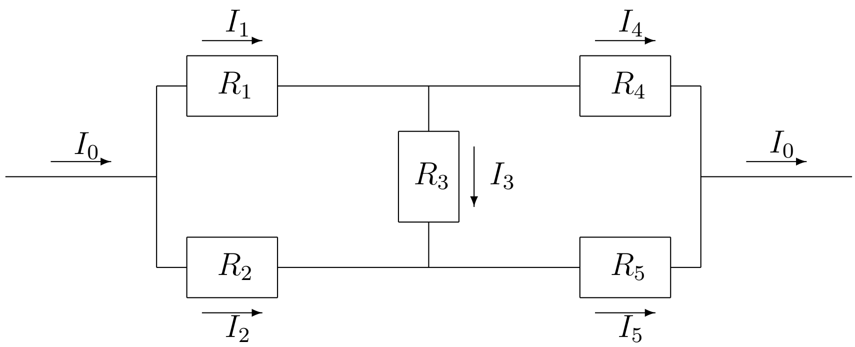
Prof. Dr. Karl Worthmann **TU Ilmenau**
Dipl.-Math. Brigitte Walther

Numerik für Informatiker **1. Übungsblatt**

Lösung zur Aufgabe 1:

Ein von Spannungsquellen freies Stromnetz sei aus den Widerständen $R_1, \ldots, R_5$ in Brückenschaltung (Wheatstone) aufgebaut:



Gegeben seien $I_0, R_1, \ldots, R_5 > 0$. Geben Sie das aus den Kirchhoffschen Gesetzen abgeleitete Gleichungssystem für die Ströme $I_1, \ldots, I_5$ in Matrixschreibweise an. Welches Kriterium müssen die Widerstände erfüllen, damit $I_3 = 0$ gilt?
Hinweis: Benutzen Sie die Kirchhoffschen Gesetze:

1.) *Knotenregel:* Die Summe aller Ströme, die in einen Knoten hinein- bzw. herausfließen, ist Null:

$$\sum_n I_n = 0.$$

2.) *Maschenregel:* In einem geschlossenen Stromkreis ist die Summe der Spannungen über alle Schaltelemente Null ($U_i = I_i \cdot R_i$):

$$\sum_n U_n = 0.$$

Lösung:
Mithilfe der Kirchhoffschen Gesetze stellen wir Gleichungen auf, die sich aus dem Zusammenhang zwischen den I_i und R_i ($i = 1, \ldots, 5$) sowie I_0 ergeben:

$$\begin{array}{rcccccll}
\text{Knotenregel:} & & & & & & & \\
Gl.1: & I_1 & +I_2 & & & & = I_0 & \\
Gl.2: & I_1 & & -I_3 & -I_4 & & = 0 & \\
Gl.3: & & I_2 & +I_3 & & -I_5 & = 0 & \\
Gl.4: & & & & I_4 & +I_5 & = I_0 & \text{entspricht Gl.1 - Gl.2 - Gl.3} \\
\text{Maschenregel:} & & & & & & & \\
Gl.5: & R_1 I_1 & -R_2 I_2 & +R_3 I_3 & & & = 0 & \\
Gl.6: & & & R_3 I_3 & -R_4 I_4 & +R_5 I_5 & = 0 & \\
Gl.7: & R_1 I_1 & -R_2 I_2 & & +R_4 I_4 & -R_5 I_5 & = 0 & \text{entspricht Gl.5-Gl.6)}
\end{array}$$

Aus diesen Gleichungen wird ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $I_1,\ I_2, \ldots, I_5$ aufgestellt, welches ggf. mit vorgegebenen Werten für die Widerstände gelöst werden kann.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ R_1 & -R_2 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & R_5 \\ R_1 & -R_2 & 0 & R_4 & -R_5 \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \\ I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ ist ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem, das im Allgemeinen keine Lösung hat. in diesem Fall sind aber zwei Gleichungen Linearkombinationen von anderen Gleichungen, deshalb entsteht durch Weglassen dieser beiden Gleichungen ein lineares Gleichungssystem mit 5 Gleichungen und 5 Unbekannten, welches bei günstiger Eingabe der Widerstände R_1 bis R_5 und der Stromstärke I_0 eine eindeutige Lösung hat.

Ist nun hinter I_3 kein Stromfluss mehr messbar (d. h. $I_3 = 0$), kann man Relationen zwischen den Widerständen R_1, R_2, R_4 und R_5 ermitteln:

- aus Gl2 $\Longrightarrow$ (i) $I_1 = I_4$
  aus Gl3 $\Longrightarrow$ (ii) $I_2 = I_5$
  aus Gl4 $\Longrightarrow$ (iii) $R_1 I_1 = R_2 I_2$
  aus Gl5 $\Longrightarrow$ (iv) $R_4 I_4 = R_5 I_5$
- (i) in (iv) einsetzen: $I_1 = R_5 I_5 / R_4$.
  (ii) in (iii) einsetzen: $I_1 = R_2 I_5 / R_1$.
- Gleichsetzen: $R_5 I_5 / R_4 = R_2 I_5 / R_1 \Longrightarrow R_1 R_5 = R_2 R_4$.
- $R_1 R_5 = R_2 R_4$ ist notwendige Bedingung für $I_3 = 0$. Beachte, dass alle $R_i > 0$ sein müssen.

Diese Wheatstonebrücke wird bei der Messung eines unbekannten Widerstands (z. B.) R_1 verwendet. Hinter R_3 wird ein Strommessgerät geschaltet und die Widerstände R_2, R_4, R_5 so aufeinander abgestimmt, dass kein Stromfluss (d. h. $I_3 = 0$) mehr messbar ist. Aus $R_2 R_4 = R_1 R_5$ lässt sich dann der unbekannte Widerstand bestimmen.