Задача 4

Вычислить произведение тензоров $a \otimes b$, если

$$a^{mt} \rightarrow A = \left\| \begin{matrix} 3 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix} \right\|$$

$$b_l \rightarrow B = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 & 0 \end{matrix} \right\|$$

В матрице A индекс m определяется номером строки, индекс t определяется номером столбца

В матрице B индекс l определяется номером столбца

В результирующей матрицеиндекс m определяется номером строки, индекс t определяется номером столбца, индекс l определяется номером слоя по горизонтали

$$A = \left\| \begin{matrix} 3 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix} \right\| \quad \alpha_{mt}$$

$$B = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 & 0 \end{matrix} \right\| \quad \beta_l$$

$$A \otimes B = (\alpha_{mt}) \cdot (\beta_l) = \gamma_{mtl}$$

$$A \otimes B = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \gamma_{111} & \gamma_{121} & \gamma_{131} & \gamma_{112} & \gamma_{122} & \gamma_{132} & \gamma_{113} & \gamma_{123} & \gamma_{133} \\ \gamma_{211} & \gamma_{221} & \gamma_{231} & \gamma_{212} & \gamma_{222} & \gamma_{232} & \gamma_{213} & \gamma_{223} & \gamma_{233} \\ \gamma_{311} & \gamma_{321} & \gamma_{331} & \gamma_{312} & \gamma_{322} & \gamma_{332} & \gamma_{313} & \gamma_{323} & \gamma_{333} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 9 & -9 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -6 & -4 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Задача 1

Найти матрицу тензора $a \otimes (2b \otimes c + 2d \otimes e)$, если своими матрицами заданы тензоры:

$$a_m \rightarrow A = \left\| \begin{matrix} 3 & 3 \end{matrix} \right\|$$

В матрице A индекс m определяется номером столбца

$$b_n \rightarrow B = \left\| \begin{matrix} -4 & -5 \end{matrix} \right\|$$

В матрице B индекс n определяется номером столбца

$$c^i \rightarrow C = \left\| \begin{matrix} 4 \\ -3 \end{matrix} \right\|$$

В матрице C индекс i определяется номером строки

$$d_n \rightarrow D = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 \end{matrix} \right\|$$

В матрице D индекс n определяется номером столбца

$$e^i \rightarrow E = \left\| \begin{matrix} -5 \\ 1 \end{matrix} \right\|$$

В матрице E индекс i определяется номером строки

В матрице результирующего тензора индекс i определяется номером строки, индекс m определяется номером столбца, индекс n определяется номером слоя по горизонтали

$$a_m \rightarrow A = \left\| \begin{matrix} 3 & 3 \end{matrix} \right\|$$

$$b_n \rightarrow B = \left\| \begin{matrix} -4 & -5 \end{matrix} \right\|$$

$$c^i \rightarrow C = \left\| \begin{matrix} 4 \\ -3 \end{matrix} \right\|$$

$$d_n \rightarrow D = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 \end{matrix} \right\|$$

$$e^i \rightarrow E = \left\| \begin{matrix} -5 \\ 1 \end{matrix} \right\|$$

$$B\otimes C = \begin{Vmatrix} b_1c^1 & b_2c^1 \\ b_1c^2 & b_2c^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -16 & -20 \\ 12 & 15 \end{Vmatrix}$$

$$D\otimes E = \begin{Vmatrix} d_1e^1 & d_2e^1 \\ d_1e^2 & d_2e^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5 & 10 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$$

$$2B\otimes C + 2D\otimes E = \begin{Vmatrix} -42 & -20 \\ 26 & 26 \end{Vmatrix}$$

$$A\otimes(2B\otimes C + 2D\otimes E) = \begin{Vmatrix} 3 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -42 & -20 \\ 26 & 26 \end{Vmatrix} = \left\Vert\begin{array}{cc|cc} -126 & -126 & -60 & -60 \\ 78 & 78 & 78 & 78 \end{array}\right\Vert$$

Задача 5

Тензор a_l^{rk} задаёт собой некоторую полилинейную форму $W \in \Omega_2^1(\mathbb{R}^2)$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^2$. Компоненты тензора a_l^{rk} представляются матрицей A:

$$A = \left\Vert\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & -2 & -1 \end{array}\right\Vert$$

В матрице тензора a индекс r определяется номером строки, индекс k определяется номером столбца, индекс l определяется номером слоя по горизонтали.

Найти значение этой ПЛФ на наборе векторов v и форм u, заданных в стандартном базисе

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u^1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \end{pmatrix}, \; u^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \end{matrix} \qquad u^1 = \begin{matrix} (4 & -6) \\ y_1 & y_2 \end{matrix} \qquad u^2 = \begin{matrix} (4 & 1) \\ z_1 & z_2 \end{matrix}$$

$$A(v_1, u^1, u^2) = -1\cdot y_1 z_1 x^1 + 0\cdot y_1 z_2 x^1 + 3\cdot y_2 z_1 x^1 - 4 y_2 z_2 x^1 + 4\cdot y_1 z_1 x^2 -$$
$$-5\cdot y_1 z_2 x^2 - 2\cdot y_2 z_1 x^2 - 1\cdot y_2 z_2 x^2 = -1\cdot 4\cdot 4\cdot(-1) + 0 + 3\cdot(-6)\cdot 4\cdot(-1) - 4\cdot(-6)\cdot 1\cdot(-1) + 4\cdot 4\cdot 4\cdot(-1) -$$
$$-5\cdot 4\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot(-6)\cdot 4\cdot(-1) - 1\cdot(-6)\cdot 1\cdot(-1) = 16 + 72 - 24 - 64 + 20 - 48 - 6 = -34$$

Задача 9

Тензоры a_i^l и b_i^k заданы своими матрицами A и B в стандартном базисе.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{Vmatrix}$$

$$B = \begin{Vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{Vmatrix}$$

В матрице тензора a индекс l определяется номером строки, индекс i определяется номером столбца.

В матрице тензора b индекс k определяется номером строки, индекс i определяется номером столбца.

Найдите матрицу тензора c, если $c = 4a - 3b$.

В результирующем тензоре соглашение о порядке записи компонентов в матрицу тензора должно быть таким же, как в матрицах тензоров a и b.

$$C = 4A - 3B = 4\cdot \begin{Vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{Vmatrix} - 3\begin{Vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 10 & -5 & -15 \\ -10 & 14 & -2 \\ 10 & 15 & 2 \end{Vmatrix}$$

Задача 10

Компоненты тензора a^{ki}_{rn} над линейным пространством $\mathbb{R}^3$ задаются соотношением $a^{ki}_{rn} = -3k - i + r + 3n$.
Найдите матрицу A тензора a^{ki}_{rn}, если в ней индекс k определяется номером строки, индекс i определяется номером столбца, индекс r определяется номером слоя по горизонтали, индекс n определяется номером слоя по вертикали.

$$a^{ki}_{rn} = -3k - i + r + 3n$$

Составим матрицу индексов:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1111 & 1211 & 1311 & 1121 & 1221 & 1321 & 1131 & 1231 & 1331 \\
2111 & 2211 & 2311 & 2121 & 2221 & 2321 & 2131 & 2231 & 2331 \\
3111 & 3211 & 3311 & 3121 & 3221 & 3321 & 3131 & 3231 & 3331 \\
\hline
1112 & 1212 & 1312 & 1122 & 1222 & 1322 & 1132 & 1232 & 1332 \\
2112 & 2212 & 2312 & 2122 & 2222 & 2322 & 2132 & 2232 & 2332 \\
3112 & 3212 & 3312 & 3122 & 3222 & 3322 & 3132 & 3232 & 3332 \\
\hline
1113 & 1213 & 1313 & 1123 & 1223 & 1323 & 1133 & 1233 & 1333 \\
2113 & 2213 & 2313 & 2123 & 2223 & 2323 & 2133 & 2233 & 2333 \\
3113 & 3213 & 3313 & 3123 & 3223 & 3323 & 3133 & 3233 & 3333
\end{array}\right)$$

Подставив индексы в формулу из условия получим:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\
-3 & -4 & -5 & -2 & -3 & -4 & -1 & -2 & -3 \\
-6 & -7 & -8 & -5 & -6 & -7 & -4 & -5 & -6 \\
\hline
3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\
0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\
-3 & -4 & -5 & -2 & -3 & -4 & -1 & -2 & -3 \\
\hline
6 & 5 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 & 7 & 6 \\
3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\
0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Задача 6

Тензор в стандартном базисе a_{lim} задан матрицей A.

$$A = \left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
5 & 3 & 0 & -4 & -2 & 3 & -2 & 4 & 1 \\
4 & 3 & 3 & 2 & -6 & -2 & -5 & 0 & 5 \\
6 & -4 & -4 & -2 & 5 & 4 & -3 & -4 & 3
\end{array}\right\|$$

В матрице A индекс l определяется номером строки, индекс i определяется номером столбца, индекс m определяется номером слоя по горизонтали.
Найти матрицу тензора b_{lim}, который находятся путём выполнения процедуры симметризации тензора a_{lim} и его компоненты находятся по правилу:

$$b_{lim} = a_{(l|i|m)}$$

В результирующем тензоре индекс l определяется номером строки, индекс i определяется номером столбца, индекс m определяется номером слоя по горизонтали.

$$a_{lim} \to A = \left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
5 & 3 & 0 & -4 & -2 & 3 & -2 & 4 & 1 \\
4 & 3 & 3 & 2 & -6 & -2 & -5 & 0 & 5 \\
6 & -4 & -4 & -2 & 5 & 4 & -3 & -4 & 3
\end{array}\right\|$$

$$b_{lim} = a_{(l|i|m)}$$

$$b_{lim} = \frac{1}{2}(a_{lim} + a_{mil})$$

$b_{111} = a_{111} = 5$

$b_{121} = a_{121} = 3$

$b_{131} = a_{131} = 0$

$b_{211} = \frac{1}{2}(a_{211} + a_{112}) = \frac{1}{2}(4-4) = 0$

$b_{221} = \frac{1}{2}(a_{221} + a_{122}) = \frac{1}{2}(3-2) = \frac{1}{2}$

$b_{231} = \frac{1}{2}(a_{231} + a_{132}) = \frac{1}{2}(3+3) = 3$

$b_{311} = \frac{1}{2}(a_{311} + a_{113}) = \frac{1}{2}(6-2) = 2$

$b_{321} = \frac{1}{2}(a_{321} + a_{123}) = \frac{1}{2}(-4+4) = 0$

$b_{331} = \frac{1}{2}(a_{331} + a_{133}) = \frac{1}{2}(-4+1) = -\frac{3}{2}$

$b_{112} = b_{211} = 0$

$b_{122} = b_{221} = \frac{1}{2}$

$b_{132} = b_{231} = 3$

$b_{212} = a_{212} = 2$

$b_{222} = a_{222} = -6$

$b_{232} = a_{232} = -2$

$b_{312} = \frac{1}{2}(a_{312} + a_{213}) = \frac{1}{2}(-2-5) = -\frac{7}{2}$

$b_{322} = \frac{1}{2}(a_{322} + a_{223}) = \frac{1}{2}(5+0) = \frac{5}{2}$

$b_{332} = \frac{1}{2}(a_{332} + a_{233}) = \frac{1}{2}(4+5) = \frac{9}{2}$

$b_{113} = b_{311} = 2$

$b_{123} = b_{321} = 0$

$b_{133} = b_{331} = -\frac{3}{2}$

$b_{213} = b_{312} = -\frac{7}{2}$

$b_{223} = b_{322} = \frac{5}{2}$

$b_{233} = b_{332} = \frac{9}{2}$

$b_{313} = a_{313} = -3$

$b_{323} = a_{323} = -4$

$b_{333} = a_{333} = 3$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 5 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 & 2 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 2 & -6 & -2 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 2 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} & -3 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

Задача 7

Тензор в стандартном базисе a_{ilj} задан матрицей A.

$$A = \left|\begin{array}{cc|cc} -5 & -4 & -3 & 4 \\ -4 & -3 & 6 & -4 \end{array}\right|$$

В матрице A индекс i определяется номером строки, индекс l определяется номером столбца, индекс j определяется номером слоя по горизонтали.

Найти матрицу тензора b_{ilj}, который находятся путём выполнения процедуры антисимметризации тензора a_{ilj} и его компоненты находятся по правилу:

$$b_{ilj} = a_{i[lj]}$$

В результирующем тензоре индекс i определяется номером строки, индекс l определяется номером столбца, индекс j определяется номером слоя по горизонтали.

$$a_{ilj} \to A \left\|\begin{array}{cc|cc} -5 & -4 & -3 & 4 \\ -4 & -3 & 6 & -4 \end{array}\right\|$$

$$b_{ilj} = a_{i[lj]}$$

$b_{111} = \frac{1}{2}(a_{111} - a_{111}) = 0$

$b_{121} = \frac{1}{2}(a_{121} - a_{112}) = \frac{1}{2}(-4-(-3)) = -\frac{1}{2}$

$b_{211} = \frac{1}{2}(a_{211} - a_{211}) = 0$

$b_{221} = \frac{1}{2}(a_{221} - a_{212}) = \frac{1}{2}(-3 - 6) = -\frac{9}{2}$

$b_{112} = -b_{121} = \frac{1}{2}$

$b_{122} = \frac{1}{2}(a_{122} - a_{122}) = 0$

$b_{212} = -b_{221} = \frac{9}{2}$

$b_{222} = \frac{1}{2}(a_{222} - a_{222}) = 0$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Задача 3

Тензор a^t_{ml} задан в стандартном базисе матрицей A.

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right\|$$

В матрице A индекс t определяется номером строки, индекс m определяется номером столбца, индекс l определяется номером слоя по горизонтали.

Найти тензор $c_m = a^l_{ml}$.

В результирующем тензоре индекс m определяется номером столбца

$$a^t_{ml} \longrightarrow A = \left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right\|$$

$$C_m = a^l_{ml}$$

$$C_m = \sum_{l=1}^{2} a^l_{ml}$$

$$C_1 = a^1_{11} + a^2_{12} = 0 + (-2) = -2$$

$$C_2 = a^1_{21} + a^2_{22} = 2 + (-2) = 0$$

$$C_m = (C_1 \quad C_2) = (-2 \quad 0)$$

Задача 2

Тензор a_{itl} задан матрицей A в базисе $\{e_i\}_{i=1}^2$

$$A = \left\|\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right\|$$

В матрице A индекс i определяется номером строки, индекс t определяется номером столбца, индекс l определяется номером слоя по горизонтали.

Найти матрицу $\tilde{A}$ этого тензора в базисе $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^2$, если

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$