• 色散关系

1D 原子链

O~O~O·· O~O

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i+1})^2.$$ （周期性边界条件）

运动方程：

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\alpha(u_i-u_{i+1}) + \alpha(u_{i-1}-u_i) = \alpha(u_{i-1}+u_{i+1}-2u_i) \\ \dot{u}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{u}_i = \frac{\alpha}{m}(u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i)$$

平移不变性：本征态由动量标记 ⇒ 傅里叶变换.

设

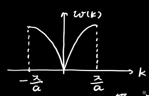
$$u_j(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k,\omega_k}\tilde{u}_k e^{-ikja}e^{-i\omega_k t}$$

$x = ja$, e^{-ikx}

$$\Rightarrow -\omega_k^2\tilde{u}_k e^{-ikja} = \frac{\alpha}{m}\tilde{u}_k\left(e^{-ik(j-1)a} + e^{-ik(j+1)a} - 2e^{-ikja}\right)$$

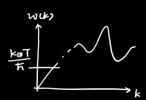
$$-\omega_k^2 = \frac{\alpha}{m}\cdot(2\cos ka - 2)$$

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|.$$



↳ 第一布里渊区

$k\to 0$: $\omega(k)\propto k$.



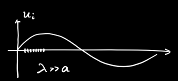
$\omega_{max} \sim \frac{k_B T}{\hbar}$.

$k_{max} \sim \frac{k_B T}{\hbar c} \propto T$.

$C_v \sim k_B\cdot k^3 \propto T^3$. α维：$C_v\sim T^\alpha$.

一般（任意气体）：$C_v\sim T^{\alpha/s}$. s代表 $\varepsilon\propto A\cdot|k|^s$.

更多的耦合？在 $k\to 0$ 时，都有 $\omega(k)\propto k$. ⟶ 普适性！



低能 ⟷ 长波. $E\sim k\sim\frac{1}{\lambda}$. 只有 k 足够大时，才会体现晶格细节！否则就是"普适"的结果！

（即 $C_v\sim T^3$）

$u_i\sim u_{i+1}$. "粗粒化". coarse-graining

↳ 位移场 $u(x)$.

$$H = \int_a dx\left[\frac{\alpha}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \cdots\right]$$

↳ 截断（紫外）

进一步：

固体 — 连续对称性破缺. 变成分立的.

⇒ 声子形成无能隙的能谱.（如：低 k 时，$\omega = ck$. ω 可以任意小）

Goldstone mode / massless mode.

• 理想费米气体

$$N = \sum_{\vec{k}}\frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_{\vec{k}}}+1}$$

$$E = \sum_{\vec{k}}\frac{\varepsilon_{\vec{k}}}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_{\vec{k}}}+1}$$

$$\ln Q = \sum_{\vec{k}}\ln(1+ze^{-\beta\varepsilon_{\vec{k}}})$$

非相对论性：$\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$

$\sum_{\vec{k}} \to \frac{V}{(2\pi)^3} g\cdot\int d^3\vec{k}$. g：简并因子（自旋）. $g = 2s+1$.

$$N = \frac{gV}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\,\frac{1}{z^{-1}e^{\beta\hbar^2k^2/2m}+1}$$

$$= \frac{2gV}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\lambda^3}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{1/2}}{z^{-1}e^x+1}$$

定义 $f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty\frac{x^{m-1}dx}{z^{-1}e^x+1}$

$$N = \frac{gV}{\lambda^3}f_{3/2}(z).$$

$$E = \frac{3}{2}\frac{gV}{\lambda^3} k_B T\, f_{5/2}(z).$$

$$\ln Q = \frac{gV}{\lambda^3} f_{5/2}(z). \quad \Rightarrow \quad E = \frac{3}{2}pV.$$

弱简并极限：$z \ll 1$.（与玻色气体类似）

将z展开：

$$f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{z^{-1}e^{x}+1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty dx\, x^{m-1}\, z e^{-x} \frac{1}{1+ze^{-x}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty dx\, x^{m-1}\, z e^{-x} \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l z^l e^{-lx}$$

$$= \cdots = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{z^l}{l^m}$$

$$= z - \frac{z^2}{2^m} + \frac{z^3}{3^m} - \cdots$$ 得到状态方程.（位力展开）

$$g_m(z) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{l^m} = \mathrm{Li}_m(z)$$

$\Rightarrow\ f_m(z) = -\mathrm{Li}_m(-z)$.（从积分也能看出来）

位力展开：

$$\frac{p}{k_BT} = n + B_2 n^2 + B_3 n^3 + \cdots$$

仿照玻色子，展开$n(z)$，$p(z)$，得到

$$\frac{p}{k_BT} = n + \frac{1}{2^{5/2}}\frac{\lambda^3}{g}n^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3^{5/2}}\right)\left(\frac{\lambda^3}{g}\right)^2 n^3 + \cdots$$

加号：导致"排斥力"，与玻色"吸引力"不同！

强简并费米气体

玻色气体：$z \in (0,1)$，（收敛）

费米气体：无限制！

取 $T=0$.

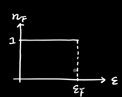
$$n_F = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} = \begin{cases} 1, & \varepsilon<\mu \\ 0, & \varepsilon>\mu \end{cases}$$

图像：从最低开始向上填，填到$\varepsilon=\mu$为止.

μ：最后一个填上的

$\Rightarrow\ \mu(T=0) = \varepsilon_F$，费米能.

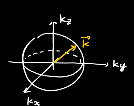
$n_F(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_F - \varepsilon)$.



$$N = \frac{gV}{(2\pi)^3}\int d^3k\, \theta(\varepsilon_F - \varepsilon(k))$$

$$= \frac{gV}{(2\pi)^3}\cdot\frac{4}{3}\pi k_F^3 = \frac{gV}{6\pi^2}k_F^3.$$ k_F：费米波矢.

$$k_F = \left(\frac{6\pi^2 n}{g}\right)^{1/3}. \quad \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2 n}{g}\right)^{2/3}.$$

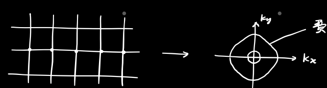


费米面：$\varepsilon=\varepsilon_F$ 表面

费米"海"：内部

一般而言，费米面不是球对称/各向同性的！

与晶格对称性相关.



费米"面"：C_4对称性.

$$E = \frac{gV}{(2\pi)^3}\int d^3k\, \varepsilon(k)\, n_F(\varepsilon)$$

$$= \frac{gV}{(2\pi)^3}\cdot 4\pi\int_0^{k_F} dk\cdot k^2\cdot\frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

$$= \frac{gV\hbar^2}{20\pi^2 m}k_F^5$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{gV}{6\pi^2}k_F^3\cdot\frac{\hbar^2k_F^2}{2m} = \frac{3}{5}N\varepsilon_F.$$

$$pV = \frac{2}{3}E = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}N\varepsilon_F = \frac{2}{5}N\varepsilon_F.$$

$T=0$时，压强不为0！ → 简并压（白矮星）

（玻色子：$p \sim T^{5/2} \to 0$）

金属当中的电子： $\varepsilon_F \sim 1\text{eV} \sim 10^4\text{K}$ $\left(\frac{e}{k_B}\right)$

$\Rightarrow$ 室温下，电子仍是强简并的！