Πρώτη Υποχρεωτική εργασία Αριθμητικής Ανάλυσης

Μουμτζής Στέργιος, AEM:3620

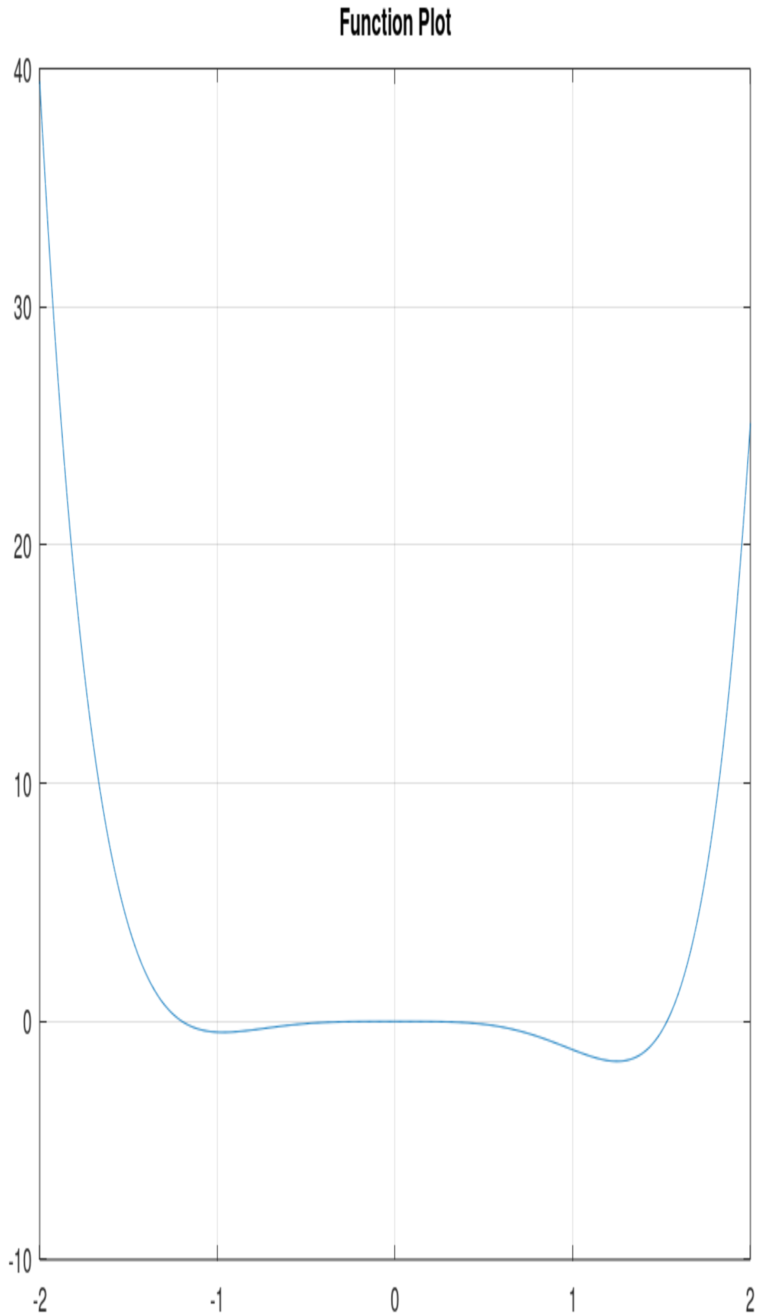
22 / 12 / 2020

Exercise 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^{sin^3(x)} + x^6 - 2x^4 - x^3 - 1$$

με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα [-2,2] της οποίας γραφική παράσταση είναι η παρακάτω:


Function Plot
40
30
20
10
0
-10
-2
-1
0
1
2

Αυτό που ακολουθεί είναι η εύρεση των προσεγκιστικών ριζών της στο [-2,2] με τις ακόλουθες μεθόδους:

- Διχοτόμησης
- Newton-Raphson
- Τέμνουσας

Μέθοδος Διχοτόμησης:
Απαραίτητη προϋπόθεση αυτης της μεθόδου είναι να ισχύει το Θεώρημα του Bolzano, δηλαδή η συνάρτηση f να είναι συνεχής σε ενα διάστημα [α,β] με f(α) * f(β) < 0 έτσι ώστε να έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα αυτό.

Συγκεκριμένα:
Με σκοπό την εύρεση της προσεγγιστικης ρίζας στο συγκεκριμένο διάστημα απαιτούνται N (όπου N ο επόμενος ακέραιος απο τη παράσταση $\frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}$) επαναλήψεις έως ώτου η ρίζα που προσεγγίζουμε ξεπέρασει το απαιτούμενο σφάλμα(στη συγκεκριμένη περίπτωση ε = $1/2 * 10^{-5}$)

- Στο διάστημα [-2,-1] για το οποίο ισχύει το Θ.Bolzano πηγάζουν τα εξής αποτελέσματα:
  Με αρίθμο N = 18 επαναλήψεων την προσεγγιστική ρίζα αποτελεί η

  ρ0 = -1.1976237224693556

- Στο διάστημα [1,2] για το όποιο ισχύει το Θ.Bolzano πηγάζουν τα εξής αποτελέσματα:
  Με αριθμό N = 18 επαναλήψεων η προσεγγιστική λύση ειναι η

  ρ2 = 1.5301335081674237

- Επίσης, η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει και ως λύση της την μηδενική λύση όπως φαίνεται και στο γράφημα(f(0) = 0)

Μέθοδος Newton-Raphson:
Σημαντική προϋπόθεση αυτης της μεθόδου είναι να ισχύει τόσο το Θ.Bolzano αλλά και να ειναι δυό φορές παραγωγίσιμη με f'(x),f"(x) != 0, έτσι ώστε η f να έχει μοναδική ρίζα στο [α,β] με όριο αναδρομικής ακολουθίας το εξής:

$$\mathrm{x}_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Συγκεκριμένα:
Παρατηρούμε τα εξής όπου το επιθυμητό σφάλμα δίνεται απο τον τύπο $|X_{n+1} - X_n| < \frac{1}{2} * 10^{-5}$ όπου n = 0,1,2,...

- Με αρχικό σημείο το χ0 = -2 και N = 9 επαναλήψεις καταλήγουμε στην:

ρ0 = -1.19762372213359

- Με αρχικό σημείο το χ0 = 0.5 και N = 32 επαναλήψεις καταλήγουμε στην:

ρ1 = 6.965706660188152e-05

- Με αρχικό σημείο το χ0 = 1 και N = 5 επαναλήψεις καταλήγουμε στην:

ρ2 = 1.5301335081674237

Μέθοδος Τέμνουσας:
Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται στις περίπτώσεις όπου η εύρεση της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης είναι αδύνατο ή δύσκολο να υπολογισθεί.Απαιτεί την χρήση δύο αρχικών σημείων(Συνήθως χ0 = α και χ1 = β).Ισχυεί:

$$\mathrm{X}_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)(X_n - X_{n-1})}{f(X_n) - f(X_{n-1})}, n = 1, 2, 3...$$

Συγκεκριμένα:
Παρατηρόυμε τα εξής όπου το επιθυμητό σφάλμα δίνεται απο τον τύπο
$|X_{n+1} - X_n| < \frac{1}{2} * 10^{-5}$ όπου n = 0,1,2,...

- Με αρχικά σημεία τα χ0 = -2 και χ1 = -1 και με N = 13 επαναλήψεις καταλήγουμε στην:

ρ0 = -1.1976237224693556

- Με αρχικά σημεία τα χ0 = -0.5 και χ1 = 0.5 και με N = 46 επαναλήψεις καταλήγουμε στην:

ρ1 = 6.965706660188152e-05

- Με αρχικά σημεία τα χ0 = 1.4 και χ1 = 2 και με N = 7 επαναλήψεις καταλήγουμε στην:

ρ2 = 1.5301335081625538

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ:

- Στη μέθοδο Newton-Raphson οι προσεγγιστικές ρίζες ρ0 και ρ2 συγκλίνουν γρήγορα με ελάχιστο αριθμό επαναλήψεων, ενώ γραμμική σύγκλιση παρουσιάζει η ρ1 με N = 32 επαναλήψεις

    - Για όσες ρίζες συγκλίνουν τετραγωνικά(ρ0,ρ2) παρουσίαζουν πολλαπλότητα 1, ενώ η ρ1 παρουσίαζει πολλαπλότητα 2
    - οι ρίζες ρ0,ρ2 και ρ1(μόνο στην περίπτωση της διχοτόμησης) είναι ίσες μεταξύ τους με στρογγυλοποιήση στο πέμπτο ψηφίο
    - Στη μέθοδο της διχοτόμησης η χρήση διαστήματος όπου περιέχεται μεσα το 0 συγκλίνει πάντα στη ρίζα χ = 0 (f(0) = 0)
- η μέθοδος με τον λιγότερο αριθμό επαναλήψεων στήν εύρεση των προσεγγιστικών ριζών αποτελεί η Newton$_r aphson, πειταητμνουσακαιηπιοαργεναιημθοδοςτηςδιχοτμησηςΣτημθοδοτηςτμνου$
1.4

Exercise 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = 94cos^3x - 24cosx + 177sin^2x - 108sin^4x - 72cos^3xsin^2x - 65$$

με πεδίο ορισμού το [0,3]

Τροποποιημένη Μέθοδος Διχοτόμησης:

- με χ0 = 0 και χ1 = 1 έχουμε:

  $\mathbf{R}_0 = 0.841069147065794$

- με χ0 = 1 και χ1 = 2 έχουμε:

  $\mathbf{R}_1 = 1.047209702700914$

- με χ0 = 2 και χ1 = 3 έχουμε:

  $\mathbf{R}_2 = 2.300523736714129$

Παρακάτω φαίνεται η σύγκριση των επαναλήψεων στην εύρεση της προσεγγιστικής ρίζας στο διάστημα [1,2]

Αριθμός Εκτέλεσης	Επαναλήψεις
1	20
2	27
3	17
4	18
5	22
6	24
7	25
8	22
9	23
10	19

Τροποποιημένη Μέθοδος Newton-Raphson:

- με χ0 = 0, χ1 = 1 N = 11 επαναλήψεις έχουμε :

  $\mathbf{R}_0 = 0.8410686554827665$

- με χ0 = 1 και χ1 = 2 έχουμε N = 31 επαναλήψεις έχουμε:

  $\mathbf{R}_1 = 1.0471763077767986$

- με χ0 = 2 και χ1 = 3 έχουμε N = 5 επαναλήψεις έχουμε:

  $\mathbf{R}_2 = 2.300523983980333$

Τροποποιημένη μέθοδος Τέμνουσας

- με χ0 = 0.3, χ1 = 0.5, χ2 = 0.8 και N = 12 επαναλήψεις έχουμε :

  $\mathbf{R}_0 = 0.8410640474042276$

- με χ0 = 1, χ1 = 1.05, χ2 = 1.20 και N = 40 επαναλήψεις έχουμε:

  $\mathbf{R}_1 = 1.047209702700914$

- με χ0 = 2, χ1 = 2.5,χ2 = 3 έχουμε N = 11 επαναλήψεις έχουμε:

  $\mathbf{R}_2 = 2.300522123266061$

Μέθοδος	Ρίζα 1	Ρίζα 2	Ρίζα 3
Κανονικη Διχοτόμησης	18	18	-
Τροπ.Διχοτόμησης	περίπου 30	περίπου 24	περίπου 28
Κανονική Newton-Raphson	9	5	32
Τροπ. Newton-Raphson	11	31	5
Κανονική Τέμνουσα	13	46	7
Τροπ. Τέμνουσα	12	40	11

Exercise 3

Part 1:
Έστω ο πίνακας A μεγέθους nxn και το διάνυσμα b με στοιχεία n. Θα λύσουμε το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ χρησιμοποιώντας την ανάλυση $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$

- **P:** Πίνακας μετάθεσης, ο οποίος προκύπτει απο τον μοναδιαίο, και καταγράφει τις εναλλαγές γραμμών που πιθανώς έγιναν κατά την απαλλοιφή.

- **L:** Κάτω τριγωνικός πίνακας με μονάδες στην διαγώνιο.Κάτω απο τη διαγώνιο του περιέχει τους πολλαπλασιαστές m_{ij} της απαλλοιφής

- **U:** Άνω τριγωνικός πίνακας που αποτελεί το τελικό προϊόν A^n της τριγωνοποιήσης

Επεξήγηση Κώδικα:

- **PFactorize(A, rank(οδηγός)):** Συνάρτηση που φροντίζει την ενάλλαγη των γραμμών του πίνακα A καθώς και την ενημέρωση του πίνακα P και L. Σε κάθε αντιμετάθεση του A πρέπει να γίνεται αντιμετάθεση και του πίνακα L. NOTE:κάθε φορά επιθυμούμε το στοιχείο "οδηγός" να είναι το μέγιστο από όλα τα άλλα στην αντίστοιχη στήλη

- **SolveSystem(U)**: Συνάρτηση που υλοποιεί το σύστημα **Ax=b** και επιστρέφει τις λύσεις X^n του συστήματος:

  1. **forwardSubstitution(b):** η οποία είναι υπεύθυνη για την επίλυση του ενδιάμεσου συστήματος LUx = Pb(προκύπτει πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη του συστήματος Ax = b επί P) με τον κάτω τριγωνικό πίνακα L.
  2. **backwardSubstitution(U, y):** η οποία είναι υπεύθυνη για τον υπολογισμό της λύσης χ του αρχικού συστήματος ως λύσης του άνω τριγωνικού συστήματος Ux = y

- **GaussElimination():**Συνάρτηση που υλοποιεί τον αλγόριθμο του Gauss κρατόντας ενήμερο τον πίνακα L(αποτελείται απο τα στοιχεία ratio κάτω απο τη κύρια διαγώνιο) και ενημερώνοντας κάθε φορά τον πίνακα U μετά από κάθε επανάληψη.

Αποτελέσματα: Έστω ο πίνακας A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
και το διάνυσμα b = [5, 3, 2]

Λύνοντας το σύστημα Ax = b με την ανάλυση LU παράγονται τα εξής αποτελέσματα:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{U} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες PA και LU καταλήγουμε στο συμπέρασμα οτι PA = LU
Με την ανάλυση LU οι λύσεις του συστήματος που παράγονται ειναι οι X = [0.125, 0.625, 0.515625]

NOTE:Ο κώδικας δουλεύει και πίνακες NxN ανεξάρτητου αριθμού.Το παραπάνω ήταν ενδεικτικό παράδειγμα!

Part 2: Έστω ο πίνακας $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix}$ πραγματοποιώντας την αποσύνθεση του Cholesky με τη συνάρτηση CholeskyDecomposition(A) επιστρέφει τον πίνακα $\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Παρατηρούμε οτι αναστρέφοντας τον πίνακα L καταλήγουμε στο συμπέρασμα οτι το γινόμενο LL^T είναι ίσο με τον αρχικό πίνακα A

Part 3:

- η συνάρτηση start(10) δημιουργεί έναν αραιό πίνακα 10χ10 όπου **A(i, i) = 5, A(i + 1, i) = A(i, i + 1)** = -2 , με τα υπόλοιπα στοιχεία να είναι μηδέν και $b = [3, 1, 1, ..., 1, 1, 3]^T$.
  Επιχειρώντας να λύσουμε το σύστημα **Ax=b** με τη μέθοδο Gauss-Seidel στη συνάρτηση GaussSeidel(), όπου οι λύσεις έχουν ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων(ως προς την άπειρη νόρμα της λύσης). Οι λύσεις του συστήματος μετά απο 13 επαναλήψεις είναι οι εξής:

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 0.99906498 \\ 0.99858758 \\ 0.99844436 \\ 0.99852716 \\ 0.9987436 \\ 0.99901935 \\ 0.99929987 \\ 0.99955015 \\ 0.99975214 \\ 0.99990086 \end{bmatrix}$$

  Παρατηρούμε οτι οι λύσεις συγκλίνουν στην μονάδα!

- Ομοίως, η συνάρτηση start(10000) πραγματοποιεί την ίδια λειτουργία με την παραπάνω περίπτωση, μόνο που το μέγεθος του πίνακα και του διαστήματος ειναι NxN = 10000 χ 10000 και N = 10000 αντίστοιχα μόνο που λόγω υπερβολικού μεγέθους δεν εμφανίζονται αναλυτικά οι λύσεις **Οι λύσεις σε αυτή τη περίπτωση συγκλίνουν στην μοναδα!**