

Úplná Gaussova eliminace

Štěpán Tichý

20. října 2020

1 Analogie pro sloupce

Definice 1.1 V případě, že neuvažujeme matice jako soustavy LAR, tak můžeme zadefinovat obdobu ekvivalentních řádkových úprav a to pro sloupce. Ekvivalentní sloupcové úpravy jsou pak též tři:

1. záměna dvou sloupců,
2. přičtení násobku jiného sloupce k vybranému sloupci,
3. násobení sloupce číslem $\alpha \neq 0$.

Lemma 1.2 Necht $\mathbb{A} \in T^{n,m}$. Jestliže provedeme ekvivalentní sloupcovou úpravu, je výsledná matice rovna matici $\mathbb{A}\mathbb{M}$, kde \mathbb{M} je čtvercová matice řádu \mathbf{m} , která vznikla z jednotkové matice \mathbb{I} stejnou sloupcovou úpravou.

Důkaz. Je třeba ověřit, že tvrzení je pravdivé pro všechny ekvivalentní sloupcové úpravy:

1. Záměna i -tého a j -tého sloupce.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & m \\ 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ - & - & 0 & \dots & 1 & - & - \\ & & & \ddots & & & \\ - & - & 1 & \dots & 0 & - & - \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

2. Vynásobení sloupce nenulovým číslem α z T .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & \dots & \dots & m \\ 1 & & | & & & & \\ & \ddots & | & & & & \\ - & - & \alpha & - & - & - & - \\ & & | & \ddots & & & \\ & & | & & \ddots & & \\ & & | & & & \ddots & \\ & & | & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \alpha a_{1i} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & \alpha a_{2i} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \alpha a_{ni} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

3. Přičtení α -násobku j -tého sloupce k i -tému.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & m \\ 1 & & | & & | & & \\ & \ddots & | & & | & & \\ - & - & 1 & - & - & - & - \\ & & | & \ddots & | & & \\ - & - & \alpha & - & 1 & - & - \\ & & | & & | & \ddots & \\ & & | & & | & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + \alpha a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} + \alpha a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + \alpha a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Vlídny čtenář nahlédne, že podle pravidel maticového násobení všechny tři rovnosti platí. \square

Věta 1.3 (Ekvivalentní sloupcové úpravy a násobení maticí). *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,m}$. Provedeme-li s \mathbb{A} konečný počet ekvivalentních sloupcových úprav, je výsledná matice rovna matici $\mathbb{A}\mathbb{M}$, kde je \mathbb{M} čtvercová matice řádu m , která vznikla z jednotkové matice \mathbb{I} stejnými ekvivalentními sloupcovými úpravami provedenými ve stejném pořadí.*

Důkaz. Jestliže v \mathbb{A} provedeme k ekvivalentních sloupcových úprav (ESÚ), potom je podle lemmatu 1.2 výsledná matice rovna:

$$\mathbb{A}\mathbb{M}_1\mathbb{M}_2 \dots \mathbb{M}_k,$$

kde \mathbb{M}_i je matice vyniklá z jednotkové i -tou ESÚ. Označme $\mathbb{M} = \mathbb{M}_1\mathbb{M}_2 \dots \mathbb{M}_k$. Pak $\mathbb{M} = \mathbb{M}_1\mathbb{M}_2 \dots \mathbb{M}_k\mathbb{I}$ a podle lemmatu 1.2 vidíme, že \mathbb{M} vznikla z \mathbb{I} stejnými k ESÚ provedenými ve stejném pořadí. \square

Věta 1.4 (Úplná Gaussova eliminace). *Nechť $\mathbb{M} \in T^{n,n}$, \mathbb{A} je regulární matice a $\mathbb{B} \in T^{m,n}$. Pak \mathbb{A} lze převést ekvivalentními sloupcovými úpravami na jednotkovou matici. Pokud převedeme rozšířenou matici $\begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ \mathbb{B} \end{pmatrix}$ ekvivalentními řádkovými úpravami do tvaru $\begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ \mathbb{X} \end{pmatrix}$, potom $\mathbb{X} = \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$.*

Symbolicky zapsáno:

$$\left(\frac{\mathbb{A}}{\mathbb{B}}\right) \sim \left(\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}}\right).$$

Důkaz. Po převedení \mathbb{A} pomocí ESÚ do horního stupňovitého tvaru má matice na diagonále díky regularitě pouze nenulová čísla. Když poté každý sloupec vydělíme odpovídajícím číslem, dostaneme na diagonále jedničky. A nad ní již jednoduše vyrobíme nuly - nejprve v druhém sloupci odečtením odpovídajícího násobku prvního sloupce, poté ve třetím sloupci odečtením vhodného násobku prvního a druhého řádku atd.

K důkazu druhé části věty si stačí uvědomit, že \mathbb{I} vznikla ESÚ z \mathbb{A} a že \mathbb{X} vznikla z \mathbb{B} stejnými úpravami provedenými ve stejném pořadí. Z věty 1.3 plyne existence matice \mathbb{M} takové, že $\mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{M}$ a $\mathbb{X} = \mathbb{B}\mathbb{M}$. Z první rovnosti dostáváme $\mathbb{M} = \mathbb{A}^{-1}$ a z druhé rovnosti pak $\mathbb{X} = \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$ což jsme chtěli dokázat. \square

Slovo „úplná“ naznačuje, že na rozdíl od Gaussovy eliminace, kdy jsme matici pomocí ESÚ převedli do horního stupňovitého tvaru a zastavili se, v úplné Gaussově eliminaci z horního stupňovitého tvaru pokračujeme a vyrábíme nuly nad diagonálou, dokud nedostaneme jednotkovou matici.

Úplnou Gaussovu eliminaci můžeme používat k řešení následujících úloh"

1. Jsou dány matice \mathbb{A} regulární a \mathbb{B} vhodného rozměru. Najděte $\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$.
2. Je dána regulární matice \mathbb{A} . Určete \mathbb{A}^{-1} . (Klademe \mathbb{B} rovno \mathbb{I} .)
3. Je dána regulární matice \mathbb{A} a vektor \vec{b} vhodného rozměru. Najděte $\mathbb{A}^{-1}\vec{b}$, tj. řešte rovnici $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$.

Klademe \mathbb{B} rovno \vec{b} a \mathbb{A} transponujeme a aplikujeme úplnou Gaussovu eliminaci:

$$\left(\frac{\mathbb{A}^T}{\vec{b}}\right) \sim \left(\frac{\mathbb{I}}{\vec{b}(\mathbb{A}^{-1})^T}\right) \sim \left(\frac{\mathbb{I}}{((\vec{b}(\mathbb{A}^{-1})^T)^T)^T}\right) \sim \left(\frac{\mathbb{I}}{(\mathbb{A}^{-1}(\vec{b})^T)^T}\right) \sim \left(\frac{\mathbb{I}}{(\mathbb{A}^{-1}\vec{b})^T}\right).$$

Kde využíváme pravidla transponování součinu a faktu, že matice dvakrát transponovaná je matice původní. V posledním kroku využíváme, vektor transponovaný je ten stejný, je na nás jak ho zapíšeme dle toho z jaké strany ho používáme k násobení. Výsledkem toho postupu je matice transponovaná k matici k nám hledané a tak stačí ji jenom ještě jednou transponovat.

4. Jsou dány matice \mathbb{A} regulární a \mathbb{X} vhodného rozměru. Spočtěte $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$. Zde aplikujeme úplnou Gaussovu eliminaci na transponované matice:

$$\left(\frac{\mathbb{A}^T}{\mathbb{X}^T}\right) \sim \left(\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{X}^T(\mathbb{A}^T)^{-1}}\right) \sim \left(\frac{\mathbb{I}}{(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X})^T}\right).$$

Tudíž transponováním výsledné dolní matice získáme $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$.

Příklad 1.5 Jsou dány matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

• $\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ \mathbb{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tedy } \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}^T \\ \mathbb{X}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tudíž } \mathbb{A}^{-1}\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

• \mathbb{A}^{-1}

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ \mathbb{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ proto } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$