

Population Growth Model

摘要

本次作业挑选 1.6-人口增长问题 作为作业内容，给出了针对人口增长问题的常微分方程的近似解决方案。

背景介绍

对于人口增长模型一般使用以下公式描述

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2$$

其中N为人口数， aN 对应人口增长， bN^2 对应人口死亡。当人口数量很大时，由于资源有限的原因导致人口存在上限，所以人口消减项由 N^2 影响，当 $b = 0$ 时，人口呈指数增长。

正文

实现原理

常微分方程的数值近似解

人口增长模型对应的常微分方程可写成

$$N(t + dt) = N(t) + [aN(t) - bN^2(t)]dt$$

若取 dt 为某一足够小的近似值，当已知N的初值 $N(t_0)$ 后多次迭代，便可得到之后所有的数值近似解。

参数设置

- 对于此方程，需要设置的参数有a、b、 $N(t_0)$ 、dt、end_t。
- 对于a、b、 $N(t_0)$ 容易看出参数a为人口增长系数，建议的值在0.01-100之间；参数b为人口消减系数，建议的值在0-10之间。参数a、b和人口初值 $N(t_0)$ 均可通过用户输入方式得到，且数值类型为浮点数，因为人口初值可以科学计数法方式设定。
- 对于end_t，通过考察方程可发现，当 $N = \frac{a}{b}$ 时， $dN = 0$ ，即人口数N将无限趋于 $\frac{a}{b}$ ，为了

显示适当比例的人口增长曲线图，`end_t`需要根据输入的`a`、`b`、 $N(t_0)$ 来决定。又当处于 $b = 0$ 的极端情况时，人口数将指数增长，这将可能超出`matplotlib`能接受的最大数值，故需要对此情况做特殊处理。

- 对于`dt`，由于`end_t`的范围变动很大，故设置一个固定的计算次数而让`dt`的值由计算次数决定。

作图工具

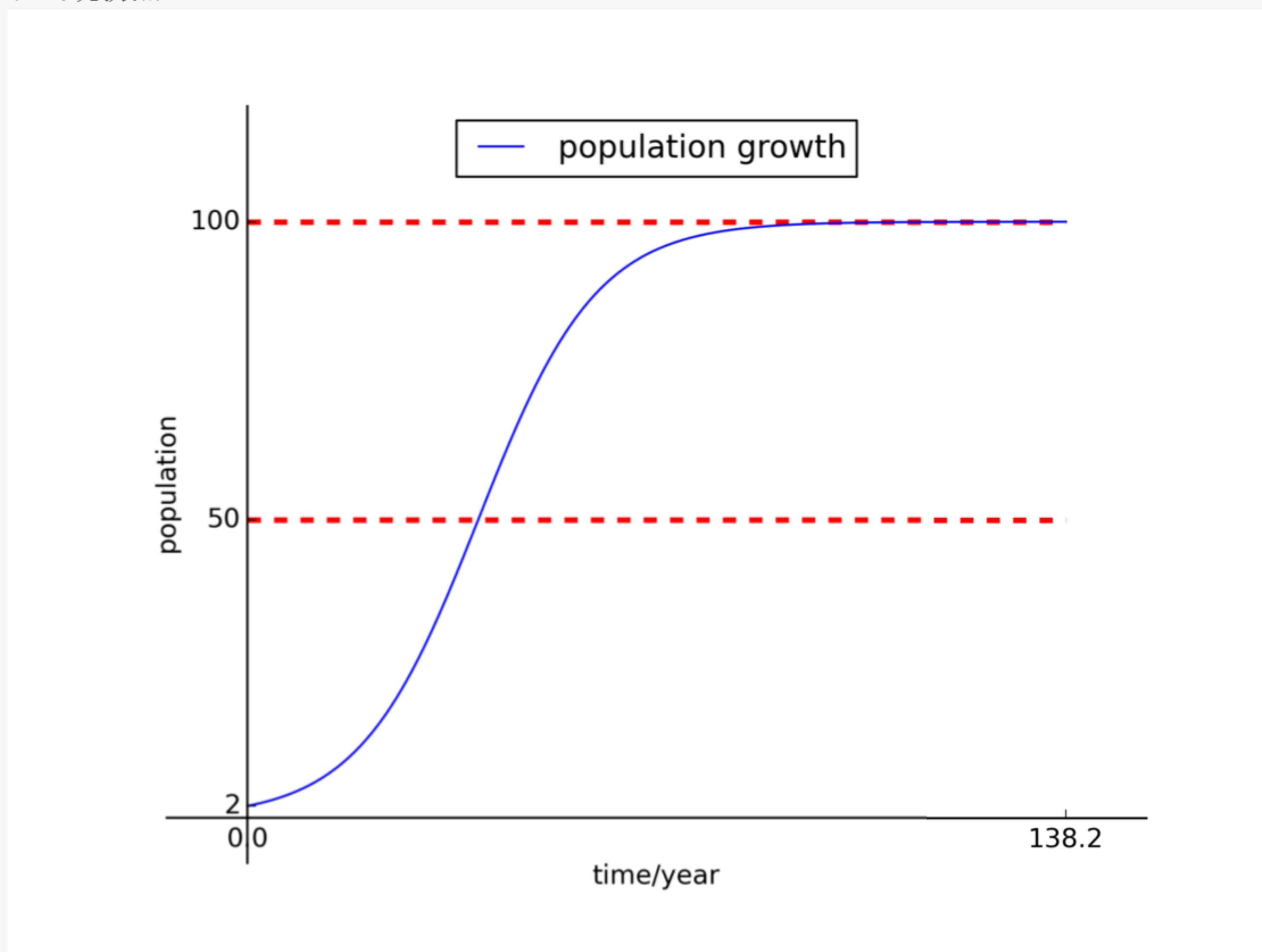
本次作业使用作图工具为`matplotlib`库。

程序实现

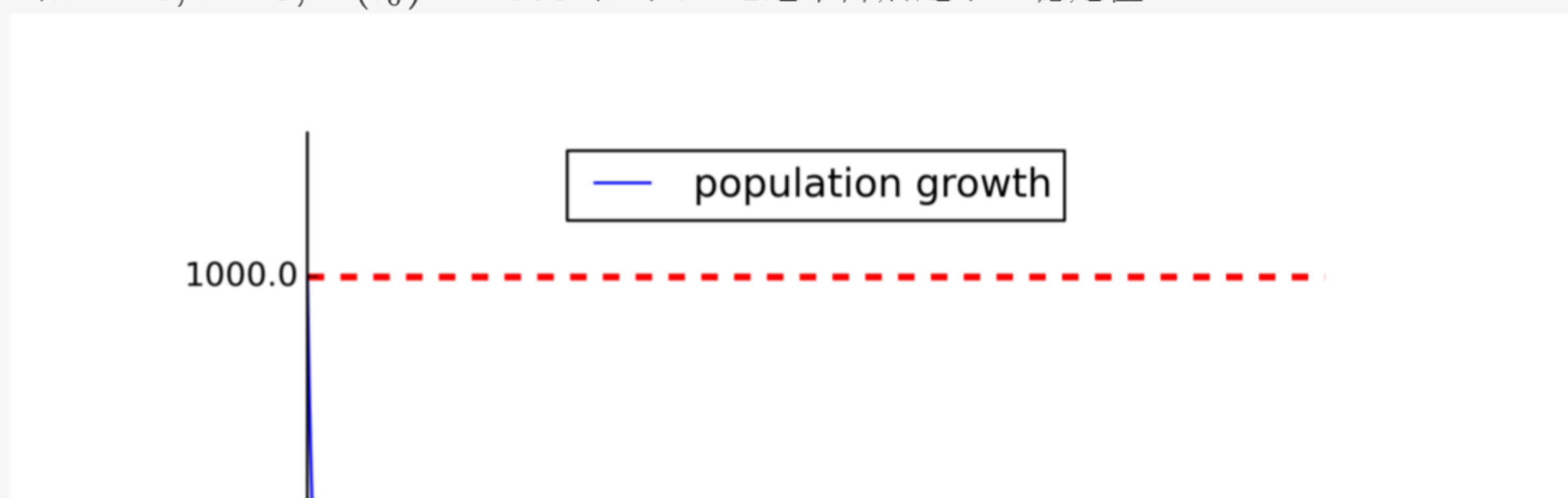
python源码地址：[population_model](#)

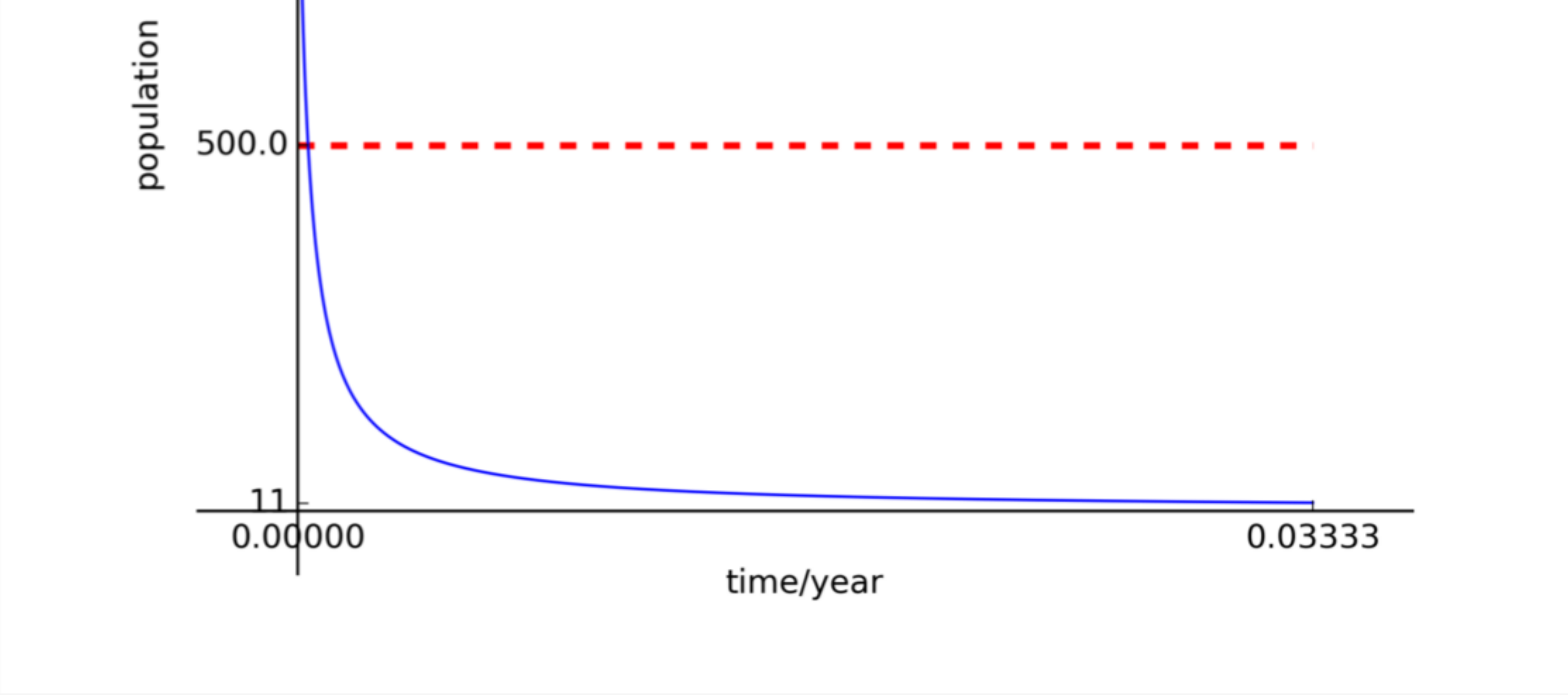
结果分析

- 当 $a = 0.1, b = 0.001, N(t_0) = 2$ 时，人口增长曲线如图，可以推出，当 $N = \frac{a}{b}$ 时，人口增长出现拐点



- 当 $a = 10, b = 3, N(t_0) = 1000$ 时，人口迅速下降后趋于一稳定值





结论

由以上分析可知，当资源数量有限且为一常量时，人口数量将趋近于定值 $\frac{a}{b}$ 。

致谢