

# Úplná Gaussova eliminace

Štěpán Tichý

20. října 2020

## 1 Analogie pro sloupce

**Definice 1.1.** V případě, že neuvažujeme matice jako soustavy LAR, můžeme zadefinovat obdobu ekvivalentních řádkových úprav a to pro sloupce. Ekvivalentní sloupcové úpravy jsou pak též tři:

1. záměna dvou sloupců,
2. přičtení násobku jiného sloupce k vybranému sloupci,
3. násobení sloupce číslem  $\alpha \neq 0$ .

**Lemma 1.2.** Necht  $\mathbb{A} \in T^{n,m}$ . Jestliže provedeme ekvivalentní sloupcovou úpravu, je výsledná matice rovna matici  $\mathbb{A}\mathbb{M}$ , kde  $\mathbb{M}$  je čtvercová matice řádu  $\mathbf{m}$ , která vznikla z jednotkové matice  $\mathbb{I}$  stejnou sloupcovou úpravou.

*Důkaz.* Je třeba ověřit, že tvrzení je pravdivé pro všechny ekvivalentní sloupcové úpravy:

1. Záměna  $i$ -tého a  $j$ -tého sloupce.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & m \\ 1 & & | & & | & & \\ & \ddots & | & & | & & \\ - & - & 0 & \dots & 1 & - & - \\ & & | & \ddots & | & & \\ - & - & 1 & \dots & 0 & - & - \\ & & | & & | & \ddots & \\ & & | & & | & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

2. Vynásobení sloupce nenulovým číslem  $\alpha$  z  $T$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & \dots & \dots & m \\ 1 & & | & & & & \\ & \ddots & | & & & & \\ - & - & \alpha & - & - & - & - \\ & & | & \ddots & & & \\ & & | & & \ddots & & \\ & & | & & & \ddots & \\ & & | & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \alpha a_{1i} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & \alpha a_{2i} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \alpha a_{ni} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

3. Přičtení  $\alpha$ -násobku  $j$ -tého sloupce k  $i$ -tému.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & m \\ 1 & & | & & | & & \\ & \ddots & | & & | & & \\ - & - & 1 & - & - & - & - \\ & & | & \ddots & | & & \\ - & - & \alpha & - & 1 & - & - \\ & & | & & | & \ddots & \\ & & | & & | & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + \alpha a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} + \alpha a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + \alpha a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Vlídny čtenář nahlédne, že podle pravidel maticového násobení všechny tři rovnosti platí.  $\square$

**Věta 1.3.** (Ekvivalentní sloupcové úpravy a násobení maticí). *Nechť  $\mathbb{A} \in T^{n,m}$ . Provedeme-li s  $\mathbb{A}$  konečný počet ekvivalentních sloupcových úprav, je výsledná matice rovna matici  $\mathbb{A}\mathbb{M}$ , kde je  $\mathbb{M}$  čtvercová matice řádu  $m$ , která vznikla z jednotkové matice  $\mathbb{I}$  stejnými ekvivalentními sloupcovými úpravami provedenými ve stejném pořadí.*

*Důkaz.* Jestliže v  $\mathbb{A}$  provedeme  $k$  ekvivalentních sloupcových úprav (ESÚ), potom je podle lemmatu 1.2 výsledná matice rovna:

$$\mathbb{A}\mathbb{M}_1\mathbb{M}_2 \dots \mathbb{M}_k,$$

kde  $\mathbb{M}_i$  je matice vyniklá z jednotkové  $i$ -tou ESÚ. Označme  $\mathbb{M} = \mathbb{M}_1\mathbb{M}_2 \dots \mathbb{M}_k$ . Pak  $\mathbb{M} = \mathbb{M}_1\mathbb{M}_2 \dots \mathbb{M}_k\mathbb{I}$  a podle lemmatu 1.2 vidíme, že  $\mathbb{M}$  vznikla z  $\mathbb{I}$  stejnými  $k$  ESÚ provedenými ve stejném pořadí.  $\square$

**Věta 1.4.** (Úplná Gaussova eliminace). *Nechť  $\mathbb{M} \in T^{n,n}$ ,  $\mathbb{A}$  je regulární matice a  $\mathbb{B} \in T^{m,n}$ . Pak  $\mathbb{A}$  lze převést ekvivalentními sloupcovými úpravami na jednotkovou matici. Pokud převedeme rozšířenou matici  $\begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ \mathbb{B} \end{pmatrix}$  ekvivalentními řádkovými úpravami do tvaru  $\begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ \mathbb{X} \end{pmatrix}$ , potom  $\mathbb{X} = \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$ .*

*Symbolicky zapsáno:*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ \mathbb{B} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

*Důkaz.* Po převedení  $\mathbb{A}$  pomocí ESÚ do horního stupňovitého tvaru má matice na diagonále díky regularitě pouze nenulová čísla. Když poté každý sloupec vydělíme odpovídajícím číslem, dostaneme na diagonále jedničky. A nad ní již jednoduše vyrobíme nuly - nejprve v druhém sloupci odečtením odpovídajícího násobku prvního sloupce, poté ve třetím sloupci odečtením vhodného násobku prvního a druhého řádku atd.

K důkazu druhé části věty si stačí uvědomit, že  $\mathbb{I}$  vznikla ESÚ z  $\mathbb{A}$  a že  $\mathbb{X}$  vznikla z  $\mathbb{B}$  stejnými úpravami provedenými ve stejném pořadí. Z věty 1.3 plyne existence matice  $\mathbb{M}$  takové, že  $\mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{M}$  a  $\mathbb{X} = \mathbb{B}\mathbb{M}$ . Z první rovnosti dostáváme  $\mathbb{M} = \mathbb{A}^{-1}$  a z druhé rovnosti pak  $\mathbb{X} = \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$  což jsme chtěli dokázat.  $\square$

Slovo „úplná“ naznačuje, že na rozdíl od Gaussovy eliminace, kdy jsme matici pomocí ESÚ převedli do horního stupňovitého tvaru a zastavili se, v úplné Gaussově eliminaci z horního stupňovitého tvaru pokračujeme a vyrábíme nuly nad diagonálou, dokud nedostaneme jednotkovou matici.

Úplnou Gaussovu eliminaci můžeme používat k řešení následujících úloh"

1. Jsou dány matice  $\mathbb{A}$  regulární a  $\mathbb{B}$  vhodného rozměru. Najděte  $\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$ .
2. Je dána regulární matice  $\mathbb{A}$ . Určete  $\mathbb{A}^{-1}$ . (Klademe  $\mathbb{B}$  rovno  $\mathbb{I}$ .)
3. Je dána regulární matice  $\mathbb{A}$  a vektor  $\vec{b}$  vhodného rozměru. Najděte  $\mathbb{A}^{-1}\vec{b}$ , tj. řešte rovnici  $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ .

Klademe  $\mathbb{B}$  rovno  $\vec{b}$  a  $\mathbb{A}$  transponujeme a aplikujeme úplnou Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}^T \\ \vec{b} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ \vec{b}(\mathbb{A}^{-1})^T \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ ((\vec{b}(\mathbb{A}^{-1})^T)^T)^T \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ (\mathbb{A}^{-1}(\vec{b})^T)^T \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ (\mathbb{A}^{-1}\vec{b})^T \end{pmatrix}.$$

Kde využíváme pravidla transponování součinu a faktu, že matice dvakrát transponovaná je matice původní. V posledním kroku využíváme, vektor transponovaný je ten stejný, je na nás jak ho zapíšeme dle toho z jaké strany ho používáme k násobení. Výsledkem toho postupu je matice transponovaná k matici k nám hledané a tak stačí ji jenom ještě jednou transponovat.

4. Jsou dány matice  $\mathbb{A}$  regulární a  $\mathbb{X}$  vhodného rozměru. Spočtěte  $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$ . Zde aplikujeme úplnou Gaussovu eliminaci na transponované matice:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}^T \\ \mathbb{X}^T \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ \mathbb{X}^T(\mathbb{A}^T)^{-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X})^T \end{pmatrix}.$$

Tudíž transponováním výsledné dolní matice získáme  $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$ .

**Příklad 1.5.** Jsou dány matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

•  $\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ \mathbb{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tedy } \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

•  $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}^T \\ \mathbb{X}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tudíž } \mathbb{A}^{-1}\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

•  $\mathbb{A}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ \mathbb{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ proto } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$