

Контрольная работа № 1
Функция нескольких переменных

Демонстрационный вариант

Ниже представлены задания КР. В некоторых из них есть подпункты а), б) ... , они отражают вариации этих заданий. При написании КР вам попадётся одна из них.

Задание 1. Предел

Вычислите предел функции $z(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ или докажите, что он не существует.

а) $z = \frac{x-y}{x+y}$, $(x_0; y_0) = (0; 0)$

б) $z = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$, $(x_0; y_0) = (0; 0)$

Задание 2. Дифференцирование

а) Найдите дифференциал функции $z(x; y)$, заданной неявно, в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

$$e^{z-1} = \cos x \cos y + 1, \quad M_0\left(0; \frac{\pi}{2}; 1\right)$$

б) Дана функция $z = \ln(x + e^{-y})$. Покажите, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

в) Дана функция $u(M) = u(x, y, z)$ и точки M_1, M_2 . Вычислите производную этой функции по направлению $\overrightarrow{M_1 M_2}$ и градиент $\text{grad } u(M_1)$.

$$u(M) = x^2 y + y^2 z + z^2 x, \quad M_1(1, -1, 2), \quad M_2(3, 4, -1)$$

Задание 3. Экстремум

Исследуйте на экстремум функцию $z(x; y)$ – найдите точки экстремума и экстремумы или докажите, что их не существует.

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$$

Задание 4. Уравнения касательных и нормальных прямых и плоскостей

а) Составьте уравнения касательной прямой l и нормальной плоскости α в точке M для линии L , заданной параметрическими уравнениями.

$$L: x = 2 \cos \varphi, \quad y = 2 \sin \varphi, \quad z = \varphi, \quad M = \left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$$

б) Составьте уравнения касательной плоскости α и нормальной прямой l в точке M для поверхности S .

$$S: 2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, \quad M = (2; 2; 1)$$

Задание 5. Криволинейные системы координат

а) Тело T задано системой неравенств в декартовых координатах. Получите систему неравенств, описывающую его в **цилиндрических** координатах. Изобразите тело T .

$$T: y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \leq y, \quad -1 \leq x \leq 2$$

б) Тело T задано системой неравенств в декартовых координатах. Получите систему неравенств, описывающую его в **сферических** координатах. Изобразите тело T .

$$T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad -\sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 0$$

в) Плоская область D ограничена линиями в декартовых координатах. Получите систему неравенств, описывающую её в **полярных** координатах. Изобразите область D .

$$D: y = \sqrt{3}x, \quad y = -\frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y = 1$$
