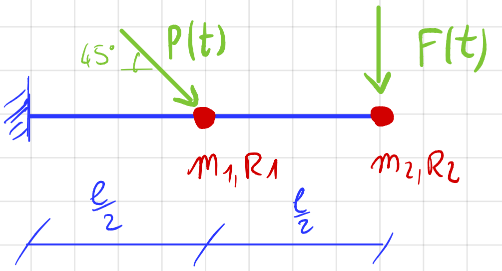
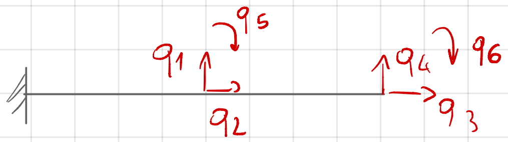


E, A, J.

EQUAZIONE DEL MOTO:

$$m\ddot{q}(t) + k\, q(t) = Q(t)$$



- TROVO m:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2\right) + \frac{1}{2} R_1 \dot{q}_5^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{q}_6^2 =$$

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \dot{q}_1 \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_5} = R_1 \dot{q}_5$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_1 \dot{q}_2 \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_6} = R_2 \dot{q}_6$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = m_2 \dot{q}_3$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_4} = m_2 \dot{q}_4$$

$$T = \begin{pmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_1 & & & 0 & \\ & & m_2 & & & \\ & 0 & & m_2 & & \\ & & & & R_1 & \\ & & & & & R_2 \end{pmatrix}$$

- TROVO $Q(t)$:

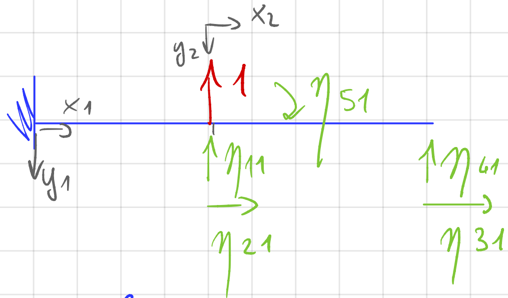
$$\delta W(t) = Q_1(t)\,\delta q_1(t) + Q_2(t)\,\delta q_2(t) + Q_3(t)\,\delta q_3(t) + Q_4(t)\,\delta q_4(t) + Q_5(t)\,\delta q_5(t) + Q_6\,\delta q_6(t) =$$

$$= -P\frac{\sqrt{2}}{2}\,\delta q_1(t) - P\frac{\sqrt{2}}{2}\,\delta q_2(t) - F\,\delta q_4(t)$$

$$\Rightarrow \quad Q(t) = -\begin{pmatrix} P\frac{\sqrt{2}}{2} \\ P\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- TROVO K:

1ª COLONNA:



$M + x_1 - \frac{\ell}{2} = 0$

$$y_1''(x_1) = -\frac{M(x_1)}{EJ} = -\left(\frac{\ell}{2} - x_1\right)\frac{1}{EJ}$$

$$y_1'(x_1) = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{\ell}{2}x_1 - \frac{x_1^2}{2}\right) + C_1$$

$$y_1(x_1) = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{\ell}{4}x_1^2 - \frac{x_1^3}{6}\right) + C_1 x + C_2$$

– $y(x_1 = 0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

– $y'(x_1 = 0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$y_2''(x_2) = 0 \qquad y_2'(x_2) = C_3 \qquad y_2(x_2) = C_3 x_2 + C_4$$

– $y_2(x_2 = 0) = y_1\left(x_1 = \frac{\ell}{2}\right) \rightarrow C_4 = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{\ell}{4}\frac{\ell^2}{4} - \frac{\ell^3}{48}\right) = -\frac{\ell^3}{24EJ}$

– $y_2'(x_2 = 0) = y_1'\left(x_1 = \frac{\ell}{2}\right) \rightarrow C_3 = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{\ell}{2}\frac{\ell}{2} - \frac{\ell^2}{8}\right) = -\frac{\ell^2}{8EJ}$

$$\eta_{11} = -y_1(x_1 = 0) = 0$$

$$\eta_{21} = 0$$

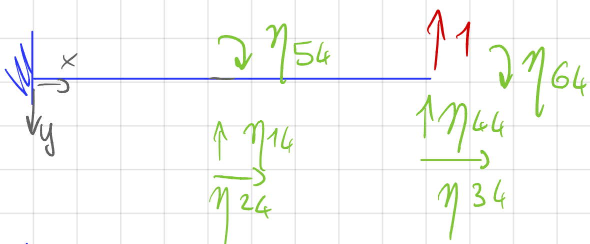
$$\eta_{31} = 0$$

$$\eta_{41} = -y_2\left(x_2 = \frac{\ell}{2}\right) = \frac{\ell^2}{8EJ}\left(\frac{\ell}{2}\right) + \frac{\ell^3}{24EJ} = \frac{5\ell^3}{48EJ}$$

$$\eta_{51} = y_2'(x_2 = 0) = -\frac{\ell^2}{8EJ}$$

$$\eta_{61} = y_2'(x_2 = \ell) = -\frac{\ell^2}{8EJ}$$

4ª COLONNA:



$M - \ell + x = 0$

$$y''(x) = -\frac{(\ell - x)}{EJ}$$

$$y'(x) = -\frac{1}{EJ}\left(\ell x - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

$$y(x) = -\frac{1}{EJ}\left(\ell\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1 x + C_2$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\eta_{14} = -y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{EJ}\left(\ell\frac{\ell^2}{8} - \frac{\ell^3}{48}\right) = \frac{5\ell^3}{48EJ}$$

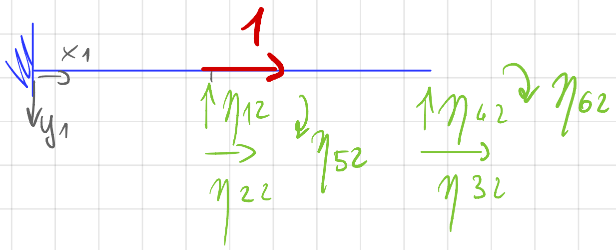
$$\eta_{24} = \eta_{34} = 0$$

$$\eta_{44} = -y(\ell) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{\ell^3}{2} - \frac{\ell^3}{6}\right) = \frac{\ell^3}{3EJ}$$

$$\eta_{54} = y'\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell^2}{8}\right) = -\frac{3}{8}\frac{\ell^2}{EJ}$$

$$\eta_{64} = y'(\ell) = -\frac{1}{EJ}\left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{2}\right) = -\frac{\ell^2}{2EJ}$$

2ª COLONNA

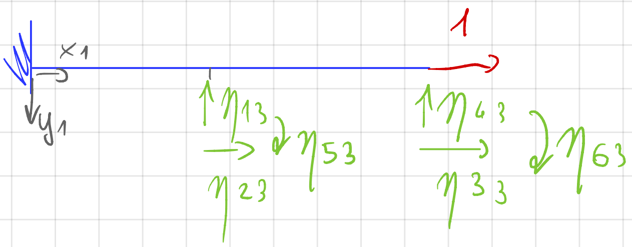


$$\eta_{12} = \eta_{42} = \eta_{52} = \eta_{62} = 0$$

$$\eta_{22} = \frac{1}{EA}\frac{\ell}{2}$$

$$\eta_{32} = \frac{1}{EA}\frac{\ell}{2}$$

3ª COLONNA

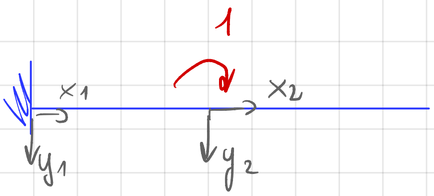


$$\eta_{13} = \eta_{43} = \eta_{53} = \eta_{63} = 0$$

$$\eta_{23} = \frac{1}{EA}\frac{\ell}{2}$$

$$\eta_{33} = \frac{1}{EA}\ell$$

5ª COLONNA



$$\Pi + 1 = 0$$

$$\Pi = -1$$

- $y''_1 = \frac{1}{EJ}$

$y'_1 = \frac{1}{EJ} x + C_1$ $\qquad$ $y_1(x_1=0)=0 \Rightarrow C_2=0$

$y_1 = \frac{1}{EJ}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ $\qquad$ $y'_1(x_1=0)=0 \Rightarrow C_1=0$

- $y''_2 = 0 \qquad y'_2 = C_3 \qquad y_2 = C_3 x + C_4$

$y'_1\left(x_1=\frac{\ell}{2}\right) = y'_2(x_2=0) \Rightarrow C_3 = \frac{\ell}{2EJ}$

$y_1\left(x_1=\frac{\ell}{2}\right) = y_2(x_2=0) \Rightarrow C_4 = \frac{\ell^2}{8EJ}$

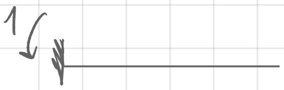
$\eta_{15} = -y_2(x_2=0) = -\frac{\ell^2}{8EJ}$ $\qquad$ $\eta_{25} = \eta_{35} = 0$

$\eta_{45} = -y_2\left(x_2=\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{\ell}{2EJ}\left(\frac{\ell}{2}\right) + \frac{\ell^2}{8EJ} = -\frac{\ell^2}{4EJ} + \frac{\ell^2}{8EJ} = -\frac{2+1}{8}\frac{\ell^2}{EJ} = -\frac{3}{8}\frac{\ell^2}{EJ}$

$\eta_{55} = y'_2(x_2=0) = \frac{\ell}{2EJ}$

$\eta_{65} = y'_2\left(x_2=\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\ell}{2EJ}$

6ª COLONNA



$M + 1 = 0$

$M = -1$

$y'' = \frac{1}{EJ}$

$y' = \frac{1}{EJ} x + C_1$ $\qquad$ $y(0)=0 \Rightarrow C_2 = 0$

$y = \frac{1}{EJ}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ $\qquad$ $y'(0)=0 \Rightarrow C_1 = 0$

$\eta_{26} = \eta_{36} = 0$

$\eta_{56} = y'\left(x=\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\ell}{2EJ}$ $\qquad$ $\eta_{16} = -y\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{\ell^2}{8EJ}$

$\eta_{66} = y'(x=\ell) = \frac{\ell}{EJ}$ $\qquad$ $\eta_{46} = -y(\ell) = -\frac{\ell^2}{2EJ}$

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{5\ell^3}{48EJ} & -\frac{\ell^2}{8EJ} & -\frac{\ell^2}{8EJ} \\ 0 & \frac{\ell}{2EA} & \frac{\ell}{2EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell}{2EA} & \frac{\ell}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{48}\frac{\ell^3}{EJ} & 0 & 0 & \frac{\ell^3}{3EJ} & -\frac{3}{8}\frac{\ell^2}{EJ} & -\frac{\ell^2}{2EJ} \\ -\frac{\ell^2}{8EJ} & 0 & 0 & -\frac{3}{8}\frac{\ell^2}{EJ} & \frac{\ell}{2EJ} & \frac{\ell}{2EJ} \\ -\frac{\ell^2}{8EJ} & 0 & 0 & -\frac{\ell^2}{2EJ} & \frac{\ell}{2EJ} & \frac{\ell}{EJ} \end{pmatrix}$$

MATLAB

$$K = \eta^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{192EJ}{7\ell^3} & 0 & 0 & \frac{96EJ}{7\ell^3} & 0 & \frac{24EJ}{7\ell^2} \\ 0 & \frac{4EA}{\ell} & -\frac{2EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EA}{\ell} & \frac{2EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{96EJ}{7\ell^3} & 0 & 0 & \frac{288EJ}{7\ell^3} & \frac{24EJ}{\ell^2} & \frac{72EJ}{7\ell^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24EJ}{\ell^2} & \frac{16EJ}{\ell} & \frac{4EJ}{\ell} \\ \frac{24EJ}{7\ell^2} & 0 & 0 & \frac{72EJ}{7\ell^2} & \frac{4EJ}{\ell} & \frac{32EJ}{7\ell} \end{pmatrix}$$

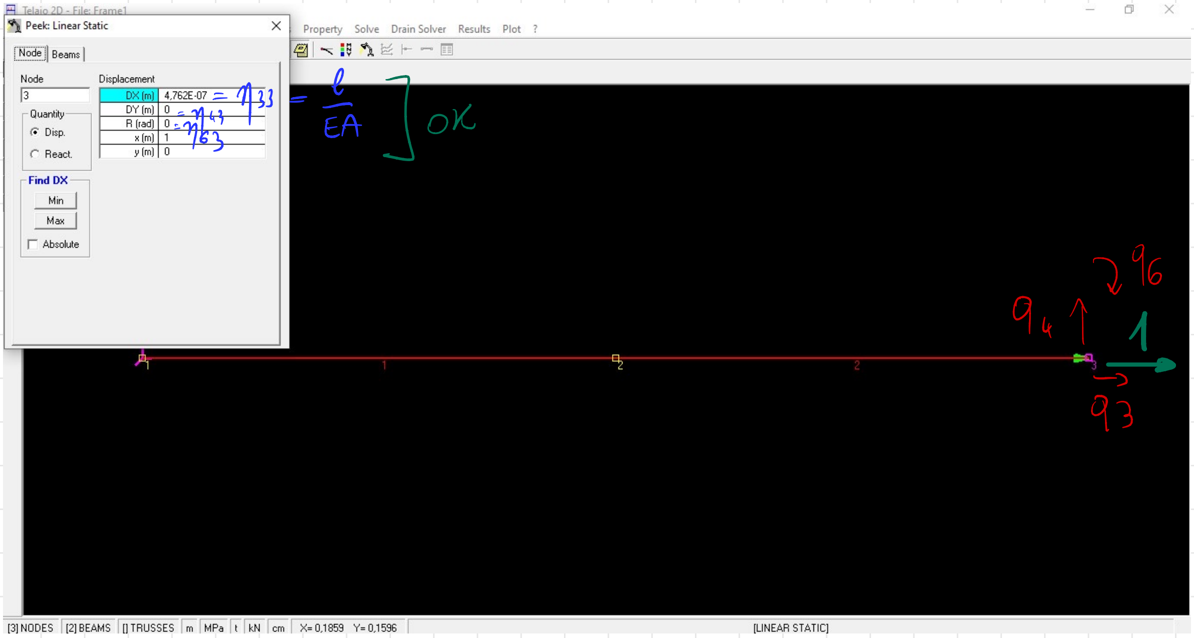
SIMM. E DEFINITA POSITIVA

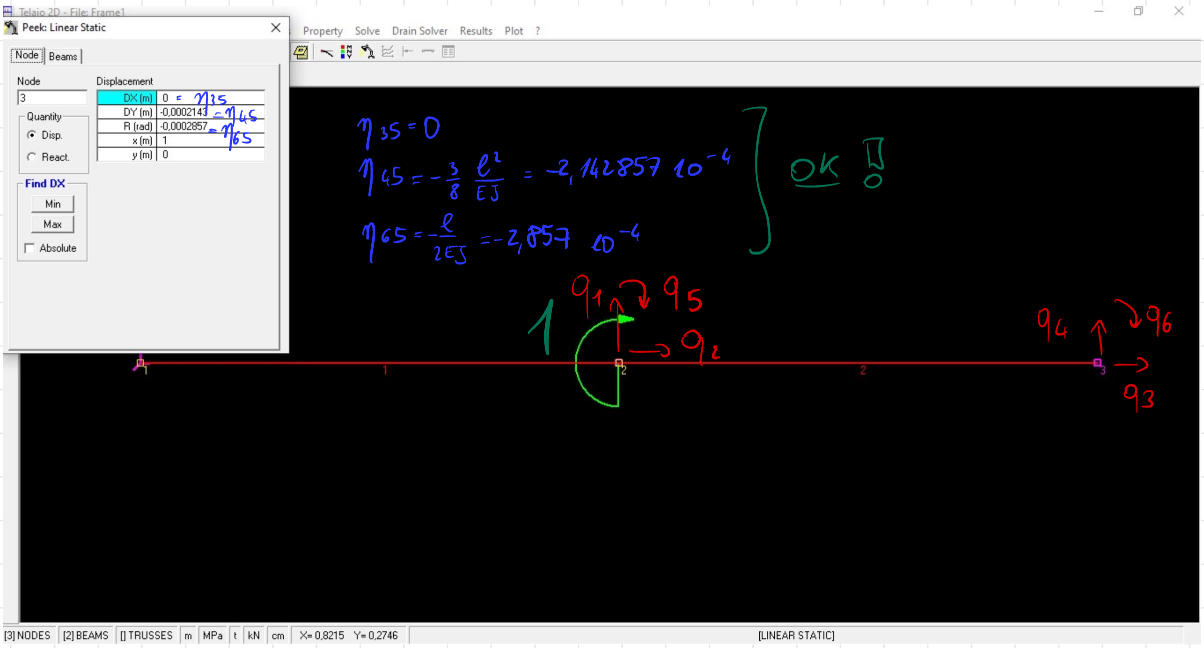
EQUAZIONE DEL MOTO:

$$m\ddot{q}(t) + K\,q(t) = Q(t)$$

VERIFICA DI ALCUNE COLONNE DI η CON TELAIO 2D:

$E = 210$ MPa $\quad l = 1 m \quad A = 100\ cm^2 \quad J = 8,33\ 10^{-6}\ m^4$





ESERCIZIO OSCILLATORE

$0{,}7 < t < 1 \qquad F(t) = -\frac{8000}{0{,}3}t + \frac{8000}{0{,}3}$

$$v_0 = \frac{8000}{K}\left\{1 - e^{-\vartheta\omega_1 0{,}7}\left[\cos(\omega_0 0{,}7) + \frac{\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\operatorname{sen}(\omega_0 0{,}7)\right]\right\}$$

$$\dot v_0 = e^{-\vartheta\omega_1(0{,}7)}\frac{8000}{K}\operatorname{sen}(\omega_0 0{,}7)\frac{\omega_1}{\sqrt{1-\vartheta^2}}$$

$$v(t) = v_g(t) + v_p(t)$$

$v_p(t) = At + B \implies m\ddot v_p + c\dot v_p + K v_p = -\frac{8000}{0{,}3}t + \frac{8000}{0{,}3}$

$\dot v_p(t) = A$

$$cA + K(At + B) = -\frac{8000}{0{,}3}t + \frac{8000}{0{,}3}$$

$$cA + KB = \frac{8000}{0{,}3}$$

$$KA = -\frac{8000}{0{,}3}$$

$$A = -\frac{8000}{K\,0{,}3} \implies B = \left[\frac{8000}{0{,}3} - c\left(-\frac{8000}{0{,}3\,K}\right)\right]\frac{1}{K}$$

$$B = \frac{8000}{0{,}3K} + \frac{8000}{0{,}3K^2}c$$

$$v(t) = e^{-\vartheta\omega_1 t}\left[D\cos(\omega_0 t) + E\operatorname{sen}(\omega_0 t) + At + B\right]$$

$$\dot v(t) = -\vartheta\omega_1 e^{-\vartheta\omega_1 t}\left[D\cos(\omega_0 t) + E\operatorname{sen}(\omega_0 t) + At + B\right] + $$
$$+ e^{-\vartheta\omega_1 t}\left[-\omega_0 D\operatorname{sen}(\omega_0 t) + E\omega_0\cos(\omega_0 t) + A\right]$$

- $$v(0) = D + \frac{8000}{0{,}3K} + \frac{8000}{0{,}3K^2}c = \frac{8000}{K}\left\{1 - e^{-\vartheta\omega_1 0{,}7}\left[\cos(\omega_0 0{,}7) + \frac{\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\operatorname{sen}(\omega_0 0{,}7)\right]\right\}$$

$$\implies D = \frac{8000}{K}\left\{1 - e^{-\vartheta\omega_1 0{,}7}\left[\cos(\omega_0 0{,}7) + \frac{\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\operatorname{sen}(\omega_0 0{,}7)\right]\right\} - \frac{8000}{0{,}3K} - \frac{8000}{0{,}3K^2}c$$

- $$\dot v(0) = -\vartheta\omega_1\left[D + \frac{8000}{0{,}3K} + \frac{8000}{0{,}3K^2}c\right] + E\omega_0 - \frac{8000}{0{,}3K} =$$
$$= e^{-\vartheta\omega_1(0{,}7)}\frac{8000}{K}\operatorname{sen}(\omega_0 0{,}7)\frac{\omega_1}{\sqrt{1-\vartheta^2}}$$

$$E = \frac{1}{\omega_0}\left\{\frac{8000}{0{,}3K} + \vartheta\omega_1\left[D + \frac{8000}{0{,}3K} + \frac{8000}{0{,}3K^2}c\right] + e^{-\vartheta\omega_1(0{,}7)}\frac{8000}{K}\operatorname{sen}(\omega_0 0{,}7)\frac{\omega_1}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\right\}$$

$0{,}7 < t < 1 \qquad F(t) = -\frac{8000}{0{,}3}t + \frac{8000}{0{,}3}$

$$v_0 = \frac{8000}{K}\left\{1 - e^{-\vartheta\omega_1 0{,}7}\left[\cos(\omega_D 0{,}7) + \frac{\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\operatorname{sen}(\omega_D 0{,}7)\right]\right\}$$

$$\dot v_0 = e^{-\vartheta\omega_1(0{,}7)}\frac{8000}{K}\operatorname{sen}(\omega_D 0{,}7)\frac{\omega_1}{\sqrt{1-\vartheta^2}}$$

$$v(t) = v_g(t) + v_p(t)$$

$v_p(t) = At + B \implies m\ddot v_p + c\dot v_p + K v_p = -\frac{8000}{0{,}3}t + \frac{8000}{0{,}3}$

$\dot v_p(t) = A$

$$cA + K(At + B) = -\frac{8000}{0{,}3}t + \frac{8000}{0{,}3}$$

$$cA + KB = \frac{8000}{0{,}3}$$

$$KA = -\frac{8000}{0{,}3}$$

$$A = -\frac{8000}{K\,0{,}3} \implies B = \left[\frac{8000}{0{,}3} - c\left(-\frac{8000}{0{,}3K}\right)\right]\frac{1}{K}$$

$$B = \frac{8000}{0{,}3K} + \frac{8000}{0{,}3K^2}c$$

$$v(t) = e^{-\vartheta\omega_1 t}\left[D\cos(\omega_D t) + E\operatorname{sen}(\omega_D t)\right] + At + B$$

$$\dot v(t) = -\vartheta\omega_1 e^{-\vartheta\omega_1 t}\left[D\cos(\omega_D t) + E\operatorname{sen}(\omega_D t)\right] + e^{-\vartheta\omega_1 t}\left[-\omega_D D\operatorname{sen}(\omega_D t) + E\omega_D\cos(\omega_D t)\right] + A$$

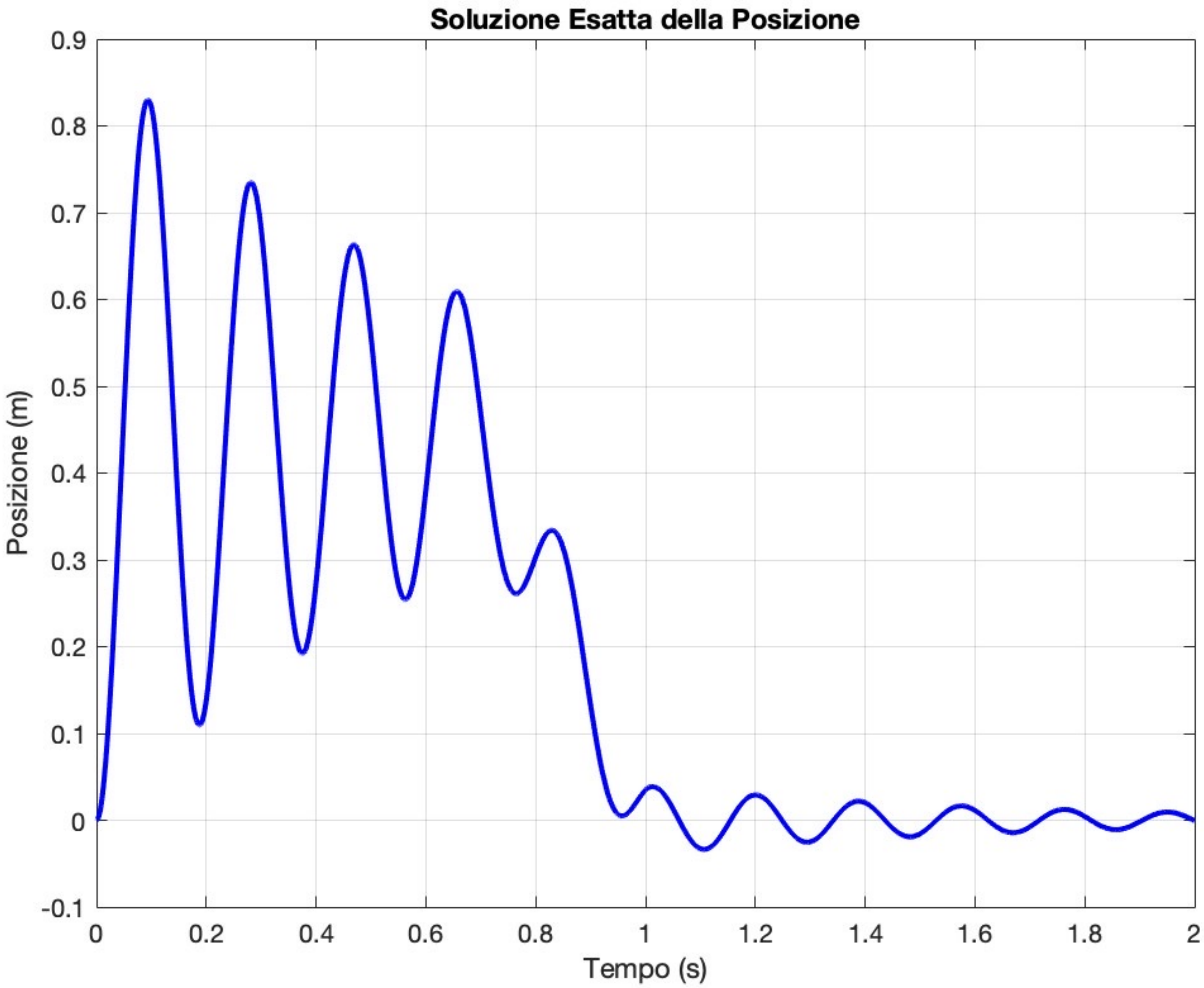
- $v(0) = D + \frac{8000}{0{,}3K} + \frac{8000}{0{,}3K^2}c = \frac{8000}{K}\left\{1 - e^{-\vartheta\omega_1 0{,}7}\left[\cos(\omega_D 0{,}7) + \frac{\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\operatorname{sen}(\omega_D 0{,}7)\right]\right\}$

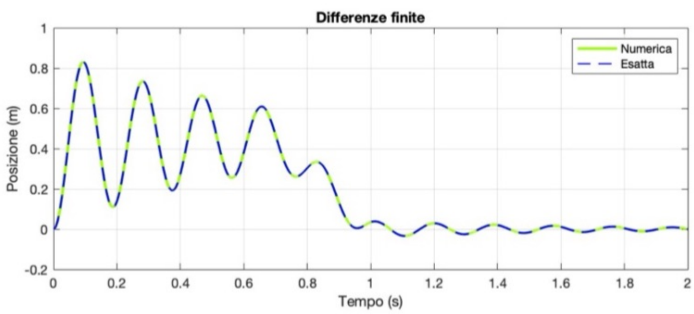
$$\implies D = \frac{8000}{K}\left\{1 - e^{-\vartheta\omega_1 0{,}7}\left[\cos(\omega_D 0{,}7) + \frac{\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\operatorname{sen}(\omega_D 0{,}7)\right]\right\} - \frac{8000}{0{,}3K} - \frac{8000}{0{,}3K^2}c$$

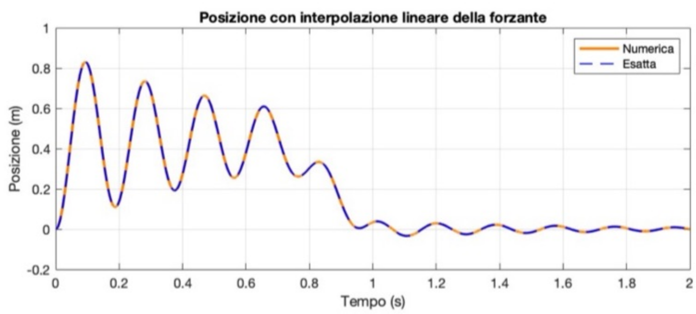
- $\dot v(0) = -\vartheta\omega_1 D + E\omega_D + A = e^{-\vartheta\omega_1(0{,}7)}\frac{8000}{K}\operatorname{sen}(\omega_D 0{,}7)\frac{\omega_1}{\sqrt{1-\vartheta^2}}$

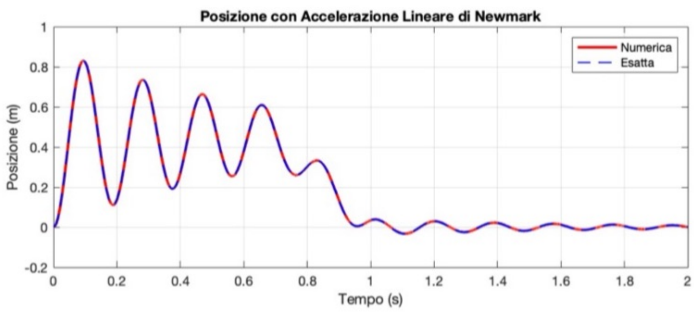
$$E = \frac{1}{\omega_D}\left\{-A + \vartheta\omega_1(D) + e^{-\vartheta\omega_1(0{,}7)}\frac{8000}{K}\operatorname{sen}(\omega_D 0{,}7)\frac{\omega_1}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\right\}$$

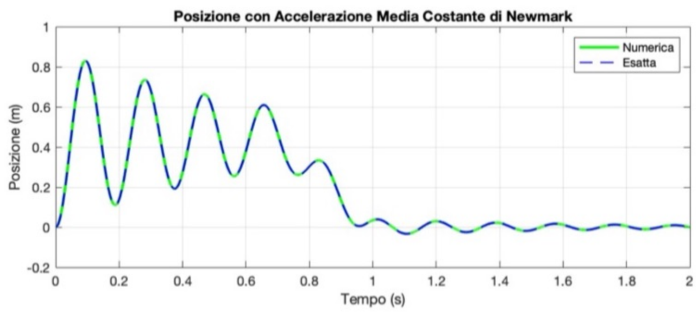
CONSIDERAZIONI IN MERITO AI RISULTATI OTTENUTI:











SOLUZIONE ESATTA DELLA POSIZIONE:

La soluzione esatta è stata calcolata accuratamente in modo analitico per poter essere confrontata con i metodi numerici utilizzati. Questa soluzione serve per l'appunto come riferimento per valutare l'accuratezza dei vari metodi numerici. Di seguito alcuni commenti in merito all'accuratezza e alla stabilità dei vari metodi adoperati.

DIFFERENZE FINITE CENTRATE

Il metodo delle differenze finite centrate è una tecnica numerica comune per approssimare soluzioni di equazioni differenziali. Tuttavia, in questo caso:

- **Accuratezza:** la soluzione numerica delle differenze finite centrate mostra una discreta accuratezza in confronto alla soluzione esatta, soprattutto per valori di tempo più piccoli. Tuttavia, possono emergere discrepanze man mano che il tempo aumenta.
- **Stabilità:** questo metodo può essere soggetto a instabilità numeriche, soprattutto se il passo di discretizzazione temporale non è scelto adeguatamente.

METODO DELL'ACCELERAZIONE LINEARE DI NEWMARK

Il metodo di Newmark con accelerazione lineare è molto utilizzato per risolvere problemi dinamici strutturali:

- **Accuratezza:** questo metodo fornisce una buona accuratezza per la maggior parte dell'intervallo di tempo, approssimandosi bene alla soluzione esatta.
- **Stabilità:** è generalmente stabile per passi di tempo appropriati, ma può diventare meno accurato con incrementi di tempo maggiori.

METODO DELL'ACCELERAZIONE MEDIA COSTANTE DI NEWMARK

Questo metodo è un'altra variante del metodo di Newmark appena illustrato:

- **Accuratezza:** fornisce risultati molto accurati che seguono da vicino la soluzione esatta. È particolarmente utile per problemi di ingegneria strutturale.
- **Stabilità:** il metodo di accelerazione media costante è noto per essere stabile e preciso, anche per passi di tempo relativamente grandi.

INTERPOLAZIONE LINEARE DELLA FORZANTE

Questo metodo, come si può evincere dal nome, si basa sull'interpolazione lineare della forzante applicata:

- **Accuratezza:** mostra una buona accuratezza iniziale, ma potrebbe presentare discrepanze man mano che il tempo avanza, a seconda della complessità della forzante.
- **Stabilità:** è generalmente stabile, ma la precisione può essere compromessa se la forzante ha variazioni rapide che non vengono catturate bene dall'interpolazione lineare.

CONFRONTO GENERALE

- **Accuratezza:** i metodi di Newmark (sia con accelerazione lineare sia con accelerazione media costante) mostrano una maggiore accuratezza rispetto al metodo delle differenze finite centrate e all'interpolazione lineare. Tra i due metodi di Newmark, quello con accelerazione media costante tende a essere più preciso.
- **Stabilità:** il metodo di accelerazione media costante di Newmark è generalmente il più stabile, seguito dal metodo di accelerazione lineare di Newmark. Il metodo delle differenze finite centrate può diventare instabile se il passo temporale non è scelto correttamente. L'interpolazione lineare è stabile, ma la sua accuratezza dipende dalla natura della forzante.

GRAFICI

I grafici generati mostrano visivamente il confronto tra le soluzioni numeriche e la soluzione esatta. La vicinanza delle curve delle soluzioni numeriche alla curva della soluzione esatta è un indicatore della precisione dei metodi:

- Soluzione Esatta (blu): Serve come base di riferimento.
- Differenze finite (verde): Mostra discrepanze crescenti con l'aumento del tempo.
- Newmark (Accelerazione Lineare - rosso): Buona corrispondenza con la soluzione esatta.
- Newmark (Accelerazione Media Costante - verde): Ottima corrispondenza, quasi indistinguibile dalla soluzione esatta.
- Interpolazione Lineare (arancione): Buona corrispondenza iniziale, ma può mostrare discrepanze nel tempo.

CONCLUSIONI

Per problemi dinamici strutturali, il metodo di Newmark con accelerazione media costante è generalmente preferibile per la sua accuratezza e stabilità. Il metodo delle differenze finite può essere utilizzato, ma richiede una scelta attenta del passo temporale per evitare instabilità. L'interpolazione lineare della forzante è utile, ma meno accurata per forze variabili rapidamente.