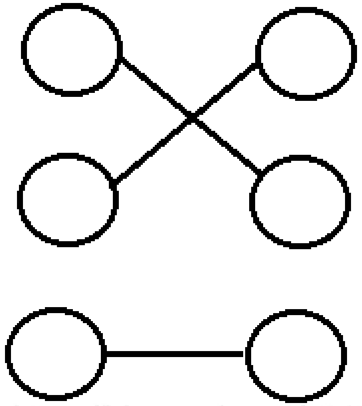
匈牙利算法——最大匹配问题

姓名：刘璐　　导师：龚勋

匈牙利算法

先行概念:

1、图G的一个匹配是由一组没有公共端点的不是圈的边构成的集合。这里，我们用一个图来表示下匹配的概念：

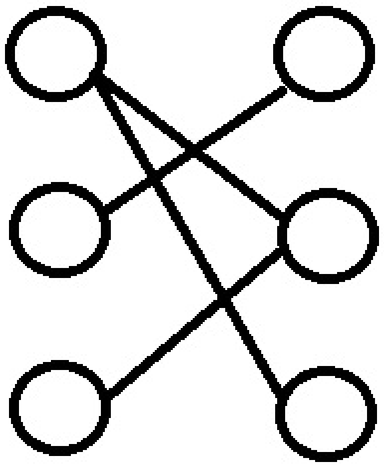


如图所示，其中的三条边即该图的一个匹配；所以，匹配的两个重点：1. 匹配是边的集合；2. 在该集合中，任意两条边不能有共同的顶点。

概念点：

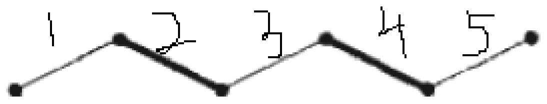
完美匹配：考虑部集为X={x1 ,x2, ...}和Y={y1, y2, ...}的二部图，一个完美匹配就是定义从X-Y的一个双射，依次为x1, x2, ... xn找到配对的顶点，最后能够得到 n！个完美匹配。

二部图：这个其实很好理解，给定两组顶点，但是组内的任意两个顶点间没有边相连，只有两个集合之间存在边，即组1内的点可以和组2内的点相连，这样构建出来的图就叫做二部图（更好理解就是n个男人，n个女人，在不考虑同性恋的情况下，组成配偶）



二部图

概念点：
最大匹配：一个图所有匹配中，所含匹配边数最多的匹配，称为这个图的最大匹配。
可以看出来，完美匹配一定是最大匹配，而最大匹配不一定是完美匹配。
当然，有些情况下我们做不到完美匹配，只能尽可能实现最多的配对，这个就叫做最大匹配。所以，我们的核心目标就是找到最大匹配了。
交错路径：给定图G的一个匹配M，如果一条路径的边交替出现在M中和不出现在M中，我们称之为一条**M-交错路径。**
而如果一条M-交错路径，它的两个端点都不与M中的边关联，我们称这条路径叫做**M-增广路径。**
举个例子：



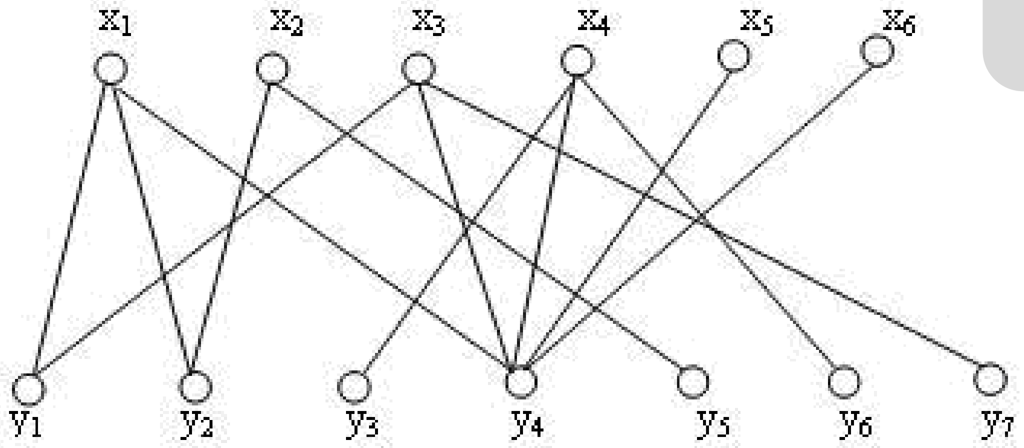
看起来复杂的问题，变成了寻找增广路径这么个解决问题的想法了。
当图中再没有增广路径了，就意味着我们找到了该图的最大匹配了。

在上图中，有五条边，按照匹配的概念，2, 4两条加粗的边是一个匹配，目光锐利的你或许同时发现了，1, 3, 5是不是也是一个匹配呢?
毫无疑问是的!

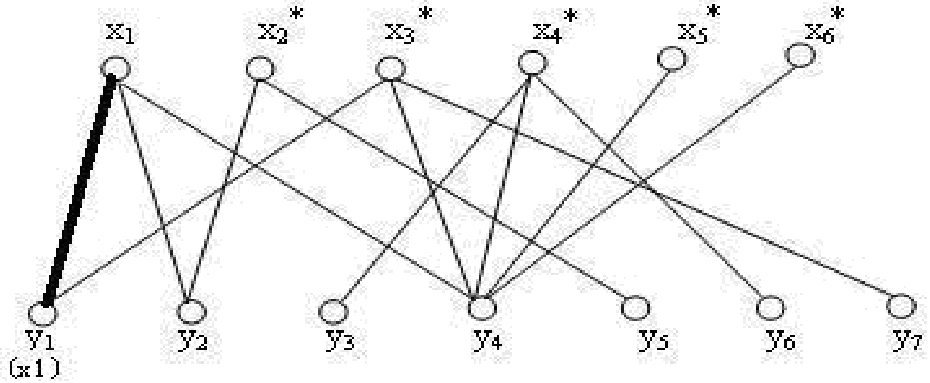
匈牙利算法：

我们的目标是尽可能给x中最多的点找到配对。

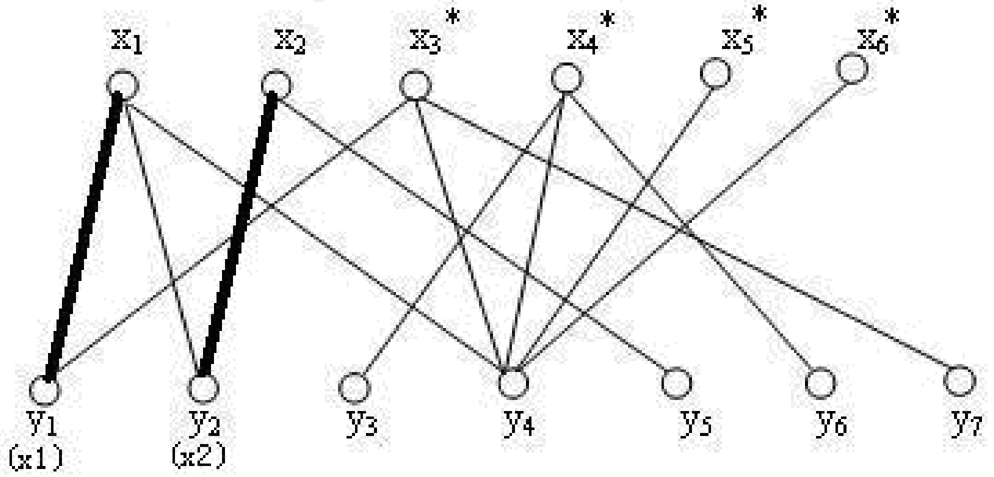
给定一个图：



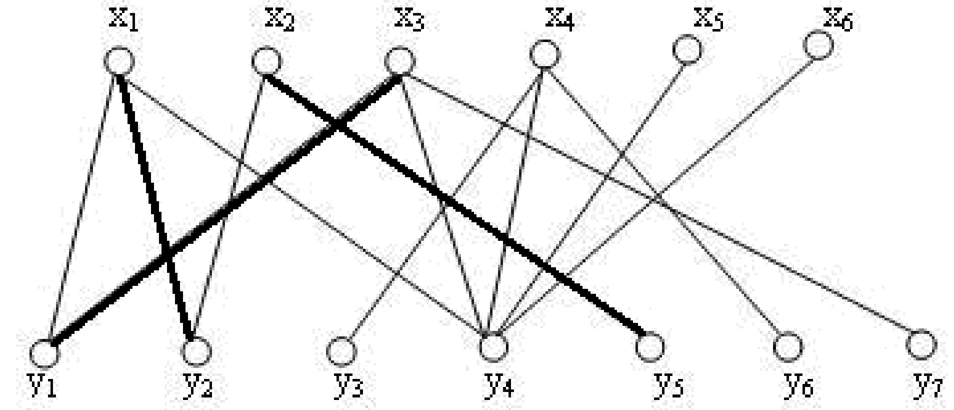
1、刚开始，一个匹配都没有，我们随意选取一条边，（x1, y1）这条边，构建最初的匹配出来，结果如下，已经配对的边用粗线标出：



2. 我们给x2添加一个匹配，如下图的（x2，y2）边。



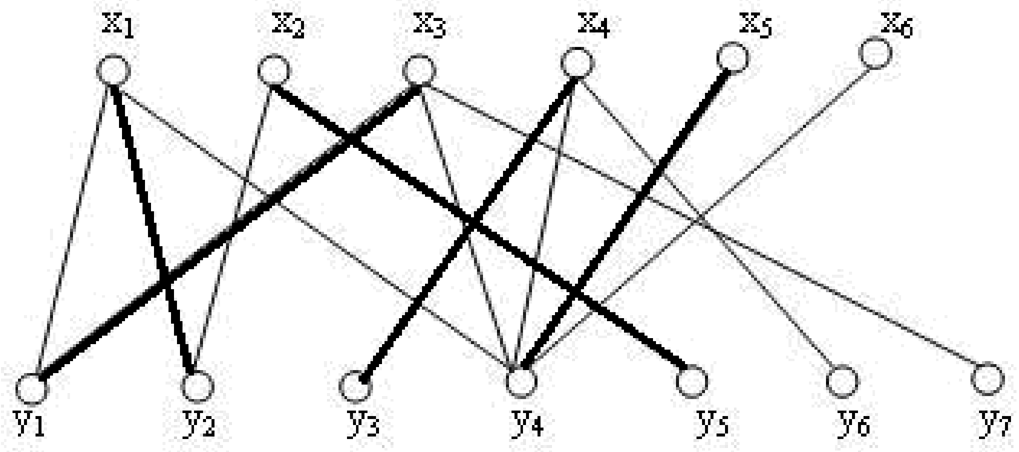
3、我们现在想给x3匹配一条边，发现它的另一端y1已经被x1占用了，那x3就不高兴了，它就去找y1游说，让y1离开x1。



4、上面这个争论与妥协的过程中，我们把牵涉到的节点都拿出来：（x3， y1， x1， y2， x2， y5），很明显，这是一条路径P。
而在第二步中，我们已经形成了匹配M，而P呢？还记得增广路径么，我们发现，P原来是M的一条增广路径！
上文已经说过，发现一条增广路径，就意味着一个更大匹配的出现，于是，我们将M中的配对点拆分开，重新组合，得到了一个更大匹配，M1，其拥有（x3， y1），(x1， y2)， (x2， y5)三条边。

而这，就是匈牙利算法的精髓。同样，x4 ， x5 按顺序加入进来，最终会得到本图的最大匹配。

1. 匈牙利算法寻找最大匹配，就是通过不断寻找原有匹配M的增广路径，因为找到一条M匹配的增广路径，就意味着一个更大的匹配M'，其恰好比M 多一条边。
2. 对于图来说，最大匹配不是唯一的，但是最大匹配的大小是唯一的。



Thank You