Αριθμητική ανάλυση δεύτερη υποχρεωτική εργασία

Μουμτζής Στέργιος, ΑΕΜ:3620

Ιανουάριος 2021

Άσκηση 6
Έστω η συνάρτηση (f(x) = $\sin x$. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της f(x) στο διάστημα [0, π/2] με τις μεθόδους του Τραπεζίου και Simpsons.

Μέθοδος τραπεζίου
Το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2 \, dx$$

σύμφωνα με τη μέθοδο του τραπεζίου είναι το 0.9983001101346353 και το σφάλμα είναι το 0.00024266119365373636, το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$|\varepsilon| <= \frac{(b-a)^3}{12N^2} M$$

, όπου M το ολίκο μέγιστο της δεύτερης παραγώγου της f(x) = sin(x).
Μέθοδος Simpsons
Το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2 \, dx$$

σύμφωνα με τη μέθοδο του τραπεζίου είναι το 0.952402427058483 και το σφάλμα είναι το 3.628742401300778e-06, το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$|\varepsilon| <= \frac{(b-a)^5}{180N^4} M$$

, όπου M το ολίκο μέγιστο της τέταρτης παραγώγου της f(x) = sin(x).

Άσκηση 5
Έστω η συνάρτηση f(x) = sin(X). Παρακάτω παρουσιάζεται μια προσομοίωση του τρόπου με τον όποιο υπολογίζεται η συνάρτηση του ημιτόνου με τις μεθόδους:

- Πολυωνυμική προσεγγιση Lagrance
- μέθοδος ελάχιστων τετραγώνων

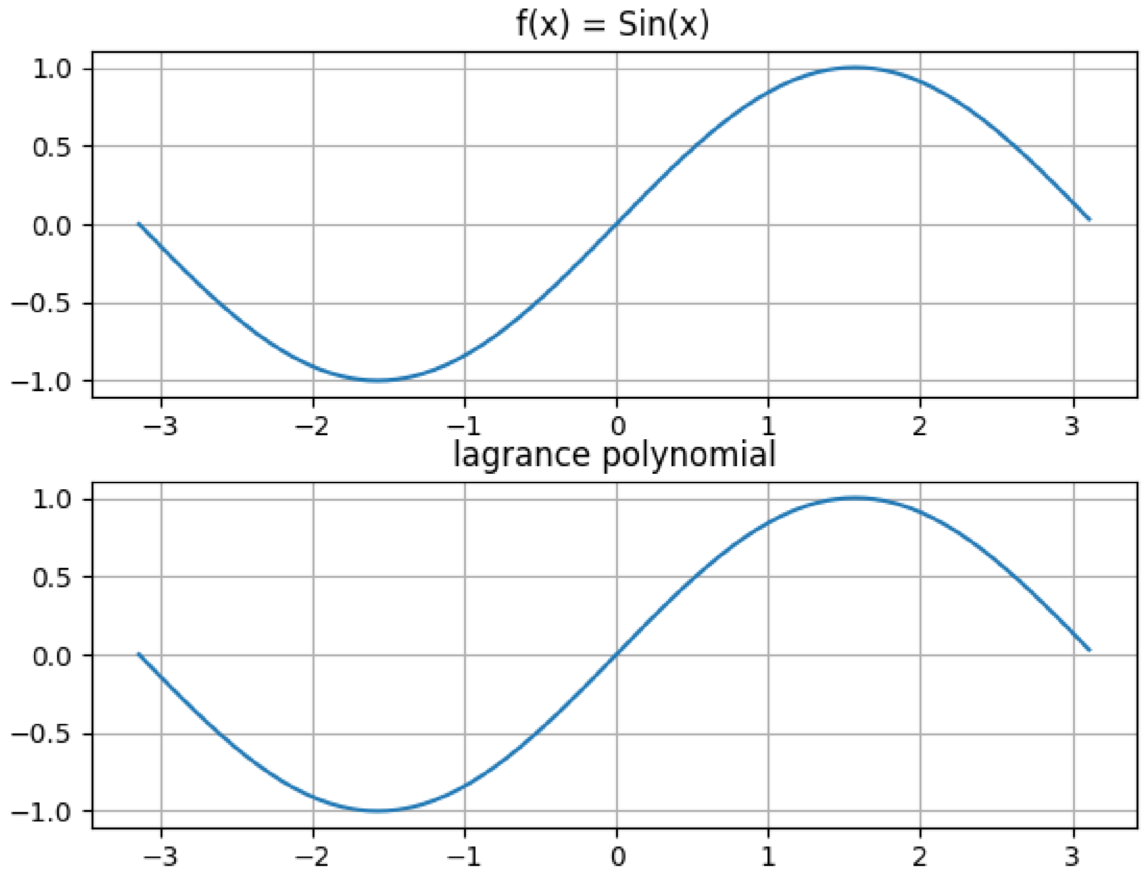
Πολυωνυμική προσέγγιση Lagrance Έστω n+1 (στη περίπτωση μας είναι 10) σημεία του επιπέδου $(x_i, y_i), i = 0, ..., n$ τότε το πολυώνυμο lagrance που διέρχεται από αυτά τα σημεία έχει τη μορφή:

$$\mathrm{p}_n(x) = \ \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x)$$

όπου $\mathrm{L}_i(x) = (\ \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$
Τα 10 σημεία που επιλέχθηκαν μεταξύ του διαστήματος [-π,π] και τα αντίστοιχα αποτελέσματα του ημιτόνου καθως και της πολυωνυμικής προσέγγισης lagrance στα σημεία αυτα είναι τα εξής:

x	sin(x)	$\mathrm{p}_n(x)$
π	-1.2246467991473532e-16	-1.2246467991473532e-16
-2.5	-0.5984721441039564	-0.5984721441039564
-2	-0.9092974268256817	-0.9092974268256817
-1.5	-0.9974949866040544	-0.9974949866040544
-1	-0.8414709848078965	-0.8414709848078965
0	0.0	0.0
1	-0.8414709848078965	-0.8414709848078965
1.5	0.9974949866040544	0.9974949866040544
2	0.9092974268256817	0.9092974268256817
π	1.2246467991473532e-16	1.2246467991473532e-16

Έστω τωρα οτι θέλουμε να υπολογίσουμε το σφάλμα προσέγγισης για 200 σήμεια μεταξύ του ίδιου διαστήματος [-π,π].Υπολογίζοντας το ημίτονο για καθέ σημείο του επιπέδου καθώς και τη πολυωνυμική προσέγγιση, έχουμε ως αποτέλεσμα το σφάλμα να ειναι ισο με ε $= (\ \sum_{i=1}^{200} |\sin x_i - p_{200}(x_i)| = 0.0$ Παρακάτω εμφανίζεται η γραφική παράσταση του ημιτόνου καθώς και του πολυωνύμου Lagrance στο διάστημα [-π,π]


f(x) = Sin(x)
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−3
−2
−1
0
1
2
3
lagrance polynomial
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−3
−2
−1
0
1
2
3