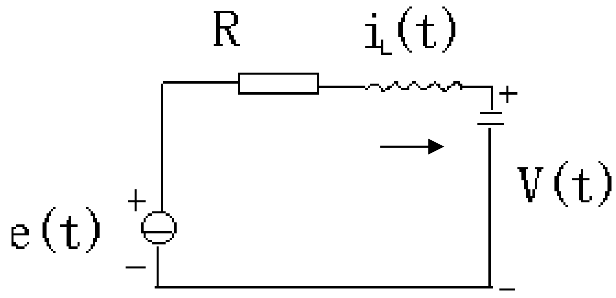
第十二章　系统的状态变量分析法

12.1 引言

1、描述系统的方法，按数学形式分类，可以分为

①输入输出分析法　②状态变量分析法



2、状态变量法中的几个基本概念

①状态变量法描述系统的要素

如图示:

对于本系统显然输入输出关系易求，但它描述的仅是 $e(t) \leftrightarrow v_c(t)$ 关系，无法知道系统工作的全貌。若用下方程组：

$$\begin{cases} Ri_L(t)+L\frac{d}{dt}i_L(t)+v_c(t)=e(t) \\ V_c(t)=\frac{1}{c}\int i_L(t)dt \Rightarrow \frac{d}{dt}V_c(t)=\frac{1}{c}i_L(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}i_L=-\frac{R}{L}i_L-\frac{1}{L}V_c+\frac{1}{L}e \\ \frac{d}{dt}V_c=\frac{1}{c}i_L \end{cases}$$

其特点为：以与为变量的一阶联微分方程组。对于该系统，只要知道 i_L, V_c, e 则可确定系统工作的全貌状态变量分析法其要素为：

a.一阶微分（差分）方程组　　b.描述系统的全貌

②几个定义：

a.状态：动态系统在 $t=t_0$ 时刻的状态，是一组代表所要最小信息量的数值 $x_1(t_0), x_2(t_0)\dots x_n(t_0)$，利用这组数值，联同系统的输入与系统模型，唯一确定时系统的工作情况。其实质是指系统的储能状况。

b.状态变量：能够表示系统状态的那些变量称为状态变量

c.状态矢量：能完全描述一个系统行为的若干个状态变量，看作矢量的各个分量坐标

通常状态变量记为矩阵形式，
每一矩阵元素即为一状态变量

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots\dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

d.状态空间：状态矢量所在的空间

e.状态轨迹：在状态空间中状态矢量端点随时间变化而描述出的路径称为状态轨迹

3、状态变量分析法的优点：

①便于研究系统内部变化规律，从而便于研究系统的规律和检查物理系统的模型是否正确

②系统的状态变量分析法与系统的复杂程度没有大的关系，复杂系统和简单系统的数学模型相似，都是一阶统线性微分（差分）方程组。因此该分析法对多输入输出系统有很强的处理能力

③可有效地用于非线性时变系统

④便于分析系统的可控性和可观测性及稳定性。

⑤便于用计算机处理（数值解法）

12.2　系统的状态方程的建立

1、状态变量的选取

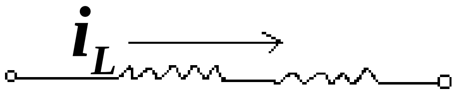
①此系统中一般选电感电流和电容电压作为状态变量

②状态变量的个数等于系统的阶数

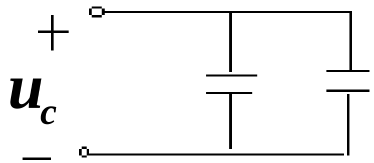
③状态变量是独立变量

a.“独立”从数学形式上看，只可由其他变量积分，微分得到

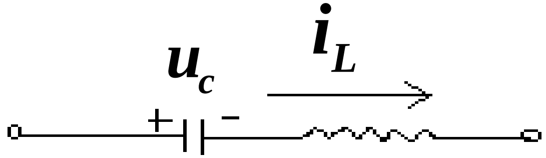
b.从电路形式上看



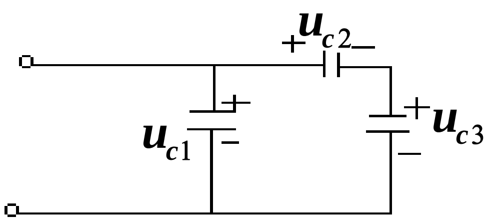
只有一个独立电流i_L



一个独立电压u_c

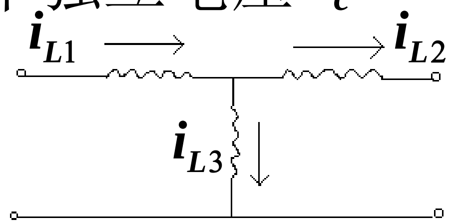


二个独立变量u_c, i_L



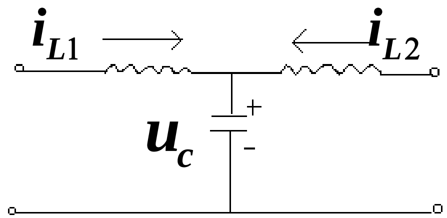
二个独立电压

$$u_{c2} = u_{c1} - u_{c3}$$



二个独立电流

$$i_{L3} = i_{L1} + i_{L2}$$



三个独立变量

$$i_{L1}, i_{L2}, u_c$$

即：一般而言取全部独立的电感电流电容电压为状态变量.

2、状态方程的建立：

状态方程建立的方法有：

直接编写法	直观列写
	网络拓扑分析编写
	系统编写（借助计算机编写）
间接编写法	由输入输出方程编写
	由系统框图或信号流图写
	由系统转移函数写

由电路用直观法与网络拓扑分析法写状态方程的步骤为：

①取独立的电感电流与电容电压为状态变量

②对每一独立变量列写一阶微分方程

③消去冗余变量（非状态变量），整理。

3、状态方程的矢量表示：

为便于数学表述与数学处理，将状态方程用一般的数学　形式表示。则不区分状态变量的物含意义，把n阶系统的状态变量记为：

$$x_1(t), x_2(t) \ldots\ldots x_n(t)$$

且输入用$e_1(t), e_2(t) \ldots\ldots e_m(t)$表示.

单输入下输入记为$e(t)$.单输入状态方程的一般形式：

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 e$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 e$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n e$$

多输入状态方程的一般形式：

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + \ldots. + b_{1m}e_m$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}e_1 + b_{22}e_2 + \ldots. + b_{2m}e_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}e_1 + b_{n2}e_2 + \ldots. + b_{nm}e_m$$

其中a,b由系统中元件参数决定。对LTI系统为常数。其他系统，可能是函数式。将上一般形式写为矩阵形式，有：

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdots\cdot \\ x_n' \end{bmatrix}}_{x'}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x}
+
\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}}_{B}
\underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdots \\ e_n \end{bmatrix}}_{e}
$$

$$\therefore\ x' = Ax + Be$$

4、输出方程

输出方程：把输出响应表示成状态变量，输入激励和系统元件模型的参数所组成的线性代数方程

若系统有r个输出响应函数：$y_1(t), y_2(t),.....y_r(t)$, 则列出含有r个方程的输出方程组：

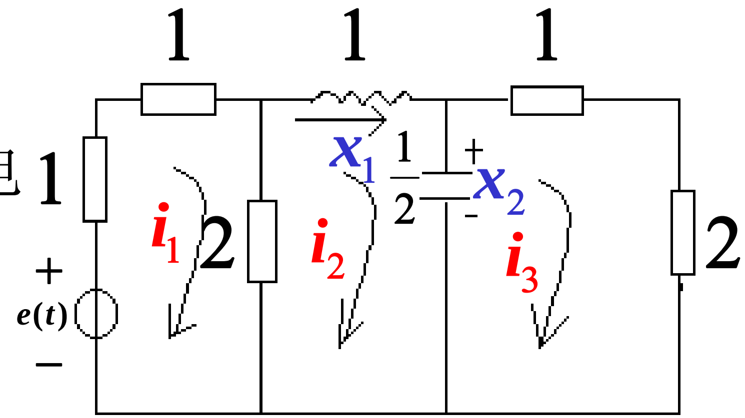
$$\begin{aligned}
y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n + d_{11}e_1 + d_{12}e_2 + ... + d_{1m}e_m \\
y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n + d_{21}e_1 + d_{22}e_2 + ... + d_{2m}e_m \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_r &= c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + ... + c_{nn}x_n + d_{r1}e_1 + d_{r2}e_2 + ... + d_{rm}e_m
\end{aligned}$$

写成矩阵形式：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .... \\ y_n \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{r1} & c_{r2} & ... & c_{rn} \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & ... & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & ... & d_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ d_{m1} & d_{m2} & ... & d_{mm} \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ ... \\ e_m \end{bmatrix}}_{e} \Rightarrow y = Cx + De$$

任何线性系统，均可列出如上输出方程，从而将不同系统的供述归并到一种通式，便于计算机求解。

例1：列下图状态方程：



解：①选状态变量：电感电流 x_1,电容电压 x_2

②列独立变量的一阶微分方程

$$Lx_1' = 2(i_1 - x_1) - x_2 \quad \Rightarrow x_1' = -x_2 - 2x_1 + 2i_1$$

$$cx_2' = x_1 - i_3 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}x_2' = x_1 - i_3$$

③消去冗余变量：

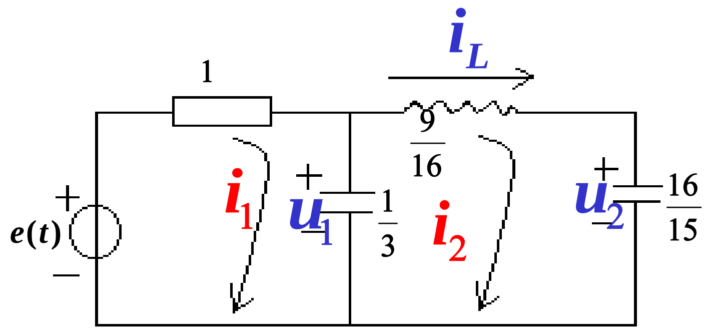
$$e = 4i_1 - 2x_1 \Rightarrow i_1 = \frac{1}{4}e + \frac{1}{2}x_1 \qquad x_2 = i_3(1+2) = 3i_3 \Rightarrow i_3 = \frac{1}{3}x_2$$

$$\therefore \begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 + \frac{1}{2}e \\ x_2' = 2x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 0e \end{cases}$$

即：

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e$$

例2：列下图状态方程：



解：①选状态变量如图

②列独立变量的一阶微分方程：

$$\frac{1}{3}u_1' = i_1 - i_2 \Rightarrow u_1' = 3i_1 - 3i_L$$

$$\frac{9}{16}i_L' = u_1 - u_2 \Rightarrow i_L' = \frac{16}{9}u_1 - \frac{16}{9}u_2$$

$$\frac{16}{15}u_2' = i_L \Rightarrow u_2' = \frac{15}{16}i_L$$

③消去冗余变量 i_1：$i_1 = \dfrac{e-u_1}{R_1} = e - u_1$

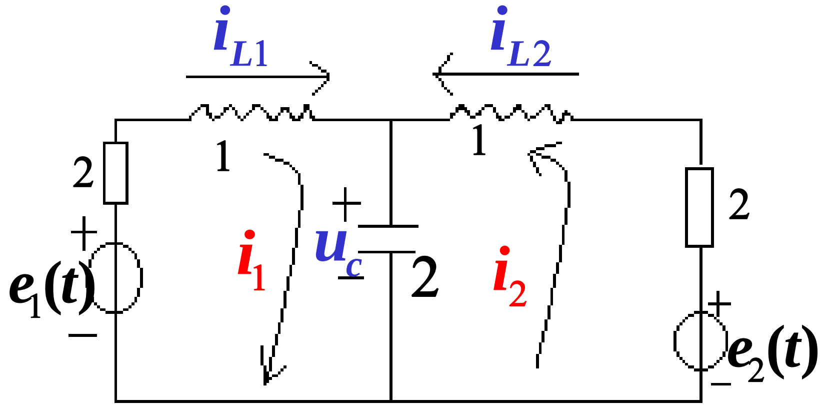
$$u_1' = -3u_1 - 3i_L + 3e$$

$$\therefore\ i_L' = \frac{16}{9}u_1 - \frac{16}{9}u_2$$

$$u_2' = \frac{15}{16}i_L$$

$$\therefore \begin{bmatrix} u_0' \\ i_L' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ \frac{16}{9} & 0 & -\frac{16}{9} \\ 0 & \frac{15}{16} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_L \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e$$

例3：列下图状态方程：



解：①选状态变量如图

②列独立变量的一阶微分方程：

$$\begin{cases} i_{L1}' = (e_1 - 2i_1) - u_c \\ i_{L2}' = (e_2 - 2i_2) - u_c \\ u_c' = \dfrac{1}{2}(i_{L1} + i_{L2}) \end{cases}$$

③消去冗余变量：

$$i_1 = i_{L1} \quad , \quad i_2 = i_{L2}$$

$$\therefore \begin{cases} i_{L1}' = -2i_{L1} - u_c + e_1 \\ i_{L2}' = -2i_{L2} - u_c + e_2 \\ u_c' = \dfrac{1}{2} i_{L1} + \dfrac{1}{2} i_{L2} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_{L1}' \\ i_{L2}' \\ u_c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

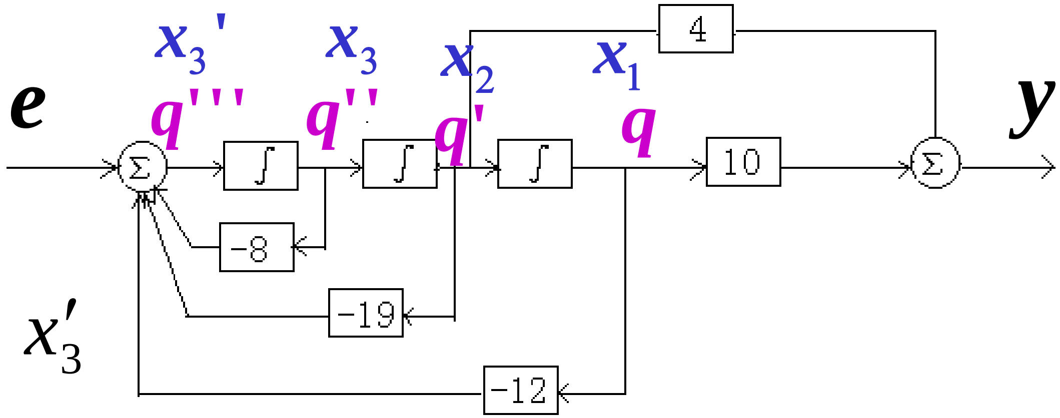
5、由输入输出方程求状态方程

A.简单的连续时间系统的状态方程

设某三阶连续时间系统的微分方程为：$\left(p^3+8p^2+19p+12\right)y(t)=(4p+10)e(t)$

则其转移函数为：$H(s)=\dfrac{Y(s)}{E(s)}=\dfrac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s+3}-\dfrac{2}{s+4}$

①作其直接模拟图如下：



对上模拟图中的辅助变量q，用状态变量表示（即用相变量变量表示）：

$$q=x_1,q'=x_2,q''=x_3,q'''=x_3'$$

则上模拟图可表示为：

$$\begin{cases} x_1'=x_2 \\ x_2'=x_3 \\ x_3'=-12x_1-19x_2-8x_3+e \end{cases}$$

$$y=10x_1+4x_2$$

写成矩阵形式，得到：

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}=Ax+Be=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}e$$

状态方程

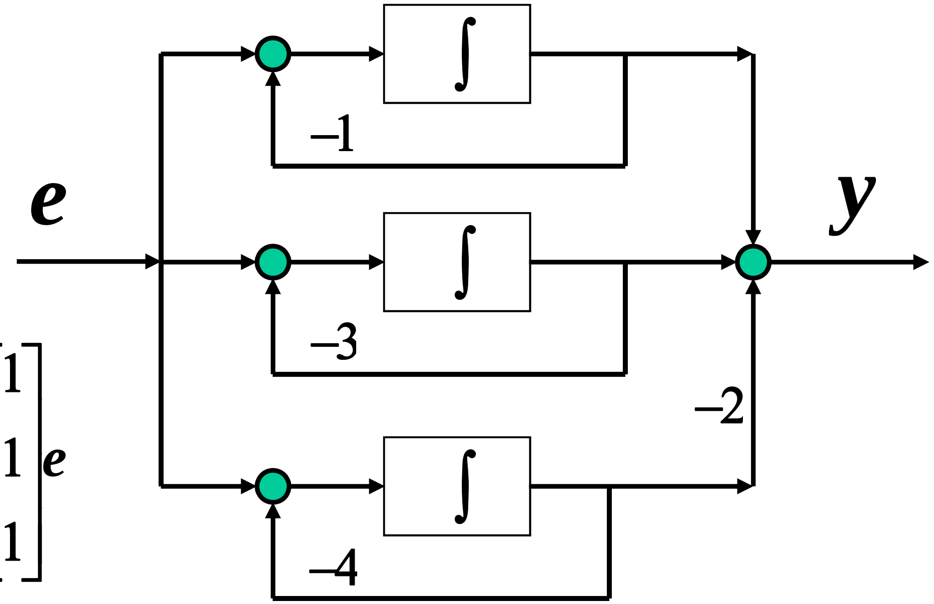
$$y=Cx+De=\begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

输出方程

②并联模拟

$$H(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+4}$$

作其模拟图如右：



如上图有：

$$\begin{cases} x_1'=-x_1+e \\ x_2'=-3x_2+e \\ x_3'=-4x_3+e \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}e$$

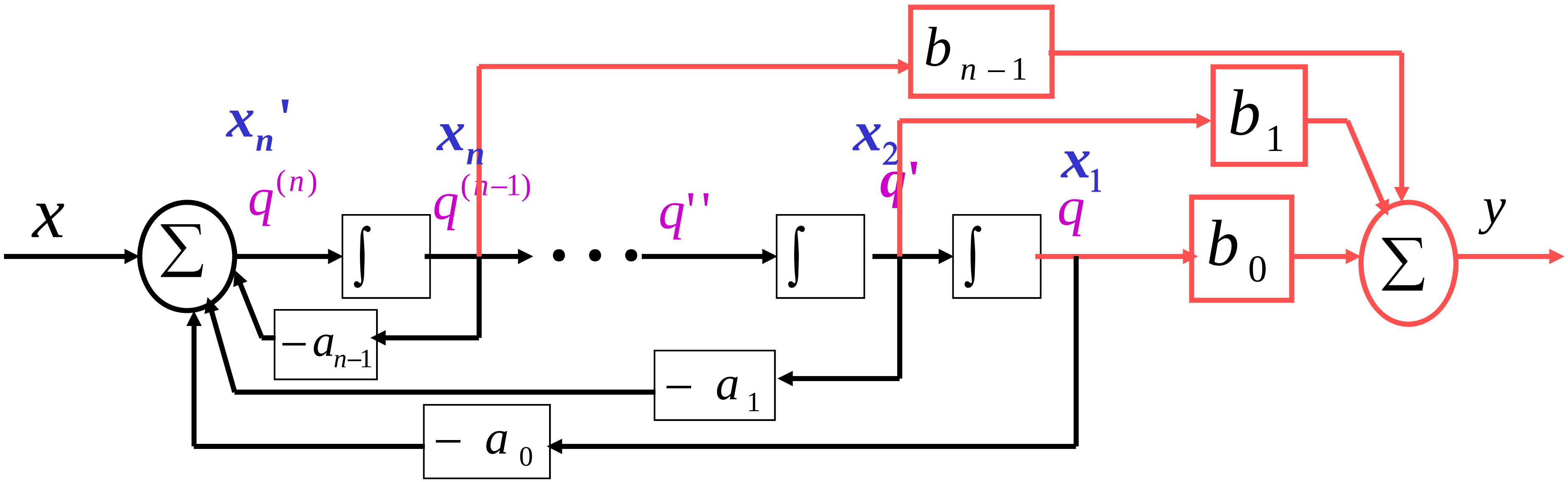
$$y=x_1+x_2-2x_3 \Rightarrow y=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

B．一般连续时间系统的状态方程：

①相变量：

n阶系统：$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=b_mx^{(m)}+b_{m-1}x^{(m-1)}+\ldots+b_0x$

a. $m\le n-1$时，其模拟图为:



由上图有：

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \cdots\cdots - a_0 x_1 + e \end{cases}$$

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots\cdots + b_m x_{m+1}$$

把上式写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e$$

状态方程

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

输出方程

规律：①A矩阵最后一行为$-a_0, -a_1, \ldots\ldots -a_{n-1}$,

②A矩阵对角线右边元素均为1

③A矩阵其它元素为0

④B矩阵最后一行为1，其余为0

⑤C矩阵元素依次为$b_0, b_1, \ldots., b_m, 0, \ldots.., 0$

⑥D矩阵为0

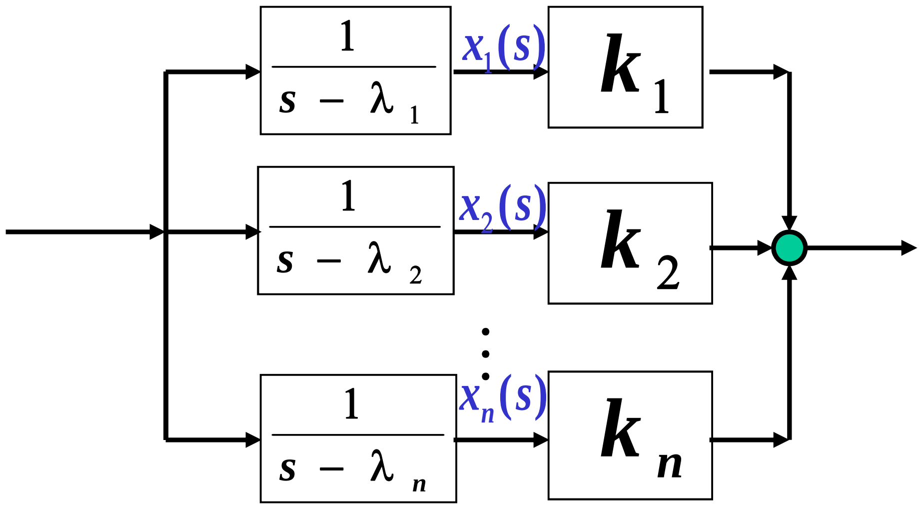
若m=n，则:显然,对于状态方程，与 m<=n-1时形式完全相同.对输出y,有：

$$y = (b_0 - b_n a_0)x_1 + (b_1 - b_n a_1)x_2 + \ldots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1})x_n + b_n e$$

$$\therefore y = \begin{bmatrix} (b_0 - b_n a_0) & (b_1 - b_n a_1) & \ldots.. & (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n e$$

②对角线变量：

$$H(s)=\frac{k_1}{s-\lambda_1}+\frac{k_2}{s-\lambda_2}+\dots\dots+\frac{k_n}{s-\lambda_n}$$



$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 \\ \dots\dots\dots\dots. \\ x_{n-1}' = \lambda_{n-1} x_{n-1} \\ x_n' = \lambda_n x_n \end{cases}$$

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots. + k_n x_n$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots. \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots. & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots. & 0 & 0 \\ \dots. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e \qquad y = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_{n-1} & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots. \\ x_n \end{bmatrix}$$

规律：

①A矩阵对角线元素为$H(s)$各极点，其余元素为0

②B矩阵为1

③C矩阵为部分分式系数

④D矩阵为0

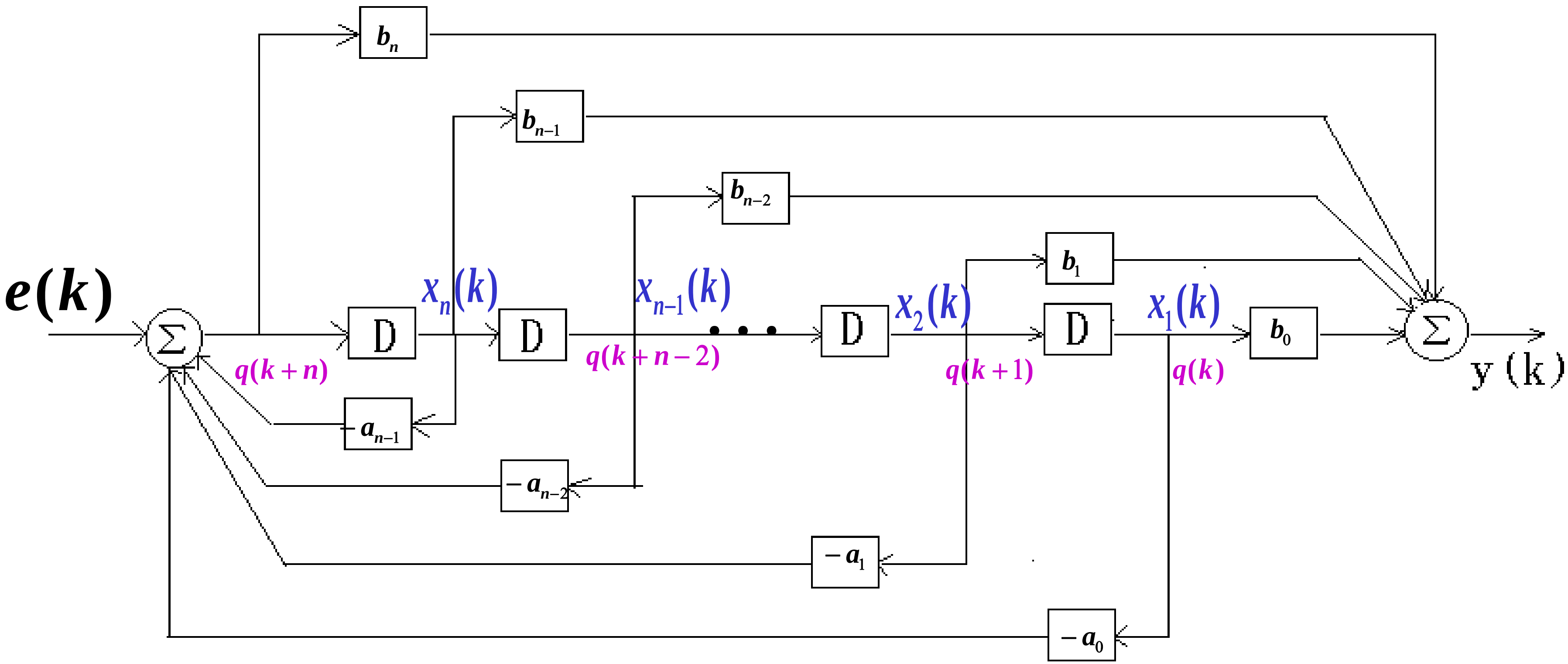
C. 离散时间系统的状态方程

离散系统的状态方程表现为一阶联立差分方程的形式。

对于n阶差分方程，其一般形式可写为：

$$y(k+1)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_0y(k)=b_me(k+m)+b_{m-1}e(k+m-1)+\ldots+b_0e(k)$$

m=n时，对其直接模拟图如下：



如上图，令$q(k)=x_1(k)$辅助变量有：

$$
\begin{cases}
q(k+1)=x_2(k)=x_1(k+1) \\
q(k+2)=x_3(k)=x_2(k+1) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
q(k+n-1)=x_n(k)=x_{n-1}(k+1) \\
q(k+n)=x_n(k+1)=-a_0x_1(k)-a_1x_2(k)\ldots-a_{n-1}x_n(k)+e(k)
\end{cases}
$$

输出方程：

$$
\begin{aligned}
y(k)&=b_0x_1(k)+b_1x_2(k+1)+\ldots\ldots+b_n\left[-a_0x_1(k)-a_1x_2(k)-\ldots-a_{n-1}x_{n-1}(k)+e(k)\right] \\
&=(b_0-b_na_0)x_1(k)+(b_1-b_na_1)x_2(k)+\ldots+(b_{n-1}-b_na_{n-1})x_n(k)+b_ne(k)
\end{aligned}
$$

写成矩阵形式：

$$
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\
-a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{m-2} & -a_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \ldots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(k)
$$

状态方程

$$y(k)=\begin{bmatrix} b_0-b_na_0 & b_1-b_na_1 & \dots & b_{n-1}-b_na_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \dots \\ x_n(k) \end{bmatrix}+b_ne(k)$$

输出方程

矢量式：$x(k+1)=Ax(k)+Be(k)$
$y(k)=Cx(k)+De(k)$

m<n时，状态方程完全相同，但输出方程不同，其时：

$$y(k)=b_0x_1(k)+b_1x_2(k)+\dots+b_mx_{m+1}(k)$$

即：$$y(k)=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \dots\dots \\ x_{m+1}(k) \end{bmatrix}$$

$$y(k)=Cx(k)$$

由此可见，连续与离散系统有平行相似性：$x' \to x(k+1),\ x \to x(k)$

其状态方程的矩阵A,B,C,D类似。