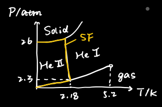
有相互作用的气体(流体)：产生超流现象.

^4He：玻色子. ✓

^3He：费米子. 但配对之后形成玻色子.



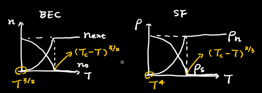
^4He 的相图.

超流与BEC的区别：

(1) 氦是液体, 不可压缩 ； BEC在共存区 $\kappa_T \to 0$, 可以轻易压缩

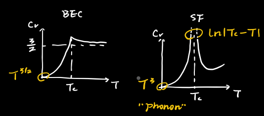
(2) 两种状态：ρ_n (正常), ρ_s (超流) 共存.

$$\rho_n \updownarrow n_{ext} \qquad \rho_s \updownarrow n_0$$



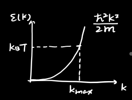
变量行为(临界指数)不一致!

(3) 热容



强关联系统中的声子模式

热容的估计



$\frac{\hbar^2k^2}{2m} \sim k_BT$：激发的尺度

$k_{max} \sim T^{1/2}$. k空间中, $k<k_{max}$ 的模式会被激发.

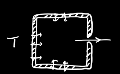
每个激发的模式对应 $\sim k_B$ 的热容. 热容正比于k空间 $k \le k_{max}$ 球的体积.

$\Rightarrow$ α维空间中：$C_V \sim (k_{max})^{\alpha} \sim T^{\alpha/2}$.

• 黑体辐射

黑体：光的理想吸收体.

黑体辐射：有限温度, 热平衡, 电磁场辐射.



黑体表面每个点都是这个"小孔".

量子化的电磁场 $\Rightarrow$ 谐振子. (?)

$\varepsilon_{n_{\vec{k},s}} = (n_{\vec{k},s}+\frac{1}{2})\omega_{\vec{k},s}$. $\vec{k}$：波矢. s：偏振. (光子也有)

两种看法：

(1) 谐振子的集合.

(2) 光子气体. 每个光子能量为 $\hbar\omega_{\vec{k},s}$. (n 理解为光子态的占据数)

分别考察.

(1) $E(\{n_{\vec{k},s}\}) = \sum_{\vec{k},s} \varepsilon_{n_{\vec{k},s}}$ (可分離, 标记为 $\vec{k},s$)

$$Z = \sum_{\{n_{\vec{k},s}\}} e^{-\beta E(\{n_{\vec{k},s}\})}$$

$$= \sum_{\{n_{\vec{k},s}\}} e^{-\beta \sum_{\vec{k},s}(n_{\vec{k},s}+\frac{1}{2})\hbar\omega_{\vec{k},s}}$$

$$= \prod_{\vec{k},s} \sum_{n_{\vec{k},s}=0}^{\infty} e^{-\beta(n_{\vec{k},s}+\frac{1}{2})\hbar\omega_{\vec{k},s}}$$

$$= \prod_{\vec{k},s} \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_{\vec{k},s}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k},s}}}$$

第一种理解：直接对"$\beta\hbar\omega_{\vec{k},s}$"求导.

这样确实可得到 $\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\vec{k},s}}-1}$, 这看起来好像就可以了..

$$\ln Z = \sum_{\vec{k},s}\left(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_{\vec{k},s}\right) - \sum_{\vec{k},s}\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k},s}}\right)$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = \underbrace{\sum_{\vec{k},s}\frac{1}{2}\hbar\omega_{\vec{k},s}}_{\text{发散. 但与温度无关. 扔掉.}} + \sum_{\vec{k},s}\frac{\hbar\omega_{\vec{k},s}}{e^{\beta\hbar\omega_{\vec{k},s}}-1}$$

→ 能量

→ 可以理解为平均光子数.

(直接算子综平均太复杂了)

但我还是觉得

这个靠谱.

$$E - E_0 = \sum_{\vec{k},s} \frac{\hbar \omega_{\vec{k},s}}{e^{\beta\hbar\omega_{\vec{k},s}} - 1} .$$

(2) 光子气体：光子数目并不守恒，$\mu = 0$.（引入源于 N 守恒的约束）

光子数分布为 BE 分布，但 $\mu = 0$.

$$E = \sum_{\vec{k},s} \varepsilon_{\vec{k},s} \cdot n_{\vec{k},s}$$

$$= \sum_{\vec{k},s} \frac{\hbar \omega_{\vec{k},s}}{e^{\beta\hbar\omega_{\vec{k},s}} - 1} .$$

两种观点给出相同结果！

$$\overset{(1)}{(\vec{k},s)\ \text{谐振子},\ n} \iff \overset{(2)}{n\ \text{个光子}\ (\omega_{\vec{k},s})}$$

色散关系：$\omega_{\vec{k},s} = c \cdot |\vec{k}|$.

$$\sum_{\vec{k}} \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} . \quad \sum_{s} \to 2 .$$

$$E = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \cdot \frac{\hbar c k}{e^{\beta\hbar c k} - 1}$$

$$= \frac{2V}{(2\pi)^3}\, 4\pi \int dk \cdot k^2 \cdot \frac{\hbar c k}{e^{\beta\hbar c k} - 1}$$

$$= \frac{V}{\pi^2} \cdot \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx}_{= \Gamma(4)\cdot\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}}$$

$$= \frac{V \pi^2 (k_B T)^4}{15 (\hbar c)^3} .$$