Задача 1

В Евклидовом пространстве $\mathbb{E}^2$ скалярное произведение задано своей матрицей Грама G в стандартном базисе:

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$$

В этом пространстве задан базис $\{e_i\}_{i=1}^2$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Найти биортогональный ему базис $\{e^k\}_{k=1}^2$.
Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 2 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.
Для ответа:

$$f^1 = \begin{pmatrix} 1.43 \\ -2.31 \\ 3.213 \end{pmatrix}, \quad f^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -2.3111 \\ \sqrt{(2)} \end{pmatrix}, \quad f^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример ввода: $[1.43, -2.31, 3.21; 3/7, -2.31, 1.14; 3, -2, 1]$

Проверить

Если $\{f^j\}_{j=1}^2$ – базис, биортогональный к $\{e_i\}_{i=1}^2$, то верно что: $(f^j, e_i) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Пусть f^1, f^2, – векторы столбцы базиса $\{f^j\}_{j=1}^2$, тогда верно равенство:

$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} G (f^1 \ f^2) = E$, где e_1, e_2 – векторы строки базиса $\{e_i\}_{i=1}^2$, E – единичная матрица

$\Rightarrow$ получаем: $(f^1 \ f^2) = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -34 & -21 \\ -21 & -13 \end{pmatrix}$

Задача 3

Тензор в стандартном базисе a_{kpq} задан матрицей A.

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -3 \end{array} \right\|$$

В матрице A индекс k определяется номером строки, индекс p определяется номером столбца, индекс q определяетс номером слоя по горизонтали.
Найти матрицу тензора b_{kpq}, который находятся путём выполнения процедуры антисимметризации тензора a_{kpq} и его компоненты находятся по правилу:

$$b_{kpq} = a_{[kp]q}$$

В результирующем тензоре индекс k определяется номером строки, индекс p определяется номером столбца, индекс определяется номером слоя по горизонтали.
Результирующему тензору с матрицей

$$B = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right\|$$

соответствует
Пример ввода: [1, 2, 3, -1; 2, 1, -1, 3]

$a_{kpq} \rightarrow A = \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -3 \end{array} \right\|$

$b_{kpq} = a_{[kp]q}$

$b_{111} = \frac{1}{2}(a_{111} - a_{111}) = 0$

$b_{112} = \frac{1}{2}(a_{112} - a_{112}) = 0$

$b_{121} = \frac{1}{2}(a_{121} - a_{211}) = \frac{1}{2}(-3-1) = -2$

$b_{122} = \frac{1}{2}(a_{122} - a_{212}) = \frac{1}{2}(0-6) = -3$

$b_{211} = -b_{121} = 2$

$b_{212} = -b_{122} = 3$

$b_{221} = \frac{1}{2}(a_{221} - a_{221}) = 0$

$b_{222} = \frac{1}{2}(a_{222} - a_{222}) = 0$

$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 5

Билинейная форма b в некотором базисе задаётся формулой:

$$b(x,y) = -3\xi^1\eta^1 + 3\xi^1\eta^2 - 2\xi^2\eta^1 - 5\xi^2\eta^2$$

В этой формуле ξ^i - координаты вектора x, а η^i - координаты вектора y.
Найти матрицу билинейной формы b.
Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.

Пример ввода:
$[1, 0; 0, -3/4]$

Проверить

Из исходной формулы получаем: $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Задача 6

Найти сигнатуру квадратичной формы $q(x)$, если в стандартном базисе она задаётся формулой:

$$q(x) = 2(\xi^1)^2 + 10\xi^1\xi^2 + 13(\xi^2)^2$$

В качестве ответа введите пару чисел, первое из которых будет являться положительным индексом инерции квадратичной формы q, а второе - отрицательным.
Пример ввода: [1, 2]

Проверить

Применим метод Лагранжа:

$$q(x) = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2 = 2\left(x_1^2 + 5x_1x_2 + \left(\frac{5}{2}x_2\right)^2\right) - \frac{25}{2}x_2^2 + 13x_2^2 = 2\left(x_1 + \frac{5}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 + \frac{5}{2}x_2 \\ \tilde{x}_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow q(x) = 2\tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}_2^2 \Rightarrow r_+ = 2;\ r_- = 0$$

Задача 7

Пусть вектор x имеет в некотором базисе координаты $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ Пусть заданы следующие отображения $f(x)$, которые сопоставляют вектору x некоторые значения функции от координат вектора в этом базисе.
Укажите, какие из этих отображений являются линейными формами. Если таких отображений нет, то укажите в ответе [0]:
1. $f(x) = -7\xi_1 + 6\xi_2 - 7\xi_3$
2. $f(x) = -7\xi_2 + 6\xi_3 - 7\xi_4$
3. $f(x) = -7\xi_2 - 7$
4. $f(x) = -7\xi_1^3$

Пример ввода: [1, 3, 4]

Отображение $f: V \to \mathbb{K}$ называется линейной формой, если $\forall\, v_1, v_2 \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$ выполнено:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$
$$f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1)$$

Проверим выполнение данного условия для данных f:

1) $f(x) = -7\xi_1 + 6\xi_2 - 7\xi_3$

а. $f(v_1 + v_2) = -7(x_1 + y_1) + 6(x_2 + y_2) - 7(x_3 + y_3) = -7x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 7y_1 + 6y_2 - 7y_3 = f(v_1) + f(v_2)$

б. $f(\lambda v) = -7(\lambda x_1) + 6(\lambda x_2) - 7(\lambda x_3) = \lambda(-7x_1 + 6x_2 - 7x_3) = \lambda f(v)$

$\Rightarrow f(x) = -7\xi_1 + 6\xi_2 - 7\xi_3$ - линейная форма

2) $f(x) = -7\xi_2 + 6\xi_3 - 7\xi_4$

а. $f(v_1 + v_2) = -7(x_2 + y_2) + 6(x_3 + y_3) - 7(x_4 + y_4) = -7x_2 + 6x_3 - 7x_4 - 7y_2 + 6y_3 - 7y_4 = f(v_1) + f(v_2)$

б. $f(\lambda v) = -7(\lambda x_2) + 6(\lambda x_3) - 7(\lambda x_4) = \lambda(-7x_2 + 6x_3 - 7x_4) = \lambda f(v)$

$\Rightarrow f(x) = -7\xi_2 + 6\xi_3 - 7\xi_4$ - линейная форма

3) $f(x) = -7\varepsilon_2 - 7$

$f(\lambda v) = -7(\lambda x_2) - 7 \neq \lambda(-7x_2 - 7) = \lambda f(v)$

$\Rightarrow f(x) = -7\varepsilon_2 - 7$ – не линейная форма

4) $f(x) = -7\varepsilon_1^3$

$f(\lambda v) = -7(\lambda x_1)^3 = -7\lambda^3 x_1^3 \neq -7\lambda x_1^3 = \lambda f(v)$

$\Rightarrow f(x) = -7\varepsilon_1^3$ – не линейная форма

Задача 9

Квадратичная форма q, заданная на линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ в некотором базисе задаётся формулой:

$$q(x) = (\xi^1)^2 + 4\xi^1\xi^2 + 4(\xi^2)^2$$

Приведите квадратичную форму q к каноническому виду.
В качестве ответа введите матрицу квадратичной формы в каноническом виде и, отделенное символом переноса строки, преобразование, которое приводит квадратичную форму q к каноническому виду.
Дробные числа в ответе вводить с точностью не менее 3 знаков после запятой, для рациональных дробей допустима запись в виде a/b.
Если выражение для квадратичной формы в каноническом виде задаётся через координаты $\tilde{\xi}$ и имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{\xi}^1 = 2\xi^1 - 3\xi^2 \\ \tilde{\xi}^2 = -\xi^1 + 4\xi^2 \end{cases}$$

И при этом сама квадратичная форма записывается с помощью выражения

$$q(x) = (\tilde{\xi}^1)^2 - (\tilde{\xi}^2)^2$$

То в качестве ответа введите две соответствующие матрицы, разделённые символом переноса строки.

Пример ввода:

$[1, 0; 0, -1]$
$[2, -3; -1, 4]$

Применим метод Лагранжа:

$q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2$

Получаем соотношение: $\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \tilde{x}_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow q(x) = \tilde{x}_1^2$