Esercitazione su equazioni differenziali ordinarie

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$(1)\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + g'(t) - \lambda g(t) & t \in (0, 10] \\ y(t_0) = 2, \end{cases}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^-$ e $g(t) = 10 - (10+t)e^{-t}$.

- Si approssimi il problema (1) con il metodo predictor-corrector AB2-AM3, fissando $\lambda = -10$ e si verifichi sperimentalmente che l'ordine di accuratezza del metodo è 3, sapendo che la soluzione esatta del problema dato è $y(t) = 2e^{\lambda t} + g(t)$.
- Per $\lambda = -10,\ -20,\ -40,$ plottando la soluzione numerica ed osservandone il comportamento convergente o divergente per $t_n \nearrow$, si determini sperimentalmente la limitazione su h affinché si abbia assoluta stabilità (si considerino 2 cifre decimali per la mantissa di h).
  In base ai risultati ottenuti, determinare una costante C_1 , indipendente da h e λ , tale che la regione di assoluta stabilità dello schema AB2-AM3, ristretta all'asse reale, si possa esprimere come $C_1 < h\lambda < 0.$
- Si consideri $\lambda = -500$. In base al valore di C_1 determinato ai punti precedenti, si diano limitazioni su h per avere assoluta stabilità. Utilizzare sempre 2 cifre decimali per la mantissa di h . Verificare sperimentalmente la validità della limitazione ottenuta.
- Determinare il massimo valore di h per cui l'errore sulla soluzione esatta in $t = 10$ sia minore o uguale a 10^{-5} . (si considerino sempre due cifre decimali per la mantissa di h).
  In base a quanto trovato il problema si può classificare come problema stiff? Giustificare la risposta.