Tarea 6

Profesor: Andrés Meza
Auxiliar: Javiera Ahumada, Víctor Navarro

Fecha entrega: 27 junio (antes de las 23:59 horas)

- La tarea debe subida a u-cursos como un solo archivo en formato .ipynb, .html o .pdf antes de la fecha y hora indicada.
- **No se aceptarán atrasos ni se recibirán archivos en los correos del profesor o los auxiliares.**
- La solución de los problemas debe contener breves comentarios y explicaciones que faciliten su comprensión, especialmente de los códigos empleados.

P1. En un material ferromagnético (por ejemplo, el hierro) cada pedazo microscópico del material se comporta como un pequeño imán. Si no hay campo magnético externo, cada uno de estos imanes tiene una evolución temporal que lo lleva a un valor de equilibrio en que el polo norte puede apuntar para arriba o para abajo con igual probabilidad. Para simplificar, consideraremos que la magnetización de cada imán no es un vector, pero puede tomar valores entre $-\infty$ e ∞. Si llamamos m a la magnetización convenientemente adimensionalizada de uno de estos microimánes, su dinámica está dada por

$$\frac{dm}{dt} = \mu(m - m^3)$$

donde μ es una constante positiva que depende del material. Muestre que según esta dinámica $m = 0$ es un equilibrio inestable y que $m = \pm 1$ son equilibrios estables.

En un material ferromagnético, los microimánes se tratan de alinear de manera de quedar con la misma dirección que sus vecinos. Considerando por simplicidad un material unidimensional, el sistema se describe por la magnetización en cada punto y en cada instante $m(x, t)$, cuya dinámica se modela por

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \mu(m - m^3)$$

El primer término de la derecha describe la tendencia a alinearse pues la ecuación de difusión tiende a reducir las inhomogeneidades. El segundo término modela la tendencia a magnetizarse en cada punto.

Resuelva esta ecuación de reacción-difusión **escribiendo** un código que implemente el método de Crank-Nicolson para la ecuación de difusión con una fuente. Para que el método produzca resultados correctos, el paso de integración debe cumplir que $\mu\Delta t \ll 1$ (típicamente, $\mu\Delta t = 0{,}1$ funciona bien). Considere condiciones de borde de Dirichlet donde los bordes izquierdo y derechos están fijos con magnetización $m = 0$.

Para la condición inicial utilice

$$m(x,0) = 0{,}005\sin\left(\frac{\mathrm{RRR}}{10}x\right) + 0{,}005\sin\left(\mathrm{RRR}\,x\right)$$

donde RRR son los tres últimos dígitos de su RUT (si éste termina en 000 tome RRR igual a los primeros 3 dígitos de su RUT).

Considere un sistema de largo $L = 100$, discretizado en $N = 200$ puntos y los siguientes valores de los parámetros: $\gamma = 1{,}0$ y $\mu = 2.\mathrm{RRR}$.

Simule hasta un tiempo grande (es decir, hasta que ya no vea evolución en $m(x,t)$). Adjunte 5 gráficos de $m(x,t)$ para instantes de tiempo en que el comportamiento se vea diferente cualitativamente. Explique lo que observa.

Explore el efecto de utilizar distintos pasos de integración Δx y Δt. Comente lo observado.

NOTA: Para observar la evolución de $m(x,t)$ se pueden usar varios métodos. Por ejemplo, se pueden grabar cada cierto número de iteraciones archivos con $m(x)$ y luego graficarlos separadamente. También se puede grabar una matriz en que las columnas son las x y las filas son los tiempos t. Si se grafica la matriz con mapa de colores entonces lo que se tiene es un gráfico espacio-temporal, donde el espacio está en la coordenada horizontal y el tiempo avanza verticalmente. En la imagen de abajo se ve un ejemplo de lo que se debería obtener.