Calcolo Numerico A, A.A. 2008/09
Appello 14 luglio 2009

Esercizio 1
Si vuole risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = A\mathbf{y}(t) \quad \text{per } t \in [0, t_f] \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{1}$$

dove
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice assegnata,
- $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ è il vettore soluzione al tempo $t \in [0, t_f]$,
- $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ è il vettore al tempo iniziale.

Per risolvere il problema (1) si vuole utilizzare il metodo di Eulero Implicito.

1.a) Scrivere su carta il metodo di Eulero implicito applicato al problema (1).
Si osservi che al passo generico t_{n+1}, per calcolare la soluzione numerica $\mathbf{u}_{n+1} \simeq \mathbf{y}(t_{n+1})$, bisogna risolvere un sistema lineare, scrivere il sistema lineare che si deve risolvere.

1.b) Per risolvere il sistema lineare così ottenuto si vuole utilizzare un metodo diretto. Dire quale metodo diretto può essere applicato e dire qual è il più efficiente tra quelli applicabili, pensando che dobbiamo risolvere un sistema lineare ad ogni passo temporale. Giustificare la risposta in base al numero teorico di operazioni floating point richieste dai vari algoritmi presi in considerazione.

1.c) Scrivere una function matlab che risolva il problema (1) con il metodo di Eulero Implicito, seguendo la logica descritta nei passi precedenti, ovvero risolvendo il sistema lineare ad ogni passo con il metodo scelto. I dati in input devono essere: la matrice A, l'intervallo `tspan=[t0,tf]`, il dato iniziale $\mathbf{y}_0$ ed il numero N_h di passi temporali. I dati in output devono essere il vettore dei tempi `tn` e l'array a due indici `un` $= [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{N_h}]$.

1.d) Si utilizzino la matrice A ed il vettore iniziale $\mathbf{y}_0$ memorizzati nel file `tema140709.mat`, reperibile alla pagina `http://paola-gervasio.unibs.it/CS/matlab`. Calcolare la soluzione numerica con $t_f = 4$ e $h = 0.01$.

Esercizio 2. Si considerino le due curve di equazione:

$$y_1 = f_1(x) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 \qquad\qquad y_2 = f_2(x) = x^2 + x - 2. \tag{2}$$

2.a) Localizzare per via grafica le intersezioni tra le due curve.

2.b) Si consideri il metodo di bisezione per il calcolo delle ascisse dei punti di intersezione. Determinare per via teorica il numero di iterazioni che servono al metodo di bisezione per ottenere una soluzione numerica con un errore minore di $\texttt{tol} = 10^{-8}$, considerando un intervallo iniziale di ampiezza pari a 2.
Calcolare numericamente le ascisse dei punti di intersezione con il metodo di bisezione e confermare quanto trovato precedentemente.

2.c) Calcolare numericamente le ascisse dei punti di intersezione con il metodo di Newton utilizzando $\texttt{tol} = 10^{-8}$, $\texttt{nmax} = \texttt{50}$.

2.d) Proporre su carta una funzione di punto fisso $\varphi(x)$, tale che il punto fisso di $\varphi(x)$ coincida con la maggiore delle ascisse dei punti di intersezione tra le due curve date e, giustificando la risposta, dire se la funzione di punto fisso proposta produce una successione convergente o meno.