

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 87

Студент
XXX XXX XXX
P31XX

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $x_3x_5 + x_1x_2x_4 = 1, 5, 8, 10$ и неопределенное значение при $x_1x_2x_4 = 1$.

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_3x_5	$x_1x_2x_4$	$x_1x_2x_4$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
2	0	0	0	1	0	0	1	1	d
3	0	0	0	1	1	1	1	1	d
4	0	0	1	0	0	2	0	0	0
5	0	0	1	0	1	3	0	0	0
6	0	0	1	1	0	2	1	1	d
7	0	0	1	1	1	3	1	1	d
8	0	1	0	0	0	0	2	2	0
9	0	1	0	0	1	1	2	2	0
10	0	1	0	1	0	0	3	3	0
11	0	1	0	1	1	1	3	3	0
12	0	1	1	0	0	2	2	2	0
13	0	1	1	0	1	3	2	2	1
14	0	1	1	1	0	2	3	3	1
15	0	1	1	1	1	3	3	3	0
16	1	0	0	0	0	0	4	4	0
17	1	0	0	0	1	1	4	4	1
18	1	0	0	1	0	0	5	5	1
19	1	0	0	1	1	1	5	5	0
20	1	0	1	0	0	2	4	4	0
21	1	0	1	0	1	3	4	4	0
22	1	0	1	1	0	2	5	5	0
23	1	0	1	1	1	3	5	5	1
24	1	1	0	0	0	0	6	6	0
25	1	1	0	0	1	1	6	6	0
26	1	1	0	1	0	0	7	7	0
27	1	1	0	1	1	1	7	7	1
28	1	1	1	0	0	2	6	6	1
29	1	1	1	0	1	3	6	6	0
30	1	1	1	1	0	2	7	7	0
31	1	1	1	1	1	3	7	7	1

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$			$K^2(f)$		$Z(f)$
m_1	00001	✓	m_2-m_3	0001X	✓	$m_2-m_3-m_6-m_7$	00X1X	01101
m_2	00010	✓	m_1-m_3	000X1				11100
m_{17}	10001	✓	m_2-m_6	00X10	✓			000X1
m_{18}	10010	✓	m_1-m_{17}	X0001				X0001
m_3	00011	✓	m_2-m_{18}	X0010				X0010
m_6	00110	✓	m_6-m_7	0011X	✓			0X110
m_{13}	01101		m_3-m_7	00X11	✓			X0111
m_{14}	01110	✓	m_6-m_{14}	0X110				11X11
m_{28}	11100		m_7-m_{23}	X0111				1X111
m_7	00111	✓	$m_{27}-m_{31}$	11X11				00X1X
m_{23}	10111	✓	$m_{23}-m_{31}$	1X111				
m_{27}	11011	✓						
m_{31}	11111	✓						

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы									
		0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
		0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
		0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
		0	0	1	0	1	1	1	0	1	1
		1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
		1	13	14	17	18	23	27	28	31	
	01101		X								
	11100								X		
	000X1	X									
	X0001	X			X						
	X0010					X					
	0X110			X							
A	X0111						X				
	11X11							X		X	
B	1X111						X			X	
	00X1X										

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} X0001 \\ X0010 \\ 0X110 \\ 01101 \\ 11X11 \\ 11100 \end{array} \right\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы
		1
		0
		1
		1
		23
A	X0111	X
B	1X111	X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = A \vee B$$

Приведем выражение в ДНФ:

$$Y = A \vee B$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \begin{Bmatrix} T \\ A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X0001 \\ X0010 \\ 0X110 \\ 01101 \\ 11X11 \\ 11100 \\ X0111 \end{Bmatrix} \quad C_2 = \begin{Bmatrix} T \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X0001 \\ X0010 \\ 0X110 \\ 01101 \\ 11X11 \\ 11100 \\ 1X111 \end{Bmatrix}$$

$$S_1^a = 30 \quad S_1^b = 37 \quad S_2^a = 30 \quad S_2^b = 37$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} X0001 \\ X0010 \\ 0X110 \\ 01101 \\ 11X11 \\ 11100 \\ X0111 \end{Bmatrix}$$

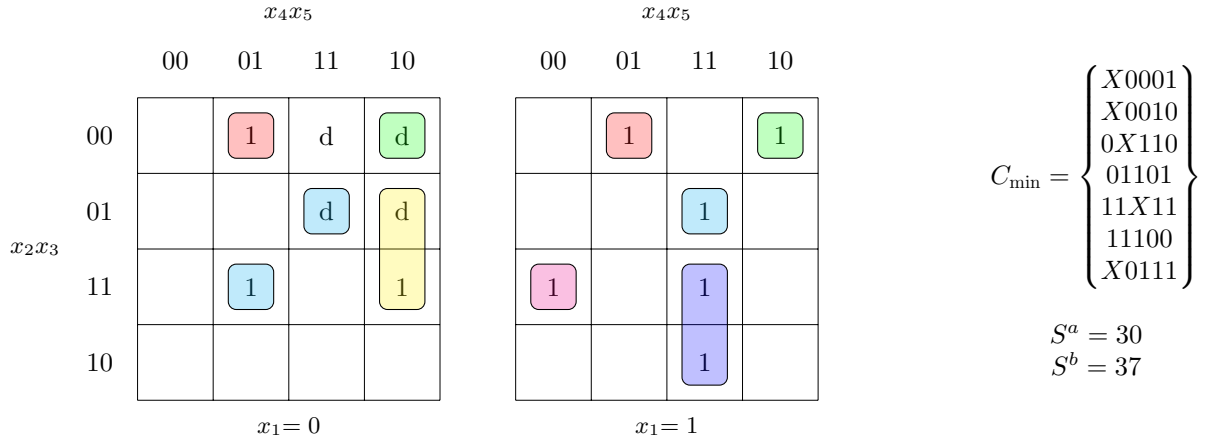
$$S^a = 30 \quad S^b = 37$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_2} x_3 x_4 x_5$$

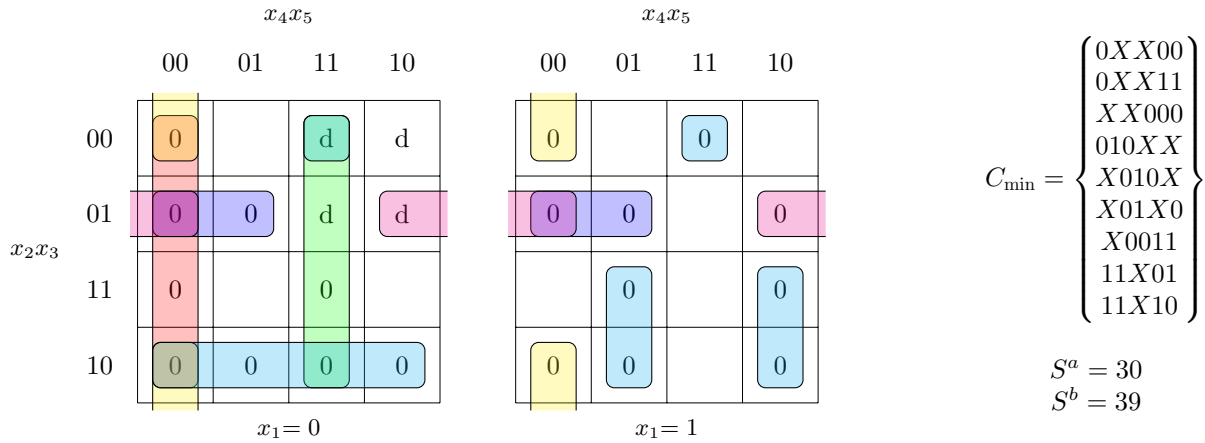
Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_2} x_3 x_4 x_5$$

Определение МКНФ



$$f = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_5) \\ (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee x_5)$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \quad S_Q = 37 \quad \tau = 2$$

Декомпозиция невозможна

$$f = x_4 (\overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_5 \vee \overline{x_2} x_3 x_5) \vee x_2 x_3 \overline{x_4} (\overline{x_1} x_5 \vee x_1 \overline{x_5}) \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \quad S_Q = 35 \quad \tau = 4$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_5) \\ (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \quad S_Q = 39 \quad \tau = 2$$

$$f = (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 x_5) (x_4 \vee x_5 \vee x_1 x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee (x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_4} \vee x_5)) \\ (\overline{x_4} \vee \overline{x_5} \vee x_1 (x_2 \vee x_3)) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \quad S_Q = 34 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = x_4 x_5$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_4} \vee \overline{x_5}$$

$$f = (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \varphi) (x_4 \vee x_5 \vee x_1 x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee (x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_4} \vee x_5)) (\overline{\varphi} \vee x_1 (x_2 \vee x_3)) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \quad S_Q = 34 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 x_5) (x_4 \vee x_5 \vee x_1 x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee (x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_4} \vee x_5)) \\ (\overline{x_4} \vee \overline{x_5} \vee x_1 (x_2 \vee x_3)) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \quad S_Q = 34 \quad \tau = 4$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_4 (\overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_5 \vee \overline{x_2} x_3 x_5) \vee x_2 x_3 \overline{x_4} (\overline{x_1} x_5 \vee x_1 \overline{x_5}) \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \quad (S_Q = 35, \tau = 4)$$

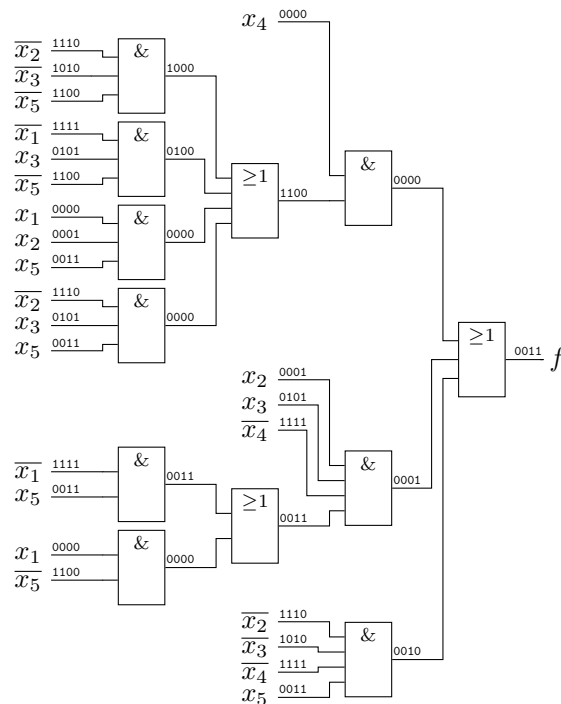
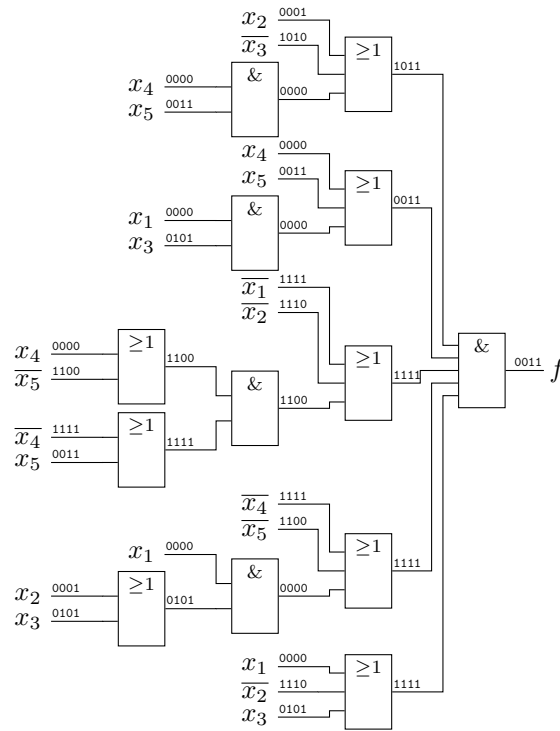


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 x_5) (x_4 \vee x_5 \vee x_1 x_3) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee (x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_4} \vee x_5)) (\overline{x_4} \vee \overline{x_5} \vee x_1 (x_2 \vee x_3)) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \quad (S_Q = 34, \tau = 4)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5} \overline{\overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5}} \overline{\overline{x_1} x_3 x_4 \overline{x_5}} \overline{\overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5} \overline{\overline{x_1} x_2 x_4 x_5} \overline{\overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5}} \overline{\overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5} \quad (S_Q = 45, \tau = 4)$$

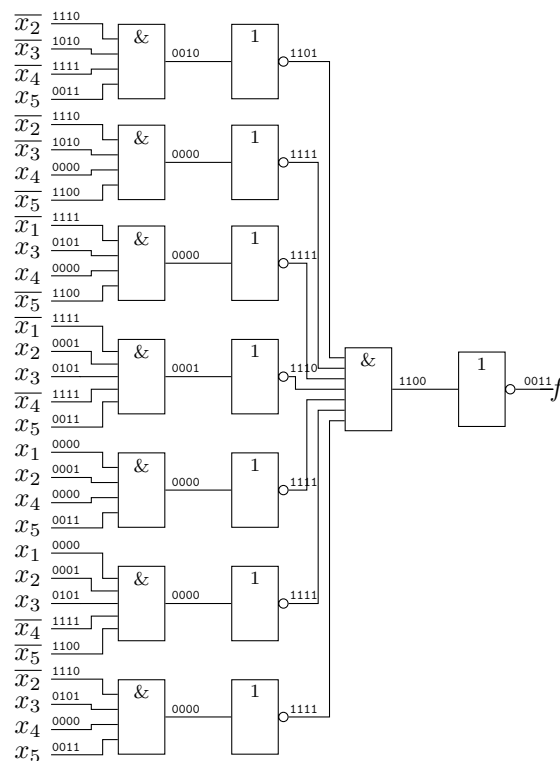
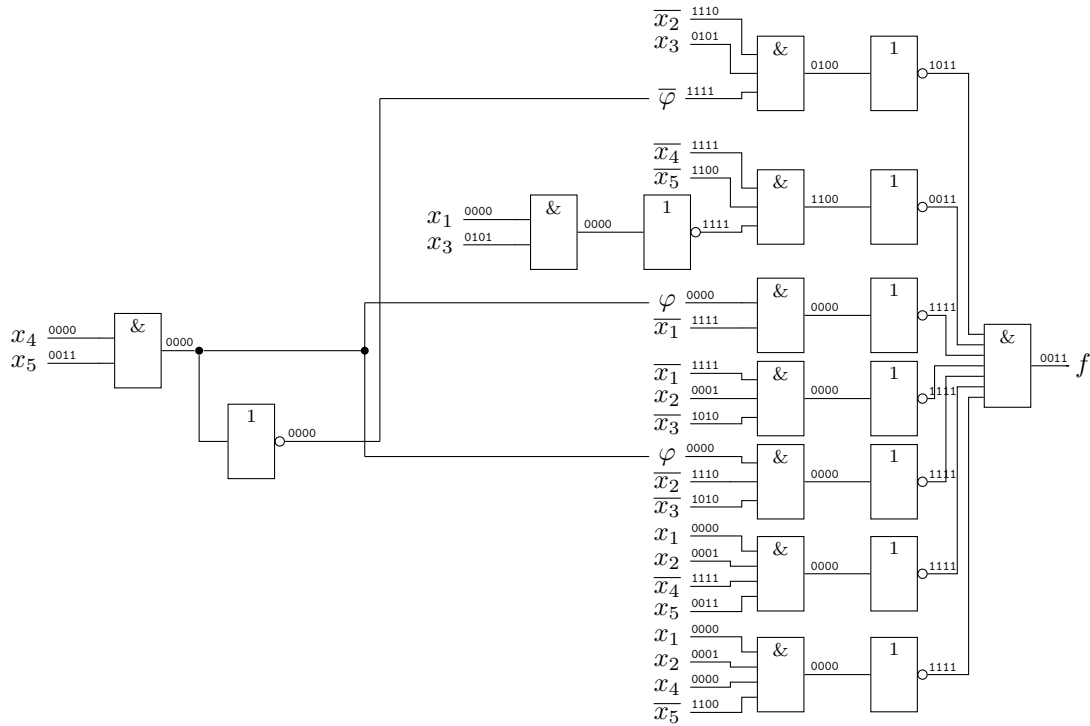


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_2 x_3 \bar{\varphi} \overline{x_4 x_5 x_1 x_3} \overline{\varphi x_1 x_1 x_2 x_3} \overline{\varphi x_2 x_3 x_1 x_2 x_4 x_5} \overline{x_1 x_2 x_4 x_5}} \quad (S_Q = 42, \tau = 5)$$

$$\varphi = x_4 x_5$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = x_4 x_5 x_1 x_2 x_2 x_3 x_5 x_2 x_3 x_1 x_3 x_4 x_2 x_3 x_1 x_5 x_1 x_5 x_2 x_3 x_5 \quad (S_Q = 44, \tau = 8)$$

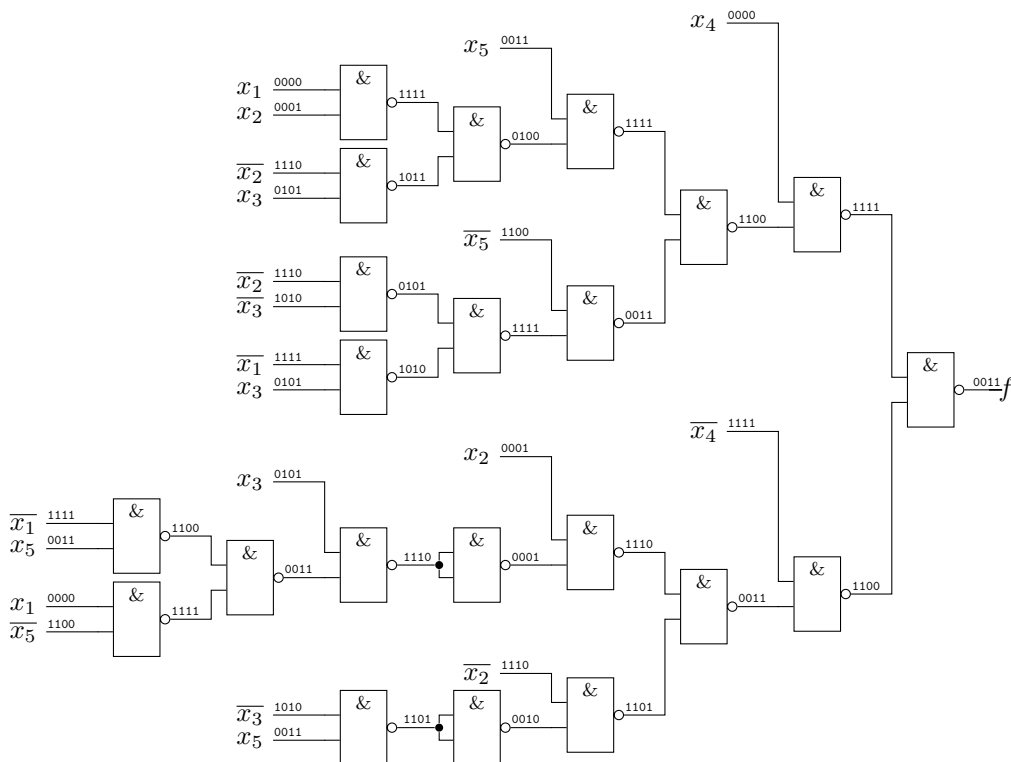


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = x_2 x_1 \overline{x_4} x_5 x_4 x_5 x_1 x_3 x_2 x_3 x_4 x_5 x_4 x_5 x_1 x_3 x_4 x_5 x_1 \overline{x_2} x_3 \quad (S_Q = 52, \tau = 9)$$

