Calcolo Scientifico, Calcolo Numerico, A.A. 2014/15
Appello 13 gennaio 2015

Esercizio 1 Dati

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 80 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

si vuole risolvere il sistema lineare $A^3\mathbf{x} = \mathbf{b}$ seguendo questi due approcci:

1. **-** calcolare $C = A^3$
   - risolvere $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con un metodo diretto opportuno
2. **-** porre $\mathbf{f} = \mathbf{b}$
   - for $k = 1 : 3$
   risolvere $A\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{f}$ con un metodo diretto opportuno
   porre $\mathbf{f} = \mathbf{x}^{(k)}$
   end
   - porre $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(3)}$.

In entrambi i casi, tra i metodi diretti applicabili, utilizzare quello più economico (in termini di operazioni elementari).
1.a) Scrivere un file matlab per risolvere il sistema dato con i due approcci e verificare che le soluzioni ottenute coincidano.
1.b) Sapendo che il costo del prodotto tra due matrici quadrate di dimensione n è pari a n^3 operazioni elementari, valutare il numero globale di operazioni elementari richieste dai due approcci. Quale dei due approcci è più conveniente?

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = x^3 + \frac{77}{18}x^2 + \frac{833}{144}x + \frac{343}{144}, \qquad x \in [-2, -0.5], \tag{2}$$

2.a) Mediante un'analisi grafica dire quante radici ammette $f(x)$ e localizzarle.
2.b) Utilizzando la stima dell'errore del metodo di bisezione dire quante iterazioni servono per stimare una qualsiasi delle radici della funzione, partendo da un intervallo iniziale di ampiezza pari a 1 e richiedendo una tolleranza sull'errore pari a $\varepsilon = 10^{-10}$. Richiamando la function `bisection.m` verificare quanto appena trovato.
2.c) Approssimare tutte le radici di $f(x)$ utilizzando il metodo di Newton e scegliendo opportunamente il dato iniziale $x^{(0)}$ per ognuna delle radici. Si consideri una tolleranza pari a $\varepsilon = 10^{-10}$ per il test d'arresto.
2.d) Spiegare il comportamento del metodo quando si sceglie $x^{(0)} = -1.1$.
Giustificare perché, prendendo $x^{(0)} = -1.2$, il metodo di Newton non converge alla radice più vicina a $x^{(0)}$.

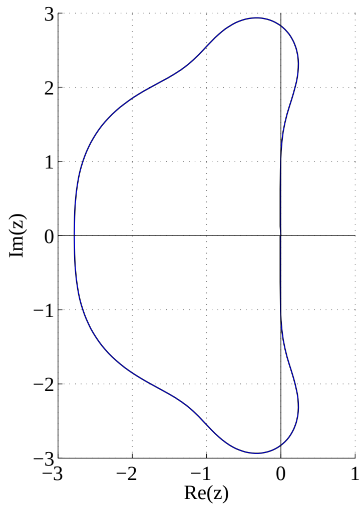

Figure 1: La regione di assoluta stabilità di Runge Kutta è la parte di piano interna alla curva chiusa

Esercizio 3 Si consideri il seguente problema di Cauchy del terzo ordine:

$$\begin{cases} 2y'''(t) + 2y''(t) + 3y'(t) + 3y(t) = \sin(t) \quad t \in (0, 40) \\ y(0) = 1, \; y'(0) = -2, \; y''(0) = 4. \end{cases} \tag{3}$$

3.a) Dopo aver riscritto il problema di Cauchy dato come un problema vettoriale del primo ordine, scrivere un `m-file` che:
- definisca i dati iniziali,
- richiami lo schema di Eulero esplicito e lo schema Runge Kutta 4 (`rk4.m`) per la risoluzione del sistema dato,
- rappresenti graficamente la soluzione del sistema. Si utilizzi $h = 0.01$.
Quale delle due soluzioni sarà più accurata? Perchè?

3.b) Facendo riferimento alle regioni di assoluta stabilità dei metodi utilizzati (si veda la figura per RK4) ed alla teoria studiata, determinare il massimo valore del passo temporale h tale da garantire assoluta stabilità nei due casi.
Verificare sperimentalmente quanto ottenuto. (Suggerimento: si consideri l'equazione omogenea associata sull'intervallo temporale (0,100).)