1. **Определение линейного оператора.**

Определение 1.1. ***Линейным оператором*** в векторном пространстве V (***эндоморфизмом*** пространства V) называется отображение $\mathcal{A}\colon V \to V$, удовлетворяющее условиям:

1. $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$ для любых $x, y \in V$;
2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x$ для любых $x \in V$, $\lambda \in F$.

Множество всех линейных операторов в пространстве V будем обозначать $\mathrm{End}(V)$.

2. **Перечислите операции в множестве End(X).**

Сложение и умножение на скаляры

3. **Определение образа оператора**

Определение 1.2. Для линейного оператора $\mathcal{A}$ определяется его ***образ*** $\mathrm{Im}\,(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}x \mid x \in V\}$ и ***ядро*** $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0\}$.

4. **Определение ядра оператора.**

Определение 1.2. Для линейного оператора $\mathcal{A}$ определяется его ***образ*** $\mathrm{Im}\,(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}x \mid x \in V\}$ и ***ядро*** $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0\}$.

5. **Сформулируйте теорему о ядре и образе.**

dim V = ранг матрицы

Теорема 1.1. $\dim \mathrm{Im}\, \mathcal{A} + \dim \mathrm{Ker}\, \mathcal{A} = \dim V$.

6. **При каком(их) условии(ях) A является изоморфизмом?**

Следствие 1.1.1. *Следующие свойства линейного оператора $\mathcal{A}$ эквивалентны:* 1) $\mathcal{A}$ *— изоморфизм;* 2) $\mathrm{Ker}\, \mathcal{A} = \{0\}$*;* 3) $\mathrm{Im}\, \mathcal{A} = V$.

7. **Определение матрицы линейного оператора.**

Определение 2.1. ***Матрицей линейного оператора*** $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется матрица $A = (a_{ij})$, определяемая из равенств $\mathcal{A}e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.

8. **Чему равна размерность пространства End(X)?**

Замечание 2.1. Если $\dim V = n$, то размерность End(V) как векторного пространства равна n^2.

9. **Сформулируйте закон преобразования матрицы оператора при смене базиса.**

$\widetilde{A} = C^{-1}AC.$

10. **Какой оператор называют невырожденным?**

Невырожденные операторы в пространстве V , у которых det A ≠ 0. Невырожденные линейные оператора в пространстве V образуют группу GL(V), называемую полной линейной группой пространства V .

11. **Определение инвариантного подпространства.**

Определение 3.1. Подпространство $U \leqslant V$ называется ***инвариантным*** относительно оператора $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-инвариантным), если $\mathcal{A}U \leqslant U$, то есть для любого $x \in U$ его образ $\mathcal{A}x \in U$.

12. **Определение собственного вектора.**

Определение 4.1. Ненулевой вектор $x \in V$ называется ***собственным вектором*** оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x = \lambda x$. Число $\lambda \in F$ называется при этом ***собственным значением*** (***собственным числом***) оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному вектору x.

13. **Определение собственного значения.**

Определение 4.1. Ненулевой вектор $x \in V$ называется ***собственным вектором*** оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x = \lambda x$. Число $\lambda \in F$ называется при этом ***собственным значением*** (***собственным числом***) оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному вектору x.

14. **Определение собственного подпространства.**

Определение 4.2. Подпространство $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ называется ***собственным подпространством*** оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению λ и обозначается V_λ. Помимо собственных векторов, оно содержит нулевой.

15. **Определение геометрической кратности.**

Определение 4.3. ***Геометрической кратностью*** $g(\lambda)$ собственного значения λ называется размерность соответствующего ему собственного подпространства: $g(\lambda) = \dim V_\lambda$.

16. **Как находится характеристический полином?**

Определение 5.1. Многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^t \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \det(t\mathcal{E} - \mathcal{A})$ называется ***характеристическим многочленом*** оператора $\mathcal{A}$.

17. **Определение алгебраической кратности.**

Определение 5.2. ***Алгебраической кратностью*** $m(\lambda)$ собственного значения λ называется его кратность как корня характеристического многочлена.

18. Определение линейной независимости подпространств.

Определение 6.1. Подпространства $V_1, \ldots, V_k$ называются ***линейной независимыми***, если равенства $v_1 + \ldots + v_k = 0$, $v_k \in V_k$ следует, что $v_1 = \ldots = v_k = 0$.

19. Определение оператора с простым спектром.

Следствие 6.1.1. *Если характеристический многочлен оператора имеет $n = \dim V$ различных корней (оператор с **простым спектром**), то существует базис из собственных векторов этого оператора.*

20. Как выглядит матрица оператора с простым спектром?

На диагонали находятся собственные значения, остальные числа 0.

21. Определение диагонализуемого оператора (оператора скалярного типа).

Определение 6.2. Линейный оператор в конечномерном векторном пространстве называется ***диагонализируемым***, если существует базис, в котором матрицам этого оператора имеет диагональный вид.

22. Перечислите свойства проекторов.

Линейный оператор P:X -> является проектором тогда и только тогда, когда существуют такие подпространства U и V пространства X, что X раскладывается в их прямую сумму, и при этом для любой пары элементов $u \in U,\ v \in V$ имеем P(u+v) = u. Подпространства U и V – соответственно образ и ядро проектора P.

23. Что такое спектральное разложение диагонализуемого оператора?

Пусть оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем и $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{\cdot\cdot} V_{\lambda_i}$. Рассмотрим проектор $\mathcal{P}_i$ на подпространство V_{λ_i} параллельно прямой сумме оставшихся подпространств. Тогда $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = \mathcal{O}$ при $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$. Легко проверяется, что оператор $\mathcal{A}$ действует на любой вектор так же, как оператор $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{P}_i$. Выражение $\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{P}_i$ называется ***спектральным разложением*** оператора $\mathcal{A}$.

24. Сформулируйте критерий диагонализуемости.

Теорема 6.2. (***критерий диагонализируемости***) *Оператор диагонализируем тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*
1) *Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители (то есть все его корни лежат в поле F);*
2) *Геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности.*

25. Определение корневого вектора высоты k.

Определение 7.1. Вектор $x \in V$ называется ***корневым вектором*** оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda \in F$, если существует такое целое неотрицательное число k, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k x = 0$. Наименьшее такое k называется ***высотой*** корневого вектора x.

26. Какую высоту имеет собственный вектор?

Пример 7.1. а) Корневые векторы высоты 0 — нулевые векторы;
б) Корневые векторы высоты 1 — собственные векторы;
в) Каждый многочлен есть корневой вектор с собственным числом 0 оператора дифференцирования пространства многочленов, причём высота многочлена как корневого вектора равна $n + 1$, где n — степень этого многочлена;

27. Определение корневого подпространства.

где V^λ={все корневые векторы с собственным значение λ} — ***корневое подпространство*** с собственным значением λ:

$$V^\lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^i.$$

28. Перечислите свойства корневых подпространств.

Теорема 7.1. (*свойства корневых подпространств*)
1) V^λ *$\mathcal{A}$-инвариантно;*
2) $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{V^\lambda} = \mathcal{N}$ — ***нильпотентный*** *оператор, то есть существует такое неотрицательное целое m, то $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$;*
3) $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ *невырожден при* $\mu \neq \lambda$*;*
4) $\dim V^\lambda = m(\lambda)$ (*геометрический смысл алгебраической кратности*).

29. Определение нильпотентного оператора.

Пусть $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор, то есть существует такое неотрицательное целое m, что $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$. Наименьшее из таких m называют ***высотой*** нильпотентного оператора. Для него все векторы V — корневые с собственным значением 0, высоты не больше m.

30. Определение циклического подпространства.

Определение 8.1. Подпространство $U = \langle x, \mathcal{N}x, \mathcal{N}^2x, \dots, \rangle$ называется ***циклическим подпространством*** нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, порождённым вектором x.

31. Что находится в клетках диаграммы Юнга?
32. Что находится в столбцах диаграммы Юнга?

Наглядно можно изображать структуру нильпотентного оператора с помощью так называемой ***диаграммы Юнга***, которая в данном случае схематически показывает, как действует нильпотентный оператор на базисных векторах жорданова базиса:

С помощью такой диаграммы нильпотентный оператор задаётся однозначно. Квадратики — векторы жорданова базиса, нильпотентный оператор действует на них сверху вниз.

- Высота строки соответствует высоте базисного вектора, а высота произвольного вектора (линейной комбинации базисных) определяется как наибольшая высота базисного вектора, входящего в эту линейную комбинацию с ненулевым коэффициентом

- i-тый столбец соответствует жордановой цепочке — базису циклического пространства U_i
- Ядро оператора $\mathcal{N}^k$ — линейная оболочка векторов, стоящих в строках высоты не больше k
- Векторы, лежащие в нижней строке, при действии оператора переходят в нулевые

33. Напишите общий вид матрицы жордановой клетки.

Если вернуться к произвольному линейному оператору $\mathcal{A}$, то можно заметить, что на циклическом подпространстве нильпотентного оператора $\mathcal{N} = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ оператор $\mathcal{A}$ задаётся матрицей

$$J(\lambda) = J(0) + \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

называемой ***жордановой клеткой*** с собственным значением λ

34. Как выглядит жорданова нормальная форма?

Определение 9.1. ***Жордановой матрицей*** называется блочно-диагональная матрица

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \mathbf{O} \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & J_k \end{pmatrix},$$

где $J_1, J_2, \dots J_k$ — какие-то жордановы клетки.

Жорданова матрица также называется ***жордановой нормальной формой*** (ЖНФ) для оператора $\mathcal{A}$. Верна следующая