TUGAS AKHIR

SEPARABILITAS PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM GEOMETRI KERR-NEWMAN MENGGUNAKAN FORMALISME NEWMAN-PENROSE

Stevanus Setiawan

NPM: 2015720010

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2019

FINAL PROJECT

SEPARABILITY OF THE KLEIN-GORDON EQUATION ON THE KERR-NEWMAN GEOMETRY USING NEWMAN-PENROSE FORMALISM

Stevanus Setiawan

NPM: 2015720010

DEPARTMENT OF PHYSICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2019

LEMBAR PENGESAHAN

SEPARABILITAS PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM GEOMETRI KERR-NEWMAN MENGGUNAKAN FORMALISME NEWMAN-PENROSE

Stevanus Setiawan

NPM: 2015720010

Bandung, 15 Juli 2019

Menyetujui,

Pembimbing utama

Haryanto Siahaan, Ph.D.

Ketua Tim Penguji	Anggota Tim Penguji
Paulus Cahyono Tjiang, Ph.D.	**Reinard Primulando, Ph.D.**

Mengetahui,

Ketua Program Studi

Philips Nicolas Gunawidjaja, Ph.D.

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa tugas akhir dengan judul:

SEPARABILITAS PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM GEOMETRI KERR-NEWMAN MENGGUNAKAN FORMALISME NEWMAN-PENROSE

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 15 Juli 2019

Meterai
Rp. 6000

Stevanus Setiawan
NPM: 2015720010

ABSTRAK

Formalisme Newman-Penrose merupakan sekumpulan notasi yang dimaksudkan untuk memperlakukan relativitas umum dalam notasi spinor. Dalam tugas akhir ini, saya menurunkan persamaan radial dan angular serupa Teukolsky untuk geometri Kerr-Newman menggunakan formalisme Newman-Penrose. Metrik Kerr-Newman menggambarkan massa yang berputar, bermuatan, dan solusi dari persamaan Einstein-Maxwell. Dalam pekerjaan ini, saya menggunakan metode separasi variabel untuk menunjukkan persamaan Klein-Gordon dapat diseparasi dalam geometri Kerr-Newman dengan formalisme Newman-Penrose. Upaya untuk menelaah persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi dengan formalisme Newman-Penrose juga diberikan.

Kata-kata kunci: Formalisme Newman-Penrose, Kerr-Newman, Persamaan Teukolsky

ABSTRACT

The Newman-Penrose formalism is a set of notations collected to treat general relativity in spinor notation. In this final project, I obtain the radial and angular parts of Teukolsky-like equation for Kerr-Newman geometry using the Newman-Penrose formalism. The Kerr-Newman metric describes a very special rotating, charged mass, and solution of the Einstein-Maxwell equations. In this work, I employ the separation of variables method to show that the Klein-Gordon equation can be separated in Kerr-Newman geometry by using the Newman-Penrose formalism. Effort to study the Klein-Gordon equation in accelerating Kerr-Newman geometry by using the Newman-Penrose formalism is also given.

Keywords: Newman-Penrose Formalism, Kerr-Newman, Teukolsky's Equation

To my mother.

If you are receptive and humble,
mathematics will lead you by the hand.
(Paul Dirac)

KATA PENGANTAR

Ketertarikan penulis dengan fisika teori muncul, saat penulis secara tidak sengaja menonton sebuah video yang berjudul *Michio Kaku: Is God A Mathematician?* lewat aplikasi *Youtube*. Dalam video itu, Michio Kaku menjelaskan banyak hal dari teori gravitasi, *supersymmetry*, hingga *string theory*. Singkatnya, penulis merasa tertantang secara intelektual waktu itu. Tetapi masalahnya penulis memiliki keterbatasan pengetahuan, terutama bahasa matematika yang digunakan dalam fisika teori. Untungnya, penulis memiliki kesempatan untuk berbicara dan bertanya banyak hal tentang fisika teori dengan banyak fisikawan teori melalui media sosial dan *e-mail*. Salah satunya adalah Bapak Haryanto Siahaan, Ph.D. yang sekarang menjadi pembimbing utama pada tugas akhir ini. Penulis sendiri sadar bahwa penulis tidak dapat melakukannya sendirian, dan oleh karena itu penulis ingin berterimakasih kepada:

1. Mama dan Papa atas kesabarannya, kasih sayangnya, pengorbanannya, uangnya, waktunya, tenaganya, dan segala yang telah diberikan ke penulis. Penulis tidak akan pernah mampu membalasnya. Penulis mohon maaf atas kesalahan yang telah penulis lakukan.

2. Bapak Haryanto Siahaan, Ph.D. selaku pembimbing I yang telah meluangkan banyak waktu untuk penulis, dan telah bersedia menjawab banyak pertanyaan dari penulis. Beliaulah orang pertama yang memperkenalkan keindahan relativitas umum kepada penulis, serta menularkan kecintaannya terhadap fisika teori kepada penulis. Nasihat-nasihat beliau tidak akan pernah penulis lupakan.

3. Bapak Paulus Cahyono Tjiang, Ph.D. selaku penguji I dalam sidang skripsi atas kritik, saran, dan nasihat-nasihatnya selama ini.

4. Bapak Reinard Primulando, Ph.D. selaku penguji II dalam sidang skripsi atas kritik, saran, dan diskusi-diskusi berharganya.

5. Para dosen fisika, Bapak Aloysius Rusli, Ph.D., Bapak Philips Nicolas Gunawidjaja, Ph.D., Bapak Janto Vincent Sulungbudi, S.Si., Ibu Flaviana, M.T., Ibu Risti Suryantari, M.Sc., Ibu Elok Fidiani, M.Sc., dan Bapak Kian Ming, M.Si. atas ilmu, waktu, dan kesabaran yang telah diberikan kepada penulis.

6. Kakek, nenek, dan seluruh keluarga besar dari keluarga bapak dan ibu, atas dukungan moril, dan materi yang telah diberikan.

7. Teman-teman angkatan 2015, Octhree Dina Margaretha Sinaga, Julia Ferenikha siwi, Clara Nisa Fanegi, Dini Widiana, Nadya Astrid, Aditya Naufal, Dirga Febrian, Rayza Theo Adisaputra, Petrus Kristianto Andi Nugroho, Darren Kikyanto, Vega Fajar, Steven Wijaya, serta teman-teman angkatan 2011, 2012, 2013, 2014, dan adik-adik angkatan 2016, 2017, dan 2018 atas pertemanan yang telah kalian berikan selama ini.

8. Teman-teman diskusi fisika teori Bernard, Michael, Arifin, Julian, dan Delvydo atas diskusi yang membangun selama ini.

9. Putri Lestari selaku Ketua Laboran Fisika Dasar dan para penghuni Laboran Fisika Dasar yang telah menemani dan meminjamkan Laboratorium Fisika Dasar selama penulis mengerjakan tugas akhir ini.

10. Bapak dan Ibu petugas Tata Usaha FTIS dan para Pekarya atas bantuan dan pertolongan dalam hal administrasi.

11. Albert Camus, Ernest Hemingway, dan Jack Kerouac atas novel-novelnya yang telah mempengaruhi pemikiran penulis.

Tentunya masih ada banyak pihak lain yang membantu penulis dalam penyelesaian tugas akhir ini dan penulis tidak dapat menyebutkan mereka satu per satu. Namun dimanapun mereka berada, penulis berterima kasih.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu penulis mengharapkan adanya kritik dan saran demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Bandung, Juli 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

Pada tahun 1915, untuk pertama kalinya Albert Einstein mempublikasikan persamaan medan gravitasinya yang dituliskan

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

dengan $R_{\mu\nu}$ adalah tensor Ricci, $g_{\mu\nu}$ adalah tensor metrik, R adalah skalar Ricci, $T_{\mu\nu}$ adalah tensor energi-momentum, G adalah konstanta gravitasi, dan c adalah kecepatan cahaya. Persamaan medan gravitasi ini menunjukkan bahwa setiap benda bermassa mengakibatkan ruang-waktu di sekitarnya melengkung. Persamaan medan gravitasi Einstein umumnya disebut persamaan medan Einstein. Kurang dari satu tahun setelah Einstein mempublikasikan persamaannya, seorang astronom Jerman bernama Karl Schwarzschild menjadi orang pertama yang memecahkan persamaan medan Einstein secara eksak. Metrik yang didapatkan oleh Schwarzschild, atau biasa dikenal dengan metrik Schwarzschild yaitu

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right).$$

Metrik ini merupakan solusi ruang-waktu yang disebabkan oleh massa simetri bola yang bersifat statik[1]. Pada tahun 1957, John Wheeler dan Tullio Regge memulai studi pada gangguan lubang hitam (*black hole perturbations*) [1]. Tujuan mereka kala itu ialah membuktikan metrik Schwarzschild dapat menggambarkan solusi stabil terhadap gangguan linier. Metrik Schwarzschild memiliki simetris bola dan tidak bergantung pada waktu, yang mengizinkan gangguan tersebut dapat diuraikan menjadi *spherical harmonics* dan *Fourier modes*. Pada awal tahun 1970, pekerjaan ini pun dilanjutkan kembali oleh Vishveshwara [2] dan Zerilli [3, 4]. Mereka dapat membuktikan bahwa stabilitas dapat diselesaikan, dan keberhasilan mereka untuk kasus Schwarzschild membuat perhatian beralih kepada kasus Kerr [5]. Brandon Carter pun menemukan separabilitas dari persamaan gelombang skalar dalam geometri Kerr [6]. Setelah itu, persamaan Maxwell dalam geometri Kerr dipelajari oleh Fackerell dan Ipser [7]. Mereka mempelajarinya dengan menggunakan formalisme Newman-Penrose, terinspirasi dari pekerjaan Price dalam gangguan Schwarzschild. Dimana Price menuliskan kembali persamaan Regge-Wheeler dengan menggunakan formalisme Newman-Penrose yang membuat pekerjaannya cukup sederhana [8]. Kemudian, pada tahun 1972 seorang astrofisikawan teori bernama Saul Teukolsky telah berhasil mengembalikan minat para fisikawan dan matematikawan dalam separasi variabel. Teukolsky menunjukkan dengan menggunakan formalisme Newman-Penrose (menggunakan *Kinnersley tetrad*) dalam gangguan gelombang skalar, elektromagnetik, dan gravitasi relatif mudah dalam geometri Kerr dan memiliki sifat yang dapat diseparasi [9].

[1] Istilah statik dimaksudkan bahwa tensor metriknya tidaklah bergantung waktu.

1.1 Latar Belakang Masalah

Teukolsky telah menunjukkan dengan menggunakan formalisme Newman-Penrose dalam gangguan gelombang skalar, elektromagnetik, dan gravitasi di geometri Kerr relatif mudah dan dapat diseparasi [9]. Sedangkan untuk tugas akhir ini, penulis akan menunjukkan separabilitas persamaan Klein-Gordon di geometri Kerr-Newman dengan menggunakan formalisme Newman-Penrose. Seperti yang kita tahu, geometri Kerr-Newman bukanlah solusi vakum Einstein, melainkan solusi persamaan Einstein-Maxwell. Separasi variabel pada persamaan Klein-Gordon di geometri Kerr-Newman tanpa menggunakan formalisme Newman-Penrose dapat ditemukan di referensi [10]. Salah satu motivasi mengapa formalisme Newman-Penrose dipelajari dan digunakan adalah mengurangi jumlah persamaan yang akan dituliskan secara eksplisit, yang sangat membantu dalam pembahasan ruang-waktu yang rumit seperti Kerr-Newman terakselerasi. Persamaan akan dituliskan tanpa menggunakan indeks dan konvensi penjumlahan[2]. Dalam tugas akhir ini juga, penulis menggunakan *Carter tetrad* untuk menggambarkan tensor metrik Kerr-Newman dan tensor metrik Kerr-Newman terakselerasi.

1.2 Tujuan

Penulisan pada tugas akhir ini bertujuan untuk menyampaikan kembali formulasi Lagrange pada ruang-waktu melengkung, geometri Kerr, formalisme Newman-Penrose, persamaan Klein-Gordon dan Maxwell dalam formalisme Newman-Penrose, menyeparasi bagian angular dan radial dalam persamaan Klein-Gordon dengan *ansatz* tertentu untuk medan skalar yang menggunakan formalisme Newman-Penrose, dan menunjukkan persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi.

1.3 Batasan masalah

Pembatasan yang dilakukan oleh tugas ini yaitu:

1. Persamaan Klein-Gordon yang digunakan adalah persamaan Klein-Gordon nirmassa dengan adanya interaksi elektromagnetik dalam ruang-waktu melengkung.
2. Persamaan Maxwell yang digunakan adalah persamaan Maxwell vakum dalam ruang-waktu melengkung.

1.4 Konvensi

Perhitungan di dalam tugas akhir ini menggunakan konvensi unit $G = c = \hbar = 1$.

1.5 Metodologi

Sebagian besar penelitian pada tugas akhir ini merupakan tinjauan pustaka atau pembahasan jurnal. Formulasi Lagrange pada ruang-waktu melengkung, formalisme Newman-Penrose [11, 12, 13], konstruksi formalisme Newman-Penrose pada geometri Kerr dan persamaan Maxwell, dan memperlihatkan separabilitas persamaan Maxwell dalam geometri Kerr merupakan tinjauan ulang terhadap teori dari buku [14]. Sedangkan untuk persamaan Klein-Gordon dalam formalisme Newman-Penrose telah diperlihatkan di referensi [15]. Penulis akan mengadopsi metode dalam memperlihatkan separabilitas persamaan Maxwell dalam geometri Kerr ke persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman. Tugas akhir ini diakhiri dengan persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi yang merupakan komponen orisinal dalam tugas akhir ini.

[2] Persamaan akan bergantung oleh *spin coefficients*, dan *spin coefficients* akan dijelaskan lebih jauh di 3.2.

1.6 Sistematika pembahasan

Sistem penulisan yang dilakukan yaitu:

1. Bab 1 Pendahuluan, berisikan latar belakang masalah, metode penelitian, tujuan penulisan, batasan masalah, dan sistematika penulisan dari tugas akhir ini.
2. Bab 2 Formulasi Lagrange Pada Ruang-waktu Melengkung, berisikan teori medan skalar nirmassa, dan teori medan elektromagnetik vakum.
3. Bab 3 Konstruksi Formalisme Newman-Penrose Pada Geometri Kerr dan Persamaan Maxwell, berisikan geometri Kerr, formalisme Newman-Penrose, konstruksi formalisme Newman-Penrose dalam geometri Kerr, dan konstruksi formalisme Newman-Penrose pada persamaan Maxwell.
4. Bab 4 Separabilitas Persamaan Maxwell Dalam Geometri Kerr, berisikan persamaan Maxwell dalam geometri Kerr, reduksi pada persamaan Maxwell, dan separabilitas persamaan Maxwell.
5. Bab 5 Separabilitas Persamaan Klein-Gordon Dalam Geometri Kerr-Newman, berisikan geometri Kerr-Newman, konstruksi formalisme Newman-Penrose dalam geometri Kerr-Newman, konstruksi persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman, dan separabilitas persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman.
6. Bab 6 Persamaan Klein-Gordon Dalam Geometri Kerr-Newman Terakselerasi, berisikan geometri Kerr-Newman terakselerasi, konstruksi formalisme Newman-Penrose dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi, dan persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi.
7. Bab 7 Kesimpulan, berisi tentang kesimpulan pada tugas akhir ini.

BAB 2

FORMULASI LAGRANGE PADA RUANG-WAKTU MELENGKUNG

Aksi merupakan kuantitas abstrak yang dapat menggambarkan dinamika sistem. Dari suatu aksi akan didapatkan persamaan gerak yang menggambarkan dinamika sebuah medan yang didapat dari prinsip aksi terkecil. Dari aksi, kita juga dapat mengeksplorasi simetri dalam sistem. Pada bab ini akan ditunjukkan formulasi Lagrange pada ruang-waktu melengkung.

2.1 Teori medan skalar nirmassa

Diberikannya densitas Lagrangian untuk medan skalar nirmassa yaitu

$$\mathcal{L}\left(\psi.\nabla_{\mu}\psi, g^{\mu\nu}\right) \equiv L\sqrt{-g} = \frac{-1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\psi\nabla_{\nu}\psi, \tag{2.1}$$

dengan aksi

$$S = \int\limits_{V} L\left(\psi, \nabla_{\mu}\psi, g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}d^4x. \tag{2.2}$$

Terapkan prinsip aksi minimum, yaitu

$$\begin{aligned}\delta S &= \int\limits_{V}\left(\delta\psi\frac{\delta L}{\delta\psi} + \delta\left(\nabla_{\mu}\psi\right)\frac{\delta L}{\delta\left(\nabla_{\mu}\psi\right)}\right)\sqrt{-g}d^4x \\ &= \int\limits_{V}\nabla_{\mu}\left(\delta\psi\frac{\delta L}{\delta\nabla_{\mu}\psi}\right)\sqrt{-g}d^4x + \int\limits_{V}\delta\psi\left(\frac{\delta L}{\delta\psi} - \nabla_{\mu}\left(\frac{\delta L}{\delta\nabla_{\mu}\psi}\right)\right)\sqrt{-g}d^4x \\ &= \oint\limits_{S} n_{\mu}\left(\delta\psi\frac{\delta L}{\delta\nabla_{\mu}\psi}\right)\sqrt{|h|}d^3x + \int\limits_{V}\delta\psi\left(\frac{\delta L}{\delta\psi} - \nabla_{\mu}\left(\frac{\delta L}{\delta\nabla_{\mu}\psi}\right)\right)\sqrt{-g}d^4x = 0,\end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan h adalah determinan dari *induced metric* dan g adalah determinan dari tensor metrik. Kaitan dari *induced metric* dengan tensor metrik yaitu

$$h_{\mu v} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{\nu}}, \tag{2.4}$$

dengan x^{μ} adalah koordinat ruang-waktu, dan y^{μ} adalah koordinat *hypersurface* [16]. Dari persamaan (2.3) didapatkan persamaan Euler-Lagrange yang biasa dituliskan

$$\frac{\delta L}{\delta\psi} - \nabla_{\mu}\left(\frac{\delta L}{\delta\nabla_{\mu}\psi}\right) = 0. \tag{2.5}$$

Terapkan persamaan (2.5) untuk Lagrangian Klein-Gordon, maka didapat

$$\begin{aligned}&\frac{\delta L_{KG}}{\delta\psi}-\nabla_\mu\left(\frac{\delta L_{KG}}{\delta\nabla_\mu\psi}\right)=0\\&\nabla_\mu(g^{\mu\nu}\nabla_\nu\psi)=0\\&\nabla^\mu\nabla_\mu\psi=0.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) adalah persamaan Klein-Gordon di dalam ruang-waktu yang melengkung. Persamaaan Klein-Gordon menggambarkan persamaan gelombang untuk sebuah partikel yang memiliki spin-0, atau seringkali disebut sebagai partikel skalar. Sedangkan untuk persamaan Klein-Gordon dengan interaksi elektromagnetik bisa didapatkan dengan melakukan *minimal coupling* [17]:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu&\to\nabla_\mu+iCA_\mu,\\\nabla^\mu&\to\nabla^\mu+iCA^\mu.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Substitusikan (2.7) ke persamaan (2.6) menghasilkan

$$\left[(\nabla^\mu+iCA^\mu)\left(\nabla_\mu+iCA_\mu\right)\right]\psi=0\tag{2.8}$$

dengan A_μ adalah vektor potensial yang terkait dengan medan elektromagnetik, C adalah muatan partikel, dan ψ adalah fungsi gelombang medan skalar yang terkait.

2.2 Teori medan elektromagnetik vakum

Densitas Lagrangian Maxwell bebas yaitu

$$L_M=\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},\tag{2.9}$$

dengan $F_{\mu\nu}$ dikenal sebagai tensor elektromagnetik. Dalam ruang-waktu melengkung $F_{\mu\nu}=\nabla_\mu A_\nu-\nabla_\nu A_\mu$, dan dapat dituliskan

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&E_x&E_y&E_z\\-E_x&0&-B_z&B_y\\-E_y&B_z&0&-B_x\\-E_z&-B_y&B_x&0\end{pmatrix}.\tag{2.10}$$

Pada tensor (2.10) memiliki medan spin-1 yaitu A^μ. Dari persamaan (2.5) dan (2.9) menghasilkan

$$0=\frac{\delta L_M}{\delta A_\mu}-\nabla_c\left(\frac{\delta L_M}{\delta\nabla_\nu A_\mu}\right).\tag{2.11}$$

Masukkan persamaan (2.9) ke (2.11) menghasilkan

$$\begin{aligned}&\nabla_\nu\left(\frac{\delta L_M}{\delta\nabla_\nu A_\mu}\right)=\frac{1}{4}\nabla_\nu\left(\frac{\delta F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}{\delta\nabla_\nu A_\mu}\right)\\&=\frac{2}{4}\nabla_\nu F^{\alpha\beta}\left(\frac{\delta F_{\alpha\beta}}{\delta\nabla_\nu A_\mu}\right)\\&=\frac{1}{2}\nabla_\nu F^{\alpha\beta}\left(\frac{\delta\nabla_\alpha A_\beta}{\delta\nabla_\nu A_\mu}-\frac{\delta\nabla_\beta A_\alpha}{\delta\nabla_\nu A_\mu}\right)=\frac{1}{2}\nabla_\nu F^{\alpha\beta}\left(\delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta-\delta^\nu_\beta\delta^\mu_\alpha\right)\\&=\nabla_\nu F^{\nu\mu},\end{aligned}\tag{2.12}$$

dengan $\frac{\delta L_M}{\delta A_\mu} = 0$, maka dapat dituliskan

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.13}$$

dengan $A^\mu = \left(\phi, \vec{A}\right)$ adalah vektor potensial. Selain persamaan (2.13), medan A^μ juga harus memenuhi

$$\nabla_\alpha F_{\beta\chi} + \nabla_\beta F_{\chi\alpha} + \nabla_\chi F_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.14}$$

yang dikenal sebagai identitas Bianchi. Persamaan (2.13), dan (2.14) adalah persamaan Maxwell dalam vakum.

BAB 3

KONSTRUKSI FORMALISME NEWMAN-PENROSE PADA GEOMETRI KERR DAN PERSAMAAN MAXWELL

Pada bab ini, akan disampaikan kembali geometri Kerr dan formalisme Newman-Penrose secara singkat. Setelah itu, akan dilanjutkan dengan menerapkan formalisme Newman-Penrose yang telah ditunjukkan. Dari bagaimana membangun formalisme Newman-Penrose dalam geometri Kerr, hingga menunjukkan bentuk dari persamaan Maxwell dalam formalisme Newman-Penrose. Persamaan Maxwell dalam ruang-waktu melengkung telah disampaikan di bab 2.

3.1 Geometri Kerr

Pada tahun 1963, di kala itu seorang matematikawan Selandia Baru bernama Roy Kerr menjadi orang pertama yang menyelesaikan persamaan Einstein vakum terkait ruang-waktu yang berisi sebuah massa yang berputar. Geometri Kerr menggambarkan geometri ruang-waktu vakum di luar massa yang berputar, dan tidak bermuatan. Metrik Kerr dalam koordinat Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) dituliskan sebagai berikut [14]

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{4aMr\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi - \left(\frac{2mra^2\sin^2\theta}{\rho^2} + r^2 + a^2\right)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 - \rho^2\mathrm{d}\theta^2, \tag{3.1}$$

dengan $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ dan $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$. Koordinat Boyer-Lindquist sangat berguna untuk menginvestigasi properti pada solusi Kerr. Pada metrik (3.1) sangatlah jelas terlihat bahwa solusinya bergantung dengan M, a, dan J. Dengan M adalah massa lubang hitam, a adalah parameter rotasi, dan $J = aM$ momentum sudut. Salah satu properti yang diberikan oleh koordinat Boyer-Lindquist saat memilih $a = 0$ maka kita mendapatkan metrik Schwarzschild. Komponen tensor metrik kovarian pada metrik (3.1) yaitu

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) & 0 & 0 & \frac{2Mra\sin^2\theta}{\rho^2} \\ 0 & -\frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ \frac{2Mra\sin^2\theta}{\rho^2} & 0 & 0 & -\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

inverse untuk matriks (3.2) yaitu

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta}\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & 0 & 0 & \frac{2Mra}{\rho^2\Delta} \\ 0 & -\frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{2Mra}{\rho^2\Delta} & 0 & 0 & -\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\rho^2\Delta\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

3.1.1 Simetri pada geometri Kerr

Sebuah tensor metrik $g_{\mu\nu}$ fungsi ruang-waktu dikatakan invarian terhadap transformasi koordinat $x \to x'$, ketika metrik yang tertransformasi $g'_{\mu\nu}$, sama dengan metrik originalnya [18]. Transformasi metrik dituliskan

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \tag{3.4}$$

atau ekuivalen dengan

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta}(x'). \tag{3.5}$$

Maka jikalau metrik itu invarian seharusnya dapat kita tulis

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(x'), \tag{3.6}$$

transformasi apa saja $x \to x'$ yang dapat memenuhi persamaan (3.6) dikatakan sebagai *isometry*. Pada kasus khusus yaitu transformasi koordinat *infinitesimal*:

$$x'^\mu \to x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x)$$

akibat dari transformasi koordinat *infinitesimal* dan $|\varepsilon| \ll 1$. Maka suku terkait orde pertama ε pada persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} g_{\mu\alpha} + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\alpha} g_{\rho\nu} + \xi^\mu \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x^\alpha} + \xi^\mu \left[\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\alpha}\right] \\ &= \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x^\alpha} - 2\xi^\mu \Gamma^\mu_{\rho\alpha} \\ &= \nabla_\rho \xi_\alpha + \nabla_\alpha \xi_\rho. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Agar persamaan (3.6) dipenuhi, maka

$$\nabla_\rho \xi_\alpha + \nabla_\alpha \xi_\rho = 0. \tag{3.8}$$

Persamaan (3.8) dikenal sebagai persamaan Killing. Untuk metrik Kerr, vektor Killing yang memenuhi yaitu

$$\xi^\mu_{(t)} = (1,0,0,0), \quad \xi^\mu_{(\phi)} = (0,0,0,1)\ . \tag{3.9}$$

3.2 Formalisme Newman-Penrose

Pada tahun 1960-an Ezra Newman dan Roger Penrose memperkenalkan sebuah formalisme yang berupaya untuk mempelajari sifat-sifat dari ruang-waktu di dekat *null infinity*[1]. Dengan menerapkan teknik ini, memungkinkan kita untuk mempelajari radiasi elektromagnetik yang berpropagasi sepanjang arah *null* [20]. Formalisme ini akan berperan besar pada pengerjaan tugas akhir ini, terutama bagian simbol Infeld-van der Waerden 3.2.4. Simbol yang akan berperan untuk mentransfer tensor ke spinor, atau sebaliknya.

[1]Kita dapat membayangkan bahwa kita bergerak menuju jarak yang tak terhingga, mengikuti sebuah lintasan berkas cahaya.[19]

3.2.1 Formalisme tetrad

Ketika menyelesaikan sebuah masalah dalam relativitas umum, umumnya digunakan sebuah basis pada *tangent space* yang telah disesuaikan dari koordinat (x^μ). Pada tahun belakangan ini, ditemukannya keuntungan ketika dipilihnya sebuah basis pada *tangent space* yang tidak bergantung pada koordinat tertentu. Basis yang dinamai basis tetrad[2], basis yang berada di setiap titik ruang-waktu adalah

$$\left\{e^{(k)}\right\} \equiv \left\{e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\right\}. \tag{3.10}$$

Didefinisikan sebuah basis (3.10)

$$e^{(k)} = e^{(k)}{}_\mu \mathrm{d}x^\mu, \tag{3.11}$$

indeks μ untuk *space-time indices* dan indeks (k) adalah indeks untuk *tangent space indices*[3]. Kita harus melihat $e^{(k)}{}_\mu$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ sebagai 4-vektor kovarian. Mereka dinamai *tetrad*, dan relasi inverse pada persamaan (3.11) adalah

$$\mathrm{d}x^\mu = e^\mu_{(k)} e^{(k)}, \tag{3.12}$$

dengan $e^\mu_{(k)}$ adalah inverse matrik untuk $e^{(k)}_\mu$

$$e^\mu_{(k)} e^{(k)}_\nu = \delta^\mu_\nu, \quad e^\mu_{(k)} e^{(i)}_\mu = \delta^{(i)}_{(k)}. \tag{3.13}$$

Sehubungan dengan basis yang disinggung, maka dapat diperluasnya sebuah kovektor A yang dapat dituliskan

$$A = A_\mu \mathrm{d}x^\mu = A_\mu e^\mu_{(k)} e^{(k)} = A_{(k)} e^{(k)}. \tag{3.14}$$

Maka komponen A yang sehubungan dengan basis $e^{(k)}$ adalah

$$A_{(k)} = A_\mu e^\mu_{(k)}. \tag{3.15}$$

Dengan demikian elemen garis menjadi

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu} e^\mu_{(i)} e^{(i)} e^\nu_{(j)} e^{(j)} = g_{(i)(j)} e^{(i)} e^{(j)}, \tag{3.16}$$

dengan $g_{(i)(j)}$ yang biasa dikenal sebagai *frame metric*. Ketika dipilihnya $g_{(i)(j)}$ sebagai metrik Minkowski maka

$$g_{(i)(j)} = \eta_{(i)(j)}, \tag{3.17}$$

artinya tetrad (3.10) akan memenuhi kondisi ortonormal[4], atau dengan kata lain setiap titik yang dipilih di *tangent space* ialah *Minkowski space*[5][21]

$$\begin{aligned} e^\mu_{(0)} e_{(0)\mu} = \eta_{(0)(0)} = 1, \quad e^\mu_{(2)} e_{(2)\mu} = \eta_{(2)(2)} = -1, \\ e^\mu_{(1)} e_{(1)\mu} = \eta_{(1)(1)} = -1, \quad e^\mu_{(3)} e_{(3)\mu} = \eta_{(3)(3)} = -1. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Persamaan (3.16) dapat ditulis kembali menjadi

$$g_{\mu\nu} = e^{(i)}_\mu e^{(j)}_\nu \eta_{(i)(j)}. \tag{3.19}$$

---

[2]Tetrad ialah empat himpunan vektor yang tidak bergantung linier satu sama lain dan memiliki basis yang tidak bergantung pada koordinat $\left\{e^{(k)}{}_\mu\right\}$. Tetapi untuk mengurangi hal teknis kita dapat merujuk $e^{(k)}{}_\mu$ sebagai tetrad.

[3]*Tangent space indices* seringkali disebut indeks tetrad.

[4]Basis ortonormal terletak di *tangent space*.

[5]Basis dalam *tangent space* sebuah basis ortonormal yang dapat dipilih secara lokal.

Contoh kasus pada metrik Schwarzschild:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right), \tag{3.20}$$

dengan tetrad (3.11) untuk daerah $r > 2m$ adalah

$$\begin{aligned} e^{(t)} &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t, \\ e^{(r)} &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r, \\ e^{(\theta)} &= r\mathrm{d}\theta, \\ e^{(\phi)} &= r\sin\theta\mathrm{d}\phi. \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.2.2 Spinor Levi-Civita

Diperkenalkan sebuah spinor yaitu ζ, dengan ζ^A hanyalah penulisan ζ yang telah dilabelkan dengan sebuah indeks abstrak[6] yaitu A [13]. Misalnya dipilih $o_A\ell^A = 1$, maka (o, ℓ) boleh dikatakan sebagai *spin basis.* Spinor dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\zeta = \zeta^0 o + \zeta^1 \ell. \tag{3.22}$$

Terlihat bahwa

$$o^A = (1,0), \quad \ell^A = (0,1).$$

Didefinisikannya sebuah *skew-scalar product* yang dinotasikan

$$[\zeta, \eta] = \varepsilon_{AB}\zeta^A\eta^B, \tag{3.23}$$

dan

$$[\eta, \zeta] = -\varepsilon_{AB}\eta^B\zeta^A \tag{3.24}$$

dengan ε_{AB} dikenal sebagai spinor Levi-Civita yang bersifat *skew-symmetrical*

$$\varepsilon_{AB} = -\varepsilon_{BA}. \tag{3.25}$$

Kita dapat melihat peran ε_{AB} seperti layaknya tensor metrik $g_{\mu\nu}$ pada teori standar untuk tensor

$$\zeta_B = \varepsilon_{AB}\zeta^A, \tag{3.26}$$

dan

$$\zeta^A = \varepsilon^{AB}\zeta_B. \tag{3.27}$$

Maka jikalau persamaan (3.23) dan (3.24) ingin ditulis ulang, dapat dituliskan

$$[\zeta, \eta] = \varepsilon_{AB}\zeta^A\eta^B = \zeta_B\eta^B \tag{3.28}$$

dan

$$[\eta, \zeta] = -\varepsilon_{AB}\eta^B\zeta^A = \zeta^A\eta_A. \tag{3.29}$$

Hubungan persamaan (3.28) dan (3.29) adalah

$$[\zeta, \eta] = \varepsilon_{AB}\zeta^A\eta^B = -[\eta, \zeta]. \tag{3.30}$$

[6]Indeks abstrak juga dapat disebut sebagai indeks spin.

3.2.3 Formalisme dyad

Spinor memiliki *dyad basis* yaitu $\varepsilon^A_{(A)}$ dan $\varepsilon^{A'}_{(A')}$ yang memenuhi kondisi ortonormal. Mereka memiliki peran yang sama seperti layaknya basis tetrad, tetapi bukan untuk tensor melainkan untuk spinor. Dimilikinya simbol khusus untuk dua basis spinor $\varepsilon^A_{(0)}$ dan $\varepsilon^A_{(1)}$. Kita menulisnya

$$\varepsilon^A_{(0)} = o^A, \quad \varepsilon^A_{(1)} = \ell^A, \tag{3.31}$$

yang juga memenuhi kondisi ortonormal. Dengan merujuk persamaan (3.23) dan (3.24) maka dapat dituliskannya kondisi ortonomal secara lengkap

$$\begin{aligned}
[o,\ell] &= \varepsilon_{AB} o^A \ell^B = o_A \ell^A = 1, \\
[\ell,o] &= -\varepsilon_{AB} \ell^B o^A = \ell_A o^A = -1, \\
[o,o] &= \varepsilon_{AB} o^A o^B = o_A o^A = 0, \\
[\ell,\ell] &= \varepsilon_{AB} \ell^A \ell^B = \ell_A \ell^A = 0.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Dari persamaan (3.32) dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{AB} &= o^A \ell^B - \ell^A o^B, \\
\varepsilon_{AB} &= o_A \ell_B - \ell_A o_B.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Persamaan (3.33) dapat ditunjukkan dengan lebih rinci yaitu

$$\varepsilon_{AB} \varepsilon^A_{(A)} \varepsilon^B_{(B)} = \varepsilon_{(A)(B)}, \tag{3.34}$$

dan

$$\varepsilon^{(A)(B)} \varepsilon^A_{(A)} \varepsilon^B_{(B)} = \varepsilon^A_{(0)} \varepsilon^B_{(1)} - \varepsilon^A_{(1)} \varepsilon^B_{(0)} = o^A \ell^B - \ell^A o^B = \varepsilon^{AB}. \tag{3.35}$$

Layaknya seperti pada formalisme tetrad, kita dapat memproyeksi spinor ξ^A ke *dyad basis*

$$\xi^{(A)} = \varepsilon^{(A)}_A \xi^A, \tag{3.36}$$

atau

$$\xi^A = \xi^{(A)} \varepsilon^A_{(A)} = \xi^{(0)} \varepsilon^A_{(0)} + \xi^{(1)} \varepsilon^A_{(1)} = \xi^{(0)} o^A + \xi^{(1)} \ell^A. \tag{3.37}$$

Maka dari persamaan (3.37) dapat dituliskan

$$\xi^{(0)} = -\ell_A \xi^A, \quad \xi^{(1)} = o_A \xi^A. \tag{3.38}$$

Basis spinor memiliki konjugat kompleks yang kita tuliskan indeksnya sebagai berikut

$$o^{A'} \quad \ell^{A'}$$

3.2.4 Simbol Infeld-van der Waerden

Fisikawan Polandia bernama Leopold Infeld dan matematikawan Belanda bernama B. L. Van der Waerden membangun sebuah simbol $\sigma^{(A)(A')}_{(\mu)}$. Simbol Infeld-van der Waerden tersebut dimaksudkan untuk mentransfer dari tensor ke spinor, berbentuk matriks Pauli. Indeks (μ) dimaksud untuk indeks tetrad, dan $(A)(A')$ indeks dyad[7]. Simbol Infeld-van der Waerden didefinisikan

$$\sigma^{(\mu)}_{(A)(B')} \equiv e^{(\mu)}_{\mu} \varepsilon^A_{(A)} \varepsilon^{B'}_{(B')}. \tag{3.39}$$

[7] (μ),(ν),(α),... adalah indeks tetrad, dan (A),(B),(A'),(B'),... adalah indeks dyad.

Pada definisi (3.39), indeks yang terkontraksi hanya μ dan AB', sedangkan untuk (μ) dan $(A)(B')$ tidak terkontraksi. Simbol Infeld-van der Waerden dapat direlasikan dengan tensor metrik yaitu

$$\sigma^{(A)(A')}_{(\mu)}\sigma^{(B)(B')}_{(\nu)}g^{(\mu)(\nu)} = \varepsilon^{(A)(B)}\varepsilon^{(A')(B')}. \tag{3.40}$$

Dituliskannya persamaan-persamaan yang dipenuhi oleh simbol Infeld-van der Waerden yaitu

$$\sigma^{(\mu)}_{(A)(B')}\sigma^{(\nu)(A)(B')} = g^{(\mu)(\nu)}, \tag{3.41}$$

atau

$$\sigma^{(\mu)}_{(A)(B')}\sigma^{(A)(B')}_{(\nu)} = \delta^{(\mu)}_{(\nu)}, \tag{3.42}$$

atau

$$T_{(A)(B')(C)(D')} = \sigma^{(\mu)}_{(A)(B')}\sigma^{(\nu)}_{(C)(D')}T_{(\mu)(\nu)}. \tag{3.43}$$

Persamaan (3.43) juga dapat dituliskan secara terbalik

$$\sigma^{(A)(B')}_{(\mu)}\sigma^{(C)(D')}_{(\nu)}T_{(A)(B')(C)(D')} = \sigma^{(A)(B')}_{(\mu)}\sigma^{(C)(D')}_{(\nu)}\sigma^{(\alpha)}_{(A)(B')}\sigma^{(\beta)}_{(C)(D')}T_{(\alpha)(\beta)} = \delta^{(\beta)}_{(\nu)}\delta^{(\alpha)}_{(\mu)}T_{(\alpha)(\beta)} = T_{(\mu)(\nu)}, \tag{3.44}$$

dengan $\sigma^{(A)(A')}_{(\mu)}$ adalah matriks Pauli[8] yang dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\sigma^{(0)}_{(A)(B')} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma^{(1)}_{(A)(B')} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma^{(2)}_{(A)(B')} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^{(3)}_{(A)(B')} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\sigma^{(A)(B')}_{(0)} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma^{(A)(B')}_{(1)} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma^{(A)(B')}_{(2)} &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^{(A)(B')}_{(3)} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Metrik Minkowski dapat dihubungkan dengan simbol Infeld-van der Waerden yang dituliskan sebagai berikut

$$\eta_{(\mu)(\nu)} = \sigma^{(A)(B)}_{(\mu)}\sigma^{(C)(D)}_{(\nu)}g_{(A)(B)(C)(D)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dari definisi (3.39) artinya kita dapat membuat setiap tensor atau vektor yang terkait dapat dikaitkan dengan spinor, dan berlaku sebaliknya. Maka kita dapat menulisnya sebagai berikut

$$\begin{aligned}
V^{(\mu)} &= \sigma^{(\mu)}_{(A)(A')}\xi^{(A)}\xi^{(A')} = e^{(\mu)}_{\mu}\varepsilon^{A}_{(A)}\varepsilon^{A'}_{(A')}\xi^{(A)}\xi^{(A')} \\
V^{\mu} &= \xi^{A}\xi^{A'}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Maka untuk mempermudah penulisan, dapat ditulis

$$\begin{aligned}
V^{\mu} &= \xi^{A}\xi^{A'}, \\
V_{\mu} &= \xi_{A}\xi_{A'}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Sedangkan untuk tensor metrik ialah

$$g_{\mu\nu} = \varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}, \tag{3.48}$$

$$g^{\mu\nu} = \varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'B'}, \tag{3.49}$$

[8] $\sigma^{(A)(A')}_{(\mu)}$ hanya berbentuk matriks pauli jika tetrad yang dipilih adalah tetrad ortonormal standar $(t^\mu, x^\mu, y^\mu, z^\mu)$ dengan $t^\mu t_\mu = 1, x^\mu x_\mu = y^\mu y_\mu = z^\mu z_\mu = -1$.

dan untuk delta Kronecker adalah

$$\delta^{\nu}_{\mu} = \varepsilon^{B}_{A}\varepsilon^{B'}_{A'}. \tag{3.50}$$

Indeks A,B,.. adalah indeks spin, sedangkan μ,ν... adalah indeks tensor.

3.2.5 *Null tetrad*

Roger Penrose dan Ezra T. Newman memperkenalkan *null tetrad*. Pendekatan ini sangatlah berguna untuk mempelajari sebuah medan nirmassa yang berpropagasi sepanjang arah *null*. Didefinisikan *null vector*, yang memiliki relasi dengan basis spinor. Dengan 4 *null vector*, 2 di antaranya yaitu 2 vektor rill dan 2 vektor kompleks yang saling berpasangan.

$$e^{\mu}_{(0)} \equiv o^{A}o^{A'} = l^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t^{\mu} + z^{\mu}\right), \tag{3.51}$$

dan

$$e^{\mu}_{(1)} \equiv \ell^{A}\ell^{A'} = n^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t^{\mu} - z^{\mu}\right), \tag{3.52}$$

dengan t^{μ} adalah vektor serupa-waktu (*time-like*) dengan $t^{\mu}t_{\mu} = 1$, z^{μ} adalah vektor serupa-ruang (*space-like*) dengan $z^{\mu}z_{\mu} = -1$, dan $o^{A'}$ adalah konjugat kompleks dari o^{A}. l^{μ} dan n^{μ} adalah *null vector*, maka haruslah memenuhi

$$l^{\mu}l_{\mu} = n^{\mu}n_{\mu} = 0, \tag{3.53}$$

dan memenuhi kondisi normalisasi

$$l^{\mu}n_{\mu} = 1. \tag{3.54}$$

Diperkenalkan bahwa x^{μ} dan y^{μ} adalah vektor serupa-ruang (*space-like*) dengan $x^{\mu}x_{\mu} = y^{\mu}y_{\mu} = -1$, dan dimilikinya sebuah *complex null vector* yang didefinisikan sebagai berikut

$$e^{\mu}_{(2)} \equiv o^{A}\ell^{A'} = m^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{\mu} - iy^{\mu}\right). \tag{3.55}$$

Bersama dengan vektor konjugatnya dari vektor (3.55) yaitu

$$e^{\mu}_{(3)} \equiv \ell^{A}o^{A'} = \bar{m}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{\mu} + iy^{\mu}\right). \tag{3.56}$$

Keduanya (3.55) dan (3.56) adalah *null vector*, maka haruslah memenuhi

$$\bar{m}^{\mu}\bar{m}_{\mu} = m^{\mu}m_{\mu} = 0, \tag{3.57}$$

dan memenuhi kondisi normalisasi

$$m^{\mu}\bar{m}_{\mu} = -1. \tag{3.58}$$

Jika memilih $\left\{e^{\mu}_{(0)}, e^{\mu}_{(1)}, e^{\mu}_{(2)}, e^{\mu}_{(3)}\right\} = \{l^{\mu}, n^{\mu}, m^{\mu}, \bar{m}^{\mu}\}$ maka dengan ini, didefinisikannya sebuah *frame metric* yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$g_{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.59}$$

Maka tensor metrik (3.19) dapat ditulis

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= (l_{\mu}n_{\nu} + l_{\nu}n_{\mu}) - (m_{\mu}\bar{m}_{\nu} + m_{\nu}\bar{m}_{\mu}), \\ g^{\mu\nu} &= (l^{\mu}n^{\nu} + l^{\mu}n^{\nu}) - (m^{\mu}\bar{m}^{\nu} + m^{\nu}\bar{m}^{\mu}). \end{aligned} \tag{3.60}$$

3.2.6 Turunan berarah dan *Ricci rotation coefficient*

Anggap kita memiliki sebuah medan skalar ϕ, maka turunan berarah dari ϕ pada arah $e_{(a)}$ dapat dituliskan

$$e_{(a)}\phi = e^{\nu}_{(a)} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \equiv \phi_{,(a)}. \tag{3.61}$$

Sekarang, anggap sebuah medan vektor $A = A^{(a)}e_{(a)} = A_{(a)}e^{(a)}$ dan melakukan turunan berarah dengan komponen yang dapat dituliskan dengan lengkap

$$\begin{aligned} e^{\mu}_{(b)} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} A_{(a)} &= e^{\mu}_{(b)} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(e^{\alpha}_{(a)} A_{\alpha} \right) \\ &= e^{\mu}_{(b)} \nabla_{\mu} \left(e^{\alpha}_{(a)} A_{\alpha} \right) \\ &= e^{\mu}_{(b)} \left(\nabla_{\mu} e^{\alpha}_{(a)} \right) A_{\alpha} + e^{\mu}_{(b)} e^{\alpha}_{(a)} \left(\nabla_{\mu} A_{\alpha} \right) \\ &= e^{\mu}_{(b)} \left(\nabla_{\mu} e^{\alpha}_{(a)} \right) e_{(c)\alpha} A^{(c)} + e^{\mu}_{(b)} \left(\nabla_{\mu} A_{\alpha} \right) e^{\alpha}_{(a)} \\ &= \gamma_{(c)(a)(b)} A^{(c)} + \nabla_{(b)} A_{(a)}, \end{aligned} \tag{3.62}$$

dengan

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = e^{\mu}_{(c)} \nabla_{\nu} e_{(a)\mu} e^{\nu}_{(b)} = e_{(c)} \nabla_{e_{(b)}} e_{(a)}. \tag{3.63}$$

$\gamma_{(c)(a)(b)}$ disebut *Ricci rotation coefficients*. Maka dapat dilihat dari persamaan (3.62) kita memiliki turunan kovarian

$$\begin{aligned} \nabla_{(b)} A_{(a)} &= \partial_{(b)} A_{(a)} - \gamma_{(c)(a)(b)} A^{(c)} \\ &= \partial_{(b)} A_{(a)} - \gamma^{(c)}{}_{(a)(b)} A_{(c)}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Boleh dikatakan bahwa *Ricci rotation coefficients* ialah koneksi affine[9] pada formalisme tetrad, dan γ memiliki sifat antisimetrik pada indeks pertama dan kedua[10]:

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = -\gamma_{(b)(a)(c)}. \tag{3.65}$$

Didefinisikannya sebuah simbol

$$\begin{aligned} \lambda_{(a)(b)(c)} &\equiv \partial_{\mu} e_{(b)\nu} \left[e_{(a)}{}^{\mu} e_{(c)}{}^{\nu} - e_{(a)}{}^{\nu} e_{(c)}{}^{\mu} \right] \\ &= \left(\partial_{\mu} e_{(b)\nu} \right) e_{(a)}{}^{\mu} e_{(c)}{}^{\nu} - \left(\partial_{\mu} e_{(b)\nu} \right) e_{(a)}{}^{\nu} e_{(c)}{}^{\mu} \\ &= \left(\partial_{\mu} e_{(b)\nu} \right) e_{(a)}{}^{\mu} e_{(c)}{}^{\nu} - \left(\partial_{\nu} e_{(b)\mu} \right) e_{(a)}{}^{\mu} e_{(c)}{}^{\nu} \\ &= \left[\partial_{\mu} e_{(b)\nu} - \partial_{\nu} e_{(b)\mu} \right] e_{(a)}{}^{\mu} e_{(c)}{}^{\nu}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Dalam ketiadaan sebuah torsi ($T^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} = 0$), persamaan (3.66) dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \lambda_{(a)(b)(c)} &= \left[\nabla_{\mu} e_{(b)\nu} - \nabla_{\nu} e_{(b)\mu} \right] e_{(a)}{}^{\mu} e_{(c)}{}^{\nu} \\ &= e_{(a)}{}^{\mu} \left(\nabla_{\mu} e_{(b)\nu} \right) e_{(c)}{}^{\nu} - e_{(c)}{}^{\nu} \left(\nabla_{\nu} e_{(b)\mu} \right) e_{(a)}{}^{\mu} \\ &= \gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(c)(b)(a)}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Simbol (3.67) memiliki sifat antisimetrik pada indeks pertama dan ketiga

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = -\lambda_{(c)(b)(a)}. \tag{3.68}$$

[9]Koneksi affine lebih dikenal sebagai simbol Christoffel.

[10]Kondisi ini hanya berlaku untuk $\eta^{(a)(b)}$ yang konstan.

Maka dari hubungan persamaan (3.67), didapatkan

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2}\left[\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)}\right]. \tag{3.69}$$

Turunan berarah yang terasosiasi pada *null vector*

$$\begin{aligned} D &= \nabla_{00'} = o^A o^{A'} \nabla_{AA'} = l^\mu \partial_\mu, \\ \triangle &= \nabla_{11'} = \ell^A \ell^{A'} \nabla_{AA'} = n^\mu \partial_\mu, \\ \delta &= \nabla_{01'} = o^A \ell^{A'} \nabla_{AA'} = m^\mu \partial_\mu, \\ \delta^* &= \nabla_{10'} = \ell^A o^{A'} \nabla_{AA'} = \bar{m}^\mu \partial_\mu, \end{aligned} \tag{3.70}$$

oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= g_\mu^\nu \partial_\nu \\ &= \left(n_\mu l^\nu + 1_\mu n^\nu - \bar{m}_\mu m^\nu - m_\mu \bar{m}^\nu\right) \partial_\nu \\ &= n_\mu D + l_\mu \triangle - \bar{m}_\mu \delta - m_\mu \delta^*. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Pada persamaan (3.71) idenya ialah menggantikan ∂ dengan turunan berarah yang telah didefiniskan sebelumnya dengan *null tetrad*.

3.2.7 *Spin coefficients*

Dalam formalisme tetrad, koneksi affine dideskripsikan dengan *Ricci rotation coefficients*. Lantas dalam *null tetrad*, *Ricci rotation coefficients* dikenal dengan *spin coefficients*. Dimana setiap koefisien berbentuk seperti persamaan (3.63) atau dapat juga dikaitkan dengan basis spinor seperti

$$\alpha^A \nabla \beta_A, \tag{3.72}$$

dengan α dan β adalah (o, ℓ)[11] dan ∇ salah satu dari $D, \triangle, \delta, \delta^*$ [22]. Maka dituliskannya setiap *spin coefficients* yang merujuk pada literatur [13]:

$$\begin{aligned} \kappa = o^A D o_A = \gamma_{(2)(0)(0)} = m^\mu D l_\mu, &\quad \pi = \ell^A D \ell_A = \gamma_{(1)(3)(0)} = -\bar{m}^\mu D n_\mu, \\ \tilde{\rho} = o^A \delta^* o_A = \gamma_{(2)(0)(3)} = m^\mu \delta^* l_\mu, &\quad \lambda = \ell^A \delta^* \ell_A = \gamma_{(1)(3)(3)} = -\bar{m}^\mu \delta^* n_\mu, \\ \sigma = o^A \delta o_A = \gamma_{(2)(0)(2)} = m^\mu \delta l_\mu, &\quad \mu = \ell^A \delta \ell_A = \gamma_{(1)(3)(2)} = -\bar{m}^\mu \delta n_\mu, \\ \tau = o^A \triangle o_A = \gamma_{(2)(0)(1)} = m^\mu \triangle l_\mu, &\quad \nu = \ell^A \triangle \ell_A = \gamma_{(1)(3)(1)} = -\bar{m}^\mu \triangle n_\mu, \\ \varepsilon = o^A D \ell_A = \ell^A D o_A &= \frac{1}{2}\left(\gamma_{(1)(0)(0)} + \gamma_{(2)(3)(0)}\right) \\ = \frac{1}{2}\left(n^\mu D l_\mu - \bar{m}^\mu D m_\mu\right) &= -\frac{1}{2}\left(l^\mu D n_\mu - m^\mu D \bar{m}_\mu\right), \\ \alpha = o^A \delta^* \ell_A = \ell^A \delta^* o_A &= \frac{1}{2}\left(\gamma_{(1)(0)(3)} + \gamma_{(2)(3)(3)}\right) \\ = \frac{1}{2}\left(n^\mu \delta^* l_\mu - \bar{m}^\mu \delta^* m_\mu\right) &= -\frac{1}{2}\left(l^\mu \delta^* n_\mu - m^\mu \delta^* \bar{m}_\mu\right), \\ \beta = o^A \delta \ell_A = \ell^A \delta o_A &= \frac{1}{2}\left(\gamma_{(1)(0)(2)} + \gamma_{(2)(3)(2)}\right) \\ = \frac{1}{2}\left(n^\mu \delta l_\mu - \bar{m}^\mu \delta m_\mu\right) &= -\frac{1}{2}\left(l^\mu \delta n_\mu - m^\mu \delta \bar{m}_\mu\right), \\ \gamma = o^A \triangle \ell_A = \ell^A \triangle o_A &= \frac{1}{2}\left(\gamma_{(1)(0)(1)} + \gamma_{(2)(3)(1)}\right) \\ = \frac{1}{2}\left(n^\mu \triangle l_\mu - \bar{m}^\mu \triangle m_\mu\right) &= -\frac{1}{2}\left(l^\mu \triangle n_\mu - m^\mu \triangle \bar{m}_\mu\right). \end{aligned} \tag{3.73}$$

Dengan adanya persamaan (3.73), maka kita dapat mengoperasikan operator turunan $D, \triangle, \delta, \delta^*$

[11] Penulis tidak menulis secara eksplisit untuk konjugatnya.

dengan basis o^A, ℓ^A. Salah satu contohnya

$$\begin{aligned} &Do^A = \varepsilon^{AB} Do_B \\ &Do^A = \left(o^A \ell^B - \ell^A o^B\right) Do_B \\ &= o^A \ell^B Do_B - \ell^A o^B Do_B \\ &= \varepsilon o^A - \kappa \ell^A, \end{aligned} \tag{3.74}$$

terdapat delapan kombinasi untuk setiap basis spinor, dan empat operator turunan yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} Do^A = \varepsilon^{AB} Do_B &= \varepsilon o^A - \kappa \ell^A, & D\ell^A = \varepsilon^{AB} D\ell_B &= \pi o^A - \varepsilon \ell^A, \\ \triangle\, o^A = \varepsilon^{AB} \triangle\, o_B &= \gamma o^A - \tau \ell^A, & \triangle\, \ell^A = \varepsilon^{AB} \triangle\, \ell_B &= \nu o^A - \gamma \ell^A, \\ \delta o^A = \varepsilon^{AB} \delta o_B &= \beta o^A - \sigma \ell^A, & \delta \ell^A = \varepsilon^{AB} \delta \ell_B &= \mu o^A - \beta \ell^A, \\ \delta^* o^A = \varepsilon^{AB} \delta^* o_B &= \alpha o^A - \tilde{\rho} \ell^A, & \delta^* \ell^A = \varepsilon^{AB} \delta^* \ell_B &= \lambda o^A - \alpha \ell^A. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Persamaan (3.70) memiliki sebuah aturan komutasi yang berkaitan dengan *spin coefficients* yaitu

$$\begin{aligned} &[\triangle, D] = (\gamma + \gamma^*)\, D + (\varepsilon + \varepsilon^*) \triangle - (\tau^* + \pi)\, \delta - (\tau + \pi^*)\, \delta^*, \\ &[\delta, D] = (\alpha^* + \beta - \pi^*)\, D + \kappa \triangle - (\rho^* + \varepsilon - \varepsilon^*)\, \delta - \sigma \delta^*, \\ &[\delta, \triangle] = -\upsilon^* D + (\tau - \alpha^* - \beta) \triangle + (\mu - \gamma + \gamma^*)\, \delta + \lambda^* \delta^*, \\ &[\delta^*, \delta] = (\mu^* - \mu)\, D + (\tilde{\rho}^* - \tilde{\rho}) \triangle - (\alpha - \beta^*)\, \delta - (\beta - \alpha^*)\, \delta^*. \end{aligned} \tag{3.76}$$

3.3 Konstruksi formalisme Newman-Penrose dalam geometri Kerr

Dalam formalisme Newman-Penrose kita memilih *Kinnersley tetrad* yang dituliskan untuk koordinat Boyer-Lindquist. *Kinnersley null tetrad* dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{\Delta}(r^2 + a^2, \Delta, 0, a), \\ n^\mu &= \frac{1}{2\rho^2}(r^2 + a^2, -\Delta, 0, a), \\ m^\mu &= \frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}}(iasin\theta, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}), \end{aligned} \tag{3.77}$$

dan simbol λ yang tersisa terkait *null tetrad* (3.77) yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_{011} &= -\frac{\left[(r-m)\rho^2 - r\Delta\right]}{\rho^4}, & \lambda_{023} &= -\frac{2ia\cos\theta}{\rho^2}, \\ \lambda_{021} &= +\sqrt{2}\frac{iar\sin\theta}{\rho^2\bar{\rho}}, & \lambda_{213} &= -\frac{ia\Delta\cos\theta}{\rho^4}, \\ \lambda_{102} &= -\sqrt{2}\frac{a^2 cos\theta\sin\theta}{\rho^2\bar{\rho}}, & \lambda_{223} &= +\frac{(ia + r\cos\theta)\cos ec\theta}{\bar{\rho}^2\sqrt{2}}, \\ \lambda_{132} &= -\frac{\Delta}{2\rho^2\bar{\rho}}, & \lambda_{230} &= -\frac{1}{\bar{\bar{\rho}}}. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Spin coefficients didapat dari hubungan persamaan (3.78) dengan (3.69) yaitu

$$\begin{aligned} &\kappa = \varepsilon = \lambda = \sigma = \upsilon = 0, \\ &\tilde{\rho} = -\frac{1}{\bar{\rho}^*}, \quad \beta = \frac{\cot\theta}{2\bar{\rho}\sqrt{2}}, \quad \pi = \frac{ia\sin\theta}{(\bar{\rho}^*)^2\sqrt{2}}\ , \\ &\tau = -\frac{ia\sin\theta}{\rho^2\sqrt{2}}, \quad \mu = -\frac{\Delta}{2\rho^2\bar{\rho}^*}, \quad \gamma = \mu + \frac{r-M}{2\rho^2}, \quad \alpha = \pi - \beta^*. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Perhitungan untuk mendapatkan persamaan (3.79) terdapat di lampiran A[12].

[12]Perlu diketahui perhitungan pada lampiran A akan berupa sebuah kode maple yang $Q(r)$ sebagai Δ, $x = \cos\theta$, dan koordinat z adalah koordinat ϕ. Penulis mengubahnya semata-mata untuk mempermudah pengerjaan.

3.4 Konstruksi formalisme Newman-Penrose pada persamaan Maxwell

Pada tahun 1865, seorang fisikawan Skotlandia bernama James Clerk Maxwell menunjukkan sebuah ekspresi matematis dari fenomena elektromagnetik dengan elegan. Maxwell mampu menyusun cara untuk menyatukan listrik dan magnet yang hingga saat ini terus menginspirasi fisikawan pada penyatuan gaya lainnya. Persamaan Maxwell dalam vakum diekspresikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Dalam bahasan ini, kita akan mempelajari medan elektromagnetik yang memenuhi persamaan Maxwell dalam ruang-waktu melengkung. Perlu ditekankan, bahwa penulis akan menerapkan formalisme Newman-Penrose untuk menulis ulang persamaan Maxwell. Dimana persamaan Maxwell dalam bentuk tensor sudah dibahas di bab 2, dengan $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ adalah tensor konvarian bersifat *skew-symmetric* dan $A_\mu = (\phi, \vec{A})$. Simetri untuk tensor elektromagnetik yaitu

$$F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}, \tag{3.81}$$

dan tensor elektromagnetik yang setara dengan spinor adalah $F_{AA'BB'}$, dimana simetrinya adalah

$$F_{AA'BB'} = -F_{BB'AA'}, \tag{3.82}$$

dengan sedikit trik aljabar didapatkan

$$F_{AA'BB'} = \frac{1}{2}(F_{AA'BB'} - F_{BA'AB'}) + \frac{1}{2}(F_{BA'AB'} - F_{BB'AA'}). \tag{3.83}$$

Pada persamaan (3.83), dapat dilihat suku pertama bersifat *skew-symmetric* pada indeks A dan B. Sedangkan untuk suku kedua juga bersifat *skew-symmetric* pada indeks A' dan B'. Formula yang berguna untuk mengembangkan persamaan (3.83) adalah

$$2\chi_{\cdots[AB]} = \chi_{\cdots AB \cdots} - \chi_{\cdots BA \cdots} = \chi_{\cdots C}{}^{C}{}_{\cdots}\varepsilon_{AB}. \tag{3.84}$$

Contoh penerapan rumus (3.84) adalah

$$\begin{aligned} 2\xi_{[AB]} &= \xi_{AB} - \xi_{BA} = \xi^{C}_{C}\varepsilon_{AB} \\ 2S_{[AB]CD} &= S_{ABCD} - S_{BACD} = \varepsilon_{AB}S_{CDF}{}^{F}, \end{aligned}$$

dengan $\xi^{C}_{C} = \varepsilon^{CD}\xi_{CD}$. Maka dari persamaan (3.84) dan (3.83), kita memiliki

$$\begin{aligned} F_{AA'BB'} - F_{BA'AB'} &= \varepsilon_{AB}F_{A'B'C}{}^{C}, \\ F_{BA'AB'} - F_{BB'AA'} &= \varepsilon_{A'B'}F_{BAC'}{}^{C'}. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Dari kedua persamaan (3.85) dapat dituliskan

$$F_{AA'BB'} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{AB}F_{A'B'C}{}^{C} + \varepsilon_{A'B'}F_{BAC'}{}^{C'}\right]. \tag{3.86}$$

Kita definisikan sebuah spinor simetrik ϕ_{AB} yang setara terhadap tensor elektromagnetik

$$\phi_{AB} = \phi_{(AB)} = \frac{1}{2} F_{ABC'}{}^{C'} = F_{AA'BB'} \varepsilon^{A'B'}. \tag{3.87}$$

Beserta konjugat kompleksnya yaitu

$$\bar{\phi}_{A'B'} = \bar{\phi}_{(A'B')} = \frac{1}{2} F_{A'B'C}{}^{C} = \frac{1}{2} F^{C}_{CA'B'}. \tag{3.88}$$

Oleh karena (3.87) dan (3.88), maka persamaan (3.83) menjadi

$$F_{AA'BB'} = \phi_{AB} \varepsilon_{A'B'} + \varepsilon_{AB} \bar{\phi}_{A'B'}, \tag{3.89}$$

dengan ϕ dikenal sebagai *Maxwell spinor* [12], spinor yang setara dengan tensor Maxwell dapat dilihat pada definisi (3.87). Enam komponen pada $F_{\mu\nu}$ dapat disajikan dengan tiga komponen kompleks pada ϕ. Mereka adalah ϕ_0, ϕ_1, dan ϕ_2 yang dituliskan

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi_{AB} o^A o^B, \\ \phi_1 &= \phi_{AB} o^A \ell^B, \\ \phi_2 &= \phi_{AB} \ell^A \ell^B. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Dari persamaan (3.90) kita dapat mengekspresikan spinor ϕ_{AB} sebagai

$$\phi_{AB} = \phi_2 o_A o_B - 2\phi_1 o_{(A} \ell_{B)} + \phi_0 \ell_A \ell_B. \tag{3.91}$$

Dalam bentuk spinor, persamaan Maxwell (2.13) dan (2.14) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\nabla^{AA'} \phi_{AB} = 0, \tag{3.92}$$

dengan $\nabla_{AA'}$ adalah *spin covariant derivative*. Jika persamaan (3.92) dikaitkan dengan *spin coefficients* (3.73), persamaan (3.70), dan (3.91) didapatkan

$$\begin{aligned} D\phi_1 - \delta^* \phi_0 &= (\pi - 2\alpha)\,\phi_0 + 2\tilde{\rho}\phi_1 - \kappa\phi_2, \\ D\phi_2 - \delta^* \phi_1 &= -\lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\tilde{\rho} - 2\varepsilon)\,\phi_2, \\ \delta\phi_1 - \triangle\,\phi_0 &= (\mu - 2\gamma)\,\phi_0 + 2\tau\phi_1 - \sigma\phi_2, \\ \delta\phi_2 - \triangle\,\phi_1 &= -\nu\phi_0 + 2\mu\phi_1 + (\tau - 2\beta)\,\phi_2. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Persamaan (3.93) adalah persamaan Maxwell dalam formalisme Newman-Penrose. Penurunan persamaan (3.93) terdapat di lampiran D.

BAB 4

SEPARABILITAS PERSAMAAN MAXWELL DALAM GEOMETRI KERR

Pada bab ini akan ditunjukkan separabilitas persamaan Maxwell dalam geometri Kerr menggunakan formalisme Newman-Penrose. Dengan *spin coefficient* pada geometri Kerr dan persamaan Maxwell dalam formalisme Newman-Penrose, yang telah disampaikan di bab sebelumnya.

4.1 Persamaan Maxwell dalam geometri Kerr

Seperti yang diketahui bahwa geometri Kerr bersifat *stationary* dan *axisymmetric*. Maka ekspektasinya ada sebuah gangguan umum yaitu superposisi dari gelombang dengan perbedaan frekuensi (ω) dan periode yang berbeda di ϕ. Dengan kata lain dapat diekspresikan

$$e^{(-i\omega t+im\phi)}. \tag{4.1}$$

Terapkan basis vektor pada persamaan (3.77) sebagai vektor *tangent* pada fungsi (4.1), menjadi operator turunan [14]

$$\begin{array}{cc} \mathbf{l}=D=\Re_0, & \mathbf{n}=\triangle=\frac{-\Delta}{2\rho^2}{\Re_0}^{\dagger} \\ \mathbf{m}=\delta=\frac{1}{\bar{\rho}\sqrt{2}}{\mathrm{L}_0}^{\dagger}, & \bar{\mathbf{m}}=\delta^*=\frac{1}{\bar{\rho}^*\sqrt{2}}\mathrm{L}_0 \end{array} \tag{4.2}$$

dengan

$$\begin{array}{cc} \Re_n=\partial_r+\frac{iK}{\Delta}+2n\frac{r-M}{\Delta}, & {\Re_n}^{\dagger}=\partial_r-\frac{iK}{\Delta}+2n\frac{r-M}{\Delta} \\ \mathrm{L}_n=\partial_\theta+Q+n\cot\theta, & {\mathrm{L}_n}^{\dagger}=\partial_\theta-Q+n\cot\theta \end{array} \tag{4.3}$$

dan

$$\begin{array}{c} K=-\left(r^2+a^2\right)\omega+am, \quad Q=-a\omega\sin\theta+m\cos ec\theta \\ \bar{\rho}=r+ia\cos\theta, \quad \bar{\rho}^*=r-ia\cos\theta, \quad \rho^2=r^2+a^2{\cos}^2\theta. \end{array} \tag{4.4}$$

Identitas dasar yang akan berperan penting dalam penyederhanaan adalah

$$K=aQ\sin\theta-\rho^2\omega. \tag{4.5}$$

Dapat dilihat bahwa $\Re_0$ dan $\Re_0^{\dagger}$ adalah murni operator radial, L_0 dan $\mathrm{L}_0^{\dagger}$ murni operator sudut. Operator radial memiliki beberapa sifat yaitu

$$\begin{array}{lll} [\Re_0,r]=1, & \Delta{\Re_n}^{\dagger}=\Delta\Re_n-2iK & \\ [\Re_0,K]=-2r\omega, & \Delta\Re_{n+1}=\Re_n\Delta, & \Delta{\Re_{n+1}}^{\dagger}={\Re_n}^{\dagger}\Delta \\ \left[{\Re_0}^2,r\right]=2\Re_0, & {\Re_0}^{\dagger}\Delta\Re_0=\Re_0\Delta{\Re_0}^{\dagger}-4ir\omega. & \end{array} \tag{4.6}$$

Operator sudut memiliki beberapa sifat yaitu

$$\begin{array}{cc} \sin\theta\mathrm{L}_{n+1}=\mathrm{L}_n\sin\theta, & [\mathrm{L}_n,\cos\theta]=-\sin\theta \\ \sin\theta{\mathrm{L}^{\dagger}}_{n+1}={\mathrm{L}^{\dagger}}_n\sin\theta, & {\mathrm{L}^{\dagger}}_n=\mathrm{L}_n-2Q. \end{array} \tag{4.7}$$

4.2 Reduksi dan separabilitas pada persamaan Maxwell

Persamaan Maxwell dalam geometri Kerr bisa didapat dengan memasukkan persamaan (3.79) ke (3.93) dan turunan berarah yang sudah didefinisikan pada persamaan (4.2). Mereka adalah

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{L}_1 - \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_0 &= \left(\Re_0 + \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_1,\\
\left(\mathrm{L}_0 + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_1 &= \left(\Re_0 - \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_2,\\
\left({\mathrm{L}_1}^\dagger - \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_2 &= -\Delta\left({\Re_0}^\dagger + \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_1,\\
\left({\mathrm{L}_0}^\dagger + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_1 &= -\Delta\left({\Re_1}^\dagger - \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\Phi_0,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

dengan

$$\Phi_0 = \phi_0, \quad \Phi_1 = \phi_1\bar{\rho}^*\sqrt{2}, \quad \Phi_2 = 2\phi_2(\bar{\rho}^*)^2. \tag{4.9}$$

Kita dapat mereduksi Φ_1 dari persamaan pertama dan kedua dari persamaan (4.8) dan begitu juga untuk persamaan kedua dan ketiga dari persamaan (4.8). Didapatnya

$$\left[\left({\mathrm{L}_0}^\dagger + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\mathrm{L}_1 - \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right) + \Delta\left(\Re_1 + \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\left({\Re_1}^\dagger - \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\right]\Phi_0 = 0, \tag{4.10}$$

$$\left[\left(\mathrm{L}_0 + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\left({\mathrm{L}_1}^\dagger - \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right) + \Delta\left({\Re_0}^\dagger + \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\Re_0 - \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\right]\Phi_2 = 0. \tag{4.11}$$

Persamaan (4.10) dapat disimplifikasi menjadi

$$\begin{aligned}
\left({\mathrm{L}_0}^\dagger + \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\mathrm{L}_1 - \frac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right) &= {\mathrm{L}_0}^\dagger\mathrm{L}_1 + \frac{2ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}Q,\\
\Delta\left(\Re_1 + \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\left({\Re_1}^\dagger - \frac{1}{\bar{\rho}^*}\right) &= \Delta\Re_1{\Re_1}^\dagger - \frac{2iK}{\bar{\rho}^*}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Persamaan (4.11) juga dapat disimplifikasi menjadi

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{L}_0 + \tfrac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right)\left({\mathrm{L}_1}^\dagger - \tfrac{ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}\right) &= \mathrm{L}_0{\mathrm{L}_1}^\dagger - \tfrac{2ia\sin\theta}{\bar{\rho}^*}Q,\\
\Delta\left({\Re_0}^\dagger + \tfrac{1}{\bar{\rho}^*}\right)\left(\Re_0 - \tfrac{1}{\bar{\rho}^*}\right) &= \Delta{\Re_0}^\dagger\Re_0 + \tfrac{2iK}{\bar{\rho}^*}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Maka dengan relasi (4.5), persamaan (4.10) dapat jauh lebih sederhana menjadi

$$\left[\Delta\Re_1{\Re_1}^\dagger + {\mathrm{L}_0}^\dagger\mathrm{L}_1 + 2i\omega\left(r + ia\cos\theta\right)\right]\Phi_0 = 0, \tag{4.14}$$

begitu juga untuk persamaan (4.11) menjadi

$$\left[\Delta{\Re_0}^\dagger\Re_0 + \mathrm{L}_0{\mathrm{L}_1}^\dagger - 2i\omega\left(r + ia\cos\theta\right)\right]\Phi_2 = 0. \tag{4.15}$$

Persamaan (4.14) dan (4.15) sangatlah jelas bahwa dapat diseparasi, dengan

$$\Phi_0 = R_{+1}(r)\,S_{+1}(\theta), \quad \Phi_2 = R_{-1}(r)\,S_{-1}(\theta), \tag{4.16}$$

dengan $R_{\pm1}(r)$ dan $S_{\pm1}(\theta)$ fungsi dari r dan θ, persamaan (4.14) dan (4.15) diseparasi untuk memberikan dua pasang persamaan yaitu

$$\begin{aligned}\left(\Delta\Re_1{\Re_1}^{\dagger}+2i\omega r\right)R_{+1}&=\mho R_{+1},\\ \left({\mathrm{L}_0}^{\dagger}\mathrm{L}_1-2a\omega\cos\theta\right)S_{+1}&=-\mho S_{+1},\end{aligned}\tag{4.17}$$

dan

$$\begin{aligned}\left(\Delta{\Re_0}^{\dagger}\Re_0-2i\omega r\right)R_{-1}&=\mho R_{-1},\\ \left(\mathrm{L}_0{\mathrm{L}_1}^{\dagger}+2a\omega\cos\theta\right)S_{-1}&=-\mho S_{-1},\end{aligned}\tag{4.18}$$

dengan $\mho$ adalah konstanta separasi. Persamaan (4.15) dan (4.18) adalah persamaan yang sama dengan persamaan yang pertama kali diturunkan oleh Saul Teukolsky. Persamaan Teukolsky [9] didapat dengan melakukan substitusi persamaan (4.3) dan (4.4) ke persamaan (4.14) dan (4.15), yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta}\frac{d}{dr}\left(\Delta^2\frac{dR_{+1}}{dr}\right)+\frac{1}{\Delta}\left[K\left(K+2ir\right)-2iKM\right]R_{+1}\\ &-\left(-4i\omega r+(a\omega-m)^2-m^2+\mho\right)R_{+1}=0,\end{aligned}\tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS_{+1}}{d\theta}\right)\\ &+\left(a^2\omega^2\cos^2\theta-\frac{m^2}{\sin^2\theta}-2a\omega\cos\theta-\frac{2m\cos\theta}{\sin^2\theta}-\cot^2\theta+1+\mho\right)S_{+1}=0,\end{aligned}\tag{4.20}$$

dan

$$\begin{aligned}&\Delta\left(\frac{d^2R_{-1}}{dr^2}\right)+\frac{1}{\Delta}\left[K\left(K-2ir\right)+2iKM\right]R_{-1}\\ &-\left(4i\omega r+(a\omega-m)^2-m^2+\mho\right)R_{-1}=0,\end{aligned}\tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS_{-1}}{d\theta}\right)\\ &+\left(a^2\omega^2\cos^2\theta-\frac{m^2}{\sin^2\theta}+2a\omega\cos\theta+\frac{2m\cos\theta}{\sin^2\theta}-\cot^2\theta-1+\mho\right)S_{-1}=0.\end{aligned}\tag{4.22}$$

BAB 5

SEPARABILITAS PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM GEOMETRI KERR-NEWMAN

Pada bab sebelumnya, telah ditunjukkan separabilitas persamaan Maxwell dalam geometri Kerr menggunakan formalisme Newman-Penrose. Sedangkan dalam bab ini penulis akan mengadopsi metode yang sama seperti bab sebelumnya, untuk persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman menggunakan formalisme Newman-Penrose. Kemudian tetrad yang akan digunakan adalah *Carter tetrad*. Persamaan Klein-Gordon pada ruang-waktu melengkung telah disinggung di bab 2.

5.1 Geometri Kerr-Newman

Geometri Kerr-Newman menggambarkan geometri ruang-waktu non-vakum yang memenuhi persamaan

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{5.1}$$

di sekitar massa yang berputar, dan bermuatan. Tensor energi-momentum pada persamaan (5.1) adalah [23]

$$T_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \tag{5.2}$$

Metrik Kerr-Newman dengan massa M, parameter rotasi a, momentum sudut $J = Ma$, dan muatan q dalam koordinat Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) dapat dituliskan sebagai berikut [24]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = & \left(1 - \frac{2Mr - q^2}{\Sigma}\right) \mathrm{d}t^2 + \frac{\left(2Mr - q^2\right) 2a\sin^2\theta}{\Sigma} \mathrm{d}t\mathrm{d}\phi - \frac{\Sigma}{\Delta_{KN}} \mathrm{d}r^2 - \Sigma \mathrm{d}\theta^2 \\ & - \frac{\left(\left(r^2 + a^2\right)^2 - \Delta_{KN}(a\sin\theta)^2\right)\sin^2\theta}{\Sigma} \mathrm{d}\phi^2, \end{aligned} \tag{5.3}$$

dengan

$$\begin{aligned} \Delta_{KN} &= \Delta + q^2 = r^2 + a^2 - 2Mr + q^2, \\ \Sigma &= r^2 + a^2\cos^2\theta. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Komponen tensor metrik kovarian pada metrik (5.3) adalah

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2Mr - q^2}{\Sigma}\right) & 0 & 0 & \frac{\left(2Mr - q^2\right)a\sin^2\theta}{\rho^2} \\ 0 & -\frac{\Sigma}{\Delta_{KN}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ \frac{\left(2Mr - q^2\right)a\sin^2\theta}{\rho^2} & 0 & 0 & -\frac{\left(\left(r^2+a^2\right)^2 - \Delta_{KN}(a\sin\theta)^2\right)\sin^2\theta}{\Sigma} \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

dan untuk inverse dari matriks (5.5) adalah

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_{KN}(a\sin\theta)^2-\left(r^2+a^2\right)^2}{\Delta_{KN}\Sigma} & 0 & 0 & \frac{\left(r^2+a^2-\Delta_{KN}\right)a}{\Delta_{KN}\Sigma} \\ 0 & -\frac{\Delta_{KN}}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Sigma} & 0 \\ \frac{\left(r^2+a^2-\Delta_{KN}\right)a}{\Delta_{KN}\Sigma} & 0 & 0 & -\frac{\Delta_{KN}-(a\sin\theta)^2}{\Delta_{KN}\Sigma\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Horison peristiwa didefinisikan oleh persamaan $g_{rr}^{-1} = 0$ terdapat pada

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - q^2}. \tag{5.7}$$

Dalam ruang-waktu (5.3) memiliki vektor potensial yaitu

$$A_\mu = \left(-\frac{qr}{\Sigma}, 0, 0, \frac{qra\sin^2\theta}{\Sigma}\right). \tag{5.8}$$

Jika pada persamaan (5.3) dipasang $a = 0$, maka akan didapat metrik Reissner-Nordstrom. Metrik Reissner-Nordstrom dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{5.9}$$

dengan vektor potensial

$$A_\mu = \left(-\frac{q}{r}, 0, 0, 0\right). \tag{5.10}$$

Geometri Kerr-Newman juga memiliki vektor Killing yang sama dengan geometri Kerr pada persamaan (3.9).

5.2 Konstruksi formalisme Newman-Penrose dalam geometri Kerr-Newman

Dalam formalisme Newman-Penrose, dipilihnya *Carter tetrad* [25] yang dituliskan dalam koordinat Boyer-Lindquist. *Carter null tetrad* dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\Delta_{KN}\Sigma}}\left(a^2 + r^2, \Delta_{KN}, 0, a\right), \\ n^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\Delta_{KN}\Sigma}}\left(a^2 + r^2, -\Delta_{KN}, 0, a\right), \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\Sigma}}\left(ia\sqrt{1-x^2}, 0, -\sqrt{1-x^2}, \frac{i}{\sqrt{1-x^2}}\right). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Pada persamaan (5.11) kita menggunakan $x = \cos\theta$. *Spin coefficients* yang terkait dengan pilihan *null tetrad* (5.11) adalah

$$
\begin{aligned}
\pi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a(ir - ax)\sqrt{1-x^2}}{\Sigma^{\frac{3}{2}}}, \\
\mu &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(ixa + r)\sqrt{\Delta_{KN}}}{\Sigma^{\frac{3}{2}}}, \\
\beta &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{iar\sqrt{1-x^2}}{\Sigma^{\frac{3}{2}}} - \frac{x(a^2+r^2)}{\Sigma^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x^2}} \right), \\
\varepsilon &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{iax\sqrt{\Delta_{KN}}}{\Sigma^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{\Sigma\left(\frac{d\Delta_{KN}}{dr}\right) - 2\Delta_{KN} r}{\Sigma^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Delta_{KN}}} \right),
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

dan

$$\pi = -\tau, \quad \tilde{\rho} = \mu, \quad \varepsilon = \gamma, \quad \beta = -\alpha, \tag{5.13}$$

$$\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0. \tag{5.14}$$

Perhitungan untuk mendapatkan persamaan (5.12), (5.13), dan (5.14) terdapat di lampiran B[1]. Sedangkan dalam bentuk spinor, vektor potensial untuk geometri Kerr-Newman yaitu

$$
\begin{aligned}
\Phi_{00'} &= o^A o^{A'} \Phi_{AA'} = l^\mu A_\mu = -\frac{qr}{\sqrt{2\Sigma\Delta}}, \\
\Phi_{11'} &= \ell^A \ell^{A'} \Phi_{AA'} = n^\mu A_\mu = \Phi_{00'}, \\
\Phi_{01'} &= o^A \ell^{A'} \Phi_{AA'} = m^\mu A_\mu = 0 = \Phi_{10'}.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

5.3 Konstruksi persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman

Persamaan Klein-Gordon dalam bentuk tensor sudah dibahas di bab 2. Sedangkan dalam bentuk spinor, persamaan Klein-Gordon dapat dituliskan sebagai berikut [15]

$$\left[\left(\nabla_{AA'} + iC\Phi_{AA'}\right)\left(\nabla^{AA'} + iC\Phi^{AA'}\right)\right]\psi = 0, \tag{5.16}$$

atau

$$\left[\left(\nabla_{AA'} + iC\Phi_{AA'}\right)\varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'B'}\left(\nabla_{BB'} + iC\Phi_{BB'}\right)\right]\psi = 0, \tag{5.17}$$

dengan ψ adalah medan skalar, C adalah muatan listik, dan $\Phi_{AA'}$ adalah potensial dari medan elektromagnetik dalam bentuk spinor. Persamaan (5.17) dapat diekspresikan dengan formalisme Newman-Penrose menjadi

$$
\begin{aligned}
&[\left(D + \varepsilon + \varepsilon^* - \tilde{\rho}^* - \tilde{\rho} + iC\Phi_{00'}\right)\left(\triangle + iC\Phi_{11'}\right) \\
&- \left(\delta + \pi^* - \tau + \beta - \alpha^* + iC\Phi_{01'}\right)\left(\delta^* + iC\Phi_{10'}\right) \\
&- \left(\delta^* + \beta^* + \pi - \alpha - \tau^* + iC\Phi_{01'}\right)\left(\delta + iC\Phi_{10'}\right) \\
&+ \left(\triangle - \gamma - \gamma^* + \mu + \mu^* + iC\Phi_{11'}\right)\left(D + iC\Phi_{00'}\right)]\psi = 0,
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

atau

[1] Perlu diketahui perhitungan pada lampiran B berupa sebuah kode maple yang Q(r) sebagai Δ_{KN}, dan koordinat z adalah koordinat ϕ. Penulis mengubahnya semata-mata hanya untuk mempermudah pengerjaan.

$$\begin{aligned}
&[D \vartriangle + \vartriangle D - \delta^* \delta - \delta \delta^* + (-\gamma - \gamma^* + \mu + \mu^*) D + (\varepsilon + \varepsilon^* - \tilde{\rho}^* - \tilde{\rho}) \vartriangle \\
&+ (-\beta^* - \pi + \alpha + \tau^*) \delta + (-\pi^* + \tau - \beta + \alpha^*) \delta^* \\
&+ iC \{(D + \varepsilon + \varepsilon^* - \tilde{\rho}^* - \tilde{\rho}) \Phi_{11'} + (-\delta - \pi^* + \tau - \beta + \alpha^*) \Phi_{10'} + (\vartriangle - \gamma - \gamma^* + \mu + \mu^*) \Phi_{00'} \\
&+ (-\delta^* - \beta^* - \pi + \alpha + \tau^*) \Phi_{01'} + \Phi_{00'} \vartriangle - \Phi_{01'} \delta^* + \Phi_{11'} D - \Phi_{10'} \delta\} \\
&\left. -2C^2 \{\Phi_{00'} \Phi_{11'} - \Phi_{01'} \Phi_{10'}\}\right] \psi = 0.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Penurunan pada persamaan (5.18) terdapat di lampiran E. Dari persamaan (3.76), maka persamaan (5.19) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
&[2D \vartriangle - 2\delta \delta^* + 2\mu D + (2\varepsilon + 2\varepsilon^* - 2\tilde{\rho}^*) \vartriangle - 2\pi \delta + (-2\beta + 2\alpha^* - 2\pi^*) \delta^* \\
&+ iC \{(D + \varepsilon + \varepsilon^* - \tilde{\rho}^* - \tilde{\rho}) \Phi_{11'} + (-\delta - \pi^* + \tau - \beta + \alpha^*) \Phi_{10'} + (\vartriangle - \gamma - \gamma^* + \mu + \mu^*) \Phi_{00'} \\
&+ (-\delta^* - \beta^* - \pi + \alpha + \tau^*) \Phi_{01'} + \Phi_{00'} \vartriangle - \Phi_{01'} \delta^* + \Phi_{11'} D - \Phi_{10'} \delta\} \\
&\left. -2C^2 \{\Phi_{00'} \Phi_{11'} - \Phi_{01'} \Phi_{10'}\}\right] \psi = 0,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

atau

$$\begin{aligned}
&[D \vartriangle + \mu D + (\varepsilon + \varepsilon^* - \tilde{\rho}^*) \vartriangle - \delta \delta^* - \pi \delta + (-\beta + \alpha^* - \pi^*) \delta^* \\
&+ \frac{iC}{2} \{(D + \varepsilon + \varepsilon^* - \tilde{\rho}^* - \tilde{\rho}) \Phi_{11'} + (-\delta - \pi^* + \tau - \beta + \alpha^*) \Phi_{10'} + (\vartriangle - \gamma - \gamma^* + \mu + \mu^*) \Phi_{00'} \\
&+ (-\delta^* - \beta^* - \pi + \alpha + \tau^*) \Phi_{01'} + \Phi_{00'} \vartriangle - \Phi_{01'} \delta^* + \Phi_{11'} D - \Phi_{10'} \delta\} \\
&\left. -C^2 \{\Phi_{00'} \Phi_{11'} - \Phi_{01'} \Phi_{10'}\}\right] \psi = 0.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

5.4 Separabilitas persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman

Seperti yang diketahui geometri Kerr-Newman bersifat *stationary* dan *axisymmetric*. Maka ekspektasinya ada sebuah gangguan umum yaitu superposisi dari gelombang dengan perbedaan frekuensi (ω) dan periode yang berbeda di ϕ. Maka *ansatz* yang akan digunakan yaitu

$$\psi(t, r, x, \phi) = e^{-i\omega t + im\phi} R(r) S(x). \tag{5.22}$$

Terapkan basis vektor pada persamaan (5.11) sebagai vektor *tangent* pada fungsi (5.22). Operator turunan dalam formalisme Newman-Penrose terkait geometri Kerr-Newman adalah

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{l} = D = \sqrt{\frac{\Delta_{KN}}{2\Sigma}} \mathrm{R}, & \mathbf{n} = \vartriangle = -\sqrt{\frac{\Delta_{KN}}{2\Sigma}} \mathrm{R}^\dagger \\
\mathbf{m} = \delta = -\frac{1}{\sqrt{2\Sigma}} \mathrm{L}, & \bar{\mathbf{m}} = \delta^* = -\frac{1}{\sqrt{2\Sigma}} \mathrm{L}^\dagger,
\end{array} \tag{5.23}$$

dengan

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{R} = \partial_r + \frac{iK}{\Delta_{KN}}, & \mathrm{R}^\dagger = \partial_r - \frac{iK}{\Delta_{KN}} \\
\mathrm{L} = \sqrt{1 - x^2} \partial_x + Q, & \mathrm{L}^\dagger = \sqrt{1 - x^2} \partial_x - Q,
\end{array} \tag{5.24}$$

dan

$$K = -\left(a^2 + r^2\right) \omega + am, \quad Q = -a\omega \sqrt{1 - x^2} + \frac{m}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{5.25}$$

Substitusikan persamaan (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), dan (5.23) ke persamaan (5.21). Didapatkan bagian radial dan angular serupa Teukolsky sebagai berikut

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-x^2\right)\frac{\partial S(x)}{\partial x}\right)+\left[a^2\omega^2x^2-\frac{m^2}{1-x^2}+\chi\right]S(x)=0. \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta_{KN}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\left[\frac{F^2}{\Delta_{KN}}+2am\omega-a^2\omega^2-\chi\right]R(r)=0, \tag{5.27}$$

dengan

$$F=K-qCr, \tag{5.28}$$

dan konstanta separasi

$$\chi=l(l+1), \tag{5.29}$$

dimana l adalah bilangan bulat. Penurunan secara lengkap persamaan (5.27) dan (5.26) dapat dilihat pada lampiran F.

BAB 6

PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM GEOMETRI KERR-NEWMAN TERAKSELERASI

Pada bab sebelumnya, telah ditunjukkan separabilitas persamaan Klein-Gordon pada geometri Kerr-Newman menggunakan formalisme Newman-Penrose. Pada bab ini penulis akan mengadopsi metode yang sama seperti bab sebelumnya untuk persamaan Klein-Gordon pada geometri Kerr-Newman terakselerasi.

6.1 Geometri Kerr-Newman terakselerasi

Geometri Kerr-Newman terakselerasi adalah sebuah kasus khusus dari solusi Plebański-Demiański [24]. Geometri Kerr-Newman terakselerasi menggambarkan geometri ruang-waktu non-vakum (5.1) di sekitar massa yang berputar, bermuatan, dan dipercepat. Metrik Kerr-Newman terakselerasi dengan massa M, parameter rotasi a, momentum sudut $J = Ma$, muatan q, dan parameter akselerasi A dalam koordinat Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) dapat dituliskan sebagai berikut [24, 26]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \frac{1}{\Omega^2}\Bigg\{&\frac{\Xi}{\Sigma}\Big[\mathrm{d}t - a\sin^2\theta \mathrm{d}\phi\Big]^2 - \frac{\Sigma}{\Xi}\mathrm{d}r^2 - \frac{\Sigma}{P}\mathrm{d}\theta^2 \\ &- \frac{P}{\Sigma}\sin^2\theta\Big[a\mathrm{d}t - \left(r^2 + a^2\right)\mathrm{d}\phi\Big]^2\Bigg\}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

dengan

$$\begin{aligned} \Omega &= 1 - Ar\cos\theta, \\ \Xi &= \Delta_{KN}\left(1 - A^2r^2\right) = \left(r^2 + a^2 - 2Mr + q^2\right)\left(1 - A^2r^2\right), \\ P &= 1 - 2Am\cos\theta + A^2\left(a^2 + q^2\right)\cos^2\theta, \\ \Sigma &= r^2 + a^2\cos^2\theta. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Dalam ruang-waktu (6.1) memiliki vektor potensial yaitu

$$A_\mu = \left(-\frac{qr}{\Sigma}, 0, 0, \frac{qra\sin^2\theta}{\Sigma}\right). \tag{6.3}$$

Geometri Kerr-Newman terakselerasi juga memiliki vektor Killing yang sama dengan geometri Kerr pada persamaan (3.9).

6.2 Konstruksi formalisme Newman-Penrose dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi

Dalam formalisme Newman-Penrose, dipilihnya *Carter tetrad* [25] yang dituliskan dalam koordinat Boyer-Lindquist. *Carter null tetrad* dituliskan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
l^\mu &= \frac{\Omega}{\sqrt{2\Xi\Sigma}}\left(a^2+r^2,\Xi,0,a\right), \\
n^\mu &= \frac{\Omega}{\sqrt{2\Xi\Sigma}}\left(a^2+r^2,-\Xi,0,a\right), \\
m^\mu &= \frac{\Omega}{\sqrt{2\Sigma}}\left(\frac{ia\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{P}},0,-\sqrt{P\left(1-x^2\right)},\frac{i}{\sqrt{P\left(1-x^2\right)}}\right).
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Pada persamaan (6.4) kita menggunakan $x = \cos\theta$. *Spin coefficients* yang terkait dengan pilihan *null tetrad* (6.4) adalah

$$
\begin{aligned}
\tau &= \sqrt{\frac{P}{2}}\left(\frac{Ar^3+a^2x-iar\Omega}{\Sigma^{3/2}}\right)\sqrt{1-x^2}, \\
\mu &= -\sqrt{\frac{\Xi}{2}}\left(\frac{Aa^2x^3+r+iax\Omega}{\Sigma^{3/2}}\right), \\
\beta &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\Sigma^{3/2}\sqrt{P\left(1-x^2\right)}}\left(\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}\left(\Sigma\Omega\left(1-x^2\right)\right)+P\left(Ara^2x^2\left(2-x^2\right)+Ar^3-a^2x-r^2x\right)\right. \\
&\left.-iPar\Omega\left(1-x^2\right)\right), \\
\varepsilon &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\Sigma^{3/2}\sqrt{\Xi}}\left(\frac{\Sigma\Omega\left(\frac{d\Xi}{dr}\right)}{2}+\Xi\left(Ax\left(\Sigma+r^2\right)-r\right)-iax\Omega\Xi\right),
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

dan

$$
\pi = -\tau, \quad \tilde{\rho} = \mu, \quad \varepsilon = \gamma, \quad \beta = -\alpha, \tag{6.6}
$$

$$
\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0. \tag{6.7}
$$

Perhitungan untuk mendapatkan persamaan (6.5), (6.6), dan (6.7) terdapat di lampiran C[1]. Sedangkan dalam bentuk spinor, vektor potensial untuk geometri Kerr-Newman terakselerasi yaitu

$$
\begin{aligned}
\Phi_{00'} &= o^A o^{A'}\Phi_{AA'} = l^\mu A_\mu = -\frac{\Omega q r}{\sqrt{2\Sigma\Xi}}, \\
\Phi_{11'} &= \ell^A \ell^{A'}\Phi_{AA'} = n^\mu A_\mu = \Phi_{00'}, \\
\Phi_{01'} &= o^A \ell^{A'}\Phi_{AA'} = m^\mu A_\mu = 0 = \Phi_{10'}.
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

6.3 Persamaan Klein-Gordon dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi

Karena geometri Kerr-Newman terakselerasi bersifat *stationary* dan *axisymmetric*, kita gunakan *ansatz*

$$
\psi(t,r,x,\phi) = e^{-i\omega t+im\phi}\Omega(r,x)R(r)S(x). \tag{6.9}
$$

Kondisi $A = 0$ dari *ansatz* (6.9) adalah *ansatz* (5.22) untuk kasus geometri Kerr-Newman. Terapkan basis vektor pada persamaan (6.4) sebagai vektor *tangent* pada fungsi (6.9). Operator turunan

[1] Perlu diketahui perhitungan pada lampiran C berupa sebuah kode maple yang Q(r) sebagai Ξ, dan koordinat z adalah koordinat ϕ. Penulis mengubahnya semata-mata hanya untuk mempermudah pengerjaan.

dalam formalisme Newman-Penrose terkait geometri Kerr-Newman terakselerasi adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{l} = D = \Omega\sqrt{\tfrac{\Xi}{2\Sigma}}\mathrm{R}, \quad & \mathbf{n} = \Delta = -\Omega\sqrt{\tfrac{\Xi}{2\Sigma}}\mathrm{R}^\dagger \\ \mathbf{m} = \delta = -\Omega\sqrt{\tfrac{P}{2\Sigma}}\mathrm{L}, \quad & \bar{\mathbf{m}} = \delta^* = -\Omega\sqrt{\tfrac{P}{2\Sigma}}\mathrm{L}^\dagger \end{aligned} \tag{6.10}$$

dengan

$$\begin{aligned} \mathrm{R} = \partial_r + \tfrac{iK}{\Xi}, \quad & \mathrm{R}^\dagger = \partial_r - \tfrac{iK}{\Xi} \\ \mathrm{L} = \sqrt{1-x^2}\partial_x + \tfrac{Q}{P}, \quad & \mathrm{L}^\dagger = \sqrt{1-x^2}\partial_x - \tfrac{Q}{P}, \end{aligned} \tag{6.11}$$

dan

$$K = -\left(a^2 + r^2\right)\omega + am, \quad Q = -a\omega\sqrt{1-x^2} + \tfrac{m}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6.12}$$

Ungkapan persamaan Klein-Gordon yang kita gunakan sama dengan yang dipakai pada kasus geometri Kerr-newman di persamaan (5.21). Dengan mensubstitusikan persamaan (6.5), (6.6), (6.7), (6.8), (6.10) ke persamaan (5.21), maka didapat

$$\begin{aligned} &\Bigg[\left(-\frac{\Omega}{2\Sigma}\left(\partial_r\Xi\right) + \frac{\Xi\left(\partial_r\Omega^2\right)}{2\Sigma}\right)\partial_r - \frac{\Xi\Omega^2}{2\Sigma}{\partial_r}^2 - \frac{ir\omega\Omega^2}{\Sigma} - \frac{iKr\Omega^2}{\Sigma^2} + \frac{aKx\Omega^2}{\Sigma^2} - \frac{F^2\Omega^2}{2\Sigma\Xi} + \frac{x\Omega^2}{2\Sigma}\left(a\omega + \frac{m}{1-x^2}\right) \\ &+\frac{Q^2\Omega^2}{2\Sigma P} - \frac{\Omega^2 P\left(1-x^2\right)}{2\Sigma}{\partial_x}^2 + \frac{iarQ\Omega\sqrt{1-x^2}}{\Sigma^2} + \left(\frac{xP\Omega^2}{\Sigma} - \frac{\partial_x\left(P\Omega^2\right)}{2\Sigma}\left(1-x^2\right)\right)\partial_x \\ &-\frac{\Omega^2 Q\left(\partial_x P\right)\sqrt{1-x^2}}{2\Sigma P} - \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\frac{Q\Omega}{2\Sigma}\left(Ar + \frac{a^2x\Omega}{\Sigma}\right)\right) \\ &- \frac{AQra^2x^3\Omega}{2\Sigma^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{Qxr^2\Omega}{2\Sigma^2\sqrt{1-x^2}}\Bigg]\psi = 0 \end{aligned} \tag{6.13}$$

dengan

$$F = K - qCr. \tag{6.14}$$

Persamaan (6.13) merupakan persamaan untuk medan skalar nirmassa, dan bermuatan dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi. Pada tugas akhir ini, persamaan (6.13) belum dapat diseparasi dikarenakan tingkat kerumitan yang dimilikinya cukup tinggi. Namun seharusnya persamaan (6.13) dapat diseparasi karena pekerjaan serupa telah dilakukan oleh Kofroň [27] dengan *ansatz* medan skalar dan pemilihan koordinat yang berbeda.

BAB 7

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dalam tugas akhir ini, penulis telah menggunakan formalisme Newman-Penrose untuk memperlihatkan separabilitas pada persamaan medan skalar bermuatan dalam geometri Kerr-Newman. Hasil di persamaan (5.27), dan (5.26) cocok dengan yang ada di dalam literatur [28]. Formalisme Newman-Penrose terasa efektif saat membahas medan skalar nirmassa dan bermuatan dalam geometri Kerr-Newman terakselerasi, dimana penulis berhasil mendapatkan persamaan gerak untuk medan tersebut. Seharusnya persamaan (6.13) dapat diseparasi, sebagaimana dalam kasus Kerr terakselerasi [27, 29]. Namun, tingkat kerumitan persamaan (6.13) yang cukup tinggi membutuhkan waktu pengerjaan yang lebih panjang dari waktu normal pengerjaan tugas akhir tingkat sarjana.

DAFTAR REFERENSI

[1] Regge, T. dan Wheeler, J. A. (1957) Stability of a schwarzschild singularity. *Phys.Rev.*, **108**.

[2] Vishveshwara, C. V. (1970) Stability of the schwarzschild metric. *Phys. Rev. D*, **1**, 2870–2879.

[3] Zerilli, F. J. (1970) Effective potential for even-parity regge-wheeler gravitational perturbation equations. *Phys. Rev. Lett.*, **24**, 737–738.

[4] Zerilli, F. J. (1970) Gravitational field of a particle falling in a schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics. *Phys. Rev. D*, **2**, 2141.

[5] Teukolsky, S. A. The kerr metric. arXiv:1410.2130.

[6] Carter, B. (1968) Hamilton-jacobi and schrodinger separable solutions of einstein's equations. *Commun. math. Phys.*, **10**, 280–310.

[7] Fackerell, E. D. dan Ipser, J. R. (1972) Weak electromagnetic fields around a rotating black hole. *Phys. Rev. D*, **5**, 2455.

[8] Price, R. H. (1972) Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. i. scalar and gravitational perturbations. *Phys. Rev. D*, **5**, 2419.

[9] Teukolsky, S. A. (1972) Rotating black holes: Separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 1114.

[10] Semiz, I. (1992) Klein-gordon equation is separable on the dyon black-hole metric. *Physical Review D*, **45**, 532–533.

[11] Newman, E. T. dan Penrose, R. (1962) An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, **3**, 566–578.

[12] Penrose, R. dan Rindler, W. (1987) *Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge univ. Press, Cambridge.

[13] O'Donnell, P. (2003) *Introduction to 2-Spinors in General Relativity*. World Scientific, Singapore.

[14] Chandrasekhar, S. (2002) *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford Univ. Press, Oxford.

[15] Silva-Ortigoza, G. (1996) Solutions of the klein-gordon equation in the carter a solution. *Revista Mexicana de Fisica*, **42**, 543–549.

[16] Poisson, E. (2007) *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge.

[17] Griffiths, D. (1987) *Introduction to Elementary Particles*. WILEY-VCH.

[18] Weinberg, S. (1972) *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, New York.

[19] Hawking, S. dan Ellis, G. (1973) *The Large Scale Structure of Space-Time.* Cambridge univ. Press, Cambridge.

[20] Dhurandhar, S. V. (1997) *Tetrads, the Newman-Penrose Formalism and Spinors. In: Iyer B.R., Vishveshwara C.V. (eds) Geometry, Fields and Cosmology. Fundamental Theories of Physics (An International Book Series on The Fundamental Theories of Physics: Their Clarification, Development and Application), vol 88.* Springer, Dordrecht.

[21] Ryder, L. (2009) *Introduction to General Relativity.* Cambridge univ. Press, Cambridge.

[22] Stewart, J. (1991) *Advanced General Relativity.* Cambridge univ. Press, Cambridge.

[23] Wheeler, J., Misner, C., dan Thorne, K. (1973) *Gravitation.* W.H. Freeman Co.

[24] Griffiths, J. B. dan Podolsky, J. (2009) *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity.* Cambridge Univ. Press.

[25] Carter, B. (1968) Global structure of the kerr family of gravitational fields. *World Scientific*, **174**, 1559.

[26] Podolsky, J. dan Griffiths, J. B. (2006) Accelerating kerr-newman black holes in (anti-)de sitter space-time. *Physical Review D*, **73**.

[27] Kofroň, D. (2016) Separability of test fields equations on the c-metric background ii. rotating case and the meissner effect. *Physical Review D*, **93**.

[28] Bezerra, V. B., Vieira, H. S., dan Costa, A. A. (2014) The Klein-Gordon equation in the spacetime of a charged and rotating black hole. *Class. Quant. Grav.*, **31**, 045003.

[29] Bini, D., Cherubin, C., dan Geralico, A. (2008) Massless field perturbations of the spinning c metric. *Journal of Mathematical Physics*, **49**.

LAMPIRAN A

KODE MAPLE UNTUK *SPIN COEFFICIENTS* PADA GEOMETRI KERR

```
> restart;
> with(DifferentialGeometry); with(Tensor); with(Tools);
> DGsetup([t, r, x, z], M);
```

frame name: M

```
M > NT := evalDG([(a^2+r^2)*D_t/Q(r)+D_r+0*D_x+a*D_z/Q(r),
(a^2+r^2)*D_t/(2*(a^2*x^2+r^2))-Q(r)*D_r/(2*(a^2*x^2+r^2))+0*D_x+a*D_z/(2*(a^2*x^2+r^2)),
I*a*sqrt(-x^2+1)*D_t/(sqrt(2)*(r+I*a*x))+0*D_r-sqrt(-x^2+1)*D_x/(sqrt(2)*(r+I*a*x))
+I*D_z/(sqrt(2*(-x^2+1))*(r+I*a*x)),((-I*a*sqrt(-x^2+1))*(1/(sqrt(2)*(r-I*a*x))))*D_t+0*D_r
-sqrt(-x^2+1)*D_x/(sqrt(2)*(r-I*a*x))-I*D_z/(sqrt(2*(-x^2+1))*(r-I*a*x))]);
```

$$NT := \frac{a^2+r^2}{Q(r)}D\_t + D\_r + \frac{a}{Q(r)}D\_z, \frac{a^2+r^2}{2\left(a^2x^2+r^2\right)}D\_t - \left(\frac{Q(r)}{2a^2x^2+2r^2}D\_r\right) + \frac{a}{2\left(a^2x^2+r^2\right)}D\_z$$
$$, \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{-x^2+1}\sqrt{2}}{r+\mathrm{I}ax}D\_t - \left(\frac{\sqrt{-x^2+1}\sqrt{2}}{2(r+\mathrm{I}ax)}D\_x\right) + \frac{1}{(r+\mathrm{I}ax)\sqrt{-2x^2+2}}D\_z, \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{-x^2+1}\sqrt{2}}{\mathrm{I}ax-r}D\_t$$
$$+\frac{\sqrt{-x^2+1}\sqrt{2}}{2(\mathrm{I}ax-r)}D\_x + \frac{1}{(\mathrm{I}ax-r)\sqrt{-2x^2+2}}D\_z$$

```
M > SpinCoeff := NPSpinCoefficients(NT)
```

$$SpinCoeff := table\left(\left[\text{"pi"} = -\frac{\left(x^2-1\right)a}{\sqrt{-2x^2+2}\left(\mathrm{I}r+ax\right)\left(\mathrm{I}ax-r\right)}, \text{ "rho"} = -\frac{a^4x^4+2a^2r^2x^2+r^4}{\left(Iax-r\right)\left(\mathrm{I}r+ax\right)^2\left(r+\mathrm{I}ax\right)^2},\right.\right.$$
$$\text{"epsilon"} = 0, \text{"alpha"} = -\frac{1}{2}\frac{\left(x^2-1\right)a}{\sqrt{-2x^2+2}\left(\mathrm{I}r+ax\right)\left(\mathrm{I}ax-r\right)} - \frac{\frac{1}{2}\mathrm{I}\left(\mathrm{I}rx+a\right)}{\left(Ir+ax\right)^2\sqrt{-2x^2+2}}, \text{"nu"} = 0,$$
$$\text{"beta"} = \frac{1}{2}\frac{\left(\mathrm{I}rx^2+ax^3-\mathrm{I}r-ax\right)a}{\left(r+\mathrm{I}ax\right)\sqrt{-2x^2+2}\left(a^2x^2+r^2\right)} + \frac{\frac{1}{2}\mathrm{I}\left(\mathrm{I}a^2rx^3-2\mathrm{I}a^2rx-\mathrm{I}r^3x-a^3x^2-2ar^2x^2+ar^2\right)}{\sqrt{-2x^2+2}\left(a^2x^2+r^2\right)},$$
$$mu = -\frac{1}{2}\frac{Q(r)\left(a^2x^2+r^2\right)}{\left(\mathrm{I}ax-r\right)\left(\mathrm{I}r+ax\right)^2\left(r+Iax\right)^2}, \text{"sigma"} = 0, \text{"lambda"} = 0, \text{"gamma"}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{2\mathrm{I}\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)a^3rx^3 + \left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)a^4x^4 + 2\mathrm{I}\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)ar^3x - 4\mathrm{I}Q(r)ar^2x - 2Q(r)a^2rx^2 - \left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)r^4}{\left(\mathrm{I}r+ax\right)^2\left(a^2x^2+r^2\right)^2}$$
$$+\frac{2Q(r)r^3}{\left(\mathrm{I}r+ax\right)^2\left(a^2x^2+r^2\right)^2} - \frac{\frac{1}{2}\mathrm{I}\left(a^2x^2+r^2\right)xaQ(r)}{\left(\mathrm{I}ax-r\right)\left(r+\mathrm{I}ax\right)^3\left(\mathrm{I}r+ax\right)^2}, \text{"kappa"} = 0,$$
$$\left.\left.\text{"tau"} = \frac{\left(\mathrm{I}rx^2-ax^3-\mathrm{I}r+ax\right)a}{\left(r+Iax\right)\sqrt{-2x^2+2}\left(a^2x^2+r^2\right)}\right)\right]$$

LAMPIRAN B

KODE MAPLE UNTUK *SPIN COEFFICIENTS* PADA GEOMETRI KERR-NEWMAN

```
> restart;
> with(DifferentialGeometry); with(Tensor); with(Tools);
> DGsetup([t, r, x, z], M);
```

frame name: M

```
M > NT := evalDG([(a^2+r^2)*D_t/(sqrt(2(a^2*x^2+r^2))*sqrt(Q(r)))
+ sqrt(Q(r))*D_r/sqrt(2*(a^2*x^2+r^2))+0*D_x+ a*D_z/(sqrt(2*(a^2*x^2+r^2))*sqrt(Q(r))),
(a^2+r^2)*D_t/(sqrt(2*(a^2*x^2+r^2))*sqrt(Q(r)))
-sqrt(Q(r))*D_r/sqrt(2*(a^2*x^2+r^2))+0*D_x+a*D_z/(sqrt(2*(a^2*x^2+r^2))*sqrt(Q(r))),
I*a*sqrt(-x^2+1)*D_t/sqrt(2*(a^2*x^2+r^2))+0*D_r-sqrt(-x^2+1)*D_x/sqrt(2*(a^2*x^2+r^2))
+I*D_z/(sqrt(-x^2+1)*sqrt(2*(a^2*x^2+r^2))), -I*a*sqrt(-x^2+1)*D_t/sqrt(2*(a^2*x^2+r^2))
+0D_r-sqrt(-x^2+1)*D_x/sqrt(2*(a^2*x^2+r^2))-I*D_z/(sqrt(-x^2+1)*sqrt(2*(a^2*x^2+r^2)))]);
```

$$NT := \left[\frac{a^2+r^2}{\sqrt{Q(r)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_t + \frac{\sqrt{Q(r)}}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_r + \frac{a}{\sqrt{Q(r)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_z,\right.$$
$$\frac{a^2+r^2}{\sqrt{Q(r)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_t - \left(\frac{\sqrt{Q(r)}}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_r\right) + \frac{a}{\sqrt{Q(r)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_z,$$
$$\frac{\mathrm{I}a\sqrt{-x^2+1}}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_t - \left(\frac{\sqrt{-x^2+1}}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_x\right) + \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}\sqrt{-x^2+1}}D\_z,$$
$$\left. -\left(\frac{\mathrm{I}a\sqrt{-x^2+1}}{\sqrt{2a^2x^2+r^2}}\right)D\_t - \left(\frac{\sqrt{-x^2+1}}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_x\right) - \left(\frac{\mathrm{I}}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}\sqrt{-x^2+1}}D\_z\right)\right]$$

```
M > SpinCoeff := NPSpinCoefficients(NT)
```

$$SpinCoeff := table\left(\left[\text{"gamma"} = \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)a^2x^2 + \left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)r^2 - 2Q(r)r}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}\sqrt{Q(r)}\,(a^2x^2+r^2)} - \frac{\frac{1}{2}Iax\sqrt{Q(r)}}{(a^2x^2+r^2)\sqrt{2a^2x^2+2r^2}},\right.\right.$$
$$\text{"sigma"} = 0, \text{"beta"} = -\frac{\frac{1}{2}\mathrm{I}ar\sqrt{-x^2+1}}{(a^2x^2+r^2)\sqrt{2a^2x^2+2r^2}} + \frac{\frac{1}{2}x\,(a^2+r^2)}{\sqrt{-x^2+1}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}\,(a^2x^2+r^2)},$$
$$\text{"rho"} = -\frac{\sqrt{Q(r)}\,(\mathrm{I}xa+r)}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}\,(a^2x^2+r^2)}, \text{"kappa"} = 0, \text{"lambda"} = 0, \text{"alpha"} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{I}ar\sqrt{-x^2+1}}{(a^2x^2+r^2)\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{x\left(a^2+r^2\right)}{\sqrt{-x^2+1}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}\left(a^2x^2+r^2\right)}, \text{"tau"} = -\frac{a\sqrt{-x^2+1}\left(\mathrm{I}r-ax\right)}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}\left(a^2x^2+r^2\right)},$$

$$\text{"mu"} = -\frac{\sqrt{Q(r)}\left(\mathrm{I}xa+r\right)}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}\left(a^2x^2+r^2\right)}, \text{"epsilon"} = \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)a^2x^2+\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)r^2-2Q(r)r}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}\sqrt{Q(r)}\left(a^2x^2+r^2\right)}$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\mathrm{I}ax\sqrt{Q(r)}}{\left(a^2x^2+r^2\right)\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}, \text{"nu"} = 0, \text{"pi"} = \frac{a\sqrt{-x^2+1}\left(\mathrm{I}r-ax\right)}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}\left(a^2x^2+r^2\right)}\Bigg]\Bigg)$$

LAMPIRAN C

KODE MAPLE UNTUK *SPIN COEFFICIENTS* PADA GEOMETRI KERR-NEWMAN TERAKSELERASI

```
> restart;
> with(DifferentialGeometry); with(Tensor); with(Tools);
> DGsetup([t, r, x, z], M);
```

frame name: M

```
M > y:=x;
```

y:=x

```
M > NT := evalDG([(-A*r*y+1)*(a^2+r^2)*D_t/(sqrt(2*(a^2*y^2+r^2))*sqrt(Q(r)))
+(-A*r*y+1)*sqrt(Q(r))*D_r/sqrt(2*(a^2*y^2+r^2))+0*D_x+(-A*r*y+1)*a*D_z/(sqrt(2*(a^2*y^2+r^2))
sqrt(Q(r))), (-A*r*y+1)*(a^2+r^2)*D_t/(sqrt(2*(a^2*y^2+r^2))*sqrt(Q(r)))-(-A*r*y+1)*sqrt(Q(r))
D_r/sqrt(2*(a^2*y^2+r^2))+0*D_x+(-A*r*y+1)*a*D_z/(sqrt(2*(a^2*y^2+r^2))*sqrt(Q(r))),
I*(-A*r*y+1)*a*sqrt(-y^2+1)*D_t/sqrt((2*(a^2*y^2+r^2))*P(x))+0*D_r-sqrt(-y^2+1)*sqrt(P(x))
(-A*r*y+1)*D_x/sqrt(2*(a^2*y^2+r^2))+I*(-A*r*y+1)*D_z/(sqrt(-y^2+1)*sqrt((2*(a^2*y^2+r^2))*P(x))),
-I*(-A*r*y+1)*a*sqrt(-y^2+1)*D_t/sqrt((2*(a^2*y^2+r^2))*P(x))+0*D_r
-sqrt(-y^2+1)*sqrt(P(x))*(-A*r*y+1)*D_x/sqrt(2*(a^2*y^2+r^2))
-I*(-A*r*y+1)*D_z/(sqrt(-y^2+1)*sqrt((2*(a^2*y^2+r^2))*P(x)))]);
```

$$NT := \left[-\left(\frac{(Arx-1)\,(a^2+r^2)}{\sqrt{Q(r)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_t\right)-\left(\frac{(Arx-1)\,\sqrt{Q(r)}}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_r\right)-\left(\frac{(Arx-1)\,a}{\sqrt{Q(r)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_z\right),\right.$$
$$-\left(\frac{(Arx-1)\,(a^2+r^2)}{\sqrt{Q(r)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_t\right)+\frac{(Arx-1)\,\sqrt{Q(r)}}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_r-\left(\frac{(Arx-1)\,a}{\sqrt{Q(r)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_z\right),$$
$$-\left(\frac{\frac{I}{2}\sqrt{2}\,(Arx-1)\,a\sqrt{-x^2+1}}{\sqrt{(a^2x^2+r^2)\,P(x)}}D\_t\right)+\frac{\sqrt{-x^2+1}\sqrt{P(x)}\,(Arx-1)}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_x$$
$$-\left(\frac{\frac{I}{2}\sqrt{2}\,(Arx-1)}{\sqrt{(a^2x^2+r^2)\,P(x)}\sqrt{-x^2+1}}D\_z\right),\frac{\frac{I}{2}\sqrt{2}\,(Arx-1)\,a\sqrt{-x^2+1}}{\sqrt{(a^2x^2+r^2)\,P(x)}}D\_t$$
$$\left.+\frac{\sqrt{-x^2+1}\sqrt{P(x)}\,(Arx-1)}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}D\_x+\frac{\frac{I}{2}\sqrt{2}\,(Arx-1)}{\sqrt{(a^2x^2+r^2)\,P(x)}\sqrt{-x^2+1}}D\_z\right]$$

```
M > SpinCoeff := NPSpinCoefficients(NT)
```

$$SpinCoeff := table\left(\left[\text{"pi"} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}\sqrt{-x^2+1}\,(a^2x^2+r^2)\,\sqrt{(a^2x^2+r^2)\,P(x)}}\right.\right.$$
$$(\mathrm{I}AP(x)\,\sqrt{2}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}ar^2x^3-\mathrm{I}AP(x)\sqrt{2}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}ar^2x+2A\sqrt{P(x)}\sqrt{(a^2x^2+r^2)\,P(x)}r^3x^2$$
$$-\mathrm{I}P(x)\sqrt{2}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}arx^2+2\sqrt{P(x)}\sqrt{(a^2x^2+r^2)\,P(x)}a^2x^3-2A\sqrt{P(x)}\sqrt{(a^2x^2+r^2)\,P(x)}r^3$$

$$+\mathrm{I}ra\sqrt{2}\sqrt{P(x)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}-2\sqrt{P(x)}\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}a^2x\Big), \text{"rho"}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}(a^2x^2+r^2)\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}\left(\sqrt{Q(r)}\left(\mathrm{I}A\sqrt{P(x)}\sqrt{2}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}arx^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-2A\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}a^2x^3-\mathrm{I}xa\sqrt{2}\sqrt{P(x)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}-2\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}r\right)\right)$$
$$\text{"epsilon"}=-\frac{1}{4}\frac{1}{(a^2x^2+r^2)\sqrt{Q(r)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}\left(A\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)a^2rx^3-2AQ(r)a^2x^3+A\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)r^3x\right.$$
$$\left.-4AQ(r)r^2x-\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)a^2x^2-\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)r^2+2Q(r)r\right)+\frac{\frac{1}{4}\mathrm{I}x\sqrt{Q(r)}a\sqrt{2}\sqrt{P(x)}(Arx-1)}{\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}(a^2x^2+r^2)},$$
$$\text{"lambda"}=0,\text{"alpha"}=-\frac{\frac{1}{4}\mathrm{I}(Arx-1)ra\sqrt{2}\sqrt{-x^2+1}P(x)}{\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}(a^2x^2+r^2)}$$
$$+\frac{1}{8}\frac{1}{(a^2x^2+r^2)^{3/2}\sqrt{P(x)}\sqrt{-x^2+1}}\left(\sqrt{2}\left(A\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)a^2rx^5-2AP(x)a^2rx^4-A\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)a^2rx^3\right.\right.$$
$$+A\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)r^3x^3+4AP(x)a^2rx^2-\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)a^2x^4-A\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)r^3x+2AP(x)r^3$$
$$\left.\left.+\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)a^2x^2-\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)r^2x^2-2a^2x\,P(x)-2P(x)r^2x+\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)r^2\right)\right), \text{"beta"}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}\mathrm{I}(Arx-1)ra\sqrt{2}\sqrt{-x^2+1}P(x)}{\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}(a^2x^2+r^2)}$$
$$-\frac{1}{8}\frac{1}{(a^2x^2+r^2)^{3/2}\sqrt{P(x)}\sqrt{-x^2+1}}\left(\sqrt{2}\left(A\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)a^2rx^5-2AP(x)a^2rx^4-A\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)a^2rx^3\right.\right.$$
$$+A\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)r^3x^3+4AP(x)a^2rx^2-\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)a^2x^4-A\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)r^3x+2AP(x)r^3$$
$$\left.\left.+\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)a^2x^2-\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)r^2x^2-2a^2x\,P(x)-2P(x)r^2x+\left(\frac{d}{dx}P(x)\right)r^2\right)\right), \text{"kappa"}=0,\text{"nu"}=0,$$
$$\text{"gamma"}=-\frac{1}{4}\frac{1}{(a^2x^2+r^2)\sqrt{Q(r)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}\left(A\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)a^2rx^3-2AQ(r)a^2x^3+A\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)r^3x\right.$$
$$\left.-4AQ(r)r^2x-\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)a^2x^2-\left(\frac{d}{dr}Q(r)\right)r^2+2Q(r)r\right)+\frac{\frac{1}{4}\mathrm{I}x\sqrt{Q(r)}a\sqrt{2}\sqrt{P(x)}(Arx-1)}{\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}(a^2x^2+r^2)},$$
$$\text{"sigma"}=0,\text{"mu"}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}(a^2x^2+r^2)\sqrt{2a^2x^2+2r^2}}\left(\sqrt{Q(r)}\left(\mathrm{I}A\sqrt{P(x)}\sqrt{2}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}arx^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-2A\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}a^2x^3-\mathrm{I}xa\sqrt{2}\sqrt{P(x)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}-2\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}r\right)\right),$$
$$\text{"tau"}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2a^2x^2+2r^2}\sqrt{-x^2+1}(a^2x^2+r^2)\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}}$$
$$(\mathrm{I}AP(x)\sqrt{2}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}ar^2x^3-\mathrm{I}AP(x)\sqrt{2}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}ar^2x+2A\sqrt{P(x)}\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}r^3x^2$$
$$-\mathrm{I}P(x)\sqrt{2}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}arx^2+2\sqrt{P(x)}\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}a^2x^3-2A\sqrt{P(x)}\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}r^3$$
$$+\mathrm{I}ra\sqrt{2}\sqrt{P(x)}\sqrt{2a^2x^2+2r^2}-2\sqrt{P(x)}\sqrt{(a^2x^2+r^2)P(x)}a^2x\Big)\Big]\Big)$$

LAMPIRAN D

PENURUNAN PERSAMAAN MAXWELL DALAM FORMALISME NEWMAN-PENROSE

Persamaan Maxwell dalam formalisme Newman-Penrose dapat dituliskan sebagai berikut

$$D\phi_1 - \delta^*\phi_0 = (\pi - 2\alpha)\,\phi_0 + 2\tilde{\rho}\phi_1 - \kappa\phi_2, \tag{D.1}$$

$$D\phi_2 - \delta^*\phi_1 = -\lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\tilde{\rho} - 2\varepsilon)\,\phi_2, \tag{D.2}$$

$$\delta\phi_1 - \triangle\,\phi_0 = (\mu - 2\gamma)\,\phi_0 + 2\tau\phi_1 - \sigma\phi_2, \tag{D.3}$$

$$\delta\phi_2 - \triangle\,\phi_1 = -\nu\phi_0 + 2\mu\phi_1 + (\tau - 2\beta)\,\phi_2. \tag{D.4}$$

Dalam lampiran ini, penulis bertujuan untuk menurunkan persamaan (D.1) secara ekplisit. Pertama-tama penulis akan berangkat dari persamaan Maxwell dalam bentuk spinor yaitu

$$0 = \nabla^{AA'}\phi_{AB} = \varepsilon^{AC}\nabla_{AA'}\phi_{CB} = \left(o^A\ell^C - o^C\ell^A\right)\nabla_{AA'}\phi_{CB}. \tag{D.5}$$

Untuk persamaan (D.1): Kalikan (D.5) dengan $o^{A'}o^B$ maka akan didapat

$$\left(o^A o^{A'} o^B \ell^C - \ell^A o^{A'} o^B o^C\right)\nabla_{AA'}\phi_{BC} = 0, \tag{D.6}$$

atau

$$\left(o^B\ell^C D - o^B o^C \delta^*\right)\left[\phi_2 o_B o_C - \phi_1 o_B \ell_C - \phi_1 \ell_B o_C + \phi_0 \ell_B \ell_C\right] = 0, \tag{D.7}$$

atau

$$\begin{aligned} &-\phi_0\ell^C D\ell_C + D\phi_1 + \phi_1\ell^C Do_C - \phi_1 o^B D\ell_B + \varphi_2 o^B Do_B - \delta^*\phi_0 + \\ &\phi_0 o^C\delta^*\ell_C + \varphi_0 o^B\delta^*\ell_B - \phi_1 o^B\delta^* o_B - \phi_1 o^C\delta^* o_C = 0. \end{aligned} \tag{D.8}$$

Setelah itu substitusikan *spin coefficients* (3.73) ke persamaan (D.8) menghasilkan

$$D\phi_1 - \delta^*\phi_0 = (\pi - 2\alpha)\,\phi_0 + 2\tilde{\rho}\phi_1 - \kappa\phi_2. \tag{D.9}$$

Sedangkan untuk persamaan (D.2): Kalikan (D.5) dengan $o^{A'}\ell^B$. Maka akan didapat

$$\left(o^A o^{A'}\ell^C\ell^B - o^C o^{A'}\ell^A\ell^B\right)\nabla_{AA'}\phi_{BC} = 0, \tag{D.10}$$

atau

$$\left(\ell^C\ell^B D - o^C\ell^B\delta^*\right)\left[\phi_2 o_B o_C - \phi_1 o_B\ell_C - \phi_1\ell_B o_C + \phi_0\ell_B\ell_C\right] = 0, \tag{D.11}$$

atau

$$\begin{aligned} &D\phi_2 + \phi_2\ell^C Do_C + \phi_2\ell^B Do_B - \phi_1\ell^C D\ell_C - \phi_1\ell^B D\ell_B \\ &-\phi_2 o^C\delta^* o_C - \delta^*\phi_1 - \phi_1\ell^B\delta^* o_B + \phi_1 o^C\delta^*\ell_C + \phi_0\ell^B\delta^*\ell_B = 0. \end{aligned} \tag{D.12}$$

Setelah itu substitusikan *spin coefficients* (3.73) ke persamaan (D.12) menghasilkan

$$D\phi_2 - \delta^*\phi_1 = -\lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\tilde{\rho} - 2\varepsilon)\,\phi_2. \tag{D.13}$$

Untuk persamaan (D.3): Kalikan (D.5) dengan $\ell^{A'}o^B$. Maka akan didapat

$$\left(o^A o^B \ell^{A'} \ell^C - o^C o^B \ell^A \ell^{A'}\right) \nabla_{AA'} \phi_{BC} = 0, \tag{D.14}$$

atau

$$\left(\ell^C o^B \delta - o^C o^B\right) [\phi_2 o_B o_C - \phi_1 o_B \ell_C - \phi_1 \ell_B o_C + \phi_0 \ell_B \ell_C] = 0, \tag{D.15}$$

atau

$$\begin{aligned} &\phi_2 o^B \delta o_B + \delta\phi_1 + \phi_1 \ell^C \delta o_C - \phi_1 o^B \delta \ell_B - \phi_0 \ell^C \delta \ell_C \\ &-\phi_1 o^B \bigtriangleup o_B - \phi_1 o^C \bigtriangleup o_C - \bigtriangleup \phi_0 + \phi_0 o^B \bigtriangleup \ell_B + \phi_0 o^C \bigtriangleup \ell_C = 0. \end{aligned} \tag{D.16}$$

Setelah itu substitusikan *spin coefficients* (3.73) ke persamaan (D.16) menghasilkan

$$\delta\phi_1 - \bigtriangleup \phi_0 = (\mu - 2\gamma)\, \phi_0 + 2\tau\phi_1 - \sigma\phi_2. \tag{D.17}$$

Untuk persamaan (D.4): Kalikan (D.5) dengan $\ell^{A'}\ell^B$. Maka akan didapat

$$\left(o^A \ell^{A'} \ell^C \ell^B - o^C \ell^A \ell^{A'} \ell^B\right) \nabla_{AA'} \phi_{BC} = 0, \tag{D.18}$$

atau

$$\left(\ell^C \ell^B \delta - o^C \ell^B \bigtriangleup\right) [\phi_2 o_B o_C - \phi_1 o_B \ell_C - \phi_1 \ell_B o_C + \phi_0 \ell_B \ell_C] = 0, \tag{D.19}$$

atau

$$\begin{aligned} &\delta\phi_2 + \phi_2 \ell^C \delta o_C + \phi_2 \ell^B \delta o_B - \phi_1 \ell^C \delta \ell_C - \phi_1 \ell^B \delta \ell_B \\ &-\phi_2 o^C \bigtriangleup o_C - \bigtriangleup \phi_1 - \phi_1 \ell^B \bigtriangleup o_B + \phi_1 o^C \bigtriangleup \ell_C + \phi_0 \ell^B \bigtriangleup \ell_B = 0. \end{aligned} \tag{D.20}$$

Setelah itu substitusikan *spin coefficients* (3.73) ke persamaan (D.20) menghasilkan

$$\delta\phi_2 - \bigtriangleup \phi_1 = -\upsilon\phi_0 + 2\mu\phi_1 + (\tau - 2\beta)\, \phi_2. \tag{D.21}$$

LAMPIRAN E

PENURUNAN KLEIN-GORDON DALAM FORMALISME NEWMAN-PENROSE

Persamaan Klein-Gordon dalam formalisme Newman-Penrose dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
&[(D+\varepsilon+\varepsilon^{*}-\tilde{\rho}^{*}-\tilde{\rho}+iC\Phi_{00'})\,(\triangle+iC\Phi_{11'})\\
&-(\delta+\pi^{*}-\tau+\beta-\alpha^{*}+iC\Phi_{01'})\,(\delta^{*}+iC\Phi_{10'})\\
&-(\delta^{*}+\beta^{*}+\pi-\alpha-\tau^{*}+iC\Phi_{01'})\,(\delta+iC\Phi_{10'})\\
&+(\triangle-\gamma-\gamma^{*}+\mu+\mu^{*}+iC\Phi_{11'})\,(D+iC\Phi_{00'})]\,\psi=0.
\end{aligned} \tag{E.1}$$

Dalam lampiran ini, penulis akan menurunkan persamaan (E.1) secara ekplisit. Pertama-tama penulis berangkat dari persamaan Klein-Gordon dengan interaksi elektromagnetik dalam bentuk spinor yang dapat dituliskan

$$[(\nabla_{AA'}+iC\Phi_{AA'})\,(\nabla^{AA'}+iC\Phi^{AA'})]\,\psi=0, \tag{E.2}$$

atau

$$\left[(\nabla_{AA'}+iC\Phi_{AA'})\,\varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'B'}\,(\nabla_{BB'}+iC\Phi_{BB'})\right]\psi=0. \tag{E.3}$$

Substitusikan persamaan (3.33), ke (E.4) menghasilkan

$$\left[(\nabla_{AA'}+iC\Phi_{AA'})\left(o^{A}\ell^{B}-o^{B}\ell^{A}\right)\left(o^{A'}\ell^{B'}-o^{B'}\ell^{A'}\right)(\nabla_{BB'}+iC\Phi_{BB'})\right]\psi=0, \tag{E.4}$$

atau

$$\begin{aligned}
&\Big[(\nabla_{AA'}+iC\Phi_{AA'})\,o^{A}o^{A'}\ell^{B}\ell^{B'}\,(\nabla_{BB'}+iC\Phi_{BB'})\\
&-(\nabla_{AA'}+iC\Phi_{AA'})\,o^{A}o^{B'}\ell^{B}\ell^{A'}\,(\nabla_{BB'}+iC\Phi_{BB'})\\
&-(\nabla_{AA'}+iC\Phi_{AA'})\,o^{B}o^{A'}\ell^{A}\ell^{B'}\,(\nabla_{BB'}+iC\Phi_{BB'})\\
&+(\nabla_{AA'}+iC\Phi_{AA'})\,o^{B}o^{B'}\ell^{A}\ell^{A'}\,(\nabla_{BB'}+iC\Phi_{BB'})\Big]\,\psi=0,
\end{aligned} \tag{E.5}$$

atau

$$\begin{aligned}
&\Big[\Big(\nabla_{AA'}\left(o^{A}o^{A'}\right)+iC\Phi_{00'}\Big)\,(\triangle+iC\Phi_{11'})\\
&-\Big(\nabla_{AA'}\left(o^{A}\ell^{A'}\right)+iC\Phi_{01'}\Big)\,(\delta^{*}+iC\Phi_{10'})\\
&-\Big(\nabla_{AA'}\left(\ell^{A}o^{A'}\right)+iC\Phi_{10'}\Big)\,(\delta+iC\Phi_{01'})\\
&+\Big(\nabla_{AA'}\left(\ell^{A}\ell^{A'}\right)+iC\Phi_{AA'}\Big)\,(D+iC\Phi_{00'})\Big]\,\psi=0.
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Kembali dituliskan hasil dari operator turunan pada $\left\{o^{A},\ell^{A}\right\}$, dan $\left\{o^{A'},\ell^{A'}\right\}$

$$\begin{aligned}
Do^{A}&=\varepsilon^{AB}Do_{B}=\varepsilon o^{A}-\kappa\ell^{A}, & D\ell^{A}&=\varepsilon^{AB}D\ell_{B}=\pi o^{A}-\varepsilon\ell^{A},\\
\triangle o^{A}&=\varepsilon^{AB}\triangle o_{B}=\gamma o^{A}-\tau\ell^{A}, & \triangle\ell^{A}&=\varepsilon^{AB}\triangle\ell_{B}=\nu o^{A}-\gamma\ell^{A},\\
\delta o^{A}&=\varepsilon^{AB}\delta o_{B}=\beta o^{A}-\sigma\ell^{A}, & \delta\ell^{A}&=\varepsilon^{AB}\delta\ell_{B}=\mu o^{A}-\beta\ell^{A},\\
\delta^{*}o^{A}&=\varepsilon^{AB}\delta^{*}o_{B}=\alpha o^{A}-\tilde{\rho}\ell^{A}, & \delta^{*}\ell^{A}&=\varepsilon^{AB}\delta^{*}\ell_{B}=\lambda o^{A}-\alpha\ell^{A}.
\end{aligned} \tag{E.7}$$

$$
\begin{aligned}
Do^{A'} &= \varepsilon^{A'B'} Do_{B'} = \varepsilon^* o^{A'} - \kappa^* \ell^{A'}, & D\ell^{A'} &= \varepsilon^{A'B'} D\ell_{B'} = \pi^* o^{A'} - \varepsilon^* \ell^{A'},\\
\triangle\, o^{A'} &= \varepsilon^{A'B'} \triangle\, o_{B'} = \gamma^* o^{A'} - \tau^* \ell^{A'}, & \triangle\, \ell^{A'} &= \varepsilon^{A'B'} \triangle\, \ell_{B'} = \nu^* o^{A} - \gamma^* \ell^{A'},\\
\delta^* o^{A'} &= \varepsilon^{A'B'} \delta o_{B'} = \beta^* o^{A'} - \sigma^* \ell^{A'}, & \delta^* \ell^{A'} &= \varepsilon^{A'B'} \delta \ell_{B'} = \mu^* o^{A'} - \beta^* \ell^{A'},\\
\delta o^{A'} &= \varepsilon^{A'B'} \delta^* o_{B'} = \alpha^* o^{A'} - \tilde{\rho}^* \ell^{A'}, & \delta \ell^{A'} &= \varepsilon^{A'B'} \delta^* \ell_{B'} = \lambda^* o^{A'} - \alpha^* \ell^{A'}.
\end{aligned}
\tag{E.8}
$$

Beberapa suku yang perlu penulis jabarkan dari persamaan (E.6) yaitu

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{AA'}\left(o^A o^{A'} \psi\right) = \left(D + o^A \nabla_{AA'} o^{A'} + o^{A'} \nabla_{AA'} o^A\right)\psi\\
&= \left(D - \ell_{A'} D o^{A'} - \ell_A D o^A + o_{A'} \delta o^{A'} + o_A \delta^* o^A\right)\psi\\
&= \left(D + \varepsilon + \varepsilon^* - \tilde{\rho}^* - \tilde{\rho}\right)\psi,
\end{aligned}
\tag{E.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{AA'}\left(o^A \ell^{A'} \psi\right) = \left(\delta + o^A \nabla_{AA'} \ell^{A'} + \ell^{A'} \nabla_{AA'} o^A\right)\psi\\
&= \left(\delta - \ell_{A'} D \ell^{A'} - \ell_A \delta o^A + o_{A'} \delta \ell^{A'} + o_A \triangle\, o^A\right)\psi\\
&= \left(\delta + \pi^* + \beta - \alpha^* - \tau\right)\psi,
\end{aligned}
\tag{E.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{AA'}\left(\ell^A o^{A'} \psi\right) = \left(\delta^* + \ell^A \nabla_{AA'} o^{A'} + o^{A'} \nabla_{AA'} \ell^A\right)\psi\\
&= \left(\delta^* - \ell_{A'} \delta^* o^{A'} - \ell_A D \ell^A + o_{A'} \triangle\, o^{A'} + o_A \delta^* \ell^A\right)\psi\\
&= \left(\delta^* + \beta^* + \pi - \tau^* - \alpha\right)\psi,
\end{aligned}
\tag{E.11}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{AA'}\left(\ell^A \ell^{A'} \psi\right) = \left(\triangle + \ell^A \nabla_{AA'} \ell^{A'} + \ell^{A'} \nabla_{AA'} \ell^A\right)\psi\\
&= \left(\triangle - \ell_{A'} \delta^* \ell^{A'} - \ell_A \delta \ell^A + o_{A'} \triangle\, \ell^{A'} + o_A \triangle\, \ell^A\right)\psi\\
&= \left(\triangle + \mu + \mu^* - \gamma - \gamma^*\right)\psi.
\end{aligned}
\tag{E.12}
$$

Langkah terakhir, substitusikan persamaan (E.9), (E.10), (E.11), (E.12) ke persamaan (E.6). Untuk mendapatkan persamaan Klein-Gordon nirmassa yang bermuatan dalam formalisme Newman-Penrose (E.1).

LAMPIRAN F

PENURUNAN SEPARASI PERSAMAAN KLEIN-GORDON

Dalam lampiran ini, penulis bertujuan untuk melakukan separasi variabel pada persamaan Klein-Gordon secara eksplisit. Penulis berangkat dari persamaan Klein-Gordon dalam formalisme Newman-Penrose

$$\begin{aligned}
&[(D+\varepsilon+\varepsilon^*-\tilde{\rho}^*-\tilde{\rho}+iC\Phi_{00'})\,(\triangle+iC\Phi_{11'})\\
&-(\delta+\pi^*-\tau+\beta-\alpha^*+iC\Phi_{01'})\,(\delta^*+iC\Phi_{10'})\\
&-(\delta^*+\beta^*+\pi-\alpha-\tau^*+iC\Phi_{01'})\,(\delta+iC\Phi_{10'})\\
&+(\triangle-\gamma-\gamma^*+\mu+\mu^*+iC\Phi_{11'})\,(D+iC\Phi_{00'})]\,\psi=0,
\end{aligned} \tag{F.1}$$

atau gunakan komutasi (3.76) ke persamaan (F.1) untuk mempermudah hitungan,

$$\begin{aligned}
&[2D\triangle-2\delta\delta^*+2\mu D+(2\varepsilon+2\varepsilon^*-2\tilde{\rho}^*)\triangle-2\pi\delta+(-2\beta+2\alpha^*-2\pi^*)\,\delta^*\\
&+iC\left\{(D+\varepsilon+\varepsilon^*-\tilde{\rho}^*-\tilde{\rho})\,\Phi_{11'}+(-\delta-\pi^*+\tau-\beta+\alpha^*)\,\Phi_{10'}+(\triangle-\gamma-\gamma^*+\mu+\mu^*)\,\Phi_{00'}\right.\\
&\left.+(-\delta^*-\beta^*-\pi+\alpha+\tau^*)\,\Phi_{01'}+\Phi_{00'}\triangle-\Phi_{01'}\delta^*+\Phi_{11'}D-\Phi_{10'}\delta\right\}\\
&\left.-2C^2\left\{\Phi_{00'}\Phi_{11'}-\Phi_{01'}\Phi_{10'}\right\}\right]\psi=0,
\end{aligned} \tag{F.2}$$

atau

$$\begin{aligned}
&[D\triangle+\mu D+(\varepsilon+\varepsilon^*-\tilde{\rho}^*)\triangle-\delta\delta^*-\pi\delta+(-\beta+\alpha^*-\pi^*)\,\delta^*\\
&+\frac{iC}{2}\left\{(D+\varepsilon+\varepsilon^*-\tilde{\rho}^*-\tilde{\rho})\,\Phi_{11'}+(-\delta-\pi^*+\tau-\beta+\alpha^*)\,\Phi_{10'}+(\triangle-\gamma-\gamma^*+\mu+\mu^*)\,\Phi_{00'}\right.\\
&\left.+(-\delta^*-\beta^*-\pi+\alpha+\tau^*)\,\Phi_{01'}+\Phi_{00'}\triangle-\Phi_{01'}\delta^*+\Phi_{11'}D-\Phi_{10'}\delta\right\}\\
&\left.-C^2\left\{\Phi_{00'}\Phi_{11'}-\Phi_{01'}\Phi_{10'}\right\}\right]\psi=0.
\end{aligned} \tag{F.3}$$

Setelah itu, substitusikan persamaan (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), dan (6.10) ke (F.3). Penulis akan menjabarkan tiap sukunya di bawah, namun banyak komponen persamaan di atas yang bernilai nol. Komponen-komponen dari persamaan (F.3) dapat dikerjakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
[D\triangle]\,\psi&=\left[-\sqrt{\frac{\Delta_{KN}}{2\Sigma}}\left(\partial_r+\frac{iK}{\Delta_{KN}}\right)\sqrt{\frac{\Delta_{KN}}{2\Sigma}}\left(\partial_r-\frac{iK}{\Delta_{KN}}\right)\right]\psi\\
&=-\sqrt{\frac{\Delta_{KN}}{2\Sigma}}\left[\partial_r\left(\sqrt{\frac{\Delta_{KN}}{2\Sigma}}\partial_r\right)-\partial_r\left(\frac{iK}{\sqrt{2\Sigma\Delta_{KN}}}\right)+\left(\frac{iK}{\sqrt{2\Sigma\Delta_{KN}}}\right)\partial_r+\frac{K^2}{{\Delta_{KN}}^2}\sqrt{\frac{\Delta_{KN}}{2\Sigma}}\right]\psi,
\end{aligned} \tag{F.4}$$

dimana

$$\partial_r\left(\sqrt{\frac{\Delta_{KN}}{2\Sigma}}\partial_r\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\Delta_{KN,r}}{\Sigma}-\frac{2r\Delta_{KN}}{\Sigma^2}\right)\sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta_{KN}}}\partial_r+\sqrt{\frac{\Delta_{KN}}{2\Sigma}}{\partial_r}^2, \tag{F.5}$$

dan

$$-\partial_r\left(\frac{iK}{\sqrt{2\Sigma\Delta_{KN}}}\right)=\frac{ir\omega\sqrt{2}}{\sqrt{\Sigma\Delta_{KN}}}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{iK\left(2r\Delta_{KN}+\Sigma\Delta_{KN,r}\right)}{\left(\Sigma\Delta_{KN}\right)^{3/2}}\right). \tag{F.6}$$

Maka persamaan (F.4) dapat disederhanakan menjadi

$$[D\,\triangle]\,\psi=\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta_{KN,r}}{\Sigma}-\frac{2r\Delta_{KN}}{\Sigma^2}\right)\partial_r-\frac{\Delta_{KN}}{2\Sigma}{\partial_r}^2-\frac{ir\omega}{\Sigma}-\frac{1}{4}\left(iK\left(\frac{\Delta_{KN,r}}{\Delta_{KN}\Sigma}+\frac{2r}{\Sigma^2}\right)\right)-\frac{K^2}{2\Sigma\Delta_{KN}}\right]\psi. \tag{F.7}$$

Suku-suku lainnya dapat dikerjakan sebagai berikut

$$[(\varepsilon+\varepsilon^*)\,\triangle]\,\psi=\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta_{KN,r}}{\Sigma}-\frac{2r\Delta_{KN}}{\Sigma^2}\right)\left(\partial_r-\frac{iK}{\Delta_{KN}}\right)\right]\psi, \tag{F.8}$$

dan

$$[\mu D-\mu^*\,\triangle]\,\psi=\left[-\left(\frac{r\Delta_{KN}}{\Sigma^2}\partial_r-\frac{aKx}{\Sigma^2}\right)\right]\psi. \tag{F.9}$$

Dengan hasil di atas, kita dapatkan

$$[D\,\triangle+(\varepsilon+\varepsilon^*)\,\triangle-\mu^*\,\triangle+\mu D]\,\psi=\left[-\frac{\Delta_{KN}}{2\Sigma}{\partial_r}^2-\frac{\Delta_{KN,r}}{2\Sigma}\partial_r-\frac{ir}{\Sigma}\left(\omega+\frac{K}{\Sigma}\right)+\frac{aKx}{\Sigma^2}-\frac{K^2}{2\Sigma\Delta_{KN}}\right]\psi. \tag{F.10}$$

Kemudian untuk suku-suku lainnya

$$\begin{aligned}[-\delta\delta^*]\,\psi&=\left[-\frac{1}{\sqrt{2\Sigma}}\left(\sqrt{1-x^2}\partial_x+Q\right)\frac{1}{\sqrt{2\Sigma}}\left(\sqrt{1-x^2}\partial_x-Q\right)\right]\psi\\&=-\frac{1}{\sqrt{2\Sigma}}\left[\sqrt{1-x^2}\partial_x\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{2\Sigma}}\partial_x\right)+\sqrt{1-x^2}\partial_x\left(\frac{-Q}{\sqrt{2\Sigma}}\right)+Q\sqrt{\frac{1-x^2}{2\Sigma}}\partial_x-\frac{Q^2}{\sqrt{2\Sigma}}\right]\psi,\end{aligned} \tag{F.11}$$

dimana

$$\begin{aligned}\partial_x\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{2\Sigma}}\partial_x\right)&=\partial_x\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{2\Sigma}}\right)\partial_x+\sqrt{\frac{1-x^2}{2\Sigma}}{\partial_x}^2\\&=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{\Sigma}+\frac{\left(1-x^2\right)a^2x}{\Sigma^2}\right)\sqrt{\frac{\Sigma}{1-x^2}}\partial_x+\sqrt{\frac{1-x^2}{2\Sigma}}{\partial_x}^2,\end{aligned} \tag{F.12}$$

dan

$$\partial_x\left(\frac{-Q}{\sqrt{2\Sigma}}\right)=\frac{2Qa^2x}{(2\Sigma)^{3/2}}-\frac{x}{\sqrt{2\Sigma}}\left(\frac{a\omega}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{m}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}\right). \tag{F.13}$$

Maka persamaan (F.11) dapat disederhanakan menjadi

$$[-\delta\delta^*]\,\psi=\left[-\frac{\left(1-x^2\right)}{2\Sigma}{\partial_x}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Sigma}+\frac{a^2x\left(1-x^2\right)}{\Sigma^2}\right)\partial_x-\frac{a^2Lx\sqrt{1-x^2}}{2\Sigma^2}+\frac{x}{2\Sigma}\left(a\omega+\frac{m}{1-x^2}\right)-\frac{L^2}{2\Sigma}\right]\psi, \tag{F.14}$$

suku-suku lainnya dapat dikerjakan sebagai berikut

$$[(\alpha+\alpha^*)\,\delta^*]\,\psi=\left[\frac{x\left(a^2+r^2\right)}{2\Sigma^2\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\partial_x-Q\right)\right]\psi, \tag{F.15}$$

dan

$$[\tau\delta+\tau^*\delta^*]\,\psi=\left[\frac{airQ\sqrt{1-x^2}}{\Sigma^2}-\frac{a^2x\left(1-x^2\right)}{\Sigma^2}\partial_x\right]\psi. \tag{F.16}$$

Dengan hasil di atas, kita dapatkan

$$
\begin{aligned}
\left[-\delta\delta^* + \tau\delta + \tau^*\delta^* + (\alpha+\alpha^*)\,\delta^*\right]\psi = &\Bigg[-\frac{1-x^2}{2\Sigma}{\partial_x}^2 + \frac{2x}{2\Sigma}\partial_x - \frac{a^2Qx\sqrt{1-x^2}}{2\Sigma^2} + \frac{iarQ\sqrt{1-x^2}}{\Sigma^2} \\
&-\frac{xQ\left(a^2+r^2\right)}{2\Sigma^2\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{2\Sigma}\left(a\omega + \frac{m}{1-x^2}\right) + \frac{Q^2}{2\Sigma}\Bigg]\psi.
\end{aligned} \tag{F.17}
$$

Suku-suku sisanya yaitu

$$
\begin{aligned}
C^2\Phi_{00'}\Phi_{11'} =\; & C^2{\Phi_{00'}}^2 = C^2{\Phi_{11'}}^2 = \tfrac{C^2q^2r^2}{2\Sigma\Delta_{KN}}, \\
iC\Phi_{00'}\left(D+\,\triangle\right) &= iC\Phi_{11'}\left(D+\,\triangle\right) = \frac{KCqr}{\Sigma\Delta_{KN}}.
\end{aligned} \tag{F.18}
$$

Setelah itu, substitusikan persamaan (F.10), (F.17), dan (F.18) ke persamaan (F.3). Maka diperoleh

$$
\left[-\frac{\Delta_{KN}}{2\Sigma}{\partial_r}^2 - \frac{\Delta_{KN,r}}{2\Sigma}\partial_r - \frac{1-x^2}{2\Sigma}{\partial_x}^2 + \frac{2x}{2\Sigma}\partial_x + \frac{Q^2}{2\Sigma} - \frac{K^2}{2\Sigma\Delta_{KN}} - \frac{C^2q^2r^2}{2\Sigma\Delta_{KN}} + \frac{KCqr}{\Sigma\Delta_{KN}}\right]\psi = 0. \tag{F.19}
$$

Setelah itu, kalikan persamaan (F.19) dengan -2Σ, maka didapatkan

$$
\left[\Delta_{KN}{\partial_r}^2 + \Delta_{KN,r}\partial_r + \left(1-x^2\right){\partial_x}^2 - 2x\partial_x - Q^2 + \frac{(K-Cqr)^2}{\Delta_{KN}}\right]\psi = 0, \tag{F.20}
$$

atau

$$
\left[\partial_r\left(\Delta_{KN}\partial_r\right) + \partial_x\left(\left(1-x^2\right)\partial_x\right) - Q^2 + \frac{F^2}{\Delta_{KN}}\right]\psi = 0, \tag{F.21}
$$

dengan

$$
F = K - Cqr. \tag{F.22}
$$

Selanjutnya, kita jabarkan Q^2. Dimana $Q^2 = a^2\omega^2\left(1-x^2\right) + \frac{m^2}{1-x^2} - 2am\omega$. Maka persamaan (F.21) menjadi

$$
\left[\partial_r\left(\Delta_{KN}\partial_r\right) + \partial_x\left(\left(1-x^2\right)\partial_x\right) - a^2\omega^2 + a^2\omega^2x^2 - \frac{m^2}{1-x^2} + 2am\omega + \frac{F^2}{\Delta_{KN}}\right]\psi = 0, \tag{F.23}
$$

substitusikan *anzast* (5.22) ke persamaan (F.23), maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
&S(x)\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta_{KN}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)e^{-i\omega t+im\phi} + R(r)\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-x^2\right)\frac{\partial S(x)}{\partial x}\right)e^{-i\omega t+im\phi} \\
&\left[-a^2\omega^2 + a^2\omega^2x^2 - \frac{m^2}{1-x^2} + 2am\omega + \frac{F^2}{\Delta_{KN}}\right]e^{-i\omega t+im\phi}R(r)S(x) = 0.
\end{aligned} \tag{F.24}
$$

Selanjutnya, kalikan persamaan (F.24) dengan $\frac{e^{i\omega t-im\phi}}{R(r)S(x)}$. Maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta_{KN}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{S(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-x^2\right)\frac{\partial S(x)}{\partial x}\right) \\
&-a^2\omega^2 + a^2\omega^2x^2 - \frac{m^2}{1-x^2} + 2am\omega + \frac{F^2}{\Delta_{KN}} = 0,
\end{aligned} \tag{F.25}
$$

atau

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{S(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-x^2\right)\frac{\partial S(x)}{\partial x}\right)+a^2\omega^2x^2-\frac{m^2}{1-x^2}\\
&=-\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta_{KN}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)-\frac{F^2}{\Delta_{KN}}+a^2\omega^2-2am\omega.
\end{aligned} \tag{F.26}$$

Pada kedua ruas persamaan (F.26) memiliki variabel yang berbeda. Agar kedua ruas harus sama, maka digunakannya sebuah konstanta yang disebut konstanta separasi $\chi = l(l+1)$. Maka didapatkan persamaan untuk fungsi radial $R(r)$, dan fungsi angular $S(x)$ adalah

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{S(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-x^2\right)\frac{\partial S(x)}{\partial x}\right)+a^2\omega^2x^2-\frac{m^2}{1-x^2}=-\chi\\
&\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta_{KN}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{F^2}{\Delta_{KN}}-a^2\omega^2+2am\omega=\chi,
\end{aligned} \tag{F.27}$$

atau biasanya dituliskan dalam bentuk

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta_{KN}\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\left[\frac{F^2}{\Delta_{KN}}+2am\omega-a^2\omega^2-\chi\right]R(r)=0, \tag{F.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-x^2\right)\frac{\partial S(x)}{\partial x}\right)+\left[a^2\omega^2x^2-\frac{m^2}{1-x^2}+\chi\right]S(x)=0. \tag{F.29}$$