Universidad de Chile
Departamento de Física
FI3104-1 - Métodos Numéricos

Tarea 2

Profesor: Andrés Meza
Auxiliar: Javiera Ahumada, Víctor Navarro

Fecha entrega: 29 abril 2019 (antes de las 23:59 horas)

- En esta tarea se corregirán los 2 problemas.
- La tarea debe subida a u-cursos como un solo archivo en formato .ipynb, .html o .pdf antes de la fecha y hora indicada.
- **No se aceptarán atrasos ni se recibirán archivos en los correos del profesor o los auxiliares.**
- La solución de los problemas debe contener breves comentarios y explicaciones que faciliten su comprensión, especialmente de los códigos empleados.

P1. En el curso de Mecánica del tercer semestre se mostró que un péndulo de masa m y largo L que se suelta desde el reposo en un ángulo ϕ_0, medido con respecto a la vertical en el punto más bajo, tiene una energía mecánica total dada por

$$E = -mgL\cos\phi_0 = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - mgL\cos\phi$$

Esta expresión puede ser usada para calcular el período del péndulo en el caso de grandes amplitudes. En efecto, es posible despejar

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{2(\cos\phi - \cos\phi_0)} \Longrightarrow dt = \sqrt{\frac{L}{g}}\frac{d\phi}{\sqrt{2(\cos\phi - \cos\phi_0)}}$$

Integrando entre 0 y un cuarto del periodo ($T/4$), el ángulo ha pasado de 0 a ϕ_0, entonces

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{2(\cos\phi - \cos\phi_0)}}$$

Si definimos $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$, que corresponde al periodo de un péndulo en el caso de pequeñas amplitudes, se tiene finalmente

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{2(\cos\phi - \cos\phi_0)}}$$

Se busca calcular este periodo numéricamente para distintos valores de ϕ_0. Para eso

i) Realice un cambio de variable adecuado para regularizar la integral.

ii) Calcule y grafique T/T_0 para $0 < \phi_0 \leq \pi/2$. Indique el método usado y el número de puntos.

P2. El modelo de Lorenz fue propuesto originalmente para describir la atmósfera, pero luego se hizo muy famoso por presentar caos de una manera fácil de visualizar y entender. En su forma más sencilla, es un sistema de ecuaciones diferenciales para tres variables

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(b-z)-y \\ \frac{dz}{dt} &= xy-cz \end{aligned}$$

Usando una condición inicial cualquiera, implemente su propio código con el método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver estas ecuaciones para $a = 10.0$, $b = 3R.RR$ y $c = 8/3$ por un tiempo total $t_{\mathrm{total}} = 50$.

(a) Grafique y versus z. Investigue la influencia del paso de integración sobre la precisión de su solución.

(b) Ahora resuelva para una condición inicial muy similar a la anterior (usted debe definir "muy similar") y grafique x versus t para los dos condiciones iniciales. Debería notar que al cabo de poco tiempo las dos soluciones difieren mucho. Comente.