

Numerik für Informatiker - Übungsblatt 2.2

Aufgabe 5:

Für die Koeffizienten der Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_3 & 0 & & \vdots \\ 0 & c_2 & a_3 & b_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

gelte

$$|a_1| > |c_1|, \quad |a_n| > |b_n|, \quad |a_i| \geq |b_i| + |c_i|, \quad c_i \neq 0, \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n-1.$$

(a) Zeigen Sie, dass für A eine Dreieckszerlegung der Form

$$A = LR = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ \gamma_1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & \gamma_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & b_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b_n \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

existiert. Geben Sie Rekursionsformeln zur Berechnung der α_i und γ_i an und zeigen Sie ihre Wohldefiniertheit, d.h. es gilt $|\alpha_i| > 0$.

(b) Geben Sie Rekursionsformeln für die Lösung des Systems $Ax = d$ an, indem Sie die LR -Zerlegung aus Teil (a) nutzen und bestimmen Sie die Anzahl der Rechenoperationen.