Università degli Studi di Brescia
(Fondamenti di) Segnali e Sistemi
Laboratorio di Matlab, A.A. 2022/2023

Esercitazione N.4, 19/04/2023

Questa sessione di laboratorio si occupa del calcolo della trasformata di Fourier e della sua inversa.

- Si consiglia di utilizzare un asse temporale **t=-10:0.01:10** e un asse delle frequenze **f=-15:0.01:15**.
- Usare le funzioni **real** e **imag** nel caso si desideri visualizzare separatamente le parti reale e immaginaria dei segnali e delle trasformate.
- Usare i comandi **abs** e **angle** per visualizzare il modulo e la fase dei segnali e delle trasformate. Per "svolgere" la fase usare il comando **unwrap**.

[Esercizio 1] TRASFORMATA DI FOURIER DIRETTA E INVERSA

In questo esercizio si costruiscono le funzioni per il calcolo della trasformata di Fourier (TF) e della sua inversa. La coppia trasformata/anti-trasformata é riportata qui:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} df$$

(i) Scrivere una funzione Matlab **T_Fourier(x,t,f)** che implementi il calcolo della trasformata di Fourier. La funzione riceve in ingresso il vettore del segnale **x**, l'asse temporale **t** su cui esso è definito e l'asse delle frequenze **f** su cui si vuole calcolare la trasformata (calcolare **dt** all'interno della funzione anzichè passarlo come parametro). Utilizzare la funzione **integrale**, scritta nelle lezioni scorse, per il calcolo dell'integrale che definisce la trasformata in ogni punto dell'asse delle frequenze;

(ii) Scrivere una funzione Matlab **Inv_T_Fourier(X,f,t)** che implementi il calcolo della trasformata inversa (in modo analogo a **T_Fourier(x,t,f)**).

[Esercizio 2] TRASFORMATE DI FOURIER NOTE

In questo esercizio vengono utilizzate le funzioni **T_Fourier(x,t,f)** e **Inv_T_Fourier(X,f,t)** su semplici segnali.

(i) Utilizzare le funzioni relative alla TF per verificare le seguenti trasformate note, disegnando lo spettro di ampiezze e di fase:

A. $x_1(t) = \text{rect}(t) \longleftrightarrow X_1(f) = \text{sinc}(f)$;
B. $x_2(t) = \text{tri}(t) \longleftrightarrow X_2(f) = \text{sinc}^2(f)$;
C. $x_3(t) = e^{-\pi t^2} \longleftrightarrow X_3(f) = e^{-\pi f^2}$.

(ii) Provare a graficare la trasformata di $x_4(t) = \cos(4\pi t)$: come si giustifica lo spettro ottenuto?

[Esercizio 3] TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

Sia dato un sistema lineare e tempo-invariante con risposta all'impulso $h(t) = \frac{1}{T} \cdot \text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$ (sistema mediatore), e si fissi $T = 2$.

(i) Disegnare il modulo e la fase della risposta in frequenza $H(f)$.

(ii) Definire un segnale d'ingresso $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ (scegliere A e lasciare f_0 come parametro). Si calcoli l'uscita del sistema $y(t)$ con $f_0 = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ usando il calcolo diretto mediante convoluzione. Si ricordi che se il sistema è LTI e dunque possiede risposta all'impulso $h(t)$ allora:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

(iii) Si verifichi il teorema della risposta in frequenza:

$$y(t) = A|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + < H(f_0))$$

Per far ciò, si provi a determinare graficamente l'ampiezza, la frequenza e la fase dell'uscita $y(t)$ (ignorando i transitori all'inizio e alla fine dell'intervallo temporale) e confrontarle con i valori del vettore $\mathbf{H}$ alle frequenze date. In particolare, provare a giustificare analiticamente il caso $f_0 = 1$.

[Esercizio 4] PROPRIETÁ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

In questo esercizio si verificano due proprietà della TF.

(i) Verificare la proprietà di traslazione della trasformata di Fourier, visualizzando parte reale ed immaginaria oppure modulo e fase delle trasformate dei seguenti segnali:

A. $\text{sinc}(5t)$;

B. $\text{sinc}\left(5(t-\frac{1}{2})\right)$;

C. $\text{sinc}(5(t+1))$.

(ii) Utilizzare le funzioni relative alla TF per calcolare le seguenti trasformate e poi verificarne analiticamente la correttezza usando la proprietà della trasformata del prodotto:

A. $\text{sinc}^2(t) \cdot \cos(10\pi t) \longleftrightarrow \cdots ??? \cdots$

B. $\text{sinc}(t) \cdot \cos^2(10\pi t) \longleftrightarrow \cdots ??? \cdots$

[Esercizio 5] FENOMENI DI GIBBS

In questo esercizio si osserva la comparsa nella risposta in frequenza dei fenomeni di Gibbs dovuta al finestramento (troncamento) nei tempi della risposta all'impulso (il discorso vale comunque per qualunque segnale finestrato col rect nei tempi). Si consideri un filtro ideale passa-basso di ampiezza unitaria, quindi con risposta in frequenza e all'impulso:

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \longleftrightarrow h(t) = 2B\text{sinc}(2Bt)$$

(i) Si fissi $B = 2$. Visualizzare la risposta in frequenza della risposta all'impulso del filtro ideale passa-basso finestrata con finestre rettangolari di supporto diverso:

A. $h_1(t) = h(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$;

B. $h_2(t) = h(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{10}\right)$;

C. $h_3(t) = h(t) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{20}\right)$ (questo equivale a non fare nulla se **t=-10:0.01:10**).

Per ciascun supporto, calcolare lo scostamento massimo della risposta in frequenza (l'ampiezza massima dei "picchi") e l'energia della differenza tra la risposta in frequenza del sistema ideale e quella del sistema troncato, cioé per esempio per il sistema $h_1(t)$:

$$E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_1(f) - H(f)|^2 df$$

(ii) Si ripeta quanto fatto al punto (i) prendendo $B = 10$.