

Dispensa del Corso
di
Segnali e Sistemi

A.A. 2018-2019
Marco Dalai

Versione 23 agosto 2019

1 Segnali e operazioni elementari

1.1 Segnali Elementari

Definiamo inizialmente un segnale x come una funzione che mappa numeri reali in numeri complessi, formalmente

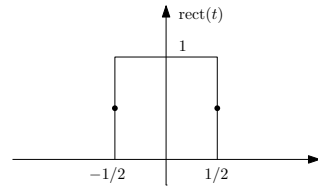
$$\begin{aligned}x &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t &\in \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

Per il momento identifichiamo la variabile associata al dominio come una variabile di *tempo* t e seguendo la tradizione indichiamo il segnale con la notazione¹ $x(t)$. Per un istante t generico, quindi, $x(t)$ è un numero complesso. Più avanti nel corso, tuttavia, useremo anche altre variabili per il dominio, in particolar modo f per il dominio delle frequenze.

Segnaliamo subito che in questo corso considereremo come *segnali* solamente funzioni che abbiano un minimo di regolarità (diciamo almeno regolari a tratti). Vediamo subito alcuni esempi di segnali elementari che useremo ripetutamente in questo corso.

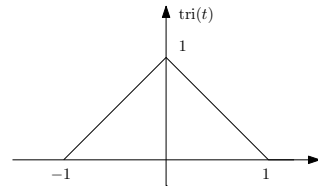
Esempio 1 (Rettangolo) Chiamiamo $\text{rect}(t)$ il segnale definito da

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2 \\ 1/2, & |t| = 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases}$$



Esempio 2 (Triangolo) Chiamiamo $\text{tri}(t)$ il segnale definito da

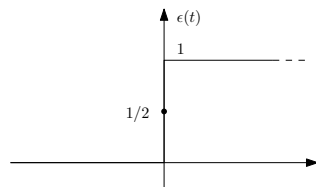
$$\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$



Esempio 3 (Gradino) Chiamiamo $\epsilon(t)$ il segnale definito da

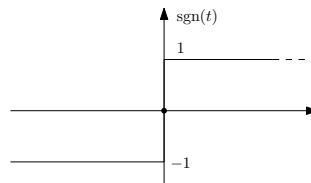
¹Il segnale è una funzione da \mathbb{R} a \mathbb{C} e per questo sarebbe più preciso mantenere, ad esempio, la notazione x . Tuttavia, è tradizione indicare il segnale con $x(t)$, anche per agevolare la descrizione di operazioni elementari, come si vedrà in seguito. Per indicare il valore specifico assunto in un punto cercheremo di usare lettere diverse per l'argomento, ad esempio $x(t_0)$, ma sarà comunque importante dedurre dal contesto se con $x(t)$ si intenda il segnale intero o il valore assunto nel punto t

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



Esempio 4 (Segno) Chiamiamo $\text{sgn}(t)$ il segnale definito da

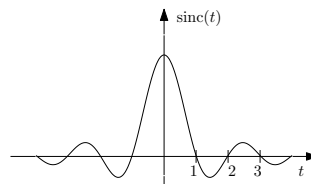
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



Osserviamo che $\text{sgn}(t) = 2\epsilon(t) - 1$.

Esempio 5 (Seno Cardinale) Chiamiamo $\text{sinc}(t)$ il segnale definito per $t \neq 0$ da

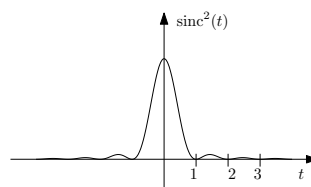
$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



ponendo per continuità $\text{sinc}(0) = 1$. Vedremo più avanti nel corso che questo segnale è strettamente legato al segnale $\text{rect}(t)$.

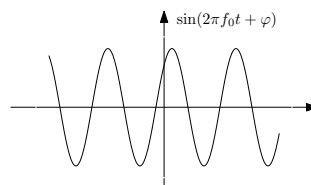
Esempio 6 (Sinc²) Useremo spesso anche il quadrato del segnale $\text{sinc}(t)$ con la notazione

$$\text{sinc}^2(t) = (\text{sinc}(t))^2$$



Esempio 7 (Sinusoide) Chiamiamo sinusoidali segnali della forma

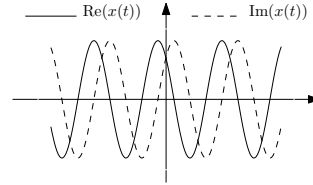
$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t + \varphi), \quad f_0, \varphi \in \mathbb{R}$$



Nota: Ponendo $\varphi = \pi/2$ abbiamo $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

Esempio 8 (Esponenziale complesso) Chiamiamo *esponenziale complesso* un segnale della forma

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}, \quad f_0, \varphi \in \mathbb{R} \\ &= \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + j \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \end{aligned}$$



Nota: Vediamo sopra l'uguaglianza di Eulero $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$ applicata al caso di segnali.

1.2 Proprietà

Definiamo per un segnale generico $x(t)$ alcune proprietà:

- **Supporto:** l'insieme dei valori di t tali che $x(t) \neq 0$. Nel nostro corso abuseremo spesso del termine per indicare il più piccolo intervallo $[a, b]$ al di fuori del quale $x(t)$ sia nullo.
- **Dinamica:** l'escursione dei valori presi dal segnale, ovvero la differenza tra valore massimo e valore minimo $x_{\max} - x_{\min}$. Anche in questo caso abuseremo a volte della terminologia per indicare l'intervallo $[x_{\min}, x_{\max}]$.
- **Durata:** la misura del suo supporto inteso come intervallo. In particolare diremo che il segnale è a durata *finita* se ha un supporto limitato e a durata *infinita* in caso contrario.
- **Causalità:** diciamo che $x(t)$ è un segnale
 - *causale* se $x(t) = 0, \forall t < 0$
 - *anticausale* se $x(t) = 0, \forall t \geq 0$
 - *non causale* altrimenti (ovvero esistono $t_1 < 0, t_2 \geq 0$ tali che $x(t_1) \neq 0$ e $x(t_2) \neq 0$)

Si veda l'esempio in figura (si osservi un primo uso dell'operazione elementare di traslazione).

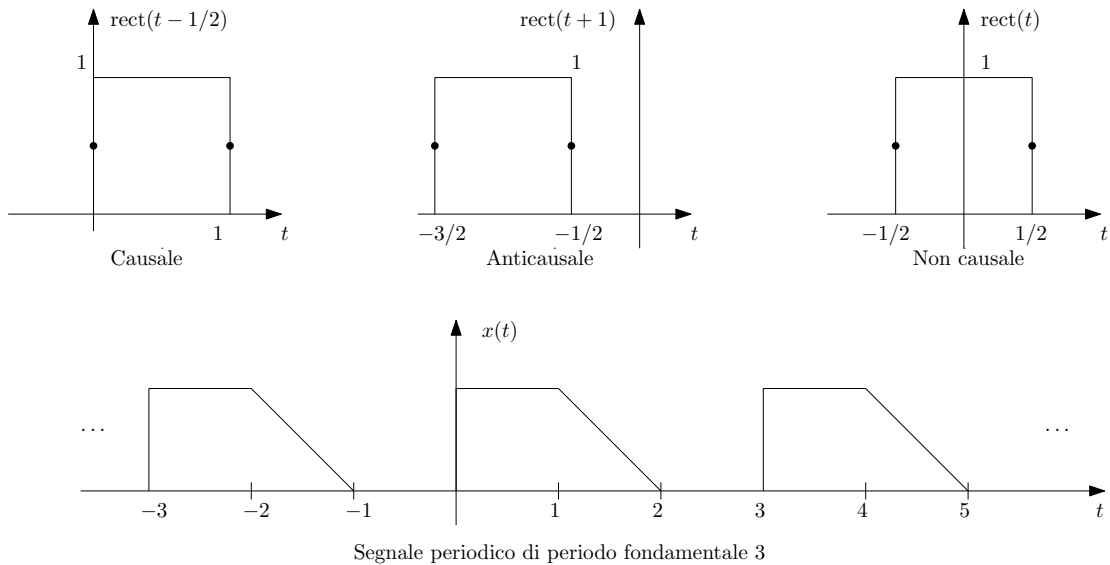
Il motivo per cui vengono usati questi nomi apparirà chiaro quando affronteremo lo studio dei sistemi lineari tempo-invarianti.

- **Periodicità:** diciamo che $x(t)$ è periodico di periodo $T > 0$ se

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Il minimo $T > 0$ per cui vale la proprietà sopra enunciata, se esiste², è detto *periodo fondamentale*. In tal caso, il segnale ha come periodi esattamente i multipli del periodo fondamentale.

²Un segnale costante è periodico di periodo T per ogni $T > 0$, ma non esiste un periodo positivo minimo e non vogliamo definire un periodo fondamentale.



Esempio: il segnale $x(t) = \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$ è periodico di periodo fondamentale $1/f_0$ poichè

$$x(t + 1/f_0) = \sin(2\pi f_0 t + 2\pi + \varphi) = \sin(2\pi f_0 t + \varphi) = x(t), \quad \forall t.$$

È quindi ovviamente anche periodico di periodo $2/f_0, 3/f_0$, ecc. Il segnale $y(t) = \sin^2(2\pi f_0 t + 2\pi + \varphi)$ ha periodo fondamentale $1/(2f_0)$ in quanto $\sin^2(\theta) = (1 - \cos(2\theta))/2$.

- **Simmetrie:** Diremo che un segnale $x(t)$ ha simmetria pari (o più semplicemente che è un segnale pari) se verifica

$$x(-t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

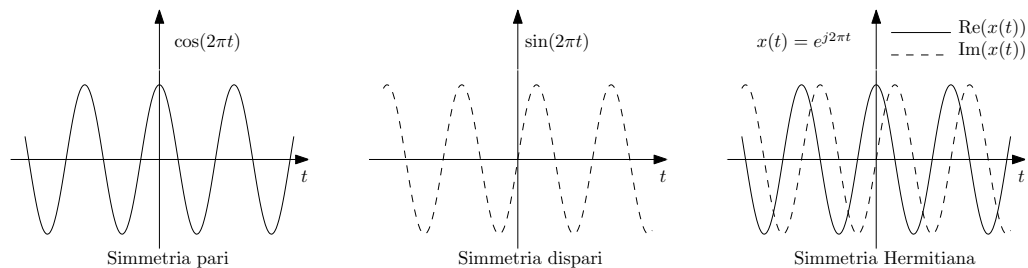
e che ha simmetria dispari se

$$x(-t) = -x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Diremo infine che $x(t)$ ha simmetria Hermitiana (o coniugata) se

$$x(-t) = x^*(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Si osservi che $x(t)$ ha simmetria Hermitiana se e solo se $|x(t)|$ e $\text{Re}(x(t))$ hanno simmetria pari e $\arg(x(t))$ e $\text{Im}(x(t))$ hanno simmetria dispari.



Infine, notiamo che qualsiasi segnale $x(t)$ può essere scomposto in una parte pari e una parte dispari scrivendo $x(t) = x_p(t) + x_d(t)$ dove

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_d(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

- **Valor medio:** definiamo il valor medio del segnale $x(t)$ come il limite, se esiste,

$$\bar{x} = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} x(t) dt$$

Per segnali periodici di periodo T il limite suddetto esiste se e solo se il segnale è integrabile su un periodo e in tal caso si ha

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_u^{u+T} x(t) dt, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Es. **Esempi:** I segnali $\text{rect}(t)$, $\text{tri}(t)$, hanno valor medio nullo. Si invita a verificare che anche $\text{sinc}(t)$, le sinusoidi, gli esponenziali complessi e la funzione $\text{sgn}(t)$ hanno valor medio nullo. Al contrario, per il gradino abbiamo $\bar{\varepsilon} = 1/2$ e il segnale $x(t) = |\sin(2\pi f_0 t)|$ è periodico di periodo $1/(2f_0)$ ed ha valor medio $2/\pi$, indipendentemente da f_0 .

1.3 Energia e Potenza

Tra gli esempi di segnali visti in precedenza distinguiamo subito due principali tipologie, ovvero segnali che svaniscono per valori di t sufficientemente grandi e segnali che assumono valori significativi per valori arbitrariamente grandi di t . In questo corso consideriamo in particolare due tipologie di segnali

- **Segnali di Energia:** Chiamiamo energia di un segnale il valore dell'integrale improprio

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Diremo abitualmente che un segnale è *di energia* se ha energia finita.

- **Segnali di Potenza:** Chiamiamo potenza media di un segnale $x(t)$ il limite (se esiste)

$$P_x = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} |x(t)|^2 dt$$

Diremo abitualmente che $x(t)$ è un segnale *di potenza* se ha potenza media finita non nulla. Tutti i segnali periodici (non nulli) il cui modulo quadro sia integrabile sul periodo sono segnali di potenza e si ha

$$P_x = \frac{1}{T} \int_u^{u+T} |x(t)|^2 dt, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

essendo T un periodo.

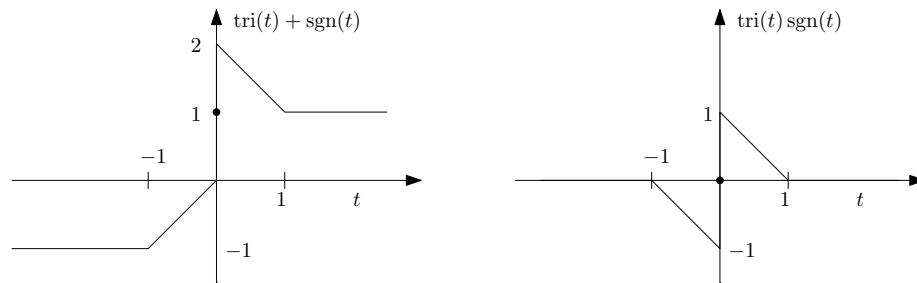
Es. **Esempi.** I segnali $\text{rect}(t)$, $\text{tri}(t)$ sono di energia e in particolare $W_{\text{rect}} = 1$, $W_{\text{tri}} = 2/3$. Anche i segnali $\text{sinc}(t)$ e $\text{sinc}^2(t)$ sono di energia e vedremo che verificano (e non è un caso) $W_{\text{sinc}} = 1$, $W_{\text{sinc}^2} = 2/3$. I segnali $\epsilon(t)$ e $\text{sgn}(t)$ sono di potenza e in particolare $P_{\epsilon} = 1/2$, $P_{\text{sgn}} = 1$. L'esponenziale complesso è un segnale di potenza pari a 1 e le sinusoidi (con $f_0 \neq 0$) sono segnali di potenza pari a $1/2$.

Vedremo più avanti una trattazione più dettagliata di queste categorie di segnali nel contesto della rappresentazione geometrica dei segnali, ambito in cui introdurremo un concetto di norma e distanza tra segnali.

1.4 Operazioni Elementari

Essendo i segnali introdotti finora normali funzioni matematiche possiamo definire delle operazioni come si fa abitualmente per funzioni.

- **Somma e prodotto:** Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ definiamo la somma $x(t) + y(t)$ e il prodotto $x(t)y(t)$ istante per istante nel modo del tutto ovvio come abitualmente viene fatto per funzioni, si veda l'esempio in figura.



In particolare useremo spesso l'operazione di *finestramento* di un segnale su un intervallo definita come moltiplicazione per un rettangolo. Ad esempio $y(t) = x(t) \text{rect}(t)$ è un finestramento del segnale $x(t)$ sull'intervallo $[-1/2, 1/2]$.

- **Traslazione (nei tempi):** Dato un segnale $x(t)$, il segnale $y(t) = x(t - t_0)$ corrisponde a una traslazione sull'asse delle ascisse (orizzontale) del segnale $x(t)$ di una quantità t_0 (verso destra se $t_0 > 0$).
- **Traslazione (nelle ampiezze):** Dato un segnale $x(t)$, il segnale $y(t) = x(t) + a$ corrisponde a una traslazione sull'asse delle ordinate (verso l'alto se $a > 0$). È naturalmente solo un caso particolare di somma di segnali.
- **Ribaltamento orizzontale:** Dato un segnale $x(t)$, il segnale $y(t) = x(-t)$ corrisponde a un ribaltamento rispetto all'asse $t = 0$ del segnale $x(t)$.
- **Cambio scala (nei tempi):** Dato un segnale $x(t)$, il segnale $y(t) = x(at)$, $a > 0$, corrisponde a una compressione ($a > 1$) o espansione ($0 < a < 1$) sull'asse delle ascisse.

- **Ribaltamento verticale:** Dato un segnale $x(t)$, il segnale $y(t) = -x(t)$ corrisponde a un ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse del segnale $x(t)$.
- **Cambio scala (in ampiezza):** Dato un segnale $x(t)$, il segnale $y(t) = ax(t)$, a reale positivo, corrisponde a una compressione ($0 < a < 1$) o espansione ($a > 1$) sull'asse delle ordinate.
- **Moltiplicazione per uno scalare:** Ovviamente le ultime due operazioni viste sono in realtà casi particolari dell'operazione di moltiplicazione tra segnali. È utile però definire (almeno per questioni formali) il concetto di moltiplicazione di un segnale per uno scalare $a \in \mathbb{C}$ generico.
- **Combinazioni:** Tutte le operazioni suddette si possono naturalmente combinare. Dato un segnale $x(t)$, il segnale $y(t) = a \cdot x(bt + c)$ sarà un versione traslata e scalata sia nei tempi sia in ampiezza (e/o ribaltata in base ai segni di a e b).

Useremo queste operazioni continuamente nel corso ed è quindi importante che lo studente abbia dimestichezza con ogni singola operazione e con la combinazione di queste. Si invita a verificare dettagliatamente gli esempi proposti in Figura 1 nella pagina seguente.

△ In particolare, ricorrono spesso le seguenti combinazioni (si veda Figura 2):

- **Cambio scala + traslazione nei tempi.** Ad esempio dato $x(t)$, il segnale

$$y(t) = x\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

corrisponde ad una espansione di un fattore 2 sull'asse dei tempi *seguita* da una traslazione a destra di 3.

- **Ribaltamento + traslazione nei tempi.** Ad esempio dato $x(t)$, il segnale

$$y(t) = x(2-t)$$

corrisponde ad un ribaltamento orizzontale attorno all'asse $t = 0$ seguito da una traslazione a *destra* di 2.

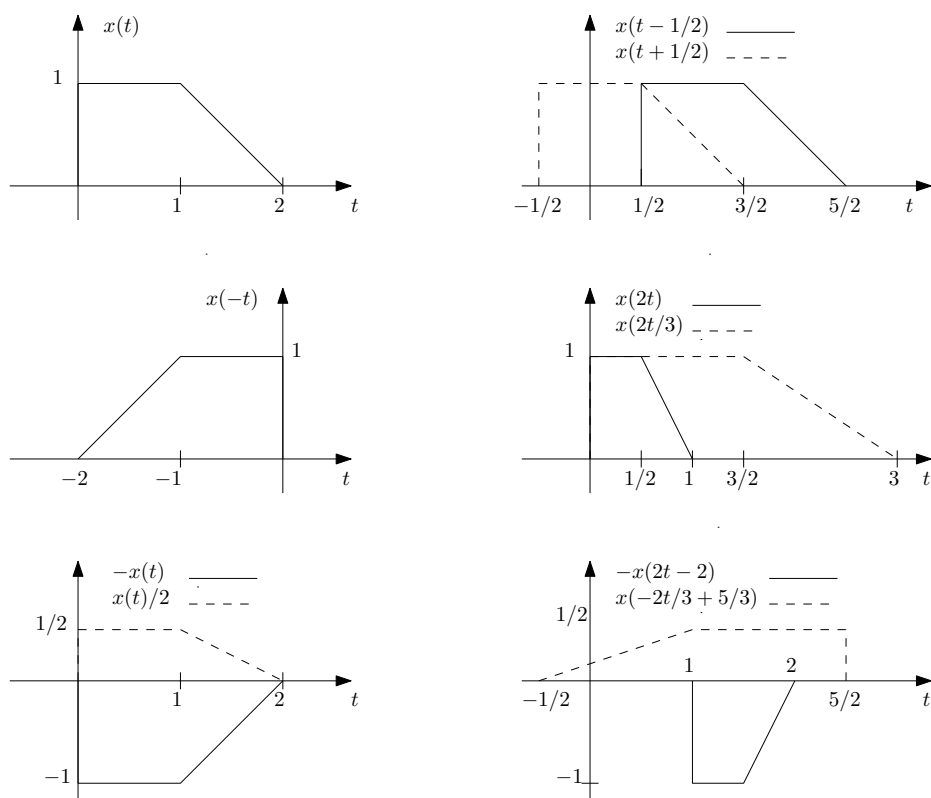


Figura 1: Esempi di operazioni elementari.

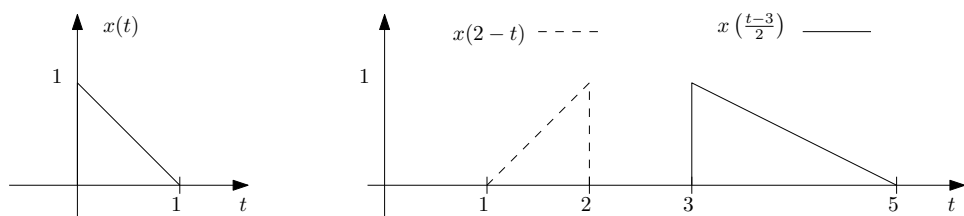


Figura 2: Operazioni usate molto frequentemente.

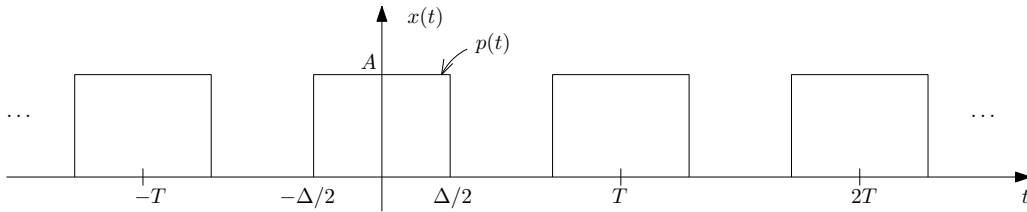
1.5 Segnali periodici

Attraverso l'uso di operazioni elementari possiamo descrivere segnali periodici generici, alcuni dei quali ricorreranno spesso nel corso. Diamo subito alcuni esempi importanti.

Esempio 9 (Onda quadra) Chiamiamo *onda quadra* un segnale definito da

$$x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left(\frac{t - kT}{\Delta} \right),$$

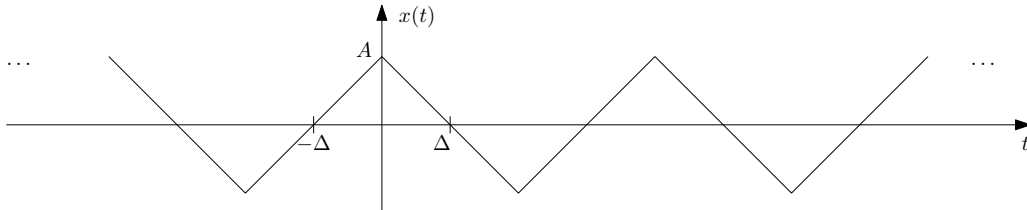
dove A, T, Δ sono parametri reali con $\Delta > 0$ e $T > \Delta$.



Esempio 10 (Onda triangolare) Chiamiamo *onda triangolare* un segnale definito da

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \text{tri} \left(\frac{t - 2k\Delta}{\Delta} \right) \\ &= 2A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{tri} \left(\frac{t - 4k\Delta}{2\Delta} \right) - A \end{aligned}$$

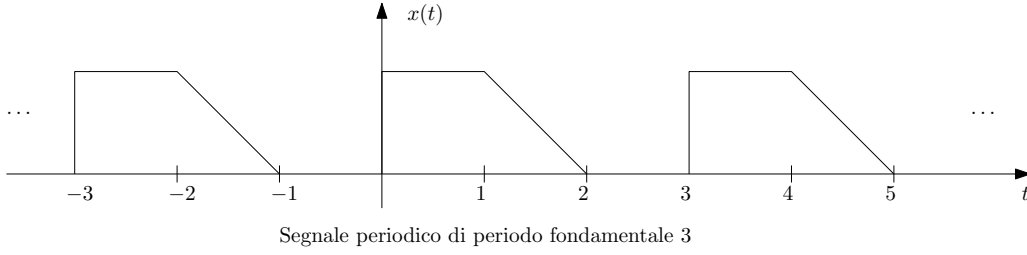
dove A, Δ sono parametri reali con $\Delta > 0$ (si notino le due scritture equivalenti).



In generale, un segnale $x(t)$ periodico di periodo T può essere scritto nella forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - kT) \tag{1.1}$$

con $p(t)$ scelto opportunamente. Ad esempio, il segnale mostrato nella figura sottostante



può essere scritto ponendo $p(t) = \text{rect}(t - 1/2) + \text{rect}(t - 3/2) \text{tri}(t - 1)$ come

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - 3k).$$

⚠ In generale, l'esempio appena considerato mostra che è possibile scegliere come impulso $p(t)$ un *qualsiasi* periodo del segnale $x(t)$. Notiamo però che la scelta di $p(t)$ nell'equazione (1.1) può essere anche più generale; ad esempio il segnale costantemente uguale a 1 si può scrivere scegliendo $T = 1$ con $p(t) = \text{rect}(t)$ oppure con $p(t) = \text{tri}(t)$, poiché

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{rect}(t - k) \quad (1.2)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{tri}(t - k) \quad (1.3)$$

Vedremo più avanti nel corso che potremmo scegliere in questo esempio anche $p(t) = \text{sinc}(t)$ oppure $p(t) = \text{sinc}^2(t)$.

⚠ **Somma e prodotto di segnali periodici.** Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ (diciamo almeno regolari a tratti) di periodi fondamentali T_x e T_y rispettivamente, la somma $z(t) = x(t) + y(t)$ è periodica se e solo se il rapporto T_x/T_y è un numero razionale. In tal caso $z(t)$ è periodico di periodo m.c.m. (T_x, T_y) , sebbene questo non sia necessariamente il periodo fondamentale. Ad esempio, il segnale $z(t) = \sin(\pi t) + \cos(2\pi t/3)$ è periodico di periodo m.c.m. $(2, 3) = 6$. Un discorso analogo vale per il prodotto.

2 Rappresentazione Geometrica dei Segnali

2.1 Richiami su spazi vettoriali, prodotti scalari, norme e distanze

Spazio vettoriale. Ricordiamo, dai corsi di algebra lineare, che un insieme V è detto spazio vettoriale sul campo dei numeri reali \mathbb{R} se sono definite le seguenti due operazioni (si veda l'Appendice A per dettagli formali):

1. Somma tra vettori, rispetto a cui V è un gruppo abeliano, ovvero valgono proprietà associative e commutativa, esiste un elemento neutro (il vettore nullo 0) ed ogni vettore $v \in V$ ha un opposto $v' \in V$ tale che $v + v' = 0$ (usando poi la notazione $-v$ per l'opposto di v).
2. Prodotto esterno di un vettore per uno scalare, che goda delle proprietà (pseudo)distributive e pseudo-associativa e in cui lo scalare 1 agisca da neutro (cioè $1 \cdot v = v$).

Le due proprietà suddette permettono in sostanza di generare combinazioni lineari di vettori del tipo

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n, \quad a_k \in \mathbb{R}, v_k \in V, k = 1, \dots, n$$

⚠ Mentre nei corsi di algebra di base queste proprietà vengono introdotte per spazi vettoriali sui reali, possono essere estese senza difficoltà al caso in cui gli scalari siano nel campo dei numeri complessi \mathbb{C} anziché dei numeri reali \mathbb{R} . Questa estensione risulta fondamentale per i nostri scopi.

Ricordiamo il seguente importante concetto

Base: Dato un sottospazio vettoriale V di segnali, diciamo che una sequenza di segnali $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ costituisce una base per V se i vettori sono linearmente indipendenti, ovvero

$$\sum_{k=1}^n a_k \psi_k = 0 \Leftrightarrow a_k = 0, \forall k$$

e permettono di generare qualsiasi vettore del sottospazio V , ovvero

$$\forall v \in V, \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} : v = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k.$$

In tal caso, i coefficienti a_k nell'ultima espressione sono unici e vengono detti coordinate di v nella base $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$. Diciamo che un sottospazio V ha dimensione finita se ammette una base finita.

⚠ Le operazioni elementari che abbiamo visto sui segnali (in particolare la somma tra segnali e la moltiplicazione per uno scalare) permettono di considerare l'insieme dei segnali come uno spazio vettoriale sul campo dei numeri complessi \mathbb{C} . Tale spazio ha dimensione infinita ed è veramente "troppo grande". Noi lavoreremo generalmente con sottospazi vettoriali, a volte anche di dimensione finita.

Prodotto scalare, norme e distanze. Una struttura di spazio vettoriale può essere arricchita mediante la definizione di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (si veda l'Appendice A) che associa ad ogni

coppia di vettori uno scalare. Ricordiamo il più comune prodotto scalare definito in \mathbb{R}^n tramite l'espressione

$$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^n v_k w_k,$$

che è simmetrico e lineare negli argomenti. La definizione di un prodotto scalare (definito positivo, ovvero tale che $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0$) induce automaticamente la definizione di una norma $\|\cdot\|$ tramite la relazione $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, $\forall v \in V$ e quindi una distanza tramite l'espressione $d(v, w) = \|v - w\|$. In particolare, per lo spazio \mathbb{R}^n con il prodotto scalare suddetto abbiamo quindi le usuali nozioni di norma e distanza Euclidee

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}, \quad d(v, w) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (v_i - w_i)^2}$$

Queste quantità sono legate all'angolo tra due vettori dalla formula

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos(\angle(v, w))$$

△ Si possono estendere tali definizioni al caso dello spazio vettoriale \mathbb{C}^n (sul campo complesso) usando le espressioni

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i^*, \quad \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}, \quad d(v, w) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i - w_i|^2}$$

In questo caso, tuttavia, bisogna prestare attenzione ad alcune differenze fondamentali. Il prodotto scalare non è simmetrico ma ha simmetria coniugata, ovvero vale la relazione

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle^*$$

ed è *sesquilineare* (lineare nel primo argomento ma antilineare nel secondo), ovvero valgono le relazioni

$$\begin{aligned} \langle \alpha v_1 + \beta v_2, w \rangle &= \alpha \langle v_1, w \rangle + \beta \langle v_2, w \rangle \\ \langle v, \alpha w_1 + \beta w_2 \rangle &= \alpha^* \langle v, w_1 \rangle + \beta^* \langle v, w_2 \rangle \end{aligned}$$

Inoltre, in questo caso il concetto di angolo tra due vettori assume una interpretazione meno ovvia.

Esempio 11 (\mathbb{C}^n). Consideriamo due vettori v e w in \mathbb{C}^n , con $n = 3$. Siano ad esempio $v = (j, 1, 1 - j)$ e $w = (2j, 1, -1)$. Allora avremo

$$\langle v, w \rangle = 2 + j, \quad \|v\| = 2, \quad \|w\| = \sqrt{6}, \quad d(v, w) = \sqrt{6}$$

Per alcune categorie di segnali introduciamo definizioni di prodotti scalari, norme e distanze che sono del tutto analoghe al prodotto scalare in \mathbb{C}^n appena descritto, con la principale differenza nel fatto che le sommatorie sono sostituite da integrali. Per fare questo in modo appropriato, però, restringiamo l'attenzione ad alcune classi di segnali.

2.2 Segnali di Energia

Consideriamo il sottoinsieme dei segnali $x(t)$ di energia, ovvero i segnali per cui esiste finito l'integrale improprio

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt.$$

Si può mostrare che l'insieme di tali segnali costituisce uno spazio vettoriale (quindi un sottospazio dello spazio di tutti i segnali). Si può anche mostrare che in questo spazio è possibile definire un prodotto scalare tramite l'espressione³

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt,$$

che è appunto una estensione naturale del prodotto scalare in \mathbb{C}^n . Questo prodotto scalare induce, tramite la relazione citata in precedenza $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, la norma

$$\|x\| = \sqrt{W_x} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt},$$

che risulta quindi essere una naturale estensione della norma Euclidea abitualmente definita su \mathbb{C}^n . Infine, la norma suddetta induce, tramite la relazione $d(x, y) = \|x - y\|$, la seguente distanza tra segnali di energia

$$d(x, y) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt}$$

Es. **Esempi.** Nello spazio dei segnali di energia, abbiamo ad esempio $\langle \text{rect}(t), \text{tri}(t) \rangle = 3/4$. Si noti la notazione ridondante in cui compare la variabile t ; il vantaggio è che in questo modo possiamo abusare delle notazioni per scrivere ad esempio $\langle \text{tri}(t/2), \text{rect}(t-1/2) \rangle = 1$. Troviamo poi, confrontando con le energie del rettangolo e del triangolo, $\|\text{rect}(t)\| = 1$, $\|\text{tri}(t)\| = \sqrt{2/3}$. Abbiamo inoltre ad esempio $\|\text{rect}(t/2)\| = \sqrt{2}$ e $\|2\text{tri}(3t)\| = 2\sqrt{2/3}$, o, ancora, $d(\text{rect}(t/2), \text{rect}(t)) = 1$, $d(\text{rect}(t), \text{tri}(t)) = 1/\sqrt{6}$, $d(\text{tri}(t), \text{tri}(t-1)) = 1$.

2.3 Segnali di Potenza

Consideriamo ora l'insieme dei segnali $x(t)$ per i quali sia ben definita la potenza P_x , ovvero esista il limite

$$P_x = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} |x(t)|^2 dt.$$

Si può mostrare che anche questo sottoinsieme costituisce un sottospazio vettoriale. A questo sottospazio appartengono in particolare tutti i segnali *di potenza* ma anche i segnali di energia, che in questo contesto vediamo come segnali a potenza nulla. Useremo comunque per questo sottospazio

³Omettiamo la variabile argomento t quando i segnali vengono interpretati come vettori.

- △ la dicitura di *spazio dei segnali di potenza* per ricordare che contiene *anche* i segnali di potenza, mentre lo *spazio dei segnali di energia* contiene *solo* quelli di energia.

Anche in questo spazio possiamo definire un prodotto scalare, in questo caso tramite l'espressione

$$\langle x, y \rangle = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} x(t) y^*(t) dt$$

- △ Questo prodotto scalare non è definito positivo ma solo semi-definito positivo, in quanto ad esempio ogni segnale $x(t)$ di energia verifica $\langle x, x \rangle = 0$. Pertanto, anziché indurre una vera e propria norma, il prodotto scalare induce una *semi-norma* $\|\cdot\|$ (in cui $\|x\| = 0$ non implica $x = 0$, si veda l'Appendice A) definita da

$$\|x\| = \sqrt{P_x} = \sqrt{\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} |x(t)|^2 dt},$$

e quindi una *pseudometrica* $d(\cdot, \cdot)$ – che noi chiameremo comunque distanza – definita da

$$d(x, y) = \sqrt{\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} |x(t) - y(t)|^2 dt}.$$

Per segnali periodici di periodo T varranno evidentemente le espressioni più semplici

$$\|x\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_u^{u+T} |x(t)|^2 dt}$$

$$d(x, y) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_u^{u+T} |x(t) - y(t)|^2 dt}.$$

Si presti attenzione al fatto che le suddette semi-norma e distanza sono tali per cui se due segnali di potenza $x(t)$ e $y(t)$ differiscono solo per un segnale di energia allora hanno la stessa potenza e, più in particolare, $d(x, y) = 0$.

- Esempi.** Ricordando le potenze dei segnali elementari già riportate in precedenza, si ha $\|\epsilon(t)\| = 1/\sqrt{2}$, $\|\text{sgn}(t)\| = 1$, $\|e^{j2\pi f_0 t}\| = 1$, $\|\sin(2\pi f_0 t)\| = 1/\sqrt{2}$ ($f_0 \neq 0$). Si noti che gli ultimi due esempi sono casi particolari del fatto che, nello spazio dei segnali di potenza, per $a \neq 0$ si ha $\|x(at)\| = \|x(t)\|$.
Es. Si verifichi che $\langle \text{sgn}(t), \epsilon(t - t_0) \rangle = 1/2$, indipendentemente da t_0 , che $\langle \cos(2\pi t), \sin(2\pi t) \rangle = 0$ e che $\langle \cos(2\pi f_1 t), \cos(2\pi f_2 t) \rangle = 0$ per $f_1 \neq f_2$. Si verifichi che $d(\epsilon(t), \text{sgn}(t)) = 1/\sqrt{2}$, mentre posto $x(t) = \sum_k \text{rect}(t - 2k)$ e $y(t) = \sum_k \text{tri}(t - 2k)$ abbiamo $d(x, y) = 1/\sqrt{12}$. Ancora, $d(e^{j2\pi t}, \cos(2\pi t)) = 1/\sqrt{2}$

2.4 Relazioni geometriche tra segnali

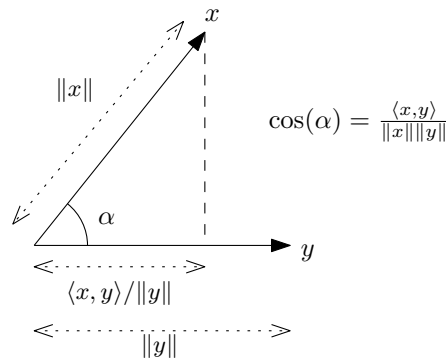
Sia per segnali di energia sia per segnali di potenza potremo stabilire relazioni geometriche sulla base della nozione di prodotto scalare, norma e distanza introdotti in precedenza per ciascuna classe. Queste nozioni sono del tutto analoghe a quanto lo studente certamente ha già incontrato nei corsi di algebra e geometria per gli spazi \mathbb{R}^n . Tuttavia, poiché il prodotto scalare da noi utilizzato

non è reale ma complesso, ripercorriamo i passi più importanti per verificare che ancora valgano le proprietà che intuitivamente ci si aspetta di poter usare.

Anzitutto, per segnali reali vale l'interpretazione geometrica per cui è possibile associare il prodotto scalare a una nozione di angolo tra due vettori riscrivendo la relazione già ricordata per \mathbb{R}^n nella forma

$$\cos(\angle(v, w)) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|},$$

si veda la figura sottostante.



Per segnali complessi, il prodotto scalare può assumere in generale valori complessi e quindi tale nozione di angolo non è più immediata (almeno non in termini elementari). È però possibile dare comunque una interpretazione geometrica e in particolare useremo le seguenti nozioni.

Ortogonalità: diremo che due segnali x e y sono ortogonali se $\langle x, y \rangle = 0$.

Anche nel campo complesso, questa nozione è del tutto coerente con la nozione di ortogonalità nel contesto del teorema di Pitagora. Abbiamo infatti il seguente risultato

Teorema di Pitagora: se x e y sono due segnali ortogonali, allora

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

La relazione suddetta si può riformulare dicendo che segnali ortogonali si sommano in energia o in potenza (in base allo spazio considerato).

Es. **Esempio 12** Si verifichi che nello spazio dei segnali di energia sono ortogonali le seguenti coppie di segnali: $x(t) = \text{rect}(t)$ e $y(t) = \text{rect}(t - 1)$, $x(t) = \text{rect}(t)$ e $y(t) = \text{rect}(t) \text{sgn}(t)$, $x(t) = \text{tri}(t)$ e

$y(t) = \text{sinc}^2(t) \text{sgn}(t)$. Si verifichi che nello spazio dei segnali di potenza sono ortogonali le seguenti coppie di segnali $x(t) = e^{j2\pi f_1 t}$ e $y(t) = e^{j2\pi f_2 t}$ con $f_1 \neq f_2$. Si usi il teorema di Pitagora per calcolare la potenza di $x(t) = \cos(2\pi t) + j \cos(3\pi t) - (1 + j) \sin(4\pi t)$.

Si presti attenzione al fatto che sotto l'ipotesi di ortogonalità tra x e y , $d^2(x, y) = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (e non $\|x\|^2 - \|y\|^2$!). Più in generale, è possibile legare la distanza tra due segnali alle loro norme e prodotto scalare tramite la seguente estensione del teorema del coseno (o di Carnot).

Teorema del coseno (o di Carnot): vale la relazione

$$d^2(x, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \text{Re}(\langle x, y \rangle)$$

ottenuta applicando la definizione e le proprietà del prodotto scalare complesso (in particolare $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle^*$) come segue:

$$\begin{aligned} d^2(x, y) &= \|x - y\|^2 \\ &= \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \text{Re}(\langle x, y \rangle). \end{aligned}$$

Infine, nonostante valori complessi del prodotto scalare rendano vaga l'associazione a un concetto di coseno dell'angolo compreso tra due vettori, vale la seguente proprietà che può essere interpretata come una estensione del fatto che $|\cos(\angle(v, w))| \leq 1$.

Disuguaglianza di Schwarz: vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Infatti, per $\alpha \in \mathbb{C}$, dal teorema del coseno abbiamo

$$\begin{aligned} d^2(x, \alpha y) &= \|x\|^2 + \|\alpha y\|^2 - 2 \text{Re}(\langle x, \alpha y \rangle) \\ &= \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|y\|^2 - 2 \text{Re}(\alpha^* \langle x, y \rangle) \end{aligned}$$

Scegliendo $\alpha = \langle x, y \rangle / \|y\|^2$, si ha $|\alpha|^2 \|y\|^2 = |\langle x, y \rangle|^2 / \|y\|^2$ ed anche $\alpha^* \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|^2 / \|y\|^2$. Poiché $d^2(x, \alpha y) \geq 0$, si ottiene

$$\|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

che è equivalente a quanto affermato. Si osservi che si ha uguaglianza se e solo se $d^2(x, \alpha y) = 0$ per il valore di α scelto. Nel caso di una vera e propria norma, come nello spazio dei segnali di energia, questo implica $x = \alpha y$, ovvero x e y sono proporzionali. Nel caso di segnali di potenza, come già spiegato, x e αy potranno differire ad esempio per una componente di energia (più precisamente, la potenza di $x - \alpha y$ deve essere nulla).

Proiezione ortogonale lungo una direzione: dati due segnali x e y , la proiezione ortogonale di x nella direzione di y è data dall'espressione

$$x_{\perp} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y.$$

Infatti, se cerchiamo un multiplo di y , diciamo αy , per cui il vettore differenza $x - \alpha y$ sia ortogonale a y , otteniamo

$$\langle x - \alpha y, y \rangle = 0$$

da cui ricaviamo $\langle x, y \rangle = \alpha \langle y, y \rangle$ e quindi $\alpha = \langle x, y \rangle / \|y\|^2$. Si noti che questo valore di α è proprio lo stesso scelto nella dimostrazione della disuguaglianza di Schwarz. La proiezione ortogonale ha una proprietà fondamentale, ovvero è il multiplo di y a distanza minima da x . Infatti, considerando di nuovo un multiplo generico αy di y , abbiamo per il teorema del coseno

$$\begin{aligned} d^2(x, \alpha y) &= d^2(x - x_\perp, \alpha y - x_\perp) \\ &= \|x - x_\perp\|^2 + \|\alpha y - x_\perp\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\langle x - x_\perp, \alpha y - x_\perp \rangle). \end{aligned}$$

Ma il prodotto scalare nell'ultimo addendo è nullo, poichè $\alpha y - x_\perp$ è un multiplo di y e $x - x_\perp$ è ortogonale a y . Poiché il secondo addendo è non negativo, la distanza è minima quando $\alpha y = x_\perp$. Si noti che x_\perp è di fatto la proiezione di x nel sottospazio generato da y . Vedremo che, più in generale, la proiezione di un segnale x in un sottospazio qualsiasi rappresenta il punto del sottospazio a distanza minima da x .

2.5 Basi, rappresentazioni e proiezioni

Basi ortogonali e ortonormali. Sia ψ_1, ψ_2, \dots , una base per uno spazio vettoriale V . Diciamo che la base è *ortogonale* se

$$\langle \psi_h, \psi_k \rangle = 0, \quad \forall h, k : h \neq k$$

Se inoltre

$$\|\psi_k\| = 1, \quad \forall k$$

allora la base è detta *ortonormale*.

Se ψ_1, ψ_2, \dots , è una base ortogonale per lo spazio V , un segnale $x \in V$ ammette una espansione lineare della forma

$$x = \sum_k \frac{\langle x, \psi_k \rangle}{\|\psi_k\|^2} \psi_k$$

(che si mostra imponendo $x = \sum_k a_k \psi_k$ e verificando che $\langle x, \psi_h \rangle = a_h \|\psi_h\|^2$, da cui si ricava a_h). Se la base è ortonormale, in particolare, si avrà

$$x = \sum_k \langle x, \psi_k \rangle \psi_k.$$

Conservazione di norma e prodotto scalare. L'espansione in una base ortonormale gode della seguente importante proprietà. Dati due segnali x e y , si considerino le espansioni in una base ortonormale ψ_1, ψ_2, \dots ,

$$x = \sum_k a_k \psi_k, \quad y = \sum_k b_k \psi_k.$$

Allora vale la proprietà

$$\langle x, y \rangle = \sum_k a_k b_k^*,$$

ovvero il prodotto scalare tra i segnali può essere calcolato usando il prodotto scalare descritto in Sezione 2.1 tra le sequenze dei coefficienti a_k e b_k . Poiché $a_k = \langle x, \psi_k \rangle$ e $b_k = \langle y, \psi_k \rangle$, possiamo anche scrivere

$$\langle x, y \rangle = \sum_k \langle x, \psi_k \rangle \langle y, \psi_k \rangle^*$$

Per verificare questa proprietà basta calcolare il prodotto scalare $\langle x, y \rangle$ usando le espansioni nella base considerata e la sesquilinearità del prodotto scalare

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_k a_k \psi_k, \sum_h b_h \psi_h \right\rangle \\ &= \sum_k \sum_h \langle a_k \psi_k, b_h \psi_h \rangle \\ &= \sum_k \sum_h a_k b_h^* \langle \psi_k, \psi_h \rangle \end{aligned}$$

Osservando che $\langle \psi_k, \psi_h \rangle = 1$ per $h = k$ mentre $\langle \psi_k, \psi_h \rangle = 0$ per $h \neq k$, la doppia sommatoria si riduce a una singola sommatoria (poiché si può considerare solo $h = k$) che restituisce l'espressione cercata.

Applicando la proprietà appena vista al caso $y = x$ si ottiene la *legge di conservazione della norma*, che possiamo scrivere nel seguente modo

$$\|x\|^2 = \sum_k |\langle x, \psi_k \rangle|^2$$

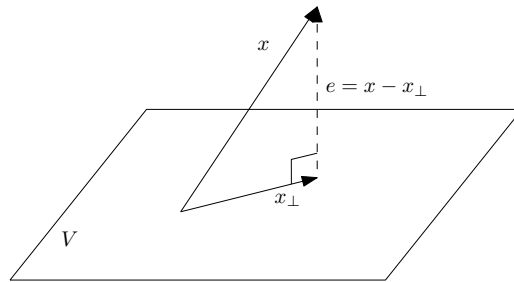
Proiezione/approssimazione ottima in un sottospazio. Data una base ortonormale ψ_1, ψ_2, \dots , per un sottospazio V , si consideri un segnale x che non appartenga necessariamente a V . Allora la proiezione ortogonale x_\perp di x nel sottospazio V si può esprimere come

$$x_\perp = \sum_k \langle x, \psi_k \rangle \psi_k$$

(si noti la somiglianza con l'espansione di un segnale $x \in V$; tuttavia se $x \notin V$ si avrà $x_\perp \neq x$).

È facile verificare che in effetti si tratta di una proiezione ortogonale poiché

$$e = x - x_\perp \quad \text{verifica} \quad e \perp V.$$



Infatti per ogni h si verifica che e è ortogonale a ψ_h :

$$\begin{aligned}
\langle e, \psi_h \rangle &= \langle x - x_\perp, \psi_h \rangle \\
&= \langle x, \psi_h \rangle - \langle x_\perp, \psi_h \rangle \\
&= \langle x, \psi_h \rangle - \left\langle \sum_k \langle x, \psi_k \rangle \psi_k, \psi_h \right\rangle \\
&= \langle x, \psi_h \rangle - \sum_k \langle x, \psi_k \rangle \langle \psi_k, \psi_h \rangle \\
&= \langle x, \psi_h \rangle - \langle x, \psi_h \rangle = 0.
\end{aligned}$$

- △ Si può verificare che il segnale x_\perp è di fatto il segnale dello spazio V a distanza minima da x , similmente a quanto già visto per proiezioni lungo una direzione. Infatti, se x' è un qualsiasi segnale in V , abbiamo

$$\begin{aligned}
d^2(x, x') &= d^2(x - x_\perp, x' - x_\perp) \\
&= \|x - x_\perp\|^2 + \|x' - x_\perp\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\langle x - x_\perp, x' - x_\perp \rangle).
\end{aligned}$$

Poché $x - x_\perp$ è ortogonale a V e $x' - x_\perp$ appartiene a V , il prodotto scalare nell'ultimo addendo è nullo e la distanza sarà minima quando $x' = x_\perp$.

Poiché le distanze usate sono Euclidee, diremo che x_\perp è l'approssimazione ai minimi quadrati del segnale x nel sottospazio V . Grazie al teorema di Pitagora abbiamo

△

$$\|e\|^2 = \|x\|^2 - \|x_\perp\|^2.$$

Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Data una base ϕ_1, ϕ_2, \dots non ortonormale per uno spazio V , è possibile costruire una base ortonormale ψ_1, ψ_2, \dots attraverso la procedura di Gram-Schmidt definita di seguito:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{\phi_1}{\|\phi_1\|}, \\
v_k &= \phi_k - \sum_{h=1}^{k-1} \langle \phi_k, \psi_h \rangle \psi_h, \quad \psi_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}, \quad k > 1.
\end{aligned}$$

Si osservi che la sommatoria nell'ultima espressione rappresenta la proiezione di ϕ_k nel sottospazio generato da $\psi_1, \dots, \psi_{k-1}$ (e quindi da $\phi_1, \dots, \phi_{k-1}$). Il vettore v_k rappresenta cioè la componente di ϕ_k ortogonale al sottospazio generato da $\psi_1, \dots, \psi_{k-1}$. Pertanto, il calcolo della sua norma può

essere svolto usando il teorema di Pitagora:

$$\begin{aligned}\|v_k\|^2 &= \left\| \phi_k - \sum_{h=1}^{k-1} \langle \phi_k, \psi_h \rangle \psi_h \right\|^2 \\ &= \|\phi_k\|^2 - \left\| \sum_{h=1}^{k-1} \langle \phi_k, \psi_h \rangle \psi_h \right\|^2 \\ &= \|\phi_k\|^2 - \sum_{h=1}^{k-1} |\langle \phi_k, \psi_h \rangle|^2.\end{aligned}$$

Questo procedimento spesso semplifica i calcoli rispetto al calcolo diretto di $\|v_k\|$, poiché ϕ_k ha tipicamente una forma molto più semplice di v_k .

Equazioni Normali. La proiezione di un segnale in un sottospazio di cui si conosca una base non ortonormale si può svolgere operando direttamente su tale base (senza ricorrere a Gram-Schmidt) usando il principio di ortogonalità.

Dato un segnale x e una base $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ per uno spazio vettoriale V di dimensione finita, calcoliamo la proiezione di x in V imponendo

$$x_{\perp} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \quad \text{e} \quad \langle x - x_{\perp}, \phi_h \rangle = 0, \forall h.$$

Sostituendo la prima espressione per x_{\perp} nella seconda condizione si ottiene

$$\langle x, \phi_h \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle \phi_k, \phi_h \rangle, h = 1, \dots, n.$$

Queste sono n equazioni nelle n incognite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ che possiamo scrivere in modo più compatto come l'equazione matriciale

$$\Phi \alpha = \gamma,$$

dove abbiamo definito

$$\Phi = \begin{pmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \cdots \\ \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \langle x, \phi_1 \rangle \\ \langle x, \phi_2 \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

La soluzione sarà quindi

$$\alpha = \Phi^{-1} \gamma$$

(il fatto che $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ sia una base per V garantisce che la matrice Φ sia invertibile).

3 Correlazioni

Nella sezione precedente abbiamo considerato il prodotto scalare come strumento per confrontare due segnali, cui possiamo attribuire una interpretazione geometrica similmente a quanto usualmente viene fatto in \mathbb{R}^n . Nello spazio dei segnali, però, l'aspetto di evoluzione temporale è fondamentale ed è quindi importante considerare somiglianze tra forme d'onda anche a meno di traslazioni.

Segnali di Energia. Dati due segnali x e y di energia definiamo la loro *cross-correlazione (lineare)* come il segnale

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt.$$

Si osservi che, come è consuetudine nella teoria dei segnali, abbiamo scritto il segnale in funzione di un parametro τ che svolge un ruolo di traslazione temporale. Con un semplice cambio di variabile si verifica che vale anche la notazione

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t-\tau)y(t)dt. \quad (3.1)$$

La cross-correlazione di un segnale x con se stesso viene detta *autocorrelazione*, definita dunque come

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt.$$

Come vediamo, la cross-correlazione tra due segnali può essere riscritta in termini di prodotto scalare. Definendo il segnale traslato $y_\tau(t) = y(t+\tau)$, abbiamo infatti

$$\varphi_{xy}(\tau) = \langle y_\tau, x \rangle.$$

La cross-correlazione descrive quindi la relazione geometrica tra il segnale x e le possibili traslazioni del segnale y . In particolare, sfruttando le proprietà già viste per il prodotto scalare, abbiamo la seguente relazione

$$\begin{aligned} d^2(x, y_\tau) &= \|x\|^2 + \|y_\tau\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y_\tau \rangle) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(\varphi_{xy}(\tau)) \end{aligned}$$

da cui risulta evidente il ruolo della cross-correlazione nel confronto tra x e versioni traslate di y .

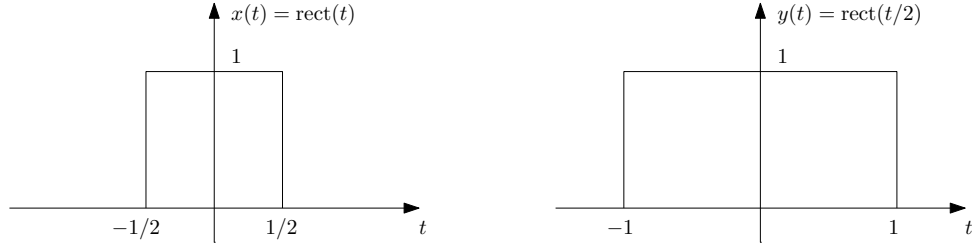
Inoltre vale una simmetria Hermitiana

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{yx}^*(-\tau)$$

e, applicando la disuguaglianza di Schwarz,

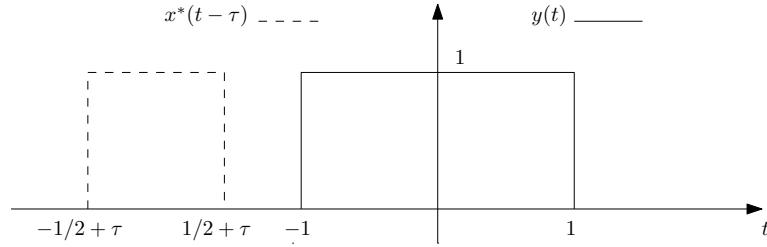
$$\varphi_{xy}(\tau) \leq \sqrt{W_x W_y}.$$

Esempio 13 Calcoliamo la cross-correlazione tra i segnali $x(t) = \operatorname{rect}(t)$ e $y(t) = \operatorname{rect}(t/2)$



Usiamo il procedimento suggerito dalla scrittura di $\varphi_{xy}(\tau)$ presentata in equazione (3.1), per cui trasliamo il segnale $x(t)$ spostandolo da sinistra verso destra per valori di τ crescenti. Avremo 4 casi fondamentali

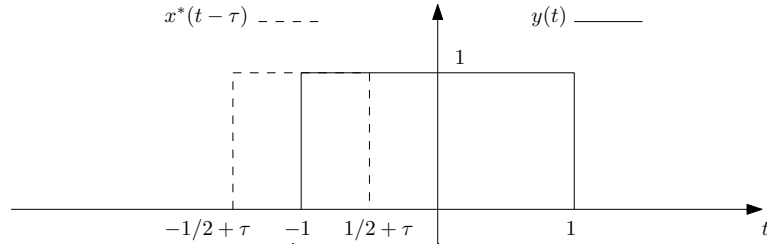
1. Caso in cui $1/2 + \tau < -1$, ovvero $\tau < -3/2$, come mostrato in figura.



Poiché $x^*(t - \tau)$ e $y(t)$ hanno supporto disgiunto avremo $x^*(t - \tau)y(t) = 0, \forall t$, e quindi

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dt = 0, \quad \tau < -\frac{3}{2}.$$

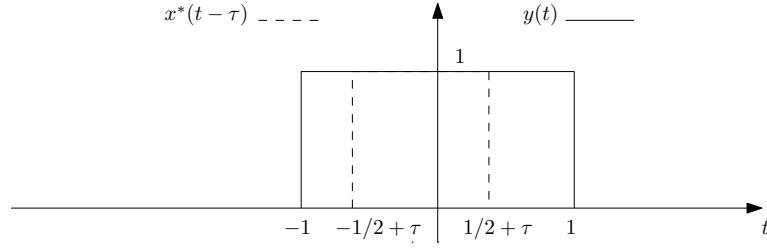
2. Caso in cui $-1/2 + \tau < -1 < 1/2 + \tau$, ovvero $-3/2 \leq \tau < -1/2$, come mostrato in figura



In questo caso i segnali sono entrambi non nulli solo nell'intervallo $-1 \leq t \leq 1/2 + \tau$, dove il loro prodotto vale 1. Pertanto

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-1}^{1/2+\tau} 1 dt = \frac{3}{2} + \tau, \quad -\frac{3}{2} \leq \tau < -\frac{1}{2}.$$

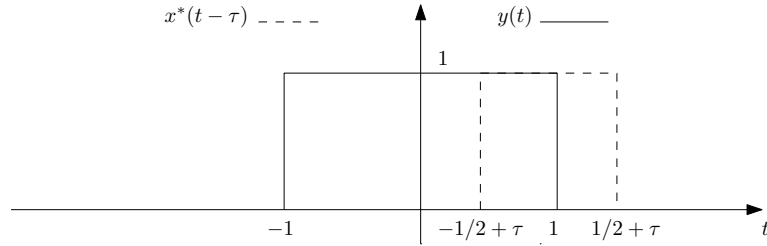
3. Caso in cui $-1/2 + \tau \geq -1$ e al contempo $1/2 + \tau < 1$, ovvero $-1/2 \leq \tau < 1/2$, come mostrato in figura



In questo caso il prodotto dei segnali è non nullo nell'intervallo $-1/2 + \tau \leq t \leq 1/2 + \tau$, dove vale 1. Quindi

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-1/2+\tau}^{1/2+\tau} 1 dt = 1, \quad -\frac{1}{2} \leq \tau < \frac{1}{2}.$$

4. Caso in cui $-1/2 + \tau < 1 < 1/2 + \tau$, ovvero $1/2 \leq \tau < 3/2$, come indicato in figura



In questo caso il prodotto dei segnali è non nullo nell'intervallo $-1/2 + \tau \leq t \leq 1$. Pertanto

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-1/2+\tau}^1 1 dt = \frac{3}{2} - \tau, \quad \frac{1}{2} \leq \tau < \frac{3}{2}.$$

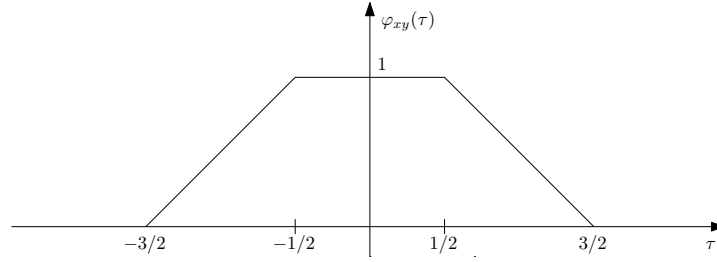
5. Caso in cui $-1/2 + \tau \geq 1$, ovvero $\tau \geq 3/2$. Come per il caso 1, i segnali hanno supporto disgiunto e quindi

$$\varphi_{xy}(\tau) = 0, \quad \tau \geq 3/2.$$

Combinando tutti i casi considerati abbiamo

$$\varphi_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} + \tau & -\frac{3}{2} \leq \tau < -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \leq \tau < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - \tau & \frac{1}{2} \leq \tau < \frac{3}{2} \\ 0 & \tau \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Il grafico relativo è riportato nella seguente figura



Es. **Esempio 14** . Si verifichi che se $x(t) = \text{rect}(t)$ allora $\varphi_x(\tau) = \text{tri}(\tau)$.

Segnali di Potenza Introduciamo una cross-correlazione per segnali di potenza riprendendo l'interpretazione della cross-correlazione in termini di prodotto scalare. Pertanto, se x e y sono due segnali di potenza, posto di nuovo $y_\tau(t) = y(t + \tau)$, definiamo la *cross-correlazione normalizzata*

$$\begin{aligned}\varphi_{xy}(\tau) &= \langle y_\tau, x \rangle \\ &= \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} x^*(t) y(t + \tau) dt \\ &= \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} x^*(t - \tau) y(t) dt\end{aligned}$$

Anche per segnali di potenza valgono proprietà del tutto simili a quanto visto per segnali di energia:

$$\begin{aligned}d^2(x, y_\tau) &= \|x\|^2 + \|y_\tau\|^2 - 2 \text{Re}(\langle x, y_\tau \rangle) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \text{Re}(\varphi_{xy}(\tau)) \\ \varphi_{xy}(\tau) &= \varphi_{yx}^*(-\tau) \\ \varphi_{xy}(\tau) &\leq \sqrt{P_x P_y}\end{aligned}$$

Nel caso particolare di segnali x e y periodici di periodo comune T , l'espressione si può semplificare scrivendo

$$\begin{aligned}\varphi_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_u^{u+T} x^*(t) y(t + \tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_u^{u+T} x^*(t - \tau) y(t) dt\end{aligned} \tag{3.2}$$

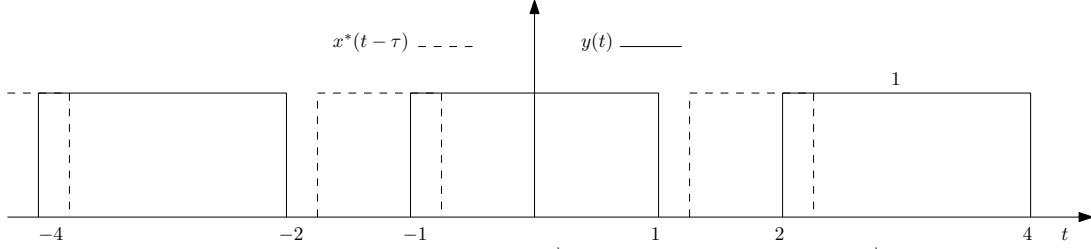
In questo caso si parla talvolta di *cross-correlazione circolare*. Il nome è dovuto al fatto che è possibile immaginare i segnali x e y definiti su un cerchio anziché sull'asse reale, in modo che una traslazione di uno dei segnali corrisponda a una rotazione sul cerchio.

Esempio 15 Consideriamo i segnali 3-periodici

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{rect}(t - 3k), \quad y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{rect}\left(\frac{t - 3k}{2}\right)$$

ottenuti replicando periodicamente con passo 3 i segnali usati nell'esempio precedente. Consideriamo di nuovo vari casi:

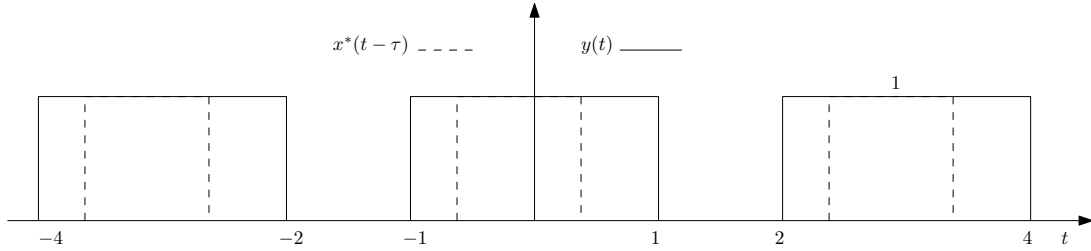
1. Caso in cui $-3/2 \leq \tau < -1/2$. I segnali $x^*(t - \tau)$ e $y(t)$ sono come rappresentato nella seguente figura



Se calcoliamo $\varphi_{xy}(\tau)$ usando l'equazione (3.2) con $T = 3$ e con la scelta $u = -2$, notiamo che l'integrale è del tutto identico al caso corrispondente sui segnali di energia e quindi avremo

$$\begin{aligned}\varphi_{xy}(\tau) &= \frac{1}{3} \int_{-2}^1 x^*(t - \tau) y(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^{1/2+\tau} 1 dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\tau, \quad -\frac{3}{2} \leq \tau < -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. Caso in cui $-1/2 \leq \tau < 1/2$. I segnali $x^*(t - \tau)$ e $y(t)$ sono come rappresentato nella seguente figura

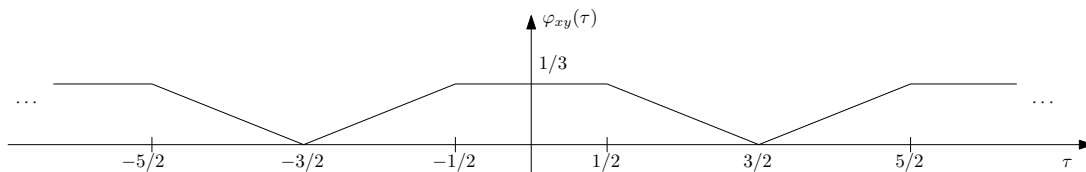


Anche in questo caso il calcolo non è diverso da quanto visto per segnali di energia. Abbiamo

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3} \int_{-1/2+\tau}^{1/2+\tau} 1 dt = \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{2} \leq \tau < \frac{1}{2}$$

3. Non è difficile a questo punto osservare che il calcolo procederà senza sostanziali differenze rispetto a quanto visto per i segnali di energia anche per il caso $1/2 \leq \tau < 3/2$ (a meno di un fattore di scala pari a $1/3$), ottenendo quindi $\varphi_{xy}(\tau) = 1/2 - \tau/3$.

4. La principale differenza rispetto al calcolo visto per i segnali di energia si avrà al di fuori dell'intervallo $(-3/2, 3/2)$. Poiché i segnali sono periodici di periodo 3, è facile vedere che anche $\varphi_{xy}(\tau)$ sarà periodico di periodo 3. Quindi lo studio su $(-3/2, 3/2)$ determina completamente il segnale su tutto l'asse, che avrà la forma rappresentata nella seguente figura.



Si può notare che la correlazione nell'esempio appena visto è di fatto una versione riscalata e periodicizzata della correlazione calcolata per i segnali di energia che corrispondevano ai singoli periodi. Si può mostrare più in generale che dati due segnali periodici di periodo T della forma

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(t - kT) \quad \text{e} \quad y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q(t - kT),$$

si ha

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(\tau - kT), \quad \text{con} \quad g(\tau) = \varphi_{pq}(\tau) \quad (3.3)$$

⚠ cioè $\varphi_{xy}(\tau)$ è appunto una versione riscalata e periodicizzata di $\varphi_{pq}(\tau)$. Si presti attenzione al fatto che le repliche del segnale $\varphi_{pq}(\tau)$ possono in generale sovrapporsi. Se ripetiamo l'esempio precedente usando gli stessi segnali $p = \text{rect}(t)$ e $q = \text{rect}(t/2)$ ma definendo x e y replicando p e q con periodo $T = 2$ anziché 3, il segnale ottenuto sarà costante, $\varphi_{xy}(\tau) = 1/2$. Il risultato in sé è del tutto ovvio, poiché y in questo caso diventa costante, ma vale la pena verificare la formula (3.3) per questo semplice esempio.

Segnali misti La definizione di cross-correlazione introdotta per segnali di energia può essere estesa anche al caso in cui uno dei due segnali sia di potenza (si può mostrare infatti che l'integrale converge). Per questo motivo, definiamo anche una cross-correlazione tra x e y nel caso in cui uno dei due segnali sia di energia e l'altro di potenza come

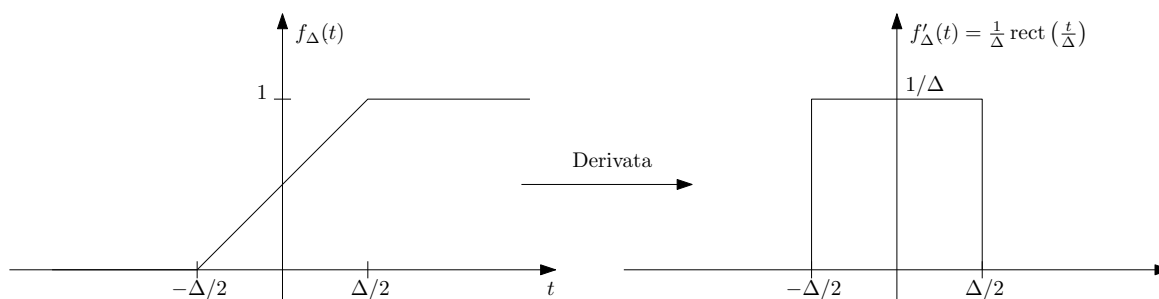
$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt$$

In questo caso però non associamo a φ_{xy} un concetto di prodotto scalare (l'integrale rappresenterebbe un prodotto scalare per segnali di energia, ma uno dei segnali non è di energia).

4 Impulso di Dirac e cenni di distribuzioni

Presentiamo ora una estensione dei segnali come semplici funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{C} introducendo un nuovo tipo di “segnale” di cui faremo largo uso nel corso, ovvero l’impulso di Dirac. Una definizione rigorosa di questo segnale richiede una trattazione approfondita della teoria delle *funzioni generalizzate*, dette anche più comunemente *distribuzioni*. Poiché lo studio di questa teoria richiede parecchio tempo ed esula dagli scopi del corso, ci limitiamo a dare una descrizione non rigorosa dell’impulso di Dirac dando solo una molto superficiale presentazione dell’idea alla base delle distribuzioni. In vari punti del corso, d’ora in poi, dovremo interpretare diverse affermazioni in modo non classico ma *al senso delle distribuzioni*. Lo studente interessato può trovare maggiori dettagli in Appendice B.

Introduciamo l’impulso di Dirac come limite di una successione di segnali nel seguente modo. Consideriamo il segnale $f_{\Delta}(t)$ in figura



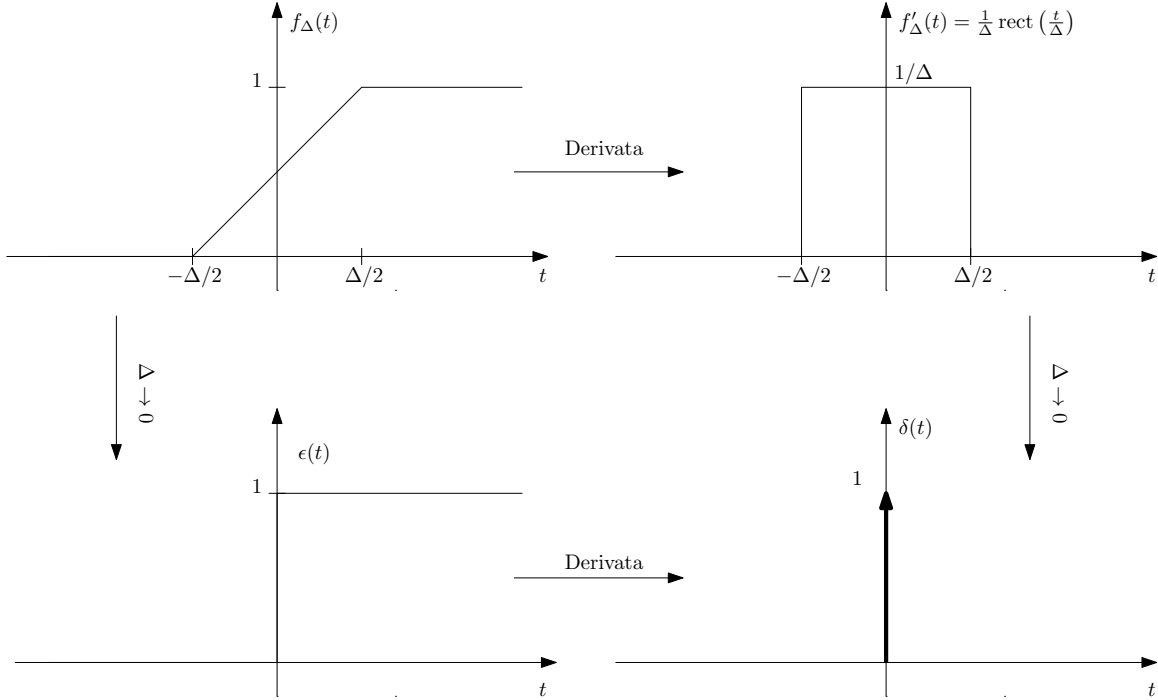
È facile verificare che la derivata⁴ di questo segnale è $f'_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}(t/\Delta)$, anch’essa mostrata nella figura. Ci chiediamo cosa succede a questi due segnali quando mandiamo a zero il parametro Δ . Il segnale $f_{\Delta}(t)$ tende puntualmente al gradino $\epsilon(t)$. La derivata $f'_{\Delta}(t)$, invece, ha un comportamento meno ovvio. Puntualmente tende a zero per ogni $t \neq 0$, mentre tende a $+\infty$ per $t = 0$, per cui non è chiaro come vada interpretato il limite nel senso di “segnale limite”. Per ogni Δ finito il segnale $f'_{\Delta}(t)$ ha certe proprietà che ci piacerebbe poter “estendere al limite”, come ad esempio il fatto di avere area unitaria. L’impulso di Dirac $\delta(t)$ viene introdotto proprio a questo scopo e possiamo per il momento introdurlo come un segnale “generalizzato” definito da

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) \quad (4.1)$$

dove ci limitiamo a dire qui che il limite è *al senso delle distribuzioni* (si veda l’appendice per dettagli). Graficamente rappresentiamo la delta di Dirac come una freccia verticale posizionata nell’origine. Tornando al segnale originario $f_{\Delta}(t)$ e al suo limite per $\Delta \rightarrow 0$, un altro modo di interpretare la delta di Dirac $\delta(t)$ è di considerarla come la “derivata” (di nuovo, al senso delle distribuzioni) del segnale $\epsilon(t)$.

La seguente figura sintetizza schematicamente il ragionamento appena esposto.

⁴Ovunque in questo corso sorvoleremo sulla non derivabilità di una funzione in un punto isolato.



Segnaliamo che il ruolo svolto dalla funzione rect nella spiegazione precedente può essere anche svolto da altre funzioni, poichè non è in effetti rilevante il modo esatto con cui il segnale $f_\Delta(t)$ varia da 0 a 1 ma solo il fatto che abbia questa transizione in modo tale che chiamando $f_\Delta(t) = f(t/\Delta)$ si abbia $f_\Delta(t) \rightarrow \epsilon(t)$ quando $\Delta \rightarrow 0$. Pertanto possiamo anche scrivere ad esempio

$$\begin{aligned}
 \delta(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{tri}\left(\frac{t}{\Delta}\right) \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{sinc}\left(\frac{t}{\Delta}\right) \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{\Delta}\right)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Una spiegazione alternativa (più vicina a quella rigorosa) della δ può essere presentata come segue. Abbiamo visto che in uno spazio vettoriale V un vettore generico v è univocamente descritto dal suo prodotto scalare con dei segnali di base ψ_1, ψ_2, \dots . A maggior ragione, un vettore v è univocamente determinato dal suo prodotto scalare con *tutti* i vettori dello spazio V , ovvero dai valori

$$\langle w, v \rangle, \quad w \in V$$

Possiamo interpretare i prodotti scalari come dei *test* del vettore v , e dire che il vettore v è determinato in base ai risultati di tutti i possibili test su altri vettori w . Similmente, il segnale $\frac{1}{\Delta} \text{rect}(t/\Delta)$ usato sopra è univocamente definito dal valore del suo prodotto scalare con ogni possibile segnale

$x(t)$. Notiamo che si ha

$$\begin{aligned}\left\langle x(t), \frac{1}{\Delta} \text{rect}(t/\Delta) \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\Delta} \text{rect}(t/\Delta) dt \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x(t) dt.\end{aligned}$$

Quest'ultima espressione è il valor medio del segnale $x(t)$ nell'intervallo $(-\Delta/2, \Delta/2)$. Possiamo esprimere questa relazione dicendo che $\frac{1}{\Delta} \text{rect}(t/\Delta)$ è quel segnale che *testato* su un qualsiasi altro segnale $x(t)$ ne calcola il valor medio in $(-\Delta/2, \Delta/2)$. Assumendo che $x(t)$ sia regolare in un intorno di $t = 0$, quando $\Delta \rightarrow 0$ tale valore tende al valore $x(0)$. Diciamo allora che la delta di Dirac è il segnale limite di $\frac{1}{\Delta} \text{rect}(t/\Delta)$ per $\Delta \rightarrow 0$ nel senso che è un segnale che testato su un generico $x(t)$ regolare nell'origine ne calcola il valore $x(0)$. Scriveremo quindi⁵

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0). \quad (4.3)$$

Vediamo ora alcune proprietà della delta di Dirac:

- **Area unitaria.** Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

coerentemente con la scelta del segnale costante $x(t) = 1$ nell'equazione (4.3).

- **Parità.** La delta è un segnale pari

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

- **Traslazione.** Possiamo definire il segnale traslato $\delta(t - t_0)$ tramite

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

ottenuto con un cambio di variabile a partire sempre dall'equazione (4.3). Inoltre, poiché la δ è pari, possiamo scrivere $\delta(t - t_0) = \delta(t_0 - t)$. Sostituendo nell'integrale e cambiando il nome delle variabili $t \leftarrow \tau$, $t_0 \leftarrow t$ abbiamo l'importante relazione

△

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (4.4)$$

che leggeremo più avanti dicendo che la δ è l'unità rispetto al prodotto di convoluzione.

- **Cambio scala.** Un cambio scala nei tempi si traduce in un coefficiente moltiplicativo

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

come si deduce calcolando

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(at) dt \stackrel{at=t'}{=} \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{t'}{a}\right) \delta(t') dt'.$$

⁵Il segnale $\delta(t)$ è definito reale e quindi non serve il coniugio.

- **Prodotto con un segnale.** È possibile definire il prodotto di $\delta(t - t_0)$ con un segnale $x(t)$ regolare in t_0 , ottenendo

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

△

Si noti che a sinistra abbiamo un prodotto tra $\delta(t - t_0)$ e un segnale mentre a destra $x(t_0)$ è semplicemente un coefficiente scalare. Questa operazione è detta *campionamento* del segnale $x(t)$ in $t = t_0$. Si noti che integrando questa relazione in t_0 da $-\infty$ a $+\infty$ si ottiene di nuovo la relazione (4.4).

- **(Non!) prodotto con se stessa.** Il prodotto di $\delta(t)$ con sé stessa non è definito:

$$\delta(t)\delta(t) \quad \text{non è definito!}$$

Non è infatti possibile dare una definizione che non porti abbastanza velocemente a paradossi. Una giustificazione ragionevole sulla base di quanto visto sopra è che

$$\left\langle x(t), \frac{1}{\Delta} \text{rect}(t/\Delta) \cdot \frac{1}{\Delta} \text{rect}(t/\Delta) \right\rangle$$

non converge per $\Delta \rightarrow 0$.

- **Derivate** Anzitutto notiamo che, poiché $\delta(t)$ è la derivata del gradino $\epsilon(t)$, in generale la derivata di un segnale $x(t)$ regolare a tratti presenterà un termine $a\delta(t - t_0)$ se il segnale $x(t)$ ha un salto di ampiezza a in t_0 . Ad esempio, abbiamo

$$\frac{d}{dt} \text{rect}(t) = \delta(t + 1/2) - \delta(t - 1/2)$$

Inoltre, è possibile definire le derivate della delta stessa $\delta'(t), \delta''(t)$, ecc. Vediamo solo la derivata prima. Derivando (al senso delle distribuzioni) abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d\delta(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \text{rect} \left(\frac{t}{\Delta} \right) \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Delta} \text{rect} \left(\frac{t}{\Delta} \right) \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\delta(t + \Delta/2) - \delta(t - \Delta/2)}{\Delta} \end{aligned}$$

Testando l'argomento del limite su un segnale $x(t)$ generico abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\delta(t + \Delta/2) - \delta(t - \Delta/2)}{\Delta} dt = - \frac{x(+\Delta/2) - x(-\Delta/2)}{\Delta}$$

Al limite per $\Delta \rightarrow 0$ questa quantità tende a $-x'(0)$ e quindi $\delta'(t)$ è il segnale che testato su un $x(t)$ ne restituisce $-x'(0)$

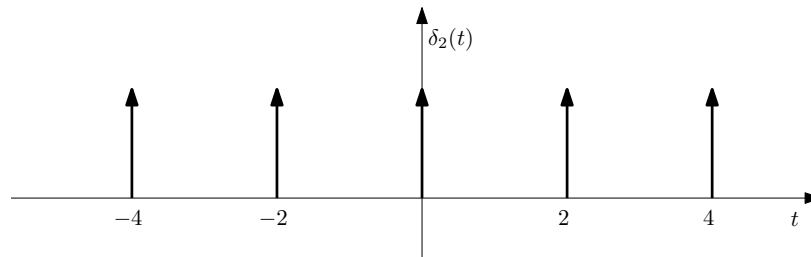
$$\langle x(t), \delta'(t) \rangle = -x'(0).$$

Infine, introduciamo un segnale periodico composto da impulsi di Dirac traslati, che sarà di grande utilità in diversi momenti durante il corso.

Pettine di impulsi. Per un parametro $T > 0$, definiamo il segnale

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (4.5)$$

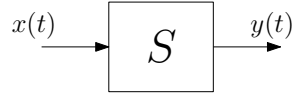
Rappresenteremo il segnale graficamente come mostrato nella figura seguente, in cui è considerato l'esempio $\delta_2(t)$.



5 Sistemi

5.1 Classificazione

Introduciamo ora il concetto di *sistema* come un operatore di trasformazione tra segnali che, dato in ingresso un segnale x , restituisce in uscita un segnale $y = S[x]$. Graficamente rappresentiamo questa trasformazione come in figura



Il segnale di uscita $y(t)$ è detto *risposta* del sistema a fronte dell'ingresso $x(t)$. Osserviamo che il modo corretto per evidenziare la variabile libera t come argomento del segnale d'uscita è $y(t) = (S[x])(t)$. Tuttavia, poiché vorremo spesso considerare operazioni elementari applicate al segnale di ingresso, scriveremo quasi sempre $y(t) = S[x(t)]$, in modo che sia possibile scrivere semplicemente $S[x(t - t_0)]$ per indicare una traslazione sul segnale di ingresso, senza ridefinire un nuovo segnale.

Sarà importante caratterizzare i sistemi in termini di alcune proprietà fondamentali che ora presentiamo.

- **Linearità.** Diciamo che un sistema S è *lineare* se $\forall x_1(t), x_2(t), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$S[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha S[x_1(t)] + \beta S[x_2(t)].$$

In caso contrario, diremo che il sistema è *non lineare*. Si noti in particolare che ponendo $\beta = 0$ si ottiene la condizione per l'omogeneità mentre ponendo $\alpha = \beta = 1$ si ottiene quella per la sovrapposizione degli effetti:

$$S[\alpha x_1(t)] = \alpha S[x_1(t)], \quad S[x_1(t) + x_2(t)] = S[x_1(t)] + S[x_2(t)].$$

- **Stabilità (BIBO).** Diciamo che un sistema S è *stabile* (in senso BIBO: *Bounded Input Bounded Output*) se ad ogni ingresso limitato risponde con una uscita limitata, ovvero se $\forall x(t)$, posto $y(t) = S[x(t)]$,

$$\exists M : |x(t)| \leq M \quad \forall t \implies \exists N : |y(t)| \leq N \quad \forall t.$$

In caso contrario diremo che il sistema è *instabile*.

- **Memoria.** Diciamo che un sistema S è *senza memoria* se l'uscita all'istante t_0 non dipende dai valori dell'ingresso ad istanti $t \neq t_0$, ovvero dette $y_1(t)$ e $y_2(t)$ le risposte a due segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ rispettivamente,

$$x_1(t_0) = x_2(t_0) \implies y_1(t_0) = y_2(t_0).$$

In caso contrario diremo che il sistema ha memoria.

- **(Anti-)Causalità.** Diremo che un sistema S è *causale* se, per ogni t_0 , l'uscita all'istante t_0 non dipende dai valori dell'ingresso ad istanti $t > t_0$, ovvero, con le stesse assunzioni del punto precedente

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \leq t_0 \implies y_1(t_0) = y_2(t_0)$$

(cioè il sistema “non vede nel futuro”).

Diremo invece che il sistema è *anticausale* se, per ogni t_0 , l'uscita all'istante t_0 non dipende dai valori dell'ingresso ad istanti $t \leq t_0$, ovvero, con le stesse assunzioni del punto precedente

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t > t_0 \implies y_1(t_0) = y_2(t_0)$$

(cioè il sistema vede solo il futuro).

Infine, un sistema è detto *non-causale* se non è causale e non è anticausale.

- **Tempo-Invarianza** Un sistema è detto *tempo-invariante* se $\forall x(t), \forall t_0 \in \mathbb{R}$, detto $y(t) = S[x(t)]$ si ha

$$S[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$$

ovvero, una traslazione dell'ingresso porta a una corrispondente traslazione dell'uscita. In caso contrario il sistema è detto tempo-variante.

Esempi. Il sistema descritto da $S[x(t)] = x(2t)$ è lineare, ha memoria, è stabile, è non-causale e tempo-variante. Il sistema descritto da $S[x(t)] = x^2(t + 1)$ è non lineare, stabile, con memoria, anticausale e tempo-invariante.

Una classe di sistemi che studieremo approfonditamente è costituita dai sistemi che soddisfano sia la linearità sia la tempo-invarianza.

5.2 Sistemi Lineari Tempo-Invarianti (LTI)

Concentriamo ora l'attenzione su sistemi che verifichino le ipotesi di linearità e tempo invarianza. Dato un tale sistema S , consideriamo un ingresso $x(t)$ di una forma particolare, ovvero scrivibile nella forma

$$x(t) = a_0 p(t - t_0) + a_1 p(t - t_1) \quad (5.1)$$

per un segnale opportuno $p(t)$. Detto $q(t) = S[p(t)]$, applicando prima la linearità e poi la tempo-invarianza avremo

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= S[a_0 p(t - t_0) + a_1 p(t - t_1)] \\ &= a_0 S[p(t - t_0)] + a_1 S[p(t - t_1)] \\ &= a_0 q(t - t_0) + a_1 q(t - t_1), \end{aligned}$$

ovvero la risposta a $x(t)$ è determinata univocamente a partire dalla risposta a $p(t)$. Applicheremo ora questo ragionamento in modo più generale sfruttando il fatto che ogni segnale $x(t)$ può essere sviluppato in modo analogo a quanto visto sopra a patto di usare l'impulso $\delta(t)$ al posto di $p(t)$ e combinazioni lineari continue anziché discrete. Dovremo in questo caso fare ricorso alla seguente nozione.

Risposta all'impulso. Definiamo la risposta all'impulso del sistema $h(t)$ come

$$h(t) = S[\delta(t)] .$$

Abbiamo visto durante la descrizione dell'impulso $\delta(t)$, in particolare nell'equazione (4.4), che ogni segnale $x(t)$ può essere scritto come

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau .$$

Questa espressione può essere interpretata come una estensione dell'equazione (5.1) in cui la somma è sostituita da un integrale, la funzione $p(t)$ dall'impulso di Dirac $\delta(t)$, le traslazioni t_0 e t_1 da una traslazione generica τ e i coefficienti a_0 e a_1 da “coefficienti” $x(\tau)$. Possiamo quindi ripetere il ragionamento già visto per determinare l'uscita del sistema. Applicando la linearità avremo⁶

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= S \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) S[\delta(t - \tau)] d\tau \end{aligned}$$

poiché il sistema agisce nei tempi t mentre l'integrazione è nella variabile τ (in particolare, quindi, $x(\tau)$ è semplicemente un coefficiente per il segnale $\delta(t - \tau)$ nella variabile t). Sfruttando ora la tempo-invarianza, e ricordando che per definizione $h(t) = S[\delta(t)]$, possiamo continuare scrivendo

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) S[\delta(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau . \end{aligned}$$

L'espressione ottenuta per esprimere l'uscita in termini di $x(t)$ e $h(t)$ è di fondamentale importanza ed è detta *convoluzione*.

Convoluzione. Dati due segnali $f(t)$ e $g(t)$ definiamo la loro convoluzione come

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau .$$

Per comodità useremo spesso la notazione $f(t) * g(t)$, sebbene sarà necessario prestare attenzione ai rischi di tale notazione quando si operano cambi di variabili. Torneremo più avanti sullo studio dettagliato della convoluzione. Per il momento ci limitiamo a riassumere quanto mostrato sopra enunciando la seguente importante proprietà per sistemi LTI.

Risposta di un sistema LTI. Dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$, a fronte di un ingresso $x(t)$ si ha un'uscita $y(t)$ data dall'espressione

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau . \end{aligned} \tag{5.2}$$

⁶Sotto opportune ipotesi che qui non è possibile discutere.

Viceversa, se un sistema risponde a un ingresso $x(t)$ effettuandone una convoluzione con una funzione $g(t)$, allora il sistema è lineare tempo-invariante con risposta all'impulso $h(t) = g(t)$.

Esempio 16 Consideriamo il sistema integratore S descritto dalla relazione

$$S[x(t)] = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

Es. Non è difficile mostrare che il sistema è lineare tempo-invariante. Pertanto la relazione ingresso-uscita è descritta da una convoluzione. In effetti, si vede facilmente, utilizzando il gradino $\epsilon(t)$, che possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \epsilon(t - \tau) d\tau \\ &= x(t) * \epsilon(t). \end{aligned}$$

Coerentemente, possiamo notare che $\epsilon(t) = S[\delta(t)]$ poiché

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

In sostanza, il sistema integratore ha come risposta all'impulso il gradino $\epsilon(t)$.

Es. Si ripeta lo studio per il caso di un sistema mediatore

$$S[x(t)] = \int_{t-t_0}^{t+t_1} x(\tau) d\tau.$$

Poiché la risposta all'impulso $h(t)$ descrive completamente il comportamento di un sistema, non è difficile immaginare che la caratterizzazione di un sistema LTI si possa ricondurre alle proprietà di $h(t)$. In particolare abbiamo i seguenti risultati

Causalità. Un sistema LTI è causale se e solo se la sua risposta all'impulso $h(t)$ è un segnale causale. Infatti, nell'equazione (5.2) notiamo che l'uscita all'istante t non dipende dai valori $x(\tau)$ per $\tau > t$ se e solo se $h(t - \tau) = 0$ per $\tau > t$, ovvero $h(t)$ è un segnale causale.

Sabilità. Un sistema LTI è stabile se e solo se la sua risposta all'impulso $h(t)$ è assolutamente integrabile, ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = L < \infty \quad (5.3)$$

Infatti, se vale la (5.3), a fronte di un ingresso limitato $x(t) \leq M \forall t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} |S[x(t)]| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau \\ &\leq M \cdot L, \end{aligned}$$

ovvero un'uscita limitata.

Viceversa, se $h(t)$ non è assolutamente integrabile, allora scelto l'ingresso⁷ $x(t) = h^*(-t)/|h(t)|$, che verifica $|x(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$S[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^*(-\tau)}{|h(-\tau)|} h(t-\tau)d\tau$$

per cui l'uscita calcolata in $t = 0$ risulta essere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^*(-\tau)}{|h(-\tau)|} h(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(-\tau)|d\tau$$

che non è un valore finito poiché h non è assolutamente integrabile per ipotesi.

⁷Questa argomentazione non è rigorosa ma rende l'idea di quale sia il motivo per cui il sistema è instabile.

6 Convoluzione

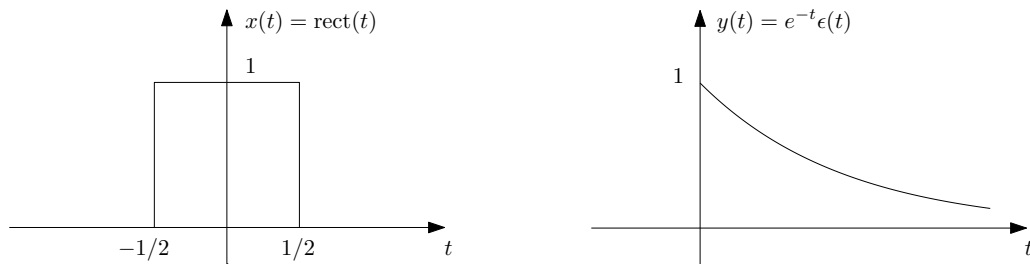
6.1 Convoluzione lineare e proprietà

Approfondiamo ora l'operazione di convoluzione tra segnali e le sue proprietà. Ricordiamo anzitutto la definizione

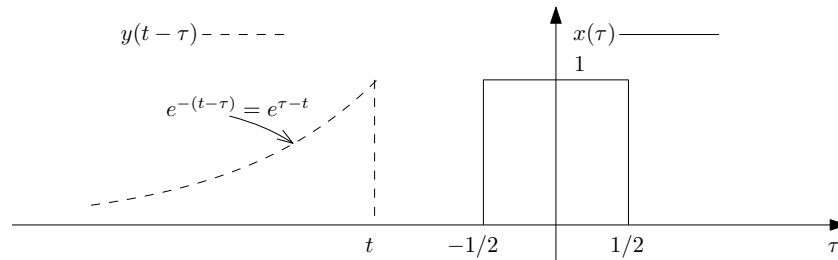
Convoluzione. Dati due segnali $f(t)$ e $g(t)$ definiamo la loro convoluzione come l'integrale (quando esiste)

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Esempio 17 Consideriamo i segnali $x(t) = \text{rect}(t)$ e $y(t) = e^{-t}\epsilon(t)$ riportati in figura.



Disegniamo i segnali $x(\tau)$ e $y(t - \tau)$ su un asse comune di τ , vedendo t come un parametro.

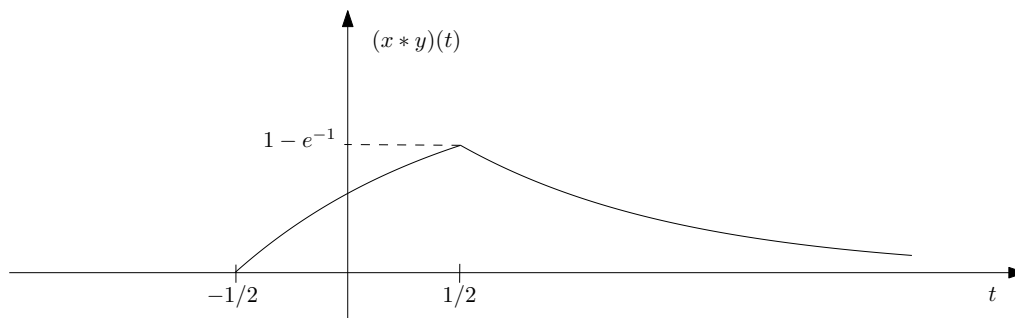


Ripetiamo poi lo stesso procedimento usato per calcolare le correlazioni, con la differenza che ora il parametro è t e integriamo il prodotto dei due segnali in τ . Dovremo considerare tre casi separatamente:

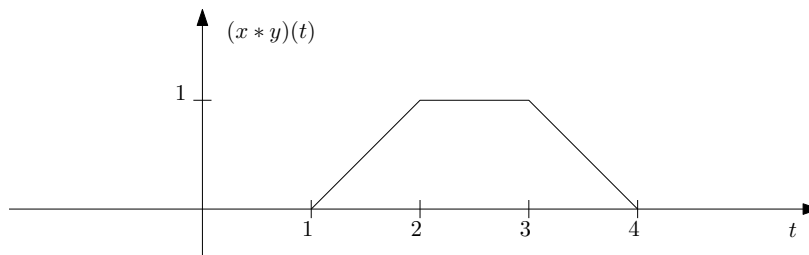
Es. $t < -1/2$, $-1/2 \leq t < 1/2$ e $t \geq 1/2$. Svolgendo i calcoli si ottiene

$$(x * y)(t) = \begin{cases} 0, & t < -1/2 \\ 1 - e^{-1/2-t}, & -1/2 \leq t < 1/2 \\ e^{1/2-t} - e^{-1/2-t}, & t \geq 1/2 \end{cases}$$

Il grafico è rappresentato nella seguente figura.



Es. **Esempio 18** Si considerino i segnali $\text{rect}(t - 3/2)$ e $\text{rect}(t/2 - 1/2)$. Si verifichi che la loro convoluzione ha il grafico mostrato nella figura sottostante



Vediamo alcune importanti proprietà della convoluzione.

- **Supporto.** Se il segnale x ha supporto $[a_x, b_x]$ e il segnale y ha supporto $[a_y, b_y]$, la convoluzione $x * y$ ha supporto al più $[a_x + a_y, b_x + b_y]$. Si verifichi questa proprietà sull'Esempio 18.
- **Area.** Dette A_x e A_y le aree (integrali) dei segnali x e y rispettivamente, la convoluzione ha area $A_x \cdot A_y$. Infatti

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} (x * y)(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) dt \right) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(\tau) A_y) d\tau \\
 &= A_x \cdot A_y.
 \end{aligned}$$

Es.

Di nuovo si verifichi questa proprietà sull'Esempio 18. Questa proprietà sarà interpretabile facilmente nel dominio delle frequenze, essendo un caso particolare del teorema di convoluzione che vedremo più avanti.

- **Commutatività.** La convoluzione è commutativa, ovvero $x * y = y * x$, come si vede facilmente operando un cambio di variabile:

$$\begin{aligned}(x * y)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau')y(\tau')d\tau' \quad (t - \tau = \tau') \\ &= (y * x)(t).\end{aligned}$$

Ciò significa che possiamo scegliere liberamente quale dei due segnali traslare e ribaltare nell'effettuare il calcolo della convoluzione. Si verifichi questo sull'Esempio 17, osservando che in quel caso era probabilmente più comodo ribaltare e traslare il segnale x anziché il segnale y .

- **Associatività** La convoluzione è associativa, ovvero dati tre segnali x, y, z , si ha $x * (y * z) = (x * y) * z$. Infatti

$$\begin{aligned}((x * y) * z)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau')y(\tau - \tau')d\tau' \right) z(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(\tau') \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau - \tau')z(t - \tau)d\tau \right) d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(\tau') \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau'')z((t - \tau') - \tau'')d\tau'' \right) d\tau' \quad (\tau - \tau' = \tau'') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau')[(y * z)(t - \tau')]d\tau' \\ &= (x * (y * z))(t).\end{aligned}$$

- **Distributività rispetto alla somma.** Vale cioè la relazione $x * (y + z) = x * y + x * z$, come si vede facilmente dalla definizione per linearità dell'integrale.
- **Elemento neutro.** L'impulso di Dirac $\delta(t)$ è l'elemento neutro per l'operazione di convoluzione, ovvero per ogni segnale $x(t)$ abbiamo $x(t) * \delta(t) = x(t)$ come già osservato nell'equazione (4.4).
- **Traslazioni.** Una traslazione di *uno* dei due segnali si ripercuote in una traslazione della convoluzione. Ovvero, se $x * y = z$ e definiamo $x_0(t) = x(t - t_0)$ e $z_0(t) = z(t - t_0)$, allora $x_0 * y = z_0$. Osserviamo che questa proprietà è del tutto ovvia se pensiamo alla convoluzione in termini di sistemi LTI, poiché esprime di fatto la tempo-invarianza di tali sistemi (se trasla l'ingresso trasla anche l'uscita). È però importante prestare attenzione a non cadere in un errore spesso causato dalla notazione $x(t) * y(t)$ che, come già osservato, è spesso comoda ma non rigorosa. Se scriviamo $x(t) * y(t) = z(t)$, non possiamo infatti applicare meccanicamente un cambio di variabile $t \leftarrow t - t_0$ a destra e a sinistra dell'uguaglianza, poiché

$$x(t - t_0) * y(t) = z(t - t_0)$$

mentre

$$x(t - t_0) * y(t - t_0) = z(t - 2t_0)$$

Combinando questa proprietà con la precedente abbiamo l'importante relazione

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Una applicazione molto ricorrente si trova nella scrittura di segnali periodici. Infatti, per un segnale periodico $x(t)$ nella forma riportata in equazione (1.1), usando la (4.5) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(t - kT) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(t) * \delta(t - kT) \\ &= p(t) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT) \\ &= p(t) * \delta_T(t). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Questa notazione tornerà molto utile più avanti nel corso per rappresentare in forma compatta concetti relativi a serie di Fourier e campionamento.

- **Legame con la correlazione.** Si può notare che la correlazione (lineare) e la convoluzione sono operazioni molto simili. La principale differenza consiste nel fatto che nella convoluzione uno dei due segnali viene ribaltato prima di essere traslato, e non è presente l'operazione di coniugio. Di fatto, per segnali di energia abbiamo

$$\varphi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau)$$

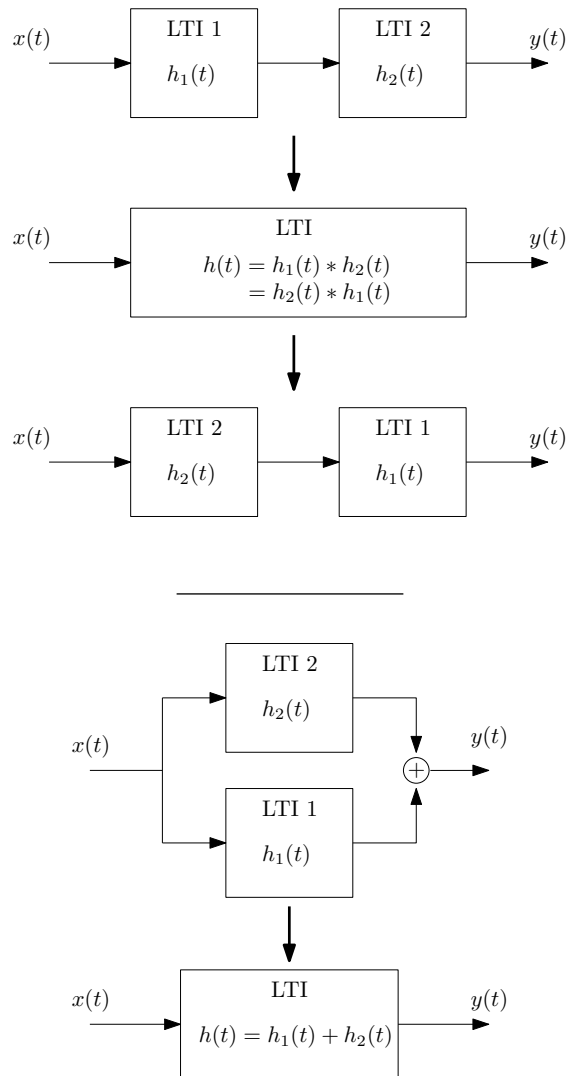
6.2 Implicazioni per sistemi LTI

Le proprietà viste nella sezione precedente per la convoluzione sono legate a importanti proprietà dei sistemi lineari tempo-invarianti.

Concatenazione serie. L'associatività della convoluzione corrisponde al fatto che, dati due sistemi LTI S_1 e S_2 con risposta all'impulso $h_1(t)$ e $h_2(t)$, la concatenazione serie dei due sistemi corrisponde ad un sistema LTI complessivo con risposta all'impulso $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$. Inoltre, la proprietà commutativa ci dice che tale concatenazione serie non cambia se cambiamo l'ordine dei due sistemi.

Concatenazione parallelo. La proprietà distributiva ci dice che due sistemi LTI con risposte all'impulso $h_1(t)$ e $h_2(t)$ posti in parallelo corrispondono a un sistema LTI complessivo con risposta all'impulso $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$.

La figura seguente schematizza le suddette proprietà di concatenazione per sistemi LTI.



6.3 Convoluzione normalizzata e circolare

Per segnali di potenza la convoluzione (lineare) definita in precedenza può o meno esistere a seconda dei casi.

⚠ **Esempio 19** Posto $x(t) = h(t) = \epsilon(t)$, si verifica facilmente che la convoluzione $x * h$ è ben definita ed è in particolare la rampa $(x * h)(t) = \max(0, t)$. Questa è quindi la risposta al gradino di un sistema integratore. Al contrario, posto $x(t) = \epsilon(t)$ e $y(t) = \epsilon(-t)$, la convoluzione ordinaria (lineare) non esiste in quanto l'integrale diverge.

Si introduce quindi una variante utile in alcuni casi per segnali di potenza.

Convoluzione normalizzata. Definiamo la convoluzione normalizzata tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$ come

$$(x \bar{*} y)(t) = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} x(\tau) y(t - \tau) d\tau.$$

Per segnali $x(t)$ e $y(t)$ entrambi periodici (non nulli), in particolare, la convoluzione lineare non è mai definita e la convoluzione normalizzata si può scrivere nella seguente forma.

Convoluzione circolare. Dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ di periodo comune T , definiamo la loro convoluzione circolare come

$$(x \circledast y)(t) = \frac{1}{T} \int_u^{u+T} x(\tau) y(t - \tau) d\tau.$$

Mentre la convoluzione normalizzata generale verrà usata raramente, la convoluzione circolare sarà fondamentale per poter interpretare varie proprietà della serie di Fourier e della rappresentazione spettrale di segnali a tempo discreto.

Come per la correlazione, vale una utile relazione tra la convoluzione circolare e la convoluzione lineare di un periodo dei segnali. Se

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(t - kT) \quad \text{e} \quad y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q(t - kT),$$

si ha

$$(x \circledast y)(t) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t - kT), \quad \text{con} \quad g(t) = p(t) * q(t).$$

7 Rappresentazione in Frequenza

7.1 Risposta in Frequenza di Sistemi LTI

Dopo aver descritto la risposta di sistemi LTI a fronte di un ingresso $x(t)$ in termini di convoluzione, vediamo ora come si comporta un sistema LTI a fronte di segnali sinusoidali.

Consideriamo anzitutto il comportamento di un sistema LTI a fronte di un ingresso della forma

$$x(t) = e^{st}, \quad s \in \mathbb{C}$$

Detta $h(t)$ la risposta all'impulso di un sistema S , avremo

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{st}e^{-s\tau}h(\tau)d\tau \\ &= e^{st}H_L(s), \end{aligned}$$

dove abbiamo definito la *funzione di trasferimento*

$$H_L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}h(\tau)d\tau. \quad (7.1)$$

Verifichiamo cioè che dato in ingresso al sistema il segnale e^{st} si ha in uscita il segnale stesso moltiplicato per un coefficiente $H_L(s)$. Diremo quindi che e^{st} è una *autofunzione* del sistema con *autovalore* $H_L(s)$. Sarà utile considerare questo come l'analogo di quanto visto nei corsi di algebra per le matrici; un vettore v è un autovettore per una matrice A con autovalore λ se $Av = \lambda v$.

A differenza di altri corsi, considereremo qui il caso particolare in cui s è puramente immaginario, ponendo $s = j2\pi f$. La variabile indipendente f è detta *frequenza*. Definiamo la seguente quantità.

Risposta in frequenza del sistema. Dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$, definiamo la sua *risposta in frequenza*

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt. \quad (7.2)$$

Osservando che $H(f)$ è in generale un segnale complesso, chiameremo $|H(f)|$ *risposta in ampiezza* e $\angle H(f)$ *risposta di fase*.

Quanto visto in precedenza porta immediatamente ad enunciare il seguente risultato.

Teorema della risposta in frequenza (caso complesso). Dato un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)$, allora

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \implies S[x(t)] = H(f_0)e^{j2\pi f_0 t},$$

dove potremo anche scrivere

$$S[x(t)] = |H(f_0)|e^{j(2\pi f_0 t + \angle H(f))}.$$

Partendo da questo teorema, procederemo come fatto nella sezione 5.2, ma usando le funzioni esponenziali complesse come mattoncini fondamentali anziché gli impulsi $\delta(t - \tau)$. Supponiamo che in ingresso ad un sistema LTI sia posto un segnale $x(t)$ della forma

$$x(t) = a_1 e^{j2\pi f_1 t} + a_2 e^{j2\pi f_2 t} . \quad (7.3)$$

Avremo in tal caso

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= S[a_1 e^{j2\pi f_1 t} + a_2 e^{j2\pi f_2 t}] \\ &= a_1 S[e^{j2\pi f_1 t}] + a_2 S[e^{j2\pi f_2 t}] \\ &= a_1 H(f_1) e^{j2\pi f_1 t} + a_2 H(f_2) e^{j2\pi f_2 t} , \end{aligned}$$

cioè il sistema agisce sulle due componenti moltiplicandole (separatamente!) per due coefficienti $H(f_1)$ e $H(f_2)$. Supponiamo ora che un segnale $x(t)$ si possa scrivere come combinazione lineare “continua” di funzioni esponenziali complessi, ovvero che si possa scrivere

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad (7.4)$$

Es. per una opportuna funzione di “pesi” $X(f)$. Si noti che questa scrittura generalizza l’espressione (7.3); la frequenza f generica gioca il ruolo di f_1 e f_2 mentre $X(f)$ gioca il ruolo dei coefficienti a_1 e a_2 . In particolare, l’espressione (7.3) si ottiene ponendo $X(f) = a_1 \delta(f - f_1) + a_2 \delta(f - f_2)$. Se $x(t)$ è della forma (7.4), la risposta $y(t) = S[x(t)]$ del sistema sarà⁸

$$\begin{aligned} y(t) &= S\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) S[e^{j2\pi f t}] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) H(f) e^{j2\pi f t} df . \end{aligned} \quad (7.5)$$

Cioè, $y(t)$ si scrive ancora come combinazione lineare di esponenziali complessi in una forma equivalente alla (7.4), ma con funzione dei “pesi” $X(f)H(f)$. Il sistema ha cioè moltiplicato le singole componenti frequenziali per dei coefficienti $H(f)$, indipendentemente le une dalle altre.

Può essere utile per lo studente pensare al caso analogo visto nei corsi di algebra lineare. Consideriamo una matrice A con autovettori $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ e relativi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Sia v un vettore scritto nella forma $v = \sum_k v_k \psi_k$. Avremo allora

$$\begin{aligned} Av &= A\left(\sum_k v_k \psi_k\right) \\ &= \sum_k (v_k A\psi_k) \\ &= \sum_k v_k \lambda_k \psi_k . \end{aligned} \quad (7.6)$$

⁸Sotto opportune ipotesi su S che qui non discutiamo, ma che possiamo considerare valide in tutti i casi di interesse pratico.

Si noti l'analogia tra quest'ultima espressione e l'equazione (7.5), dovuta proprio al fatto che le funzioni $e^{j2\pi ft}$ sono autofunzioni per i sistemi LTI. Nella prossima sezione approfondiremo l'idea di poter scrivere un segnale come nell'equazione (7.4) presentando formalmente il concetto di Trasformata di Fourier. Chiudiamo prima enunciando una formulazione del teorema della risposta in frequenza per segnali e sistemi reali, molto utile in casi pratici.

Teorema della risposta in frequenza (caso reale). Dato un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$ reale, si ha

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \implies S[x(t)] = |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \varphi + \angle H(f_0)).$$

La dimostrazione di questo teorema è piuttosto semplice. Basta considerare che

$$x(t) = \operatorname{Re} \left(e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \right)$$

e che, essendo $h(t)$ reale,

$$\begin{aligned} S[x(t)] &= S \left[\operatorname{Re} \left(e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left(S \left[e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \right] \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(H(f_0) e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(|H(f_0)| e^{j\angle H(f_0)} e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \right) \\ &= |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \varphi + \angle H(f_0)). \end{aligned}$$

7.2 Trasformata di Fourier

Nella sezione precedente abbiamo visto, attraverso il teorema della risposta in frequenza, che al fine di studiare l'effetto di un sistema LTI su un segnale $x(t)$, sembra essere comodo cercare di scrivere $x(t)$ come combinazione di esponenziali complessi. Approfondiamo ora questo aspetto introducendo formalmente la trasformata di Fourier e studiandone le principali proprietà.

Trasformata di Fourier. Dato un segnale $x(t)$, definiamo la sua trasformata di Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (7.7)$$

La discussione delle condizioni da porre su $x(t)$ per assicurare la convergenza dell'integrale esula dagli scopi del nostro corso. Ci limitiamo qui a dire che l'integrale sarà nel caso più generale da intendere come il valore principale di Cauchy, ovvero assumendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (7.8)$$

e prendendo il limite al senso delle distribuzioni. Se il segnale $x(t)$ è assolutamente integrabile, allora è facile mostrare che l'integrale che definisce $X(f)$ esiste anche come integrale improprio al senso classico. Vediamo subito alcuni esempi.

Esempio 20 Calcoliamo la trasformata del segnale $x(t) = \text{rect}(t/L)$, $L > 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \int_{-L/2}^{L/2} e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \frac{e^{-j2\pi f \frac{L}{2}} - e^{+j2\pi f \frac{L}{2}}}{-j2\pi f} \\
 &= \frac{e^{j\pi L f} - e^{-j\pi L f}}{2j} \frac{1}{\pi f} \\
 &= \frac{\sin(\pi L f)}{\pi f} \\
 &= L \text{sinc}(Lf)
 \end{aligned}$$

Quindi, per $L = 1$, troviamo che la trasformata di $x(t) = \text{rect}(t)$ è $X(f) = \text{sinc}(f)$. Nell'esempio troviamo però anche già anticipata una proprietà della trasformata di Fourier, ovvero che in generale la trasformata del segnale $x(t/a)$ è $|a|X(af)$.

Esempio 21 Calcoliamo la trasformata del segnale $x(t) = e^{-at}\epsilon(t)$, $a > 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \frac{1}{-a - j2\pi f} e^{(-a - j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{a + j2\pi f}.
 \end{aligned}$$

Si noti che, equivalentemente a quanto visto nell'esempio precedente, la trasformata di $x(at)$ è $\frac{1}{|a|}X(f/a)$.

Esempio 22 Calcoliamo la trasformata del segnale $x(t) = \delta(t)$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= 1 \quad \forall f,
 \end{aligned}$$

ovvero la trasformata di Fourier dell'impulso di Dirac è il segnale costante pari a 1.

La trasformata di Fourier $X(f)$ viene anche detta *spettro* del segnale $x(t)$ e descrive il contenuto del segnale in frequenza come si evince dalla formula di trasformazione inversa che mostreremo qui di seguito. Osserviamo a questo punto che la risposta in frequenza $H(f)$ di un sistema LTI è per definizione la trasformata di Fourier della risposta all'impulso $h(t)$.

Trasformata Inversa. Dato un segnale $x(t)$ con trasformata di Fourier $X(f)$, vale la formula di trasformazione inversa

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \quad (7.9)$$

dove di nuovo l'integrale è da intendere come già specificato per la (7.7)⁹.

Ci limitiamo qui a dare una traccia di dimostrazione nel caso in cui $x(t)$ sia assolutamente integrabile e la trasformata esista quindi al senso classico¹⁰. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L X(f) e^{j2\pi ft} df &= \int_{-L}^L \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-L}^L e^{-j2\pi f\tau} e^{j2\pi ft} df \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) L \operatorname{sinc}(L(t - \tau)) d\tau \\ &= x(t) * (L \operatorname{sinc}(Lt)) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato, per il calcolo dell'integrale in f , passaggi analoghi a quanto visto in Esempio 20. Al limite per $L \rightarrow \infty$, dalla (4.2), abbiamo che $L \operatorname{sinc}(Lt) \rightarrow \delta(t)$ al senso delle distribuzioni, e quindi l'integrale converge a $x(t) * \delta(t) = x(t)$.

Esempio 23 Calcoliamo la trasformata inversa del segnale $X(f) = \operatorname{rect}(f)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$

Cambiando la variabile $f' = -f$, otteniamo

$$x(t) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi f' t} df'$$

Notiamo che questo integrale è del tutto identico a quello ottenuto per $L = 1$ nell'Esempio 20 per il calcolo della trasformata del segnale rettangolare (questa analogia – o, meglio, “dualità” – è discussa in seguito). Pertanto otteniamo

$$x(t) = \operatorname{sinc}(t).$$

⁹Inoltre, la formula di trasformazione inversa restituisce il segnale originario solo al senso delle distribuzioni e non puntualmente. Ad esempio, se $x(t)$ ha una discontinuità di tipo salto in t_0 , la formula di inversione restituirà il valore medio dei limiti da destra e sinistra, indipendentemente dal valore esatto di $x(t)$ in $t = t_0$.

¹⁰La trasformazione inversa va comunque intesa al senso delle distribuzioni.

Questo risultato possiamo anche rileggerlo affermando che la trasformata del segnale $x(t) = \text{sinc}(t)$ è il segnale $X(f) = \text{rect}(f)$. In particolare, calcolando la trasformata in $f = 0$ si ha il risultato già accennato in precedenza

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t) dt = 1$$

Esempio 24 Mostriamo che la trasformata del segnale $\text{sgn}(t)$ è la funzione $1/(j\pi f)$ procedendo a ritroso, ovvero calcolando l'antitrasformata di quest'ultimo segnale¹¹. Abbiamo anzitutto (ricordando che tutti gli integrali sono da intendersi come valori principali e al senso delle distribuzioni)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\pi f} e^{j2\pi ft} df &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\pi f} \cos(2\pi ft) df + j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\pi f} \sin(2\pi ft) df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi f} \sin(2\pi ft) df. \end{aligned}$$

È evidente che l'espressione ottenuta è dispari in t e basta quindi calcolarla solo per $t > 0$. Tramite un cambio di variabile $2ft = f'$ possiamo continuare ottenendo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2t}{\pi f'} \sin(\pi f') \frac{df'}{2t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f') df' \\ &= 1, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la proprietà vista alla fine dell'Esempio 23. Usando la disparità in t già osservata, si deduce che la trasformata inversa di $1/j\pi f$ è la funzione $\text{sgn}(t)$. Pertanto $1/j\pi f$ è la trasformata della funzione $\text{sgn}(t)$.

△ Vale la pena osservare le formule di trasformazione diretta e inversa e considerare l'analogia con quanto visto sulla rappresentazione geometrica dei segnali. Se $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ è una base ortonormale per uno spazio V e $x \in V$, allora è possibile scrivere

$$x = \sum_k x_k \psi_k \quad (7.10)$$

dove

$$x_k = \langle x, \psi_k \rangle \quad (7.11)$$

L'analogia di queste due espressioni con le trasformazioni rispettivamente inversa e diretta di Fourier diventa evidente se si interpretano gli esponenziali $e^{j2\pi ft}$ come le funzioni ψ_k , la trasformata $X(f)$ come una sorta di “prodotto scalare” $\langle x(t), e^{j2\pi ft} \rangle$, ovvero i coefficienti x_k della (7.11), e la trasformata inversa di Fourier come un analogo dell'equazione (7.10).

Notazione. D'ora in poi indicheremo con \mathcal{F} l'operazione di trasformazione di Fourier, scrivendo ad esempio $\mathcal{F}(\text{rect}) = \text{sinc}$. Come al solito, sarà comodo indicare le variabili nei due domini per poter

¹¹Ovvamente assumendo valida la formula di inversione per questo segnale, la cui dimostrazione esula dallo scopo del corso.

esprimere in modo facile delle trasformazioni e scriveremo quindi anche $\mathcal{F}(\text{rect}(t))(f) = \text{sinc}(f)$ o più brevemente $\mathcal{F}(\text{rect}(t)) = \text{sinc}(f)$. Useremo la seguente notazione per indicare coppie di segnali legati dalla trasformata di Fourier

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

dove si intende che la trasformazione diretta opera da sinistra verso destra. Riassumiamo gli esempi precedenti scrivendo quindi

$$\begin{aligned} \text{rect}\left(\frac{t}{L}\right) &\longleftrightarrow L \text{sinc}(Lf), & L > 0 \\ e^{-at}\epsilon(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f}, & a > 0. \end{aligned}$$

Abitualmente useremo le variabili t e f per rappresentare gli argomenti, ma sottolineiamo che la trasformata associa coppie di segnali, indipendentemente dalla variabile libera usata che può anche essere la stessa a sinistra e a destra. Possiamo quindi scrivere ad esempio

$$\text{rect}(u) \longleftrightarrow \text{sinc}(u).$$

7.3 Proprietà della Trasformata di Fourier

Elenchiamo di seguito alcune delle più importanti proprietà della Trasformata di Fourier. Ove non specificato, useremo lettere maiuscole per rappresentare le trasformate di Fourier di segnali denominati con lettere minuscole nel dominio dei tempi, in particolare $X(f)$ sarà la trasformata di Fourier di $x(t)$, $X_1(f)$ la trasformata di $x_1(t)$ ecc.

- **Area.** Per segnali integrabili, valgono le relazioni

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df = x(0)$$

ottenute semplicemente dal calcolo esplicito di trasformata e antitrasformata nell'origine.

- **Dualità.** Ricordando l'assunzione $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, si ha

$$X(t) \longleftrightarrow x(-f),$$

o, equivalentemente, $\mathcal{F}(\mathcal{F}(x(t))) = x(-t)$. Questo si mostra banalmente osservando che trasformazione diretta e inversa differiscono solo per un segno nell'argomento dell'esponenziale complesso.

Esempio. Applicata ai segnali discussi negli Esempi 20-22, la dualità fornisce

$$\begin{aligned} \text{sinc}(t) &\longleftrightarrow \text{rect}(f) \\ \frac{1}{a + j2\pi t} &\longleftrightarrow e^f \epsilon(-f) \\ 1 &\longleftrightarrow \delta(f). \end{aligned}$$

- **Linearità.** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longleftrightarrow \alpha X_1(f) + \beta X_2(f),$$

che deriva banalmente dalla linearità dell'integrale.

Esempio. Poiché $\epsilon(t) = (1 + \text{sgn}(t))/2$, dall'Esempio 24 abbiamo

$$\epsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}.$$

- **Cambio scala/ribaltamento.** Per $T \neq 0$ si ha

$$x\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow |T| \cdot X(Tf)$$

e in particolare, ponendo $T = -1$,

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-f).$$

Questa proprietà si mostra con un semplice cambio di variabile. Consideriamo qui il caso $T < 0$, il caso $T > 0$ essendo ancor più semplice:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x(t/T))(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} x(t') e^{-j2\pi f T t'} T dt' \\ &= -T X(Tf) \\ &= |T| X(Tf). \end{aligned}$$

- **Coniugio.** Vale la relazione

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-f).$$

Si mostra calcolando direttamente

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x^*(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) e^{j2\pi f t})^* dt \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi f t} dt \right)^* \\ &= X^*(-f). \end{aligned}$$

- **Simmetrie.** Dalla proprietà di ribaltamento abbiamo:
Segnali pari/dispari.

$$\begin{aligned} x(t) \text{ pari} &\implies X(f) \text{ pari} \\ x(t) \text{ dispari} &\implies X(f) \text{ dispari} \end{aligned}$$

Dalla proprietà di coniugio

Hermitianità per segnali reali. Se $x(t)$ è un segnale reale, allora $X(f)$ ha simmetria Hermitiana, ovvero

$$\begin{aligned} X(-f) &= X^*(f) \\ |X(f)|, \operatorname{Re}(X(f)) &\text{ pari} \\ \angle H(f), \operatorname{Im}(X(f)) &\text{ dispari} \end{aligned}$$

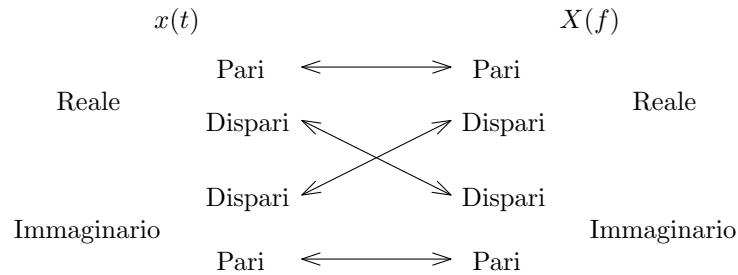
Per segnali reali, quindi, è sufficiente studiare la trasformata di Fourier sulle frequenze positive e in alcuni contesti solo il semiasse positivo delle frequenze viene preso in considerazione (ad esempio nei diagrammi di Bode e di Nyquist).

Infine, combinando le simmetrie sopra esposte si deduce la seguente proprietà.

Segnali reali pari/dispari. Si ha

$$\begin{aligned} x(t) \text{ reale pari} &\implies X(f) \text{ reale pari} \\ x(t) \text{ reale dispari} &\implies X(f) \text{ puramente immaginaria dispari.} \end{aligned}$$

Più in generale, lavorando su parti reali e immaginarie si ottengono le relazioni riportate nella seguente figura:



- **Traslazione.** Per ogni t_0 si ha

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

ovvero traslazioni nei tempi si riflettono in termini di fase nel dominio delle frequenze. Si mostra con un semplice cambio di variabile similmente a quanto visto per proprietà precedenti.

- **Modulazione.** Per ogni f_0 si ha

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0)$$

Questa proprietà è semplicemente la duale della precedente, ma vale la pena mettere in evidenza un esempio fondamentale che riporta in primo piano la natura stessa della trasformata.

Esempio. Poiché, come già visto,

$$1 \longleftrightarrow \delta(f),$$

allora si ha

$$e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f - f_0)$$

ovvero un segnale esponenziale complesso a frequenza f_0 si rappresenta in frequenza con una delta di Dirac in posizione f_0 . Usando la precedente relazione con $\pm f_0$ e invocando le formule di Eulero si ottiene

$$\begin{aligned}\cos(2\pi f_0 t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \\ \sin(2\pi f_0 t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0)\end{aligned}$$

- **Derivazione.** Si ha

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &\longleftrightarrow j2\pi f X(f) \\ -j2\pi t x(t) &\longleftrightarrow \frac{dX(f)}{df}\end{aligned}$$

Si mostra applicando la derivazione alle formule di trasformazione diretta e inversa.

Es. **Esercizio.** Si verifichino le proprietà di derivazione e di traslazione osservando che

$$\begin{aligned}\frac{d \sin(2\pi f_0 u)}{du} &= 2\pi f_0 \cos(2\pi f_0 u) \\ \frac{d\epsilon(u)}{du} &= \delta(u) \\ \frac{d \text{rect}(u)}{du} &= \delta(u + 1/2) - \delta(u - 1/2)\end{aligned}$$

e applicando sia la trasformazione diretta sia inversa ai segnali sopra riportati.

- **Integrazione.** Se $x(t)$ è un segnale integrabile, e quindi esiste reale finito $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$, allora

$$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \longleftrightarrow X(f) \left(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right).$$

Questa relazione può essere ottenuta dalla precedente ma risulterà più evidente a seguito della seguente proprietà fondamentale.

- **Teorema di Convoluzione.** Se esiste la convoluzione $x_1(t) * x_2(t)$, allora

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f)X_2(f)$$

e, per dualità, se esiste il prodotto $x_1(t)x_2(t)$, allora

$$x_1(t)x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) * X_2(f).$$

Mostriamo solo come derivare la prima proprietà. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x_1(t) * x_2(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1(t) * x_2(t)) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) e^{-j2\pi ft} d\tau dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) X_2(f) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
&= X_1(f) X_2(f)
\end{aligned}$$

Questa proprietà ha ovviamente importanti conseguenze nel contesto dei sistemi lineari tempo-invarianti, su cui torneremo nella prossima sezione. Osserviamo qui che il teorema di convoluzione verrà usato abitualmente come strumento per il calcolo di trasformate.

Esempi. Poiché si ha $\text{tri}(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t)$, avremo

$$\text{tri}(t) \longleftrightarrow \text{sinc}^2(t)$$

Es. Usando invece la forma duale avremo ad esempio, per un generico segnale $x(t)$,

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} X(f - f_0) + \frac{1}{2} X(f + f_0).$$

- **Identità di Parseval.** L'identità di Parseval può essere declinata in diverse forme che elenchiamo qui di seguito per comodità. In tutti i casi, le relazioni vanno lette con le ovvie assunzioni sull'esistenza degli integrali almeno al senso delle distribuzioni.

Prima forma.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) X_2(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u) x_2(u) du$$

Si mostra calcolando esplicitamente

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) X_2(u) du &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_2(v) e^{-j2\pi uv} dv \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) x_2(v) e^{-j2\pi uv} dv du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(v) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) e^{-j2\pi uv} du \right) dv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(v) X_1(v) dv
\end{aligned}$$

Seconda forma.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u)X_2(u)du.$$

Si ottiene dalla precedente usando X_2 al posto di x_2 e sfruttando la proprietà di dualità.

Terza forma (conservazione del prodotto scalare).

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)X_2^*(f)df \quad (7.12)$$

Si ottiene dalla precedente usando $x_2^*(u)$ al posto di $x_2(-u)$ e applicando le proprietà di coniugio e di ribaltamento.

△

Per segnali di energia questa relazione ci dice una cosa fondamentale: la trasformata di Fourier preserva il prodotto scalare e, di conseguenza, tutta la geometria dei segnali. In particolare, scegliendo $x_2 = x_1 = x$ abbiamo la seguente:

Quarta forma. Se $x(t)$ è un segnale di energia,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (7.13)$$

ovvero la trasformata di Fourier preserva l'energia (oppure, detto in altre parole, possiamo calcolare l'energia sia nei tempi sia in frequenza usando la stessa espressione).

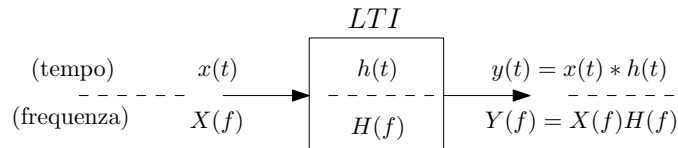
7.4 Rappresentazione in frequenza di filtraggio LTI

Il teorema di convoluzione enunciato nella sezione precedente porta subito a dedurre una importante relazione che lega lo spettro del segnale in uscita ad un sistema LTI allo spettro del segnale in ingresso e alla risposta in frequenza del sistema.

Se il segnale $x(t)$ è posto in ingresso a un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$ avremo in uscita il segnale $y(t) = x(t) * h(t)$. Passando al dominio delle frequenze si avrà quindi

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (7.14)$$

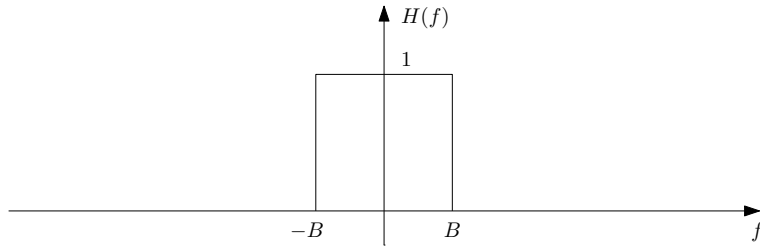
ovvero lo spettro del segnale in uscita è il prodotto dello spettro in ingresso per la risposta in frequenza del sistema. Alla luce della formula di inversione della trasformata di Fourier, questa relazione era in realtà già presente nell'equazione (7.5), ed è anzi il vero motivo per l'introduzione della trasformata di Fourier stessa (si suol dire, a volte, che la trasformata di Fourier “diagonalizza” i sistemi LTI, in analogia con quanto mostrato nell'equazione (7.6)).



È importante notare che dalla equazione (7.14) si deduce subito una fondamentale caratteristica dei sistemi LTI, ovvero che non generano mai in uscita frequenze nuove rispetto a quelle in ingresso. Un segnale $x(t)$ verifica $X(f_1) = 0$ per una frequenza f_1 , allora posto in ingresso a un qualunque sistema LTI certamente genera in uscita un segnale $y(t)$ che verifica $Y(f_1) = 0$. Un sistema LTI può eventualmente bloccare, attenuare o amplificare delle componenti frequenziali, ma non può mai introdurne di nuove. Da questa caratteristica nasce il termine di “filtraggio” LTI. Descriviamo qui tre classi principali di filtri LTI.

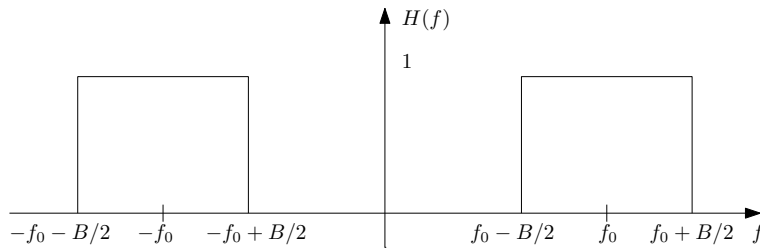
Filtro passa basso ideale. Un filtro passa basso ideale è un sistema LTI che lascia inalterate le componenti a frequenze basse, diciamo $|f| \leq B$ e sopprime completamente le componenti a frequenze f con $|f| > B$. Esso è quindi matematicamente descritto dalle espressioni

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right), \quad h(t) = 2B \text{sinc}(2Bt).$$



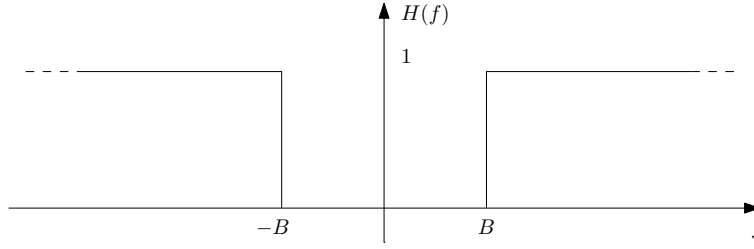
Filtro passa banda ideale. Un filtro passa banda ideale è un sistema LTI che lascia inalterate le componenti a frequenze in un intervallo $f_0 - B/2 \leq |f| \leq f_0 + B/2$ ($f_0 > B/2$) e sopprime completamente le rimanenti. Es. Esso è quindi matematicamente descritto dalle espressioni

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_0}{B}\right), \quad h(t) = 2B \text{sinc}(Bt) \cos(2\pi f_0 t)$$

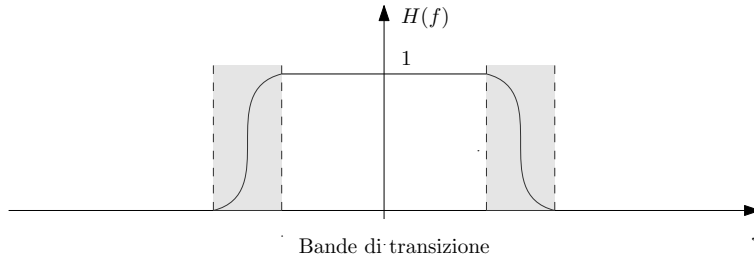


Filtro passa alto ideale Un filtro passa alto ideale è un sistema LTI che lascia inalterate le componenti a frequenze $|f| \geq B$ e sopprime completamente le rimanenti. Esso è quindi matematicamente descritto dalle espressioni

$$H(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right), \quad h(t) = \delta(t) - 2B \text{sinc}(2Bt)$$



Filtri reali. I filtri descritti in precedenza sono detti ideali proprio in quanto lasciano totalmente inalterate le componenti a determinate frequenze di interesse ed eliminano completamente le componenti ad altre frequenze. Nella realtà, tali filtri non sono fisicamente realizzabili. Filtri concretamente realizzabili presentano in generale transizioni graduali tra la cosiddetta banda passante e la banda di attenuazione e si hanno quindi delle bande dette appunto di transizione. Nella seguente immagine rappresentiamo solo l'esempio di un filtro passa basso.



In generale, mentre nei filtri ideali visti sopra $H(f)$ assume solo valori 0 e 1 (su diversi intervalli di frequenza), nella pratica $H(f)$ assume valori complessi. Come già detto a valle dell'equazione (7.2), la risposta in frequenza $H(f)$ può essere scorporata nella risposta in ampiezza $|H(f)|$ e nella risposta di fase $\angle H(f)$. Valori di $|H(f)|$ diversi da 1 portano alle cosiddette distorsioni in ampiezza. L'effetto della risposta di fase $\angle H(f)$ richiede alcune osservazioni più dettagliate. Componenti lineari della forma $2\pi f t_0$ della fase corrispondono a un ritardo puro di t_0 nel dominio del tempo, come si deduce dalla proprietà di traslazione della trasformata di Fourier. Se la risposta di fase è lineare (affine) nella banda del segnale in ingresso, non si avrà quindi distorsione di fase ma solo una componente di ritardo. Più in generale, la distorsione di fase è legata alla non linearità della fase nella banda del segnale. Se il segnale in ingresso ha una banda molto stretta attorno a una frequenza f_0 nei pressi della quale sia ragionevole approssimare $\angle H(f)$ al primo ordine, allora l'effetto della risposta di fase sarà in prima approssimazione un ritardo dell'*inviluppo* del segnale di una quantità $H'(f_0)/2\pi$.

Esempio 25 (Risposta al gradino) Vediamo la risposta di un filtro passa basso ideale a fronte di un ingresso a gradino $x(t) = \epsilon(t)$. Ipotizzando $H(f) = \text{rect}(f/2B)$, abbiamo $h(t) = 2B \text{sinc}(2Bt)$. Come visto in Esempio 16, una convoluzione di un segnale con un gradino corrisponde ad una

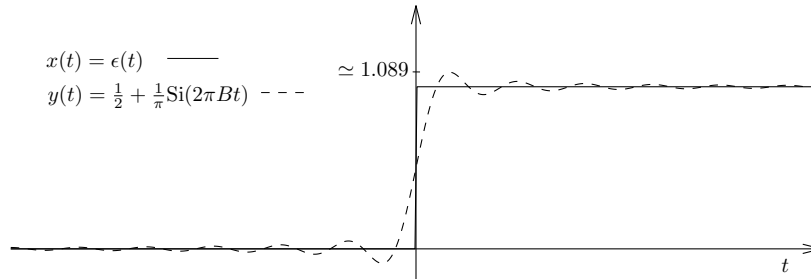
integrazione da $-\infty$ fino a t . L'uscita $y(t)$ sarà quindi

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \epsilon(t) * h(t) \\
 &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^t 2B \operatorname{sinc}(2B\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2B\pi t} \frac{\sin(\tau')}{\tau'} d\tau' \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}(2\pi Bt)
 \end{aligned}$$

dove Si è la funzione seno integrale definita come

$$\operatorname{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin(t)}{t} dt$$

In figura è mostrato un esempio della risposta $y(t)$ per $B = 10$.



Come si può notare, il filtraggio passa-basso ideale introduce delle cosiddette sovralongazioni, ovvero oscillazioni del segnale di uscita nei pressi dell'istante di transizione dell'ingresso. In particolare, il segnale $y(t)$ raggiunge in seguito al fronte di salita un massimo pari a circa 1.089, ovvero una sovralongazione di circa il 9% rispetto all'ampiezza del gradino in ingresso.

È possibile notare, dall'espressione ottenuta per $y(t)$, che all'aumentare della banda B il segnale y tende puntualmente al gradino. Tuttavia, la convergenza non è uniforme. All'aumentare di B l'uscita subisce un riscaldamento sull'asse dei tempi; questo significa che le sovralongazioni diventano sempre più rapide all'aumentare della banda B , ma la loro ampiezza rimane invariata al 9% circa (all'aumentare di B). Questo è un primo esempio di quelli che vengono chiamati “fenomeni di Gibbs”, ovvero oscillazioni che compaiono nei pressi di punti di discontinuità nel momento in cui si cerchi di ricostruire un segnale usando solo componenti in bassa frequenza della sua trasformata di Fourier.

7.5 Fenomeni di Gibbs

Una trattazione dettagliata della convergenza della trasformata e dell'antitrasformata di Fourier esula dagli scopi di questo corso. Ci limitiamo in questa sezione a descrivere un particolare fenomeno che si verifica nella ricostruzione di segnali con discontinuità di prima specie mediante la trasformazione inversa di Fourier.

Nell'Esempio 25 abbiamo studiato il risultato che si ottiene applicando un filtro passa-basso ideale ad un gradino $\epsilon(t)$. Questo risultato può anche essere interpretato in termini di convergenza della trasformata inversa di Fourier. Posto che, come già visto, si ha $\epsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$, possiamo scrivere

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right) e^{j2\pi ft} df$$

e studiare la convergenza di questa antitrasformata; consideriamo cioè

$$\epsilon_B(t) = \int_{-B}^B \left(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right) e^{j2\pi ft} df,$$

e valutiamo in che modo $\epsilon_B(t) \rightarrow \epsilon(t)$ quando $B \rightarrow \infty$. Ora, possiamo notare che il segnale $\epsilon_B(t)$ è di fatto un segnale ottenuto filtrando $\epsilon(t)$ con un filtro passa-basso di banda B e, quindi, coincide con il segnale $y(t)$ dell'Esempio 25. Pertanto abbiamo

$$\epsilon_B(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(2\pi Bt).$$

Come visto nell'esempio, il segnale $\epsilon_B(t)$ tende solo puntualmente ma non uniformemente al gradino e presenta delle oscillazioni la cui ampiezza non dipende da B . Queste oscillazioni sono dette “fenomeni di Gibbs”, e si presentano più in generale ogniqualvolta un segnale discontinuo venga approssimato usando solo le sue componenti in bassa frequenza.

Supponiamo infatti che, più in generale, un segnale $x(t)$ sia regolare ovunque in \mathbb{R} a meno di discontinuità di prima specie nei punti t_1, t_2, \dots, t_n in cui presenta dei salti di ampiezza a_1, a_2, \dots, a_n . Allora potremo scrivere

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \sum_{k=1}^n a_k \epsilon(t - t_k)$$

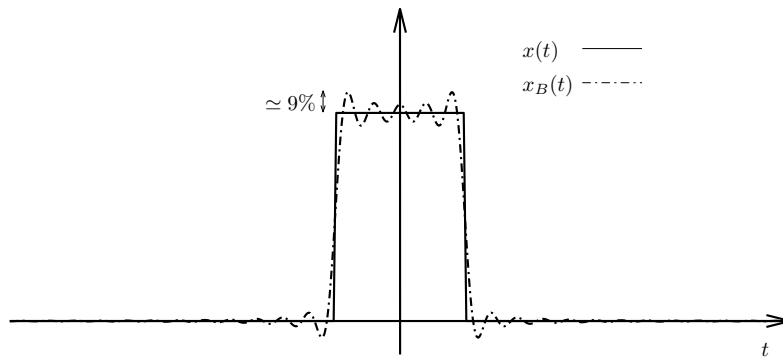
con $\tilde{x}(t)$ continuo su \mathbb{R} . Si avrà dunque

$$X(f) = \tilde{X}(f) + \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right) e^{-j2\pi f t_k}$$

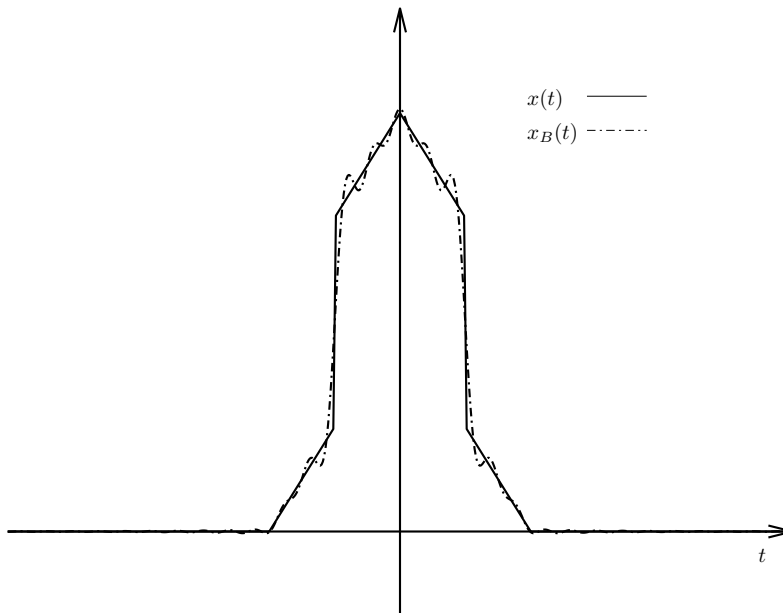
La ricostruzione $x_B(t)$ di $x(t)$ tramite inversione della trasformata di Fourier nell'intervallo di frequenze $[-B, B]$ (ovvero il filtraggio passa basso ideale di $x(t)$) presenterà così dei fenomeni di Gibbs in prossimità delle discontinuità

$$x_B(t) = \tilde{x}_B(t) + \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(2\pi B(t - t_k)) \right).$$

Di seguito riportiamo ad esempio l'approssimazione di un rettangolo mediante trasformazione inversa di Fourier limitatamente all'intervallo $[-B, B]$ (in questo esempio $B = 5$).



Nella seguente figura, è invece mostrato il caso del segnale $x(t) = \text{tri}(t) + \text{rect}(t)$ (che mette in evidenza il fatto, pur ovvio sulla base della linearità, che non ci si deve fare illusioni basandosi sulla derivata del segnale nei pressi della discontinuità).



7.6 Densità Spettrali

Abbiamo visto che le relazioni di Parseval permettono di calcolare prodotti scalari ed energie nel dominio delle frequenze. Se $x(t)$ è un segnale di energia, abbiamo

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df.$$

Non solo, se $x(t)$ è posto in ingresso a un filtro passa banda ideale per la banda di frequenze (in modulo) $[f_1, f_2]$, l'uscita, chiamiamola $x_{[f_1, f_2]}(t)$, avrà energia

$$W_{x_{[f_1, f_2]}} = \int_{-f_2}^{-f_1} |X(f)|^2 df + \int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df$$

Ovvero, se $x(t)$ è un segnale di energia, $|X(f)|^2$ ha l'interessante proprietà che, integrata su un intervallo di frequenze, restituisce l'energia del segnale in quell'intervallo di frequenze. Per questo motivo viene chiamata *densità spettrale di energia* del segnale $x(t)$. Per segnali di potenza, l'espressione $|X(f)|^2$ può non aver senso, in quanto $X(f)$ può contenere degli impulsi di Dirac e, in effetti, non abbiamo visto per il momento una relazione di Parseval per segnali di potenza (ne vedremo una per segnali periodici nelle prossime sezioni). Si può in ogni caso dare una trattazione coerente dei diversi casi facendo ricorso alla correlazione. In effetti, il calcolo dell'energia o della potenza di un segnale corrisponde al calcolo dell'autocorrelazione in $\tau = 0$. Questo può forse rendere più intuitive le definizioni che daremo di seguito.

Densità (inter-)spettrale di energia. Dati due segnali di energia $x(t)$ e $y(t)$, definiamo la *densità interspettrale di energia* come la trasformata di Fourier della cross-correlazione. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\Phi_{xy}(f) &= \mathcal{F}(\varphi_{xy}(\tau)) \\ &= \mathcal{F}(x^*(-\tau) * y(\tau)) \\ &= X^*(f)Y(f).\end{aligned}$$

Nel caso in cui si scelga $y(t) = x(t)$ si ha quindi la *densità spettrale di energia*

$$\begin{aligned}\Phi_x(f) &= \mathcal{F}(\varphi_x(\tau)) \\ &= |X(f)|^2.\end{aligned}$$

Quanto già spiegato in precedenza è quindi riscritto come

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df.$$

Densità (inter-)spettrale di potenza. Per segnali di potenza, seguiamo la stessa idea definendo di nuovo la *densità inter-spettrale di potenza* come la trasformata della cross-correlazione

$$\begin{aligned}\Phi_{xy}(f) &= \mathcal{F}(\varphi_{x,y}(\tau)) \\ &= \mathcal{F}(x^*(-\tau)\bar{y}(\tau))\end{aligned}$$

Non è possibile tuttavia in questo caso esprimerla in termini di prodotto tra $X(f)$ e $Y(f)$, che potrebbe non essere una operazione ben definita. È eventualmente possibile descrivere $\Phi_{xy}(f)$ come limite

$$\Phi_{xy}(f) = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D} X_D^*(f) Y_D(f)$$

dove abbiamo in questo caso indicato con $X_D(f)$ e $Y_D(f)$ le trasformate rispettivamente dei segnali finestrati $x(t) \text{rect}(t/D)$ e $y(t) \text{rect}(t/D)$. Di nuovo, scelto $y(t) = x(t)$ abbiamo la densità spettrale di potenza

$$\Phi_x(f) = \mathcal{F}(\varphi_x(\tau))$$

che verifica chiaramente

$$\begin{aligned} P_x &= \varphi_x(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) df . \end{aligned}$$

Non discutiamo oltre il caso di segnali di potenza generici, rimandando alle sezioni successive il caso di segnali periodici, per cui è possibile dare espressioni esplicite semplici e comode.

8 Segnali Periodici: Trasformata e Serie di Fourier

8.1 Pettine di impulsi

Consideriamo anzitutto il pettine di impulsi di passo unitario $\delta_1(t)$, che ricordiamo essere definito in equazione (4.5) come

$$\delta_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k).$$

Abbiamo la seguente proprietà.

Relazione di Poisson. Vale la relazione

$$\delta_1(t) \longleftrightarrow \delta_1(f) \quad (8.1)$$

e, più in generale, per ogni $T > 0$,

$$\delta_T(t) \longleftrightarrow \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f). \quad (8.2)$$

Vediamo come ottenere questo risultato. Consideriamo la trasformata di Fourier prestando in questo caso attenzione all'interpretazione che dobbiamo dare all'integrale che la definisce come indicato in equazione (7.8). Avremo dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\delta_1(t)) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \delta_1(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k) e^{-j2\pi ft} \right) dt \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fk} \delta(t - k) \right) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N e^{-j2\pi fk}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $L = N + 1/2$ con N intero. Possiamo poi proseguire calcolando esplicitamente

la somma. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\delta_1(t)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N e^{j2\pi f k} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-j2\pi f N} \sum_{k=0}^{2N} e^{j2\pi f k} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-j2\pi f N} \cdot \frac{e^{j2\pi f(2N+1)} - 1}{e^{j2\pi f} - 1} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-j2\pi f N} \cdot \frac{e^{j\pi f(2N+1)}}{e^{j\pi f}} \frac{e^{j\pi f(2N+1)} - e^{-j\pi f(2N+1)}}{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}} \cdot \frac{2j}{2j} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin((2N+1)\pi f)}{\sin(\pi f)}.
\end{aligned}$$

(si noti che tale funzione è regolare su tutto l'asse, come è ovvio essendo una somma finita di esponenziali complessi). Il limite va calcolato al senso delle distribuzioni e, come in altre occasioni, ci limitiamo a dare una spiegazione non completamente rigorosa ma sostanzialmente corretta. L'argomento del limite è per ogni N una funzione periodica di periodo 1 e, di conseguenza $\mathcal{F}(\delta_1(t))$ sarà periodica di periodo 1. Possiamo quindi calcolare il limite solo sul periodo $[-1/2, 1/2)$. In questo intervallo, dividendo e moltiplicando per πf , otteniamo

$$\frac{\sin((2N+1)\pi f)}{\sin(\pi f)} = \frac{(2N+1) \operatorname{sinc}((2N+1)f)}{\operatorname{sinc}(f)}.$$

La funzione $\operatorname{sinc}(f)$ non ha zeri in $[-1/2, 1/2)$ e quindi la funzione $1/\operatorname{sinc}(f)$ è limitata in tale intervallo e in particolare è regolare e vale 1 nell'origine. Per N che tende a infinito, in accordo con l'equazione (4.2), il numeratore tende a $\delta(f)$. Pertanto, limitandoci all'intervallo $[-1/2, 1/2)$, avremo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin((2N+1)\pi f)}{\sin(\pi f)} = \delta(f).$$

Poiché abbiamo già stabilito che $\mathcal{F}(\delta_1(t))$ è periodica di periodo 1, dovrà necessariamente essere una ripetizione di $\delta(f)$ con periodo 1, ovvero $\delta_1(f)$.

Una volta stabilita la (8.1), deduciamo la (8.2) semplicemente applicando le proprietà della trasformata. Applicando la proprietà di cambio scala abbiamo

$$\delta_1\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T\delta_1(Tf), \quad T > 0. \tag{8.3}$$

Ora non resta che esprimere i due pettini riscaldati a destra e a sinistra nella forma voluta. Per $T > 0$,

abbiamo¹²

$$\begin{aligned}
 \delta_1\left(\frac{t}{T}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - k\right) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t - kT}{T}\right) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\delta(t - kT) \\
 &= T\delta_T(t)
 \end{aligned}$$

Similmente, usando $1/T$ al posto di T , avremo

$$\delta_1(Tf) = \frac{1}{T}\delta_{1/T}(f).$$

Sostituendo queste espressioni nella (8.3) si ottiene la (8.2).

8.2 Segnali periodici generici

Useremo ora la trasformata di $\delta_T(t)$ per studiare segnali periodici generici. Abbiamo infatti già visto che un segnale T -periodico $x(t)$ può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(t - kT) \\
 &= p(t) * \delta_T(t)
 \end{aligned}$$

dove $p(t)$ può essere ad esempio (ma non necessariamente, si veda pagina 10) un periodo del segnale. Applicando il teorema di convoluzione per la trasformata di Fourier avremo quindi

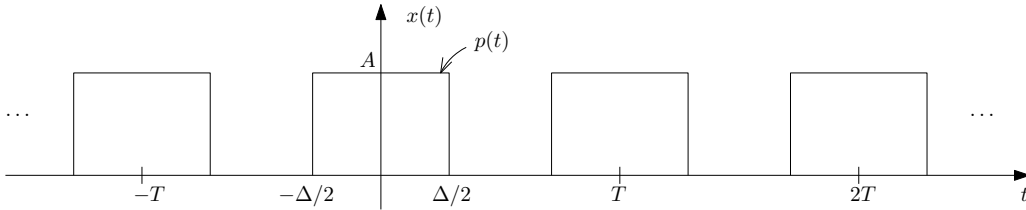
$$\begin{aligned}
 X(f) &= P(f) \cdot \frac{1}{T}\delta_{1/T}(f) \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} P\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right).
 \end{aligned}$$

△ La trasformata di Fourier di $x(t)$ è quindi composta da una sequenza di impulsi di Dirac a frequenze multiple di $1/T$. Se T è un periodo fondamentale del segnale, la frequenza $1/T$ è detta *fondamentale* e lo spettro di $x(t)$ è composto quindi da impulsi a frequenze multiple della fondamentale. Osserviamo che, sebbene $x(t)$ si possa esprimere scegliendo in modi diversi l'impulso $p(t)$, la sua trasformata non può ovviamente dipendere dalla scelta di $p(t)$. Questo porta a concludere che tutte le $p(t)$ ammissibili saranno tali che le rispettive $P(f)$ assumeranno gli stessi valori nei multipli di $1/T$. Questa osservazione, che al momento potrebbe giungere inaspettata, sarà equivalentemente ritrovata più avanti nel corso nella trattazione del campionamento.

¹²Il fattore di scala T che compare ci ricorda che riscalando un pettine $\delta_1(t)$ nei tempi non cambia solo la posizione degli impulsi ma anche la loro area!

Esempio 26 Consideriamo l'onda quadra già discussa in Esempio 9

$$x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left(\frac{t - kT}{\Delta} \right) .$$



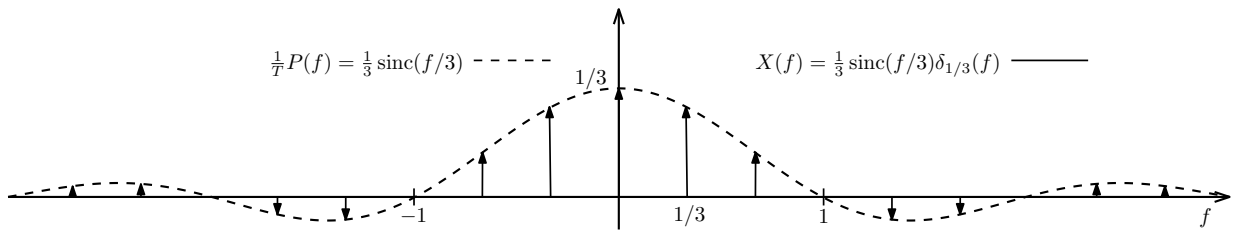
Abbiamo

$$x(t) = A \text{rect} \left(\frac{t}{\Delta} \right) * \delta_T(t) , \quad \Delta, T > 0$$

e pertanto, passando nel dominio delle frequenze,

$$\begin{aligned} X(f) &= A\Delta \text{sinc}(\Delta f) \cdot \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{A\Delta}{T} \text{sinc} \left(\frac{k\Delta}{T} \right) \delta \left(f - \frac{k}{T} \right) \end{aligned}$$

Nella figura sottostante riportiamo il grafico della trasformata per il caso $T = 3$ e $\Delta = 1$.



Es. **Esercizio.** Si consideri ora l'onda triangolare già discussa in Esempio 10 e si calcoli la trasformata di Fourier usando la prima espressione ivi fornita con la scelta

$$p(t) = A \text{tri} \left(\frac{t}{\Delta} \right) - \text{tri} \left(\frac{t - 2\Delta}{\Delta} \right) .$$

Calcolare di nuovo la trasformata di Fourier stavolta sfruttando la seconda espressione dell'onda riportata nell'Esempio 10, da cui si ottiene

$$X(f) = \mathcal{F} \left(2A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{tri} \left(\frac{t - 4k\Delta}{2\Delta} \right) \right) - A\delta(f) .$$

In questo caso si potrà scegliere $p(t) = \text{tri}(t/2\Delta)$ per trasformare la sommatoria. Verificare che le due trasformate (ovviamente) coincidono.

- Es. **Esercizio.** Calcolare la trasformata di Fourier di un segnale con periodo fondamentale T usando il procedimento visto sia sul periodo fondamentale sia su un periodo non fondamentale (cioè ad esempio usando $2T$ al posto di T). Verificare che il risultato non dipende da quale periodo usiamo nell'analisi mostrata in precedenza.

8.3 Serie di Fourier

Abbiamo visto che un segnale periodico di periodo T ha una trasformata di Fourier costituita da una sequenza di impulsi di Dirac a frequenze multiple di $1/T$. Questo porta a una scrittura del segnale in forma di serie di esponenziali complessi che viene detta *Serie di Fourier*.

Sia $x(t)$ è un segnale T -periodico, scritto nella forma

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(t - kT).$$

Abbiamo visto che la trasformata di Fourier di $x(t)$ ha la forma

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} P\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right).$$

Antitrasformando la serie termine a termine otteniamo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} P\left(\frac{k}{T}\right) e^{j2\pi \frac{k}{T} t}.$$

Considerando che è sempre possibile scegliere quale segnale $p(t)$ un periodo del segnale $x(t)$, avremo

$$P(k/T) = \int_u^{u+T} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt.$$

Riformuliamo quanto ottenuto nel seguente modo.

Serie di Fourier in forma esponenziale. Dato un segnale $x(t)$ di periodo T , è possibile esprimerlo in Serie di Fourier nella seguente forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t},$$

dove i coefficienti X_k , detti coefficienti di Fourier, sono dati dall'espressione

$$X_k = \frac{1}{T} \int_u^{u+T} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (8.4)$$

Se il segnale $x(t)$ è reale, è facile osservare che i coefficienti X_k hanno simmetria Hermitiana, ovvero

$$X_{-k} = X_k^*, \quad \text{per } x(t) \text{ reale.}$$

In tal caso, è a volte comodo riscrivere la serie in forma reale accorpando i termini di indici opposti nella sommatoria, ottenendo il seguente risultato.

Serie di Fourier in forma trigonometrica. Dato un segnale reale $x(t)$ di periodo T , è possibile esprimerlo in Serie di Fourier nella seguente forma

$$x(t) = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) \quad (8.5)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{T} \int_u^{u+T} x(t) \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt, \quad b_k = \frac{1}{T} \int_u^{u+T} x(t) \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt \quad (8.6)$$

Si noti che i coefficienti a_k e b_k sono definiti solo per $k > 0$, e vale la relazione

$$X_k = a_k - j b_k, \quad k > 0. \quad (8.7)$$

È anche possibile riscrivere l'espansione in serie usando un'unica sommatoria impiegando termini di fase nella seguente forma

$$x(t) = X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t + \varphi_k\right) \quad (8.8)$$

dove, per $k > 0$,

$$\begin{aligned} r_k &= |X_k|, & \varphi_k &= \arg X_k \\ &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} & &= -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \end{aligned}$$

Osserviamo che anche il pettine di delta $\delta_1(t)$, essendo un segnale periodico, può essere espresso mediante serie di Fourier. In particolare, nel mostrare la relazione $\delta_1(t) \longleftrightarrow \delta_1(f)$ abbiamo già di fatto dedotto che vale la serie di Fourier

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{j2\pi \frac{k}{T} t},$$

che in forma trigonometrica diventa

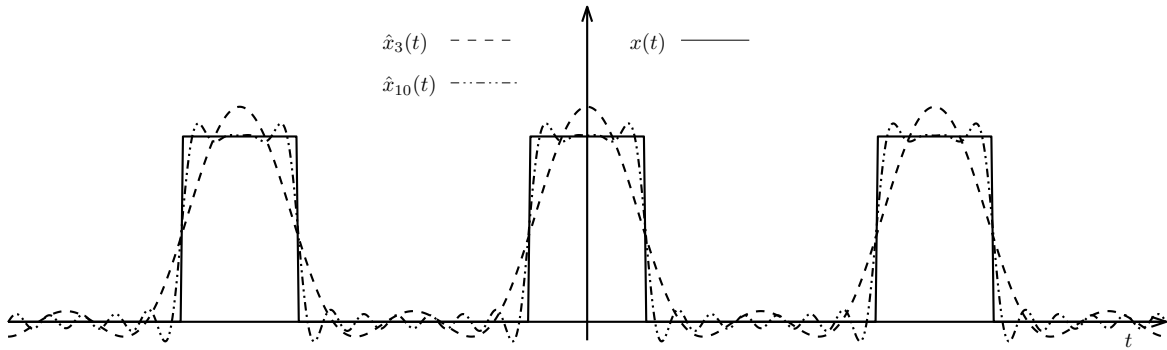
$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right).$$

Approssimazione mediante troncamento della serie. Dato un segnale reale $x(t)$, è abitudine chiamare *componenti armoniche* i termini della Serie di Fourier, chiamando in particolare *componente di k-esima armonica* il termine k -esimo della serie in forma trigonometrica, ovvero $2a_k \cos(2\pi kt/T) +$

$2b_k \sin(2\pi kt/T) = 2r_k \cos(2\pi kt/T + \varphi_k)$. Spesso è utile considerare l'approssimazione $\hat{x}_N(t)$ di un segnale $x(t)$ che si ottiene troncando la serie ad un numero finito N di armoniche, ovvero

$$\begin{aligned}\hat{x}_N(t) &= \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi \frac{k}{T}t} \\ &= X_0 + 2 \sum_{k=1}^N a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T}t\right) + 2 \sum_{k=1}^N b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T}t\right) \\ &= X_0 + 2 \sum_{k=1}^N r_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T}t + \varphi_k\right).\end{aligned}$$

Come evidenzieremo più avanti, tale segnale rappresenta la proiezione di $x(t)$ sullo spazio generato dai segnali $1, e^{\pm j2\pi \frac{1}{T}t}, \dots, e^{\pm j2\pi \frac{N}{T}t}$. Nella figura sottostante vediamo le approssimazioni ottenute dalle prime tre e dalle prime dieci armoniche dell'onda rettangolare già usata nell'esempio 9 (sempre con $T = 3, \Delta = 1$).



All'aumentare di N , il segnale $\hat{x}_N(t)$ approssima sempre più fedelmente il segnale $x(t)$. Tuttavia, la convergenza di $\hat{x}_N(t)$ a $x(t)$ andrebbe in realtà discussa in maggior dettaglio, allo stesso modo con cui abbiamo già visto che la scrittura di un segnale mediante antitrasformata di Fourier va opportunamente interpretata in termini di convergenza dell'integrale. Osservando le approssimazioni dell'onda quadra in figura, si nota che anche per la Serie di Fourier, come per la trasformata, si verificano i cosiddetti *fenomeni di Gibbs*. Se approssimiamo l'onda quadra troncando la serie di Fourier alle prime N armoniche, si osservano delle sovraelongazioni che diventano via via più "strette" all'aumentare di N ma non diminuiscono in ampiezza. In presenza di discontinuità cioè, $\hat{x}_N(t)$ non converge uniformemente a $x(t)$, ma solo in norma quadratica. Converte puntualmente a $x(t)$ nei punti regolari, mentre converge alla media dei suoi limiti destro e sinistro nei punti di salto (ma abbiamo già chiarito che il valore di $x(t)$ in un punto isolato non ci interessa).

8.4 Proprietà della Serie di Fourier

Enunciamo qui alcune proprietà della Serie di Fourier. Usiamo la seguente notazione per legare un segnale $x(t)$ ai suoi coefficienti di Fourier sul periodo T

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{SdF}_T} X_k.$$

Di seguito daremo per scontato che valga la suddetta relazione ed enunceremo le proprietà in termini di variazioni su $x(t)$ e corrispondenti variazioni sui coefficienti. La dimostrazione è in quasi tutti i casi immediata ed è lasciata allo studente.

- **Traslazione.** Abbiamo

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\text{SdF}_T} X_k e^{-j2\pi \frac{k}{T} t_0}.$$

- **Coniugio/Hermitianità.** Vale la relazione

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\text{SdF}_T} X_{-k}^*.$$

Questo implica immediatamente la proprietà già vista

$$X_{-k} = X_k^*, \quad \text{per } x(t) \text{ reale}.$$

- **Derivazione.**

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{SdF}_T} \left(j2\pi \frac{k}{T} \right) X_k.$$

- **Linearità.** Se $x(t)$ e $y(t)$ hanno periodo comune T ,

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{\text{SdF}_T} \alpha X_k + \beta Y_k.$$

Si osservi che, come già osservato all'inizio del corso, la somma di due segnali periodici non è periodica se i rispettivi periodi non stanno in rapporto razionale tra loro. In tal caso la somma non ha uno sviluppo in serie di Fourier, anche se è ovviamente possibile scrivere una sommatoria di esponenziali combinando le due singole serie.

- **Simmetrie.** Valgono le proprietà

$$\begin{aligned} x(t) \text{ pari} &\implies b_k = 0 \quad \forall k \\ x(t) \text{ dispari} &\implies a_k = 0 \quad \forall k \end{aligned}$$

Inoltre, se un segnale con periodo fondamentale T viene sviluppato su un periodo multiplo mT , allora saranno non-nulli solo i coefficienti di ordine k multiplo di m (questo è in un certo senso ovvio se si pensa alla unicità della rappresentazione in serie e si confronta l'espansione ottenuta sul periodo T con quella sul periodo mT).

Infine, non è difficile mostrare che se il segnale ha simmetria antipodale, ovvero un periodo $p(t)$ di $x(t)$ si può scrivere come $p(t) = \tilde{p}(t) - \tilde{p}(t - T/2)$, allora i coefficienti di indice pari sono tutti nulli.

- **Identità di Parseval.** Vale la conservazione del prodotto scalare

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k Y_k^*$$

e, di conseguenza, della potenza

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2.$$

Questa relazione sarà chiarita nella sezione successiva.

8.5 Interpretazione Geometrica della Serie di Fourier

Lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale T -periodico $x(t)$ si può interpretare come una espansione del segnale in una base di esponenziali complessi, poiché questo è espresso come combinazione lineare (infinita) di esponenziali complessi della forma $e^{j2\pi \frac{k}{T}t}$. Possiamo osservare che tali segnali esponenziali sono tutti periodici di periodo T e, nello spazio dei segnali di potenza, possiamo calcolarne i prodotti scalari incrociati

$$\begin{aligned} \left\langle e^{j2\pi \frac{k}{T}t}, e^{j2\pi \frac{h}{T}t} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_u^{u+T} e^{j2\pi \frac{k}{T}t} e^{-j2\pi \frac{h}{T}t} dt \\ &= \begin{cases} 1, & k = h \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Questi esponenziali complessi formano cioè una base ortonormale. Risulta quindi chiaro¹³ che la serie di Fourier non è altro che la scrittura di un segnale in tale base, in cui i coefficienti X_k sono calcolati, come già visto in Sezione 2.5, proiettando il segnale sui vettori di base

$$X_k = \left\langle x(t), e^{j2\pi \frac{k}{T}t} \right\rangle.$$

Anche lo sviluppo in forma trigonometrica in equazione (8.5) può essere interpretato in modo simile. Si verifica infatti facilmente che i seni e i coseni usati nello sviluppo sono tutte funzioni ortogonali di norma $1/\sqrt{2}$, ovvero

$$\begin{aligned} \langle \cos(2\pi kt/T), \cos(2\pi ht/T) \rangle &= \begin{cases} 1/2, & k = h \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \\ \langle \sin(2\pi kt/T), \sin(2\pi ht/T) \rangle &= \begin{cases} 1/2, & k = h \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \\ \langle \cos(2\pi kt/T), \sin(2\pi ht/T) \rangle &= 0, \quad \forall k, h \end{aligned}$$

¹³In realtà stiamo qui sorvolando un punto importante, ovvero la completezza della base, la cui dimostrazione esula dagli scopi del corso.

Risulta a questo punto più chiara anche la relazione di Parseval enunciata nella sezione precedente.

Prima di chiudere la sezione, osserviamo che l'ortogonalità dei segnali esponenziali può essere riformulata anche nell'ambito dei segnali di energia. Consideriamo infatti i segnali di energia

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Quanto esposto in precedenza porta a stabilire che i segnali φ_k formano una base ortonormale. Applicando la relazione di Parseval per la trasformata di Fourier di segnali di energia, ne deduciamo che sono tra loro ortonormali anche i segnali trasformati $\psi_k = \mathcal{F}(\varphi_k)$, ovvero

$$\psi_k(t) = \sqrt{T} \text{sinc}\left(T\left(t - \frac{k}{T}\right)\right).$$

Questa importante proprietà tornerà a galla più avanti nella trattazione del campionamento.

8.6 Correlazione, convoluzione e densità spettrale di potenza

Abbiamo già mostrato in precedenza che, dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ periodici di periodo comune T , la loro cross-correlazione $\varphi_{xy}(\tau)$ è periodica di periodo T . Pertanto, può anch'essa essere sviluppata in serie di Fourier. I coefficienti si possono facilmente ricavare a partire dalle serie di Fourier dei singoli segnali $x(t)$ e $y(t)$. In particolare, se

$$x(t) \xrightarrow{\text{SdF}_T} X_k, \quad y(t) \xrightarrow{\text{SdF}_T} Y_k$$

allora vale la relazione

$$\varphi_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi \frac{k}{T} \tau}.$$

Questa proprietà può essere mostrata calcolando esplicitamente la cross-correlazione dei segnali scritti in serie di Fourier e integrando la doppia sommatoria termine a termine

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_u^{u+T} x^*(t) y(t+\tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_u^{u+T} \left(\sum_k X_k^* e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} \sum_h Y_h e^{j2\pi \frac{h}{T} (t+\tau)} \right) dt \\ &= \sum_k \sum_h X_k^* Y_h \frac{1}{T} \int_u^{u+T} e^{-j2\pi \frac{k}{T} t + j2\pi \frac{h}{T} (t+\tau)} dt \\ &= \sum_k X_k^* Y_k e^{j2\pi \frac{k}{T} \tau} \end{aligned}$$

in virtù dell'ortogonalità degli esponenziali $e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$ e $e^{j2\pi \frac{h}{T} t}$ per $h \neq k$.

L'autocorrelazione di un segnale $x(t)$ è ottenuta nel caso $y(t) = x(t)$ ed è quindi espressa in serie di Fourier nel seguente modo

$$\varphi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi \frac{k}{T} \tau}$$

Per segnali reali, $\varphi_x(\tau)$ è reale e pari ed è quindi esprimibile in serie di Fourier in forma trigonometrica di soli coseni

$$\varphi_x(\tau) = |X_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \cos \left(2\pi \frac{k}{T} \tau \right) .$$

In modo simile, sarà possibile descrivere la convoluzione circolare tra due segnali periodici $x(t)$ e $y(t)$ di periodo comune T mediante sviluppo in serie di Fourier:

$$x(t) \circledast y(t) = \sum_k X_k Y_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t} ,$$

che possiamo riassumere scrivendo

$$x(t) \circledast y(t) \xleftrightarrow{\text{SdF}_T} X_k Y_k$$

Si noti che questa proprietà è molto simile al teorema di convoluzione, con l'importante differenza che la convoluzione qui è circolare (non potrebbe essere diversamente, visto che i segnali sono periodici) e troviamo a destra un prodotto di coefficienti discreti anziché il prodotto di segnali a tempo continuo. Vedremo che questa proprietà si ritroverà più avanti sotto altra veste nella trattazione dei segnali a tempo continuo.

Infine, avendo già definito nelle sezioni precedenti la densità inter-spetttrale di potenza come la trasformata della cross-correlazione, possiamo esplicitarne l'espressione per segnali $x(t)$ e $y(t)$ periodici di periodo T trasformando termine a termine la serie di Fourier di $\varphi_{xy}(\tau)$, ottenendo

$$\Phi_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* Y_k \delta \left(f - \frac{k}{T} \right) .$$

Quando scegliamo $y(t) = x(t)$ abbiamo la densità spettrale di potenza del segnale $x(t)$ nella forma

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \delta \left(f - \frac{k}{T} \right) .$$

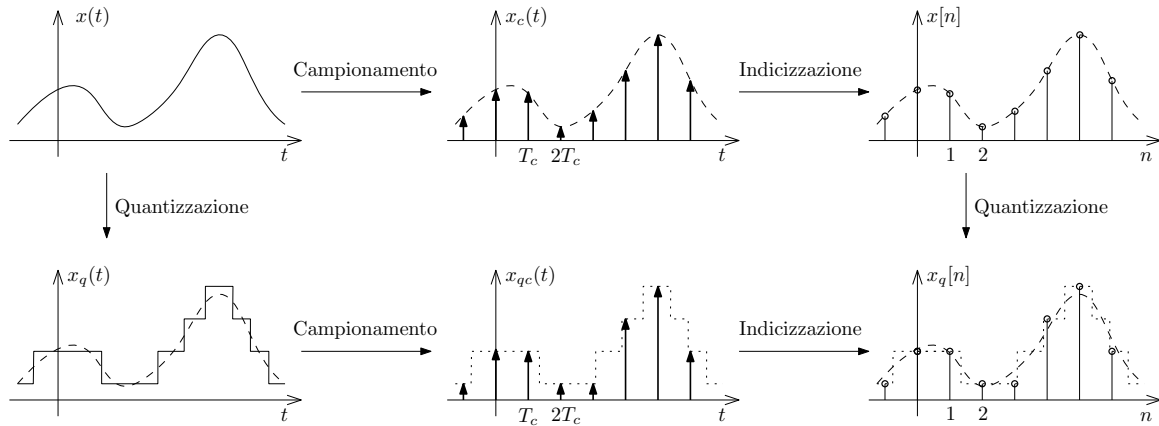
Ad esempio, se $x(t)$ è l'onda quadra considerata nell'Esempio 26 avremo

$$\Phi_x(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{A\Delta}{T} \right|^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{k\Delta}{T} \right) \delta \left(f - \frac{k}{T} \right)$$

9 Conversione Analogico/Numerica

Chiamiamo conversione analogico/digitale il processo di conversione di un segnale continuo sia nei tempi sia nelle ampiezze in un segnale discreto sia nei tempi sia nelle ampiezze. Una prima modellizzazione di questo processo vede coinvolte due operazioni fondamentali: *campionamento* e *quantizzazione*. In realtà queste due operazioni sono quasi sempre svolte congiuntamente dai dispositivi di conversione, ma è bene studiarle a livello teorico separatamente per capirne gli effetti.

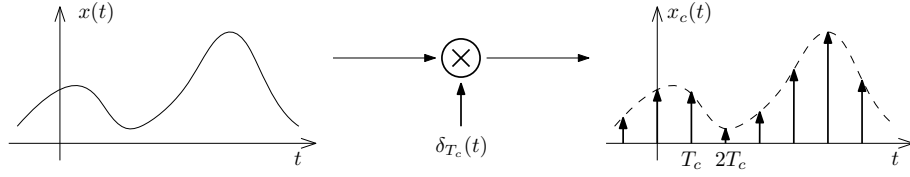
Nella figura sottostante mostriamo graficamente l'effetto di campionamento e quantizzazione. Per questioni puramente formali, aggiungiamo una operazione detta di *indicizzazione* che non ha altro scopo che trasformare un segnale a tempo continuo costituito da impulsi di Dirac in un segnale a tempo discreto. Vorremo infatti lavorare inizialmente con segnali campionati definiti ancora su un asse continuo dei tempi. Solo in una seconda fase passeremo a studiare segnali definiti su un asse discreto dei tempi.



Sono mostrate in figura due concatenazioni possibili delle operazioni considerate al fine di rendere evidente che l'ordine di quantizzazione e campionamento (con indicizzazione) è irrilevante al fine del risultato finale. Per questo motivo vedremo in questo corso l'applicazione di queste due operazioni elementari ai segnali continui studiando quindi quelle che sono nella figura la prima freccia orizzontale e la prima freccia verticale, che portano rispettivamente a $x_c(t)$ e $x_q(t)$. Riguardo alla ricostruzione del segnale originario, inoltre, vedremo che sotto opportune ipotesi è possibile ricostruire $x(t)$ a partire da $x_c(t)$. Non affronteremo invece il problema di ricostruire $x(t)$ a partire da $x_q(t)$, che è di natura più complessa.

9.1 Campionamento

Dato un segnale $x(t)$, definiamo una operazione di campionamento ideale con passo di campionamento T_c come una moltiplicazione di $x(t)$ per un pettine di impulsi $\delta_{T_c}(t)$.



Il segnale campionato $x_c(t)$ è quindi definito come

$$x_c(t) = x(t) \cdot \delta_{T_c}(t) \quad (9.1)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \delta(t - kT_c). \quad (9.2)$$

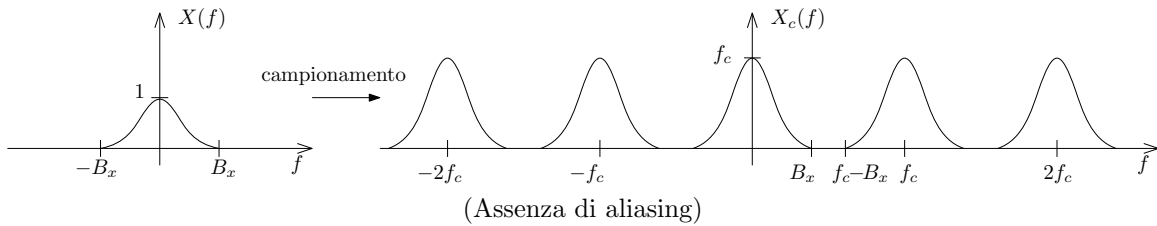
L'operazione di campionamento è una operazione lineare ma non è una operazione tempo-invariante. Il campionatore non è cioè un sistema LTI e non ha quindi senso parlare di risposta in frequenza del sistema. Tuttavia, è comunque nel dominio delle frequenze che il sistema è descritto in modo più chiaro. Applicando la trasformata di Fourier ad ambo i lati della equazione (9.1) abbiamo

$$\begin{aligned} X_c(f) &= X(f) * \frac{1}{T_c} \delta_{1/T_c}(f) \\ &= \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T_c}\right). \end{aligned}$$

Se chiamiamo $f_c = 1/T_c$ la *frequenza di campionamento* possiamo riscrivere equivalentemente il segnale come

$$X_c(f) = f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_c).$$

Lo spettro del segnale campionato è quindi ottenuto ripetendo periodicamente lo spettro del segnale originario attorno ai multipli di della frequenza di campionamento f_c e riscalando di un fattore f_c . Queste copie vengono dette *alias* dello spettro originario.



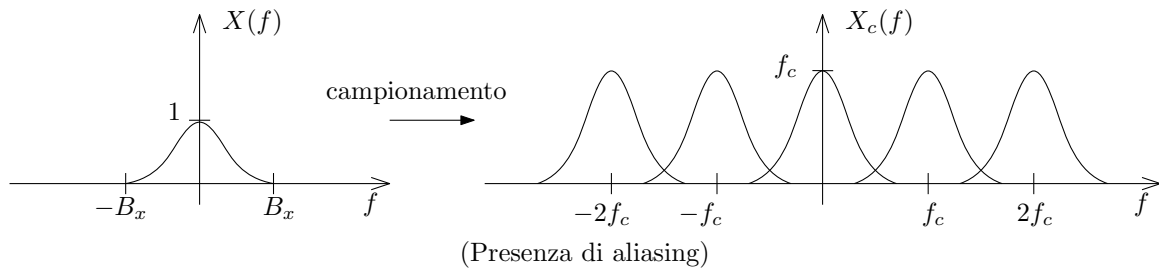
Si osserva subito un aspetto fondamentale della questione. Supponiamo che il segnale $x(t)$ sia un segnale passa-basso con banda B_x , ovvero con spettro non nullo solo nell'intervallo di frequenze $[-B_x, B_x]$. Le repliche spettrali che si producono nel dominio delle frequenze non si sovrappongono se la frequenza di campionamento f_c verifica $f_c > 2B_x$. In tal caso diciamo che siamo in assenza

di *aliasing*: nello spettro $X_c(f)$ è perfettamente riconoscibile lo spettro originario $X(f)$. Sarà così possibile recuperare $x(t)$ a partire da $x_c(t)$ applicando un filtro passa-basso ideale (con un guadagno di $1/f_c$); nel dominio delle frequenze, infatti, questa operazione cancella tutti gli alias dello spettro $X(f)$ e di conseguenza restituisce lo spettro originario. Siamo quindi giunti al seguente importante risultato.

Teorema del campionamento di Shannon¹⁴.

Un segnale $x(t)$ a banda limitata B_x è univocamente specificato dai suoi campioni presi a frequenza $f_c > 2B_x$.

Diremo quindi che un segnale è campionato “rispettando il teorema del campionamento” se $f_c > 2B_x$. Se, al contrario, la frequenza di campionamento f_c è minore o uguale a $2B_x$, non sarà possibile in generale dedurre la forma di $x(t)$ a partire dai campioni presi a frequenza f_c . In tal caso, infatti, le repliche spettrali dovute al campionamento si sovrappongono e nessun sistema può stabilire quale fosse la forma originaria dello spettro $X(f)$ (a meno di disporre di ulteriori informazioni a priori su $x(t)$). Si dice in questo caso che ci si trova in presenza di *aliasing*, come mostrato nella figura sottostante.



Nota: Se il segnale contiene componenti di potenza a frequenza B_x , non sarà in generale possibile ricostruire tali componenti a partire da un campionamento a frequenza $f_c = 2B_x$. Per notare ciò, basta considerare i segnali della forma $x(t) = A \sin(2\pi B_x t)$ per diversi valori di A che, essendo campionati negli zeri, risultano tutti indistinguibili tra loro e dal segnale nullo (si veda la discussione a pagina 95 per maggiori dettagli). Se però il segnale $x(t)$ non contiene componenti di potenza a tale frequenza (ad esempio se il segnale è di energia), allora sarà possibile ricostruire $x(t)$ anche dai suoi campioni presi a frequenza $f_c = 2B_x$. Per questo spesso, impropriamente, si dice che $2B_x$ è la frequenza minima di campionamento.

Dualità con la trasformata di segnali periodici. Si osservi la dualità tra la trattazione del campionamento e quella della trasformata di Fourier di segnali periodici. L'espressione di $X_c(f)$ ha la stessa forma del segnale periodico generico descritto in equazione (1.1), dove $X(f)$ gioca il ruolo dell'impulso $p(t)$. Come già detto in quel contesto, diversi impulsi $p(t)$ portano, nell'equazione (1.1), allo stesso segnale periodico. Nel contesto del campionamento questo implica che in generale $X_c(f)$ non permette di stabilire univocamente $X(f)$ se non si hanno informazioni a priori; l'ipotesi che lo spettro $X(f)$ avesse supporto contenuto in $[-B_x, B_x]$, con $B_x < f_c/2$, è appunto una infor-

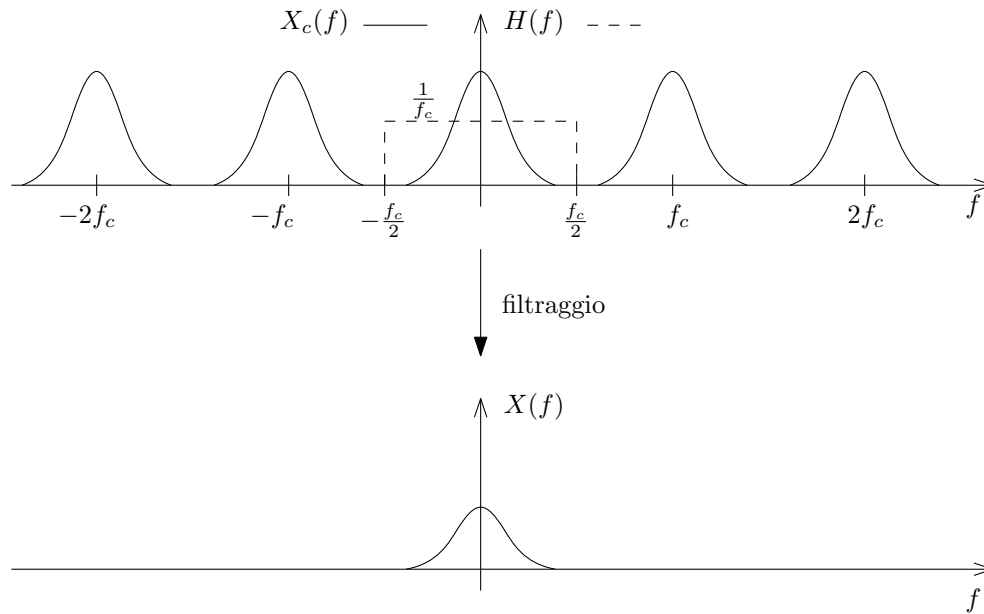
¹⁴Il teorema è spesso attribuito a C. E. Shannon in quanto egli lo rese particolarmente noto in un importante lavoro del 1949. Shannon stesso, tuttavia, attribuisce la paternità del risultato ad altri. È a volte indicato come teorema di Whittaker–Nyquist–Kotelnikov–Shannon.

mazione a priori che basta ad identificarlo univocamente una volta dato $X_c(f)$. Si può spingere oltre questa osservazione; studiando la trasformata di Fourier di un segnale periodico generico nella forma dell'equazione (1.1) abbiamo scoperto, nella Sezione 8.2, che le $p(t)$ ammissibili sono accomunate dal portare agli stessi valori di $P(k/T)$. Nel contesto del campionamento ritroviamo lo stesso principio ma espresso con tempi e frequenze a ruoli invertiti (e con T_c al posto di T): i possibili spettri $X(f)$ che portano ad una stessa $X_c(f)$ sono tali che i corrispondenti segnali nei tempi $x(t)$ prendono gli stessi valori nei multipli di T_c , ovvero sono indistinguibili a valle del campionamento, come ovviamente deve essere!

Filtro di Ricostruzione ideale. Come già osservato, se un segnale $x_c(t)$ è ottenuto campionando un segnale a banda limitata $x(t)$ con frequenza $f_c > 2B_x$, sarà possibile recuperare $x(t)$ esattamente applicando un filtraggio passa basso a $x(t)$. Il filtro ideale da applicare avrà risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{1}{f_c} \text{rect} \left(\frac{f}{f_c} \right).$$

L'effetto del filtraggio nel dominio delle frequenze è rappresentato nella seguente figura.



Nel dominio del tempo, l'interpolatore ideale sarà descritto dalla risposta all'impulso (ottenuta antitrasformando la $H(f)$)

$$\begin{aligned} h(t) &= \text{sinc}(f_c t) \\ &= \text{sinc} \left(\frac{t}{T_c} \right). \end{aligned}$$

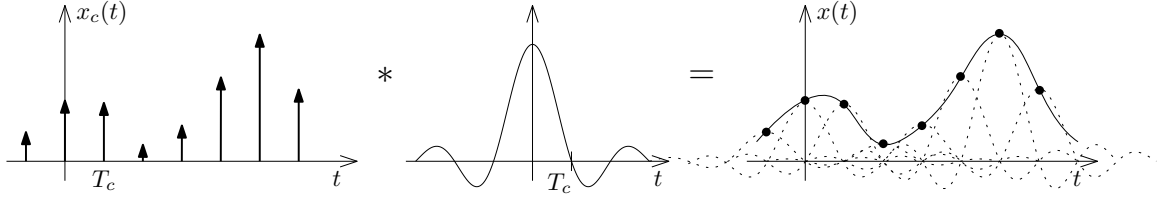
Applicando tale filtro a $x_c(t)$ avremo quindi $x(t)$ ricostruito secondo l'espressione

$$\begin{aligned} x(t) &= x_c(t) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \delta(t - kT_c) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right) \end{aligned}$$

e, grazie alla distributività della convoluzione sulla somma, potremo scrivere

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - k\right). \quad (9.3)$$

Si noti che l'espressione ottenuta descrive il segnale $x(t)$ su tutti gli istanti reali t a partire dai suoi valori nei multipli di T_c , e fornisce quindi una descrizione costruttiva del teorema del campionamento. La figura sottostante mostra il risultato dell'operazione di filtraggio nel tempo. Si osservi che in un punto generico di campionamento kT_c uno solo dei $\text{sinc}(\cdot)$ della sommatoria prende valore 1 (quello centrato proprio in kT_c), mentre tutti gli altri sono nulli.



△ In realtà il filtro di ricostruzione ideale non è in generale unico. Se è rispettata la condizione $f_c > 2B_x$, è possibile ricostruire il segnale originario utilizzando un filtro con risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{1}{f_c} \text{rect}\left(\frac{f}{2F}\right)$$

per qualsiasi valore di F nell'intervallo $B_x < F < f_c - B_x$ (e se non ci sono componenti di potenza a frequenza B_x , anche con $F = B_x$). È infatti evidente dal grafico di $X_c(f)$ che l'effetto del filtraggio sarà lo stesso per tutti questi valori di F . La scelta $F = f_c/2$ gode però di una piacevole proprietà; rende particolarmente facile l'interpretazione del campionamento seguito da filtro di ricostruzione ideale, ovvero di fatto l'espressione (9.3), come una espansione su una base di sinc traslati. Descriviamo di seguito questo aspetto.

Base di sinc traslati. Consideriamo, riscalandoli solo di un coefficiente opportuno, i segnali che compaiono come funzioni elementari nella sommatoria al lato destro dell'espressione (9.3), ovvero

$$v_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T_c}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - k\right).$$

Mostriamo anzitutto che questi segnali sono ortonormali. Calcolando i prodotti scalari incrociati abbiamo infatti

$$\begin{aligned}\langle v_k(t), v_h(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{T_c}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - k\right) \frac{1}{\sqrt{T_c}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - h\right) dt \\ &= \frac{1}{T_c} \varphi_{\operatorname{sinc}(t/T_c)}(\tau) \Big|_{\tau=(k-h)T_c}.\end{aligned}$$

Possiamo calcolare l'autocorrelazione di $\operatorname{sinc}(t/T_c)$ antitrasformando la densità spettrale di energia, che ci fornisce

$$\begin{aligned}\varphi_{\operatorname{sinc}(t/T_c)}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}(|T_c \operatorname{rect}(T_c f)|^2) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(T_c^2 \operatorname{rect}(T_c f)) \\ &= T_c \operatorname{sinc}(\tau/T_c).\end{aligned}$$

Otteniamo dunque

$$\begin{aligned}\langle v_k(t), v_h(t) \rangle &= \operatorname{sinc}(k - h) \\ &= \begin{cases} 1, & k = h \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}\end{aligned}$$

il che conferma che i segnali sono ortonormali. Osserviamo che in realtà questo risultato è già stato ottenuto, solamente con una notazione differente, nell'ultima parte della Sezione 8.5. Possiamo ora chiederci quale sia l'approssimazione ottima di un segnale $x(t)$ a banda $B_x < f_c/2$ nello spazio delle v_k , ovvero tramite una sommatoria della forma

$$\hat{x}(t) = \sum_k \alpha_k v_k(t). \quad (9.4)$$

Poiché la base è ortonormale, si ottiene

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \langle x(t), v_k(t) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{T_c}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - k\right) dt.\end{aligned}$$

Usando la relazione di Parseval possiamo portare il prodotto scalare in frequenza ottenendo

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \sqrt{T_c} \operatorname{rect}(T_c f)^* e^{j2\pi k T_c f} df \quad (9.5)$$

$$= \sqrt{T_c} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi k T_c f} df \quad (9.6)$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che, avendo $x(t)$ banda $B_x < f_c/2$, la moltiplicazione per il $\operatorname{rect}(\cdot)$ è irrilevante. Ma l'integrale ottenuto è l'antitrasformata di $X(f)$ calcolata in kT_c , ovvero $x(kT_c)$. Pertanto si ha

$$\alpha_k = x(kT_c) \sqrt{T_c}$$

e l'espansione ottenuta è (si confronti con l'equazione (9.3))

$$\hat{x}(t) = \sum_k x(kT_c) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - k\right).$$

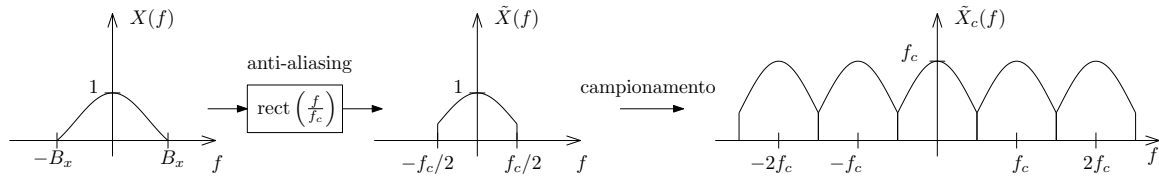
Resta da stabilire che in realtà $\hat{x}(t)$ è proprio $x(t)$. Passando al dominio di Fourier¹⁵ (oppure svolgendo i calcoli interamente in quel dominio) si ottiene

$$\begin{aligned}\hat{X}(f) &= \sum_k x(kT_c) T_c \operatorname{rect}(T_c f) e^{-j2\pi k T_c f} \\ &= \sum_k \frac{1}{f_c} x\left(\frac{k}{f_c}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{f}{f_c}\right) e^{-j2\pi \frac{k}{f_c} f} \\ &= \left(\sum_k \frac{1}{f_c} x\left(\frac{k}{f_c}\right) e^{-j2\pi \frac{k}{f_c} f} \right) \operatorname{rect}\left(\frac{f}{f_c}\right).\end{aligned}$$

Ora è possibile osservare che la sommatoria all'interno della parentesi è di fatto l'espansione in serie di Fourier della replica periodica di $X(f)$. A valle del prodotto con $\operatorname{rect}(f/f_c)$, non resta che il periodo centrale, ovvero $X(f)$ stessa. Pertanto $\hat{X}(f) = X(f)$ e dunque $\hat{x}(t) = x(t)$.

Questa derivazione dell'espressione (9.3) evidenzia di nuovo la dualità tra sviluppo in Serie di Fourier e campionamento seguito da interpolazione. I campioni di un segnale a banda limitata coincidono essenzialmente con i coefficienti di Fourier della (versione periodicizzata della) sua trasformata $X(f)$.

Filtro anti-aliasing. Abbiamo già chiarito che il campionamento di un segnale $x(t)$ ad una frequenza $f_c \leq 2B_x$ provoca in generale aliasing e, di conseguenza, non è possibile ricostruire il segnale originario a partire dai campioni. In tal caso, ci si può chiedere cosa succede se l'interpolatore “ideale” con banda passante $|f| \leq f_c/2$ viene comunque usato per interpolare i campioni. Le componenti del segnale a frequenze $f > f_c/2$ ovviamente non possono essere ricostruite (vengono appunto filtrate dall'interpolatore ideale). Anzi, a causa dell'aliasing rientrano nell'intervallo $|f| \leq f_c/2$ e vanno di conseguenza a creare errori anche nella ricostruzione di componenti nella banda $[-f_c/2, f_c/2]$. È allora conveniente eliminare le componenti a frequenza $|f| > f_c/2$ all'origine ed evitare che vadano a far danni sulle componenti a frequenze minori. Il segnale $x(t)$ viene quindi passato attraverso un filtraggio passa-basso, detto proprio *filtro anti-aliasing*, prima di essere campionato. La figura seguente rappresenta graficamente l'operazione descritta.



È possibile dare una spiegazione più rigorosa dell'utilità del filtro anti-aliasing ripercorrendo quanto visto relativamente alla base di sinc traslati. Se riprendiamo l'equazione (9.4) e la consideriamo

¹⁵Di fatto sfruttiamo la completezza della base di Fourier, di cui non avevamo comunque fornito i dettagli nemmeno durante la trattazione delle Serie di Fourier.

ora per il caso in cui $x(t)$ è un segnale generico con banda $B_x \geq f_c/2$, possiamo ripercorrere tutti i passaggi visti in quel contesto prestando attenzione alle necessarie variazioni. Si giunge così a scoprire che l'equazione (9.6) non è più valida ed è necessario fermarsi all'equazione (9.5). Ciò non impedisce comunque di portare avanti il resto dell'argomentazione, che porta in questa variante a stabilire che i coefficienti α_k ottimi non sono più ottenuti campionando il segnale $x(t)$ ma la sua versione filtrata tramite, appunto, un filtro anti-aliasing.

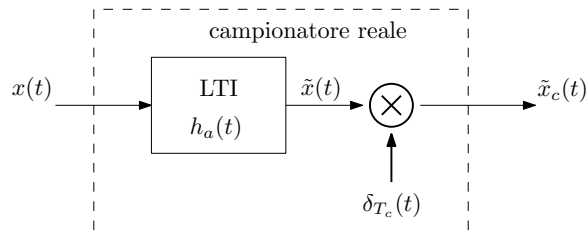
Campionamento reale. Nella realtà dei fatti, non è possibile costruire un sistema di campionamento ideale. Il segnale viene acquisito tramite dispositivi che, per poterlo “campionare”, devono di fatto misurarlo su un intervallo di tempo finito non nullo (seppure breve). È ragionevole assumere che il valore misurato da un dispositivo all'istante kT_c , chiamiamolo $\tilde{x}(kT_c)$, non sia esattamente $x(kT_c)$ ma sia invece una media pesata di $x(t)$ nell'intorno di kT_c . Si può assumere cioè che esista una funzione $h_a(t)$ tale che

$$\begin{aligned}\tilde{x}(kT_c) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_a(kT_c - \tau) d\tau \\ &= (x * h_a)(t) \big|_{t=kT_c}\end{aligned}$$

A titolo di esempio, se $h_a(t) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}(t/\Delta)$, si avrà

$$\tilde{x}(kT_c) = \frac{1}{\Delta} \int_{kT_c - \Delta/2}^{kT_c + \Delta/2} x(\tau) d\tau.$$

Pertanto, potremo modellizzare un campionatore reale come la concatenazione di un filtro LTI (passa-basso) seguito da un campionatore ideale come mostrato nella figura sottostante.



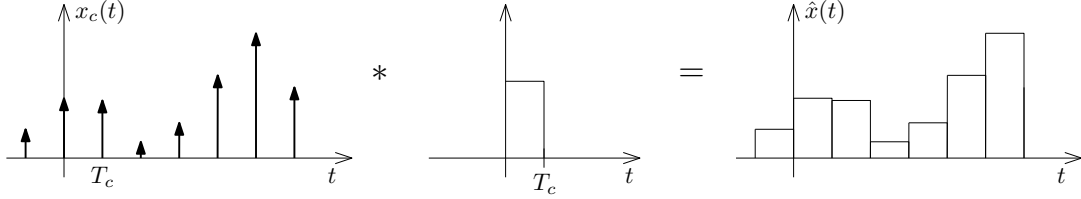
Si osservi che nel dominio delle frequenze avremo $\tilde{X}(f) = X(f)H_a(f)$ e la banda del segnale non aumenta a causa del filtro h_a , per cui ai fini del rispetto del teorema del campionamento il filtro h_a non pone problemi.

Interpolatori reali. Così come non esistono campionatori reali, non esistono nemmeno interpolatori ideali. In generale, anziché usare come filtro di interpolazione un filtro passa-basso ideale, ci si deve accontentare di filtri passa-basso non ideali. Vediamo due esempi che in realtà si discostano molto dall'essere ideali, ma per i quali è semplice studiare l'effetto.

Esempio 27 (Sample and Hold) Consideriamo il caso in cui il filtro di interpolazione è descritto da una risposta all'impulso

$$h(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_c/2}{T_c}\right).$$

Il risultato della convoluzione, mostrato nella seguente figura, è un segnale costante a tratti in cui il valore misurato nell'istante kT_c viene mantenuto fino all'istante $(k+1)T_c$ (da cui appunto il nome sample and hold).



La risposta in frequenza del sistema è

$$H(f) = \frac{1}{f_c} \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{f_c}\right) e^{-j\pi f/f_c}$$

e la risposta in ampiezza è dunque

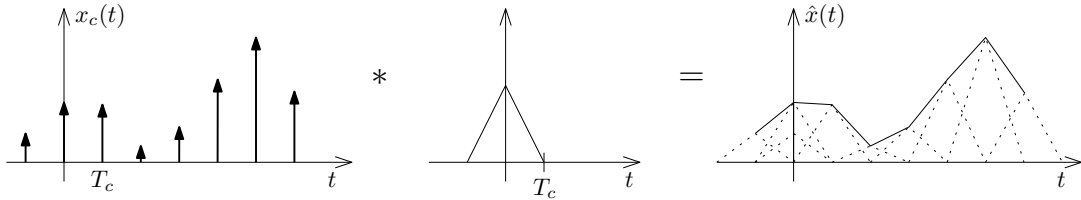
$$|H(f)| = \frac{1}{f_c} |\operatorname{sinc}(f_c f)|$$

Si osservi che gli zeri sono proprio in prossimità dei multipli di f_c . Le repliche spettrali sono attenuate ma molto debolmente.

Esempio 28 (Interpolatore lineare) Consideriamo il caso in cui il filtro di interpolazione è descritto da una risposta all'impulso

$$h(t) = \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T_c}\right).$$

Il risultato della convoluzione, mostrato nella seguente figura, è un segnale lineare a tratti; in ogni intervallo della forma $[kT_c, (k+1)T_c]$ il segnale varia linearmente tra il valore preso all'istante kT_c e il valore preso all'istante $(k+1)T_c$.



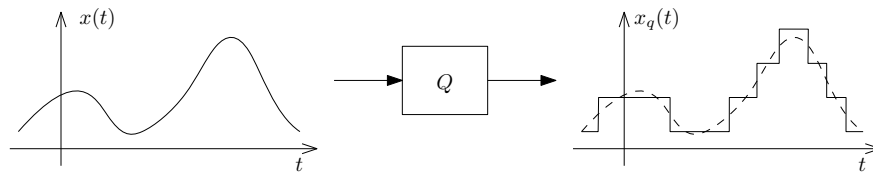
La risposta in frequenza del sistema è

$$H(f) = \frac{1}{f_c} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{f_c}\right)$$

Si osservi che gli zeri sono anche in questo caso in prossimità dei multipli di f_c ma le repliche spettrali sono attenuate in modo maggiore.

9.2 Quantizzazione

Consideriamo ora l'operazione di quantizzazione, ovvero la conversione di un segnale a valori continui in un segnale a valori discreti. Nella seguente figura è rappresentato un esempio di quantizzazione di un segnale generico.



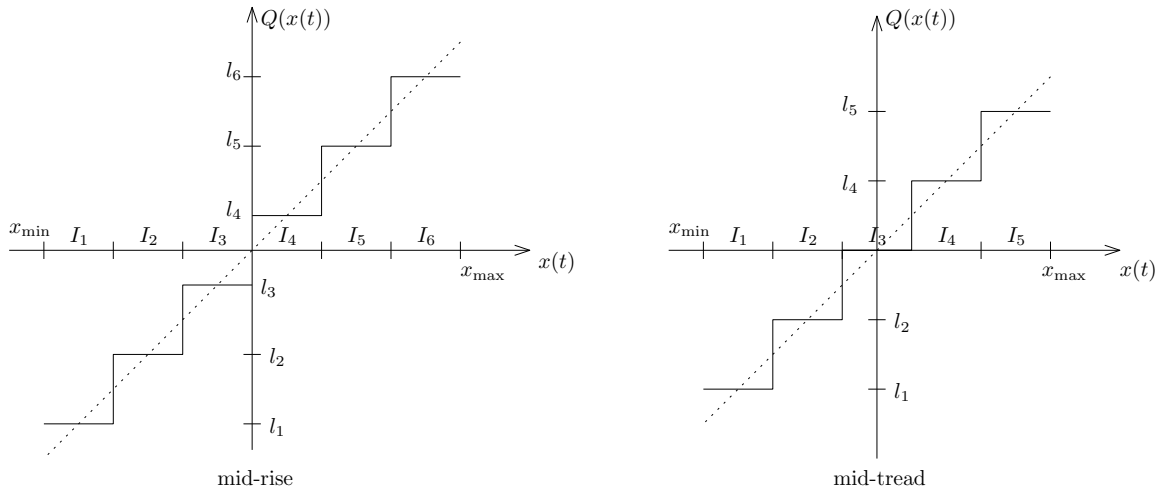
Il segnale quantizzato è quindi

$$x_q(t) = Q(x(t)).$$

Il sistema quantizzatore è un sistema istantaneo (non lineare) e può essere descritto come una funzione da \mathbb{R} in \mathbb{R} ; se l'ingresso all'istante t_0 è $x(t_0)$, l'uscita sarà $Q(x(t_0))$. La funzione Q è una funzione costante a tratti. Se x_{\min} è il valore minimo ammesso in ingresso e x_{\max} è il valore massimo, l'intervallo $[x_{\min}, x_{\max}]$ viene diviso in L intervalli di quantizzazione I_1, I_2, \dots, I_L e la funzione Q è definita da

$$Q(x) = l_k \quad \text{se } x \in I_k.$$

I valori l_k , $k = 1, \dots, L$ sono detto *livelli di ricostruzione*, mentre i punti estremi degli intervalli I_k sono detti *soglie di quantizzazione*. Nella figura sottostante riportiamo due esempi di quantizzatori. Tipicamente, il valore nullo è una soglia di quantizzazione (quantizzatore detto mid-rise), oppure un livello di ricostruzione (quantizzatore mid-tread).



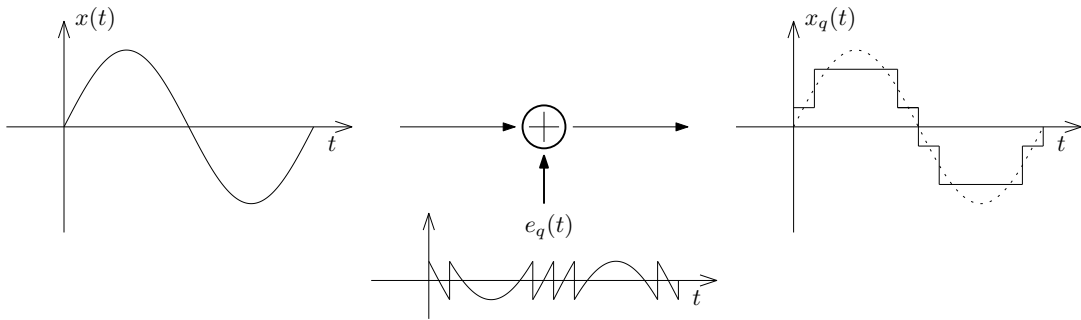
Nel caso più generale, gli intervalli di quantizzazione possono avere ampiezze diverse e il livello di ricostruzione l_k può essere un qualunque punto dell'intervallo I_k . La dinamica del quantizzatore $[x_{\max} - x_{\min}]$ è spesso indicata con V_{pp} (tensione di picco-picco).

Quantizzatore uniforme. Viene detto *uniforme* un quantizzatore in cui tutti gli intervalli I_k hanno la stessa lunghezza, che indicheremo con la lettera Δ e che chiameremo *passo di quantizzazione*. Se non diversamente specificato, assumeremo qui anche che i livelli di ricostruzione siano al centro dei rispettivi intervalli. I due esempi mostrati nella figura precedente sono pertanto di quantizzatori uniformi.

Per motivi che in questa sede non è possibile spiegare in modo molto approfondito, è abitudine modellizzare l'effetto del quantizzatore tramite un modello di disturbo additivo sul segnale. Si definisce *errore (o rumore) di quantizzazione* la quantità

$$e_q(t) = x_q(t) - x(t)$$

e si rappresenta quindi il sistema quantizzatore tramite un sommatore. Nella figura sottostante è riportato un esempio di quantizzazione uniforme a quattro livelli di una sinusoide.



Modelli di disturbo additivi hanno tipicamente senso quando si possa assumere che la differenza tra l'uscita e il segnale ingresso sia “indipendente” o almeno “incorrelata” dall'ingresso stesso (in un senso preciso, statistico, che qui non possiamo approfondire). Nel caso in questione questo non succede in modo esatto ma il modello tende ad essere in ogni caso appropriato nel regime di approssimazione di quantizzazione a tanti livelli, che descriviamo di seguito.

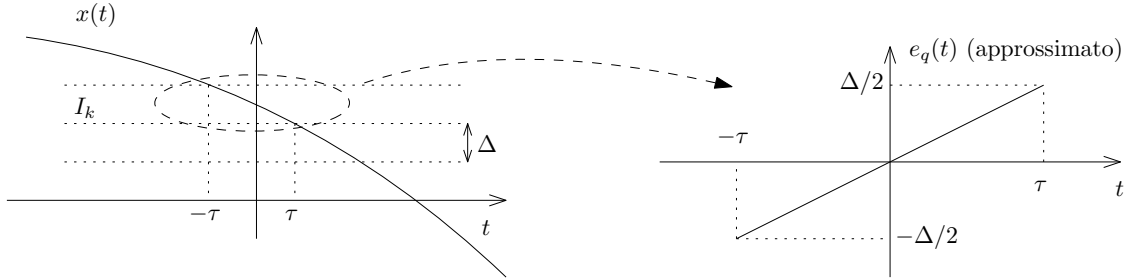
Approssimazione di quantizzazione a tanti livelli. Consideriamo un quantizzatore uniforme con passo di quantizzazione Δ e livello di ricostruzione al centro degli intervalli. Nella stragrande maggioranza di contesti reali il segnale $x(t)$ ha tipicamente un comportamento oscillante irregolare che lo porta ad attraversare abbastanza rapidamente vari intervalli di quantizzazione su ogni fronte di salita e discesa. Sotto tali ipotesi, si può assumere che il segnale $x(t)$ sia ben approssimato da un tratto di retta nell'intervallo di tempo in cui attraversa ogni intervallo di quantizzazione. Supponiamo senza perdita di generalità che $x(t)$ attraversi l'intervallo di quantizzazione k -esimo, su un fronte di discesa, nell'intervallo di tempo che va da $-\tau$ a τ . La forma d'onda del segnale $x(t)$ è ben approssimata in questo intervallo da una funzione lineare (affine)

$$x(t) \approx l_k - \frac{1}{2}\Delta \frac{t}{\tau}, \quad t \in [-\tau, \tau]$$

e l'errore di approssimazione è ben approssimato dall'espressione

$$e_q(t) \approx \frac{1}{2}\Delta \frac{t}{\tau}, \quad t \in [-\tau, \tau]$$

Nella figura sottostante è rappresentata questa situazione.



La potenza media del segnale $e_q(t)$ sull'intervallo $[-\tau, \tau]$ è data da

$$\begin{aligned} P_{e_q}^{[-\tau, \tau]} &\approx \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \left| \frac{1}{2}\Delta \frac{t}{\tau} \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\tau} \frac{\Delta^2}{12\tau^2} t^3 \Big|_{-\tau}^{\tau} \\ &= \frac{\Delta^2}{12}. \end{aligned}$$

Es. Poiché questo valore non dipende da τ e nemmeno dall'indice k , questa sarà la potenza media del segnale errore di quantizzazione su tutto l'asse reale (o sull'intervallo su cui è definito $x(t)$). Possiamo

quindi affermare che nell'approssimazione di quantizzazione a tanti livelli, la potenza dell'errore vale

$$P_{e_q} \approx \frac{\Delta^2}{12}.$$

Rapporto segnale-rumore. Spesso si preferisce misurare l'entità del rumore di quantizzazione calcolando il rapporto segnale-rumore (SNR, per Signal to Noise Ratio), definito come

$$\text{SNR} = \frac{P_x}{P_{e_q}}$$

o, se misurato in dB,

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_x}{P_{e_q}}.$$

Se consideriamo ora il numero di bit necessari per la memorizzazione di un valore numerico, notiamo che un quantizzatore uniforme a b bit avrà $L = 2^b$ possibili intervalli di quantizzazione e pertanto un passo di quantizzazione $\Delta = V_{\text{pp}}/L = V_{\text{pp}} \cdot 2^{-b}$. Combinando queste due proprietà avremo

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{\text{dB}} &= 10 \log_{10} \frac{P_x}{P_{e_q}} \\ &\approx 10 \log_{10} \left(P_x \frac{12 \cdot 2^{2b}}{V_{\text{pp}}^2} \right) \\ &= 10 \log_{10} \frac{12 P_x}{V_{\text{pp}}^2} + 10 \cdot 2b \cdot \log_{10} 2 \\ &\approx 10.79 - 10 \log_{10} \frac{V_{\text{pp}}^2}{P_x} + 6.02 b. \end{aligned}$$

△ Vediamo quindi che ogni bit aggiunto in quantizzazione migliora il rapporto segnale rumore di circa 6 dB. Si noti che il termine V_{pp}^2/P_x è invariante per fattori di scala del segnale $x(t)$ (cioè dipende solo dalla sua “forma”, non dall'ampiezza). Nel caso di una sinusoide di ampiezza A , ad esempio avremo $V_{\text{pp}} = 2A$ e $P_x = A^2/2$, che porta a $V_{\text{pp}}^2/P_x = 8$, indipendentemente da A . Per segnali sinusoidali abbiamo così

$$\text{SNR}_{\text{dB}} \approx 1.76 + 6.02 b.$$

10 Segnali a Tempo Discreto

10.1 Segnali e Proprietà Elementari

In questa sezione iniziamo una trattazione più dettagliata dei segnali e dei sistemi a tempo discreto. Definiamo un segnale a tempo discreto x come una funzione che mappa numeri interi in numeri complessi, formalmente

$$\begin{aligned}x &: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ n \in \mathbb{Z} &\mapsto x[n] \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

Useremo anche in questo contesto una notazione impropria (ma comoda) scrivendo $x[n]$ per indicare il segnale nella sua interezza e non necessariamente il valore in un punto n prefissato. Racchiuderemo l'argomento tra parentesi quadre per distinguere segnali a tempo discreto da segnali a tempo continuo; nel momento in cui l'argomento non fosse espresso sarà desumibile dal contesto il tipo di segnale a cui ci si riferisce.

Nel percorso che abbiamo seguito, sarà utile ricordare che il segnale a tempo discreto $x[n]$ è in molti casi ottenuto tramite campionamento con un passo T_c di un segnale analogico $x(t)$; vale cioè la relazione

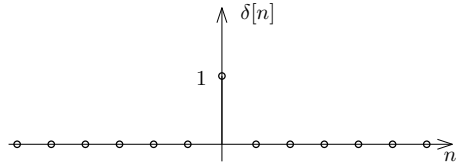
$$x[n] = x(nT_c).$$

Si noti che con l'indicizzazione si “perde traccia” del passo di campionamento T_c . Analogamente (anzi, di conseguenza) vedremo che qualcosa di simile accade per le frequenze, per cui il contenuto in frequenza di $x(t)$ sarà riconducibile al “contenuto in frequenza” di $x[n]$ (che spiegheremo in dettaglio più avanti) solo a patto di conoscere il passo di campionamento T_c che lega i due segnali.

Elenchiamo alcuni segnali elementari che useremo in modo ricorrente.

Esempio 29 (Impulso elementare) Chiamiamo $\delta[n]$ il segnale definito da

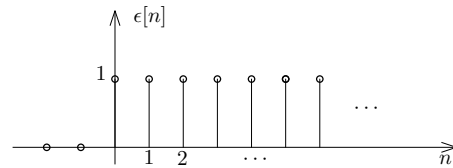
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



Questo segnale svolge un ruolo analogo all'impulso di Dirac $\delta(t)$ ma è significativamente più semplice, poiché nell'ambito dei segnali a tempo discreto $\delta[n]$ è un segnale del tutto “normale” (classico, non serve qui introdurre distribuzioni).

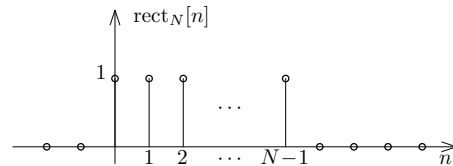
Esempio 30 (Gradino) Chiamiamo gradino $\epsilon[n]$ il segnale definito da

$$\epsilon[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



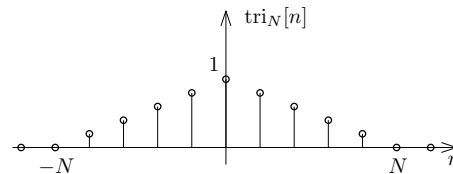
Esempio 31 (Rettangolo) Chiamiamo $\text{rect}_N[n]$ il segnale definito da

$$\text{rect}_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Esempio 32 (Triangolo) Chiamiamo $\text{tri}_N[n]$ il segnale definito da

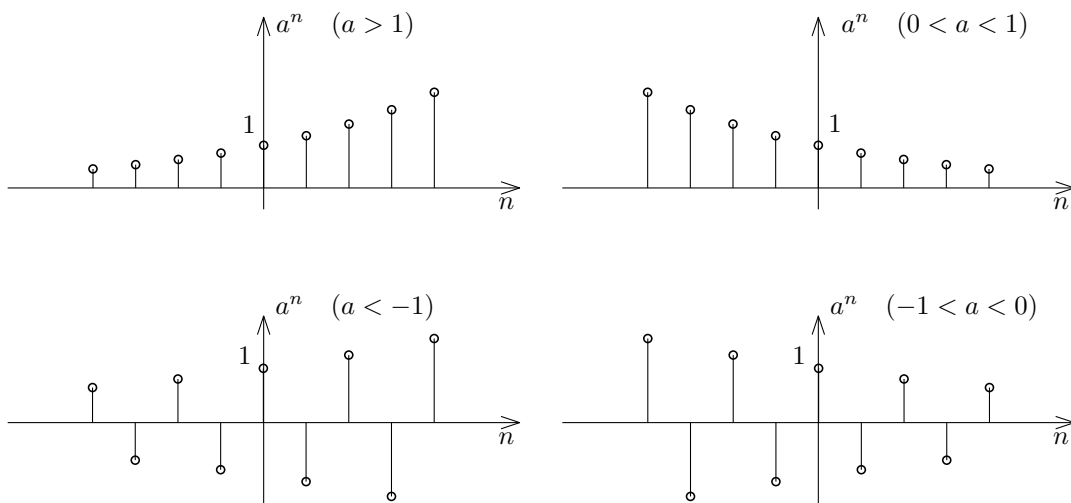
$$\text{tri}_N[n] = \begin{cases} 1 - |n|, & |n| \leq N \\ 0, & |n| > N \end{cases}$$



Esempio 33 (Esponenziali) Useremo segnali esponenziali, ovvero della forma

$$x[n] = a^n.$$

Riportiamo nella figura sottostante quattro casi significativi per valori reali di a .



Un caso particolarmente importante si ha per a complesso e della forma $e^{j2\pi f_0}$, che merita una discussione a parte e che verrà analizzato in dettaglio più avanti.

Anche i segnali a tempo discreto possono essere classificati in base a proprietà del tutto simili a quanto visto per il tempo continuo. Citiamo solo le principali.

- **Durata.** Diciamo che $x[n]$ ha durata d_x se per un certo n_0 $x[n_0] \neq 0$, $x[n_0 + d_x - 1] \neq 0$ e $x[n] = 0$ per $n < n_0$ e per $n \geq n_0 + d_x$. Ad esempio, $\text{rect}_N[n]$ ha durata N e $\text{tri}_N[n]$ ha durata $2N - 1$.
- **Causalità.** Diciamo che $x[n]$ è un segnale
 - *causale* se $x[n] = 0, \forall n < 0$;
 - *anticausale* se $x[n] = 0, \forall n \geq 0$;
 - *non causale* altrimenti (ovvero esistono $n_1 < 0$, $n_2 \geq 0$ tali che $x[n_1] \neq 0$ e $x[n_2] \neq 0$).

- **Periodicità.** Diciamo che $x[n]$ è periodico di periodo $N > 0$ se

$$x[n + N] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Il minimo $N > 0$ per cui vale la proprietà sopra enunciata è detto periodo fondamentale. Osserviamo che in questo caso un segnale costante è un segnale periodico con periodo fondamentale pari a 1.

- **Energia, potenza, valor medio.** Definiamo l'energia di un segnale $x[n]$ come

$$W_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2,$$

la potenza come

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

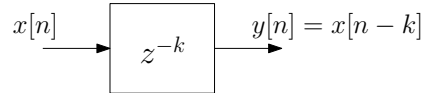
e il valor medio

$$\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N x[n].$$

10.2 Operazioni Elementari

Molte delle operazioni che abbiamo definito per segnali a tempo continuo hanno un ovvio equivalente per segnali a tempo discreto, come la somma tra segnali, la moltiplicazione per uno scalare, la moltiplicazione tra segnali. Operazioni sull'asse dei tempi, invece, vanno considerate con cautela. Ad esempio, non ha senso definire un cambio scala nei tempi, in quanto non possiamo definire un segnale della forma $y[n] = x[an]$ per a non intero. Vediamo però due operazioni che cercano di rimpiazzare il cambio scala, tenendo conto delle limitazioni che si hanno a tempo discreto.

- **Ribaltamento nei tempi.** Come nel caso continuo, il segnale $y[n] = x[-n]$ corrisponde a un ribaltamento orizzontale del segnale $x[n]$.
- **Traslazione nei tempi.** Dato un segnale $x[n]$ e un intero k , il segnale $y[n] = x[n - k]$ corrisponde a una traslazione sull'asse dei tempi del segnale $x[n]$. Per segnali a tempo discreto introduciamo il termine *ritardo elementare* per una traslazione a destra corrispondente a $k = 1$. Graficamente rappresentiamo un ritardo di k campioni come segue

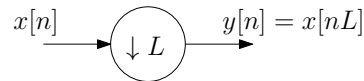


La notazione z^{-k} può essere presa qui come una semplice convenzione, risulterà chiaro nei corsi successivi, durante lo studio della Trasformata Zeta, il motivo di tale notazione.

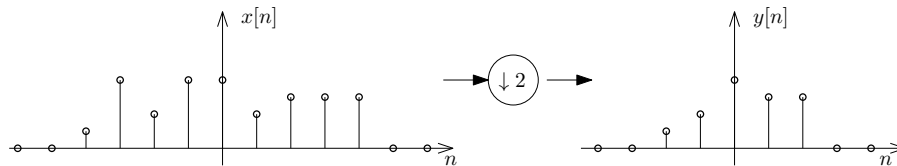
- **Decimazione.** Dato un segnale $x[n]$ diremo che $y[n]$ è ottenuto per decimazione di un fattore L , $L \geq 2$ intero, se vale la relazione

$$y[n] = x[nL]$$

Si noti che nell'operazione di decimazione vengono persi tutti i valori del segnale $x[n]$ in punti non multipli di L . Graficamente descriviamo questa operazione come mostrato in figura



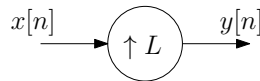
Nella seguente figura vediamo un esempio di decimazione di un fattore 2



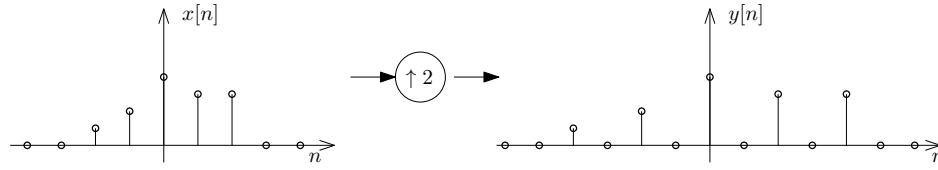
- **Interpolazione (o Zero-Interleaving).** Dato un segnale $x[n]$ diremo che $y[n]$ è ottenuto per interpolazione (o zero-interleaving) di un fattore L , $L \geq 2$ intero, se vale la relazione

$$y[n] = \begin{cases} x[n/L], & n \text{ multiplo di } L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Graficamente descriviamo questa operazione come mostrato in figura



Nella seguente figura vediamo un esempio di interpolazione di un fattore 2.



Si noti che una interpolazione seguita da una decimazione di pari fattore porta al segnale di partenza, mentre una decimazione seguita da una interpolazione non restituisce in generale il segnale originario.

10.3 Convoluzione

Dati due segnali $x[n]$ e $y[n]$ definiamo la loro *convoluzione lineare* come¹⁶

$$(x * y)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]y[n - k].$$

△

Useremo anche in questo caso, spesso, la notazione impropria ma comoda $x[n] * y[n]$ per indicare questa operazione. La convoluzione a tempo discreto gode delle stesse proprietà già viste per la convoluzione a tempo continuo, ovvero commutatività, associatività, distributività rispetto alla somma. Evitiamo le dimostrazioni di queste proprietà poiché sono del tutto simili a quelle viste nel caso continuo. Inoltre, anche nel caso discreto il segnale $\delta[n]$ è il neutro per la convoluzione poiché, come è facile verificare, vale per ogni segnale $x[n]$ la relazione

$$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]\delta[n - k].$$

Come per il caso dei segnali continui, il calcolo della convoluzione prevede il ribaltamento di un segnale sull'asse dei tempi k seguito da una traslazione a destra di n campioni e infine una somma dei prodotti termine a termine dei segnali sull'asse k . Sebbene la convoluzione discreta sia concettualmente più semplice di quella continua, poiché coinvolge somme invece di integrazioni, è spesso meno agevole da calcolare (con gli strumenti a nostra disposizione; ad esempio, si dà per conosciuta l'integrazione per parti ma non la sommazione per parti). Non c'è quindi da stupirsi se nel calcolo di convoluzioni anche tra segnali semplici ci si imbatte in calcoli tutt'altro che banali. Alcuni casi, però, sono particolarmente semplici.

¹⁶Osserviamo che questa definizione è del tutto coerente con la definizione di convoluzione a tempo continuo tra due segnali campionati, ovvero se ipotizziamo di avere due segnali analogici campionati

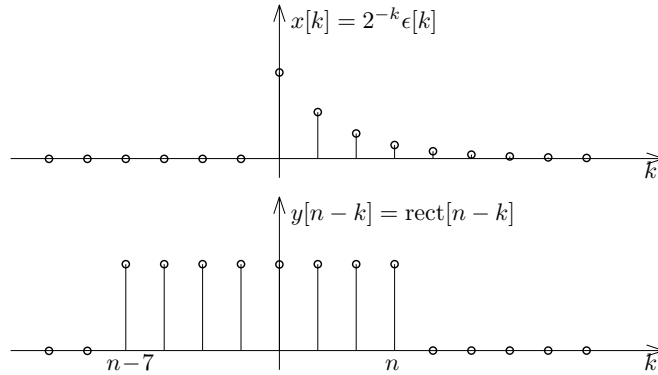
$$x_c(t) = \sum_n x[n]\delta(t - nT_c), \quad y_c(t) = \sum_n y[n]\delta(t - nT_c),$$

si ha

$$x_c(t) * y_c(t) = \sum_n z[n]\delta(t - nT_c),$$

dove $z[n] = x[n] * y[n]$.

Esempio 34 Calcoliamo la convoluzione $z[n] = x[n] * y[n]$ per i segnali $x[n] = 2^{-n}\epsilon[n]$ e $y[n] = \text{rect}_8[n]$. Si può procedere per via grafica disegnando sull'asse k i due segnali $x[k]$ e $y[n-k]$.



Il calcolo si potrà dunque scomporre in vari casi:

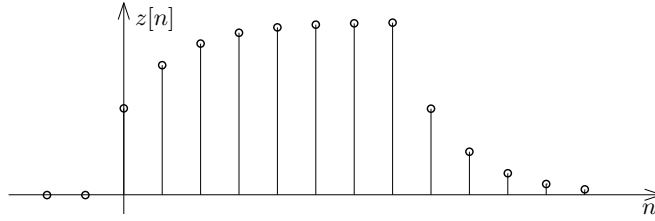
1. Caso $n < 0$. I due segnali hanno supporto disgiunto e quindi avremo $z[n] = 0$.
2. Caso $0 \leq n \leq 7$. I due segnali hanno supporto comune tra il punto $k = 0$ e il punto $k = n$. Risulterà quindi

$$\begin{aligned} z[n] &= \sum_{k=0}^n 2^{-k} \\ &= \frac{2^{-(n+1)} - 1}{2^{-1} - 1} \\ &= 2 - 2^{-n}. \end{aligned}$$

3. Caso $n > 7$. I due segnali hanno supporto comune tra il punto $k = n - 7$ e il punto $k = n$. Risulterà quindi

$$\begin{aligned} z[n] &= \sum_{k=n-7}^n 2^{-k} \\ &= \frac{2^{-(n+1)} - 2^{-(n-7)}}{2^{-1} - 1} \\ &= 2^{8-n} - 2^{-n}. \end{aligned}$$

Il segnale $z[n]$ risultante è mostrato nella seguente figura.



Convoluzione circolare. Come per segnali a tempo continuo, anche per segnali a tempo discreto diamo una definizione di convoluzione circolare per segnali periodici. Dati due segnali $x[n]$ e $y[n]$ periodici di periodo N , definiamo la loro convoluzione circolare tramite l'espressione

$$(x \circledast y)[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[n-k] \quad (10.1)$$

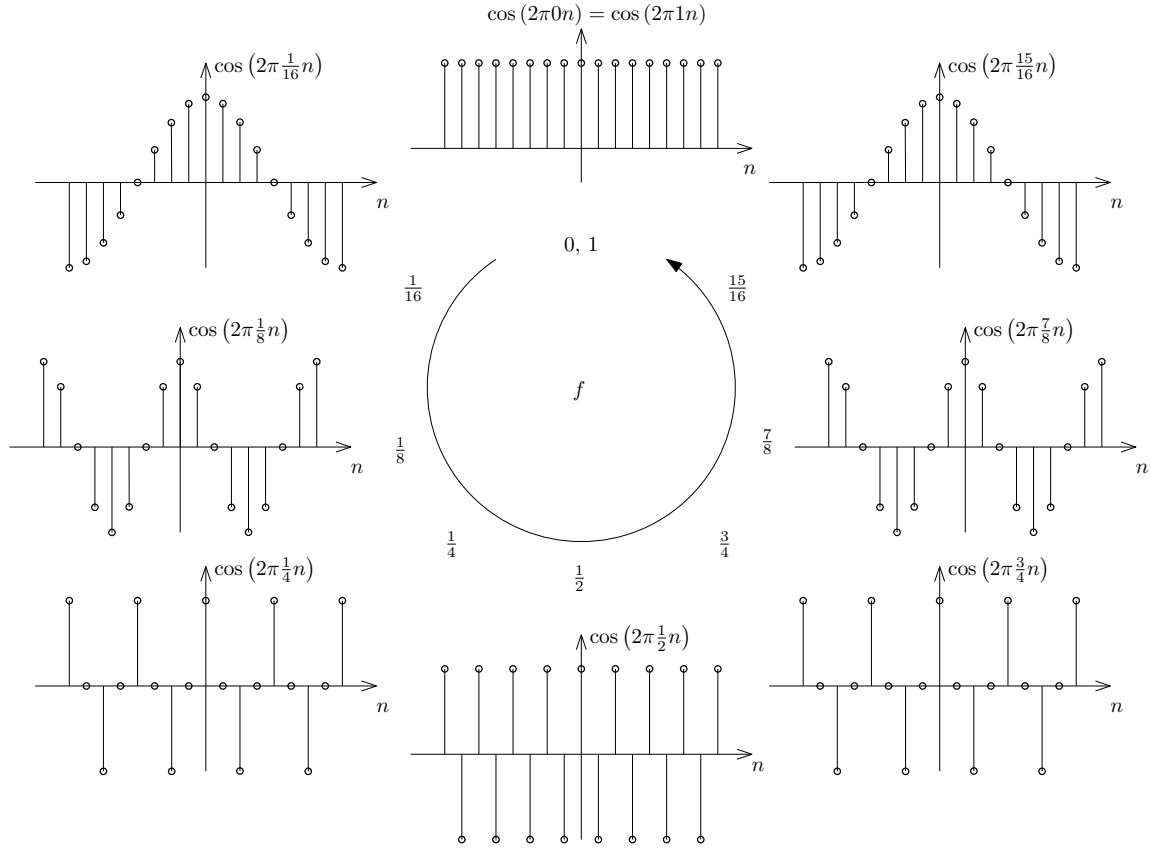
Osserviamo solo che due segnali periodici a tempo discreto ammettono sempre un periodo comune (ad esempio banalmente il minimo comune multiplo dei periodi, oppure il loro prodotto).

10.4 Esponenziali complessi e sinusoidi

Approfondiamo qui l'analisi dei segnali sinusoidali e degli esponenziali complessi. Una volta capite a fondo le differenze tra tempo continuo e tempo discreto per questi segnali, sarà molto più semplice capire anche la trattazione dell'analisi in frequenza che faremo successivamente. Per mettere in evidenza queste differenze, iniziamo semplicemente mostrando i grafici di alcuni segnali sinusoidali della forma

$$x[n] = \cos(2\pi f n)$$

al variare del coefficiente f , che per il momento preferiamo non chiamare “frequenza”:



Per $f = 0$ si ha ovviamente il segnale costantemente uguale a 1, che ritroviamo però anche per $f = 1$. Notiamo infatti che all'aumentare del coefficiente non aumenta progressivamente la velocità di oscillazione del segnale. Infatti, la massima velocità di oscillazione si ottiene per $f = 1/2$, che porta al segnale

$$x[n] = (-1)^n. \quad (10.2)$$

Quando f aumenta ulteriormente, la velocità di oscillazione diminuisce. Non è difficile verificare che lo schema riprodotto in figura può essere esteso a valori di f arbitrari e si osserverà che quando f è nei pressi di un intero il segnale oscilla lentamente, mentre quando f è nei pressi di valori della forma $k + 1/2, k \in \mathbb{Z}$, il segnale oscilla velocemente. Questa è la principale differenza che troviamo nei segnali sinusoidali a tempo discreto rispetto a quelli a tempo continuo e, come vedremo tra poco, non è altro che una diversa interpretazione del concetto di aliasing.



Campionamento di esponenziali complessi. Per approfondire questo aspetto facciamo un passo indietro considerando un segnale esponenziale complesso a tempo continuo e il segnale a tempo-discreto che questo genera a valle del campionamento.

Consideriamo un segnale a tempo continuo della forma

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

campionato con frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c$. Il segnale a tempo discreto ottenuto sarà

$$\begin{aligned} x[n] &= x(n/f_c) \\ &= e^{j2\pi \frac{f_0}{f_c} n}. \end{aligned}$$

Ora consideriamo un esponenziale a frequenza $f_0 + f_c$, ovvero

$$x_1(t) = e^{j2\pi(f_0+f_c)t}$$

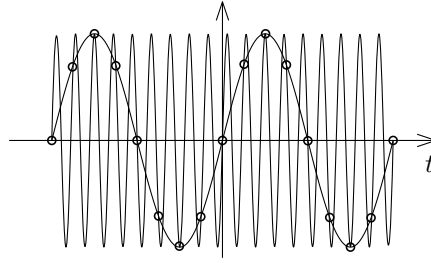
o, più in generale, a frequenza $f_0 + kf_c$

$$x_k(t) = e^{j2\pi(f_0+kf_c)t}.$$

(per cui $x(t)$ si ottiene per $k = 0$). Il segnale a tempo discreto corrispondente è

$$\begin{aligned} x_k[n] &= e^{j2\pi \frac{f_0+kf_c}{f_c} n} \\ &= e^{j2\pi \frac{f_0}{f_c} n} e^{j2\pi kn} \\ &= x[n]. \end{aligned}$$

Ovvero, tutti questi segnali, diversi a tempo continuo, danno luogo allo stesso segnale a tempo discreto. Il motivo è molto semplice: nei punti di campionamento, ovvero nei multipli di T_c , tutti questi segnali prendono gli stessi valori e non si possono quindi distinguere campionando con frequenza f_c . Possiamo quindi dire che una frequenza della forma $f_0 + kf_c$ non è distinguibile dalla frequenza f_0 campionando con frequenza f_c . Nell'immagine seguente riportiamo un esempio in cui si mostra che, campionando con frequenza $f_c = 8$, non è possibile distinguere una senoide a frequenza $f_0 = 1$ da una senoide a frequenza $f_0 + f_c = 9$. Questo è essenzialmente lo stesso motivo per cui i segnali a sinistra e a destra nella figura precedente sono identici¹⁷.



Come anticipato, questa è una spiegazione alternativa e molto elementare del concetto di aliasing. Le frequenze che possiamo distinguere sono quelle nell'intervallo (ad esempio) $[-f_c/2, f_c/2)$, oppure nell'intervallo $[0, f_c)$, o in ogni altro intervallo di larghezza f_c , ma non potremo distinguere frequenze su intervalli più ampi, perché frequenze che differiscono per un multiplo intero di f_c sono indistinguibili. In particolare, la frequenza $f_c/2$ è una frequenza critica, in quando non è possibile distinguersela dalla sua opposta di segno $-f_c/2$. Approfondiamo di seguito questo caso particolare.

Es. ¹⁷Serve un passaggio in più in realtà, ovvero il fatto che $\cos(2\pi(1+\alpha)n) = \cos(2\pi(1-\alpha)n)$ usato per $\alpha = 1/8$ e $\alpha = 1/16$.

Sinusoidi a frequenza $f_c/2$. Nella sezione dedicata al campionamento, abbiamo chiarito (si veda la nota a pagina 75) che un campionamento a frequenza f_c non permette di ricostruire una sinusoide a frequenza $f_c/2$. Questo è dovuto al fatto che la sinusoide contiene esponenziali complessi a frequenze $\pm f_c/2$, che differiscono di f_c e non sono quindi distinguibili. Come spiegazione alternativa, un segnale della forma

$$x(t) = A \cos \left(2\pi \frac{f_c}{2} t + \theta \right)$$

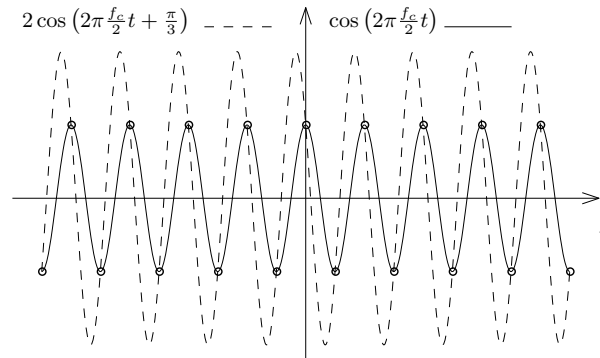
può essere scritto nella forma

$$x(t) = A \cos \left(2\pi \frac{f_c}{2} t \right) \cos \theta - A \sin \left(2\pi \frac{f_c}{2} t \right) \sin \theta$$

e a valle del campionamento con frequenza f_c porterà al segnale tempo-discreto

$$x[n] = (-1)^n A \cos \theta,$$

ovvero a una versione riscalata di quello a massima velocità di oscillazione visto in equazione (10.2). Vediamo però che nel segnale a tempo discreto l'ampiezza A e la fase θ si combinano e non possono essere più recuperate. Ad esempio, banalmente, non sarà possibile distinguere il caso $A = 0$ dal caso $A \neq 0$ con $\theta = \pi/2$. Il problema è comunque più generale; la seguente figura mostra un caso meno ovvio di due segnali a pari frequenza f_c ma con diverse ampiezze e fasi che coincidono in tutti i punti di campionamento e portano entrambi al segnale tempo discreto $x[n] = (-1)^n$.



Per questo motivo, è bene ricordare che il segnale $x[n] = (-1)^n$ rappresenta un campionamento a frequenza critica e non è riconducibile a un segnale sinusoidale a tempo continuo univoco, a meno di sceglierne arbitrariamente la fase.

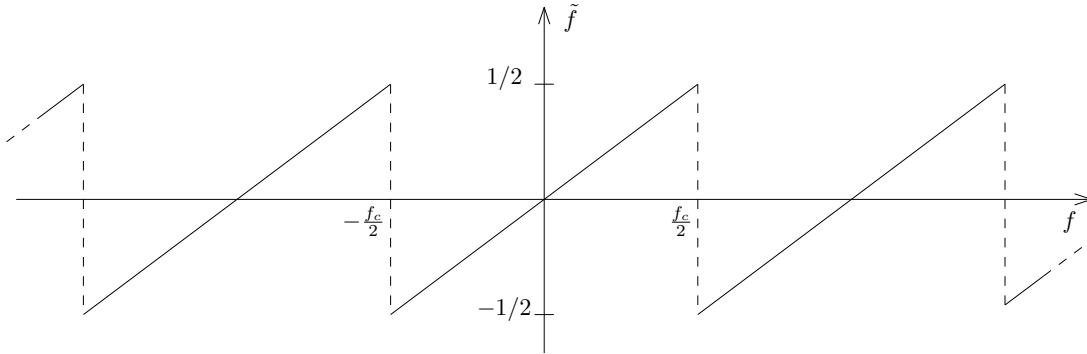
Frequenze normalizzate. Sulla base di quanto detto è utile introdurre, per $f \in [-f_c/2, f_c/2]$, un concetto di *frequenza normalizzata* $\tilde{f} = f/f_c$ in modo tale che un esponenziale a tempo continuo della forma

$$x(t) = e^{j2\pi f t}$$

porti a un segnale a tempo discreto

$$\begin{aligned} x[n] &= e^{j2\pi \frac{f}{f_c} n} \\ &= e^{j2\pi \tilde{f} n} . \end{aligned}$$

Quanto detto in precedenza si può riassumere dicendo che mentre i segnali a tempo continuo $x(t) = e^{j2\pi ft}$ sono tutti distinti al variare di f da $-\infty$ a $+\infty$, i segnali a tempo discreto $x[n] = e^{j2\pi \tilde{f}n}$ sono distinti solo finché \tilde{f} si muove nell'intervallo $[-1/2, 1/2)$. Al di fuori di questo intervallo troviamo di nuovo gli stessi segnali (gli “alias”) e non è pertanto restrittivo assumere che \tilde{f} prenda valori limitati all'intervallo $[-1/2, 1/2)$. La figura sottostante mostra la relazione che ne deriva tra il valore della frequenza f a tempo continuo e la frequenza normalizzata \tilde{f} del segnale a tempo discreto ottenuto a valle del campionamento.



⚠ **Notazione.** Per evitare di appesantire la notazione, riprenderemo d'ora in poi ad usare semplicemente la lettera f per rappresentare quella che possiamo interpretare come frequenza normalizzata \tilde{f} , e scriveremo quindi un esponenziale complesso nella forma generica

$$x[n] = e^{j2\pi fn}.$$

Lo studente che abbia trovato poco illuminante tutta la discussione precedente può tranquillamente lasciarla per un attimo da parte continuando la lettura, con l'avvertenza che i valori di f interessanti saranno, nel contesto dei segnali a tempo discreto, quelli nell'intervallo $[-1/2, 1/2)$ oppure dell'intervallo $[0, 1)$. Al di fuori, si avranno solo ripetizioni periodiche (si veda ad esempio, più avanti, la periodicità della DTFT). In particolare, le frequenze “alte”, per cui il segnale oscilla velocemente, sono quelle in modulo prossime a $1/2$.

Periodicità. Nel caso di segnali a tempo continuo, i segnali sinusoidali sono sempre segnali periodici. Consideriamo invece un segnale a tempo discreto

$$x[n] = e^{j2\pi fn}.$$

Questo è periodico di periodo N se vale la relazione

$$e^{j2\pi f(n+N)} = e^{j2\pi fn} \quad \forall n.$$

Poiché $e^{j2\pi f(n+N)} = e^{j2\pi fn} \cdot e^{j2\pi fN}$, il segnale è periodico di periodo N se e solo se fN è intero, ovvero f è della forma

$$f = \frac{k}{N}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo così che non tutti i segnali sinusoidali sono periodici, ma solo quelli con frequenza razionale. In particolare, si hanno solamente N esponenziali complessi distinti di periodo N , corrispondenti a $k = 0, 1, \dots, N-1$ nell'espressione sopra. Altri valori di k producono sempre questi stessi segnali. Vedremo in modo più approfondito questa “discretizzazione” delle frequenze più avanti nel corso quando parleremo della Trasformata DFT.

10.5 Rappresentazione in Frequenza: DTFT

Dopo aver analizzato i segnali sinusoidali, passiamo alla rappresentazione in frequenza di segnali a tempo discreto introducendo una variante della trasformata di Fourier per il dominio considerato.

Discrete-Time Fourier Transform (DTFT). Dato un segnale $x[n]$, definiamo la sua DTFT

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn}, \quad f \in \mathbb{R}. \quad (10.3)$$

Osserviamo che la notazione $X(f)$ è la stessa usata per la trasformata di Fourier, ma non ci sarà ambiguità in quanto sarà sempre chiaro dal contesto se il segnale x è a tempo discreto o a tempo continuo. Useremo anche la notazione $X(f) = \text{DTFT}(x[n])$ e la notazione

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(f).$$

La DTFT è l'analogo a tempo discreto della ordinaria trasformata di Fourier vista in precedenza. △ Può essere utile per lo studente pensare alla DTFT come alla trasformata di Fourier di un segnale campionato. Anzi, in fondo lo è. Infatti, supponiamo che $x[n]$ sia un segnale a tempo discreto ottenuto campionando un segnale analogico $x_a(t)$ con tempo di campionamento $T_c = 1$ (e indicizzando). Supponiamo cioè che

$$x[n] = x_a(t)|_{t=n}.$$

Allora, possiamo calcolare la trasformata di Fourier ordinaria del segnale a *tempo continuo* campionato $x_{ac}(t) = x_a(t)\delta_1(t)$ (ovvero, $x[n]$ è ottenuto da $x_{ac}(t)$ tramite indicizzazione); otteniamo

$$\begin{aligned} X_{ac}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{ac}(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta_1(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n x_a(n)\delta(t-n)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n x[n]e^{-j2\pi fn}\delta(t-n) dt \\ &= \sum_n x[n]e^{-j2\pi fn} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-n) dt. \end{aligned}$$

L'integrale all'ultimo termine vale 1 per ogni n e abbiamo quindi

$$\begin{aligned} X_{ac}(f) &= \sum_n x[n] e^{-j2\pi f n} \\ &= \text{DTFT}(x[n]) \\ &= X(f). \end{aligned}$$

Pertanto, la DTFT non fa altro che codificare nel dominio del tempo discreto la nostra abituale nozione di trasformata di Fourier per segnali campionati (che erano definiti in precedenza come segnali a tempo continuo, somme di impulsi di Dirac).

Esempio 35 *Calcoliamo la DTFT del segnale $x[n] = \text{sinc}(n/2)$. Poiché $x[n] = \text{sinc}(t/2)|_{t=n}$, avremo*

$$\begin{aligned} \text{DTFT}(x[n]) &= \mathcal{F}(\text{sinc}(t/2) \cdot \delta_1(t)) \\ &= 2 \text{rect}(2f) * \delta_1(f), \end{aligned}$$

ovvero una replica periodica con passo 1 del segnale $2 \text{rect}(2f)$.

Esempio 36 *Consideriamo il segnale $x[n] = \cos(2\pi f_0 n)$. Avremo*

$$\begin{aligned} \text{DTFT}(x[n]) &= \mathcal{F}(\cos(2\pi f_0 t) \cdot \delta_1(t)) \\ &= \left(\frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0) \right) * \delta_1(f) \end{aligned}$$

cioè una replica periodica della usuale trasformata del coseno a frequenza f_0 . In particolare, per il segnale costante $x[n] = 1$ abbiamo

$$1 \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \delta_1(f),$$

che si ottiene ponendo $f_0 = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 37 *Consideriamo il segnale a tempo discreto periodico di periodo N*

$$\delta_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN].$$

Applicando semplicemente la definizione, abbiamo

$$\begin{aligned} \text{DTFT}(\delta_N[n]) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_N[n] e^{-j2\pi f n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f N k} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=-L}^L e^{-j2\pi f N k}. \end{aligned}$$

A questo punto è chiaro che la DTFT del segnale $\delta_N[n]$ è identica alla trasformata di Fourier ordinaria del segnale a tempo continuo $\delta_N(t)$, ovvero abbiamo

$$\delta_N[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{N} \delta_{1/N}(f). \quad (10.4)$$

Come esercizio, si può giungere allo stesso risultato sfruttando il fatto che

$$\delta_N[n] = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(t - kN) \right) \Big|_{t=n} \quad (10.5)$$

e quindi

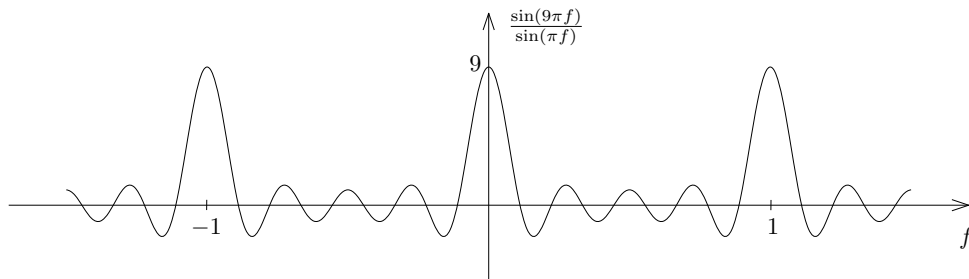
$$\text{DTFT}(\delta_N[n]) = \mathcal{F} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(t - kN) \cdot \delta_1(t) \right) \quad (10.6)$$

Il metodo usato negli esempi precedenti non è però sempre il più comodo. Il seguente esempio illustra un caso in cui è più agevole calcolare direttamente la DTFT tramite definizione.

Esempio 38 Calcoliamo la DTFT del segnale $x[n] = \text{rect}_N[n]$. Si noti che non è elementare procedere come nel caso precedente, poiché dovremmo considerare un rettangolo (scelto opportunamente, ad esempio $\text{rect}((2t - N + 1)/2N)$) campionato e otterremmo una replica periodica di sinc in frequenza. Calcoliamo invece direttamente

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi f n} \\ &= \frac{e^{-j2\pi f N} - 1}{e^{-j2\pi f} - 1} \\ &= \frac{e^{-j\pi f N}}{e^{-j\pi f}} \frac{e^{-j\pi f N} - e^{j\pi f N}}{e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}} \cdot \frac{2j}{2j} \\ &= e^{-j\pi f(N-1)} \frac{\sin(\pi N f)}{\sin(\pi f)}. \end{aligned}$$

Il primo fattore è semplicemente un termine di fase dovuto al fatto che il segnale $\text{rect}_N[n]$ è causale. Il secondo fattore è invece più interessante ed è riportato in figura nel caso $N = 9$.



Si noti che il procedimento usato è sostanzialmente lo stesso usato per il calcolo della trasformata di Fourier del pettine di delta.

- △ Un'altra interpretazione molto utile della DTFT è legata alla serie di Fourier. Infatti, notiamo anzitutto che la DTFT è sempre una funzione 1-periodica, poiché

$$\begin{aligned} X(f+1) &= \sum_n x[n] e^{-j2\pi(f+1)n} \\ &= \sum_n x[n] e^{-j2\pi f n} \\ &= X(f). \end{aligned}$$

Questa proprietà è una equivalente formulazione di quanto già visto nella sezione precedente riguardo all'ambiguità dei segnali esponenziali complessi nel dominio a tempo-discreto. Osservato che $X(f)$ è un segnale 1-periodico, notiamo che la sommatoria nell'equazione (10.3) che la definisce non è altro che una scrittura in Serie di Fourier del segnale $X(-f)$. Cioè, se vale la relazione

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(f)$$

allora vale anche

$$X(-f) \xleftrightarrow{\text{SdF}_1} x[n]. \quad (10.7)$$

Cioè il segnale $X(f)$ è un segnale 1-periodico e i coefficienti di Fourier di $X(-f)$ sono proprio i valori del segnale $x[n]$. Questa dualità è di fatto la stessa che avevamo già evidenziato per la trasformata di Fourier di segnali campionati.

Es. Sfruttando la relazione (10.7) possiamo determinare la formula di inversione per la DTFT. Il segnale nel tempo $x[n]$ è infatti ottenuto calcolando i coefficienti di Fourier di $X(-f)$ e avremo dunque la seguente relazione.

Formula di inversione. Se $X(f) = \text{DTFT}(x[n])$, allora

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} df.$$

Analogamente, partendo dalle proprietà viste per la Serie di Fourier o per le trasformate di segnali campionati deriviamo le seguenti proprietà per la DTFT.

Proprietà:

- **Periodicità.** Come già spiegato, la DTFT è sempre una funzione 1-periodica.
- **Traslazione.** Vale la relazione

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(f) e^{-j2\pi f n_0}.$$

- **Modulazione.** Vale la relazione

$$x[n]e^{j2\pi f_0 n} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(f - f_0).$$

- **Ribaltamento nei tempi.** Vale la relazione

$$x[-n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(-f).$$

- **Teorema di convoluzione.** Vale la relazione

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(f)Y(f).$$

Abbiamo infatti (ma è in effetti anche una conseguenza di quanto osservato nella Nota 16)

$$\begin{aligned} \text{DTFT}(x[n] * y[n]) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \right) e^{-j2\pi f n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k] e^{-j2\pi f n} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[k]Y(f)e^{-j2\pi f k}) \\ &= X(f)Y(f). \end{aligned}$$

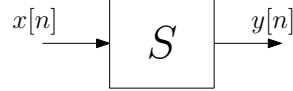
- **Prodotto.** Vale la relazione

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(f) \otimes Y(f).$$

Si noti che questa proprietà è già stata vista in termini di Serie di Fourier della convoluzione circolare tra due segnali periodici.

11 Sistemi a tempo discreto

Molte delle nozioni che abbiamo visto per i sistemi a tempo continuo si ripropongono senza differenze sostanziali per sistemi a tempo discreto. In particolare, definiamo un *sistema* di nuovo come un operatore di trasformazione che ad un segnale in ingresso $x[n]$ associa un segnale di uscita $y = S[x]$. Graficamente rappresentiamo questa trasformazione come in figura.



Useremo le stesse notazioni usate per i sistemi a tempo discreto scrivendo spesso $y[n] = S[x[n]]$.

Di nuovo caratterizzeremo i sistemi in base alle seguenti proprietà:

- **Linearità.** Diciamo che S è *lineare* se $\forall x_1[n], x_2[n], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$S[\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]] = \alpha S[x_1[n]] + \beta S[x_2[n]].$$

- **Stabilità.** Diremo che S è *stabile* se ad ogni ingresso limitato risponde con una uscita limitata, ovvero se $\forall x[n]$, posto $y[n] = S[x[n]]$,

$$\exists M : |x[n]| \leq M \quad \forall n \implies \exists N : |y[n]| \leq N \quad \forall n.$$

- **Memoria.** Diciamo che un sistema S è *senza memoria* se l'uscita all'istante n_0 non dipende dai valori dell'ingresso ad istanti $n \neq n_0$. In caso contrario diremo che il sistema ha memoria.
- **Causalità.** Diremo che un sistema S è *causale* se l'uscita all'istante n_0 non dipende dai valori dell'ingresso ad istanti $n > n_0$ (cioè il sistema “non vede nel futuro”).

Diremo invece che il sistema è *anticausale* se l'uscita all'istante n_0 non dipende dai valori dell'ingresso ad istanti $n \leq n_0$ (cioè il sistema vede solo il futuro).

Infine, un sistema è detto *non-causale* se non è causale e non è anticausale.

- **Tempo-Invarianza** Un sistema è detto *tempo-invariante* se $\forall x[n], \forall n_0 \in \mathbb{Z}$, detto $y[n] = S[x[n]]$ si ha

$$S[x[n - n_0]] = y[n - n_0]$$

ovvero, una traslazione dell'ingresso porta a una corrispondente traslazione dell'uscita. In caso contrario il sistema è detto tempo-variante.

12 Sistemi Lineari Tempo-Invarianti

Come per il tempo continuo, anche nel contesto dei segnali a tempo discreto sono di particolare interesse i sistemi lineari tempo-invarianti (LTI). Ripercorreremo molti passi già visti per il tempo continuo e le differenze saranno davvero marginali. Tuttavia, introdurremo anche alcune nozioni non banali e invitiamo lo studente a prestare particolare attenzione.

12.1 Analisi nel dominio del tempo, FIR, IIR

Definiamo la risposta all'impulso

$$h[n] = S[\delta[n]] .$$

Avendo già osservato che un segnale $x[n]$ può essere scritto come

$$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta[n - k] ,$$

l'uscita del sistema corrispondente a tale ingresso sarà

$$\begin{aligned} y[n] &= S[x[n]] \\ &= S\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta[n - k]\right] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] S[\delta[n - k]] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h[n - k] \\ &= x[n] * h[n] \end{aligned}$$

Resta dunque dimostrato, come per i sistemi a tempo continuo, che la risposta di un sistema LTI a fronte di un ingresso $x[n]$ è la convoluzione tra ingresso e risposta all'impulso, $y[n] = x[n] * h[n]$.

Di nuovo causalità e stabilità di un sistema LTI sono completamente determinate a partire dalla conoscenza di $h[n]$. Enunciamo queste proprietà lasciando la dimostrazione allo studente.

Causalità. Un sistema LTI è causale (anticausale) se e solo se la sua risposta all'impulso $h[n]$ è un segnale causale (anticausale).

Stabilità. Un sistema LTI è stabile se e solo se la risposta all'impulso $h[n]$ è assolutamente sommabile, cioè se la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h[n]|$$

converge a un valore finito.

Sistemi FIR e IIR. Per sistemi a tempo discreto, si fa una distinzione fondamentale tra i sistemi in cui la risposta all'impulso ha una durata finita (sistemi *FIR*, per *Finite Impulse Response*) e quelli per cui ha una durata infinita (sistemi *IIR*, per *Infinite Impulse Response*). Mentre la risposta di

un sistema FIR richiede un numero finito di operazioni per ogni campione d'uscita, la risposta di un sistema IIR implementato tramite convoluzione richiede in linea di principio un'infinità di operazioni (o un numero che cresce senza limiti al crescere di n anche ammettendo ingresso causale e sistema causale). Vedremo poco più avanti che in realtà per alcuni di questi sistemi è possibile fornire una implementazione che richieda un numero finito e limitato di operazioni a patto di ammettere l'uso della retroazione.

12.2 Analisi in frequenza

Consideriamo ora la risposta di un sistema LTI a fronte di un ingresso della forma

$$x[n] = e^{j2\pi f_0 n}.$$

Avremo

$$\begin{aligned} S[x[n]] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{j2\pi f_0 (n-k)} \\ &= e^{j2\pi f_0 n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{-j2\pi f_0 k} \end{aligned}$$

ovvero, anche nel caso discreto gli esponenziali complessi sono autofunzioni del sistema. Procediamo quindi come nel caso continuo.

Risposta in frequenza. Definiamo la risposta in frequenza del sistema

$$\begin{aligned} H(f) &= \text{DTFT}(h[n]) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{-j2\pi f k}. \end{aligned}$$

Enunciamo infine, di nuovo come nel caso continuo, il seguente teorema.

Teorema della risposta in frequenza. Dato un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)$, allora

$$x[n] = e^{j2\pi f_0 n} \implies S[x[n]] = H(f_0) e^{j2\pi f_0 n}$$

dove potremo anche scrivere

$$S[x[n]] = |H(f_0)| e^{j(2\pi f_0 n + \angle H(f))}.$$

Inoltre, se la risposta all'impulso $h[n]$ è reale, si ha

$$x[n] = \cos(2\pi f_0 n + \varphi) \implies S[x[n]] = |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 n + \varphi + \angle H(f_0)).$$

A questo punto possiamo procedere come visto per sistemi a tempo continuo, andando a studiare il comportamento in frequenza di un sistema LTI a fronte di un ingresso generico. Equivalentemente, possiamo partire dallo studio già svolto nel dominio del tempo, con cui abbiamo stabilito che l'uscita $y[n]$ è legata all'ingresso generico $x[n]$ tramite la relazione $y[n] = x[n] * h[n]$. Applicando il teorema

di convoluzione per la DTFT, si deduce che, più in generale, lo spettro del segnale in ingresso $X(f)$ è legato allo spettro del corrispondente segnale d'uscita $Y(f)$ dalla relazione

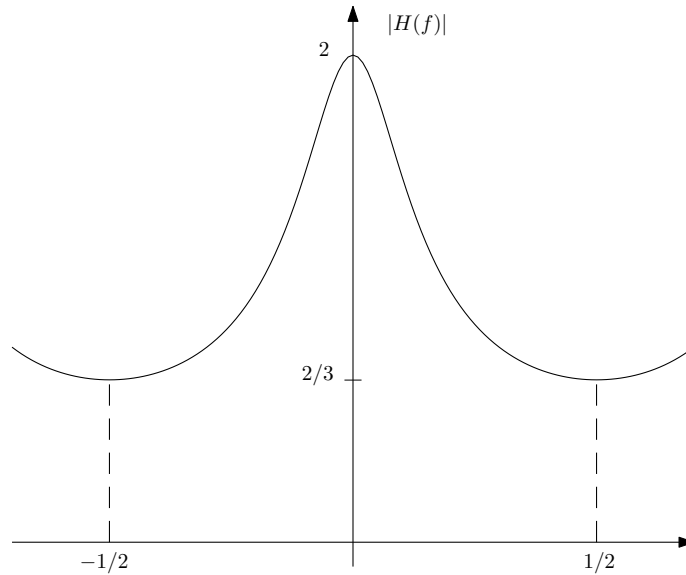
$$Y(f) = X(f)H(f), \quad (12.1)$$

esattamente come nel caso dei segnali a tempo continuo.

Esempio 39 *Calcoliamo la risposta in frequenza di un sistema LTI con risposta all'impulso $h[n] = 2^{-n}\epsilon[n]$. Abbiamo*

$$\begin{aligned} H(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j2\pi fn} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}e^{-j2\pi fn} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}} \end{aligned}$$

La risposta in ampiezza di questo sistema è mostrata nella seguente figura



Si tratta cioè di un filtro che enfatizza le basse frequenze e attenua quelle alte; un filtro passa-basso, quindi, nonostante l'attenuazione sulle alte frequenze sia molto ridotta.

12.3 Sistemi descritti tramite Equazioni alle Differenze

Vediamo ora una particolare classe di sistemi di grande importanza nelle applicazioni pratiche, ovvero sistemi descritti tramite una equazione alle differenze che lega i valori dell'ingresso ai valori dell'uscita.

Motivazione e descrizione generale. Per motivare l'introduzione di questi sistemi, partiamo da un sistema LTI di tipo IIR molto semplice, ovvero un sistema causale stabile con risposta all'impulso

$$h[n] = 2^{-n}\epsilon[n].$$

Dato un segnale $x[n]$ in ingresso, l'uscita sarà data dall'espressione

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x[n-k]. \quad (12.2)$$

In base a tale espressione, il calcolo di $y[n]$ richiede, anche per un segnale $x[n]$ causale in ingresso, un numero di operazioni che cresce illimitatamente all'aumentare di n . Possiamo però notare che è possibile riscrivere l'espressione di cui sopra isolando il primo addendo della sommatoria nel seguente modo

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x[n-k] \\ &= x[n] + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} x[n-(k+1)] \\ &= x[n] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x[(n-1)-k]. \end{aligned}$$

L'ultima sommatoria, alla luce dell'equazione (12.2), esprime di fatto il valore $y[n-1]$. Pertanto abbiamo ottenuto la seguente relazione ingresso-uscita

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]. \quad (12.3)$$

Vediamo cioè che il sistema può essere implementato in modo molto semplice a patto di impiegare una ricorsione sulle uscite, utilizzando il valore $y[n-1]$ per calcolare $y[n]$. Riarrangiando i termini possiamo anche scrivere

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]. \quad (12.4)$$

Più in generale, ma limitandoci comunque per il momento a sistemi LTI causali, introduciamo sistemi caratterizzati da una relazione ingresso-uscita descritta tramite l'equazione

△

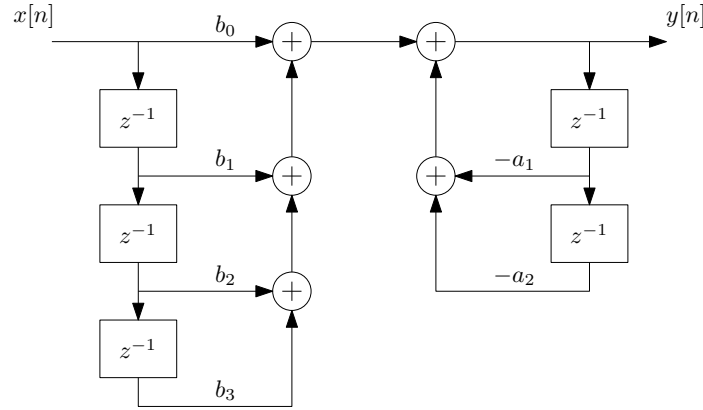
$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (12.5)$$

Il parametro N è detto *ordine* del sistema. Molto spesso si assume $a_0 = 1$ e si ottiene in tal caso una possibile riscrittura del sistema nella forma

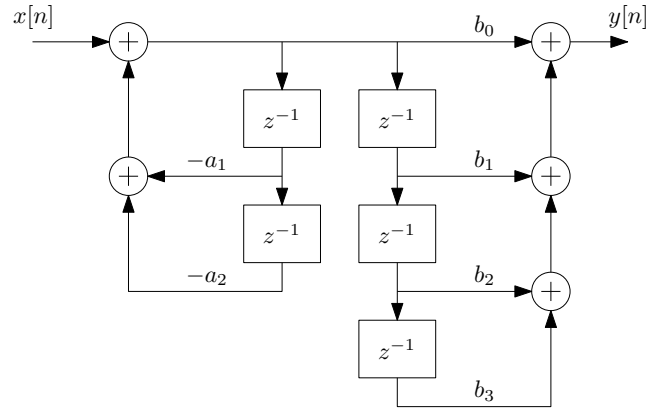
$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{r=0}^M b_r x[n-r], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (12.6)$$

Questa seconda forma esprime il valore dell'uscita all'istante n in funzione di un numero finito di valori passati dell'uscita stessa e di valori passati e del valore presente dell'ingresso. Notiamo anzitutto che se i coefficienti a_k sono tutti nulli si ottiene di fatto un sistema LTI causale di tipo FIR con risposta all'impulso h definita da $h[r] = b_r, r = 0, \dots, M$ e $h[r] = 0$ altrimenti. I coefficienti a_k , per contro, permettono di implementare sistemi LTI di tipo IIR, come mostrato nell'esempio introduttivo per il sistema con risposta all'impulso $h[n] = 2^{-n}\epsilon[n]$.

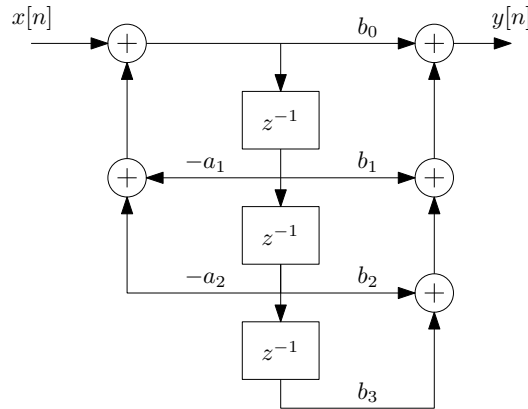
Nella seguente figura vediamo la rappresentazione grafica di un sistema descritto dall'equazione (12.6) per il caso $N = 2, M = 3$ (ricordando che z^{-1} rappresenta un ritardo elementare).



La rappresentazione mostrata viene detta *Forma Diretta I*. Questa mette in evidenza la struttura del sistema in due parti; la prima a sinistra, legata alla seconda sommatoria in equazione (12.6) e detta di *Media Mobile* (o *Moving Average: MA*), e l'altra, legata alla prima sommatoria in equazione (12.6) detta parte *Autoregressiva* (o *Autoregressive: AR*). Il sistema complessivo viene per questo motivo anche detto *ARMA*. Si può notare che esso è una concatenazione in serie delle due parti. Abbiamo già osservato che la parte di media mobile rappresenta un sistema LTI e, come chiariremo meglio più avanti, lo stesso si può dire per la parte autoregressiva sotto opportune ipotesi di inizializzazione. Pertanto, trattandosi di due sistemi LTI in cascata, è possibile scambiarne l'ordine senza alterare il sistema complessivo. Applicando questa idea si ottiene la seguente rappresentazione.



Si può a questo punto notare che i due ritardi centrali agiscono sullo stesso segnale e, di conseguenza, possono essere accorpati, essendo ridondanti. Si ottiene in questo modo la rappresentazione in *Forma Diretta II*, mostrata nella seguente figura.



Il vantaggio di questa architettura è che il numero di ritardi richiesti, e quindi di registri, è il massimo tra M e N , al posto degli $M + N$ richiesti dalla forma diretta I.

Inizializzazione e soluzione dell'equazione. Nella spiegazione precedente abbiamo eluso alcuni dettagli importanti parlando di sistemi descritti tramite equazione alle differenze. Una equazione alle differenze del tipo (12.5), di per sé, non descrive completamente l'uscita $y[n]$ del sistema a fronte dell'ingresso $x[n]$ e per questo motivo avevamo inizialmente ipotizzato di occuparci solo di sistemi LTI causali. Questa ipotesi aggiuntiva infatti si rivela molto importante; ci porta a dire che, a fronte di un segnale in ingresso nullo negli istanti $n < n_0$, l'uscita $y[n]$ sarà altrettanto nulla per $n < n_0$. Questa assunzione svolge di fatto il ruolo di *inizializzazione* nei valori dell'uscita $y[n]$ per $n < n_0$, che permette di calcolare $y[n]$ ricorsivamente per tutti i valori di n successivi mediante l'equazione (12.6). In generale, all'equazione alle differenze (12.5) non è associata una uscita $y[n]$ univoca se non si specificano delle condizioni al contorno, così come avviene per le equazioni differenziali in domini continui, con cui lo studente ha probabilmente già fatto i conti in altri corsi. Nel nostro

contesto, si parla abitualmente di *inizializzazione* del sistema proprio perché si assume che i valori di $y[n]$ vengano impostati a priori per alcuni valori di n e si adotti poi un'equazione del tipo (12.6) per determinare l'uscita in tutti gli altri punti dell'asse.

A questo punto non è difficile notare che una inizializzazione appropriata è in realtà fondamentale già affinché sia garantito che il sistema descritto tramite l'equazione (12.5) sia LTI. Per rendersene conto in modo semplice basta riprendere l'esempio del sistema IIR descritto dall'equazione (12.3) e notare che è sempre possibile determinare un segnale $y[n]$ che verifichi, ad esempio, $y[0] = 1$, indipendentemente dall'ingresso $x[n]$. Basta infatti imporre la condizione $y[0] = 1$ e poi dedurre ricorsivamente gli altri valori dell'uscita in funzione dell'ingresso. Il problema è che il sistema così implementato non è un sistema LTI!¹⁸

Per simili motivi, un'equazione del tipo (12.5) può in realtà essere associata a due diversi sistemi LTI. Il primo è il sistema causale stabile, inizialmente ipotizzato, con risposta all'impulso $h[n] = 2^{-n}\epsilon[n]$. Il secondo è un sistema anticausale instabile con risposta all'impulso $h[n] = -2^{-n}\epsilon[-n-1]$. Vediamo come scoprirlo.

Se riformuliamo $y[n]$ come in equazione (12.6) e iteriamo l'equazione varie volte (come si suol dire, risolviamo *in avanti*), otteniamo

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}y[n-2] + x[n-1] \right) + x[n] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}y[n-3] + x[n-2] \right) + x[n-1] \right) + x[n] \\ &\vdots \quad (m \text{ volte}) \\ &= \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{2} \right)^k x[n-k] + \left(\frac{1}{2} \right)^{m+1} y[n-m] \end{aligned}$$

Se imponiamo come condizione al contorno che $y[n]$ sia limitata a $-\infty$ (come deve essere per un LTI stabile a fronte di ingresso limitato), notiamo che l'ultimo termine dell'espressione ottenuta tende a zero all'aumentare di m . Poiché m è arbitrario, al limite $m \rightarrow \infty$ si ottiene quindi l'espressione

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k x[n-k],$$

che corrisponde a una convoluzione di $x[n]$ con $h[n] = 2^{-n}\epsilon[n]$. Diciamo pertanto che l'equazione risolta “in avanti” porta al sistema causale stabile. Con questa dicitura, diamo in realtà per sottinteso il precedente discorso sull'inizializzazione a $-\infty$. In contesti pratici, il segnale $x[n]$ assume valori nulli per $n < n_0$ e si risolve l'equazione in avanti inizializzando a 0 l'uscita per $n < n_0$.

Alternativamente, possiamo riformulare (12.6) scrivendola in $n+1$ anziché in n per ottenere

$$y[n+1] - \frac{1}{2}y[n] = x[n+1].$$

¹⁸È ovvio ma potrebbe non essere evidente; se si impone $y[0] = 1$ indipendentemente da $x[n]$, moltiplicando $x[n]$ per un coefficiente non si ha una moltiplicazione corrispondente di $y[n]$.

Isolando ora $y[n]$ e iterando (risolvendo cioè *all'indietro*), si ottiene

$$\begin{aligned}
y[n] &= 2y[n+1] - 2x[n+1] \\
&= 2(2y[n+2] - 2x[n+2]) - 2x[n+1] \\
&= 2(2(2y[n+3] - 2x[n+3]) - 2x[n+2]) - 2x[n+1] \\
&\vdots \quad (m \text{ volte}) \\
&= -\sum_{k=1}^m 2^k x[n+k] + 2^m y[n+m].
\end{aligned}$$

Se imponiamo ora come condizione al contorno che $y[n]$ tenda a zero più velocemente di 2^{-n} per $n \rightarrow \infty$, l'ultimo termine dell'espressione ottenuta tende a zero all'aumentare di m . Al limite si ottiene quindi l'espressione

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x[n+k]$$

che corrisponde a una convoluzione di $x[n]$ con $h[n] = -2^{-n}\epsilon[-n-1]$. Diciamo quindi che risolvendo l'equazione all'indietro si ottiene un sistema anticausale instabile, di nuovo dando per scontato il discorso visto sull'inizializzazione a $+\infty$. In pratica, un sistema anticausale instabile è di scarso interesse; in ogni caso si potrà generalmente assumere $x[n] = 0$ per $n > n_0$, inizializzare anche $y[n]$ a zero per $n > n_0$ e risolvere l'equazione all'indietro.

In conclusione, la soluzione di un'equazione alle differenze non è unica se non si specificano opportune condizioni al contorno e pertanto la descrizione di un sistema LTI tramite equazione alle differenze richiede opportune assunzioni sull'inizializzazione. Una spiegazione più dettagliata di questi aspetti è argomento di corsi più avanzati.

Risposta in Frequenza. Dato un sistema LTI stabile descritto da un'equazione alle differenze generica

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r] \quad (12.7)$$

possiamo chiederci quale sia la sua risposta in frequenza. In questo caso, anziché determinare la risposta all'impulso e poi calcolarne la DTFT, risulta più conveniente applicare direttamente la DTFT ad ambo i lati dell'equazione suddetta. Applicando le proprietà di linearità e di traslazione della DTFT abbiamo

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(f) e^{-j2\pi k f} = \sum_{r=0}^M b_r X(f) e^{-j2\pi r f},$$

che possiamo riscrivere come

$$Y(f) \left(\sum_{k=0}^N a_k e^{-j2\pi k f} \right) = X(f) \left(\sum_{r=0}^M b_r e^{-j2\pi r f} \right).$$

Come sappiamo $Y(f)$ e $X(f)$ sono legati dalle relazione $Y(f) = X(f)H(f)$; questo porta a concludere che deve essere

$$H(f) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r e^{-j2\pi r f}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j2\pi k f}} . \quad (12.8)$$

Ad esempio, il sistema causale stabile descritto dall'equazione alle differenze (12.4) ha risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}} ,$$

in accordo con quanto stabilito nell'Esempio 39.

13 Discrete Fourier Transform (DFT)

Dopo aver introdotto la trasformata DTFT per segnali a tempo discreto, facciamo un ultimo passo introducendo un ulteriore livello di discretizzazione nel dominio delle frequenze, definendo la cosiddetta trasformata di Fourier discreta, universalmente nota in letteratura come *Discrete Fourier Transform (DFT)*. Questa trasformata può essere introdotta in diversi modi alcuni dei quali richiedono pochissime nozioni pregresse. Risulta però utile inquadrarla correttamente all'interno del contesto del nostro corso, in particolare con riferimento alla DTFT, per poterne dedurre varie proprietà in modo abbastanza semplice, sfruttando quanto già visto in precedenza, e capirne meglio il significato.

Per completezza, riporteremo diverse interpretazioni della DFT. Punto fondamentale, che non può dipendere dalle interpretazioni, è l'assunzione che i segnali in esame abbiano un numero finito N di campioni “di interesse”. Questo fatto sarà inevitabile e potrà solo interpretarsi in diversi modi, ad esempio assumendo a priori che il segnale $x[n]$ in esame sia nullo per $n < 0$ e $n \geq N$, oppure ipotizzando che si stia osservando un segnale periodico di periodo N , oppure semplicemente considerando questi N campioni come sequenza finita di numeri complessi, ovvero un punto in \mathbb{C}^N . In ogni caso, non potremo lavorare con la DFT trattando ad esempio un segnale come $x[n] = 2^{-n}\epsilon[n]$ nella sua interezza, ma solo studiandolo su finestre di lunghezza finita N .

13.1 DFT come campionamento della DTFT

Supponiamo che $x[n]$ sia un segnale di cui sappiamo, a priori, che gli unici campioni eventualmente non nulli sono $x[0], x[1], \dots, x[L-1]$. Il segnale ha cioè una durata limitata, al più L , e verifica in particolare

$$x[n] = 0, \quad n < 0 \text{ oppure } n \geq L. \quad (13.1)$$

Lo studio in frequenza del segnale prevede il calcolo della DTFT $X(f)$ che, nel caso in esame, risulta essere

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j2\pi fn}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Ci chiediamo a questo punto se sia possibile “discretizzare” anche l'asse delle frequenze, un po' come abbiamo fatto con l'asse dei tempi in precedenza, campionando la DTFT $X(f)$. Abbiamo visto infatti, mediante la teoria del campionamento, che un segnale a banda limitata può essere descritto completamente dai suoi campioni temporali presi a distanza sufficientemente breve. Per dualità, un segnale a supporto limitato nei tempi potrà essere descritto completamente a partire dai campioni della sua trasformata presi a distanza sufficientemente piccola.

Supponiamo di campionare la DTFT con passo Δ . Se vogliamo che il segnale campionato sia ancora una DTFT dovremo rispettare il vincolo che questo sia 1-periodico e, pertanto, possiamo limitare

l'interesse al caso in cui il passo di campionamento sia della forma $\Delta = 1/N$, con N intero. Abbiamo quindi il segnale campionato

$$\begin{aligned} X_c(f) &= X(f) \cdot \delta_{1/N}(f) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{N}\right) \delta\left(f - \frac{k}{N}\right). \end{aligned}$$

Applicando la trasformata inversa ad ambo i lati, utilizzando il teorema di convoluzione e l'Esempio 37, otteniamo nel dominio del tempo il segnale

$$\begin{aligned} \text{DTFT}^{-1}(X_c(f)) &= \text{DTFT}^{-1}(X(f)) * \text{DTFT}^{-1}(\delta_{1/N}(f)) \\ &= x[n] * (N\delta_N[n]) \\ &= N \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN]. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Otteniamo cioè una replica periodica del segnale $x[n]$ (riscalata di un fattore N), proprio come visto nella teoria del campionamento. Poiché il segnale x aveva durata al più L per ipotesi iniziale, se scegliamo $N \geq L$ le varie repliche del segnale $x[n]$ “non si sovrappongono”. Abbiamo cioè campionato la trasformata $X(f)$ rispettando il teorema del campionamento (ma a domini invertiti) e quindi evitando che si verifichi, come si suol dire, *aliasing nei tempi*. Pertanto, il campionamento della trasformata descrive completamente il segnale di partenza. Con il solito abuso di notazione, definiamo quindi il segnale discreto nelle frequenze

$$X[k] = X\left(\frac{k}{N}\right). \tag{13.4}$$

Con questa notazione, definendo il segnale $x_p[n]$ ottenuto replicando periodicamente $x[n]$ con passo N , cioè

$$x_p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN], \tag{13.5}$$

△ abbiamo quindi

$$\text{DTFT}(x_p[n]) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta\left(f - \frac{k}{N}\right) \tag{13.6}$$

Osserviamo però che i diversi valori significativi di $X[k]$ sono di fatto solo N , poiché $X(f)$ è 1-periodica e questi, quindi, si ripetono. È consuetudine considerare i coefficienti corrispondenti a $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Ribadiamo che quanto esposto sopra è valido per ogni $L \leq N$ e quindi possiamo considerare il caso più generale in cui il segnale ha supporto nell'insieme degli istanti di tempo $\{0, 1, \dots, N-1\}$, ovvero che i valori di interesse del segnale siano $x[0], x[1], \dots, x[N-1]$. Combinando l'equazione (13.4) con l'equazione (13.2), definiamo così la trasformata DFT della sequenza $(x[0], x[1], \dots, x[N-1])$ come

△

la sequenza di N coefficienti $(X[0], X[1], \dots, X[N-1])$ definiti da

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (13.7)$$

La DFT mappa quindi una sequenza di N numeri complessi in un'altra sequenza di N numeri complessi. Useremo la notazione

$$X[k] = \text{DFT}(x[n])$$

o anche

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k].$$

Per essere più espliciti sulla trasformata adottata, useremo a volte una notazione che indichi il valore N , scrivendo

$$X[k] = \text{DFT}_N(x[n])$$

o anche

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}_N} X[k].$$

Con questa notazione, indicheremo con $\text{DFT}_N(x[n])$ la trasformata DFT su N punti della sequenza $(x[0], x[1], \dots, x[N-1])$ anche quando $x[n]$ è un segnale definito in realtà su tutto l'insieme degli interi \mathbb{Z} . Ad esempio, potremo calcolare $\text{DFT}_4(\text{rect}_2[n])$ o anche $\text{DFT}_6(\text{rect}_2[n])$, intendendo nel primo caso la trasformata DFT su 4 punti della sequenza $(1, 1, 0, 0)$ e nel secondo caso la trasformata su 6 punti della sequenza $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$.

Prima di procedere oltre, ci soffermiamo di nuovo sul significato dell'equazione (13.6). È bene avere chiaro in mente che la DFT di una sequenza $(x[0], x[1], \dots, x[N-1])$ è legata alla DTFT del segnale periodico ottenuto replicando la sequenza infinite volte sull'asse dei tempi. Questo renderà più semplice capirne alcune proprietà, in particolare il fatto che traslazioni nei tempi sono da intendersi in senso circolare.

Formula di Inversione. La formula di trasformazione inversa si ricava applicando quanto descritto nelle equazioni (13.3). In particolare, assumendo sempre che la sequenza $x[n]$ abbia una durata $L \leq N$, per $n = 0, 1, \dots, N-1$, abbiamo

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N} \text{DTFT}^{-1}(X_c(f)) \\ &= \frac{1}{N} \int_{0^-}^{1^-} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta\left(f - \frac{k}{N}\right) e^{j2\pi f n} df \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \int_{0^-}^{1^-} \delta\left(f - \frac{k}{N}\right) df \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{nk}{N}}. \end{aligned}$$

Otteniamo così la formula di inversione, anche detta IDFT (*Inverse Discrete Fourier Transform*)

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (13.8)$$

Useremo qui la notazione

$$x[n] = \text{IDFT}(X[k])$$

o, per essere più espliciti sul parametro N ,

$$x[n] = \text{IDFT}_N(X[k]).$$

Possiamo infine chiederci se abbia senso considerare l'uso di una DFT su N punti per una sequenza di durata L strettamente minore di N . Poiché il parametro N è legato al passo $1/N$ con cui campioniamo $X(f)$, nella condizione in cui $N > L$ stiamo di fatto “sovracampionando” la DTFT $X(f)$. Questo può essere molto utile per applicazioni importanti della DFT, come vedremo più avanti. Pertanto, data una sequenza finita di campioni $(x[0], x[1], \dots, x[L-1])$ è spesso utile estendere questa sequenza a $N > L$ campioni aggiungendo degli zeri in coda per poi effettuare una DFT su N punti. Questa operazione viene detta *zero padding*.

13.2 DFT come cambiamento di base in \mathbb{C}^n

Un modo alternativo e per certi versi molto più semplice di interpretare la DFT consiste nel vederla come un cambiamento di base in \mathbb{C}^n . Una sequenza $(x[0], x[1], \dots, x[N-1])$ può essere interpretata come la sequenza delle coordinate di un vettore x rispetto alla base canonica degli N vettori

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_1 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_{N-1} &= (0, 0, 0, \dots, 1), \end{aligned}$$

cioè scrivere

$$x = x[0]e_0 + x[1]e_1 + \dots + x[N-1]e_{N-1}.$$

Possiamo poi considerare altri vettori v_0, v_1, \dots, v_{N-1} con coordinate della forma

$$v_k[n] = e^{j2\pi \frac{nk}{N}},$$

ovvero

$$\begin{aligned}
v_0 &= (e^{j2\pi \frac{0 \cdot 0}{N}}, e^{j2\pi \frac{1 \cdot 0}{N}}, e^{j2\pi \frac{2 \cdot 0}{N}}, \dots, e^{j2\pi \frac{(N-1) \cdot 0}{N}}) \\
&= (1, 1, 1, \dots, 1) \\
v_1 &= (e^{j2\pi \frac{0 \cdot 1}{N}}, e^{j2\pi \frac{1 \cdot 1}{N}}, e^{j2\pi \frac{2 \cdot 1}{N}}, \dots, e^{j2\pi \frac{(N-1) \cdot 1}{N}}) \\
&= (1, e^{j2\pi \frac{1}{N}}, e^{j2\pi \frac{2}{N}}, \dots, e^{j2\pi \frac{N-1}{N}}) \\
v_2 &= (e^{j2\pi \frac{0 \cdot 2}{N}}, e^{j2\pi \frac{1 \cdot 2}{N}}, e^{j2\pi \frac{2 \cdot 2}{N}}, \dots, e^{j2\pi \frac{(N-1) \cdot 2}{N}}) \\
&= (1, e^{j2\pi \frac{2}{N}}, e^{j2\pi \frac{4}{N}}, \dots, e^{j2\pi \frac{2(N-1)}{N}}) \\
&\vdots \\
v_{N-1} &= (e^{j2\pi \frac{0 \cdot (N-1)}{N}}, e^{j2\pi \frac{1 \cdot (N-1)}{N}}, e^{j2\pi \frac{2 \cdot (N-1)}{N}}, \dots, e^{j2\pi \frac{(N-1) \cdot (N-1)}{N}}) \\
&= (1, e^{j2\pi \frac{(N-1)}{N}}, e^{j2\pi \frac{2(N-1)}{N}}, \dots, e^{j2\pi \frac{(N-1)^2}{N}})
\end{aligned}$$

Osserviamo che questi vettori corrispondono proprio agli N distinti segnali esponenziali complessi periodici di periodo N , discussi a pagina 97.

Possiamo verificare che, rispetto al prodotto scalare in \mathbb{C}^N introdotto nella Sezione 2.1, i vettori v_k sono ortogonali. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
\langle v_h, v_k \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} v_h[n] v_k^*[n] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{nh}{N}} e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{n(h-k)}{N}}
\end{aligned}$$

Se $h = k$, ogni termine della somma vale 1 e pertanto la somma vale N . Se invece $h \neq k$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{n(h-k)}{N}} &= \frac{e^{j2\pi \frac{N(h-k)}{N}} - 1}{e^{j2\pi \frac{(h-k)}{N}} - 1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\langle v_h, v_k \rangle = \begin{cases} N & h = k \\ 0 & h \neq k \end{cases}. \quad (13.9)$$

In particolare, i vettori sono a due a due ortogonali ed hanno norma \sqrt{N} .

La trasformata DFT della sequenza $(x[0], x[1], \dots, x[n])$ può essere interpretata (a parte un fattore di scala) come un cambiamento di base del vettore x dalla base canonica alla base dei vettori

v_0, v_1, \dots, v_{N-1} . In particolare, notiamo che i coefficienti $X[k]$ non sono altro che i prodotti scalari tra il vettore x e i vettori v_0, v_1, \dots, v_{N-1} , cioè

$$X[k] = \langle x, v_k \rangle, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

La trasformata inversa, permette di ricomporre x a partire da tali prodotti scalari secondo la relazione

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\langle x, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] v_k, \end{aligned}$$

determinando così le singole coordinate in base canonica secondo la formula vista per la IDFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Questa interpretazione rende del tutto naturale introdurre una notazione matriciale per la trasformata DFT diretta e inversa. Se scriviamo i vettori x , X e i v_k come vettori colonna, possiamo scrivere il prodotto scalare $X[k] = \langle x, v_k \rangle$ come prodotto riga per colonna del vettore riga v_k^\dagger (trasposto coniugato di v_k) per la colonna x . Tutta la trasformata può quindi scriversi come prodotto matriciale

△

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi \frac{1}{N}} & e^{-j2\pi \frac{2}{N}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{N-1}{N}} \\ 1 & e^{-j2\pi \frac{2}{N}} & e^{-j2\pi \frac{4}{N}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{2(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j2\pi \frac{(N-1)}{N}} & e^{-j2\pi \frac{2(N-1)}{N}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{(N-1)^2}{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}.$$

La trasformata inversa può essere scritta come

$$\begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j2\pi \frac{1}{N}} & e^{j2\pi \frac{2}{N}} & \dots & e^{j2\pi \frac{N-1}{N}} \\ 1 & e^{j2\pi \frac{2}{N}} & e^{j2\pi \frac{4}{N}} & \dots & e^{j2\pi \frac{2(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j2\pi \frac{(N-1)}{N}} & e^{j2\pi \frac{2(N-1)}{N}} & \dots & e^{j2\pi \frac{(N-1)^2}{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix}.$$

È abitudine esprimere tutto in funzione di una radice n -esima dell'unità

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

(detta a volte *twiddle factor*, per ragioni che qui non possiamo approfondire). Detta \mathbf{W} la matrice con elemento generico di indici k, n

$$(\mathbf{W})_{k,n} = W_N^{kn}, \quad k, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

possiamo riscrivere la trasformazione DFT nella forma

$$X = \mathbf{W}x$$

e la trasformazione inversa, IDFT, nella forma

$$x = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* X,$$

dove \mathbf{W}^* è la matrice complessa coniugata di \mathbf{W} . Si noti che la relazione espressa dall'equazione (13.9) porta a stabilire che vale la relazione

$$\frac{1}{N} \mathbf{W}^* \mathbf{W} = I_N$$

dove I_N è la matrice identità di ordine N . Pertanto, la matrice $\frac{1}{N} \mathbf{W}^*$ è l'inversa della matrice \mathbf{W} , come deve essere. La matrice $\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}$ è pertanto una matrice unitaria (ovvero una trasformazione che preserva il prodotto scalare di \mathbb{C}^n già discusso in sezione 2.1). Osserviamo che le convenzioni da noi usate riguardo alla trasformata DFT non sono universalmente adottate nemmeno nell'ambito ristretto della teoria e dell'elaborazione dei segnali. In particolare, un'altra convenzione in uso adotta la matrice $\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}$ in trasformazione diretta e la matrice $\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}^*$ in trasformazione inversa, che gode di maggior simmetria.

Esempio 40 *Calcoliamo la DFT₄ della sequenza (1, 2, 0, 1). Usando la notazione matriciale possiamo scrivere*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1-j \\ -2 \\ 1+j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La trasformazione inversa è

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1-j \\ -2 \\ 1+j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Verificare che le due matrici di trasformazione usate sono una inversa dell'altra significa verificare l'identità

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.3 Proprietà della DFT

Elenchiamo alcune proprietà importanti della DFT. Per esporre queste proprietà è necessario introdurre una notazione che permetta di gestire operazioni circolari su una sequenza di lunghezza N . Useremo la notazione

$$(n)_N = n \pmod{N}.$$

Il simbolo $(n)_N$ rappresenta quindi il resto nella divisione di n per N . Ad esempio, abbiamo $(12)_7 = 5$, $(23)_4 = 3$, $(-3)_{10} = 7$, ecc.

Traslazioni circolari. Introduciamo una operazione di traslazione circolare per una sequenza di lunghezza N , $(x[0], x[1], \dots, x[N-1])$. Per un n_0 intero, chiamiamo traslazione circolare a destra di n_0 punti la sequenza $y[n]$ definita da

$$y[n] = x[(n - n_0)_N].$$

In pratica, la sequenza $y[n]$ è ottenuta traslando a destra la sequenza $x[n]$ e “facendo rientrare” a sinistra quanto “esce” a destra. Si noti che questa definizione è del tutto naturale se si pensa al segnale periodizzato $x_p[n]$ definito in equazione (13.5); una traslazione circolare di $x[n]$ corrisponde a una traslazione di $x_p[n]$.

Convoluzione Circolare. Date due sequenze $x[n]$ e $y[n]$ di lunghezza N , definiamo la loro convoluzione circolare come la sequenza $z[n]$ di lunghezza N definita da

$$z[n] = \sum_{k=0}^N x[k]y[(n - k)_N], \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Indicheremo questa operazione con la notazione

$$z[n] = x[n] \circledast_N y[n].$$

Possiamo a questo punto elencare le proprietà della DFT.

Proprietà:

- **Linearità.** La DFT è chiaramente una trasformazione lineare, per cui se $x[n]$ e $y[n]$ sono due sequenze finite di lunghezza N abbiamo

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{\text{DFT}_N} \alpha X[k] + \beta Y[k].$$

- **Traslazione circolare.** Vale la relazione

$$x[(n - n_0)_N] \xleftrightarrow{\text{DFT}_N} X[k] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n_0}.$$

Si può mostrare facilmente questa proprietà usando la definizione, ma è più semplice giustificarla pensando alla DFT come campionamento della DTFT, ovvero come rappresentazione in frequenza del segnale ottenuto periodicizzando la sequenza $x[n]$. Una traslazione nei tempi del segnale periodicizzato produce una fase sulla DTFT $X(f)$ e sul dominio $\{0, 1, \dots, N-1\}$ una traslazione circolare della sequenza $x[n]$.

- **Modulazione.** Per dualità con la proprietà precedente, abbiamo

$$x[n] e^{j2\pi \frac{k_0}{N} n} \xleftrightarrow{\text{DFT}_N} X[(k - k_0)_N].$$

- **Simmetrie.** Per una sequenza $x[n]$ reale, la DFT gode della simmetria Hermitiana

$$X[k] = X[N - k]^*, \quad \text{per } x[n] \text{ reale.}$$

Questa si dimostra sempre facendo ricorso alla DTFT e sfruttandone la periodicità:

$$X[k] = X\left(\frac{k}{N}\right) = X\left(-\frac{k}{N}\right)^* = X\left(1 - \frac{k}{N}\right)^* = X[N - k]^*$$

Abbiamo poi una proprietà fondamentale che è di fatto un teorema di convoluzione per la DFT.

Teorema di Convoluzione (Circolare). Il prodotto delle DFT di due sequenze corrisponde alla DFT della convoluzione circolare tra le due sequenze. Ovvero, per due sequenze $x[n]$ e $y[n]$ di lunghezza N , vale la relazione

$$x[n] \otimes_N y[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}_N} X[k] Y[k]$$

Questa proprietà è fondamentale in quanto, usata opportunamente, permette di effettuare la convoluzione ordinaria tra sequenze, come vedremo nella prossima sezione. Per dimostrare la proprietà basta considerare di nuovo la DFT come campionamento della DTFT della periodicizzazione della sequenza finita.

13.4 Convoluzioni/filtraggi per via indiretta tramite DFT

Mostriamo ora come usare la DFT per il calcolo di convoluzioni ordinarie (lineari) tra segnali a durata limitata. Ricordiamo che il teorema di convoluzione per la DFT stabilisce che il prodotto delle DFT di due sequenze corrisponde alla convoluzione circolare tra le due e, pertanto, sarà necessario adottare qualche accorgimento per implementare convoluzioni lineari.

Siano quindi dati due segnali $x[n]$ e $y[n]$ di durata rispettivamente L_x e L_y . Ipotizziamo per semplicità che il supporto dei segnali sia contenuto rispettivamente in $\{0, 1, \dots, L_x - 1\}$ e $\{0, 1, \dots, L_y - 1\}$. La convoluzione $z[n] = x[n] * y[n]$ avrà durata al più $L_z = L_x + L_y - 1$ e in particolare sarà contenuta nel dominio $\{0, 1, \dots, L_z - 1\}$. In termini di DTFT, avremo

$$Z(f) = X(f)Y(f). \quad (13.10)$$

Se vogliamo usare un dominio discreto in frequenza, e quindi sfruttare la DFT, possiamo campionare la DTFT $Z(f)$ prestando però attenzione al fatto che per evitare aliasing nei tempi la trasformata $Z(f)$ va campionata con passo $1/N$ con $N \geq L_z$. I campioni presi con passo $1/N$,

$$Z\left(\frac{k}{N}\right) = X\left(\frac{k}{N}\right)Y\left(\frac{k}{N}\right)$$

possono essere interpretati in termini di DFT come

$$Z[k] = X[k]Y[k]$$

dove

$$Z[k] = \text{DFT}_N(z[n])$$

$$X[k] = \text{DFT}_N(x[n])$$

$$Y[k] = \text{DFT}_N(y[n])$$

Alla luce di quanto visto sopra si ottiene quindi la convoluzione $z[n]$ *per via indiretta* mediante uso della DFT

$$z[n] = \text{IDFT}_N(\text{DFT}_N(x[n]) \cdot \text{DFT}_N(y[n])), \quad N \geq L_x + L_y - 1.$$

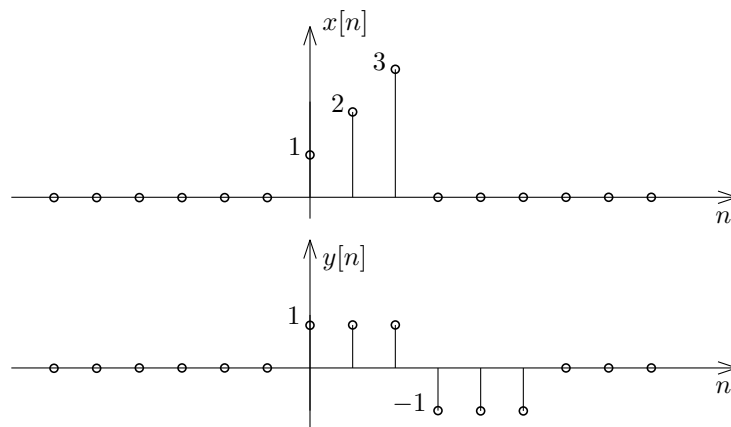
Chiariamo che qui stiamo usando la notazione già anticipata a pagina 114 per cui ad esempio $\text{DFT}_N(x[n])$ indica la trasformata della sequenza $(x[0], x[1], \dots, x[N-1])$. Spesso, i segnali $x[n]$ e $y[n]$ vengono in realtà forniti come sequenze finite dei soli campioni di interesse $(x[0], x[1], \dots, x[L_x-1])$ e $(y[0], y[1], \dots, y[L_y-1])$ che vanno quindi estese tramite una operazione di zero padding, aggiungendo un numero opportuno di zeri in coda. Come visto in precedenza, l'operazione di zero-padding permette di effettuare un sovracampionamento della DTFT. Questo è necessario, come visto, per evitare aliasing nei tempi sulla convoluzione $z[n]$, che ha durata maggiore di quella dei segnali $x[n]$ e $y[n]$.

Esempio 41 Vogliamo calcolare per via indiretta la convoluzione lineare tra i due segnali

$$x[n] = (n+1) \text{rect}_3[n]$$

$$y[n] = \text{rect}_3[n] - \text{rect}_3[n-3]$$

di seguito rappresentati graficamente.



Il segnale x ha durata $L_x = 3$ e il segnale y ha durata $L_y = 6$. La convoluzione $z[n] = x[n] * y[n]$ avrà durata $L_z = L_x + L_y - 1 = 8$. Pertanto, estraiamo dai segnali i campioni significativi seguiti da un numero di zeri appropriato per portare la lunghezza totale delle sequenze a $N = 8$. Otteniamo così le sequenze finite

$$\begin{aligned}x[n] &= (1, 2, 3, 0, 0, 0, 0) \\y[n] &= (1, 1, 1, -1, -1, -1, 0, 0)\end{aligned}$$

Le trasformate DFT_8 delle sequenze $x[n]$ e $y[n]$ danno come risultato rispettivamente

$$\begin{aligned}X[0] &= 6 & X[1] &= 1 + \sqrt{2} - (3 + \sqrt{2})j & X[2] &= -2 - 2j & X[3] &= 1 - \sqrt{2} + (3 - \sqrt{2})j \\X[4] &= 2 & X[5] &= 1 - \sqrt{2} - (3 - \sqrt{2})j & X[6] &= -2 + 2j & X[7] &= 1 + \sqrt{2} + (3 + \sqrt{2})j\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}Y[0] &= 0 & Y[1] &= 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)j & Y[2] &= -1 - j & Y[3] &= 2 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)j \\Y[4] &= 2 & Y[5] &= 2 - \frac{3}{\sqrt{2}} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)j & Y[6] &= -1 + j & Y[7] &= 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)j\end{aligned}$$

(si noti la simmetria Hermitiana!)

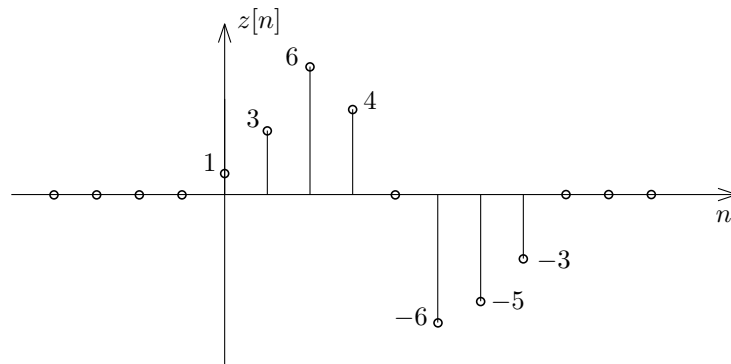
Moltiplichiamo termine a termine per ottenere i coefficienti $Z[k] = X[k]Y[k]$. Abbiamo

$$\begin{aligned}Z[0] &= 0 & Z[1] &= 1 + \sqrt{2} - (11 + 8\sqrt{2})j & Z[2] &= 4j & Z[3] &= 1 - \sqrt{2} + (11 - 8\sqrt{2})j \\Z[4] &= 4 & Z[5] &= 1 - \sqrt{2} - (11 - 8\sqrt{2})j & Z[6] &= -4j & Z[7] &= 1 + \sqrt{2} + (11 + 8\sqrt{2})j\end{aligned}$$

Antitrasformando otteniamo

$$\begin{aligned}z[0] &= 1 & z[1] &= 3 & z[2] &= 6 & z[3] &= 4 \\z[4] &= 0 & z[5] &= -6 & z[6] &= -5 & z[7] &= -3\end{aligned}$$

Questi sono i campioni non nulli del segnale convoluzione risultante che, considerato sull'intero asse dei tempi, avrà quindi la seguente rappresentazione grafica



13.5 Cenni sulla FFT

Lo studente potrebbe chiedersi a questo punto perché usare un procedimento così *complicato* per ottenere un risultato che avremmo potuto benissimo raggiungere operando solo nel dominio dei tempi, svolgendo cioè la convoluzione per via diretta. La risposta sta nella *complessità* di calcolo, intendendo però questo termine nel senso di complessità computazionale, il numero di operazioni elementari richieste da un dato algoritmo.

Il calcolo della convoluzione per via diretta richiede circa $O(L_x L_y)$ moltiplicazioni, ovvero un numero di operazioni che cresce asintoticamente come un multiplo di $L_x L_y$ all'aumentare di L_x e L_y . In termini di $N = L_x + L_y - 1$, la complessità ha quindi ordine $O(N^2)$. Anche il calcolo della DFT_N attraverso la moltiplicazione matriciale “cieca” discussa nella Sezione 13.2 richiede $O(N^2)$ operazioni e quindi, apparentemente, non c'è vantaggio nel calcolo per via indiretta.

In realtà esistono, per alcuni valori specifici di N , implementazioni molto più efficienti della DFT_N che, sfruttando in modo ingegnoso la struttura della matrice \mathbf{W} , richiedono un numero di operazioni di ordine $O(N \log N)$. Si parla in questo caso di *Fast Fourier Transform* (FFT). Poiché la moltiplicazione termine a termine tra i coefficienti $X[k]$ e $Y[k]$ richiede $O(N)$ operazioni, la convoluzione per via indiretta richiede un numero di operazioni totale di ordine

$$2O(N \log N) + O(N) + O(N \log N) = O(N \log N).$$

Quando N prende valori elevati, il vantaggio in termini di complessità di calcolo rispetto alle $O(N^2)$ operazioni richieste per il calcolo per via diretta è notevole.

Una trattazione dettagliata della FFT esula dagli scopi di questo corso. Lo studente interessato può però già capire quale sia l'intuizione alla base dell'algoritmo analizzando il semplice calcolo di una DFT_4 . Come visto in precedenza, si tratta di svolgere il prodotto

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{pmatrix}.$$

Si può notare che, grazie alla particolare struttura della matrice, i coefficienti della trasformata si possono scrivere nel seguente modo

$$\begin{aligned} X[0] &= (x[0] + x[2]) + (x[1] + x[3]) \cdot 1 \\ X[1] &= (x[0] - x[2]) - (x[1] - x[3]) \cdot j \\ X[2] &= (x[0] + x[2]) - (x[1] + x[3]) \cdot 1 \\ X[3] &= (x[0] - x[2]) + (x[1] - x[3]) \cdot j \end{aligned}$$

Con questa scrittura, che non è altro che un raccoglimento a fattor comune di alcuni coefficienti, notiamo che il numero di moltiplicazioni richieste per ciascun coefficiente della trasformata è sceso da 4 a 1 (se consideriamo anche le moltiplicazioni per 1 indicate, per non rendere l'esempio semplicistico). In realtà va anche meglio, perché i prodotti veri da calcolare sono solamente 2 in tutto, in quanto essi si ripetono combinati con segni diversi nei vari coefficienti. Si osservino ora i termini che compaiono tra parentesi; questi non sono altro che i coefficienti della DFT_2 delle sequenze $(x[0], x[2])$

e $(x[1], x[3])$. Lo studente può forse intuire, o verificare, che qualcosa di simile si potrà fare ogni volta che N è pari, riconducendo una trasformata DFT_N al calcolo di due trasformate $\text{DFT}_{N/2}$ più $N/2$ moltiplicazioni e N somme. Se N è una potenza di 2, questo trucco si può applicare ricorsivamente, riconducendo una trasformata su $N = 2^r$ punti ad una concatenazione di trasformate su 2 punti combinate via via con vari coefficienti (il nome *twiddle factor* viene da qui). Si può mostrare¹⁹ che la complessità di calcolo di questa implementazione è di ordine $O(N \log N)$. Qualcosa di analogo, più in generale, si può fare se nella fattorizzazione di N compaiono numeri primi piccoli con esponenti grandi. In ogni caso, poiché per in questo contesto N può essere scelto a piacere con il solo vincolo che sia maggiore o uguale a $L_x + L_y - 1$, la scelta abituale è di usare la più piccola potenza di 2 maggiore o uguale a tale numero.

¹⁹Si pensi a qualcosa di simile al calcolo della complessità dell'algoritmo *quicksort*.

APPENDICI

A Spazi vettoriali, Norme e Distanze

Spazio Vettoriale. Diciamo che V è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{C} se sono definite due operazioni

1. Somma tra vettori: una operazione $+$ binaria interna a V

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ (v, w) \in V^2 &\mapsto v + w \in V \end{aligned}$$

rispetto a cui V abbia la struttura di gruppo abeliano, ossia tale che

- $(v + w) + z = v + (w + z), \forall v, w, z \in V$
- $v + w = w + v, \forall v, w, z \in V$
- esiste un vettore nullo 0 tale che $v + 0 = v, \forall v \in V$
- ogni elemento v ha un opposto v' tale che $v + v' = 0$ (si indica poi generalmente con $-v$ l'opposto di v)

2. Prodotto esterno (per scalari): una operazione binaria \cdot

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times V &\rightarrow V \\ (a, v) \in \mathbb{C} \times V &\mapsto a \cdot v \in V \end{aligned}$$

che verifichi $\forall a, b \in \mathbb{C}$ e $\forall v, w \in V$

- $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$
- $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
- $a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$
- $1 \cdot v = v$

Prodotto Scalare. Diciamo che uno spazio vettoriale V sul campo \mathbb{C} è dotato di prodotto scalare (*definito positivo*) se è definita una operazione binaria $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbb{C} \\ (v, w) \in V^2 &\mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

che soddisfi le seguenti proprietà

- $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ sse $v = 0$
- $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle^*$
- $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$
- $\langle av, w \rangle = a \langle v, w \rangle$

È possibile indebolire le richieste ammettendo che $\langle v, v \rangle = 0$ possa essere verificato anche per vettori non nulli $v \neq 0$. Il prodotto scalare in tal caso è detto *semidefinito positivo*.

Norma. Dato uno spazio vettoriale V su \mathbb{C} , diciamo che una funzione $\|\cdot\|$ da V in \mathbb{R} è una norma se soddisfa le seguenti condizioni

- $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0$ sse $v = 0$
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

È possibile indebolire le richieste ammettendo che $\|v\| = 0$ possa essere verificato anche per vettori non nulli $v \neq 0$. In tal caso non si parla propriamente di norma ma di *seminorma*.

Distanza (o metrica). Dato un insieme V , diciamo che una funzione d da $V \times V$ in \mathbb{R} è una distanza se verifica le seguenti condizioni

- $d(v, w) \geq 0$, $d(v, w) = 0$ sse $v = w$
- $d(v, w) = d(w, v)$
- $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w)$

È possibile indebolire le richieste ammettendo che $d(v, w) = 0$ possa essere verificato anche per vettori distinti $v \neq w$. In tal caso non si parla propriamente di distanza o metrica ma di *pseudo-metrica*.

Norme e Distanze Indotte. Dato uno spazio vettoriale V su \mathbb{C} , la definizione di un prodotto scalare (definito positivo) su V induce una norma su V attraverso la relazione $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. A sua volta, una norma induce una distanza attraverso la relazione $d(v, w) = \|v - w\|$. La definizione di un prodotto scalare semidefinito positivo, invece, induce attraverso le stesse relazioni una seminorma che a sua volta induce una pseudo-metrica.

B Cenni di Teoria delle Distribuzioni

B.1 Intuizione

Nella trattazione degli spazi vettoriali, abbiamo visto che in uno spazio V di dimensione n un vettore è completamente descritto dalle sue proiezioni sugli n vettori di una base qualsiasi. È quindi ovvio che ogni vettore v di tale spazio è univocamente determinato a partire dai prodotti scalari con tutti gli altri vettori dello spazio. Equivalentemente, se definiamo

$$f_v(w) = \langle w, v \rangle, \quad v, w \in V$$

allora i valori presi da f in corrispondenza dei vari w definiscono univocamente v . In particolare, possiamo osservare, grazie alla linearità del prodotto scalare nel primo termine, che per ogni v

la funzione f_v è lineare. Poiché v determina f_v e, come già detto f_v determina univocamente v , possiamo affermare che ad ogni vettore v è associata in maniera univoca una funzione lineare sullo spazio V . Si può mostrare facilmente (usando una base) che per spazi di dimensione finita V , *qualsiasi* funzione lineare si può esprimere in questo modo, ovvero data una f lineare qualsiasi, esiste v tale che $f = f_v$. Pertanto, si possono identificare i vettori con le funzioni lineari. La teoria delle distribuzioni nasce dall'idea di estendere questo concetto a spazi vettoriali più ampi.

Continua...