Задача 1

В Евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ скалярное произведение задано своей матрицей Грама G в стандартном базисе:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -9 \\ 4 & -9 & 18 \end{pmatrix}$$

В этом пространстве задан базис $\{e_i\}_{i=1}^3$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Найти биортогональный ему базис $\{e^k\}_{k=1}^3$.

Если $\{f^j\}_{j=1}^3$ – базис, биортогональный базису $\{e_i\}_{i=1}^3$, то верно: $(e_i, f^j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i = j \end{cases}$

Пусть f^1, f^2, f^3 – векторы столбцы базиса $\{f^j\}_{j=1}^3$ и e_1, e_2, e_3 – векторы строки базиса $\{e_i\}_{i=1}^3$, тогда верно равенство:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} f^1 & f^2 & f^3 \end{pmatrix} = E$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f^1 & f^2 & f^3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -9 \\ 4 & -9 & 18 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 36 & 27 & 11 \\ 74 & 56 & 23 \\ 29 & 22 & 9 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Квадратичная форма q в некотором базисе задаётся формулой:

$$q(x) = -2(\xi^1)^2 + 6\xi^1\xi^2 + 10\xi^1\xi^3 + 12\xi^1\xi^4 - 5(\xi^2)^2 - 14\xi^2\xi^3 - 16\xi^2\xi^4 - 13(\xi^3)^2 - 32\xi^3\xi^4 - 20(\xi^4)^2$$

Найти матрицу этой квадратичной формы.
Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.

Пример ввода:
$[1, 0; 0, -3/4]$

Применяя равенство: $\sum_{i=1}^{n} \beta_{ii}(X^i)^2 + 2\sum_{i<j} \beta_{ij} X^i X^j$ получаем матрицу:

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & -5 & -7 & -8 \\ 5 & -7 & -13 & -16 \\ 6 & -8 & -16 & -20 \end{pmatrix}$$

Задача 3

Квадратичная форма q в некотором базисе $\{e_i\}_{i=1}^3$ задаётся формулой:

$$q(x) = -(\xi^1)^2 + 4\xi^1\xi^2 - 4\xi^1\xi^3 - 4(\xi^2)^2 + 8\xi^2\xi^3 - 4(\xi^3)^2$$

Найти матрицу формы q в базисе $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$, если координаты векторов ξ^i в базисе $\{e_i\}_{i=1}^3$ связаны с координатами векторов $\tilde{\xi}^i$ в базисе $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^3$ соотношением:

$$\begin{cases} \xi^1 = -11\tilde{\xi}^1 - 12\tilde{\xi}^2 + 48\tilde{\xi}^3 \\ \xi^2 = -\tilde{\xi}^1 + 5\tilde{\xi}^2 - 6\tilde{\xi}^3 \\ \xi^3 = -2\tilde{\xi}^1 + 5\tilde{\xi}^3 \end{cases}$$

Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Из данной системы видно, что матрица перехода $C = \begin{pmatrix} -11 & -12 & 48 \\ -1 & 5 & -6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Применяя формулу: $\tilde{Q} = C^T \cdot Q \cdot C$ получим:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} -11 & -1 & -2 \\ -12 & 5 & 0 \\ 48 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & -12 & 48 \\ -1 & 5 & -6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -169 & -286 & 910 \\ -286 & -484 & 1540 \\ 910 & 1540 & -4900 \end{pmatrix}$$

Задача 4

Найти сигнатуру квадратичной формы $q(x)$, если в стандартном базисе она задаётся формулой:

$$q(x) = -32(\xi^1)^2 + 154\xi^1\xi^2 - 118\xi^1\xi^3 + 66\xi^1\xi^4 - 186(\xi^2)^2 + 282\xi^2\xi^3 - 160\xi^2\xi^4 - 110(\xi^3)^2 + 120\xi^3\xi^4 - 35(\xi^4)^2$$

В качестве ответа введите пару чисел, первое из которых будет являться положительным индексом инерции квадратичной формы q, а второе - отрицательным.

Пример ввода: [1, 2]

$$Q = \begin{pmatrix} -32 & 77 & -59 & 33 \\ 77 & -186 & 141 & -80 \\ -59 & 141 & -110 & 60 \\ 33 & -80 & 60 & -35 \end{pmatrix}$$

Вычислим Δ_i

$$\Delta_1 = |-32| = -32$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -32 & 77 \\ 77 & -186 \end{vmatrix} = 23$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -32 & 77 & -59 \\ 77 & -186 & 141 \\ -59 & 141 & -110 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -32 & 77 & -59 & 33 \\ 77 & -186 & 141 & -80 \\ -59 & 141 & -110 & 60 \\ 33 & -80 & 60 & -35 \end{vmatrix} = -1$$

Запишем форму в каноническом виде:

$$q(X) = \lambda_1 \tilde{X}_1^2 + \lambda_2 \tilde{X}_2^2 + \lambda_3 \tilde{X}_3^2 + \lambda_4 \tilde{X}_4^2$$

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{1} = -32$$

$$\lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = -\frac{23}{32}$$

$$\lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{2}{23}$$

$$\lambda_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta_3} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow i_+ = 1; \quad i_- = 3$$

Задача 5

Квадратичная форма q, заданная на линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ в некотором базисе задаётся формулой:

$$q(x) = 5(\xi^1)^2 - 24\xi^1\xi^2 + 12\xi^1\xi^3 + 29(\xi^2)^2 - 28\xi^2\xi^3 + 8(\xi^3)^2$$

Приведите квадратичную форму q к каноническому виду.
В качестве ответа введите матрицу квадратичной формы в каноническом виде и, отделенное символом переноса строки, преобразование, которое приводит квадратичную форму q к каноническому виду.
Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.

Применим метод Лагранжа:

$$q(X) = 5X_1^2 - 24X_1X_2 + 12X_1X_3 + 29X_2^2 - 28X_2X_3 + 8X_3^2 = 5\cdot\left(X_1^2 - \frac{12}{5}X_1(2X_2 - X_3) + \left(\frac{6}{5}(2X_2-X_3)\right)^2\right) -$$

$$- \frac{36}{5}(4X_2^2 - 4X_2X_3 + X_3^2) + 29X_2^2 - 28X_2X_3 + 8X_3^2 = 5\left(X_1 - \frac{6}{5}(2X_2-X_3)\right)^2 + \frac{1}{5}X_2^2 + \frac{4}{5}X_2X_3 + \frac{4}{5}X_3^2 =$$

$$= 5\left(X_1 - \frac{6}{5}(2X_2-X_3)\right)^2 + \frac{1}{5}(X_2 + 2X_3)^2$$

Получим:

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \sqrt{5}\left(X_1 - \frac{12}{5}X_2 + \frac{6}{5}X_3\right) \\ \tilde{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(X_2 + 2X_3) \end{cases} \Rightarrow q(X) = \tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2$$

Задача 6

Квадратичная форма q, заданная на линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ в некотором базисе задаётся формулой:

$$q(x) = (\xi^1)^2 - 2\xi^1\xi^2 + (\xi^2)^2$$

Приведите квадратичную форму q к каноническому виду.

Применим метод Лагранжа

$$q(X) = X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 = (X_1 - X_2)^2$$

Получим: $\begin{cases} \tilde{X}_1 = X_1 - X_2 \\ \tilde{X}_2 = X_2 \end{cases}$, $q(X) = \tilde{X}_1^2$

Задача 7

Билинейная форма b в некотором базисе задаётся формулой:

$$b(x,y) = 2\xi^1\eta^1 + 2\xi^1\eta^2 + \xi^1\eta^3 + 5\xi^1\eta^4 + \xi^2\eta^1 + 4\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 + \xi^2\eta^4 - 4\xi^3\eta^1 - \xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3 - 3\xi^3\eta^4 - 3\xi^4\eta^1 - 5\xi^4\eta^2 + 4\xi^4\eta^3 + \xi^4\eta^4$$

В этой формуле ξ^i - координаты вектора x, а η^i - координаты вектора y.
Найти матрицу билинейной формы b.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 8

Найти базис ядра линейной формы: $f(-5, 9, -2, -6)$

Ответу $\left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -2\right), (-5, 1, 0)\right\}$ **соответствует**

Пример ввода: $[-14, 12, 21; 2, 3, -8; -5; 1; 0]$

$$f(X) = -5X_1 + 9X_2 - 2X_3 - 6X_4$$

Решим уравнение $f(X) = 0 \Rightarrow$ получим систему:

$$\begin{pmatrix} -5 & 9 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

ФСР:

X_1	X_2	X_3	X_4
9	5	0	0
2	0	-5	0
6	0	0	-5

$\Rightarrow$ базис ядра: $\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$

Задача 9

Найти базис пространства R^{*3}, сопряженный данному:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Если $\{f^j\}_{j=1}^3$ – базис пространства R^{*3}, то $f^j(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Пусть f^1, f^2, f^3 – базисные строки $\{f^j\}_{j=1}^3$

Получаем равенство:

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} (e_1 \ e_2 \ e_3) = E \Rightarrow \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} = (e_1 \ e_2 \ e_3)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2

Задача 3

Тензор a_t^{nk} задан в стандартном базисе матрицей A.

$$\left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{matrix} \right\|$$

В матрице A индекс n определяется номером строки, индекс k определяется номером столбца, индекс t определяется номером слоя по горизонтали.
Найти тензор $c^k = a_t^{tk}$.
В результирующем тензоре индекс k определяется номером строки

$$a_t^{nk} \to A = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{matrix} \right\|$$

$$c^k = \sum_{t=1}^{2} a_t^{tk}$$

$$c^1 = a_1^{11} + a_2^{21} = 2 + 0 = 2$$

$$c^2 = a_1^{12} + a_2^{22} = 1 + (-2) = -1$$

$$c^k = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Задача 4

Вычислить произведение тензоров $a \otimes b$, если

$$a_l^k \to A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$b^i \to B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{Vmatrix}$$

В матрице A индекс k определяется номером строки, индекс l определяется номером столбца
В матрице B индекс i определяется номером строки
В результирующей матрицеиндекс k определяется номером строки, индекс i определяется номером столбца, индекс l определяется номером слоя по горизонтали

$$a \otimes b = a_l^k \cdot b^i = \gamma_l^{ki}$$

$$A \otimes B = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \gamma_1^{11} & \gamma_1^{12} & \gamma_1^{13} & \gamma_2^{11} & \gamma_2^{12} & \gamma_2^{13} & \gamma_3^{11} & \gamma_3^{12} & \gamma_3^{13} \\ \gamma_1^{21} & \gamma_1^{22} & \gamma_1^{23} & \gamma_2^{21} & \gamma_2^{22} & \gamma_2^{23} & \gamma_3^{21} & \gamma_3^{22} & \gamma_3^{23} \\ \gamma_1^{31} & \gamma_1^{32} & \gamma_1^{33} & \gamma_2^{31} & \gamma_2^{32} & \gamma_2^{33} & \gamma_3^{31} & \gamma_3^{32} & \gamma_3^{33} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 & 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Задача 8

Тензор в стандартном базисе a_i^{km} задан матрицей A.

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & -4 & 3 \end{array} \right\|$$

В матрице A индекс k определяется номером строки, индекс m определяется номером столбца, индекс i определяется номером слоя по горизонтали.
Найти матрицу тензора b_i^{km}, который является транспонированием тензора a_i^{km} и его компоненты находятся по правилу:

$$b_i^{km} = a_i^{mk}$$

В результирующем тензоре индекс k определяется номером строки, индекс m определяется номером столбца, индекс i определяется номером слоя по горизонтали.

$$a_i^{km} \to A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & -4 & 3 \end{array} \right\|$$

$$b_i^{km} = a_i^{mk}$$

$$b_i^{km} \to B = \left\| \begin{array}{cc|cc} -3 & 3 & -5 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right\|$$

Задача 9

Тензоры a_m^j и b_l^i заданы своими матрицами A и B в стандартном базисе.

$$A = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -4 \\ -2 & 4 \end{array} \right\|$$

$$B = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{array} \right\|$$

В матрице тензора a индекс j определяется номером строки, индекс m определяется номером столбца.
В матрице тензора b индекс i определяется номером строки, индекс l определяется номером столбца.
Найдите матрицу тензора c, если $c = -3a - 3b$.
В результирующем тензоре соглашение о порядке записи компонентов в матрицу тензора должно быть таким же, как в матрицах тензоров a и b.

$$a_m^j \to A = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -4 \\ -2 & 4 \end{array} \right\| \qquad b_l^i \to B = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{array} \right\|$$

$$c = -3a - 3b = -3 \cdot \left\| \begin{array}{cc} 0 & -4 \\ -2 & 4 \end{array} \right\| - 3 \cdot \left\| \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} -6 & 6 \\ 15 & -21 \end{array} \right\|$$