格林公式

- 设 D 为平面区域，如果 D 内任一闭曲线所围的部分区域都属于 D，则 D 称为平面单连通区域。直观地说，单连通区域是没有空间的区域，否则称为复连通区域。
- 当 xOy 平面上的曲线起点与终点重合时，则称曲线为闭曲线。设平面的闭曲线L围成平面区域 D，并规定当一个人沿闭曲线 L 环行时，区域 D 总是位于此人的左侧，称此人行走方向为曲线 L 关于区域 D 的正方向，反之为负方向。(*即逆时针为正方向*)

格林公式 green formula

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

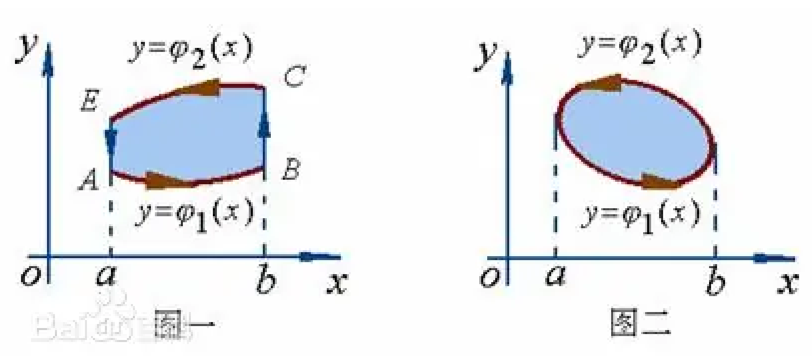
其中 L 是 D 取正向的边界曲线。

证明

先证明

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_L Pdx$$

假定区域 D 的形状如下（用平行于 y 轴的直线穿过区域，与区域边界曲线的交点至多两点）



D

$$D: a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$= -\int_a^b [P(x,y)]_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx = -\int_a^b [P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))]dx$$

$$\oint_L Pdx = \left(\int_{\widehat{AB}} + \int_{\overline{BC}} + \int_{\widehat{CE}} + \int_{\overline{EA}}\right) Pdx$$

$$= \int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx + 0 + \int_b^a P(x,\varphi_2(x))dx + 0$$

因此

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_L Pdx$$

假设将 $\widehat{AB}$ 曲线上移，或 $\widehat{CE}$ 曲线下移，使 A, E 重合或者 B, C 重合，便可以认为是一条常规的曲线。也可以认为某条常规曲线是将 $\overline{AE}$ 或 $\overline{BC}$ 长度设为零形成的。再假定穿过区域 D 内部且平行于 x 轴的直线与 D 的边界曲线的交点至多是两点，用类似的方法可证

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Qdy$$

将两式合并之后即得格林公式。

例题1

例题1

已知 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上有二阶连续偏导数，且

$$f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 + y^2$$

$L: x^2 + y^2 = a^2 \ (a > 0)$，逆时针方向，求

$$\oint_L f(x,y)ds$$

记 $g(t) \equiv f(tx,ty)$，则有 $g(1) - g(0) = f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$，且根据牛顿-莱布尼茨公式，

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt = \int_0^1 xf_1(tx,ty) + yf_2(tx,ty)\ dt$$

因此，

$$\oint_L f(x,y)ds = \oint_L \int_0^1 xf_1(tx,ty) + yf_2(tx,ty)\ dtds$$

由于 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，可知一阶偏导 f_1, f_2 是有连续偏导数，积分次序可交换，且由于 $(-\frac{y}{a}, \frac{x}{a})$ 为曲线 L 的正向单位法向量，

$$\oint_L xf_1(tx,ty)+yf_2(tx,ty)\,ds=\oint_L\left(-\frac{y}{a},\frac{x}{a}\right)\cdot(-af_2(tx,ty),af_1(tx,ty))\,ds$$

$$=\oint_L(-af_2(tx,ty),af_1(tx,ty))\cdot\ d\mathbf{s}=\oint_L -af_2(tx,ty)\,dx+af_1(tx,ty)\,dy$$

根据格林公式，记闭区域 $D:x^2+y^2\le a^2$, $P(x,y)\equiv -f_2(tx,ty)$, $Q(x,y)\equiv f_1(tx,ty)$

$$\oint_L -af_2(tx,ty)\,dx+af_1(tx,ty)\,dy=a\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=a\iint_D t\left(f_{11}(tx,ty)+f_{22}(tx,ty)\right)dxdy=at^3\iint_D(x^2+y^2)dxdy$$

$$=at^3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot rdr=at^3\cdot 2\pi\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi}{2}a^5t^3$$

最后的区域积分用极坐标计算。因此，

$$\oint_L f(x,y)ds=\int_0^1\frac{\pi}{2}a^5t^3dt=\frac{\pi}{2}a^5\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{8}a^5$$