**MODUL PERKULIAHAN**

# Kalkulus

## Relasi Klasik

| Program Studi | Tatap Muka | Kode MK | Disusun Oleh |
| --- | --- | --- | --- |
| Rekayasa Perangkat Lunak | **10&11** | MKP105 | Caesar Angga Perdana, S.Kom, MT |


### Abstract

Modul ini membahas tentang Relasi Klasik.


### Kompetensi

Diharapkan mahasiswa mengetahui dan memahami Relasi Klasik.

.

# Komposisi Relasi

Komposisi relasi adalah operasi mengkombinasikan 2 buah relasi binary yang cocok atau sesuai dan menghasilkan sebuah relasi binary yang baru. Agar dua buah relasi dapat dikomposisikan maka relasi P dan Q didefinisikan sebagai berikut:

P: X→Y

Q: Y→Z

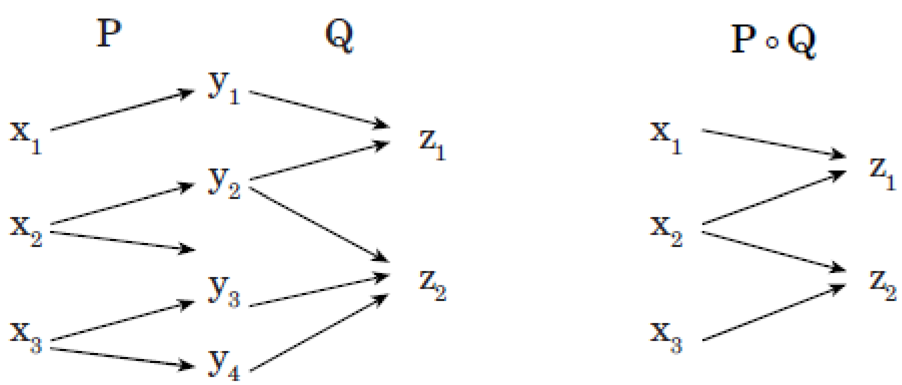
Dimana Y di P harus sama dengan Y di Q.

Relasi P ke Q atau P.Q, didefinisikan sebgai relasi:

R: X → Z

Dengan (x,z) є R jika dan hanya jika anggota y dalam himpunan Y mempunyai pasangan minimal 1 dalam himpunan P dan Q.

Contoh:




Sifat-sifat komposisi relasi

a. Asosiatif

   (P.Q) . R = P . (Q . P).

b. Tidak Komutatif

   P . Q ≠ Q . P

c. (P . $Q)^{-1}$ = $Q^{-1}$ . $P^{-1}$

# Ekivalen, Kompatibel dan Ordering Relasi

Ekivalen relasi, kompatibel relasi dan ordering relasi adalah tiga jenis relasi yang penting.

1. Relasi Ekivalen

   Sebuah relasi binary dikatakan ekivalen bila memenuhi sifat refleksi, simetri dan transitif.

   Sebuah relasi bersifat refleksi jika dan hanya jika (x,x) є R untuk setiap x є X.

   Sebuah relasi bersifat simetri jika dan hanya jika untuk setiap pasangan anggota himpinan X katakanlah (x,y) adalah anggota relasi, maka (y,x) juga anggota relasi. Atau jika (x,y) є R, maka (y,x) adalah є R.

   Sebuah relasi bersifat transitif jika dan hanya jika 3 anggota x,y,z dalam himpunan X; (x,y) є R, (y,z) є R, maka (x,z) є R.

   Contoh:

   Misalkan nama mahasiswa, nilai, mata kuliah, umur ditabelkan seperti dibawah ini:

| Nama | Nilai | Mata kuliah | Umur |
|---|---|---|---|
| Ali | B | MatDis | 19 |
| Beni | C | Met Num | 19 |
| Cica | C | Kalkulus | 20 |
| Dani | A | Kalkulus | 19 |
| Eva | A | Kalkulus | 19 |
| Fani | A | Fisika | 21 |
| Galih | B | Alin | 21 |
| Hani | C | MatDis | 19 |
| Ina | B | MatDis | 19 |
| Jono | B | Fisika | 21 |

   Karena huruf pertama nama-nama mahasiswa berlainan, maka himpunan mahasiswa dapat kita definisikan sebagai berikut:

   X = {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J}

   Selanjutnya buat relasi R dari X ke X berdasarkan nilai mahasiswa

$R : X \rightarrow X$

$R = \{(A, A), (A, G), (A, I), (A, J), (B, B), (B, C), (B, H), (C, B), (C, C), (C, H), (D, D), (D, E), (D, F), (E, D), (E, E), (E, F), (F, D), (F, E), (F, F), (G, A), (G, G), (G, J), (G, I), (H, B), (H, C), (H, H), (I, A), (I, G), (I, I), (I, J), (J, A), (J, G), (J, I), (J, J)\}$

Bila relasi $R : X \rightarrow X$ kita paparkan dalam bentuk matrik:

| R | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| B | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| C | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| H | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| I | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| J | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

**Perhatikan;**

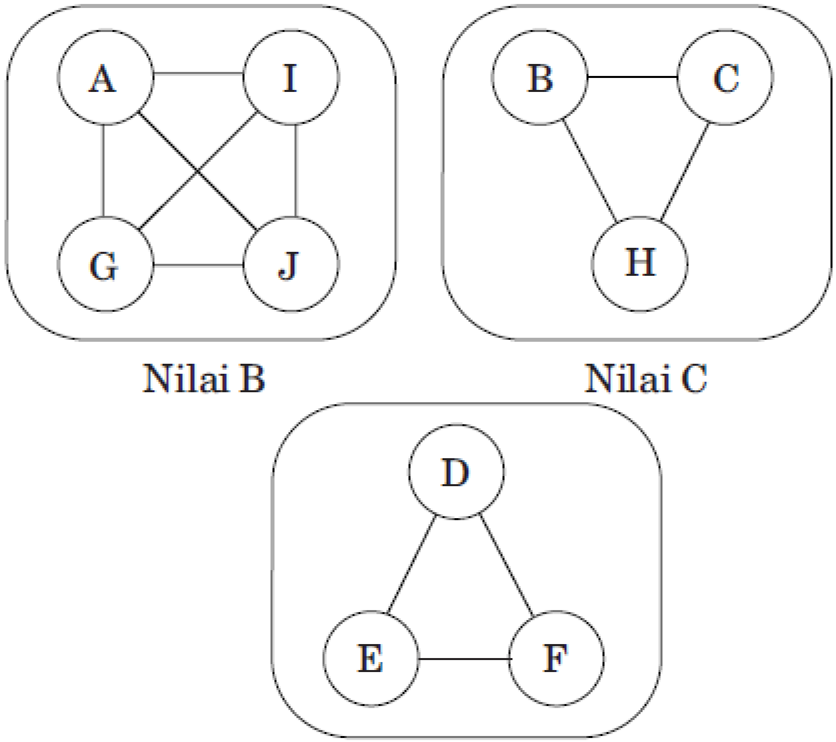
R refleksi karena(A,A),(B,B),..., (J,J) anggota relasi

R simetri karena (A, G), (G, A), ... semua pasangan bolak-baliknya anggota R

R transitif karena (A,G), (G,J) dan (A,J) anggota R

Jadi $R : X \rightarrow X$ berdasarkan nilai mahasiswa adalah relasi ekivalen.

Paparan relasi ekivalen dengan graph berarah:

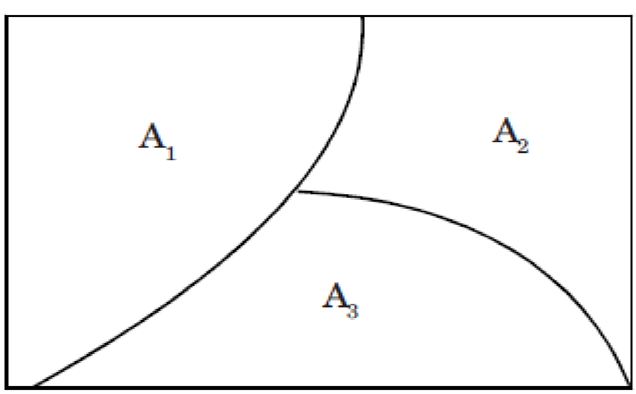



Nilai B Nilai C

Nilai A

Graph di atas pada setiap lingkaran mempunyai relasi dengan dirinya sendiri (refleksi) dan garis penghubung boleh tidak diberi arah, yang berarti setiap garis penghubung mempunyai arah bolak-balik. Relasi ekivalen yang kita kelompokan berdasarkan nilai diatas disebut *equivalent classes.*

Partisi adalah himpunan bagian dari suatu himpunan dengan aturan: tidak overlap, lengkap dan bukan subhimpunan kosong. Partisi dari *equivalent classes* diatas adalah sebagai berikut:



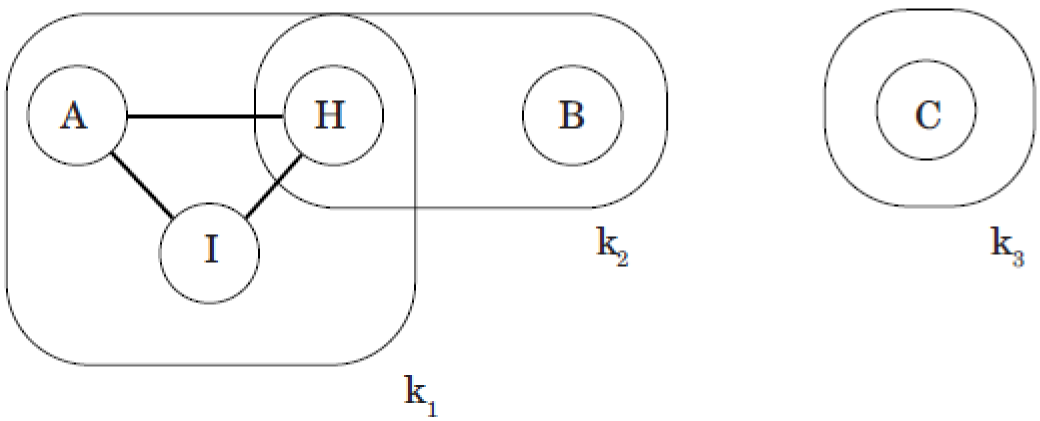
Sel $A_1$ adalah himpunan bagian dari himpunan relasi $R: X \rightarrow X$ dengan nilai B

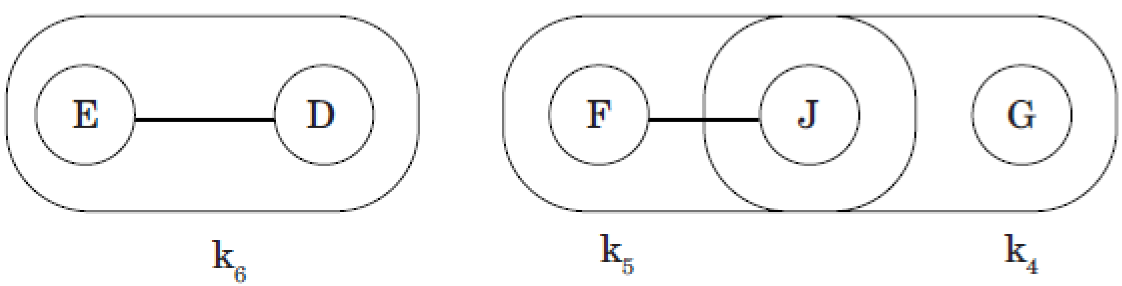
Sel $A_2$ adalah himpunan bagian dari himpunan relasi $R: X \rightarrow X$ dengan nilai C

Sel $A_3$ adalah himpunan bagian dari himpunan relasi $R: X \rightarrow X$ dengan nilai A

2. Relasi Kompatibel

Sebuah relasi binary dikatakan kompatibel bila memenuhi sifat refleksi dan simetri, tetapi tidak harus transitif. Dari table sebelumnya kita dapat membuat relasi kompatibel sebagai berikut:




Dari contoh diatas ada enam kelompok mahasiswa dengan relasi kompatibel, yaitu:

- Ali, Hani dan Ina.
- Hani dan Beni.
- CIca dengan dirinya sendiri.
- Galih dan Jono.
- Fani dan Jono.
- Dani dan Eva.

3. POSET (partially ordered set)

Sebuah relasi binary R pada himpunan smssta S dikatakan poset, jika relasi R tersebut bersifat: refleksi, antisimetri dan transitif.

Sebuah relasi binary bersifat anti simetri jika dan hanya jika untuk x dan y anggota himpunan X, bila (x,y) є R dan (y,z) є R maka x =y.

Partially ordered set sering dinyatakan dengan “mendahului” atau “didahului”, misal:

A < B, A mendahului B.

B > A, B didahului A.

A <= B, A langsung mendahului B.

B >= A, B langsung didahului A.

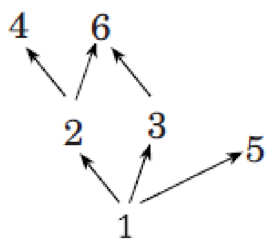
A // B, A tidak dapat dibandingkan dengan B.

Partially ordered set sering dipaparkan dengan diagram Hess, perhatikan contoh dibawah ini.

Misalkan relasi R adalah hubungan dalam himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} yang didefinisikan oleh

“x membagi y”

Maka R adalah sebuah orde partial dalam A yang dapat digambarkan dengan diagram Hess sebagai berikut:



Dari diagram Hess di atas dapat kita lihat bahwa:

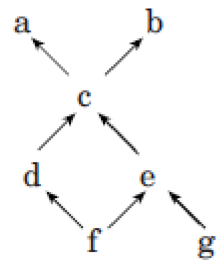
$1 < 4$ , 1 mendahului 4
$1 \leq 2$ , 1 langsung mendahului 2
$2 // 3$ , 2 tidak dapat dibandingkan dengan 3
$4 > 1$ , 4 didahului 1
$2 \geq 1$ , 2 langsung didahului 1

Dalam Poset terdapat istilah-istilah yang penting seperti:

- *Upper bound* (ub) = batas atas
  adalah semua elemen himpunan diatas himpunan bagian yang akan kita cari batas atas nya, dimana setiap elemen dalam himpunan bagian itu dapat dibandingkan dengan semua elemen batas atasnya
- *Least upper bound* (lub) = supremum = batas atas terkecil
  adalah elemen dari upper bound yang paling dekat atau langsung didahului himpunan bagian yang kita cari batas atas terkecilnya
- *Lower bound* (lb) = batas bawah
  adalah semua elemen himpunan di bawah himpunan bagian yang akan kita cari batas bawah nya, dimana setiap elemen dalam himpunan bagian itu dapat dibandingkan dengan semua elemen batas bawah nya.
- *Greatest lower bound* (glb) = Infimum = batas bawah terbesar.
  adalah elemen dari lower bound yang paling dekat atau langsung mendahului himpunan bagian yang kita cari batas bawah terbesarnya.

**Contoh:**

Misalkan himpunan A = {a, b, c, d, e, f, g} diorder menurut diagram Hess di bawah.




Pandang sub himpunan A yaitu himpunan B = {c, d, e}

**Maka**

- batas atas dari B = ub (B) = a, b, c.  c termasuk batas atas karena  c mendominsi d dan e.  c termasuk batas atas dari B karena c langsung didahului oleh d dan e
- batas bawah dari B = lb (B) = f, g bukan batas bawah dari B karena g tidak mendahului d, g dan d tidak dapat dibandingkan
- batas atas terkecil dari B adalah c karena c langsung mendahului a dan b (c mendominasi a dan b)
- batas bawah terbesar dari B = glb (B) = f

Poset dapat memiliki glb dan lub lebih dari 1 (tidak tunggal)

# Daftar Pustaka

1. Apotsol, Tom M. 1967. Calculus Volume I. Second Edition. New York : John Wiley & Sons, Inc.

2. Baisuni, H.M. Hasyim. 1986. Kalkulus. Jakarta : UI – Press.

3. Soesianto, F. & Dwijono, D. 2006. Logika Matematika untuk Ilmu Komputer. Andi Offset: Yogyakarta.

4. Amir, F.M. & Prasojo, H. B. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar. UM. Sidoarjo.

5. Wibisono, Samuel. 2008. Matematika Diskrit. Graha Ilmu: Yogyakarta.