

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 129

Студент
XXX XXX
P31XX

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $-2 \leq x_1x_2 - x_3x_4x_5 \leq 1$ и неопределенное значение при $x_1x_2 - x_3x_4x_5 = -3$.

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1x_2	$x_3x_4x_5$	x_1x_2	$x_3x_4x_5$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
2	0	0	0	1	0	0	2	0	2	1
3	0	0	0	1	1	0	3	0	3	d
4	0	0	1	0	0	0	4	0	4	0
5	0	0	1	0	1	0	5	0	5	0
6	0	0	1	1	0	0	6	0	6	0
7	0	0	1	1	1	0	7	0	7	0
8	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1
9	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
10	0	1	0	1	0	1	2	1	2	1
11	0	1	0	1	1	1	3	1	3	1
12	0	1	1	0	0	1	4	1	4	d
13	0	1	1	0	1	1	5	1	5	0
14	0	1	1	1	0	1	6	1	6	0
15	0	1	1	1	1	1	7	1	7	0
16	1	0	0	0	0	2	0	2	0	0
17	1	0	0	0	1	2	1	2	1	1
18	1	0	0	1	0	2	2	2	2	1
19	1	0	0	1	1	2	3	2	3	1
20	1	0	1	0	0	2	4	2	4	1
21	1	0	1	0	1	2	5	2	5	d
22	1	0	1	1	0	2	6	2	6	0
23	1	0	1	1	1	2	7	2	7	0
24	1	1	0	0	0	3	0	3	0	0
25	1	1	0	0	1	3	1	3	1	0
26	1	1	0	1	0	3	2	3	2	1
27	1	1	0	1	1	3	3	3	3	1
28	1	1	1	0	0	3	4	3	4	1
29	1	1	1	0	1	3	5	3	5	1
30	1	1	1	1	0	3	6	3	6	d
31	1	1	1	1	1	3	7	3	7	0

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} x_5$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$			$K^2(f)$		
m_0	00000	✓	m_0-m_1	0000X	✓	$m_0-m_1-m_2-m_3$	000XX	✓
m_1	00001	✓	m_0-m_2	000X0	✓	$m_0-m_1-m_8-m_9$	0X00X	✓
m_2	00010	✓	m_0-m_8	0X000	✓	$m_0-m_2-m_8-m_{10}$	0X0X0	✓
m_8	01000	✓	m_2-m_3	0001X	✓	$m_8-m_9-m_{10}-m_{11}$	010XX	✓
m_9	01001	✓	m_1-m_3	000X1	✓	$m_2-m_3-m_{10}-m_{11}$	0X01X	✓
m_{10}	01010	✓	m_8-m_9	0100X	✓	$m_1-m_3-m_9-m_{11}$	0X0X1	✓
m_{17}	10001	✓	m_8-m_{10}	010X0	✓	$m_2-m_3-m_{18}-m_{19}$	X001X	✓
m_{18}	10010	✓	m_8-m_{12}	01X00		$m_1-m_3-m_{17}-m_{19}$	X00X1	
m_{20}	10100	✓	m_1-m_9	0X001	✓	$m_2-m_{10}-m_{18}-m_{26}$	XX010	✓
m_3	00011	✓	m_2-m_{10}	0X010	✓	$m_{18}-m_{19}-m_{26}-m_{27}$	1X01X	✓
m_{12}	01100	✓	m_1-m_{17}	X0001	✓	$m_{20}-m_{21}-m_{28}-m_{29}$	1X10X	
m_{11}	01011	✓	m_2-m_{18}	X0010	✓	$m_{10}-m_{11}-m_{26}-m_{27}$	X101X	✓
m_{19}	10011	✓	$m_{10}-m_{11}$	0101X	✓	$m_3-m_{11}-m_{19}-m_{27}$	XX011	✓
m_{26}	11010	✓	m_9-m_{11}	010X1	✓			
m_{28}	11100	✓	m_3-m_{11}	0X011	✓			
m_{21}	10101	✓	$m_{18}-m_{19}$	1001X	✓			
m_{27}	11011	✓	$m_{17}-m_{19}$	100X1	✓			
m_{29}	11101	✓	$m_{20}-m_{21}$	1010X	✓			
m_{30}	11110	✓	$m_{17}-m_{21}$	10X01				
			$m_{18}-m_{26}$	1X010	✓			
			$m_{20}-m_{28}$	1X100	✓			
			m_3-m_{19}	X0011	✓			
			$m_{10}-m_{26}$	X1010	✓			
			$m_{12}-m_{28}$	X1100				
			$m_{26}-m_{27}$	1101X	✓			
			$m_{28}-m_{29}$	1110X	✓			
			$m_{28}-m_{30}$	111X0				
			$m_{26}-m_{30}$	11X10				
			$m_{19}-m_{27}$	1X011	✓			
			$m_{21}-m_{29}$	1X101	✓			
			$m_{11}-m_{27}$	X1011	✓			
$K^3(f)$						$Z(f)$		
$m_0-m_1-m_2-m_3-m_8-m_9-m_{10}-m_{11}$						0X0XX		
$m_2-m_3-m_{10}-m_{11}-m_{18}-m_{19}-m_{26}-m_{27}$						XX01X		
						01X00		
						10X01		
						X1100		
						111X0		
						11X10		
						X00X1		
						1X10X		
						0X0XX		
						XX01X		

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы															
		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
		0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
		0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
		0	1	2	8	9	10	11	17	18	19	20	26	27	28	29	
	01X00				X												
A	10X01								X								
	X1100															X	
	111X0															X	
	11X10												X				
B	X00X1		X						X		X						
	1X10X											X				X	X
	0X0XX	X	X	X	X	X	X	X									
	XX01X			X			X	X		X	X		X	X			

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0X0XX \\ XX01X \\ 1X10X \end{array} \right\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы
		1
		0
		0
		0
		1
		17
A	10X01	X
B	X00X1	X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = (A \vee B)$$

Приведем выражение в ДНФ:

$$Y = A \vee B$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{l} T \\ A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0X0XX \\ XX01X \\ 1X10X \\ 10X01 \end{array} \right\} \quad C_2 = \left\{ \begin{array}{l} T \\ B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0X0XX \\ XX01X \\ 1X10X \\ X00X1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} S_1^a = 11 \\ S_1^b = 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} S_2^a = 10 \\ S_2^b = 14 \end{array}$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 0X0XX \\ XX01X \\ 1X10X \\ X00X1 \end{array} \right\}$$

$$S^a = 10$$

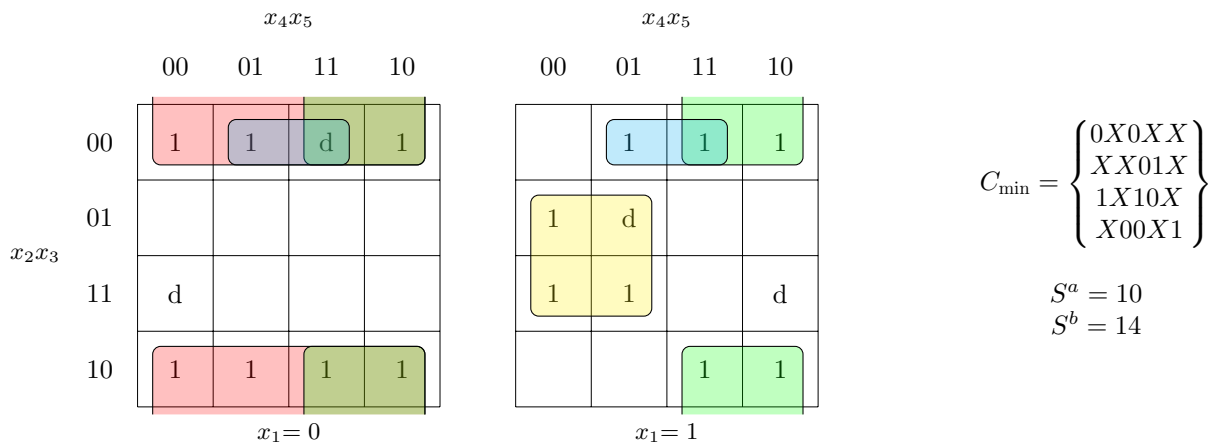
$$S^b = 14$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} \vee \overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_2} \overline{x_3} x_5$$

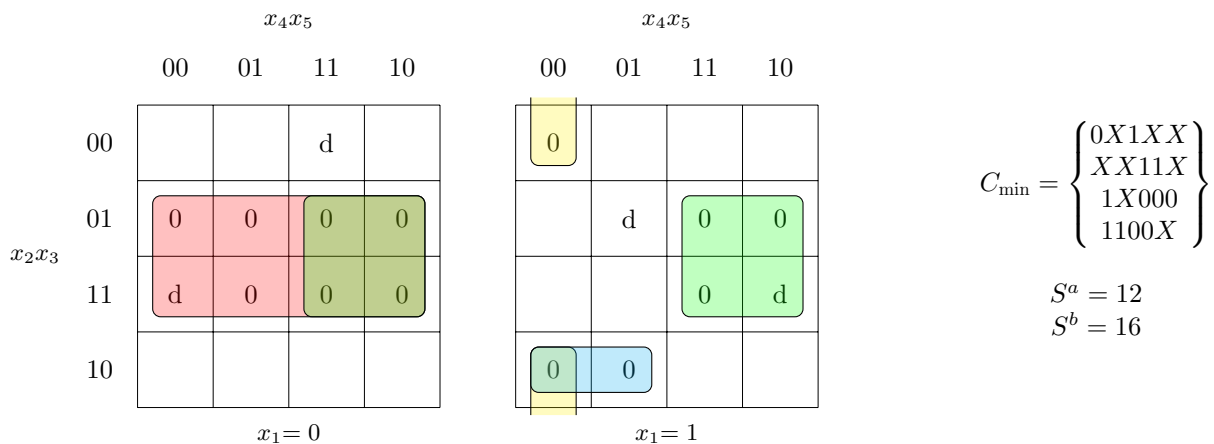
Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} \vee \overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_2} \overline{x_3} x_5$$

Определение МКНФ



$$f = (x_1 \vee \overline{x_3}) (\overline{x_3} \vee \overline{x_4}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} \vee \overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_2} \overline{x_3} x_5 \quad S_Q = 14 \quad \tau = 2$$

$$f = \overline{x_3} (\overline{x_1} \vee x_4 \vee \overline{x_2} x_5) \vee x_1 x_3 \overline{x_4} \quad S_Q = 12 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = \overline{x_1} \vee x_4$$

$$\overline{\varphi} = x_1 \overline{x_4}$$

$$f = \overline{x_3} (\varphi \vee \overline{x_2} x_5) \vee \overline{\varphi} x_3 \quad S_Q = 13 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = \overline{x_3} (\overline{x_1} \vee x_4 \vee \overline{x_2} x_5) \vee x_1 x_3 \overline{x_4} \quad S_Q = 12 \quad \tau = 4$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee \overline{x_3}) (\overline{x_3} \vee \overline{x_4}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \quad S_Q = 16 \quad \tau = 2$$

$$f = (\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_4}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_2} x_5) \quad S_Q = 12 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = x_1 \overline{x_4}$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_1} \vee x_4$$

$$f = (\overline{x_3} \vee \varphi) (\overline{\varphi} \vee x_3 \vee \overline{x_2} x_5) \quad S_Q = 12 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = (\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_4}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_2} x_5) \quad S_Q = 12 \quad \tau = 3$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = \overline{x_3} (\overline{x_1} \vee x_4 \vee \overline{x_2} x_5) \vee x_1 x_3 \overline{x_4} \quad (S_Q = 12, \tau = 4)$$

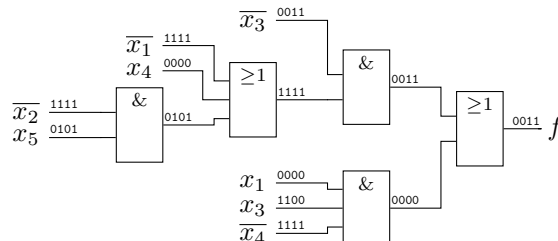
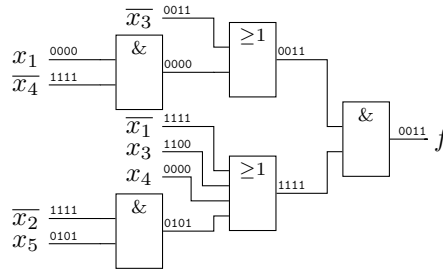


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (\overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_4}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_2} x_5) \quad (S_Q = 12, \tau = 3)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x_3} x_1 \overline{x_4} \overline{x_2} x_5} x_1 x_3 \overline{x_4}}}} \quad (S_Q = 17, \tau = 8)$$

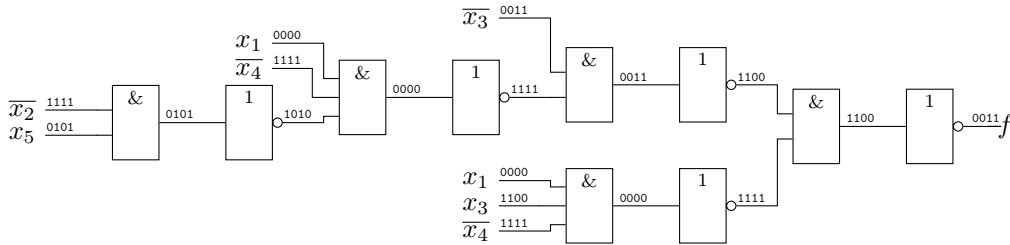
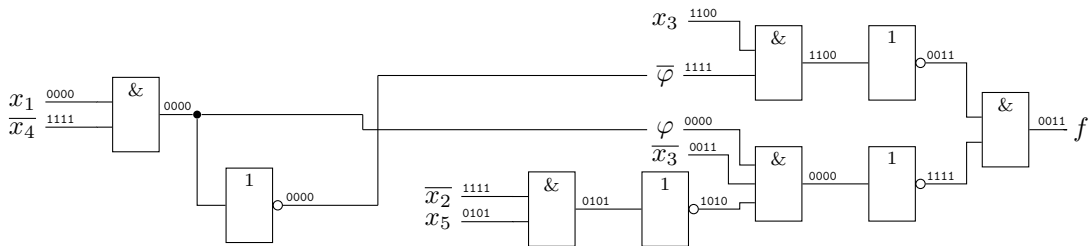


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_3} \overline{\varphi} \overline{\varphi} \overline{x_3} \overline{x_2} x_5 \quad (S_Q = 15, \tau = 5)$$

$$\varphi = x_1 \overline{x_4}$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x_3} x_1 \overline{x_4} \overline{x_2} x_5} x_1 x_3 \overline{x_4}}}}}} \quad (S_Q = 18, \tau = 6)$$

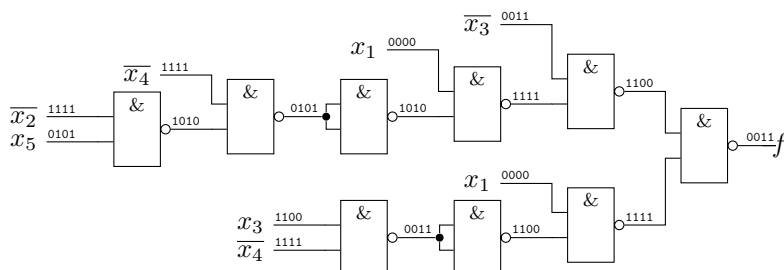


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{x_3 x_1 x_4 x_1 x_3 x_4 x_2 x_5}} \quad (S_Q = 20, \tau = 6)$$

