Úplná Gaussova eliminace

Štěpán Tichý

20. října 2020

1 Analogie pro sloupce

Definice 1.1 *V případě,že neuvažujeme matice jako soustavy LAR, můžeme zadefinovat obdobu ekvivalentních řádkových úprav a to pro sloupce. Ekvivalentní sloupcové úpravy jsou pak téže tři:*

1. *záměna dvou sloupců,*
2. *přičtení násobku jiného sloupce k vybranému sloupci,*
3. *násobení sloupce číslem $\alpha \neq 0$.*

Lemma 1.2 *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,m}$. Jestliže provedeme ekvivalentní sloupcovou úpravu, je výsledná matice rovna matici $\mathbb{A}\mathbb{M}$, kde $\mathbb{M}$ je čtvercová matice řádu $\boldsymbol{m}$, která vznikla z jednotkové matice $\mathbb{I}$ stejnou sloupcovou úpravou.*

Důkaz. Je třeba ověřit, že tvrzení je pravdivé pro všechny ekvivalentní sloupcové úpravy:

1. Záměna i-tého a j-tého sloupce.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & m \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & | & & | & & \\ & \ddots & | & & | & & \\ - & - & 0 & \dots & 1 & - & - \\ & & | & \ddots & | & & \\ - & - & 1 & \dots & 0 & - & - \\ & & | & & | & \ddots & \\ & & | & & | & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \end{matrix} \end{array} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

2. Vynásobení sloupce nenulovým číslem α z T.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & \dots & i & \dots & \dots & \dots & m \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & | & & & & \\ & \ddots & | & & & & \\ - & - & \alpha & - & - & - & - \\ & & | & \ddots & & & \\ & & | & & \ddots & & \\ & & | & & & \ddots & \\ & & | & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m \end{matrix} \end{array} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \alpha a_{1i} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & \alpha a_{2i} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \alpha a_{ni} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

3. Přičtení α-násobku j-tého sloupce k i-tému.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & m \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & | & & | & & \\ & \ddots & | & & | & & \\ - & - & 1 & - & - & - & - \\ & & | & \ddots & | & & \\ - & - & \alpha & - & 1 & - & - \\ & & | & & | & \ddots & \\ & & | & & | & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \end{matrix} \end{array} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + \alpha a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} + \alpha a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + \alpha a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Vlídný čtenář nahlédne, že podle pravidel maticového násobení všechny tři rovnosti platí. □

Věta 1.3 (Ekvivalentní sloupcové úpravy a násobení maticí). *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,m}$. Provedeme-li s $\mathbb{A}$ konečný počet ekvivalentních sloupcových úprav, je výsledná matice rovna matici $\mathbb{AM}$, kde je $\mathbb{M}$ čtvercová matice řádu $\boldsymbol{m}$, která vznikla z jednotkové matice $\mathbb{I}$ stejnými ekvivalentními sloupcovými úpravami provedenými ve stejném pořadí.*

Důkaz. Jestliže v $\mathbb{A}$ provedeme k ekvivalentních sloupcových úprav (ESÚ), potom je podle lemmatu 1.2 výsledná matice rovna:

$$\mathbb{A}\mathbb{M}_1\mathbb{M}_2\dots\mathbb{M}_\mathrm{k},$$

kde $\mathbb{M}_i$ je matice vyniklá z jednotkové i-tou ESÚ. Označme $\mathbb{M} = \mathbb{M}_1\mathbb{M}_2\dots\mathbb{M}_\mathrm{k}$. Pak $\mathbb{M} = \mathbb{M}_1\mathbb{M}_2\dots\mathbb{M}_\mathrm{k}\mathbb{I}$ a podle lemmatu 1.2 vidíme, že $\mathbb{M}$ vznikla z $\mathbb{I}$ stejnými k ESÚ provedenými ve stejném pořadí. □

Věta 1.4 (Úplná Gaussova eliminace). *Nechť $\mathbb{M} \in T^{n,n}, \mathbb{A}$ je regulární matice a $\mathbb{B} \in T^{m,n}$. Pak $\mathbb{A}$ lze převést ekvivalentními sloupcovými úpravami na jednotkovou matici. Pokud převedeme rozšířenou matici $\begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ \hline \mathbb{B} \end{pmatrix}$ ekvivalentními řádkovými úpravami do tvaru $\begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{X} \end{pmatrix}$, potom $\mathbb{X} = \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$.*

Symbolicky zapsáno:

$$\left(\frac{\mathbb{A}}{\mathbb{B}}\right) \sim \left(\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}}\right).$$

Důkaz. Po převedení $\mathbb{A}$ pomocí ESÚ do horního stupňovitého tvaru má matice na diagonále díky regularitě pouze nenulová čísla. Když poté každý sloupec vydělíme odpovídajícím číslem, dostaneme na diagonále jedničky. A nad ní již jednoduše vyrobíme nuly - nejprve v druhém sloupci odečtením odpovídajícího násobku prvního sloupce, poté ve třetím sloupci odečtením vhodného násobku prvního a druhého řádku atd.

K důkazu druhé části věty si stačí uvědomit, že $\mathbb{I}$ vznikla ESÚ z $\mathbb{A}$ a že $\mathbb{X}$ vznikla z $\mathbb{B}$ stejnými úpravami provedenými ve stejném pořadí. Z věty 1.3 plyne existence matice $\mathbb{M}$ takové, že $\mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{M}$ a $\mathbb{X} = \mathbb{B}\mathbb{M}$. Z první rovnosti dostáváme $\mathbb{M} = \mathbb{A}^{-1}$ a z druhé rovnosti pak $\mathbb{X} = \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$ což jsme chtěli dokázat. $\square$

Slovo „úplná“ naznačuje, že na rozdíl od Gaussovy eliminace, kdy jsme matici pomocí ESÚ převedli do horního stupňovitého tvaru a zastavili se, v úplné Gaussově eliminaci z horního stupňovitého tvaru pokračujeme a vyrábíme nuly nad diagonálou, dokud nedostaneme jednotkovou matici.

Úplnou Gaussovu eliminaci můžeme používat k řešení následujících úloh"

1. Jsou dány matice $\mathbb{A}$ regulární a $\mathbb{B}$ vhodného rozměru. Najděte $\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$.

2. Je dána regulární matice $\mathbb{A}$. Určete $\mathbb{A}^{-1}$. (Klademe $\mathbb{B}$ rovno $\mathbb{I}$.)

3. Je dána regulární matice $\mathbb{A}$ a vektor $\vec{b}$ vhodného rozměru. Najděte $\mathbb{A}^{-1}\vec{b}$, tj. řešte rovnici $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$.
   Klademe $\mathbb{B}$ rovno $\vec{b}$ a A transponujeme a aplikujeme úplnou Gaussovu eliminaci:

   $$\left(\frac{\mathbb{A}^T}{\vec{b}}\right) \sim \left(\frac{\mathbb{I}}{\vec{b}\left(A^{-1}\right)^T}\right) \sim \left(\frac{\mathbb{I}}{\left(\left(\vec{b}\left(A^{-1}\right)^T\right)^T\right)^T}\right) \sim \left(\frac{\mathbb{I}}{\left(A^{-1}\left(\vec{b}\right)^T\right)^T}\right) \sim \left(\frac{\mathbb{I}}{\left(A^{-1}\vec{b}\right)^T}\right).$$

   Kde využíváme pravidla transponování součinu a faktu, že matice dvakrát transponovaná je matice původní. V posledním kroku využíváme, vektor transponovaný je ten stejný, je na nás jak ho zapíšeme dle toho z jaké strany ho používáme k násobení. Výsledkem toho postupu je matice transponovaná k matici k nám hledané a tak stačí ji jenom ještě jednou transponovat.

4. Jsou dány matice $\mathbb{A}$ regulární a $\mathbb{X}$ vhodného rozměru. Spočtěte $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$. Zde aplikujeme úplnou Gaussovu eliminaci na transponované matice:

   $$\left(\frac{\mathbb{A}^T}{\mathbb{X}^T}\right) \sim \left(\frac{I}{\mathbb{X}^T\left(\mathbb{A}^T\right)^{-1}}\right) \sim \left(\frac{I}{\left(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}\right)^T}\right).$$

   Tudíž transponováním výsledné dolní matice získáme $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$.

Příklad 1.5 Jsou dány matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$:

$$\left(\frac{\mathbb{A}}{\mathbb{B}}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ tedy } \quad \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{X}$

$$\left(\frac{\mathbb{A}^T}{\mathbb{X}^T}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right), \text{ tudíž } \quad \mathbb{A}^{-1}\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{A}^{-1}$

$$\left(\frac{\mathbb{A}}{\mathbb{I}}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ proto } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$