Aufgabe 17= Aufgabe 5

Für die Koeffizienten der Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_3 & 0 & & \vdots \\ 0 & c_2 & a_3 & b_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

gelte

$$|a_1| > |c_1|, \quad |a_n| > |b_n|, \quad |a_i| \geq |b_i| + |c_i|, \quad c_i \neq 0, \quad \text{für } i = 2, 3, \ldots, n-1.$$

(a) Zeigen Sie, dass für A eine Dreieckszerlegung der Form

$$A = LR = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \gamma_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & b_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b_n \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

existiert. Geben Sie Rekursionsformeln zur Berechnung der α_i und γ_i an und zeigen Sie ihre Wohldefiniertheit, d.h. es gilt $|\alpha_i| > 0$.

(b) Geben Sie Rekursionsformeln für die Lösung des Systems $Ax = d$ an, indem Sie die LR-Zerlegung aus Teil (a) nutzen.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Rechenoperationen.

Hinweis: Zeigen Sie bei Teilaufgabe (a) simultan, dass $|\alpha_i| > 0$ und $|\frac{c_i}{\alpha_i}| \leq 1$ gilt.

Lösung:

(a) Wir führen einen Koeffizientenvergleich durch:

$$\begin{aligned} A \quad &= \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_3 & 0 & & \vdots \\ 0 & c_2 & a_3 & b_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \gamma_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & b_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b_n \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1\gamma_1 & \gamma_1 b_2 + \alpha_2 & b_3 & 0 & & \vdots \\ 0 & \alpha_2\gamma_2 & \gamma_2 b_3 + \alpha_3 & b_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{n-2}\gamma_{n-2} & \gamma_{n-2}b_{n-1} + \alpha_{n-1} & b_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{n-1}\gamma_{n-1} & \gamma_{n-1}b_n + \alpha_n \end{pmatrix} = L \cdot R \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1, \\ \gamma_i \alpha_i &= c_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ \gamma_{i-1} b_i + \alpha_i &= a_i, \quad i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Umformen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1, \\ \gamma_1 &= \frac{c_1}{\alpha_1} = \frac{c_1}{a_1}, \\ \alpha_i &= a_i - \gamma_{i-1} b_i, \quad i = 2, \ldots, n, \\ \gamma_i &= \frac{c_i}{\alpha_i}, \quad i = 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist $|\alpha_i| > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Per Induktion zeigen wir $|\alpha_i| > 0$ und $|c_i/\alpha_i| \leq 1$ für $i = 1, \ldots, n$.

Für $i = 1$ ergibt sich $|\alpha_1| = |a_1| > |c_1| \geq 0$ und somit $|\alpha_1| > 0$ und $|c_1/\alpha_1| \leq 1$.

Es gelte nun $|\alpha_i| > 0$ und $|c_i/\alpha_i| < 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\alpha_{i+1}| &= |a_{i+1} - \gamma_i b_{i+1}| \\ &\geq |a_{i+1}| - |\gamma_i| \cdot |b_{i+1}| \\ &= |a_{i+1}| - \underbrace{\left|\frac{c_i}{\alpha_i}\right|}_{\leq 1, IV} \cdot |b_{i+1}| \\ &\geq |a_{i+1}| - |b_{i+1}| \\ &\overset{|a_{i+1}| \geq |b_{i+1}| + |c_{i+1}|}{\geq} |c_{i+1}| > 0. \end{aligned}$$

Und somit $|\alpha_{i+1}| > 0$ und $|c_{i+1}/\alpha_{i+1}| \leq 1$.

(b) $Ax = d$ wird mittels Vorwärts-Rückwärtssubstitution gelöst: Löse erst $Ly = d$ und anschließend $Rx = y$.

(i) $Ly = d$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \gamma_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

In Komponenten folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= d_1, \\ y_{i+1} &= d_{i+1} - \gamma_i y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

(i) $Rx = y$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & b_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & b_n \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

In Komponenten folgt

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{y_n}{\alpha_n}, \\ x_{i-1} &= \frac{y_{i-1} - b_i x_i}{\alpha_{i-1}}, \quad i = n, \ldots, 2. \end{aligned}$$

(c) Aus den Rekursionsformeln ergeben sich je $n-1$ Divisionen, Multiplikationen und Subtraktionen. $Ly = d$ liefert je $n-1$ Multiplikationen und Subtraktionen. $Rx = y$ liefert je $n-1$ Multiplikationen und Subtraktionen und n Divisionen.

Damit ergibt sich $3(n-1) + 2(n-1) + 2(n-1) + n = 8n - 7$ Rechenoperationen und somit $\mathcal{O}(n)$.