Задача 4

Подпространство L Евклидова пространства $\mathbb{E}^5$ со стандартным скалярным произведением задано как система уравнений на координаты векторов x_i:

$$L: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0 \\ -x_1 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Найдите базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$ к пространству L. Для ответа

$$L^{\perp} = \{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Пример ввода: [3, 2, -1; 5, 10, 1]

Из данной системы видно, что $L^{\perp}$ образовано векторами: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Проверим что вектора образуют базис:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} = 3$$

векторы ЛНЗ и образуют базис

Задача 5

Подпространство L Евклидова пространства $\mathbb{E}^4$ задано как линейная оболочка векторов:

$$L = \mathcal{L}\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \}$$

Скалярное произведение в $\mathbb{E}^4$ задано матрицей Грама G:

$$G = \begin{pmatrix} 21 & -28 & -6 & -4 \\ -28 & 39 & 6 & 4 \\ -6 & 6 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдите базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$ к пространству L. Для ответа

$$L^{\perp} = \{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Пример ввода: [3, 2, -1; 5, 10, 1]

$$a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}; \; a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}; \; a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Найдём базис $L^{\perp}$ решив систему: $\begin{cases} (a_1, X) = 0 \\ (a_2, X) = 0 \\ (a_3, X) = 0 \end{cases}$

$$(a_1, X) = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & -28 & -6 & -4 \\ -28 & 39 & 6 & 4 \\ -6 & 6 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = -210X_1 + 290X_2 + 56X_3 + 48X_4$$

$$(a_2, X) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & -28 & -6 & -4 \\ -28 & 39 & 6 & 4 \\ -6 & 6 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = 154X_1 - 212X_2 - 40X_3 - 32X_4$$

$$(a_3, X) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & -28 & -6 & -4 \\ -28 & 39 & 6 & 4 \\ -6 & 6 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = 210X_1 - 290X_2 - 56X_3 - 48X_4$$

В итоге получаем систему:

$$\begin{pmatrix} -210 & 280 & 56 & 48 \\ 154 & -212 & -40 & -32 \\ 210 & -280 & -56 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -210 & 280 & 56 & 48 \\ 154 & -212 & -40 & -32 \\ 210 & -280 & -56 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -140 & 0 & -272 & -896 \\ 0 & -140 & -224 & -672 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{68}{35} x_3 - \frac{32}{5} x_4 \\ x_2 = -\frac{8}{5} x_3 - \frac{24}{5} x_4 \\ x_3, x_4 - \text{св} \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР:}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
-68	-56	35	0
-32	-24	0	5

$\Rightarrow$ Базис $L^\perp$ имеет вид: $\left\{ \begin{pmatrix} -68 \\ -56 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -32 \\ -24 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

Задача 7

Найти скалярное произведение двух векторов в Евклидовом пространстве, которое задано своей матрицей Грамма G:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 9 \\ -5 & 3 & -5 \\ 9 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример ввода: 23

$$(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -5 & 9 \\ -5 & 3 & -5 \\ 9 & -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = -1480$$

Задача 8

В Евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$ скалярное произведение задано своей матрицей Грама G в стандартном базисе:

$$G = \begin{pmatrix} 10 & -17 & -7 & -19 \\ -17 & 30 & 11 & 33 \\ -7 & 11 & 6 & 13 \\ -19 & 33 & 13 & 37 \end{pmatrix}$$

Найти угол между векторами x и y, если

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 2 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.

Пример ввода: 13.37

Пример ввода: $2/7$

$$\cos\alpha = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$$(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -17 & -7 & -19 \\ -17 & 30 & 11 & 33 \\ -7 & 11 & 6 & 13 \\ -19 & 33 & 13 & 37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -788$$

$$\|x\|^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -17 & -7 & -19 \\ -17 & 30 & 11 & 33 \\ -7 & 11 & 6 & 13 \\ -19 & 33 & 13 & 37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2660 \Rightarrow \|x\| = \sqrt{2660}$$

$$\|y\|^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -17 & -7 & -19 \\ -17 & 30 & 11 & 33 \\ -7 & 11 & 6 & 13 \\ -19 & 33 & 13 & 37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 240 \Rightarrow \|y\| = \sqrt{240}$$

$$\cos\alpha = \frac{-788}{\sqrt{2660 \cdot 240}} \Rightarrow \alpha \approx 2{,}98$$

Задача 9

В Евклидовом пространстве $\mathbb{E}^2$ скалярное произведение задано своей матрицей Грама G в базисе $\{e_i\}_{i=1}^2$:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

В базисе $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^2$ заданы координаты векторов v_1 и v_2.

Найти скалярное произведение векторов v_1 и v_2, если

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 2 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.

Пример ввода: 13.37

Пример ввода: 2/7

Найдём матрицу перехода $C = \tilde{e} \rightsquigarrow e \Rightarrow C = F^{-1}G$, где F – из стандартного в $\tilde{e}$, G – из стандартного в e

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1' = C^{-1} \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$u_2' = C^{-1} \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) = (17 \ -10)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13 \\ 9 \end{pmatrix} = -43$$

Задача 10

Подпространство L Евклидова пространства $\mathbb{E}^3$ задано как система уравнений на координаты векторов x_i:

$$L: \quad x_1 = 0$$

Скалярное произведение задано матрицей Грама G

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите базис ортогонального дополнения $L^\perp$ к пространству L.

Для ответа

$$L^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример ввода: [3, 2, -1; 5, 10, 1]

Найдём базис L, решив систему $\{x_1 = 0$

$\Rightarrow$ базис L: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Пусть $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ найдём базис $L^\perp$ решив систему

$$\begin{cases} (a_1, x) = 0 \\ (a_2, x) = 0 \end{cases}$$

$$(a_1, x) = (0 \ 1 \ 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$(a_2, x) = (0 \ 0 \ 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3$$

В итоге получаем систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 - \text{сб} \end{cases} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \text{базис } L^{\perp}: \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$