Математический анализ

Конспект лекций А. С. Роткевича, 2024

— В библиотеке Калифорнийского университета (UCLA) на одной из полок хранится весьма уникальный том. Вполне вероятно, самиздат, но сплетенный и оформленный очень качественно — он ничем не уступает другим книгам библиотеки в этом отношении. Называется так: "Секс, криминал и функциональный анализ. Часть I: Функциональный анализ J.D. Stein.
— Как сказал другой человек: "у этой книги две части, одна написана, другая нет, та, что не написана, важнее"

Из канала воспоминания математиков

Еще немного про отображения

Опр. $\Gamma_f \subset X \times Y$ - график отображения, удовлетворяющий следующим свойством:

1) $\forall x \in X \ \exists y \in Y : (x,y) \in \Gamma_f$;
2) $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in \Gamma_f \Rightarrow y_1 = y_2$.

Упражнения:
Доказать, что для $f : X \to Y$:
1) $\forall A_1, A_2 \subset X$:
$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
2) $\forall B_1, B_2 \subset Y$:
$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Решения упражнений:

1)

$\cap$: пусть $x_1 \in A_1,\ x_2 \in A2,\ x_1 \neq x_2$,

$f(x_1) = f_(x_2),\ f^{-1}(x_1) = \{x_1, x_2\}$. Тогда очевидно, что $(f(x_1) \in f(A_1) \cap f(A_2)) \wedge \neg(f(A_1 \cap A_2))$;

$\cup : y \in f(A_1 \cup A_2) \ \Leftrightarrow\ \exists\ x \in A_1 \vee x \in A_2 : f(x) = y \ \Leftrightarrow\ y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2)$.

2)

$\cap : x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \ \Leftrightarrow\ f(x) \in B_1 \cap B_2 \ \Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$;

$\cup : x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \ \Leftrightarrow\ f(x) \in B_1 \cup B_2 \ \Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

Опр. Отображение $f : \mathbb{N} \to X$ называется последовательностью элементов множества X.

Поле вещественных чисел

Опр. Полем $(F, +, *)$ называется множество с двумя заданными на нем бинарными операция со следующими свойствами:

1) Множество является абелевой группой относительно обеих операций (соблюдаются коммутативность, ассоциативность, существование обратных и нейтральных элементов)

2) $\forall x, y, z \in F : (x + y)z = xz + yz$.

Упражнение: Доказать, что нейтральный элемент по сложению не равен нейтральному по умножению в нетривиальном поле.

Решение:

От противного: пусть $a \in F,\ a = a \ \Leftrightarrow\ 0 * a = a \ \Rightarrow\ 0 * a + 0 = a + 0 \Rightarrow 0 * (a + 1) = a \ \Rightarrow\ a + 1 = a$ — противоречие.

Опр. S — множество. Порядок на S — отношение строгого линейного порядка на S, обозначающееся $<$, со следующими свойствами:

1) $\forall x, y \in S$ верно только одно: $x < y, x = y, y < x$;

2) $\forall x, y, z \in S : (x < y \wedge y < z) \Rightarrow (x < z)$.

Опр. (F, +, *, <) — упорядоченное поле, если (F, +, *) — поле и для $<$ верно:

1) $\forall x, y, z \in F : x < y \Rightarrow x + z < y + z$;

2) $\forall x, y \in F : x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0$.

Теперь введем определение супремумв и инфимума:

Опр. Пусть $A \subset F, \alpha \in F$ называется супремумом A, если:

1) $\forall x \in F : x \leq \alpha$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A : x + \varepsilon > \alpha$.

Аналогично определяется инфимум — как точная нижняя грань множества A.

Опр. Упорядоченное поле обладает свойством точной верхней грани, если любое ограниченное сверху множеству имеет супремум.

Теорема(без доказательства) Существует единственное упорядоченное поле со свойством точной верхней грани. Оно называется полем вещественных чисел и обозначается как $\mathbb{R}$.

Покажем, что $(\mathbb{Q}, +, *)$ не обладает свойством точной верхней грани.

Д-во:

Пусть $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \wedge q^2 < 2\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \wedge q^2 > 2\}$. Несложно доказать, что $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (от противного) $\Rightarrow \mathbb{Q}_+$ разбивается A и B. Пусть $\alpha = sup\ A$. Рассмотрим два случая:

1) $\alpha \in B:$

$r = \alpha - \frac{\alpha^2-2}{\alpha+2} = \frac{2(\alpha-1)}{\alpha+2}$;

$r^2 - 2 = \frac{2\alpha^2-4}{(\alpha+2)^2} > 0 \Rightarrow$ это противоречит определению α как супремума A.

2) $\alpha \in A:$

$r = \alpha + \frac{2-\alpha^2}{\alpha+2} > \alpha$;

$2 - r^2 = \frac{4-2\alpha^2}{(\alpha+2)^2} > 0$ $(\alpha^2 < 2) \Rightarrow$ вновь противоречие определению α как супремума A.