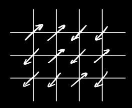
- 伊辛模型

描述单轴磁铁的自发磁化.

来源：不同自由度之间的相互作用.



自由度：自旋. $\sigma=\pm1$.

$$H=-J\underbrace{\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j}_{\text{最近邻的}}-h\underbrace{\sum_i\sigma_i}_{\text{外磁场}}$$

$J>0$： ↑↑ / ↓↓ 能量最低 — 铁磁. (考虑逆神)

$J<0$： ↑↓ / ↓↑ 能量最低 — 反铁磁.

J的来源：交换相互作用. 本质上是库仑 + 反对称性.

配分函数

$$Z=\sum_{\{\sigma_i\}}e^{\beta J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j+\beta h\sum_i\sigma_i}$$ (共 2^N, 相互作用体系！). (相互作用是导致其求解步骤不再"简单"的原因)

一般来说, 不可能精确求解, 除非 —

$d=1$ / $d=2$ $(h=0)$：方形晶格 (Onsager, 1944)

- 平均场理论

近似：假设存在均匀的磁化,

$\langle\sigma_i\rangle=m$.

$\sigma_i=m+(\sigma_i-m)$.

$$\sigma_i\sigma_j=[m+(\sigma_i-m)][m+(\sigma_j-m)]$$
$$=m^2+m(\sigma_i-m)+m(\sigma_j-m)+\cancel{(\sigma_i-m)(\sigma_j-m)}$$
$$=-m^2+m(\sigma_i+\sigma_j)$$

涨落"小"：

(1) $\sum_{\langle ij\rangle}$, "关联函数". 不能对每个考虑.

(2) 对相变点附近的临界行为没有显著影响.

$$H_{MF}=-J\sum_{\langle ij\rangle}[-m^2+m(\sigma_i+\sigma_j)]-h\sum_i\sigma_i$$
$$=\frac{1}{2}Jm^2Nq-\underbrace{(Jmq+h)}_{h_{eff}}\sum_i\sigma_i$$ (q：相邻的粒子数)

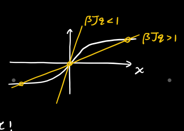
$$Z_{MF}=e^{-\frac{1}{2}\beta Jm^2Nq}\Big(\sum_{\sigma=\pm1}e^{\beta h_{eff}\sigma_i}\Big)^N$$
$$=e^{-\frac{1}{2}\beta Jm^2Nq}\cdot[2\cosh(\beta h_{eff})]^N$$

$$\langle\sigma_i\rangle=\frac{1}{N\beta}\frac{\partial\ln Z}{\partial h}$$
$$=\frac{e^{\beta h_{eff}}-e^{-\beta h_{eff}}}{e^{\beta h_{eff}}+e^{-\beta h_{eff}}}=\tanh(\beta h+\beta Jmq).$$

$\Rightarrow m=\tanh(\beta h+\beta Jqm)$.

* $h=0$： $m=\tanh(\beta Jqm)$

令 $x=\beta Jqm\ \rightarrow\ \frac{x}{\beta Jq}=\tanh x$.



(1) $\beta Jq<1$： $x=0$.

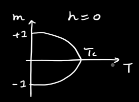
(2) $\beta Jq>1$： $x=0$. $x=\pm x_0$ 自发磁化！

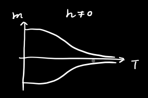
(3) $\beta_c Jq=1$： $k_B T_c=Jq$.

* $h\neq0$：

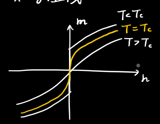
$T\to\infty$ 时, $\beta\to0$.

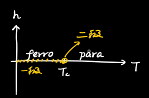
$m\simeq\beta Jqm+\beta h\simeq\frac{h}{k_BT}$. 连续变化！





* 等温线





对应气液相变中的：p-v 图、p-T 图 （$m \sim v_g - v_l$，$h \sim p$）

自由能（应该是 Gibbs，因为是固定外场 p（或 h））

$$F_{MF} = -k_B T \ln Z_{MF}$$

$$= \frac{1}{2} N J q m^2 - N k_B T \ln\left[2\cosh(\beta J q m + \beta h)\right].$$

$$f_{MF} = \frac{1}{N} F_{MF} = \frac{1}{2} J q m^2 - k_B T \ln\left[2\cosh(\beta J q m + \beta h)\right].$$

$h=0$，临界点附近，f 对 m 展开：

$$f \simeq \frac{1}{2} J q m^2 - k_B T \ln 2 - k_B T \ln(\cosh x)$$

$$\ln(\cosh x) \simeq \ln\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right)$$

$$\simeq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 + \cdots$$

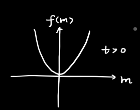
$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4.$$

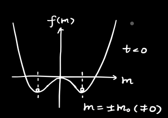
$$f \simeq \frac{1}{2} J q m^2 - \cancel{k_B T \ln 2} - k_B T \left(\frac{1}{2}(\beta J q m)^2 - \frac{1}{12}(\beta J q m)^4\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} J q (1 - \beta J q)}_{t} m^2 + \underbrace{\frac{1}{12}\beta^3 (Jq)^4}_{u>0} m^4$$

$$\Rightarrow f(m) = \frac{1}{2} t m^2 + u m^4 + O(m^6).$$

热平衡：m^*，$f(m)$ min. $\left.\frac{\partial f}{\partial m}\right|_{m^*} = 0$.（注：若不展开，会得到之前一样的方程）





$$t = Jq(1 - \beta J q) = \frac{1}{\beta_c}\left(1 - \frac{\beta}{\beta_c}\right) \sim 1 - \frac{T_c}{T} \simeq \frac{T - T_c}{T_c}.$$

$$t \simeq \# \cdot (T - T_c).$$

对称性自发破缺（SSB）

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

$\sigma_i \to -\sigma_i$，（对全部自旋），H 不变.

$\mathbb{Z}_2$ 对称性（分立对称性）

$\langle \sigma_i \rangle \neq 0 \Rightarrow$ 对称性自发破缺.

配分函数 $\to$ $\langle \sigma_i \rangle = \dfrac{\sum_{\{\sigma_i\}} \sigma_i e^{\beta J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j}}{Z} = 0$.（严格地）$\to$ 矛盾？

这实际上是平均了"$+m_0$"与"$-m_0$"的结果；

但实际上，若要想从整体的 $+m_0 \to -m_0$，需要耗费的能量是 $O(N)$ 的，发生这种情况的概率 $\sim e^{-\# \cdot N}$.

这导致转变需要的时间尺度 $t \sim e^{\# \cdot N}$.

$N \to \infty$ 时，概率 $\to 0$，时间 $\to \infty$，导致这不可能发生！

另一方面，当h从非0值→0时，

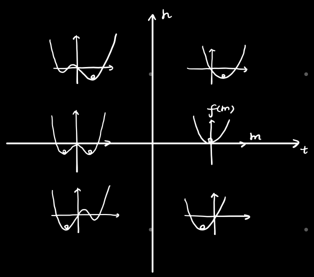
$$\langle\sigma_i\rangle = \lim_{h\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\beta}\frac{\partial \ln Z[h]}{\partial h}$$

$$\neq \lim_{N\to\infty}\lim_{h\to 0}$$ ！ 后者已经把磁场设成0了，再去取热力学极限也是一样的结果.

⇒ 应当先取热力学极限！

最后，用一张图来概括 $f(m)$ [实际上是 $g(m)$] 的行为：

$h\neq 0$, $f(m) = \frac{1}{2}tm^2 + um^4 - \tilde{h}m$.



（实际上在h由正→负的过程中，系统会保持在原来的亚稳态 — 原因如前所述，h不够大，翻不动. 磁滞回线就是这一现象的体现）

上面的泰勒展开实际上是普适的 — 对于这种"阶段"的序参量，由对称性可以判断指数只有偶次.

从而得到类似的平均场理论.（朗道的唯象理论）

书上说：朗道理论实际上是一种平均场理论！