第四章 物质中的电场

§1 极化

Thm: $\vec{p}=\alpha\vec{E}$ （α 称为原子极化率，当 $\vec{E}$ 不太大时，$\vec{p}$ 与 $\vec{E}$ 成正比）

Tip. 当电荷结构无对称性时

$$\begin{cases} p_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ p_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ p_z = \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z. \end{cases} \Rightarrow \vec{p} = \underset{\text{极化张量.}}{\underset{\downarrow}{\alpha}}\vec{E}$$

一般可找主轴 s.t. α 为对角的

Thm. $\vec{N}=\vec{p}\times\vec{E}$ （在电场中的偶极子会受力矩）（因近似看为 $\vec{p}$ 的 d 无限小时，电场可看为均匀场）

$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E} = q(\vec{d}\cdot\nabla E_x, \vec{d}\cdot\nabla E_y, \vec{d}\cdot\nabla E_z)$$

由 $\vec{F} = q(\vec{d}\cdot\nabla E_x, \vec{d}\cdot\nabla E_y, \vec{d}\cdot\nabla E_z) = \vec{p}\cdot(\nabla E_x, \nabla E_y, \nabla E_z)$

$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{p}\cdot(dE_x, dE_y, dE_z)$ 取某处为势能零点.

则 $W=\int_r^{r_0}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{E}}^{\vec{E}_0}\vec{p}\,d\vec{E} = \vec{p}\cdot(\vec{E}_0-\vec{E})$. 而一般取无穷远为其零点，并一般有 $\vec{E}_0=\vec{0}$

$\Rightarrow U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$ （电偶极子在电场中的能量）

§2. 极化物体的电场

Def. 极化强度矢量：单位体积内的偶极矩为 P

Thm. 极化材料的电势：$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}d\tau'$

又 $\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \nabla'\left(\frac{1}{r}\right)\cdot \vec P(\vec r')\,d\tau'$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\vec P(\vec r')}{r}\right)d\tau' - \int_V \frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec P(\vec r')\,d\tau'\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_S \frac{\vec P(\vec r')}{r}\cdot d\vec s - \int_V \frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec P(\vec r')\,d\tau'\right]$$

若将$\vec P$看成关于束缚电荷的$\vec E$，则

$(\overset{\vec 0}{\vec P_{外}} - \vec P)\cdot\hat n = -\sigma_b$ ， $-\nabla'\cdot\vec P(\vec r') = \rho_b$

$$\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_S \frac{\sigma_b(\vec r')}{r}ds + \int_V \frac{\rho_b(\vec r')}{r}d\tau'\right]$$

相当于 σ_b 与 ρ_b 产生的电场

Add explaination

$\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec P(\vec r')\cdot\hat r}{r^2}d\tau'$ 理解为

在小范围内$\vec P$看成均匀，所取尺度应远大于材料的电偶极子线度，远小于$\vec P$尺度

$\vec E = \vec E_{外} + \vec E_{内}$ $\vec E_{外}$理解为外电荷产生的电场，因而电势可用 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_{外}}\frac{\vec P(\vec r')\cdot\hat r}{r^2}d\tau'$ 表示。

$\vec E_{内}$理解成小范围（视为球）内的平均电场

经证明 $\vec E_{平} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p}{R^3}$ 而若在$V_{内}$中将$\vec P$看为均匀，$\vec p = \frac{4}{3}\pi R^3\vec P$

$\Rightarrow \vec E_{平} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec P$ ，相当于均匀极化球中的电场 而均匀极化球电势为

$\phi(r,\theta) = \begin{cases}\frac{P}{3\varepsilon_0}r\cos\theta & r\le R\\ \frac{P}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\cos\theta & r>R\end{cases}$ 在 $r=0$ 时 $\phi=0$，而 $\int_{V_{内}}\frac{\hat r}{r^2}d\tau'=0$ ∴成立

ϕ 确可写为 $\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec P(\vec r')\cdot\hat r}{r^2}d\tau'$

§3 电位移矢量

Def. $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ （电位移矢量）.

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \\ \oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_f \end{cases}$$

证： $\rho = \rho_b + \rho_f \Rightarrow \varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\vec{P} + \rho_f \Rightarrow \rho_f = \nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}) \Leftrightarrow \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f$.

Att. 易误解的点： $\vec{D}$ 性质 $\not\Leftrightarrow$ $\vec{E}$ 性质

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \\ \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad 但 \quad \begin{cases} \nabla\times\vec{D} = \varepsilon_0\nabla\times\vec{E} + \nabla\times\vec{P} = \nabla\times\vec{P} \neq \vec{0} \\ \nabla\times\vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

$\therefore$ $\vec{D}$ 不会仅由 ρ_f 决定，也不会有 φ_D

边界条件.

$$(D_上^\perp - D_下^\perp) = \sigma_f \Leftarrow \begin{cases} (E_上^\perp - E_下^\perp) = \sigma/\varepsilon_0 \\ (P_上^\perp - P_下^\perp) = -\sigma_b \end{cases}$$

$$D_上^\parallel - D_下^\parallel = \varepsilon_0(E_上^\parallel - E_下^\parallel) + P_上^\parallel - P_下^\parallel = P_上^\parallel - P_下^\parallel$$

§4 线性电介质

Def. 电极化率：线性电介质材料常数.（对很多物质，只要E不太强）

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E} \quad (\vec{P}\text{ 为极化强度}, \chi_e\text{ 为电极化率}, \vec{E}\text{ 为总电场})$$

Tip. 在线性介质中 $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$, $\varepsilon := \varepsilon_0(1+\chi_e)$ 称为介电常数.

而 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} =: \varepsilon_r = (1+\chi_e)$ 称为相对介电常数.

对于真空, $\chi_e \equiv 0$ ∴ ε_0 为真空介电常数

$\nabla\times\vec{D} \neq \vec{0}$ 仅在边界上 $P_{//}$ 不为零. 若边界上 $P_{//}$ 为零, 或所有有电场处均充满电介质

此时 $\nabla\times\vec{D}=\vec{0}$

Thm. 极化率张量: 正如电导结构的极化张量, 非各向同性电介质(但一般线性电介质都是各向同性)

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0(\chi_{exx}E_x + \chi_{exy}E_y + \chi_{exz}E_z) \\ P_y &= \varepsilon_0(\chi_{eyx}E_x + \chi_{eyy}E_y + \chi_{eyz}E_z) \\ P_z &= \varepsilon_0(\chi_{ezx}E_x + \chi_{ezy}E_y + \chi_{ezz}E_z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \underbrace{\chi_e}_{\text{极化率张量}} \vec{E}$$

线性电介质的边值问题

1° 在其内部 $\rho_b = -\nabla\cdot\vec{P} = -\nabla\cdot\left(\varepsilon_0\frac{\chi_e}{\varepsilon}\vec{D}\right) = -\frac{\chi_e}{1+\chi_e}\rho_f$ (亦即若内部 $\rho_f=0 \Rightarrow \rho_b=0$)

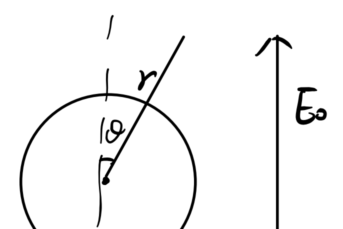
2° 在边界上 $D_上^{\perp} - D_下^{\perp} = \sigma_f \Leftrightarrow \varepsilon_上 E_上^{\perp} - \varepsilon_下 E_下^{\perp} = \sigma_f$ 　　而 $\phi_上 = \phi_下$

$\Leftrightarrow \varepsilon_上 \nabla\phi_上\cdot\hat{n} - \varepsilon_下\nabla\phi_下\cdot\hat{n} = -\sigma_f$

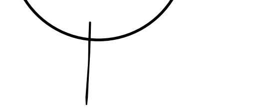
(Tip: 当束缚电荷只分布在边界(表面)时, 仍可用 $\nabla^2\phi=0$)

Ex. 求线性均匀的球形电介质材料置于 E_0 外场中内部的场强

解: 利用拉普拉斯方程求解. (球内球外 σ 均为零)



边界条件不规范 $\begin{cases} \phi_外 = \phi_内 & (当 r=R 时) \\ \varepsilon\frac{\partial\phi_内}{\partial r} = \varepsilon_0\frac{\partial\phi_外}{\partial r} & (r=R 时 因为 \sigma_f=0) \end{cases}$



$\phi_{外} \to -E_0 r\cos\theta$ 常数不改变解的性质 $(r\to\infty)$

根据 Laplace 方程的球对称解 $\phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$

得 $\phi_{内}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)$，$\phi_{外}=-E_0 r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$

而有 $\sum_{l=0}^{\infty}A_l R^l P_l(\cos\theta)=-E_0 R\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)$

根据 Legendre 多项式正交性

$$\begin{cases} A_l R^l=\frac{B_l}{R^{l+1}} & (l\neq 1)\\ A_1 R=-E_0 R+\frac{B_1}{R^2} \end{cases}$$

又根据条件 (ii)

$$\Rightarrow \varepsilon/\varepsilon_0\sum_{l=0}^{\infty} lA_l R^{l-1}P_l(\cos\theta)=-E_0\cos\theta-\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)B_l\frac{1}{R^{l+2}}P_l(\cos\theta)$$

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\left[lA_l R^{l-1}\right]=-(l+1)\frac{B_l}{R^{l+2}} & (l\neq 1)\\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}A_1=-E_0-\frac{2B_1}{R^3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_l=B_l=0 & (l\neq 1)\\ \begin{cases} A_1=-\frac{3}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}+2}E_0\\ B_1=E_0R^3\,\frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}-1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}+2}\end{cases}\end{cases}$$

$\Rightarrow \phi_{内}(r,\theta)=-\frac{3}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}+2}E_0 r\cos\theta=-\frac{3}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}+2}E_0 z$

$\therefore \vec{E}_{内}=\frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0+2}\vec{E}$，匀强

Thm：存在电介质时的系统能量：

（在移去自由电荷后，束缚电荷因为极化而储存的能量也会消失）

$+\ \phi_b\ -$ 相互表的能 ? $\to \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d\tau$ ）

ρ_f 相互作用能

ρ_f $\boxed{能量1}$ → 并未计入 } 有必要区分

$$\Delta W = \int (\Delta \rho_f)\,\phi\, d\tau \qquad \rho_f = \nabla\cdot D \Rightarrow \Delta\rho_f = \nabla\cdot(\Delta D)$$

$$\oint_S \phi\,\Delta\vec{D}\cdot d\vec{a} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta W = \int (\nabla\cdot(\Delta D))\,\phi\, d\tau = \underbrace{\int \nabla\cdot(\phi\,\Delta D)\, d\tau}_{} + \int \vec{E}\cdot\Delta\vec{D}\, d\tau \quad (全空间)$$

$$\Rightarrow \Delta W = \int \vec{E}\cdot\Delta\vec{D}\, d\tau. \quad (对\ \forall\ 电介质成立)$$

对于线性电介质，$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$；$\Delta\vec{D} = \varepsilon\Delta\vec{E}$

而 $\frac{1}{2}\Delta(\vec{E}\cdot\vec{D}) = \frac{1}{2}\Delta\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\Delta\vec{D} = \varepsilon\vec{E}\cdot\Delta\vec{E} = \vec{E}\cdot\Delta\vec{D}$ (该式对 $\vec{E}$ 与 $\vec{D}$ 不同向也成立)

$$\therefore \Delta W = \frac{1}{2}\int \Delta(\vec{E}\cdot\vec{D})\, d\tau \Rightarrow W = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\, d\tau. \quad (此式也包含\ 能量1)$$

Tip: 但注意，上式只适用于线性电介质，(固定极化，非线性都不适用)

Thm. 计算作用于电介质的力：使系统构型变化 dx 设受力为 F

$$\boxed{-\vec{F}\cdot d\vec{x} = dW} \quad 可$$