Arbeitsblatt 1.1 am 08.10.2023

Stevan Vlajić

19) a)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 4 \quad b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 100 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 8,9 \\ -7,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}$

$A \cdot x = b \mid \cdot A^{-1} \qquad b = A^{-1} \cdot x \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A'$

$a_{11} = (-1)^2 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2$

$a_{12} = (-1)^3 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$

$a_{13} = (-1)^4 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = -2$

$a_{21} = (-1)^3 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = -3$

$a_{22} = (-1)^4 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2$

$a_{23} = (-1)^5 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$

$a_{31} = (-1)^4 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right) = 8$

$a_{32} = (-1)^5 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = -4$

$a_{33} = (-1)^6 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = 0$

$A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in R_3^3$

$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,75 & 2 \\ 0 & 0,5 & -1 \\ -0,5 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{x_1}} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,75 & 2 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ -0,5 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}} \in R_3^1$

$\underline{\underline{x_2}} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,75 & 2 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ -0,5 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 100 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 199,25 \\ -100,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}}} \in R_3^1$

$\underline{\underline{x_3}} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,75 & 2 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ -0,5 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8,9 \\ -7,3 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 12,725 \\ -5,05 \\ -6,275 \end{pmatrix}}} \in R_3^1$

b) 19)

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = -10 \quad A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot A'$

$a_{11} = (-1)^2 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right) = -5$

$a_{12} = (-1)^3 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right) = -1$

$a_{13} = (-1)^4 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2$

$a_{21} = (-1)^3 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 5$

$a_{22} = (-1)^4 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right) = 7$

$a_{23} = (-1)^5 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = -4$

$a_{31} = (-1)^4 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = -5$

$a_{32} = (-1)^5 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = -5$

$a_{33} = (-1)^6 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 0$

$A' = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 \\ -1 & 7 & -5 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in R_3^3$

$A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 \\ -1 & 7 & -5 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,1 & -0,7 & 0,5 \\ -0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{x_1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,1 & -0,7 & 0,5 \\ -0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ -4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1,5 \\ -2,5 \\ 0 \end{pmatrix}}} \in R_3^1$

$\underline{x_2} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,1 & -0,7 & 0,5 \\ -0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ -4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -8 \\ -17,6 \\ 7,2 \end{pmatrix}}} \in R_3^1$

$x_3 = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,1 & -0,7 & 0,5 \\ -0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 9,6 \\ -3,2 \end{pmatrix}}} \in R_3^1$

Beispiel 9) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$a_{11} = 1 \cdot 3 = 3$
$a_{12} = -2$
$a_{21} = -4$
$a_{22} = 3$

$\det(A) = 1$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \det(A)$

$A' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$b_{11} = -3$
$b_{12} = -4$
$b_{21} = 1$
$b_{22} = 2$

$\det(B) = -2$ $\quad B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$B' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

30)
$x - 3z = -3$
$x + 2y - kz = 1$
$2x + ky - 26z = 10$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -k \\ 2 & k & -26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$A \cdot x = b \quad x = A^{-1} b$

b)
$\det(A) = (-52 - 3k) - (-12 - k^2) = -50 - 3k + k^2$

Es kann für $k = -5, k = 8$ keine bzw unendlich viele Lösungen geben.
siehe Bsp c) $\boxed{k=8}$ $\boxed{k=-5}$

c)

$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & +2 \\ 2 & -2 & -26 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A'') = -30$ $\quad \boxed{k=-2} \rightarrow$ möglich

$a_{11} = (-1)^2 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -26 \end{pmatrix}\right) = -48$
$a_{12} = (-1)^3 \cdot \cancel{\det}(-30) = 30$
$a_{13} = (-1)^4 \cdot (-4) = -4$
$a_{21} = (-1)^3 \cdot (-6) = 6$
$a_{22} = (-1)^4 \cdot (-20) = -20$
$a_{23} = (-1)^5 \cdot (-2) = 2$
$a_{31} = (-1)^4 \cdot (+6) = 6$
$a_{32} = (-1)^5 \cdot (5) = 5$
$a_{33} = (-1)^6 \cdot (2) = 2$

$A^{-1} = A'' \cdot \frac{1}{-30}$

$A'' = \begin{pmatrix} -48 & 6 & 6 \\ 30 & -20 & 5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) = \begin{pmatrix} \frac{48}{30} & -\frac{6}{30} & -\frac{6}{30} \\ -1 & \frac{20}{30} & -\frac{5}{30} \\ +\frac{4}{30} & -\frac{2}{30} & -\frac{2}{30} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_3$

$x = \begin{pmatrix} \frac{48}{30} & -\frac{6}{30} & -\frac{6}{30} \\ -1 & \frac{20}{30} & -\frac{5}{30} \\ \frac{4}{30} & -\frac{2}{30} & -\frac{2}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5,\overline{33} \\ -1,\overline{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ \frac{16}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$\boxed{k=8} \rightarrow$

$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -8 \\ 2 & 8 & -26 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A''') = -52 - 24 - (-12 - 64) = 0$
$-76 + +76$ $\quad \frac{1}{0}$

Nicht möglich $\rightarrow$ unendlich viele Lösungen

$A' =$

$\boxed{k=8}$

Beispiel 30) c) $\boxed{k=4}$

(Einfacher gelöst als für $k=2$)

$$\begin{aligned} x-3z&=-3 \\ x+2y-4z&=1 \quad |\cdot(-1) \\ 2x+4y-26z&=10 \quad |:2;\ |\cdot(-1) \\ 2y \quad 13z &\quad 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-3z&=-3 \\ -x-2y+4z&=1 \\ \hline 0 \quad \boxed{z-2y} &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y-4z&=1 \\ -x-2y+13z&=-5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 9z&=-4 \end{aligned}$$

$$z=-\frac{4}{9}$$

$$y=\frac{-4+\frac{4}{9}}{2}\cdot(-1)=\frac{16}{9}$$

$$x-3\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=-3$$

$$x=-\frac{13}{3}$$

$$x=\begin{pmatrix} -\frac{13}{3} \\ \frac{16}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix} \quad \boxed{k=4}$$

d) Ebenengleichung?

?

20) a)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A_2}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 29 & 45 \\ 13 & 26 \end{pmatrix}}_{A_3} \in \mathbb{R}_3^2$$

– A_3 Rohstoffe werden für die Endproduktion gebraucht

c)

$$\begin{pmatrix} 100 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 29 & 13 \\ 24 & 45 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9300 & 16400 & 9100 \end{pmatrix}$$

A^T

$$\begin{pmatrix} 15 & 10 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9300 \\ 16400 \\ 9100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 494600 \end{pmatrix}$$

Die Gesamtproduktionskosten liegen bei 494600 GE.