Письменная часть – теоретический минимум (max – 7 баллов).

Время выполнения – 40 минут.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму. Список 1 (для подготовки к письменной части, номера вопросов соответствуют номерам пунктов в конспекте лекций) – приведен ниже.

Для каждого вопроса при необходимости приведена детализация. Нужно уметь формулировать определения понятий. Для свойств, лемм, теорем, следствий необходимо уметь приводить формулировки и доказательства. Формулировки понятий и утверждений должны быть верными, без пропуска и замены существенных слов. В формулировках утверждений обратить внимание на то, о каких условиях идет речь: необходимых, достаточных, необходимых и достаточных – обороты «если …, то …», «тогда и только тогда»

Формат билета:

Вопросы 1-4. Сформулировать аксиомы/определение/лемму/теорему (1+1+1+1 балл).

Вопрос 5. Доказать данное утверждение (1 балл).

Вопрос 6. Сформулировать и доказать лемму/теорему/свойства (1+1 балл).

Результаты будут выставлены в Барс 11 октября до 14.00.

Набравшие 6-7 баллов приглашаются на вторую часть.

Устное собеседование (max – 3 балла).

Вопросы для подготовки к коллоквиуму. Список 2.

Вы получите один из вопросов из списка 2. Вам необходимо раскрыть содержание этого вопроса: сформулировать определения, леммы, теоремы, привести доказательства утверждений, примеры. Подготовка к ответу – не более 15 минут.

Вопросы для подготовки к коллоквиуму. Список 1 (для подготовки к письменной части, номера вопросов соответствуют номерам пунктов в конспекте лекций).

1.1 Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел. *Аксиомы множества вещественных чисел. Лемма о существовании иррациональных чисел. Лемма о существовании числа, квадрат которого равен 2.*

1.2 Следствия из аксиоматики $\mathbb{R}$. *Следствия из аксиом сложения. Следствия аксиом умножения. Следствия аксиом связи сложения и умножения. Следствия аксиом порядка. Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением*

1.3 Важнейшие типы подмножеств $\mathbb{R}$. Индукция. *Индуктивное множество. Лемма о пересечении индуктивных множеств. Множество натуральных чисел. Принцип математической индукции (теорема). Теорема о сумме натуральных чисел. Неравенство Бернулли (лемма). Множество целых чисел. Множество рациональных чисел. Множество иррациональных чисел.*

1.4 Расширение множества вещественных чисел. *Расширенное множество действительных чисел. Неопределенности.*

1.5 Модуль вещественного числа. *Модуль вещественного числа. Свойства модуля (теорема).*

1.6 Промежутки числовой прямой. Окрестности. *Промежутки (отрезок, интервал, полуинтервал, луч). Окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Эпсилон-окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Окрестность элемента $+\infty$ $(-\infty)$ в $\overline{\mathbb{R}}$. Эпсилон-окрестность элемента в $\overline{\mathbb{R}}$. Проколотая окрестность точки $\overline{\mathbb{R}}$. Проколотая эпсилон-окрестность точки x $\overline{\mathbb{R}}$. Лемма о существовании непересекающихся окрестностей двух разных точек.*

1.7 Ограниченность числовых множеств. Супремум и инфимум. *Граница множества. Ограниченность множества. Лемма о необходимом и достаточном условии ограниченного множества. Наибольший (наименьший) элемент множества. Точная грань множества. Лемма о равенстве наибольшего (наименьшего) элемента и точной грани. Принцип точной грани (теорема). Эквивалентные определения супремума и инфимума.*

1.8 Принцип Архимеда. *Теорема о существовании наибольшего элемента ограниченного множества и ее следствия. Принцип Архимеда (теорема) и его следствия.*

2.1 Понятие предела последовательности. *Последовательность. Определение предела последовательности через $\varepsilon - n$. Определение предела последовательности с использованием понятия -окрестности. Доказать, что $lim - = 0$. Доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела. Определение предела последовательности через окрестности. Лемма об эквивалентности определений предела. Понятие сходящейся последовательности. Понятия бесконечных пределов.*

2.2 Свойства последовательностей, имеющих предел *(теорема).*

2.3 Арифметические свойства пределов. *Арифметические свойства пределов в (теорема). Арифметические свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$ (теорема).*

2.4 Предельный переход в неравенствах. *Теорема о неравенстве пределов последовательностей и их членов и ее следствие (предельный переход в неравенствах).*

2.5 Теорема о сжатой переменной.

2.6 Теорема Вейерштрасса. *Монотонность последовательности. Теорема Вейерштрасса. Дополнение к теореме Вейерштрасса (лемма). Обобщенная теорема Вейерштрасса.*

2.7 Второй замечательный предел. *Теорема о существовании предела* $\left(1 \quad -\right)$. *Второй замечательный предел. Примеры.*

2.8 Сравнение скорости роста некоторых функций. *Лемма о пределе* $-$ *и ее следствие о пределе* $-$. *Лемма о пределе* $\lim \frac{}{n}$. *Лемма о пределе* $-$. *Лемма о пределе* $-$. *Теорема о пределах*
$\sqrt[n]{\ }$, $\sqrt[n]{\ }$, $\sqrt[n]{\ }$.

2.9 Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. *Верхний и нижний пределы. Подпоследовательность. Частичные пределы. Лемма о пределе подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса и ее дополнение. Верхний и нижний предел последовательности, примеры. Лемма о верхних и нижних пределах.*

2.10 Критерий Коши. *Фундаментальная последовательность. Критерий Коши (теорема).*

Вопросы для подготовки к коллоквиуму. Список 2 (для устного коллоквиума)

1. Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Аксиомы множества вещественных чисел. Лемма о существовании иррациональных чисел. Лемма о существовании числа, квадрат которого равен 2.
2. Следствия из аксиоматики $\mathbb{R}$. Следствия из аксиом сложения. Следствия аксиом умножения. Следствия аксиом связи сложения и умножения.
3. Следствия из аксиоматики $\mathbb{R}$. Следствия аксиом порядка. Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением.
4. Индуктивное множество. Лемма о пересечении индуктивных множеств. Множество натуральных чисел. Принцип математической индукции (теорема). Теорема о сумме натуральных чисел. Неравенство Бернулли (лемма).
5. Целые, рациональные и иррациональные числа. Расширение множества вещественных чисел. Неопределенности.
6. Модуль вещественного числа. Свойства модуля (теорема).
7. Промежутки числовой прямой. Окрестности. Лемма о существовании непересекающихся окрестностей двух разных точек.
8. Граница множества. Ограниченность множества. Лемма о необходимом и достаточном условии ограниченного множества. Наибольший (наименьший) элемент множества. Супремум и инфимум. Лемма о равенстве наибольшего (наименьшего) элемента и точной грани. Принцип точной грани (теорема).
9. Теорема о существовании наибольшего элемента ограниченного множества и ее следствия. Принцип Архимеда (теорема) и его следствия.
10. Последовательность. Определение предела последовательности через $\varepsilon - n$. Доказать, что $-$. Доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела. Определение предела последовательности через окрестности. Лемма об эквивалентности определений предела. Понятие сходящейся последовательности. Понятия бесконечных пределов.
11. Свойства последовательностей, имеющих предел.
12. Арифметические свойства пределов. Арифметические свойства пределов в (теорема). Арифметические свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$ (теорема).
13. Теорема о неравенстве пределов последовательностей и их членов и ее следствие (предельный переход в неравенствах).
14. Теорема о сжатой переменной.
15. Монотонность последовательности. Теорема Вейерштрасса. Дополнение к теореме Вейерштрасса (лемма). Обобщенная теорема Вейерштрасса.
16. Теорема о существовании предела $\left(1 \quad -\right)$. Второй замечательный предел. Пример.
17. Сравнение скорости роста некоторых функций. Лемма о пределе — и ее следствие о пределе —. Лемма о пределе —. Лемма о пределе —. Лемма о пределе ——.
18. Теорема о пределах $\sqrt[n]{\ }$, $\sqrt[n]{\ }$, $\sqrt[n]{\ }$.
19. Подпоследовательность. Частичные пределы. Лемма о пределе подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса и ее дополнение. Верхний и нижний предел последовательности, примеры. Лемма о верхних и нижних пределах.
20. Фундаментальная последовательность. Критерий Коши (теорема).