• 平均场理论的临界指数

$f(m) = \frac{1}{2}tm^2 + um^4 - hm.$

(1) $m \sim (-t)^\beta$, 在 $h=0$ 时

$$\frac{\partial f}{\partial m} = tm + 4um^3 = 0 \Rightarrow m^* = \begin{cases} 0, & t>0 \\ \pm\sqrt{\frac{-t}{4u}}, & t<0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \beta = \frac{1}{2}.$

(2) $m \sim h^{1/\delta}$, 在 $t=0$ 时

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 4um^3 - h = 0 \Rightarrow m^* = \left(\frac{h}{4u}\right)^{1/3}.$$

$\Rightarrow \delta = 3.$

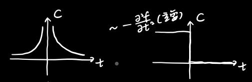
(3) $\chi = \left.\frac{\partial m}{\partial h}\right|_{h\to 0} \sim |t|^{-\gamma}.$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = tm + 4um^3 - h = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial m} = t + 12um^{*2}.$$

$$\chi \sim \left.\frac{1}{t+12um^{*2}}\right|_{h=0} = \begin{cases} \frac{1}{t}, & t>0 \\ -\frac{1}{2t}, & t>0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \gamma = 1.$

(4) $C \sim |t|^{-\alpha}$. 在 $h=0$ 时.



跳变：$\alpha = 0$.

结果与气液相变相同 → van der Waals 理论也是平均场理论.

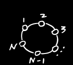
(理由：在临界点附近，他们能用统一的状态方程描述)

• 伊辛模型的严格解

$\alpha=1$ 平均场完全不对！(事实上无相变)

$\alpha=2$ 平均场定性上对 (但临界指数不对)

先看 $\alpha=1$.

取周期性边界条件 

$$H = -J\sum \sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{h}{2}\sum(\sigma_i + \sigma_{i+1})$$

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta J\sum\sigma_i\sigma_{i+1} + \frac{\beta h}{2}\sum(\sigma_i+\sigma_{i+1})}$$

$$= \sum_{\{\sigma_i\}}\prod_i \underbrace{e^{\beta J\sigma_i\sigma_{i+1} + \frac{\beta h}{2}(\sigma_i+\sigma_{i+1})}}_{T[i]_{\sigma_i,\sigma_{i+1}}\ (\text{矩阵的}\{\sigma_i,\sigma_{i+1}\}\text{元素})}$$

式中

$$\begin{array}{ccc} T_{2\times 2} = \begin{pmatrix} e^{\beta J+\beta h} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J-\beta h} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \sigma_{i+1}=+1 \\ \sigma_{i+1}=-1 \end{array} \\ \quad\quad \sigma_i=+1 \quad \sigma_i=-1 & \end{array}$$

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} T_{\sigma_1\sigma_2}T_{\sigma_2\sigma_3}\cdots T_{\sigma_{N-1}\sigma_N}T_{\sigma_N\sigma_1} \quad (\text{矩阵元相乘，求和} \to \text{矩阵求和})$$

$$= tr(T^N) = \sum_i \lambda_i^N. \quad \lambda_i: T\text{的本征值}.$$

$$\lambda_\pm = e^{\beta J}\cosh(\beta h) \pm \sqrt{e^{2\beta J}\cosh^2(\beta h) - 2\sinh(2\beta J)}$$

$$Z = \lambda_+^N + \lambda_-^N \xrightarrow{N\to\infty} \lambda_+^N.$$

$h=0$ 时：

$$\lambda_+ = e^{\beta J} + \sqrt{e^{2\beta J} - (e^{2\beta J} - e^{-2\beta J})} = 2\cosh\beta J.$$

$$\ln Z = N\ln(2\cosh\beta J).$$

这是无相互作用顺磁的配分函数 — 没有相变！

$T_{\sigma_i\sigma_{i+1}}$ — 转移矩阵 (transfer matrix)

简单分析：

$\alpha=1$

$$+++\cdots+++ \longrightarrow +++\cdots+\,\overset{\text{畴}}{\uparrow}\ \overset{\text{畴壁}}{\uparrow}\,-\cdots---$$

$\Delta E=2J$， $\Delta S\sim k_B\ln\left(\frac{L}{a}\right)$.（可以在L个可能位置）

$\Delta F=\Delta E-T\Delta S$

$\quad=2J-k_BT\ln\left(\frac{L}{a}\right)\xrightarrow{L\to\infty}\Delta F<0$.

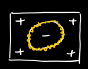
但在有限L时，若 $T<\frac{2J}{k_B\ln(\frac{L}{a})}$，全变为"有序态"——但不是相变！

相变只在热力学极限下才能严格定义.

现实中？有限→无限，需要它们的出现.

熵变在 $T>0$ 时永远"占优势"！

$\alpha=2$



$\Delta E=2JL$

$\Delta S=k_B\ln(g^L)$（意思是："简并度"的L次方）

$\Delta F=\Delta E-T\Delta S$

$\quad=(2J-k_BT\ln g)\cdot L$，可以竞争.

"最低临界指数"：α_L　　Ising：$\alpha_L=1$.（$\alpha\le\alpha_L$ 无相变）

实际上，只要是分立对称性，都有 $\alpha_L=1$.
　　　　连续对称性，$\alpha_L=2$.

二维 Ising 模型（方形晶格）

$$Z=\sum_{\{\sigma_i\}}e^{\beta J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j}=\sum_{\{\sigma_i\}}e^{K\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j}.$$

(1) 低温极限：$K\gg1$.

$$Z\simeq g_0e^{-\beta E_0}+g_1\cdot e^{-\beta E_1}+g_2\cdot e^{-\beta E_2}+\cdots$$，只保留前几个.

基态：$E_0=-2NJ$. $g_0=2$.

$$\begin{matrix}+&+&+\\+&+&+\\+&+&+\end{matrix}\ \Big/\ \begin{matrix}-&-&-\\-&-&-\\-&-&-\end{matrix}$$ ，连接数 $=2N$.

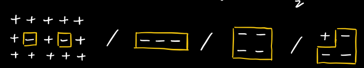
第一激发态：$E_1=E_0+4\cdot2J$, $g_1=2N$.

$$\begin{matrix}+&+&+\\+&\boxed{-}&+\\+&+&+\end{matrix}$$

第二激发态：$E_2=E_0+6\cdot2J$. $g_2=2\cdot2N$

$$\begin{matrix}+&+&+&+\\+&\boxed{-\ -}&&+\\+&+&+&+\end{matrix}$$

第三激发态：$E_3=E_0+8\cdot2J$. $g_3=2\cdot\frac{N(N+9)}{2}$（数一下）



$$Z=2e^{2NK}\left(1+Ne^{-8K}+2Ne^{-12K}+\frac{N(N+9)}{2}e^{-16K}+\cdots\right)$$

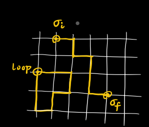
(2) 高温极限：$K\ll1$.

$$e^{K\sigma_i\sigma_j}=\cosh K+\sigma_i\sigma_j\cdot\sinh K.$$ （利用 $(\sigma_i\sigma_j)^2=1$）

$$\quad=\cosh K(1+\sigma_i\sigma_j\tanh K).$$

$$Z=\sum_{\{\sigma_i\}}\prod_{\langle ij\rangle}\cosh K(1+\sigma_i\sigma_j\tanh K)$$

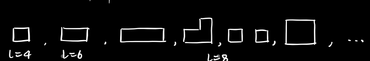
$$\quad=(\cosh K)^{2N}\sum_{\{\sigma_i\}}\prod_{\langle ij\rangle}(1+\sigma_i\sigma_j\tanh K)$$



$$\sum_{\{\sigma_i\}}\sigma_i\sigma_f(\tanh K)^L=0.$$

只有 Loop 在求和中"存活"！（只要有 $\sum_{\{\sigma_i\}}\sigma_i\sigma_f$，必为0）

$\begin{matrix}+&+\\-&-\\+&-\\-&+\end{matrix}$



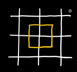
对于loop情形：$\sum_{\{\sigma_i\}}(\tanh K)^L=2^N(\tanh K)^L$

$$=2^N(\cosh K)^{2N}\left[1+N(\tanh K)^4+2N(\tanh K)^6+\frac{N(N+9)}{2}(\tanh K)^8+\cdots\right]$$

若取 $\tanh K = e^{-2\tilde{K}}$ → 两个级数是一样的！

高温 ⟺ 低温.

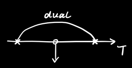
$\sinh(2K)\sinh(2\tilde{K}) = 1$.



对偶变换：晶格 → 晶格中心.

对应关系 → duality.（用两种不同的语言讲同一个故事）

这里的对偶：self-dual.（Ising ↔ Ising） （3d：Ising ↔ Ising/$\mathbb{Z}_2$ gauge theory）



若只有一个临界温度点：$\sinh(2K_c) = 1$.（与严格解一致！）

$$k_B T_c = \frac{2J}{\ln(1+\sqrt{2})}.$$