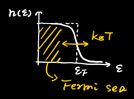
- 强简并费米气体

考虑 $T\neq 0$ 情形

$$n(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}\quad,\ \beta\mu>>1,\ |\varepsilon-\mu|>>k_BT.$$

只有在 $\varepsilon=\varepsilon_F$ 附近 k_BT 范围内与 $T=0$ 时不同.



图像：远离 ε_F 的粒子，由于激发只有 $\sim k_BT$. 迁上去.被泡利不相容原理禁止了.

只有靠近 ε_F (Fermi surface) 的粒子，才会被激发.

问：化学势也会随温度变化. 这里实际上是 sloppy 的. 如何变?

$$\frac{n\lambda^3}{g}=f_{3/2}(z);\quad E=\frac{3}{2}\frac{gV}{\lambda^3}k_BT\,f_{5/2}(z).\quad pV=\frac{2}{3}E.$$ 从中展开!

需要 $f_m(z)$ 在 $z>>1$ 时的渐近行为.

Claim :

$$f_m(z)\simeq\frac{(\ln z)^m}{m!}\left[1+\frac{\pi^2}{6}\frac{m(m-1)}{(\ln z)^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln z)^4}\right)\right]$$ (Sommerfeld 展开)

代入:

$$\frac{n\lambda^3}{g}=f_{3/2}(z)\simeq\frac{(\ln z)^{3/2}}{(\frac{3}{2})!}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\frac{1}{(\ln z)^2}\right]$$

领头阶给出

$$\frac{n\lambda^3}{g}=\frac{(\ln z)^{3/2}}{(\frac{3}{2})!}$$

$$\ln z=\left[\frac{(\frac{3}{2})!\,n\lambda^3}{g}\right]^{\frac{2}{3}}\qquad \lambda=\frac{h}{\sqrt{2\pi mk_BT}}$$

$$=\frac{h^2\beta}{2\pi m}\cdot\left[\frac{3\sqrt{\pi}}{4g}n\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$=\left(\frac{6\pi^2n}{g}\right)^{2/3}\cdot\frac{\hbar^2}{2m}\beta.$$

$$\Rightarrow\ \varepsilon_F=\frac{1}{\beta}\ln z=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2n}{g}\right)^{2/3}.$$

一阶修正:

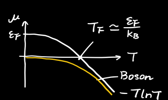
$$\ln z=\left[\frac{(\frac{3}{2})!\,n\lambda^3}{g}\right]^{\frac{2}{3}}\cdot\left[1+\frac{\pi^2}{8}\frac{1}{(\ln z)^2}\right]^{-\frac{2}{3}}$$

$$\simeq\beta\varepsilon_F\cdot\left[1+\frac{\pi^2}{8}\frac{1}{(\beta\varepsilon_F)^2}\right]^{-\frac{2}{3}}$$ (代入零阶)

$$\simeq\beta\varepsilon_F\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\varepsilon_F}\right)^2\right].$$

$$\mu(T)\simeq\varepsilon_F\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\varepsilon_F}\right)^2\right].$$

室温下，$\mu(T)$ 的偏移为 $\left(\frac{10^2}{10^4}\right)^2\simeq10^{-4}$. 足够小了!



观点转变：重要的是 "exponent", "behavior", 不是具体的系数!
那些系数得到了也是错的.

压强

$$P=\frac{g}{\lambda^3}k_BT\,f_{5/2}(z)\simeq\frac{g}{\lambda^3}k_BT\cdot\frac{(\ln z)^{5/2}}{(\frac{5}{2})!}\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\frac{1}{(\ln z)^2}\right].$$

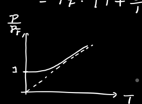
代入

$$\ln z=\beta\varepsilon_F\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\varepsilon_F}\right)^2\right].$$

得到

$$P=\frac{g}{\lambda^3}k_BT\cdot\frac{8}{15\sqrt{\pi}}(\beta\varepsilon_F)^{5/2}\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]^{5/2}\cdot\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{k_BT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$$

$$=P_F\cdot\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\varepsilon_F}\right)^2\right].$$



$$E=\frac{3}{2}pV=\frac{3}{5}N\varepsilon_F\cdot\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\varepsilon_F}\right)^2\right].$$ 与 P 相同.

热容

$$C_V = \frac{dE}{dT} = \frac{3}{5}N\varepsilon_F \cdot \frac{5\pi^2}{12} \cdot \frac{2k_B^2T}{\varepsilon_F^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \cdot Nk_B \cdot \left(\frac{k_BT}{\varepsilon_F}\right) \propto T.$$

$$\propto \underline{\underline{g(\varepsilon_F)}} \cdot k_B^2 T.$$

↳ 费米面附近的态密度：$\sim \frac{N}{\varepsilon_F}$.

$$g(\varepsilon_F): \frac{gV}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi k^2 dk = g(\varepsilon)d\varepsilon. \Rightarrow g(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon}.$$

$$N \simeq \int_0^{\simeq\varepsilon_F} g(\varepsilon)d\varepsilon \sim \varepsilon_F^{3/2}.$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\varepsilon_F} \simeq g(\varepsilon_F).$$

因此：温度很低时，只有 ε_F 附近 k_BT 的粒子才对热容有贡献！

$$C_V \sim \underset{\text{密度}}{g(\varepsilon_F)} \cdot \underset{\text{范围}(d\varepsilon)}{k_BT} \cdot k_B$$

↳ 能均分：$c \sim k_B$.

从该图像可看出：$C_V \propto T$ 与维度无关！ 特征行为！

金属 低温下：声子 + 电子

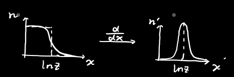
$$C_V \sim \alpha T^3 + \gamma T.$$ 温度较低时，γT 占主导位置！

Sommerfeld Expansion

$$f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty dx \frac{x^{m-1}}{z^{-1}e^x+1}$$

$$= -\frac{1}{m!}\int_0^\infty dx \cdot x^m \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z^{-1}e^x+1}\right)$$

↳ Fermi 分布函数



在 $\ln z$ 处尖锐成峰

令 $x = \ln z + t$:

$$f_m(z) = -\frac{1}{m!}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, (\ln z + t)^m \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+e^t}\right)$$

$$\simeq -\frac{(\ln z)^m}{m!}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \underbrace{\left(1+\frac{t}{\ln z}\right)^m}_{\sum_{l=0}^{\infty}\binom{m}{l}\left(\frac{t}{\ln z}\right)^l} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+e^t}\right)$$

$$= -\frac{(\ln z)^m}{m!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{m!}{l!(m-l)!}\frac{1}{(\ln z)^l}\int_{-\infty}^{+\infty} t^l \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+e^t}\right)dt$$

↳ 偶函数

$$= \begin{cases} 0, & l\text{为奇数} \\ 1, & l=0 \\ -2\int_0^\infty \frac{l \cdot t^{l-1}dt}{1+e^t} = 2l!\cdot f_l(1) \end{cases}$$

$$= \frac{(\ln z)^m}{m!}\left[1 + \sum_{\substack{l\geq 2 \\ l\ \text{even}}}^{\infty} \frac{m!}{(m-l)!}\cdot 2f_l(1)\cdot(\ln z)^{-l}\right].$$

问：积分上下限改变带来的误差？

$$\int_{-\infty}^{-\ln z} dt \left(1+\frac{t}{\ln z}\right)^m \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+e^t}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{-\ln z} dt \underbrace{\left(1+\frac{t}{\ln z}\right)^m}_{\text{poly}} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$$

$e^t \to \exp$ （其实分部积分一下，就是 $m!\, e^{-\ln z}$）

↳ $(1+e^t)^2 \simeq e^t$，因为 $t \to -\infty$

$$\simeq \int_{-\infty}^{-\ln z} e^t dt \simeq e^{-\ln z} = \frac{1}{z}.$$

而 $\frac{1}{z}$ 相对 $\frac{1}{\ln z}$ 是小量，故可以忽略。

（下有总结）

总结：热容等量的"指纹"，是物质相互作用的"fingerprint".

例 观察 He Ⅱ（强关联体系，无法精确求解）

在 $T\to 0$ 时发现 $C_v \sim T^3$

$\Rightarrow$ 声子模式：$\varepsilon = ck$. 后续的中子散射实验证明了这件事情.

例 金属热容

$C_v \sim \alpha T^3 + \gamma T$

$T\to 0$，$C_v \sim T$ $\Rightarrow$ 费米气体. 电子海.

在室温下没有电子贡献，但 $\gamma T \to$ "自由电子气"是存在的！