- 黑体辐射

能量流

$J = \frac{E}{V}\cdot\langle c_\perp\rangle$　　　　$[\, j = \rho\cdot v \,]$

↳ 对角度做平均.

$c_\perp = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega\cdot c\cos\theta = \frac{c}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{c}{4}$

↳ 有一半出不去. 确实. 但也要算进来. 因为这"能流"是四面八方的.

$\Rightarrow J = \frac{\pi^2}{60}\frac{(k_BT)^4}{\hbar^3c^2} = \sigma T^4$

辐射压强

$pV = k_BT\cdot\ln Z = -k_BT\cdot\sum_{k,s}\ln(1-e^{-\beta\hbar\omega_{k,s}})$

$= -k_BT\cdot\frac{2V}{(2\pi)^3}\int d^3k\cdot\ln\left(1-e^{-\beta\hbar ck}\right)$

$= -k_BT\cdot\frac{V}{\pi^2}\int_0^\infty k^2dk\cdot\ln(1-e^{-\beta\hbar ck})$, 分部积分

$= k_BT\cdot\frac{V}{\pi^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\beta\hbar c\cdot\int_0^\infty\frac{k^3dk}{e^{\beta\hbar ck}-1}$

$= \frac{1}{3}E.$

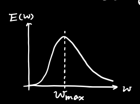
$\Rightarrow p = \frac{1}{3}\frac{E}{V}$. (依赖于维度 d. 色散关系 $\varepsilon\sim k^s$: $p = \frac{s}{d}\frac{E}{V}$)

能量随频率的分布

$E = \frac{V}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{k^3\hbar c\, dk}{e^{\beta\hbar ck}-1}$

$= \frac{V}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\hbar}{c^3}\frac{\omega^3d\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$

$\Rightarrow E(\omega) = \frac{V\hbar}{\pi^2c^3}\cdot\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$. 普朗克分布.



$\omega_{max}\propto k_BT$. 维恩位移定律.

(1) $\beta\hbar\omega\gg1$: $E(\omega) = \frac{V\hbar}{\pi^2c^3}\omega^3e^{-\beta\hbar\omega}$.

(2) $\beta\hbar\omega\ll1$: $E(\omega) = \frac{V}{\pi^2c^3}k_BT\cdot\omega^2$ 经典极限. (高温). 经典电磁理论的结果. 发散!

$= k_BT\cdot\underbrace{\left(\frac{V}{\pi^2c^3}\cdot\omega^2\right)}_{[\omega,\,\omega+d\omega]\text{之间模式的数目.}}$

$\frac{2V}{(2\pi)^3}\int d^3k = \frac{V}{\pi^2}\int dk\cdot k^2 = \frac{V}{\pi^2c^3}\int d\omega\cdot\omega^2 = \int d\omega\cdot\underbrace{g(\omega)}_{\text{态密度}}$

瑞利-金斯公式实际上是能均分定理的结果!

检验: 微波背景辐射. 目前为止最为精确! ($T\sim2.7K$)

- 固体热容

固体: 周期排列的晶格. 原子绕平衡位置振动.

动能 $K = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3N}\dot{u}_i^2$

势能 $\Phi \simeq \Phi(x_i^0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}\Big|_{x_i^0,x_j^0}u_iu_j$

$H = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3N}\dot{u}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}K_{ij}u_iu_j$

简正模式:

$H = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3N}(\dot{q}_i^2+\omega^2q_i^2)$. $3N$ 个自由度.

$\Rightarrow C_V = 3Nk_B.$

量子处理

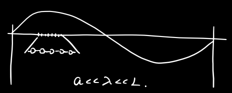
爱因斯坦: $\omega_i\equiv\omega$. (双原子分子振动,同)

$C_V = 3Nk_B\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2\cdot\frac{e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{(e^{-\frac{\theta_E}{T}}-1)^2}$, $\theta_E = \frac{\hbar\omega_E}{k_B}$.

问题：趋于0太快，指数× 实验：T^3.

来源：存在"最小激发"，"gapped".

有没有更"廉价"的激发呢？如果有，热容会没有那么快地趋于0.



$\lambda \gg a$，相邻原子的偏移量差不多，"弹簧"拉伸极小，这导致能量极低！

（长波极限）

色散关系：$w = c \cdot k$.（k很小）

低温下，更容易激发的是声波！不是"单个谐振子"！

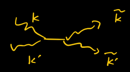
量子化的声波：

$$\varepsilon_{\vec{k},s} = (n_{\vec{k},s} + \tfrac{1}{2})\hbar w_{\vec{k},s}.$$

phonon 声子 固体当中低能/长波极限下的元激发.

理想声子气体（在谐振子近似下，各k是独立的，别的情况会出现散射）

$$E = \sum_{\vec{k},s} \frac{\hbar w_{\vec{k},s}}{e^{\beta\hbar w_{\vec{k},s}} - 1} = \int dw\, g(w) \frac{\hbar w}{e^{\beta\hbar w} - 1}$$



$$g(w) = \frac{V}{2\pi^2 c^3} w^2 \cdot 3$$

$$\sum_s = \underset{2}{(\text{transverse})} + \underset{1}{(\text{longitudal})} = 3.$$

更严格地，由于纵波与横波声速不同，

$$g(w) = \frac{V}{2\pi^2} w^2 \left(\frac{2}{c_t^3} + \frac{1}{c_l^3}\right)$$

注意是三种不同模式加起来，不是单个k分解！

这里为了方便，记成 $g \sim \frac{3}{c^3}$.

$$E = \frac{3V}{2\pi^2 c^3} \int_0^{w_D} dw \cdot w^2 \frac{\hbar w}{e^{\beta\hbar w} - 1}$$

cutoff.

$w \to \infty$: $k \to \infty$，$\lambda \to 0$. "波"的概念不复存在！

另外由于w只有$3N$个，因此不可能到∞.（本质还是因为a有限）

$$\int_0^{w_D} g(w)\,dw = 3N. \Rightarrow \frac{V}{2\pi^2 c^3} w_D^3 = 3N. \quad w_D \sim \frac{c}{(\frac{V}{N})^{1/3}} \sim \frac{c}{a},$$

晶格量级波长.

$$E = \frac{3V}{2\pi^2 c^3} \int_0^{x_D} \frac{dx}{\beta\hbar} \frac{\hbar (\frac{x}{\beta\hbar})^3}{e^x - 1} = \frac{3V}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} (k_B T)^4 \cdot \int_0^{x_D} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

(1) $\beta\hbar w_D \gg 1$ 低温极限

$$E = \frac{3V}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} (k_B T)^4 \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{V\pi^2}{10(\hbar c)^3} (k_B T)^4.$$

$$C_V = \frac{dE}{dT} \propto T^3.$$

(2) $\beta\hbar w_D \ll 1$. 高温极限（经典）

$$E = \frac{3V}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} (k_B T)^4 \cdot \frac{1}{3} x_D^3$$

$$= \frac{3V}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} (k_B T)^4 \cdot \frac{N \cdot 2\pi^2 c^3}{V} \cdot (\beta\hbar)^3$$

$$= 3N k_B T.$$

$$C_V = \frac{dE}{dT} = 3N k_B.$$

回到了经典结果.