1. **Определение линейного оператора.**

Линейным оператором в векторном пространстве V (эндоморфизмом пространства V) называется отображение A: V → V , удовлетворяющее условиям:
1. A(x + y) = Ax + Ay для любых x, y ∈ V ;
2. A(λx) = λAx для любых x ∈ V , λ ∈ F.

2. **Перечислите операции в множестве End(X).**

1. Сложение эндоморфизмов

Для двух эндоморфизмов $A, B \in \mathrm{End}(X)$, их сумма $C = A + B$ также будет эндоморфизмом в X, действующим по правилу:

$$C(v) = A(v) + B(v)$$

для всех $v \in X$.

2. Умножение на скаляр

Для эндоморфизма $A \in \mathrm{End}(X)$ и скаляра α из поля над которым определено пространство X, произведение αA определяется как:

$$(\alpha A)(v) = \alpha \cdot A(v)$$

для всех $v \in X$.

3. Композиция (умножение) эндоморфизмов

Для двух эндоморфизмов $A, B \in \mathrm{End}(X)$, их композиция AB (иногда обозначаемая как $A \circ B$) является эндоморфизмом, действующим по правилу:

$$(AB)(v) = A(B(v))$$

для всех $v \in X$.

4. Тождественный эндоморфизм

В $\mathrm{End}(X)$ существует специальный элемент, тождественный эндоморфизм Id_X, который действует как:

$$\mathrm{Id}_X(v) = v$$

для всех $v \in X$. Он играет роль единицы для операции композиции.

5. Обратный эндоморфизм

Для некоторых эндоморфизмов $A \in \mathrm{End}(X)$ существует обратный эндоморфизм $A^{-1} \in \mathrm{End}(X)$, такой что:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{Id}_X$$

Однако не все эндоморфизмы обратимы.

3. **Определение образа оператора.**

Образ отражает, в какие элементы целевого пространства могут быть трансформированы элементы исходного пространства при действии оператора.

образ Im (A) = = {Ax | x ∈ V }

4. **Определение ядра оператора.**

ядро линейного оператора включает в себя все векторы, которые "исчезают" или преобразуются в ноль при применении этого оператора.
ядро Ker(A) = {x ∈ V | Ax = 0}

5. **Сформулируйте теорему о ядре и образе.**
   Пусть
   $A\colon V \longrightarrow W$ – линейный оператор между векторными пространствами V и W над полем F. Тогда сумма размерностей ядра и образа этого оператора равна размерности домена оператора:
   dim Im A + dim Ker A = dim V

6. **При каком(их) условии(ях) является изоморфизмом?**

умножения вектора на скаляр. Линейное преобразование $A : V \to W$ между двумя векторными пространствами V и W над одним и тем же полем считается изоморфизмом, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. **Биективность (взаимно однозначное соответствие):**
   - **Инъективность (однозначность):** Не существует двух различных векторов $v_1, v_2 \in V$, таких что $A(v_1) = A(v_2)$. Эквивалентно, $A(v) = 0$ (где 0 — нулевой вектор в W) тогда и только тогда, когда $v = 0$. Это также означает, что ядро $\mathrm{Ker}(A)$ состоит только из нулевого вектора.
   - **Сюръективность (на):** Для каждого вектора $w \in W$ существует по крайней мере один вектор $v \in V$, такой что $A(v) = w$. Это означает, что образ $\mathrm{Im}(A)$ совпадает с всем пространством W.
2. **Сохранение линейных операций:** Для всех $v_1, v_2 \in V$ и всех скаляров α, β из поля, над которым определены пространства, должны выполняться следующие условия:
   - $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$
   - $A(\alpha v_1) = \alpha A(v_1)$

7. **Определение матрицы линейного оператора.**

   Определение 2.1. ***Матрицей линейного оператора*** $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется матрица $A = (a_{ij})$, определяемая из равенств $\mathcal{A}e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.

8. **Чему равна размерность пространства End(X)?**

Замечание 2.1. Если $\dim V = n$, то размерность End(V) как векторного пространства равна n^2.

9. **Сформулируйте закон преобразования матрицы оператора при смене базиса.**

Формулировка закона

Пусть A — матрица линейного оператора в исходном базисе, и A' — матрица того же оператора в новом базисе. Тогда матрица A' может быть найдена как:

$$A' = P^{-1}AP$$

где:

- P — матрица перехода от старого базиса к новому,
- P^{-1} — обратная матрица к P.

10. **Какой оператор называют невырожденным?**

1. **Оператор A инъективен (однозначен):** Это значит, что если $A(v) = A(w)$, то $v = w$. Иными словами, различные элементы домена отображаются в различные элементы области значений. Эквивалентное условие — ядро оператора A состоит только из нулевого вектора: $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.
2. **Оператор A сюръективен (на):** Каждый элемент векторного пространства V является образом некоторого элемента этого же пространства при действии оператора A. Это означает, что образ оператора A совпадает со всем пространством V: $\mathrm{Im}(A) = V$.

Другими словами, линейный оператор невырожден, если он биективен — то есть, для него можно найти обратный оператор A^{-1}, такой что $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, где I — тождественный оператор. В контексте матричного

11. **Определение инвариантного подпространства.**

Определение 3.1. Подпространство $U \leqslant V$ называется ***инвариантным*** относительно оператора $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-инвариантным), если $\mathcal{A}U \leqslant U$, то есть для любого $x \in U$ его образ $\mathcal{A}x \in U$.

12. Определение собственного вектора.

Определение 4.1. Ненулевой вектор $x \in V$ называется ***собственным вектором*** оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x = \lambda x$. Число $\lambda \in F$ называется при этом ***собственным значением*** (***собственным числом***) оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному вектору x.

13. Определение собственного значения.

тором оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x = \lambda x$. Число $\lambda \in F$ называется при этом ***собственным значением*** (***собственным числом***) оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному вектору x.

14. Определение собственного подпространства.

Определение 4.2. Подпространство $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ называется ***собственным подпространством*** оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению λ и обозначается V_λ. Помимо собственных векторов, оно содержит нулевой.

15. Определение геометрической кратности.

Определение 4.3. ***Геометрической кратностью*** $g(\lambda)$ собственного значения λ называется размерность соответствующего ему собственного подпространства: $g(\lambda) = \dim V_\lambda$.

16. Как находится характеристический полином?

Определение 5.1. Многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^t \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \det(t\mathcal{E} - \mathcal{A})$ называется ***характеристическим многочленом*** оператора $\mathcal{A}$.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

17. Определение алгебраической кратности.

Определение 5.2. ***Алгебраической кратностью*** $m(\lambda)$ собственного значения λ называется его кратность как корня характеристического многочлена.

18. Определение линейной независимости подпространств.

Определение 6.1. Подпространства $V_1, \ldots, V_k$ называются ***линейной независимыми***, если равенства $v_1 + \ldots + v_k = 0$, $v_k \in V_k$ следует, что $v_1 = \ldots = v_k = 0$.

19. Определение оператора с простым спектром.

Оператор с простым спектром — это линейный оператор, все собственные значения которого имеют кратность один, то есть каждому собственному значению соответствует ровно один линейно независимый собственный вектор. Это означает, что для каждого собственного значения λ существует только одно одномерное собственное подпространство, порожденное собственным вектором, соответствующим λ.

20. Как выглядит матрица оператора с простым спектром?

Предположим, у линейного оператора A с простым спектром есть три различных собственных значения λ_1, λ_2, и λ_3, каждое из которых имеет кратность один. Тогда, в базисе, составленном из соответствующих собственных векторов v_1, v_2, и v_3, матрица оператора A будет выглядеть так:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Здесь λ_1, λ_2, и λ_3 — собственные значения, расположенные на главной диагонали, и они являются единственными ненулевыми элементами матрицы.

21. Определение диагонализуемого оператора (оператора скалярного типа).

Определение 6.2. Линейный оператор в конечномерном векторном пространстве называется ***диагонализируемым***, если существует базис, в котором матрицам этого оператора имеет диагональный вид.

22. Перечислите свойства проекторов.

1. **Самопроекционность:** Проектор P называется самопроектором, если $P^2 = P$. Это означает, что если применить проектор дважды, результат не изменится.
2. **Образ и ядро:** Образ проектора P равен подпространству, на которое он проецирует векторное пространство, то есть $Im(P) = U$. Ядро проектора P состоит из всех векторов, которые отображаются в нулевой вектор, то есть $Ker(P) = U^\perp$, где $U^\perp$ — ортогональное дополнение к U.
3. **Сумма образов и ядер:** Для проектора P на подпространство U справедливо, что $V = Im(P) \oplus Ker(P)$, то есть любой вектор из V представляется в виде суммы вектора из образа и вектора из ядра проектора, причем эти вектора являются ортогональными.
4. **Дополнение к образу:** Если P — проектор на подпространство U, то $I - P$ — проектор на ортогональное дополнение $U^\perp$. Таким образом, $I - P$ также называется дополнительным проектором.
5. **Собственные значения:** У самопроектора P собственные значения равны 0 и 1.
6. **След проектора:** След проектора P равен размерности его образа, то есть след $P = \dim(Im(P))$.
7. **Норма проектора:** Норма проектора P равна единице, то есть $\|P\| = 1$.

23. Что такое спектральное разложение диагонализуемого оператора?

$\mathcal{A}$ действует на любой вектор так же, как оператор $\sum\limits_{i=1} \lambda_i \mathcal{P}_i$. Выражение $\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{P}_i$ называется ***спектральным разложением*** оператора $\mathcal{A}$.

24. Сформулируйте критерий диагонализуемости.

Теорема 6.2. (***критерий диагонализируемости***) *Оператор диагонализируем тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*
1) *Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители (то есть все его корни лежат в поле F);*
2) *Геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности.*

25. Определение корневого вектора высоты k

Определение 7.1. Вектор $x \in V$ называется ***корневым вектором*** оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda \in F$, если существует такое целое неотрицательное число k, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k x = 0$. Наименьшее такое k называется ***высотой*** корневого вектора x.

26. Какую высоту имеет собственный вектор? (не факт что оно)

Высота собственного вектора в контексте нильпотентного оператора обозначает количество раз, которое нужно применить оператор к этому вектору, чтобы получить нулевой вектор.

Пусть T — нильпотентный оператор на векторном пространстве V, и пусть v — собственный вектор оператора T, соответствующий собственному значению λ. Высота собственного вектора v определяется как наименьшее натуральное число k, такое что $T^k(v) = 0$, где T^k обозначает k-кратное применение оператора T к вектору v.

27. Определение корневого подпространства. (не факт что то)

Корневое подпространство оператора — это подпространство векторного пространства, состоящее из всех собственных векторов, соответствующих определенному собственному значению этого оператора.

Пусть T — линейный оператор на векторном пространстве V. Корневое подпространство V_λ, соответствующее собственному значению λ, определяется следующим образом:

$V_\lambda = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$

28. Перечислите свойства корневых подпространств.

Теорема 7.1. (***свойства корневых подпространств***)
1) V^λ $\mathcal{A}$-*инвариантно;*
2) $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{V^\lambda} = \mathcal{N}$ — ***нильпотентный*** *оператор, то есть существует такое неотрицательное целое m, что $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$;*
3) $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ *невырожден при $\mu \neq \lambda$;*
4) $\dim V^\lambda = m(\lambda)$ (*геометрический смысл алгебраической кратности*).

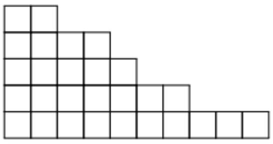
29. Определение нильпотентного оператора.

2) $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{V^\lambda} = \mathcal{N}$ — ***нильпотентный*** *оператор, то есть существует такое неотрицательное целое m, что $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$;*

30. Определение циклического подпространства.

Определение 8.1. Подпространство $U = \langle x, \mathcal{N}x, \mathcal{N}^2x, \ldots, \rangle$ называется ***циклическим подпространством*** нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, порождённым вектором x.

31. Что находится в клетках диаграммы Юнга?



С помощью такой диаграммы нильпотентный оператор задаётся однозначно. Квадратики — векторы жорданова базиса, нильпотентный оператор действует на них сверху вниз.

32. Что находится в столбцах диаграммы Юнга? (ХЗ)

- i-тый столбец соответствует жордановой цепочке — базису циклического пространства U_i

33. Напишите общий вид матрицы жордановой клетки.

$$J(\lambda) = J(0) + \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

34. Как выглядит жорданова нормальная форма?

Определение 9.1. ***Жордановой матрицей*** называется блочно-диагональная матрица

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \mathbf{O} \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & J_k \end{pmatrix},$$