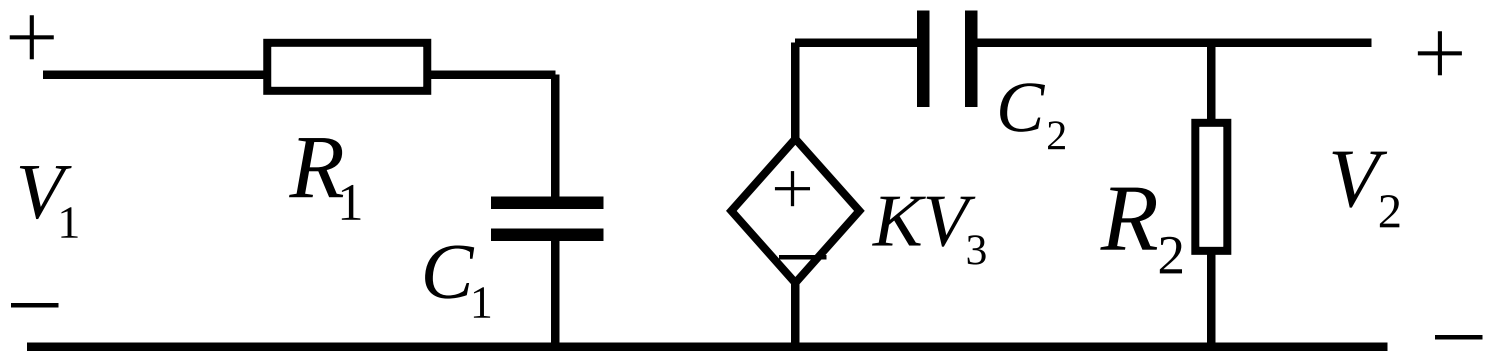
$$\omega=\infty,\quad M=\infty,\quad U_2/U_1=0$$

$$\varphi=-90^0$$

（2） 二阶非谐振系统的S平面分析



例：

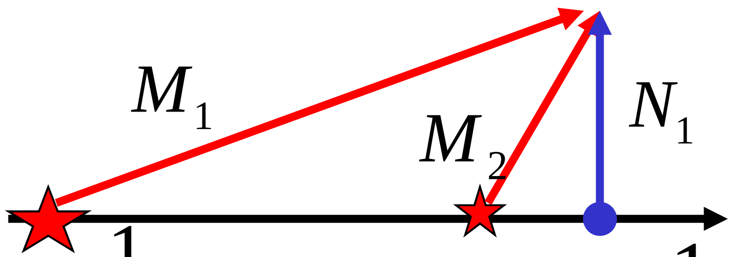


$$H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{k}{R_1C_1}\frac{s}{\left(s+\dfrac{1}{R_1C_1}\right)\left(s+\dfrac{1}{R_2C_2}\right)}$$

$$=\frac{k}{R_1C_1}\frac{s}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

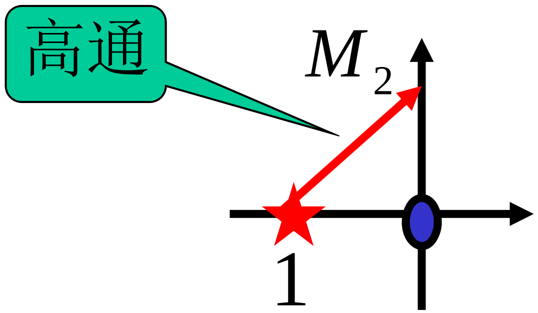
$$H(j\omega)=\frac{k}{R_1C_1}\frac{N_1e^{j\varphi_1}}{M_1e^{j\theta_1}M_2e^{j\theta_2}}$$

$$=\frac{k}{R_1C_1}\frac{N_1}{M_1M_2}e^{j(\varphi_1-\theta_1-\vartheta_2)}=\frac{V_1}{V_2}e^{j\varphi(\omega)}$$

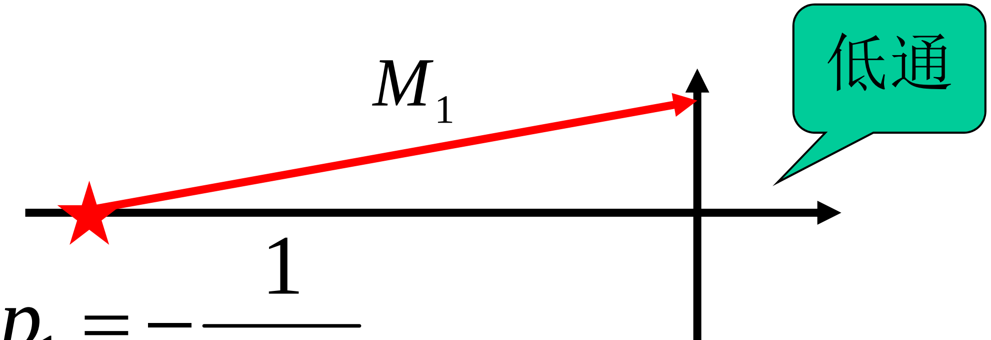


$$p_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} \qquad p_2 = -\frac{1}{R_2 C_2}$$

$$\frac{1}{R_1 C_1} \gg \frac{1}{R_2 C_2}$$



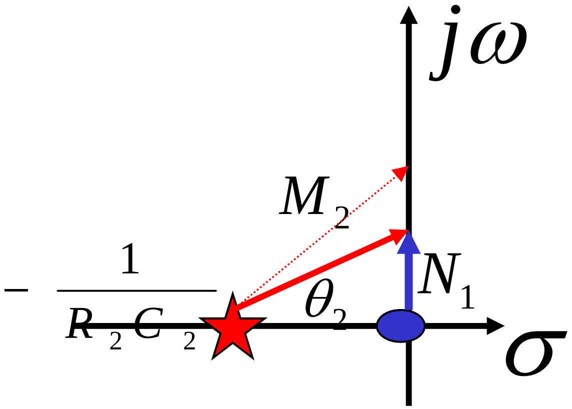
$$p_2 = -\frac{1}{R_2 C_2}$$

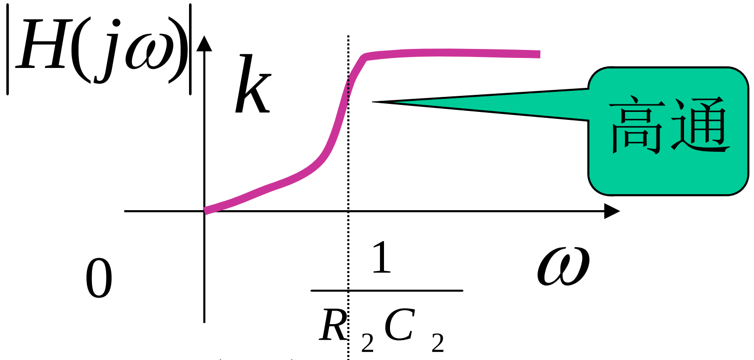


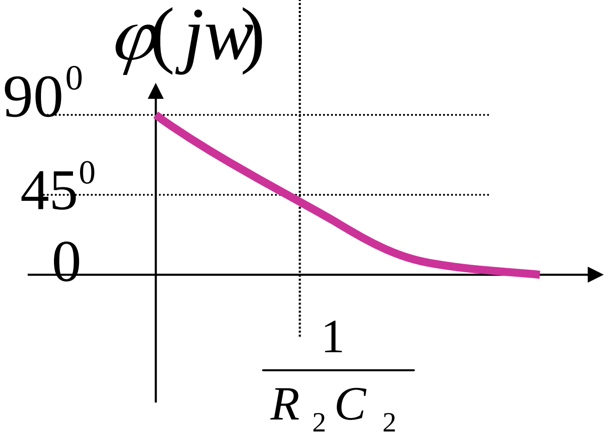
$$p_1 = -\frac{1}{R_1 C_1}$$

$$H(j\omega) = \frac{k}{R_1 C_1} \frac{N_1}{M_1 M_2} e^{j(\varphi_1 - \theta_1 - \vartheta_2)}$$

ω 较小时 p_2 起作用







$$H(j\omega)=\frac{kN_1}{M_1M_2R_1C_1}e^{j(\varphi_1-\vartheta_2)}$$

$$M_1\cong\frac{1}{R_1C_1}\quad,\quad \vartheta_1\approx 0$$

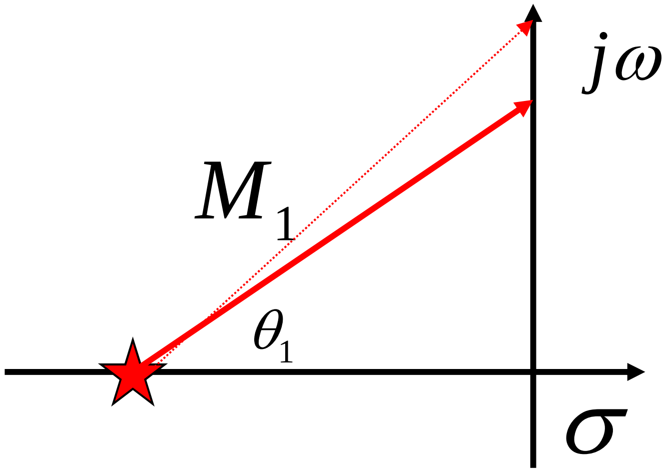
$$|H(j\omega)|=0,\quad \varphi(j\omega)=\varphi_1=90^0$$

ω 逐渐增加

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad,\quad \omega=\frac{1}{R_2C_2}\quad,\varphi(j\omega)=45^0$$

$$|H(\infty)|=k\quad,\quad \varphi(j\omega)=0$$

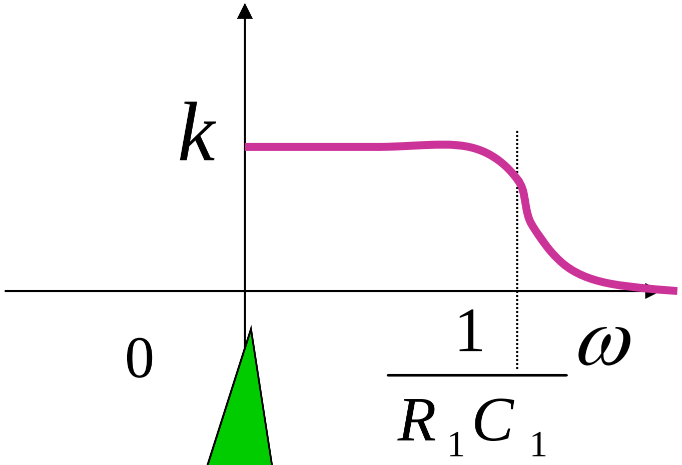
ω较大时 p_1 起主要作用



$$H(j\omega)=\frac{kN_1}{M_1M_2R_1C_1}e^{j(\varphi_1-\vartheta_1)}$$

$$M_2\approx N_1\quad ,\qquad \theta_2\approx\varphi_1\approx 90^0$$

$$|H(j\omega)|=\frac{k}{M_1}e^{-j\theta_1}$$



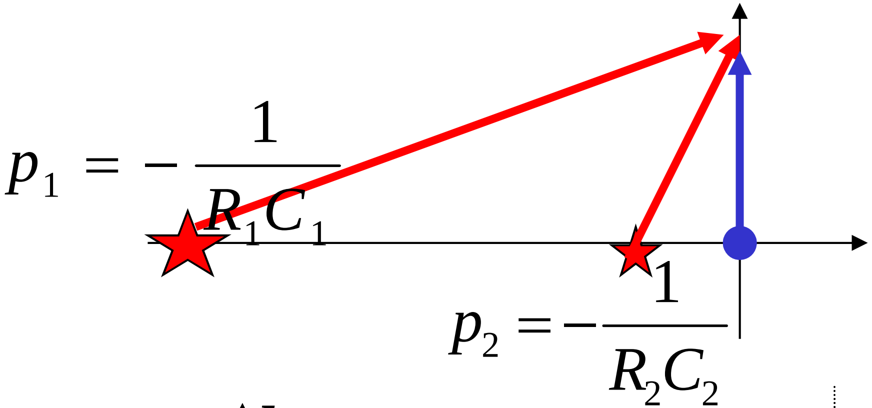
低通特性

ω逐渐增加

$$\varphi(j\omega)=-45^0\quad ,\quad |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad ,\quad \omega=\frac{1}{R_1C_1}$$

$$|H(-\infty)|=0,\quad \varphi(j\infty)=90^0$$

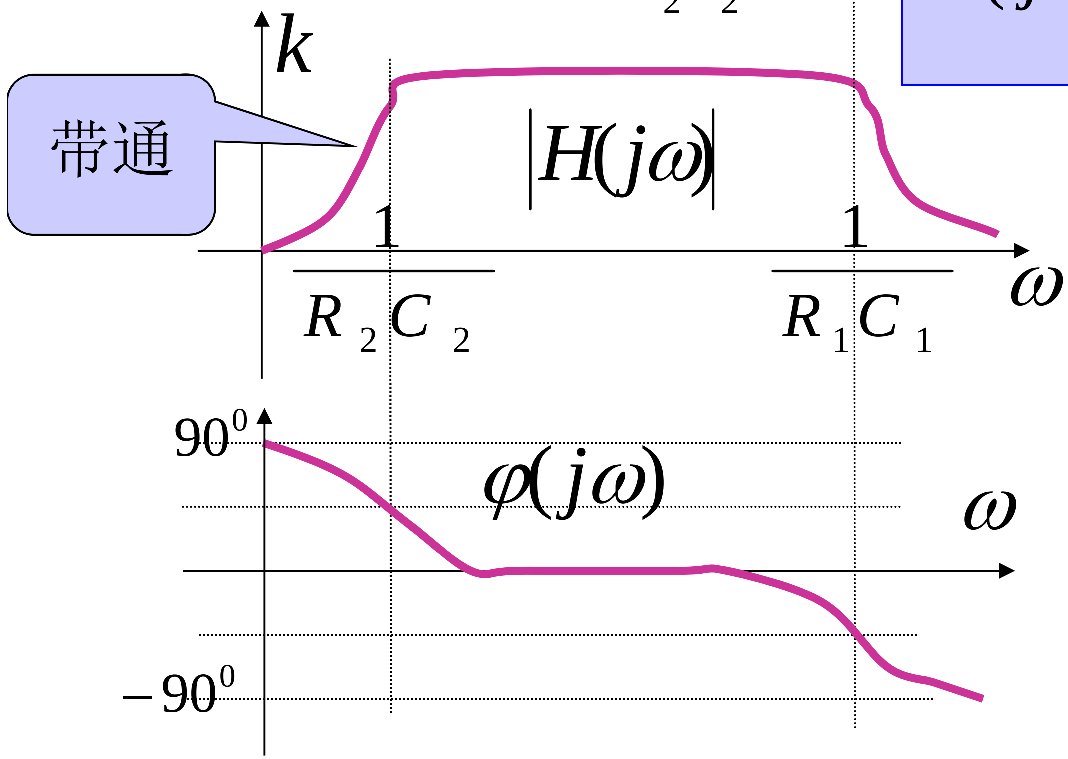
$$\frac{1}{R_2C_2} \le \omega \le \frac{1}{R_1C_1} \quad , R_1C_1 \ll R_2C_2$$



$$M_1 \approx \frac{1}{R_1C_1} \quad , \quad \theta_1 \approx 0$$

$$M_2 \approx N_1 \approx |j\omega| \quad , \quad \theta_2 \approx \varphi_1 \approx 90^0$$

$$H(j\omega) = \frac{k}{R_1C_1}\frac{N_1}{M_1M_2}e^{j(\varphi_1-\theta_1-\vartheta_2)}$$

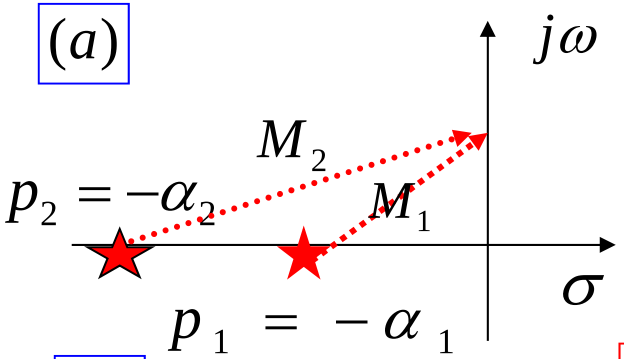


$$|H(j\omega)| = ke^{j0^0} = k$$

$$\varphi(j\omega) = 0$$

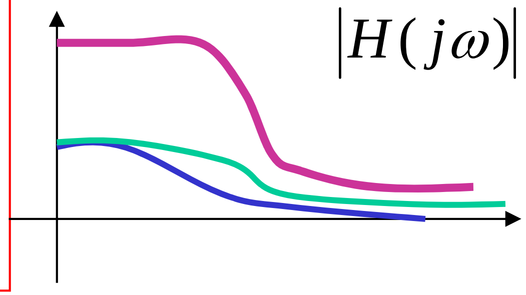
例：若已知H(s)零极点分布如图(a)--(h)试粗略给出它们的 $|H(j\omega)|$.

(a)

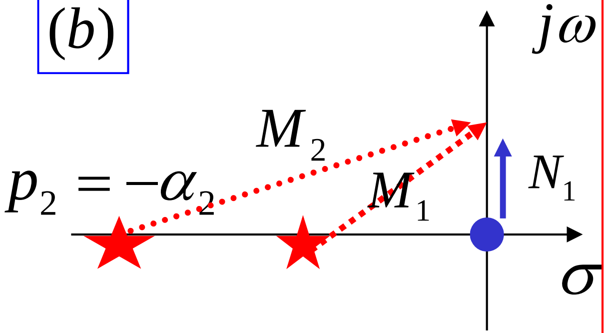


$$H(s)=\frac{1}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

$$H(j\omega)=\frac{1}{M_1M_2}e^{-j(\theta_1+\theta_2)}$$

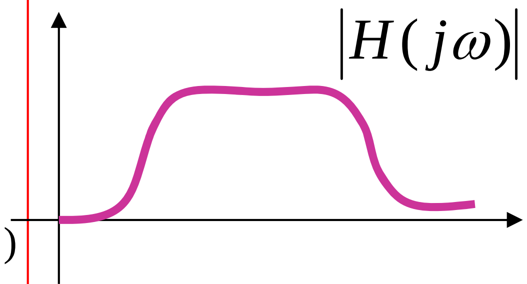


(b)

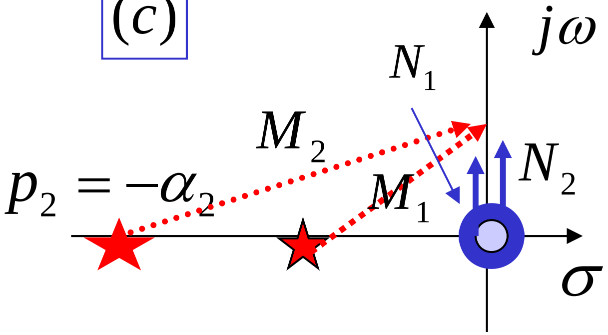


$$H(s)=\frac{s}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

$$H(j\omega)=\frac{N_1}{M_1M_2}e^{-j(\varphi_1+\theta_1+\theta_2)}$$

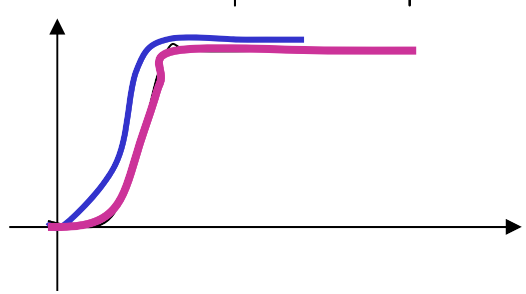


(c)

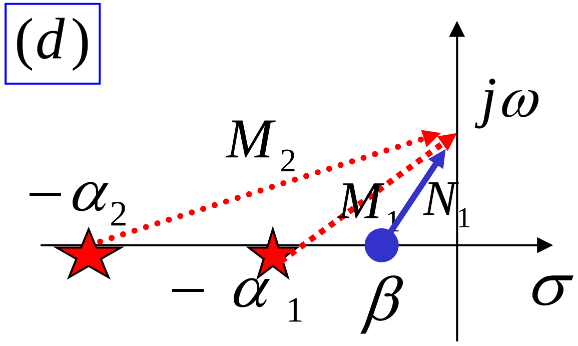


$$H(s)=\frac{s^2}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

$$H(j\omega)=\frac{N_1N_2}{M_1M_2}e^{-j(\varphi_1+\varphi_2+\theta_1+\theta_2)}$$

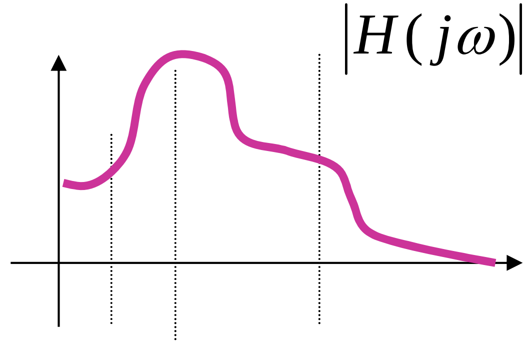


(d)

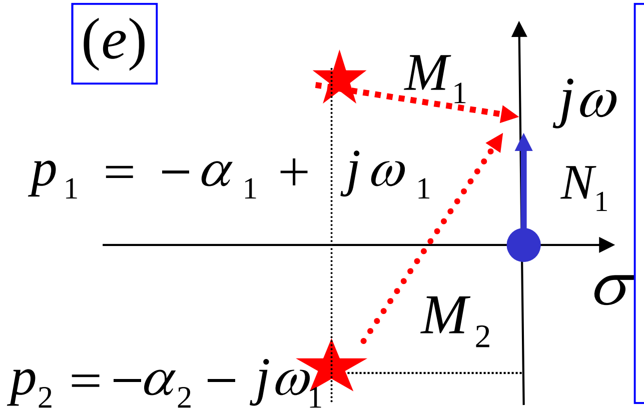


$$H(s)=\frac{s+\beta}{(s+\alpha)(s+\alpha)_{21}}$$

$$H(j\omega)=\frac{N_1}{M_1M_2}e^{-j(\varphi_1+\theta_1+\theta_2)}$$

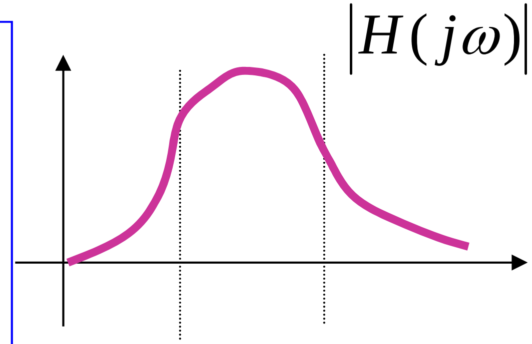


(e)

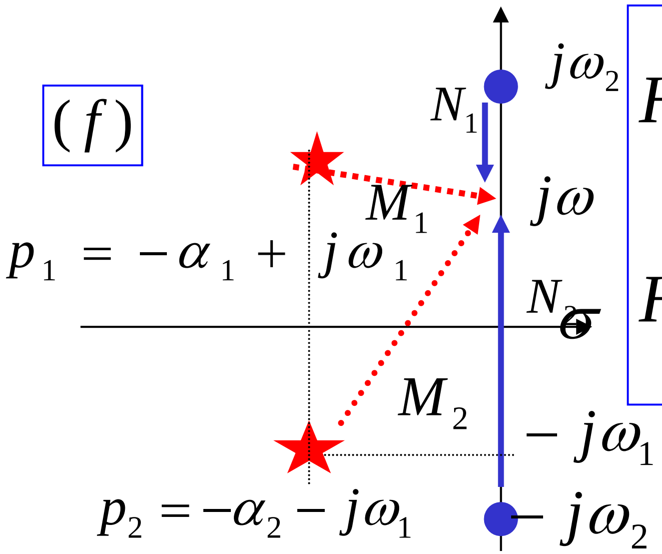


$$H(s)=\frac{s}{(s+\alpha)^2+\omega_1^2}$$

$$H(j\omega)=\frac{N_1}{M_1M_2}e^{-j(\varphi_1+\theta_1+\theta_2)}$$

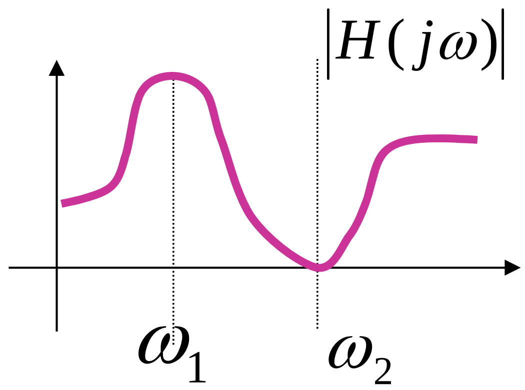


(f)

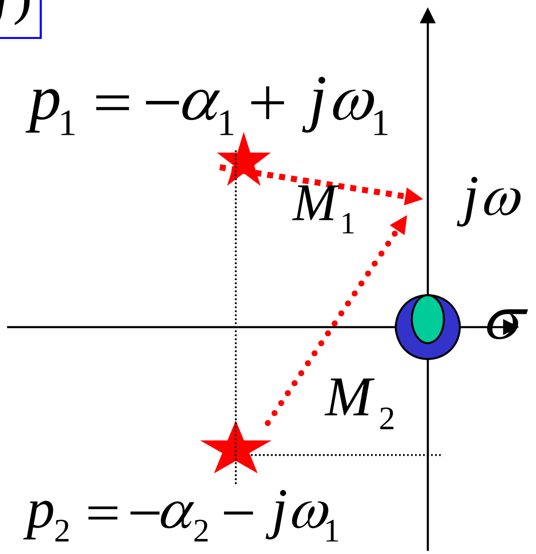


$$H(s)=\frac{S^2+\omega_2^2}{(s+\alpha)^2+\omega_1^2}$$

$$H(j\omega)=\frac{N_1}{M_1M_2}e^{-j(\varphi_1+\theta_1+\theta_2)}$$

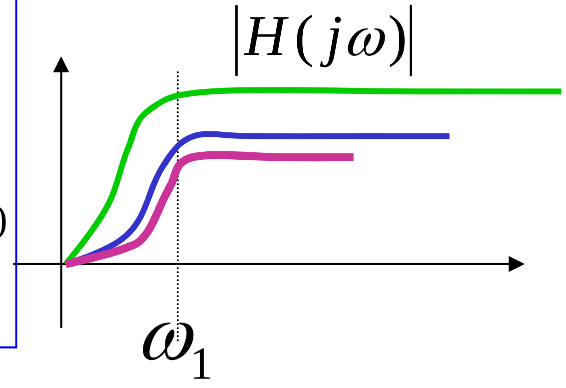


(g)

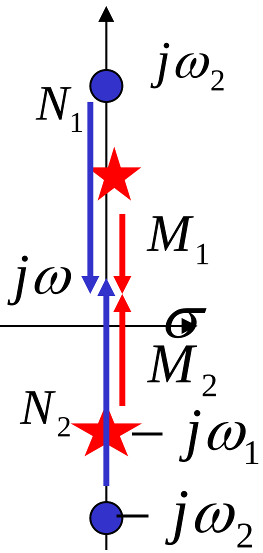


$$H(s) = \frac{S^2}{(s+\alpha)^2 + \omega_1^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{N_1^2}{M_1 M_2} e^{-j(\varphi_1+\theta_1+\theta_2)}$$

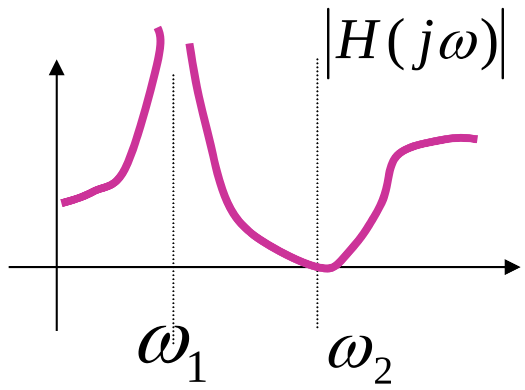


(f)



$$H(s) = \frac{S^2 + \omega_2^2}{s^2 + \omega_1^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2}$$

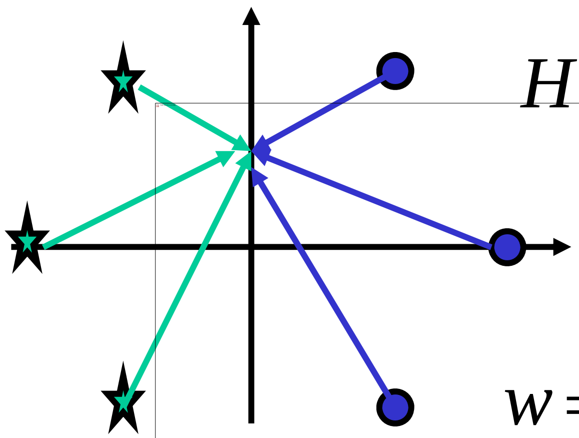


§4.10 全通函数和最小相移函数的零、极点分布(1)

一、全通函数

全通：幅度特性为常数。对所有频率的正弦信号按相同的幅度传输系数通过。

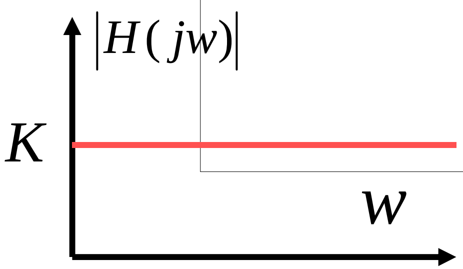
全通函数的特征：极点位于s左半平面。零、极点关于jw轴镜像对称。



$$H(jw) = K\frac{N_1N_2N_3}{M_1M_2M_3}e^{j[(\psi_1+\psi_2+\psi_3)-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)]}$$

$$\therefore |H(jw)| = K$$

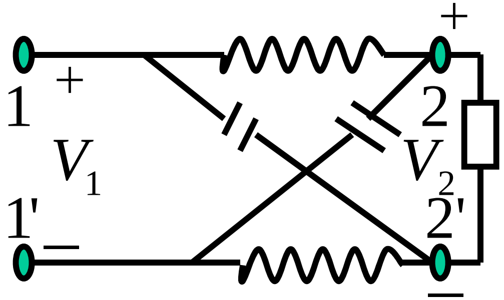
$$w=0, \varphi=180^0; w\text{增大}, \varphi\text{减小}; w\to\infty, \varphi=-360^0$$

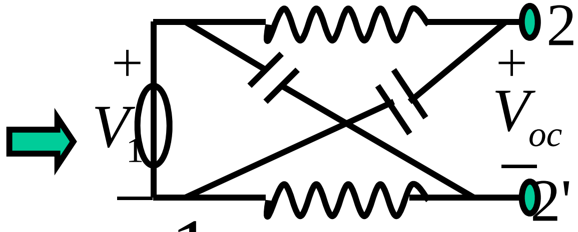


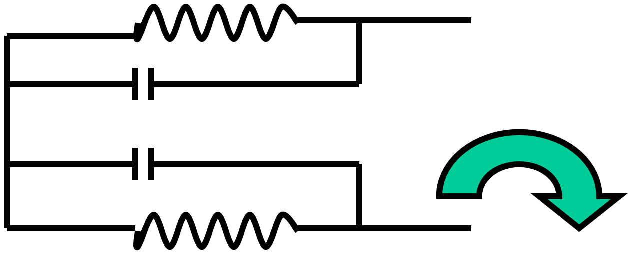
故全通函数的幅度特性为常数，而相位特性不受约束。全通网络可用于相位校正。即不影响幅度的对应关系，只影响相位。

§ 4.10　全通函数和最小相移函数的零、极点分布(2)

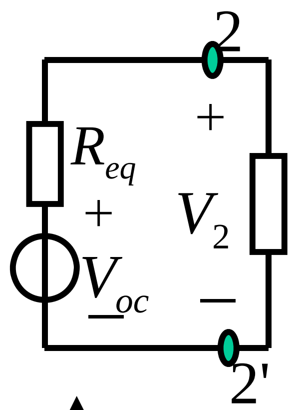
例：求下图的传输函数 $H(s)=\dfrac{V_1(s)}{V_2(s)}$　$(\dfrac{L}{C}=R^2)$并说明是否全通。







$$解:令 Z_1=sL, Z_2=\frac{1}{sC}, 则: Z_1Z_2=R^2$$

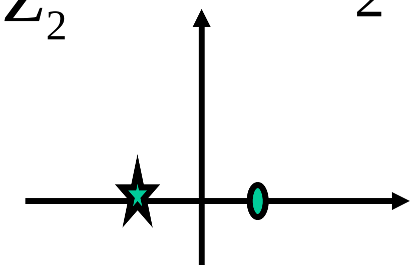


对上电路从2—2’向左用戴维南定理，则：

$$V_{oc}=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}V_1-\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}V_1=\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}V_1$$

$$R_{eq}=\frac{2Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$$

$$H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}\frac{R}{R+\dfrac{2Z_2Z_1}{Z_1+Z_2}}=\frac{R-Z_1}{R+Z_1}=\frac{R-sL}{R+sL}$$



$$H(jw)=H(s)\big|_{s=jw}=\frac{R-jwL}{R+jwL}=e^{j\varphi(w)}$$

$$\therefore |H(jw)|=1, \varphi(w)=-2\arctan\frac{wL}{R}$$

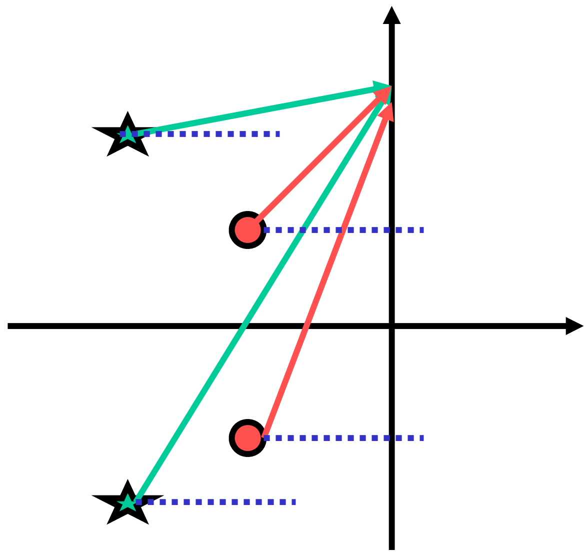
系统全通

§ 4.10　全通函数和最小相移函数的零、极点分布(3)

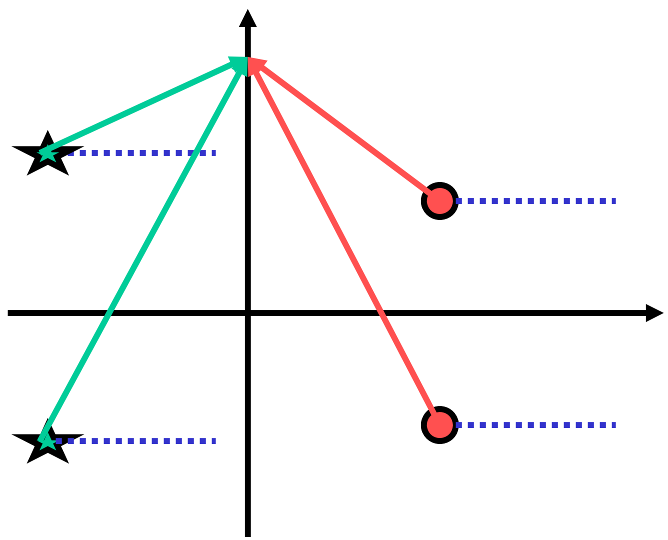
二、最小相移函数

最小相移网络：系统函数的极点全部落于s的左半平面，而全部零点落于左半平面或jw轴上的网络。

非最小相移网络：网络函数在s右半平面有一个或多个零点，称…它可以写成最小相移函数与全通函数的乘积。



相移小



相移大

§4.11 系统的稳定性（1）

一、系统的稳定极其条件

稳定系统：对有限(有界)的激励只能产生有限（有界）响应的系统。

若激励函数 ： $|e(t)| \le Me \quad 0 \le t \le \infty$ 　　Me 为有限的正实数

则响应函数 ： $|r(t)| \le Mr \quad 0 \le t \le \infty$ 　　Mr 为有限的正实数

由 $r(t) = h(t) * e(t)$

$$\therefore |r(t)| \le |h(t)| * Me = Me\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|dx$$

$|r(t)|$ 有限，故 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|dx < \infty$ (有限)

$$\boxed{\text{系统稳定的充要条件是}:\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|dx < \infty}$$

其必要性的说明：

不妨对系统施加特定激励：$e(-t) = \begin{cases} 1, h(t) < 0 \\ 0, h(t) = 0 \\ 1, h(t) > 0 \end{cases}$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e(t-x)dx \Rightarrow r(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e(-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|dx$$

§ 4.11 系统的稳定性（2）

$\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|dx$无界,则有$r(0)$无界,说明至少有一个特定的 激励会使系统产生无界响应.

故$\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|dx<\infty$是系统稳定的必要条件.

稳定系统h(t)的特征：h(t)除在t=0处可以有孤立的冲激外，都应是有限的：$|h(t)|<M, 0<t<\infty$

二、因果系统的稳定性分类

1、稳定系统：H(s)全部极点在s 左半平面（不含jw 轴)

$$\lim_{t\to\infty}[h(t)]=0$$

2、不稳定系统：H(s)有极点在s 右半平面，或jw 轴上有二阶以上极点。h(t)增长。

3、临界稳定系统：H(s)极点在jw轴上，且只有一阶。h(t)为非零数值或为等幅振荡。

§4.11 系统的稳定性（3）

例：已知两系统及其激励，求响应，并判稳。

$$\text{系统一}: H_1(s)=\frac{1}{s}, e_1(t)=u(t); \text{系统二}: H_2(s)=\frac{s}{s^2+w_0^2}, e_2(t)=\sin w_0 t u(t)$$

$$\text{解}: E_1(s)=\frac{1}{s} \qquad E_2(s)=\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$$

$$\therefore R_1(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2} \Leftrightarrow r_1(t)=tu(t)$$

$$R_2(s)=\frac{w_0}{s^2+w_0^2}\frac{s}{s^2+w_0^2} \Leftrightarrow r_2(t)=\frac{1}{2}t\sin w_0 tu(t)$$

稳定性分析：

1、自输入输出关系看：输入有界，输出无界，系统不稳定。

2、自h(t)看：两者均不满足绝对可积条件，系统不稳定。

3、自H(s)的极点位置看：两者在jw轴上有一阶极点，系统临界稳定。

三、系统函数的局限性

§4.11 系统的稳定性（4）

四、稳定判据——劳斯判据（适用于H(s)是s的有理函数）

1、特征方程的最高次项的系数为正，若其余项中有负系数或缺项，则系统不稳定。

$$D(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n=0$$

2、特征方程的全部系数同号且无缺项时，系统稳定与否，列劳斯表考察。

$$\begin{array}{cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & r_1 & & &
\end{array}$$

其中：$b_1=\dfrac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1};b_2=\dfrac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}$

$$c_1=\frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1};c_2=\frac{b_1a_5-a_1b_3}{b_1}$$

$$\vdots$$

$$r_1=a_n$$

A；若劳斯表中第一列所有的元素大于零，系统稳定。

B：若劳斯表中第一列出现负元素，则系统不稳定，第一列符号变化次数就是系统特征根实部大于0的右根个数。

§4.11 系统的稳定性（5）

例：系统的特征方程如下，判断其稳定性：

$$D(s)=s^4+2s^3+3s^2+4s+5=0$$

解：用劳斯判据，列劳斯表如下：

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 2 & 4 & 0 \\
s^2 & \dfrac{2\times3-1\times4}{2}=1 & 5 & 0 \\
s^1 & \dfrac{1\times4-2\times5}{1}=-6 & 0 & 0 \\
s^0 & 5 & 0 & 0
\end{array}$$

显然，第一列出现负元素，系统不稳定。（系统有两个正实部的右根）

§4.11 系统的稳定性（6）

3、劳斯判据特殊情况

A、劳斯表中第一列元素出现0时，用正的无穷小 ε 代之， ε 参与其下的代数运算。

B、劳斯表中某一行元素全为0时，可由该行的上一行元素构成辅助方程。对辅助方程求导，用求导后所得方程系数来取代全为0的行中的各元素，即可继续计算劳斯表。

例：判断下系统的稳定性：$D(s)=s^4+s^3-3s^2-s+2$

解：

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & -3 & 2 \\
s^3 & 1 & -1 & 0 \\
s^2 & -2 & 2 & 0 \\
s^1 & 0 & 0 & 0 \\
 & -4 & 0 & 0 \\
s^0 & 2 & &
\end{array}
$$

s^1行系数全为零,用s^2行元素构成辅助方程

$F(s)=-2s^2+2=0$,求导则:

$F'(s)=-4s=0$,则s^1行演化为:

劳斯表符号变化两次，系统有两右根，系统不稳定。

§4.11 系统的稳定性（7）

4、劳斯判据的应用

A、对系统判稳

B、求使系统稳定时参数的取值范围

例：求使下系统稳定的k的取值：$H(s)=\dfrac{k}{s(0.1s+1)(0.25s+1)+k}$

解：用劳斯判据。

$$D(s)=s(0.1s+1)(0.25s+1)+k=0 \Rightarrow 0.025s^3+0.35s^2+s+k=0$$

劳斯表为：

$$\begin{array}{lcc}
s^3 & 0.025 & 1 \\
s^2 & 0.35 & k \\
s^1 & 1-\dfrac{0.025k}{0.35} & 0 \\
s^0 & k & 0
\end{array}$$

要系统稳定，左表第一列元素全大于0，有：

$$\begin{cases} k>0 \\ 1-\dfrac{0.025k}{0.35}>0 \end{cases} \Rightarrow 0<k<14$$

§4.11 系统的稳定性（8）

C、判定系统的稳定程度

例：上例中，若要求系统的特征根全位于s=-1的左边，求取k的范围

$$解:系统的特征方程为: 0.025s^3+0.35s^2+s+k=0$$

$$令 s=s_1-1 代入上式\ ,有:$$

$$0.025(s_1-1)^3+0.35(s_1-1)^2+(s_1-1)+k=0$$

$$即: 0.25s_1^{\ 3}+0.275s_1^{\ 2}+0.375s_1+k-0.675=0$$

列劳斯表：

$s_1^{\ 3}$	0.025	0.375
$s_1^{\ 2}$	0.275	$k-0.675$
$s_1^{\ 1}$	$\dfrac{0.275\times0.375-0.025(k-0.675)}{0.275}$	0
$s_1^{\ 0}$	$k-0.675$	0

若要特征根均位于s=-1之左，只要:

$$\begin{cases} 0.025\times0.375-0.025(k-0.675)>0 \\ k-0.675>0 \end{cases} \Rightarrow 0.675<k<4.8$$

§4.12　双边拉普拉斯变换（1）

一、双边拉普拉斯变换

定义：$F_d(s) = LT_d[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

若定义$f(t) = \begin{cases} f_a(t) & , \quad t \ge 0 \\ f_b(t) & , \quad t < 0 \end{cases}$　　如$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & , \quad t \ge 0 \\ e^{at} & , \quad t < 0 \end{cases}$

则$f(t) = f_a(t)u(t) + f_b(t)u(-t)$

$$F_d(s) = LT_d[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} f_b(t)e^{-st}dt + \int_{0}^{\infty} f_a(t)e^{-st}dt = F_b(s) + F_a(s)$$

只有当左边函数与右边函数有相同的收敛区时,F(s)才存在。因为只有这时F(s)的收敛域才存在。

如对于f(t)=t而言：

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} te^{-\sigma t} = 0, \sigma > 0\text{收敛} \\ \lim\limits_{t\to\infty} te^{-\sigma t} = 0, \sigma > 0\text{不收敛} \end{cases} \Rightarrow \text{无公共收敛区}.$$

即函数$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$是不收敛的. $f(t) = t$不存在双边变换.

§4.12　双边拉普拉斯变换（2）

*当f(t)有双边变换时，$F_a(s)$的求法同前述单边变换。

对$F_b(s)$而言，讨论如下：

$$F_b(s)=\int_{-\infty}^{0} f_b(t)e^{-st}dt$$

令$t=-x$有：$F_b(s)=\int_{0}^{\infty} f_b(-x)e^{-s(-x)}dx$

令$p=-s$有：$F_{b1}(p)=\int_{0}^{\infty} f_b(-x)e^{-px}dx$(型如$f(-t)$的单边变换)

于是$F_b(s)$求取步骤为：

$a.$　对时间取反，令$t=-x$，构造右边函数$f_b(-x)$

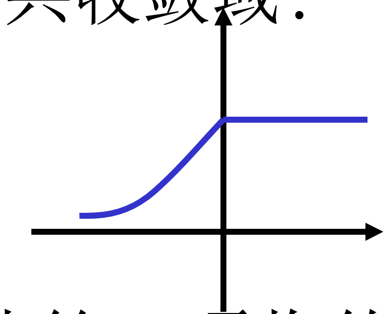
$b.$　求$f_b(-x)$的单边拉普拉斯变换 $F_{b1}(p)$

$c.$　用$-s$代替p，求得$F_b(s)$

- $F_d(s)=F_b(s)+F_a(s)$

§4.12　双边拉普拉斯变换（3）

例：$f(t)=u(t)+e^{t}u(-t)$, 求其双边变换反 $F(s)$ 与公共收敛域.



解：1、讨论收敛域：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-\sigma t}dt + \int_{0}^{\infty} 1e^{\sigma t}dt$$

$\sigma<1$时, 上式右边第一项收敛; $\sigma>0$时, 上式右边第二项收敛.

收敛域为：$0<\sigma<1$

2、原函数的双边拉普拉斯变换存在，求之

$$F_a(s) = LT[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$F_b(s)$求取如下：$a.\ f_b(-x) = f_b(t)\big|_{t=-x} = e^{-x}, x>0$

$$b.F_{b1}(p) = LT[f_b(-x)] = \frac{1}{p+1}$$

$$c.F_b(s) = F_{b1}(p)\big|_{p=-s} = \frac{1}{-s+1}$$

$$\therefore F(s) = F_a(s)+F_b(s) = \frac{1}{s}+\frac{1}{-s+1} = \frac{-1}{s(s-1)} \quad (0<\sigma<1)$$

§4.12　双边拉普拉斯变换（4）

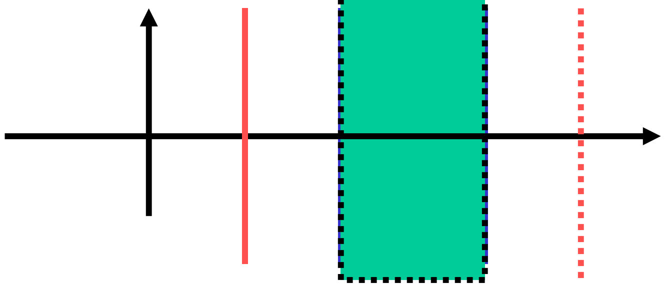
二、双边信号作用下线性系统的响应

由于选取系统零时间点的差别等一些原因，造成系统在选取的零点以前有激励。作一般规律讨论，不妨设激励为f(t)，其双边拉氏变换为 $F_d(s)$ ，收敛区为$\sigma_a < \sigma < \sigma_b$ 。又设系统符合因果律（响应在激励之后），其冲激响应为h(t).h(t)的拉氏变换为H(s)，$\sigma > \sigma_1$.即：

$$f(t) \leftrightarrow F_d(s), \sigma_a < \sigma < \sigma_b$$

$$h(t) \leftrightarrow H(s), \sigma > \sigma_1$$

$$R(s) = F_d(s)H(s)$$

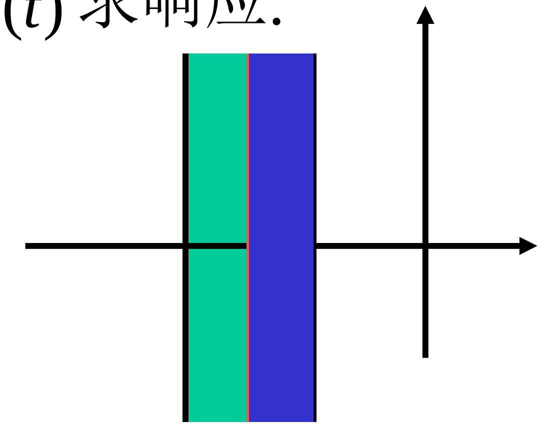


对上式而言,若$F_d(s)$与$H(s)$有公共的收敛域$(\sigma_1 < \sigma_b)$,$R(s)$的反变换存在,否则,$r(t)$不存在.

§4.12　双边拉普拉斯变换（5）

例： 系统: $h(t)=e^{-3t}, t>0$; 信号: $f(t)=e^{-2t}u(-t)+e^{-4t}u(t)$ 求响应.

解: 1、求 $F_d(s)$ 与 $H(s)$



$$F_d(s)=F_a(s)+F_b(s)=\frac{1}{s+4}-\frac{1}{s+2}, (-4<\sigma<-2)$$

$$H(s)=\frac{1}{s+3}, (\sigma>3)$$

2、考察 $F_d(s)$ 与 $H(s)$ 有无公共的收敛域，并 确定 $R(s)$ 收敛域。

公共收敛域为: $-3<\sigma<-2$, 亦即 $R(s)$ 收敛域。

3、求 $R(s)$

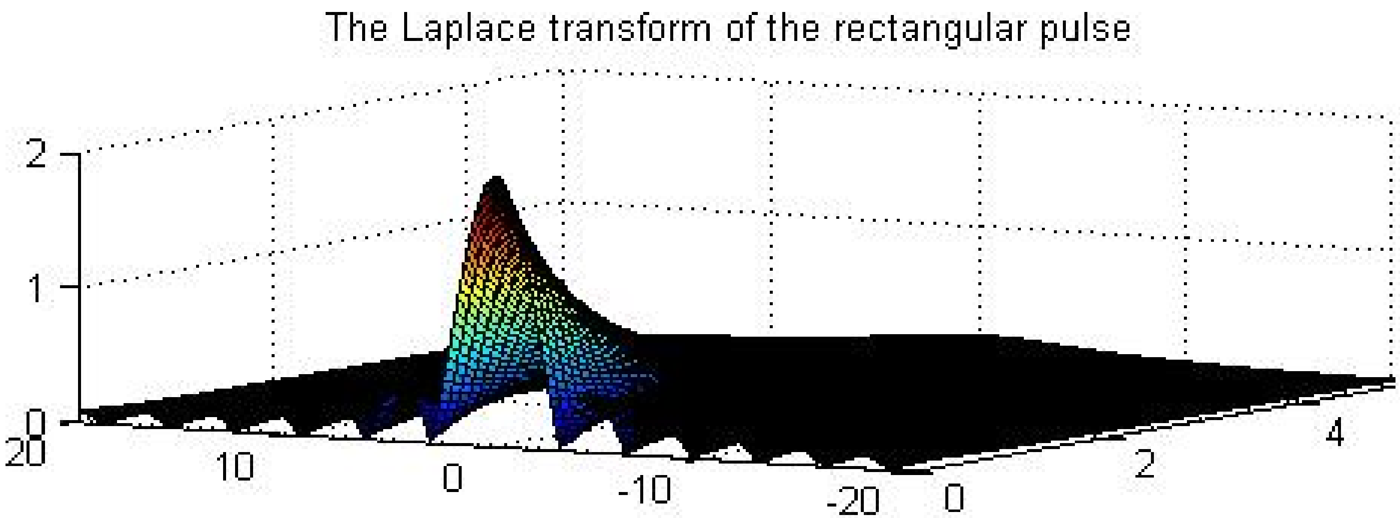
$$R(s)=F_d(s)H(s)=\frac{-2}{(s+2)(s+3)(s+4)}, (-3<\sigma<-2)$$

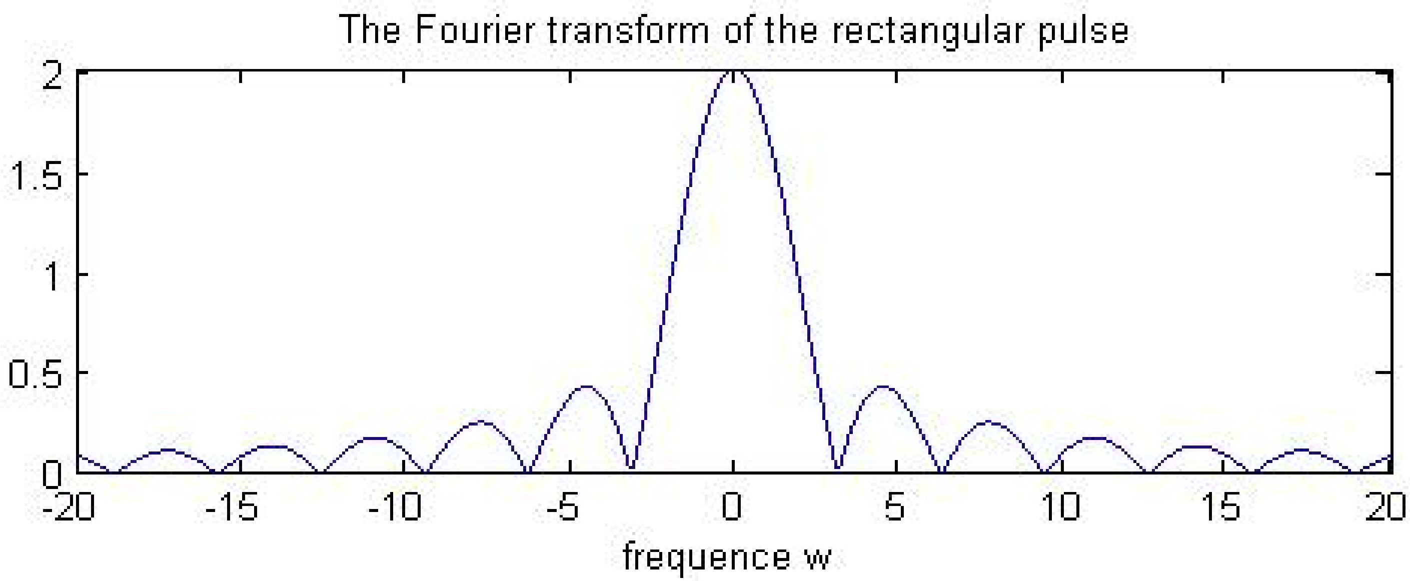
4、对 $R(s)$ 反变换：由 $-3<\sigma<-2$ 有

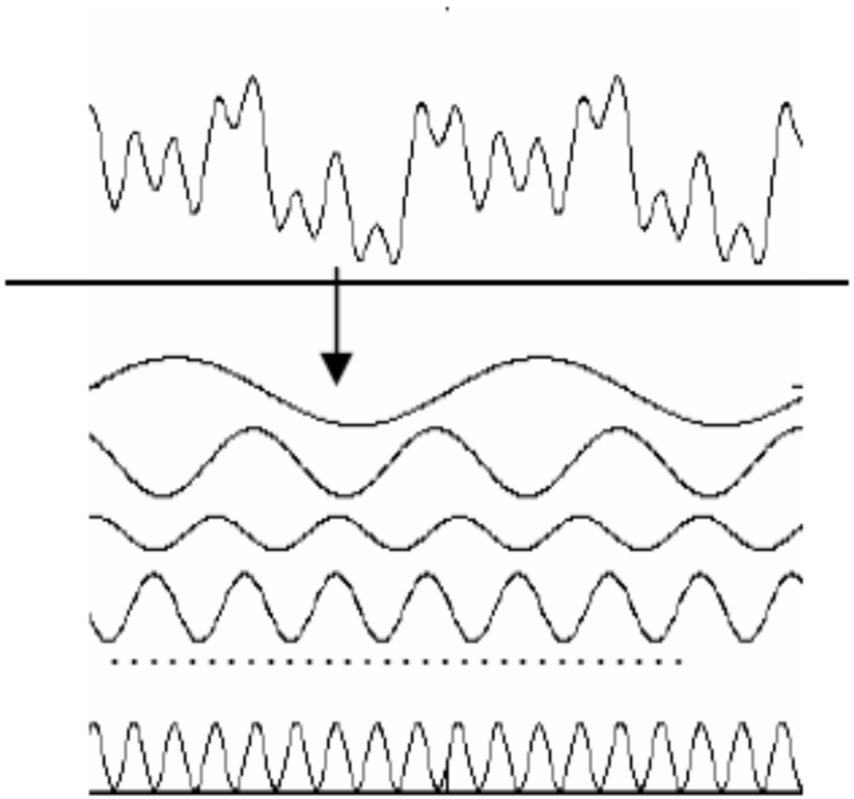
由 $-3<\sigma<-2$ 有：极点-2对应左边时间信号, -3, -4对应右边时间信号。

$$R(s)=\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+3}+\frac{-1}{s+4} \Rightarrow r(t)=\begin{cases} LT_b^{-1}[\frac{-1}{s+2}]=e^{-2t}u(-t) \\ [2e^{-3t}-e^{-4t}]u(t) \end{cases}$$

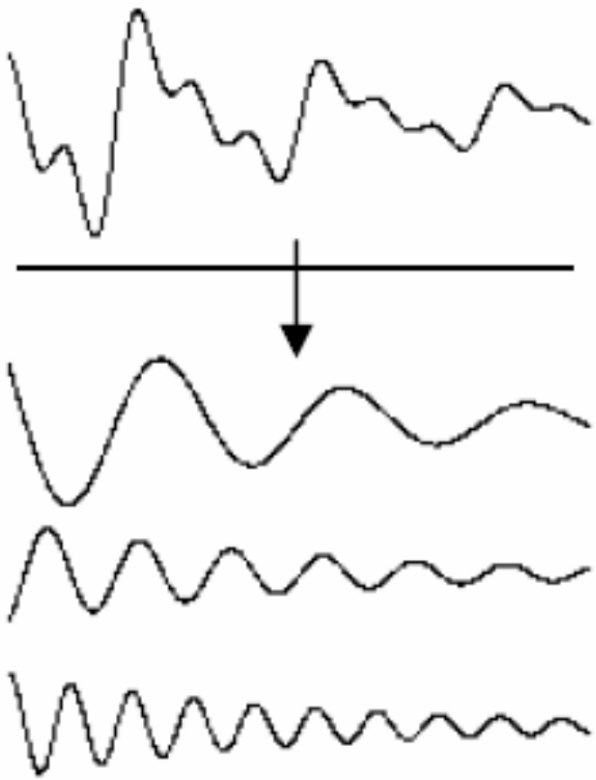
§4.13 拉普拉斯变换与傅立叶变换的关系.



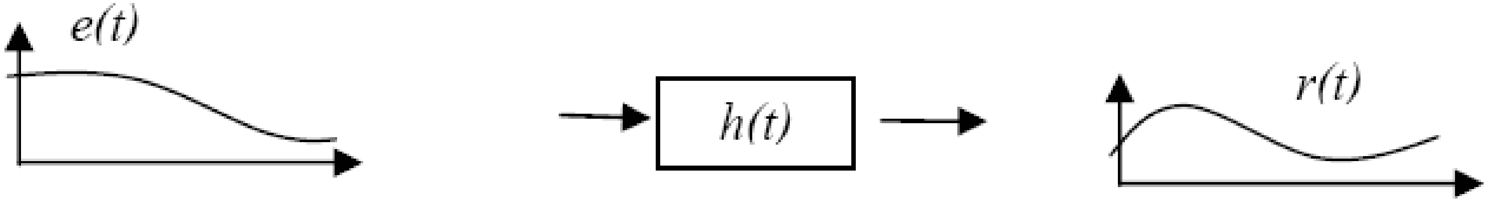




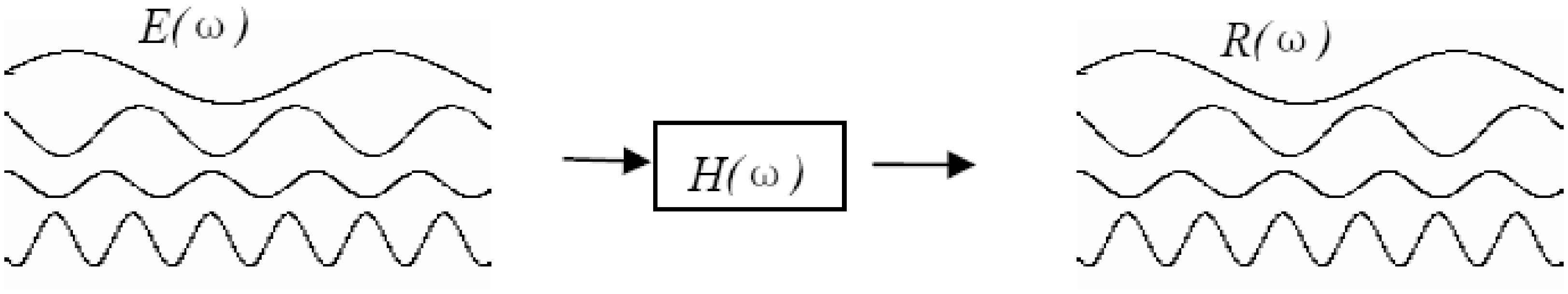
傅里叶变换



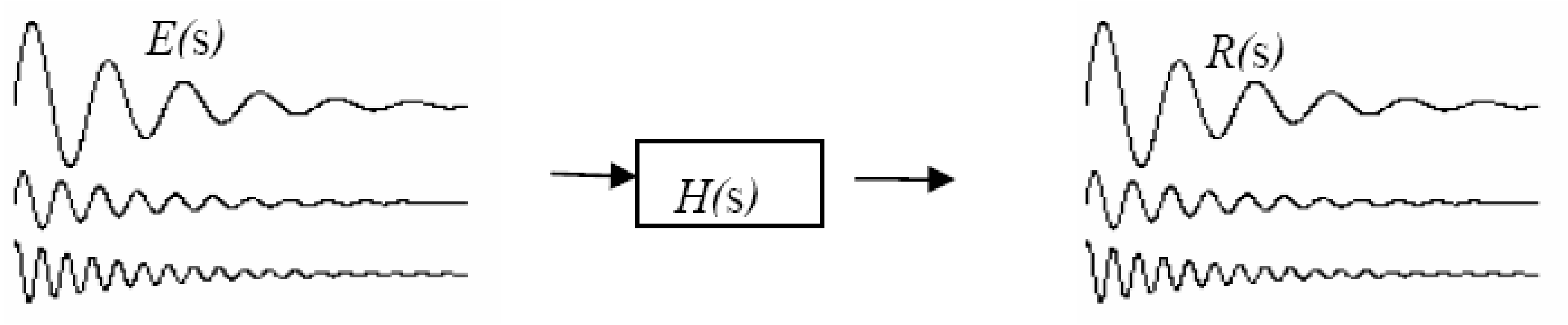
拉普拉斯变换



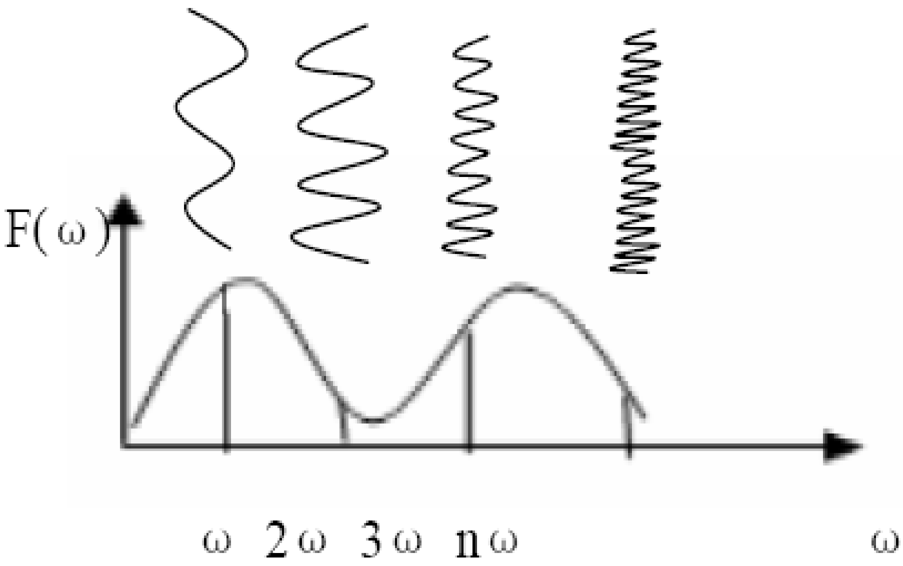
（1）时域变换



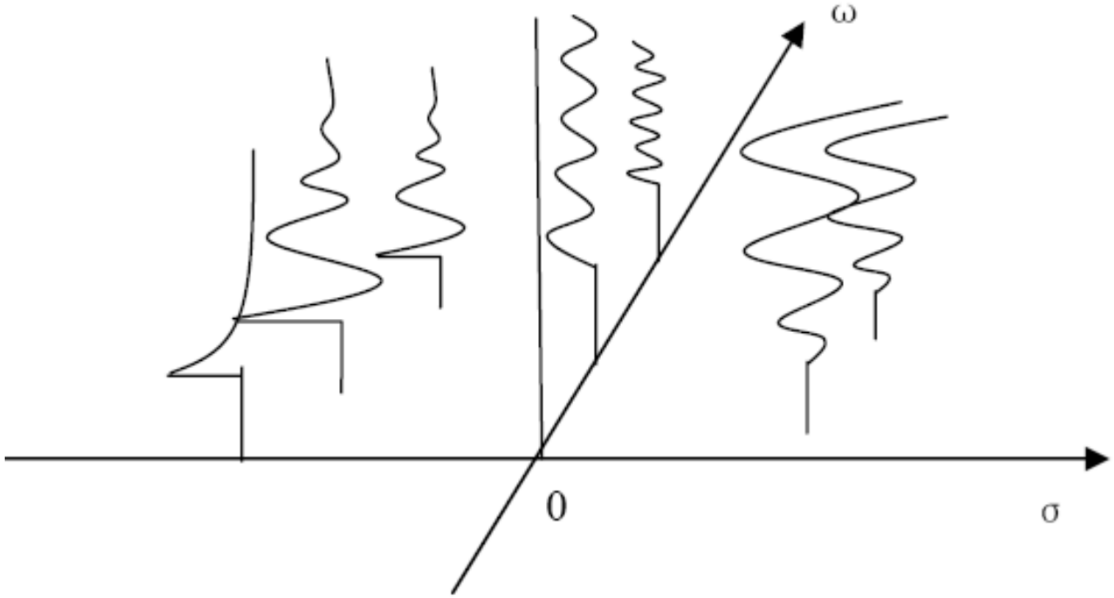
（2）傅里叶变换



（3）拉普拉斯变换



频域中的每个点对应一个正弦波



拉普拉斯变换中时域和频域的关系

§4.14　线性系统的模拟(1)

一、系统的模拟：根据系统的数学描述，用模拟的装置组成实验系统，使它与真实的系统有同样的微分方程或差分方程。模拟是指数学意义上的模拟。

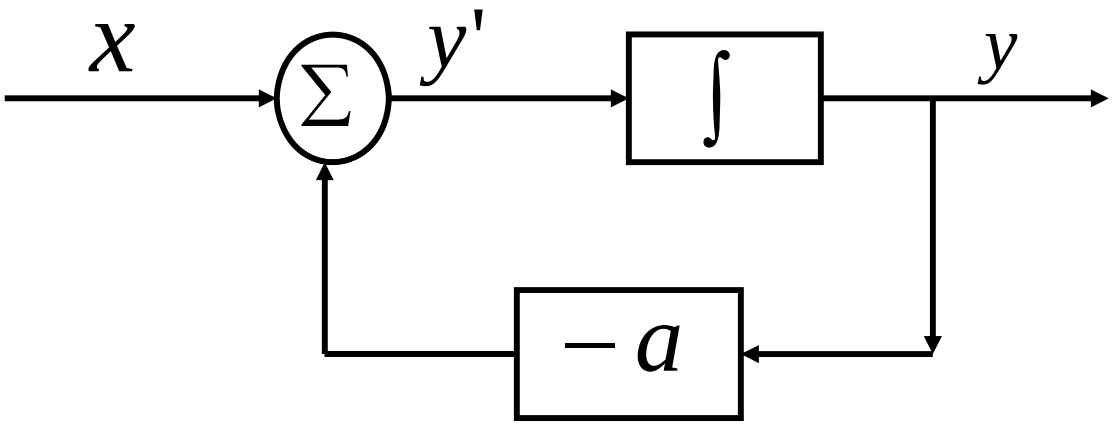
二、模拟的三种基本运算器:加法器,标量乘法器,积分器.（P30)

三、系统的模拟

1、时域下，输入单一为x

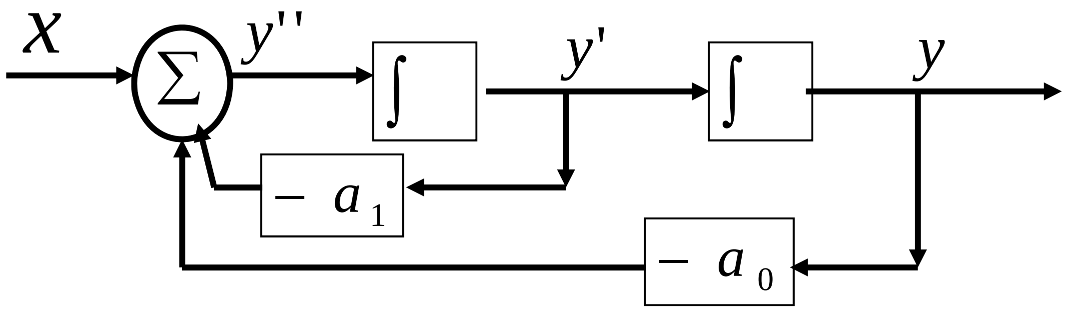
$a.$一阶系统$:y'+ay=x$

输入x,输出y,且$:y'=x-ay\quad (x\rightarrow y)$

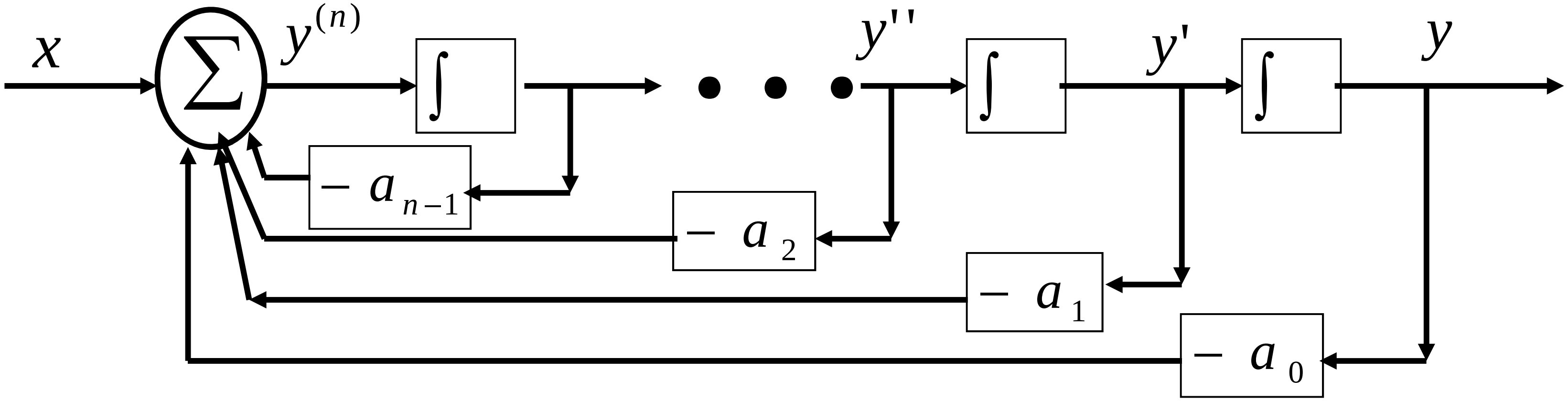


§4.14 线性系统的模拟(2)

b、二阶系统：$y''+a_1y'+a_0y=x \Rightarrow y''=x-a_1y'-a_0y$



c、n阶系统：$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=x$



§4.14 线性系统的模拟(3)

2、输入为单一x,含x导数项:

例:作$y''+a_1y'+a_0y=b_1x'+b_0x$的模拟图.

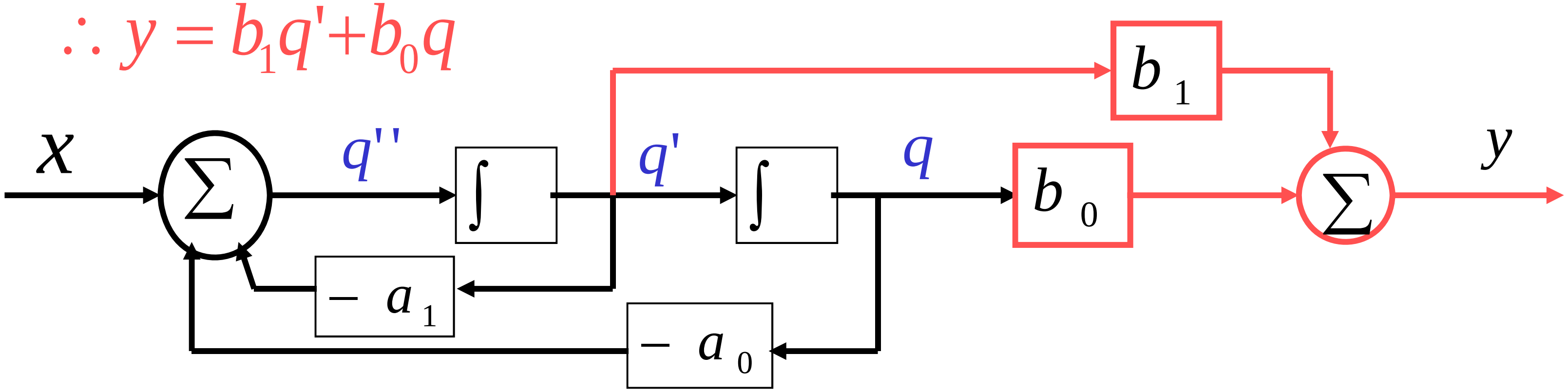
解:用辅助函数法,即引入辅助函数q:

设输入为x时,满足:$q''+a_1q'+a_0q=x$ (即$x\to q$)

由系统的微分特性和叠加特性有:

$x'\to q',b_1x'\to b_1q',b_0x\to b_0q,$而$b_1x'+b_0x\to y$

$\therefore y=b_1q'+b_0q$



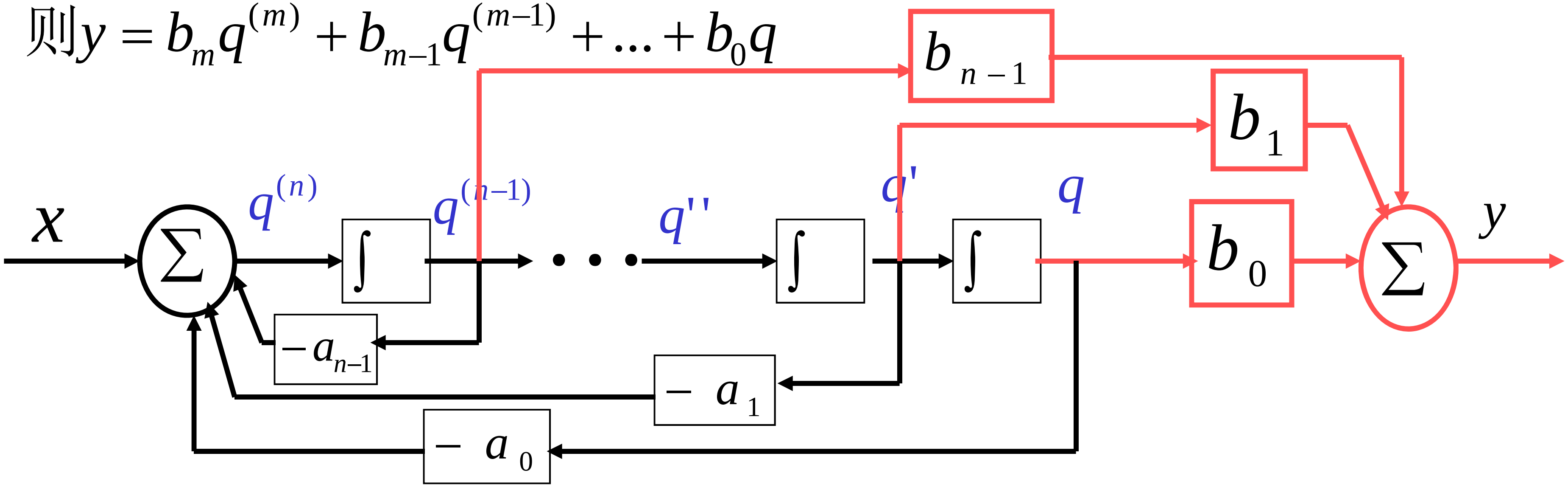
§ 4.14 线性系统的模拟(4)

同上理，对于一般形式的n阶系统：

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=b_mx^{(m)}+b_{m-1}x^{(m-1)}+\ldots+b_0x$$

设$q^{(n)}+a_{n-1}q^{(n-1)}+\ldots+a_1q'+a_0q=x$

则$y=b_mq^{(m)}+b_{m-1}q^{(m-1)}+\ldots+b_0q$



(直接模拟）

直接模拟的优缺点：优点：简便易行，直观。

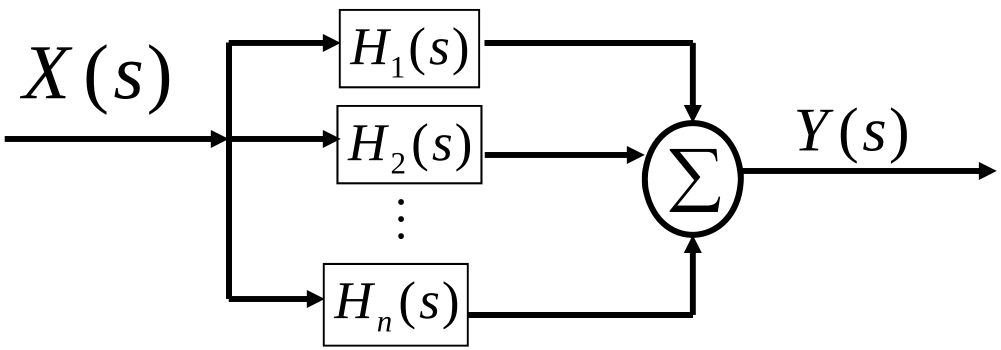
缺点：参数调节不便，容量有限。

§ 4.14 线性系统的模拟(5)

3、并联模拟框图与串联模拟框图

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}=b_m\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

$a.H(s)$可分解为: $H(s)=H_1(s)+H_2(s)+\ldots+H_n(s)$



$b.H(s)$可分解为: $H(s)=H_1(s)H_2(s)\ldots H_n(s)$