

蔓越莓的线性代数学习指南

20240902

引言：

大家好～我是数院的老博士 mym。

《线性代数》是一款在线性空间中冒险的游戏。在这里，你将引导向量之力，洞察方程与秩的奥秘，勘破循环诅咒之迷宫，从而对各种方阵实施降维打击，实现对角化之伟业！你是否已经迫不及待，想要参与冒险了？希望我的冒险经验，能够助诸位一臂之力～

领取讲义：会在 5608000 号树洞更新链接

学习线性代数需要天赋嘛？



PiKaChu345 LV5 UP

置顶 我用笔芯写的字迹比较潦草，其中核心观点陈述如下：

1. 书上的题目(只要不是前沿问题，只要是成型的理论)你都能做出来，只不过时间问题，和数学天赋无关。
2. 你现在做不出来主要是因为有些【关键拼图】你不知道，你不了解。一旦了解必会。
3. 做不出来往前看，时不时回头看看不会做的题目，一旦关键拼图到手，曾经不会的问题都是显然的。

同龄人为什么做题目的差距这么大？

1. 不知道去哪里下功夫。即做不出题目，不知道我却少了哪一块(几块)关键拼图，不知道怎么针对练习。
2. 不屑于下这个功夫(知道xx技巧是做出这类问题的关键技术，但是爷不在乎，数学好不得了吗？)

大神同学天赋异禀？没有原创工具技巧之前莫谈论天赋，每一个数学家都终其一生只有少数几个原创工具，99.9999%的人都是学习并重复别人的工具和技巧，你学你也会，只是你不知道这个技巧的存在，或者你不下功夫去练习，或者没有人指点你这些技巧，仅此而已。

2023-11-06 16:37 👍 525 💬 回复



aoligei6666 LV4 说的很好，数学学习很大程度上就是积累经验，方法，技巧，思想的过程，无论是应试还是搞数学相关的研究都离不开这点，而且没有传承积累哪来的创新，推陈才能出新🐱

2023-11-07 01:02 👍 32 💬 回复



aoligei6666 LV4 还有一点，积累内化的质量决定了你创新的可能性，你对一些思想方法理解的方式和深刻程度直接决定你思考的方式和效率，我们使用的工具以及对工具本质特征的理解和把握深刻影响着我们的思维方式🐱

我所理解的数学天赋：

我自己就是学数学的，也经历过好像陷入瓶颈期什么都学不会，然后浑浑噩噩的状态。但是真的学不会嘛？并不是，很多时候是被自己吓退的，其实只要扎扎实实一页一页去啃，把书本上的每一句话理解吃透，并且能用自己的语言表述清楚，那么书本上的知识都已经是现成的东西了，并没有什么东西真的学不会。感觉困难往往是一些前置的铺垫还有所欠缺，很多人粗浅地把这个理解成数学天赋，但这并不

是。这只是你还不知道，需要看书/需要有人告诉你该去哪里～

即使暂时学不明白，也不要气馁或者怀疑自己，很可能不是你的问题，而是书本/教学的问题。很多时候，关键的信息是被隐藏起来的，或者淹没在了大段的文字叙述之中。有经验的老师会告诉你关键信息和理解方式是什么，学得好的同学也更清楚重点在哪里，感觉自己抓不住重点的时候一定要勇敢地去提问、讨论、交流。

只要扎扎实实看书提问思考练习，抓住内容的主干，想明白书本试图在解决什么问题，采用了什么方法/手段，按照什么逻辑进行讲述，多思考多总结，任何人都是能够学好线性代数的。

对学习数学不是很有自信的同学，推荐去看看下面的数学杂谈～
相信自己 那些题目你迟早都可以做出来

<https://www.bilibili.com/video/av705623003>

为什么我读不懂一个数学证明？

<https://www.bilibili.com/video/BV1si421h7wD>

什么是数学天赋？它可以被训练吗？

<https://www.bilibili.com/video/av1356285109>

1. 线性代数的要求（目标）

1. (60') 对书中细节比较清楚，具有细致扎实的基本功（这也大致是大家考试时的平均水平，书上例题都基本学会的程度。期中能考60分真的已经很棒了。）
2. (80') 抽象出背后的思维方式（抽象出特点，才能迁移；抽象恰恰是为了迁移和推广）
 1. 培养对知识的迁移能力
 2. 能应对变化的例子
此时题目往往已经不是一眼就能做出来的了，需要大家尤其注重注重一个概念的各种理解方式，找到合适的角度切入问题。
3. (90') 把多个章节的知识点贯通起来，培养综合运用能力
大家在这个学期期中一定会收获巨大的打击的，这是PKU的传统艺能，为了让大家认清自己(x

2. 线性代数为什么困难

大家能来北大都是足够聪明的，不管是文科生理科生都能学好的。不要给自己贴很多标签，数学没有那么可怕啦😂

作为一个天天学数学的老爷爷，我感觉我最大的感受之一就是，如果说有啥东西我学不会，那往往可能并不是要学的数学本身有多难，更多是先入为主的形成了它很难的偏见，然后带着恐惧去学。然后就会产生名义上在学习，实际上在内耗的现象。扎实+细致...其实只要能扎扎实实的找本合适的书，一页一页读，一句一句想，和小伙伴把各种细节讨论明白，多难的书都能啃下来的，并没有很可怕啦。

并没有什么数学真的很难学，难的其实就只是行动起来，踏踏实实一页一页地把该看的东西看了，把需要思考的东西想清楚～日积月累，就一定能变得越来越厉害的

1. 数学课的公共特点

1. 时间短，内容量大

在大学里，一门数学课在一个星期里要学的内容，可能会比高中整整一

个月还要多。

高中学习：学的是知识题目。围绕一个章节的知识点，我们会在课上课下反反复复做同质化的习题，直到大家非常熟练能闭着眼睛做出来的程度。

大学学习：学的是思想方法。老师讲清楚一类问题怎么想之后，并不会给大家很多做题的机会，而是很快就会进入下一阶段的内容。也因此很多时候，同学们很容易因为基础不扎实、没有充分训练而逐渐掉队。这就带来了第二个问题：

2. 数学学习很容易滚雪球

高数线代这样的课确实很难，逻辑链条是很长的，一环扣一环，前面略微不懂的地方，如果不求甚解放过去了，在后面几个星期里就会像滚雪球一样放大，最后捅个天大的窟窿，等着孩子们补天。。。我自己学数学专业课也是一样的，也许只是走神几个五分钟，就会错过些啥关键信息，然后在剩下的一整节课里满脸问号 QAQ (而且还不好意思开溜 x) 但是这并不能说是笨啦，只是数学课本身就是这样，所以才需要课前课后的努力～

3. 考试难度极大

而且数学课的特点就是，看了答案题目都很容易，但是扔掉答案题目立刻就会变难很多，因为答案已经告诉你解决题目的路径是什么样了，但是其实学习找到正确路径的方法才是数学解题的核心～光看答案只是“知道了”知识点，而不是掌握了它们，两者差别是很大的。很多时候你觉得你自己上课听懂了，但实际上那只是老师懂，你自己还并没有真正消化好这些内容，把它们变成自己的理解。解题思路是在练习中积累下来的，题目一定要在掌握了知识点后，自己亲自动手完成。

2. 线性代数自身的特点

1. 涉及到很多抽象的概念。

理解一个抽象概念的关键，在于在脑海中画出图像，形成直观的感受。比如我们高中学过的向量，就已经是一个很抽象的概念。在最开始接触向量的时候，我们一定是无比困惑的，位置的概念不是既清晰又自然嘛，为什么还要定义向量？什么叫做“既有大小又有方向的量”？为什么要让向量能够随便平移？凭什么要让它按平行四边形法则进行加法？学习向量有什么用？为什么向量可以很方便地证明很多命题？尽管已经离最初接触向量这个概念有很多很多年了，但是我仍能依稀记得初识向量时感到的困惑。向量不是任何具体的东西，看不见又摸不着，我们究竟是如何学习和掌握它的呢？

在我看来，这里的关键在于，**将抽象的某个对象转化为脑海中的直观感受和图像，然后将抽象的某种性质，翻译成对这些直观图像进行操作的规则或者动图。**这就是老师们常说的“形成图像”。

比如当我们提到向量这个概念的时候，首先在脑海里映出的应当是一个箭头。这个箭头有长度，又有方向，所以向量其实就是箭头的学问。然后，我们又人为规定了向量加法的平行四边形法则。这个法则究竟是什么意思呢？我们需要在脑海里画出两个箭头，然后平移其中一个到首尾相连的位置，最后自然地画出一个新箭头。在这个过程中，我们通过对向量运算规则的翻译，在脑海里形成了箭头的直观。向量这个**概念的灵魂，就蕴藏在它所满足的规则中。**正是这些规则，让我们能够在复杂的

图形中完成种种操作，从而找到隐藏的规律。

我们不妨留作思考：为什么说，行列式的直观是“有方向的体积”？面积或者体积可以带正负号嘛？行列式一共满足哪几条抽象的运算规则？你能否用“有向体积”这一直观解释清楚行列式的运算规则？允许体积有正负号有什么好处？如果在体积上加了绝对值，会如何影响运算规则？这些规则能够如何帮助我们完成行列式的计算？想清楚了这些问题，行列式就学明白了一大半（虽然题目可能该不会还不会 x

2. 有很多特有的术语和符号。

线性代数同时是很多门外语。我们要依次学习方程组的语言、列向量的语言、矩阵的语言、线性空间的语言，每种语言都有自己的特点和适用范围。对于同一个抽象的概念而言，它可以在很多不同语境下，翻译成很多种具体含义，我们常常要不断地在各种语言间彼此**翻译和转化**，从而**找到理解问题合适的角度**。学习一门新语言，并不是一件很容易的事，熟练地完成翻译，更是需要一定时间的训练，很难速成。所以三天一定是学不会线性代数的，至少要突击一整周（x

3. 需要进行抽象思考与证明。

线性代数的学习中，需要进行很多证明。从第三章开始，我们会依次接触到线性相关和秩的抽象概念，并且需要完成许许多多的证明。这一章又是整本书中最核心的内容之一，后半学习的全部学习都要建立在三四两章的基本功上。但是大家普遍会学不太明白，在弯弯绕绕的各种证明中逐渐迷失。这一章的学习尤其忌讳死记硬背。学好它的关键在于：

首先要理解、适应和习惯数学命题的陈述方式、证明题的思考模式，要想明白证明题需要按照怎样的思路和步骤去完成，掌握完成证明的基本思路和方法；

在此基础上，要回归课本，对所有关键概念的定义、判定和性质，进行充分的归纳总结；

最后，要反复练习，尝试使用“瞪眼儿法”思考：最好熟练到看到课后习题和书上定理就能大致口述出证明思路的程度，这是后面所有章节学习的基本功。

我着重强调一下证明方法，常见的证明方法有三：分析法、归纳法、反证法。其中分析法是我们学好线性代数的基石，它指的是执果索因、追根溯源、从出口开始倒着走迷宫的方法。

我们需要证明的命题往往以“A是B”这样的陈述句呈现出来。那么“A是B”这句话是什么含义呢？这其实是有两种可能的，如果我们把它翻译成集合的语言，那么它就会是

「元素A」属于「满足性质B的元素构成的集合」

或者，「满足性质A的元素构成的集合」包含于「满足性质B的元素构成的集合」。

那么我们如何证明集合A包含于集合B呢？当然是要**按照定义**，A包含于B的意思是：任取A中的一个元素，它也要是B中的元素。因此，我们要：

1. 任取一个A中的元素/满足性质A的元素

2. 回忆 B 的定义和判定方法

3. 按照 B 的要求，一条一条地验证任选的那个元素是否满足要求

我们来举一个例子，**试证明：猫猫是可爱的小动物。**

1. 任意抓一只猫猫。但是在这里，我们其实指的是，没有遗漏地抓住了世界上的**每一只猫猫**。不管是哪只猫猫，都要满足我们接下来的要求。可以说，我们抓住的是薛定谔的猫猫，它是世界上所有猫猫的叠加态。

2. 回忆一下什么叫“可爱的小动物”，**按照定义**需要满足什么性质？还有哪些**判定方法**？比如“眼睛大大的”、“爪子软软的”。（当然，大家对可爱的小动物可能和我不一样，但是在数学中，所有的概念都有统一的定义。

3. 验证抓来的任意猫猫满足上述性质/判定标准。比如测量一下眼睛大小，捏一下猫猫爪子。你要假装已经对每一只猫猫都进行了判定。

我们在第三章中遇到的几乎全部抽象证明，都是通过这种抽丝剥茧的方式完成的。和高中一样，需要掌握若干新概念的**定义、判定和性质**，然后通过分析法完成证明。只不过在大学学习中，这些都需要大家自己**主动**去归纳和整理而已。

4. 有很多全新的方法和技巧。首先要对第三章的抽象概念和证明方法足够熟悉，其次是要对矩阵乘法的几种理解方式非常熟练，要能够很灵活地在不同观点和语言之间翻译和转化，从而能够从合适的角度切入问题。这两个方面是一切线性代数问题的基本功，也是学好线性代数的关键。在此基础上，方法和技巧并不会太难，无非就是**分块矩阵**的一些操作规则。我们将遇到的题目转化成某个矩阵上可以具体操作和计算的问题，在特定流程的指引下**进行具体计算**。技巧的磨练需要亲自动笔进行大量的思考和计算，无它，唯手熟尔。

5. 对精确性和严格性有很高的要求。

首先要能够用精准的数学语言理解并描述清楚问题。这一点我们不再赘述。

其次，要特别重视每一个步骤的规范性、合理性。线性代数的学习切忌不求甚解的习惯，这门课确实很难，很多微妙的地方一不小心就会错，所以一定要试着保证你写出来的每一句话的正确性，你要为你写出的每一个等式负责～我们举个例子，求解如下线性方程：

$$ax = 1.$$

一个典型的错误解法是，两边同乘 $1/a$ ，解得 $x=1/a$ 。

但是这个方法并不正确，因为“两边同乘 $1/a$ ”在 $a=0$ 时并不是一个合法的操作，所以新的方程和原来的方程并不等价！

因此，要对 a 是否非零分类讨论，才能正确地求解。

作为练习，大家不妨尝试求解以下线性方程，并思考**分类讨论的一般标准**是什么：

$$a(a-1)x = (a-1)(a-2)$$

（答案留在文末）

6. 要尤其注重理解。

一下是以为超级厉害、期末获得满分的学姐送给大家的经验。

根据我的观察和我同级的有不少同学会花很多时间卷邱砖之类的，但是因为花在线性代数上的时间是有限的，所以可能会出现刷题的过程当中不重视思考，而是变成了见到某个题型然后把他的做法记住这种，甚至有些会课本上的一些思路还没有理解透彻就跑去刷题了，最后考试的时候风险就比较大，成绩可能会比较依赖于试题和邱专的重合程度，我觉得这个是不少习惯了高中数学学法的常见误区，可以提醒一下大家学习过程中的优先级～

当时和同学聊天的时候普遍感受就是，似乎基本题型是会做的，但是全程都不知道自己在干嘛，甚至都不知道自己为什么会做对



3. 线性代数是什么

1. 一门代数课：解方程： $Ax=b$, $Ax=kx$, Ax 约等于 b 。我们把某些问题转化为关于矩阵性质的问题，然后遵循特定的流程进行计算。线性代数最朴素的认识，就是关于求解和运用线性方程组的学科。

2. 一门几何课：如何描述空间中的向量？如何刻画空间中的旋转和反射？如何分类平面二次曲线？我们对线性方程组和矩阵赋予几何直观，从中提取中和坐标选取无关的“内蕴的”几何性质。就像我们可以购买不同比例尺的地图，测量学校和隔壁的距离，但是不管我们如何选取地图，这个距离本身都应该是的不变的，和我们选取哪张地图无关。

3. 很多高数中的思想和方法都是线性代数：

因为只有线性代数是足够直观且简单的，它是我们研究一般问题最重要工具之一。

一元微分学：把函数线性化（用切线代替原先的函数）

多元微分学：把函数线性化（用切平面代替原先的函数）

隐函数定理：把方程在局部看成是线性方程组，然后寻找谁能做主变量

积分换元公式：行列式的几何含义

常系数线性微分方程组：特征值与特征向量/矩阵的对角化/约当标准型

傅立叶级数：内积空间的结构（希尔伯特空间：“完备”的内积空间）

高斯公式、格林公式、斯托克斯公式：多重线性代数

任何看似高深的现代数学，归根结底，几乎都是高数和线代！

4. 线性代数两大核心思想：

1. 为什么研究基变换/坐标变换：

“没有一组基比另一组基更美”

2. 为什么/如何研究线性映射：

“存在就是被感知”/“人的本质是一切社会关系的总和”

“一个线性映射由它在基上的作用完全决定”

4. 如何学习

1. 重视课本。特别是要多多重视基本概念，以及概念之间的联系（通过正文中的各种命题和定理）。

2. 预习复习。要趁早学，每次课都要尽可能当场把不明白的地方想清楚，有困惑千万别留着，尽量要赶上学习进度别掉队（明天是来不及学的，越晚越吃亏）。

3. 多算例子。越是抽象的数学课，就越要在心里装很多例子，带着这些具体例子去思考问题。好的例子是由生命力的，问你一个问题能举得出例子才算是学明白了线性代数，不然所有的定理都是空中楼阁不知所云。要多看例子，大不了多抄抄书。

4. 思考总结。

我自己感觉线性代数学习中最大的困难，就是经常会不知道它到底再做什么～但是这其实也是这门课最奇妙的特点之一，它很像是若干门外语课，每种语言都有自己的观点和思想，我们很多时候都要在不同的看法中来回地转换。当你足够熟悉这些语言的时候，看到一个式子脑袋里就会蹦出很多种理解方式，找到其中符合题意的那种理解方式（✨_✨），是能让我们做题事半功倍的～

这些都需要大家自己去看书+归纳+总结，经过自己充分咀嚼才能真正消化好各种抽象的概念。线性代数这门课，单纯靠被动思考是很难学明白的。

5. 要重视数学语言的准确性、规范性。要用精准的数学语言描述清楚问题；要注意每个步骤的规范性，前后是否等价。要特别重视这些细节，很多时候就是是一些小细节卡着过不去，然后积累得多了就会慢慢学不懂后面的知识。但是其实很多看起来很抽象的内容都是，一旦想明白了就会恍然大悟，立刻

变简单的～对于每一个等式成立的缘由，你必须充分地理解清楚，是不能有丝毫模棱两可的成分的。

6. 注重理解。线性代数是尤其需要注重理解方式的一门数学课，它特别需要你熟悉第三四两章的思想和方法，把基本概念熟悉到滚瓜烂熟，一步一个台阶地打好基础，后面才好学明白～做题没有思路，很多时候是因为上课的时候你以为你自己听懂了，但实际上那只是老师懂，而且你沿着老师的思路知道老师懂了，但你可能还并没有真正消化好这些内容，把它们变成自己的理解。

5. 如何写作业

1. 抄题：要写上原始信息。要让助教知道你是从哪个矩阵出发开始计算的。
2. 格式规范。正确的格式是线性代数的重要组成部分，比如什么时候用箭头和等号，比如行变换写在箭头上，列变换写在箭头下方。
3. 尽量不要用后面小节的方法做前面的作业。最好能够厘清不同章节间的逻辑关系。
4. 不要跳步，不要显然，不要潦草。读一份潦草的证明会把助教累死。
5. 计算题务必要自己对一下答案并订正。隔上一周你是很难知道自己为什么会算错的。而且可以大幅减轻助教的负担，让助教把更多精力用在刀刃上。
6. 不要抄答案！不要抄答案！不要抄答案！重要的事情说三遍！

其实抄答案还是挺明显的，坊间经常会流传一些劣质答案，答题跳步且不规范，甚至还有错的，然后大家的作业就会错得很同质化。大家有题目不会助教也能理解，所以有时候我们也会睁一只眼闭一只眼。但是希望大家尽可能对自己严格一些，当你开始需要抄答案的时候，可能就已经意味着要逐渐开始掉队了。完成课后习题的思考过程，是抄答案完全没有办法替代的。而且会让助教们的血压变得很高。

7. 实在有题不会做的时候，我建议的正确抄答案方式是：

首先在题目上画个圈，让助教知道哪些题目可能比较困难。大家的作业对得很统一的话，助教是会对大家当前水平产生误判的，会非常影响后面的教学。

其次要换一种颜色的笔把答案抄上去，要尽可能地详细，不要跳步。有些答案的步骤是不太全的，甚至可能是错的。最好能和小伙伴们一起讨论一下，在理解消化答案之后再补上。

最后要尝试总结一下题目的方法，想想为什么没做出来，哪里有理解和思考的障碍～

6. 如何考试

1. 如何考前突击

首先务必要确保你对第三章足够熟悉，相关的概念、方法、证明，最好要熟练到你看到课后习题和书上定理就能大致口述出证明思路的程度，这是后面学习的基本功；特别要去适应和习惯数学证明题的模式，想明白证明题需要按照怎样的思路和步骤去完成～

其次要对矩阵乘法的几种理解方式非常熟悉，能够熟练地从中读取到向量相关的信息，在不同观点和语言之间翻译和转化，这是第二个基本功；

后面的学习全都是要建立在这两个基本功之上的～很多人说线性代数后半学期难，是因为它们前半学期就已经没有学得足够明白了，所以遇到很多新的概念、技巧的时候就会很茫然，不知道该从什么角度切入思考～后面的几乎所有知识点，其实几乎都是建立在三四两章的基本功之上的～

要重视基础，回归课本。这门课需要的全部方法和技巧，都已经在正文和习题当中了，只是很多同学读教材往往不怎么精细，没有挖掘出很多文字的“言外之意”。多多重视基本概念，和定理之间的逻辑架构，先把课上的知识体系的熟悉程度搞上去，然后再刷题。

2. 如何答题

题目**不要空着!!!** 有过程分!!! 尽量试着把题目套到最相关的定理里面试一试，有合理性的话也许能捞到不少分数。阅卷的时候我们最喜欢两类卷子，一类是全对的，另一类是全空着的。所以大家考试的时候即使啥都不会，也一定要尽量写点儿啥相关的公式定理，不让阅卷老师得逞。

考试中把优先简单题中档题做稳做对。要特别注意的是，很多时候，题目的难度并不随题号递增，因此合理分配时间还是挺重要的。推荐大家拿到试卷先大致通读一下，对卷面结构心里大致有数，然后再开始答题。

3. 阅卷标准

线性代数卷子的难度我们也无法控制。阅卷又是一件很严肃的事，所以我们也没办法放多少水，因为要严格执行阅卷要求。我们在制定的评分标准，其实已经在尽可能地照顾同学了，但前提是大家至少要把课本上的**基础知识**基本都学明白。即使是最困难的几道题目，也都有至少一半的小问并不那么难，是掌握了基础知识并略加变通就能够做出来的。在实际阅卷中，我们甚至会给这些简单的小问赋予更高的分值，这也是为什么很多同学后来出分以后，会发现比自己预想得要高。但是这种方式，对于基础知识都没有整明白的同学而言，就回不太友好，特别是如果放弃了两三道完整大题，那么分数段就会明显地拉开。可以说，只要大家比较熟练地掌握了课本，80分一定是通过普通努力就能拿到的。

7. 学习资料：

华罗庚曾经说过，“数缺形时少直觉，形少数时难入微。”

线性代数就是一门充满了几何直观的课程，只不过这些直观往往会淹没在课本上冗长的文字中，没有有经验的老师带大家入门的话，确实不太容易入门。

1. 3B1B-线性代数的本质：通过动画告诉你如何直观地理解线性代数。学习数学在于理解而非计算，理解到位了会让线性代数的学习事半功倍。

官方双语：<https://www.bilibili.com/video/BV1ys411472E>

中文配音：<https://www.bilibili.com/video/BV1ib411t7YR>

2. Interactive Linear Algebra:

<https://textbooks.math.gatech.edu/ila/index2.html>

这是一份适合无聊时瞎翻翻看的学习资料，里面有不少有趣的交互，可以用来帮助大家形成几何直观。

3. MIT Linear Algebra:

讲得很好，跟风推荐，到处都是，自行搜索

4. mym的习题课链接:

形成于两个学期的线代B教学中，但是其实都是从线代/高代的课本和各类习题集中整理出来的，也适用于线代A/非数院高代，使用需要的章节即可。其中包括学习资料若干，习题课讲义、录像，期中期末试题若干(含答案)，mym自编期中模拟题(含详细答案，难于实际期中，推荐考前做做)，5-8章课后习题答案(期中之后的内容比较抽象，对于3、4两章不太熟悉的同学来说会难度陡升，供大家掌握思路用，请大家按照规范使用)

大致使用方法：

1. 首先找到“习题课 2023”中的《第一次习题课讲义》，里面会告诉你这学期最重要的记号，以及一些书写方面的规范。规范整洁地完成书写，是能够提升数学能力上限的，请大家务必重视过程的书写。特别是不要省本子，该换行换行。
 2. 行列式的部分我往年都过得比较粗，习题课时间有限，需要大家自行掌握计算方法。这个部分我推荐蓝以中的《高等代数学习指南》。可以待掌握下面第四部分矩阵乘法之后再回来看看。过关题目是 mym 的期中模拟题若干。
 3. 《第三次习题课讲义》是前半学期的重点。特别是其中的概念梳理和后面的若干例子，尽量要能看到题目后口述思路和证明。这个部分的最后一题（丘砖 P162/例 6）是第三章的过关题。建议搭配习题课录像食用，掌握好分析证明题的方法。可以参考的视频是 2023/第二次习题课和 2022/第三次习题课。
 4. 《第四次习题课讲义》讲的是矩阵乘法的四种理解方式，它们会渗透在后半学期各种题目和内容的方方面面，务必要熟练掌握。尤其要重视三四两章的思想和方法，把概念熟悉到滚瓜烂熟，一步一个台阶地打好基础，后面才能学明白～这部分的过关标准是掌握 2022 秋期中第 6 题，以及 2023/《第四次习题课讲义-相抵和满秩分解》。这里可以看到，矩阵乘法理解到位之后，第五章有关相抵的很多内容实际上是自然而然的。
 5. 掌握好 3、4 两章之后，可以阅读《线性映射讲义》并牢记“没有一组基比另一组基更美”，然后按顺序读接下来的讲义即可。后面章节的课后习题是有答案的，但是请遵照树洞中给出的规范阅读答案。
 6. 所有讲义中质量最高的两份是《分块矩阵专题》和《线性代数期末复习指南》，它们是我花费了最大精力总结出的两份资料，涵盖了课程范围内几乎全部的核心方法和技巧。期中前后掌握好 3、4 章内容后就可以开始阅读了，讲义中的题目都是按照投喂小朋友的方式自编的，可以放心食用，按顺序读下来并不会很难。请务必在学期结束前认真完成其中的题目，掌握好它们，我可以保证你总评 80+。
 7. 前半学期可以适当刷刷丘砖，比如行列式的部分，后半学期对于线代 B 来说不是很必要，关键在于概念和方法要理解清楚，掌握课后题答案和习题课讲义就足够取得高分了。复习时间充足，可以参考树洞 6328849 的题目清单练练手，课本题都还不会的时候刷丘砖毫无意义。
5. 习题集：
1. 丘砖——丘维声
 2. 高等代数学习指南——蓝以中（比较符合我自己的胃口，墙裂推荐！）

8. 遇到困难

1. 及时求助！助教、老师、身边的同学都是可以求助的对象。感觉学习状况不太妙的时候，一定要趁早寻求帮助，考试前两三天再求助就有点儿太晚了，来不及补天。刚开学的这段时间，也许大家会感觉还相对轻松，但是等到这个学期的六七周开始，各种作业、小论文、期中考试就会涌过来，压力会非常大。尽量提前做好准备，给自己足够的复习时间。
2. 考试失利。期中成绩出来的时候，大概很多同学都会获得巨大的打击，这可能是不少同学这辈子第一次考试不及格。但是不要因此失去心气，一次考

试说明不了什么，成绩不理想，可能只是算错几个数，少做了半道题，没学明白几个概念，也可能只是没来得及扎扎实实把课本学一遍而已。这些并不意味着以后就学不好数学，更意味着你今后会做不好别的事情，这只意味着一次考试失利而已。千万不要因为一两次考试的成绩，就让自己陷入内耗和自我否定。对于一部分同学而言，数学也许的确很难学，但我觉得其实更难的是让自己行动起来，踏踏实实一页一页地把要学的东西多想几遍。

3. 去上课，往前坐。不要太早因为觉得老师讲得太慢/内容太简单就不听讲，然后就选择翘课或。上课的重要作用之一，就是给大家托底。常见的翘课借口说：老师讲得太慢了，内容太简单了，好无聊呀，摸会儿鱼吧；这个内容也就那么回事儿，回去我自己看看一会儿就学会了；今天状态不好，先听个乐子吧，明天再好好学线代吧；嗷呜，怎么一学就困，zzZ。
这些想法一个很大的问题在于，你要预支很多未来的时间。但是你之后真的会有时间嘛？很多本来可以做得很好的事就是在这样一点一点的拖延中逐渐放弃的。（而且说不定未来的时间可以专心致志玩耍摸鱼呢x
（另外，前排同学中说不定隐藏着很多认真学习的大佬。也许只要主动一点，问两道题，就能成为一段友谊的开端。（当然中间也有（以及后面也有如何快速进入学习状态：

<https://www.bilibili.com/video/BV1QX4y157mJ/>

4. 自主学习：线性代数是一门需要主动的数学课，如果只是被动地思考，是很难学明白的。要多复习、多归纳、多思考、多总结。要主动多问问题，有疑惑不要攒太久，要尽早解决。
5. 多交流。
我以前的一位老师就经常对我说：独学而无友，则孤陋而寡闻～
大学学习一样是需要努力的，但是也不要自己一个人闷着，要找到能一起学习交流的小伙伴们。闷声偷学可能是很开心，但是一个人学一定是没有两个人快的，因为一起学才更容易找到别人或自己不会或者不够理解的地方。
6. mym的邮箱：yyma@pku.edu.cn

希望能和大家共勉～

最后辛苦大家读到这里，快来复习一下吧：

1. 如何证明：猫猫是可爱的小动物？
2. 线性方程组分类讨论的一般标准？
3. 线性代数的两大核心思想是什么？
4. 行变换和列变换书写的格式规范？
5. 卷面题号和题目难度有什么关系？
6. 课后作业应当如何正确地抄答案？
7. 独学而无友，则_____？

留给未来的问题：

1. 线性方程组分类讨论的一般标准？
2. 什么是线性性质？
3. 行列式的几何意义是什么？

给定两个平面向量 a 和 b ，它们可以张成一个平行四边形。

1. 这个平行四边形的面积 $S(a,b)$ 是关于向量 a 和 b 的函数。这个函数具有什么样的性质呢？

2. 这个平行四边形的“有向”面积 $\det(a,b)$ 也是关于向量 a 和 b 的函数。它具有怎样的性质？你能否通过画图的方式说明这些性质的几何含义？
3. 从“有向”面积 $\det(a,b)$ 的运算性质出发，你能否给出在一组基底下 $\det(a,b)$ 的计算公式？
(Hint: 高中平面向量学习点乘/内积时，我们类似地从其性质出发，推导了 $x_1x_2+y_1y_2$)
4. 行列式中出现了形如 $(-1)^{\text{逆序数}}$ 的项，它是怎么来的？
4. 第三章中有哪些新概念？它们的定义、判定、性质分别是什么？
5. 矩阵乘法一共有多少种理解方式？每种理解方式有哪些典型的应用？
6. 写出你知道的全部秩不等式，并口述证明
7. 分块矩阵的运算规则你如何概括？
8. 线性代数两大核心思想都有哪些？你能否用数学语言阐释清楚？
9. 阅读以下打油诗，分析其中每一句话的含义

失秩的对角化

mym

想象你是一个矩阵
你要很方才有行列式
当你的特征值看向了你
哦你竟然如此失秩
你翻腾着做行变换
找到了只属于你们的基础解系
尽管未必能填满它的空虚
可它们都是你失的秩啊！

但你并不会驻足于此
更多特征值还在期盼着你
你飞蛾扑火
竭尽了你的每一点秩
直到你蓦然回首
你已经被对角化了

10. 如何用分块归纳法进行降维打击？
11. 你能否概括地说出线性空间是什么？
12. 你能否描述清楚线性空间长什么样？应当如何研究其上的线性变换？
13. 什么是线性映射？研究线性映射的基本原理是什么？

指南部分答案：

1. 见上文
2. 通过行变换化成简化行阶梯形，并按主元的位置分类讨论
3. 指如下两条
 1. 为什么研究基变换/坐标变换：
“没有一组基比另一组基更美”

2. 为什么 / 如何研究线性映射：

“存在就是被感知” / “人的本质是一切社会关系的总和”

“一个线性映射由它在基上的作用完全决定”

4. 行列变换用箭头，矩阵相等用等号。行变换写在箭头上方，列变换写在箭头下方。
5. 没有半毛钱关系。并且第一题常常用来挖坑，看大家学习是否扎实细致，对于小条件是否足够敏感。
6. 首先应该尽量不抄答案
其次计算题要自己对答案并更正
最后不会的要标注、对照、反思
7. 孤陋寡闻

留给未来的问题答案：

1. 通过行变换化成简化行阶梯形，并按主元的位置分类讨论
2. 线性性质指的是保持加法和数乘，即如下两条：
 $f(v+w) = f(v)+f(w)$
 $f(k v) = k f(v)$
3. 有向面积 / 体积
 1. $S(a,b)$ 总是非负的。它不具有线性性质：
 $S(k a,b) = |k| S(a,b)$
 2. 线性性质： $\det(a,b)$ 关于两个位置均是线性的，请自行画图讨论
反对称性： $\det(a,a)=0$
 3. $a=a_1 e_1 + a_2 e_2$, $b=b_1 e_1 + b_2 e_2$ ，带入并按上述性质运算，即得
 $\det(a,b)=(a_1 b_2 - a_2 b_1) \det(e_1,e_2)$
 4. $\det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = (-1)^{\tau(i_1, \dots, i_n)}$
4. 线性相关、线性无关；线性表出；极大线性无关组；秩；基础解系
概念的归纳见习题课
5. 四种，见习题课

4.3 正文： $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$

4.3 正文： $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$

4.3 习题： $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A)+\text{rank}(B)$

4.5 习题： $AB=0$ ，则 $\text{rank}(A)+\text{rank}(B) \leq n$

5.1 习题： $\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A)+\text{rank}(B)-n$ ，(n 是谁?)

- 6.
7. 分块中的可逆矩阵相当于非零的数，只要注意区分左乘右乘，运算方式和以前一样
8. 见文末附图

失秩的对角化 $Q^{-1}AQ$

想象你是一个矩阵

你要很方才有行列式

不可以漏掉不写

当你的特征值看向了你

$$(\lambda I - A)$$

哦你竟然如此失秩

$$(|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \text{一定失了秩, } 1 \leq \dim V_{\lambda_i})$$

你翻腾着做行变换

$$(\text{做行变换解方程 } (\lambda I - A)x = 0)$$

找到了只属于你们的基础解系

(零向量不行; 别的特征向量线性无关)

尽管未必能填满它的空虚

(它: 特征值; 它们: 特征向量/基础解系)

可它们都是你失的秩啊

$$(\text{失秩} = \dim V_{\lambda_i} \leq n_i = \text{特征值重数})$$

基础解系几个向量, 就代表你失了多少秩

但你并不会驻足于此

(要考虑全部特征值)

更多特征值还期盼着你

(好家伙!)(你还要继续失秩)

你飞蛾扑火

特征值重数

竭尽了每一点秩

$$(1 \leq \dim V_{\lambda_i} = \text{失秩} \leq n_i, \text{要让失秩} = n_i)$$

直到你蓦然回首

(回头看找到的特征向量) ↓ 降维打击

你已经被对角化了

(它们构成了 K^n 的一组基)

mym.

9.

10.

$$\begin{cases} A\varepsilon = \varepsilon A_1 \\ (\varepsilon, \eta) \text{ 是基} \end{cases}$$

\Rightarrow

$$A(\varepsilon, \eta) = (\varepsilon, \eta) \cdot \begin{pmatrix} A_1 & R \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

11. 非空 (至少含零元素)

封闭 (关于加法数乘)

运算 (满足八条法则)

以上三条缺一不可, 均隐藏在定义中

12. 长得都和 K^n 差不多:

线性空间 V 通过取基和 K^n 同构——课本 7.3 定理 1

这个同构下:

子空间对应子空间——课本 7.3 推论 2

线性变换对应于它的矩阵——课本 8.2 定理 1

特征子空间对应特征子空间——课本 8.2 定理 4

13. 一个线性映射完全由它在基底上的作用决定

同学，这周你 $Q^{-1}AQ$ 了嘛？

如果还没有，没关系，看到这条消息你就会 $Q^{-1}AQ$ 的

记号：

用 \bullet 表示 “向量的表出”

$A()$ 表示线性映射， A 表示矩阵

线性映射：

$$f(v+w) = f(v) + f(w)$$

$$f(k \ v) = k \ f(v)$$

线性映射的基本原理：

一个线性映射完全由它在基底上的作用决定

$$A(\varepsilon \bullet Q) = A(\varepsilon) \bullet Q$$

8:

线性代数核心思想之一：
研究与基/坐标选取无关的几何

1. 所有的基都是平等的，没有一组基比另一组基更美

$\varepsilon' = \varepsilon \cdot P$ ，其中 P 是旧基 ε 到新基 ε' 的过渡矩阵

2. 同一个向量在不同基底 ($\varepsilon, \varepsilon'$) 下有不同坐标 (x, x')，我们想要研究的是向量本身的性质，而非它们在某个基底下的具体坐标

同一个向量 $v = \varepsilon \cdot x = \varepsilon' \cdot x'$

3. 联立得到相应的坐标变换公式

$$x = Px'$$

线性代数核心思想之二：

“存在就是被感知”

“一个集合可以由所有指向它的映射完全确定”

“人的本质是一切社会关系的总和”

1. 一个线性映射完全由它在基上的作用决定

$$A(\varepsilon \cdot Q) = A(\varepsilon) \cdot Q$$

2. 给定基底，可以写出线性映射的矩阵

$$A(\varepsilon) = \eta \cdot A$$

3. 同一个向量在不同基底有不同的坐标

$$\varepsilon' = \varepsilon \cdot P$$

$$\eta' = \eta \cdot Q$$

4. 同一个线性映射在不同基底有不同的矩阵

$$\varepsilon' = \varepsilon \cdot P$$

$$\eta' = \eta \cdot Q$$

$$\text{则 } A(\varepsilon) = \eta \cdot A$$

$$\text{可以推出 } A(\varepsilon') = \eta' \cdot Q^{-1} A P$$

5. 同一个线性变换在不同基底有不同的矩阵

$$\varepsilon' = \varepsilon \cdot Q$$

$$\text{则 } A(\varepsilon) = \varepsilon \cdot A$$

$$\text{可以推出 } A(\varepsilon') = \varepsilon' \cdot Q^{-1} A Q$$