Beispiel 5.38 1-3, 5.44c, 5.57, 5.59 1-4, 5.60 1-3

5.38)1-3)

$$f(x) := \frac{1}{32} \cdot x^4 - \frac{3}{4} \cdot x^2 + 7.5 \rightarrow 0.03125 \cdot x^4 + \left(7.5 - 1.0 \cdot 0.75 \cdot x^2\right)$$

$$f'(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \rightarrow 0.125 \cdot x^3 - 1.5 \cdot x$$

$$f''(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'(x) \rightarrow 0.375 \cdot x^2 - 1.5$$

root-Befehl liefert nummerische Lösungen

$\mathbf{root}(x)$

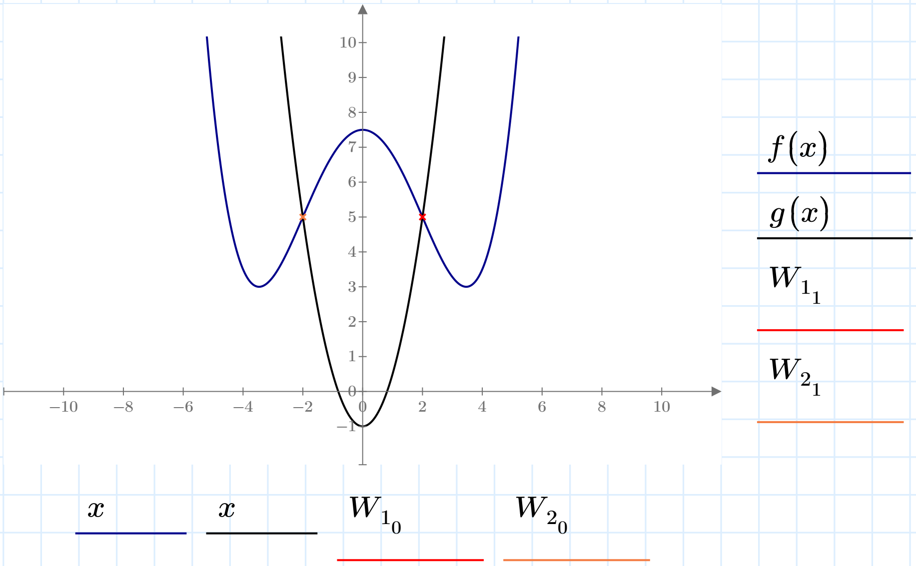
$$g(x) := 1.5\ x^2 - 1$$

$$W := f''(x) = 0 \xrightarrow[]{\substack{solve, x \\ assume, x = real}} \begin{bmatrix} 2.0 \\ -2.0 \end{bmatrix}$$

$$W_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ f\left(W_0\right) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

$$W_2 := \begin{bmatrix} W_1 \\ f\left(W_1\right) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2.0 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

Graphische Darstellung



Höhe)

$h := f(0) - g(0) \rightarrow 8.5$

die Höhe des Schildes beträgt: 8.5dm

Breite)

$b := W_{1_0} - W_{2_0} \rightarrow 4.0$

die Breite des Schildes beträgt: 4dm

Beispiel 5.44c)

$$f(x) := \frac{(x-1)}{(x^2-4)}$$

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{-x^2 + 2 \cdot x - 4}{x^4 - 8 \cdot x^2 + 16}$$

$$f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x) \rightarrow \frac{2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 8}{x^6 - 12 \cdot x^4 + 48 \cdot x^2 - 64}$$

$$f'''(x) := \frac{d}{dx} f''(x) \rightarrow \frac{-(6 \cdot x^4) + 24 \cdot x^3 - 144 \cdot x^2 + 96 \cdot x - 96}{x^8 - 16 \cdot x^6 + 96 \cdot x^4 - 256 \cdot x^2 + 256}$$

Definitionsmenge

$$D := x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{solve, x} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

D=R/{-2,2}, Die Unstetigkeitsstellen sind Polstellen also hat die Funktion Polstellen bei: x1= 2, x2=-2
Noch dazu ist die Funktion nicht stetig und hat keine Lücken.

senkrechte Asymptoten bei

$$x_1 := D_0 \rightarrow 2 \qquad x_2 := D_1 \rightarrow -2$$

schräge Asymptoten bei

Schräge Asymptote, wo das x im Nenner nicht vorkommt.

$$A(x) := f(x) \rightarrow \frac{x-1}{x^2-4} \xrightarrow[expand]{parfrac} \frac{1}{4 \cdot x - 8} + \frac{3}{4 \cdot x + 8}$$

$$a_s := \lim_{x \to \infty} A(x) \rightarrow 0$$

Verhalten an der Unstetigkeitsstellen

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \to -2^-} f(x) \rightarrow -\infty$$

Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \rightarrow 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) \rightarrow 0$$

Nullstellen der Funktion

$$N_{ALL} := f(x) = 0 \xrightarrow[assume, x = real]{solve, x} 1$$

$$N_1 := \begin{bmatrix} N_{ALL} \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Extremstelen der Funktion

$$E := f'(x) = 0 \xrightarrow{solve, x} \begin{bmatrix} -\left(\sqrt{3} \cdot 1i\right) + 1 \\ \sqrt{3} \cdot 1i + 1 \end{bmatrix}$$

keine Extremstellen

Wendestellen

$$W := f''(x) = 0 \xrightarrow[]{\substack{solve, x \\ assume, x = real}} 0.36216574725550426779$$

$$W_1 := \begin{bmatrix} f(W) \\ W \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.16486464079653098263 \\ 0.36216574725550426779 \end{bmatrix}$$

Wendetangenten

$$k := f'(W) \rightarrow -0.22760937781371777329$$

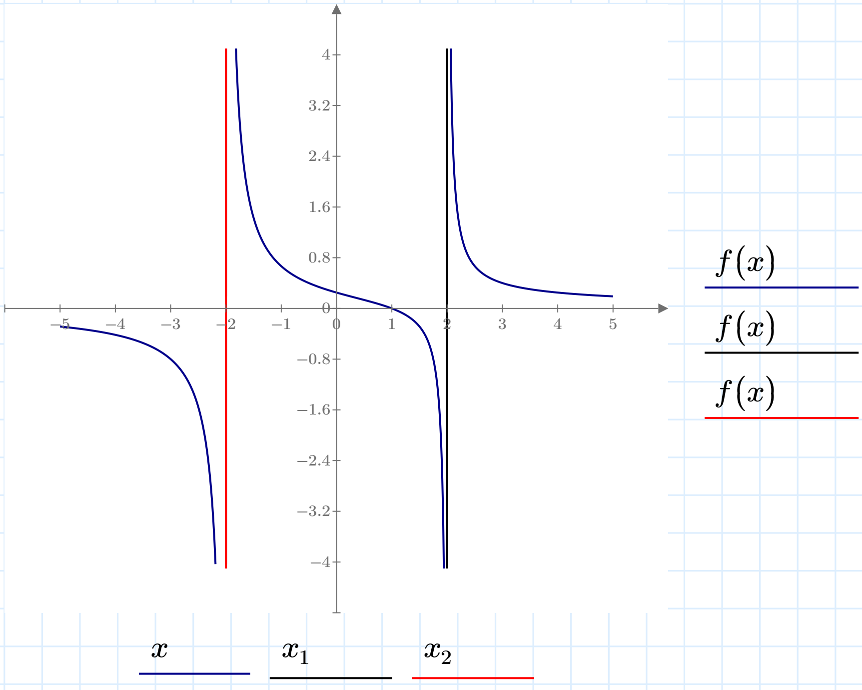
$$d := {W_1}_0 = k \cdot W + d \xrightarrow{solve, d} 0.24729696119479647489 42$$

$$t(x) = k \cdot x + d \rightarrow t(x) = -0.22760937781371777329 \cdot x + 0.24729696119479647489 42$$

Monotonie

streng monoton fallend: $]-2, 2..$
$[$ und $]-\infty, 2..[$ und $]2, \infty..[$

Grafik



Beispiel 5.57)

$$f(x) := \frac{(1)}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} \rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}}{2 \cdot \sqrt{\pi}}$$

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{-\left(x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\right)}{2 \cdot \pi}$$

$$f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x) \rightarrow \frac{\left(x^2 - 1\right) \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}}{2 \cdot \pi}$$

Definitionsbereich

D=R

Es handelt sich um eine stetige Funktion.
Es sind keine Polstellen vorhanden. Die Funktion hat keine Lücken.

Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \to 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) \to 0$$

Nullstellen

$$N := f(x) = 0 \xrightarrow{solve,\, x} 33.184360427091098049$$

keine Nullstellen

Extremstellen

$$\boxed{E} := f'(x) = 0 \xrightarrow[]{\substack{solve,\, x \\ assume,\, x = real}} 0$$

$$f''(E) \to \frac{-\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{\pi}}$$

$$H := \begin{bmatrix} E \\ f(E) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \end{bmatrix}$$

Wendestellen

$$\boxed{W} := f''(x) = 0 \xrightarrow[]{\substack{solve,\, x \\ assume,\, x = real}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{W_1} := \begin{bmatrix} W_0 \\ f(W_0) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{e}} \end{bmatrix} \qquad \boxed{W_2} := \begin{bmatrix} W_1 \\ f(W_1) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{e}} \end{bmatrix}$$

Wendetangenten

$$k_1 := f'(W_0) \to \frac{-\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{e}} \qquad k_2 := f'(W_1) \to \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{e}}$$

$$d_1 := W_{1_1} = k_1 \cdot W_{1_0} + d_1 \xrightarrow{solve,\, d_1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{e}}$$

$$d_2 := W_{2_1} = k_2 \cdot W_{\,_1} + d_2 \xrightarrow{solve,\, d_2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{e}}$$

$$t_1(x) := k_1 \cdot x + d_1 \rightarrow -\frac{\sqrt{2} \cdot x}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{e}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{e}}$$

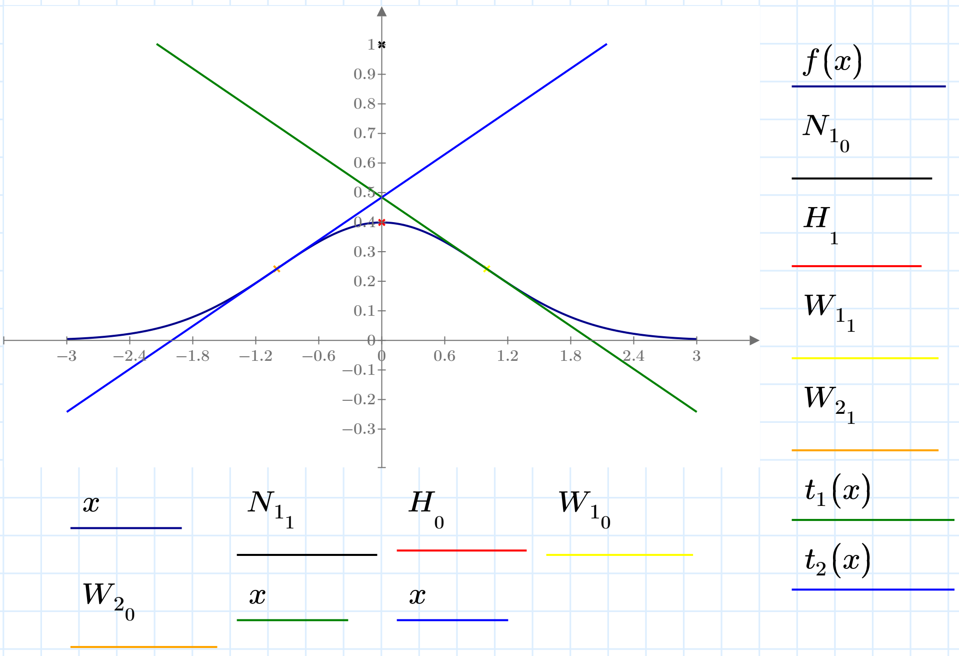
$$t_2(x) := k_2 \cdot x + d_2 \rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot x}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{e}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{e}}$$

Monotonie

streng monoton steigend:]-3,0[

streng monoton fallend :]0,3[

Graphische Darstellung im Intervall von [-3,3]



5.59 1-4

$$K(t) := 6 \cdot \left(e^{-0.11 \cdot t} - e^{-0.5 \cdot t}\right)$$

$$K'(t) := \frac{d}{dt} K(t) \rightarrow -0.66 \cdot e^{-0.11 \cdot t} + 3.0 \cdot e^{-0.5 \cdot t}$$

$$K''(t) := \frac{d}{dt} K'(t) \rightarrow 0.0726 \cdot e^{-0.11 \cdot t} - 1.5 \cdot e^{-0.5 \cdot t}$$

1)

$$E := K'(t) = 0 \xrightarrow{solve, t} 3.8823788016148090117$$

$$K''(E) \rightarrow -0.16793376185507599468$$

$$H := \begin{bmatrix} E \\ K(E) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3.8823788016148090117 \\ 3.0533411246377453579 \end{bmatrix}$$

Die ist bei 3.88h Maximal mit 3.05mg/L

2) Abhame am stärksten

$$W := K''(t) = 0 \xrightarrow{solve, t} 7.7647576032296180234$$

Die Abnahme der Konzentration ist bei 7.76h am stärksten.

3) 30% der max Konzentration

$$p_y := \frac{H_1}{100} \cdot 30 \rightarrow 0.91600233739132360737$$

$$p_x := \text{root}\left(K(x) - p_y, x, 5, 50\right) = 17.075$$

$$P := \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 17.074661199826746 \\ 0.91600233739132360737 \end{bmatrix}$$

A: nach 17.07 stunden betragt die Konzentration 0.92 mg/L. Dies entspricht 30% der Maximalen Konzentration.

4) K für t gegen unendlich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) \rightarrow 0.0$$

Für den unendlichen Bereich nähert sich die Funktion 0.

5.60)

$y(t) := 0.06 \cdot e^{-4 \cdot t} - 0.06 \cdot e^{-8 \cdot t}$

$y'(t) := \frac{d}{dt} y(t) \rightarrow -0.24 \cdot e^{-4.0 \cdot t} + 0.48 \cdot e^{-8.0 \cdot t}$

$y''(t) := \frac{d}{dt} y'(t) \rightarrow 0.96 \cdot e^{-4.0 \cdot t} - 3.84 \cdot e^{-8.0 \cdot t}$

Definitionsbereich, Polstellen, Stetigkeit, gerade/ungerade

D = R

Keine Polstellen,
Keine Wendepunkte
gerade
stetig

Nullstellen

$N := y(t) = 0 \xrightarrow[\text{assume}, t = \text{real}]{\text{solve}, t} 0.0$

$N_1 := \begin{bmatrix} N \\ y(N) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 33.184360427091098049 \\ 0.13521123341040378003 \cdot 10^{-58} \end{bmatrix}$

Asymptotisches Verhalten

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow 0.0$

$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) \rightarrow -\infty$

Extremstellen

$E := y'(t) = 0 \xrightarrow[\text{assume}, t = \text{real}]{\text{solve}, t} 0.17328679513998632735$

$y''(E) \rightarrow -0.48000000000000000025$

$H := \begin{bmatrix} E \\ y(E) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.17328679513998632735 \\ 0.015 \end{bmatrix}$

Monotonieverhalten

streng monoton steigend $]-\infty, 0..[$

Wendestellen, Wendetangenten

$$W := y''(t) = 0 \xrightarrow[\text{assume}, t = real]{\text{solve}, t} 0.34657359027997265471$$

$$W_1 := \begin{bmatrix} W \\ y(W) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.34657359027997265471 \\ 0.01125 \end{bmatrix}$$

$$k := y'(W) \rightarrow -0.03$$

$$d_t := W_{1_1} = k \cdot W_{1_0} + d_t \xrightarrow[\text{assume}, d_t = real]{\text{solve}, d_t} 0.021647207708399179641З$$

$$t(x) := k + x + d_t \rightarrow x - 0.0083527922916008203587$$

2)

Die erste Ableitung gibt die Momentangeschwindigkeit an einem gewissen Punkt an.

3)

Die t-Koordinate gibt die Maximale Auslenkung an und die y-Koordinate gibt den Maximalen Abstand der Ruhelage an.