- 非简并极限

前面得到：

$$\begin{cases} \dfrac{P}{k_BT} = \dfrac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \\ n = \dfrac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) \end{cases}$$

在非简并极限下：$z \ll 1$. 展开 $g_m(z)$：

$$\begin{aligned} g_m(z) &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{m-1} z e^{-x}}{1 - z e^{-x}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty dx \, x^{m-1} \sum_{l=1}^\infty (z e^{-x})^l \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \sum_{l=1}^\infty z^l \cdot \underbrace{\int_0^\infty dx \cdot x^{m-1} e^{-lx}}_{t = lx \,\to\, \frac{1}{l^m}\int_0^\infty dt\, t^{m-1} e^{-t} = \frac{\Gamma(m)}{l^m}} \\ &= \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^m}. \end{aligned}$$

代入，得到：

$$\begin{cases} \dfrac{P}{k_BT} = \dfrac{1}{\lambda^3}\left(z + \dfrac{z^2}{2^{5/2}} + \dfrac{z^3}{3^{5/2}} + \cdots\right) \\ n = \dfrac{1}{\lambda^3}\left(z + \dfrac{z^2}{2^{3/2}} + \dfrac{z^3}{3^{3/2}} + \cdots\right) \end{cases}$$

逐阶展开：

$$z = n\lambda^3 - \frac{z^2}{2^{3/2}} - \frac{z^3}{3^{3/2}} - \cdots \quad [\text{记 } n\lambda^3 = x]$$

$O(x)$：$z = x$.

$O(x^2)$：$z = x - \dfrac{x^2}{2^{3/2}} + O(x^3)$

$O(x^3)$：$z = x - \dfrac{1}{2^{3/2}}\left(x - \dfrac{x^2}{2^{3/2}}\right)^2 - \dfrac{x^3}{3^{3/2}} + O(x^4)$

$\vdots \qquad \vdots$

得到结果：

$$\frac{P}{k_BT} = n - \frac{1}{2^{5/2}}\lambda^3 n^2 - \left(\frac{2}{3^{5/2}} - \frac{1}{8}\right)\lambda^6 n^3 + \cdots$$

[位力展开的形式：纯粹由玻色分布带来，没有相互作用！]

$$B_2(T) = -\frac{1}{2^{5/2}}\lambda^3 \simeq -0.17678\lambda^3 < 0.$$

对于经典理想气体，等价效果为"长程吸引势"，减小了压强！

要求后项<<前项：$n\lambda^3 \ll 1$. 回到了半经典给出的要求.

- 简并玻色气体

$z = e^{\beta\mu} > 0$.

$$Q = \prod_k Q_k = \prod_k \sum_{n_k=0}^\infty e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)n_k}$$

求和收敛，要求 $\varepsilon_k - \mu > 0$, $\forall k$

$\Rightarrow \mu < \min\{\varepsilon_k\}$.

在 $\varepsilon_k = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ 时：$\mu < 0$, 对应 $z < 1$.

对于简并而言：$z \lesssim 1$.

$g_m(z) = \sum_{l=1}^\infty \dfrac{z^l}{l^m}$. 随z单调递增.

$z=0$：$g_m(0) = 0$. $z=1$：$g_m(1) = \sum_{l=1}^\infty \dfrac{1}{l^m} = \zeta(m)$.

现在看粒子数：

$N = \dfrac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z)$.

高温：$T\uparrow$, $\dfrac{V}{\lambda^3}\uparrow$, $g_{3/2}(z\to 0) \to 0$. N 保持不变.

低温：$T\downarrow$, $\dfrac{V}{\lambda^3}\downarrow$, $g_{3/2}(z) \le \zeta(\tfrac{3}{2})$, 有限.

可见在低温下，无法保证N不变！

当$z=1$时：

$n\lambda^3 = \zeta(\tfrac{3}{2})$. $\Rightarrow$ 临界温度T_c.

$$n\cdot\frac{h^3}{(2\pi m k_B T_c)^{3/2}} = \zeta\left(\tfrac{3}{2}\right).$$

$$T_c(n) = \frac{h^2}{2\pi m k_B}\cdot\left(\frac{n}{\zeta(\frac{3}{2})}\right)^{2/3}.$$

继续降低温度，$T<T_c$？

$$n^* = \frac{1}{\lambda^3}\cdot\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right) < n. \quad [z\text{无法再增加}].$$

粒子去哪里了？看 $z\lesssim 1$ 时的行为.

$$\langle n_{k=0}\rangle = \frac{1}{z^{-1}-1} \to \infty. \quad \text{当 } z\to 1.$$

这表明：基态的占据数实际上宏观大！

$n^*\cdot V$ 实际上代表 $k\neq 0$ 能级上的占据的粒子数.

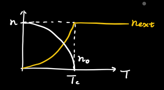
总粒子数

$$N = N_{ext} + N_0$$

$$\begin{cases} n\lambda_{T_c}^3 = \zeta(\frac{3}{2}) \\ n_{ext}\lambda_T^3 = \zeta(\frac{3}{2}) \end{cases} \Rightarrow \frac{n_{ext}}{n} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}.$$

从而有

$$\frac{n_0}{n} = 1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}.$$



相变现象. "临界指数"为 $3/2$.

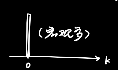
在某一温度之下，宏观数目的粒子凝聚到了单一量子态上.

玻色-爱因斯坦凝聚（BEC）. 爱因斯坦（1925）

注：这是动量空间的凝聚. 在实空间没有体现！

问：为什么 $T<T_c$ 时，统计结果失效？

$$\sum_k \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k = \frac{V}{2\pi^2}\int dk\, \underline{\underline{k^2}}.$$



$\cdot\, k^2 = 0$. 这一项被忽略了！应该单独加到求和里.

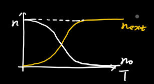
因此前面的 n^* 实际上只对激发态求了和.

考虑有限 N 情形. 详细写开：

$$N = \underbrace{\frac{V}{\lambda^3}g_{3/2}(z)}_{N_{ext}} + \underbrace{\frac{1}{z^{-1}-1}}_{N_0}.$$

当 $T\downarrow$，则 z 增大. [若 $z\downarrow$：N_{ext} 与 N_0 同时减小. ×] 故 $N_0\uparrow$.

$T=0$ 时. $N_{ext}=0$. $N=\frac{z}{1-z}$. $\Rightarrow z_{max}=\frac{N}{1+N}$. 不会达到1！



[注：热力学极限是 $N\to\infty$. $V\to\infty$, 但 n 有限]

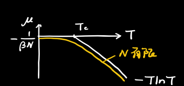
热力学极限下：

$$n = \frac{1}{\lambda^3}g_{3/2}(z) + \frac{1}{V}\cdot\frac{z}{1-z}.$$

$V\to\infty$, $N\to\infty$, $\frac{z}{1-z}\sim O(N)$ 时，n_0 保持有限值.

这时 $z\sim 1-O(\frac{1}{N})$，$N\to\infty$ 时 $z\to 1$. 出现相变！（前面提的）

化学势的行为：



注：BEC的发生要求很多.

比如 $g_{3/2}(z)$ 在 $z\to 1$ 时有界. "$3/2$" 由色散关系. 维度共同决定！

例 $\alpha=2$ $\varepsilon=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$

$$N = \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2k \cdot \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} - 1}$$

$$= \frac{A}{2\pi} \int dk \cdot \frac{k}{z^{-1} e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} - 1} \sim g_1(z).$$

$z \to 1$ 时 $g_1(z) \to \infty$. $\Rightarrow$ 没有BEC!

[注：还有另一个问题，即把"$k=0$"这一个态单独拿出来的问题。$d=2$ 时这个算不对！]