

通过伊辛模型模拟简单神经网络

侯国一（学号：2014301020077）

I. 摘要

借助二维伊辛模型对神经网络及其记忆机制进行了简单模拟，并讨论了网络部分损坏对其记忆的影响。

II. 背景介绍

A. 伊辛模型

伊辛模型是一个非常简单的模型，在一维、二维或三维的每个格点上占据一个自旋。每个自旋在空间有两个量子化的方向——向上或向下，即其取值为 ± 1 。^[1]如图(1)

```

+ + +
+ + +
+ + +

```

Fig. 1: 一个简单的二维伊辛模型，+代表自旋向上

在伊辛模型中可以引入特定的相互作用的参数，使得每个格点的自旋互相影响。设系统中任意两个格点 i, j 的自旋分别为 s_i, s_j ，则系统的总相互作用能定义为

$$E = - \sum_{i,j} J_{i,j} s_i s_j \quad (1)$$

假设 J 为正值，此时当所有格点自旋平时系统能量最低。

B. 神经网络

一个神经网络通常由大量神经元组成，神经元之间通过突触传递信息。树突接受其他神经元的刺激或抑制信号；轴突可以将兴奋或抑制传递给其他神经元。

III. 正文

A. 神经网络的伊辛模型

我们用格点代表神经元，用自旋向上或向下代表神经元的两种简化的状态，即兴奋或抑制。并用相互作用参数 $J_{i,j}$ 描述两个神经元的的信息传递模式。这样就构建了一个非常简单的神经网络的模型。

记忆是神经网络的一个重要功能，通常认为记忆的产生与新突触的形成有关，即记忆与神经元之间的联系

相关。与之对应，我们可以选取恰当的相互作用参数矩阵 $J_{i,j}$ 模拟神经网络的记忆机制。

为了直观的表现记忆的存储与调用，我们将神经元放在一个二维表格上，将所有神经元兴奋或抑制所构成的二维图像看作这个神经网络对一种特定模式的记忆，而由基本相似的图案得到特定的记忆图像的过程即为这项记忆的调用。

为了模拟这个过程，我们可以采用蒙特-卡罗方法。对网络中的每个格点，计算其与其他所有格点的相互作用能：

$$E_i = - \sum_j J_{i,j} s_i s_j \quad (2)$$

若 $E_i > 0$ ，则将其自旋方向转置，以使相互作用能降低。这个过程也可以理解为，接受到的抑制信号多于刺激信号时，神经元将变为抑制状态，反之则变为兴奋。

通过多次迭代上述运算，最终整个网络将维持在一个能量处于极小值的稳定状态。为了使这个稳定状态对应预设的记忆图案，需要合理选取 $J_{i,j}$ 。在最简单的情况下，对于一种给定的图案 m ，第 i 个格点的自旋为 $s_i(m)$ ，则可以取 $J_{i,j}$ 为：

$$J_{i,j} = s_i(m) s_j(m) \quad (3)$$

此时当系统处于图案 m 时，总相互作用能处于最小值。

B. 计算模拟

通过简单的算法即可实现这个神经网络模型的模拟。

- 1 存入需要记忆的格点图案
- 2 由格点图案套用式(3)计算相互作用参数矩阵 $J_{i,j}$
- 3 随机打乱几个格点的自旋方向生成一个相似图案
- 4 用蒙特-卡罗方法进行迭代直至得到稳定图案
- 5 判断得到的图案与原本的图案是否相同

以 6×10 点格中的字母“a”为给定图案，进行模拟的结果如图(2)

C. 多个图案的识别

为了让这个神经网络的模型能同时记忆多个图案，需要改变相互作用参数矩阵 $J_{i,j}$

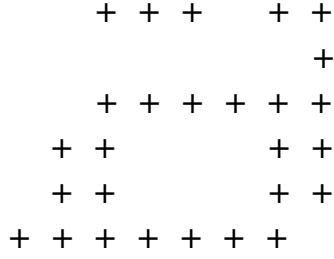


Fig. 2: 上侧与”a”相似的图案，下侧为经过一次蒙特卡罗过程后识别出的图案 “a”

对于M个不同图案，取 $J_{i,j}$ 为

$$J_{i,j} = \frac{1}{M} \sum_m s_i(m) s_j(m) \quad (4)$$

算法类似于上个部分，这一次选取多个字母图案并分别进行识别，模拟结果如图(3)

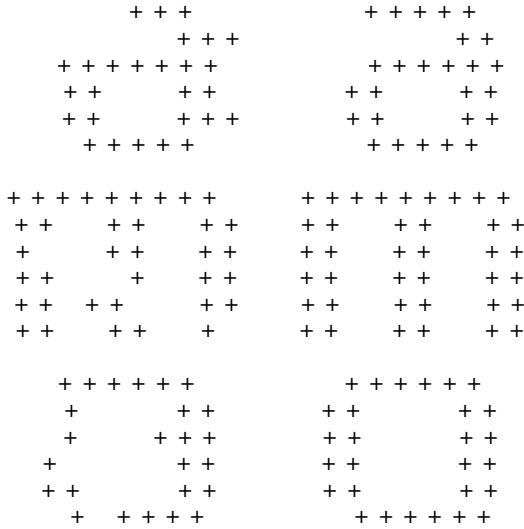


Fig. 3: 用同一个神经网络分别识别”a”, ”m”, ”o”三个图案

D. 网络部分损坏时的模式识别

神经网络可以在部分损坏的情况下维持一定的功能，为了模拟这种情况，我们将 $J_{i,j}$ ，中随机抽取一定比例的元素并更改为0，再进行相同的模拟过程。模拟结果如图(4)-(6)

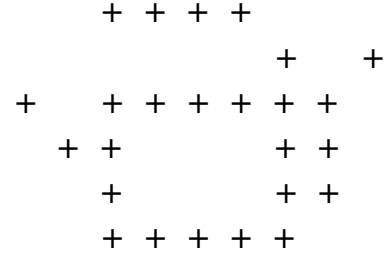


Fig. 4: 网络损坏20%时，可以识别出原图案

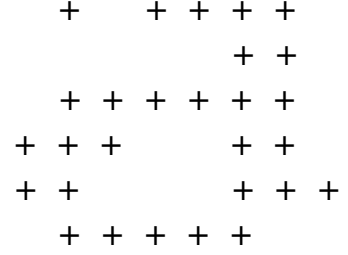


Fig. 5: 网络损坏50%时，大部分情况下仍可以识别出原图案

可以看出，当网络损坏程度较低时，其主要功能基本不受影响，甚至在损坏过半时大部分情况下仍能维持功能，只有几乎完全损坏时才会丧失其功能。当然，这也与网络中存储的图案数量以及图案的可区分程度有关。

E. 总结

虽然本文中所使用的模型十分简单，但仍然可以反映出神经网络的一些非常有趣的现象。显示出伊辛模型在研究神经网络中的潜力。

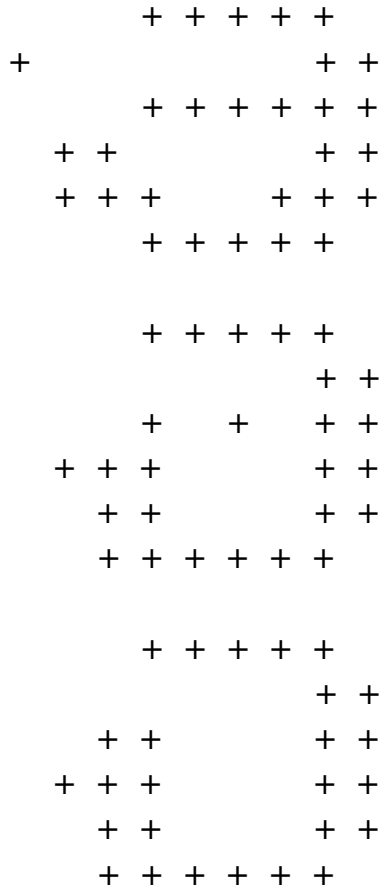


Fig. 6: 网络损坏90%时，经过两次蒙卡过程才打到稳定状态，且没有识别出原图案

IV. 参考文献

- [1]Nicholas J. Giordano and Hisao Nakanishi, Computational Physics(Second Edition)
- [2]张志东, 伊辛模型的研究进展简介, 自然杂志, 2008,30(2)