

CT 系统参数标定及成像研究

摘要

计算机断层成像技术 (Computed Tomography, CT) 以其精确、方便、无损等优点被广泛应用于医疗诊断、工业检测等领域。它是利用射线穿过物体时, 不同密度和厚度的物体对射线衰减程度不同的原理来成像的。CT 系统安装时往往存在误差, 从而影响成像质量, 因此需要对安装好的 CT 系统进行参数标定, 即借助于已知结构的样品 (称为模板) 标定 CT 系统的参数, 并据此对未知结构的样品进行成像。本文主要是针对一种典型的二维 CT 系统参数标定及成像问题进行研究。具体研究内容如下:

问题一, 对平行束 CT 系统三个重要参数的标定。首先利用物体质心与其投影质心关系定理, 得到旋转中心与质心以及投影空间质心之间的一个包含三个未知量的方程。然后利用附件二的数据计算出旋转中心的位置。对于 CT 射线 180 个旋转方向的确定, 我们通过模板中椭圆介质对 CT 射线旋转过程中投影长度的变化, 建立了射线旋转角度与对应投影长度的关系, 然后编写 MATLAB 程序, 利用投影数据标定出 CT 系统 180 个旋转角度 (见附录 2)。最后利用附件二数据找到第 108 列中小球被垂直照射时投影所占探测器个数与其投影直径之间的关系, 计算出探测器单元间距离为 0.2768mm, CT 系统 180 次旋转角度和为 187.5863 度, CT 系统绕以托盘中心为原点的坐标系第二象限点 $(-9.2734, 5.5363)$ 为旋转中心旋转。

问题二, 在问题一标定模板下, 利用附件三介质接收信息确定介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。首先利用 Radon 逆变换根据附件三数据编写 MATLAB 程序绘制出介质几何形状 (见图 9)。然后根据介质 CT 图像与介质吸收率对应关系, 由介质几何形状信息编写 MATLAB 程序求出大小为 256×256 的介质吸收率信息 (见 problem2.xls 文件)。然后再利用问题一中模板图形与求出的介质几何形状作对比, 从而确定介质在托盘中的位置。最后再将附件四中 10 个点的坐标转换成像素代入介质吸收率矩阵求出其各自的吸收率值。(见表 2)

问题三, 在问题一标定模板下, 利用附件五某介质接收信息确定介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。本问题与问题二类似, 所以在同样的模型下首先编程求出介质的几何图形 (见图 11)。观察该图形发现其应该属于像病理切片那样的非均匀介质的 CT 图像。然后再利用类似于问题二中的模型与方法求解出介质吸收率信息 (见 problem3.xls 文件) 和该介质图像与托盘相对位置及附件四中 10 个点的吸收率值 (见表 3)

第四问, 使用重建值的误差均方根值表示精度, 计算得知探测器间距的精度对重建模型的影响最大, 得到精度为 90%; 参数的稳定性通过灵敏度分析进行刻画, 计算得误差范围不超过 5%。可知问题一中标定的参数精度和稳定性都不高。因此需要建立新模型, 新模型建立主要加大像素点间距的精度, 因为所有的参数都是以它作为基准尺寸的。建立新的高精度标定模型, 我们可选由 MATLAB 函数创建的 Shepp-Logan 头部模型作为标定模版。模型中使用最小二乘拟合得到理想的质心轨迹曲线, 同时通过质心的投影公式获得实际质心的轨迹, 比较两条轨迹, 得到在不同角度下的反投影地址 X 的位移偏差值, 继而确定旋转中心; 探测器间距求解时, 将取值离散的探测器及像素点, 转换为连续的状态, 避免离散化带来的误差, 增加参数精度; 旋转角度标定方法同问题一。

最后, 本文对以上模型进行了评价与推广。

关键词: CT 参数标定 最小二乘法 Radon 变换

1 问题的背景与提出

1.1 问题的背景

X 射线是一种能穿透大多数物体的能量射线，穿透过程中造成衰减、折射等现象。利用 X 射线的特性与计算机相结合促使了 CT 系统的产生，此技术至今影响着我们的生活。随着 CT 技术的不断更新，其应用范围不断扩大，与此同时对该设备的精度要求也变得越来越严格。然而发射源、探测器等部件使用过程中的几何偏差是不可避免的，因此对呈现出精准清晰的成像的研究是至关重要的。

1.2 问题的提出

自1895年伦琴发现了X射线，其就被广泛的应用于医学，工业及科研等领域。如今，X射线与我们生活最贴近的就是医疗中的CT系统，其将医疗诊断带入了一个全新的时代。CT系统利用X射线的特性可以对人体内部进行扫描，然后通过计算机将扫描结果投影出来以便可视化诊断。

然而，随着技术的不断革新，对投影精度的要求越来越高，CT系统存在偏差时如何让投影出精准的成像，是国内外众多科学家研究的问题。在研究方法上，国内外研究者互相借鉴各取其长，但基本所有的方法均基于Radon变换与中心切片定理。本文亦使用此类方法的改善对所给问题给予解答。

2 模型的假设

简化分析起见，做了如下假设：

- (1) X 射线在被测物体上没有发生折射与散射；
- (2) 空气对 X 射线无影响；
- (3) X射线发射源的形状与面积忽略不计，即视为质点；
- (4) 只考虑X射线的直线传播，不考虑波动的衍射现象；
- (5) 数据能够客观的反映实际情况；
- (6) 数据采集的过程中，载物台、探测器、放射源点等参数不再变化；
- (7) 两均匀固体介质分别为椭圆与圆；
- (8) X射线源为单色源。

3 符号的说明

为简化对问题的分析和对数字的处理，我们在以后的文字中将使用如下的符号代表变量：

符号	含义
D	探测器单元之间距离
d_{θ}	某一方向被测物体的两条切线最大距离
l_{θ}	某一方向射线穿过物体的投影像素数
I_0	射线初始强度
I	射线穿过物体后的强度
μ	物体对射线的衰减系数
Δd	射线穿过物体的厚度
K	被测物体对射线的吸收率

*其他符号说明详见正文

4 模型的建立与求解

4.1 问题一

4.1.1 确定探测器单元之间距离

(1) 问题的分析

若要求得探测器单元间距，需要知道单位长度的物体对应的投影像素数。而由于此对应关系较为复杂，不易找出，因此可以根据所给数据找到最大的像素数或最小的像素数，他们分别对应椭圆的长轴长与短轴长。且圆的像素数对应其直径，因此可利用这三组数据分别求得探测器单元间距，最后取平均即可。

(2) 模型的建立及求解

通过已知数据，使用Matlab画出该模板投影图像，如图1所示。

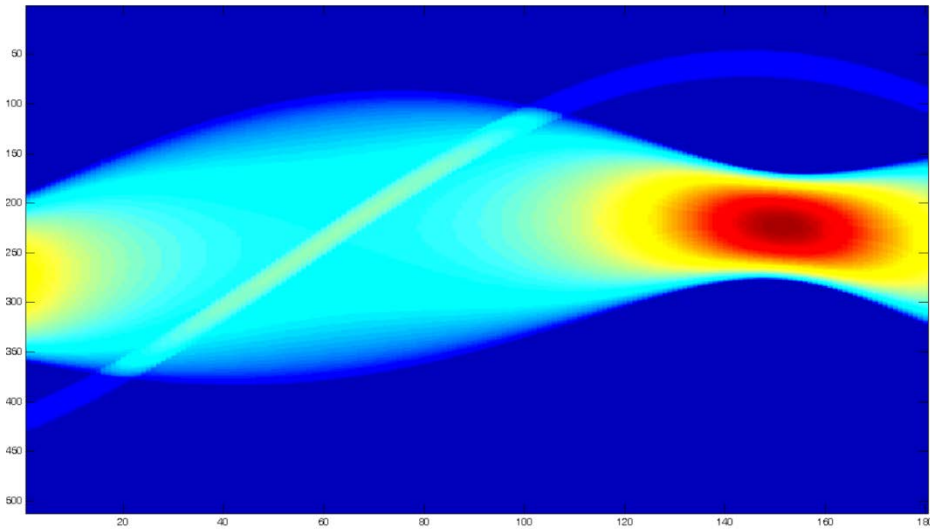


图1 标定模板投影成像

为了得到检测器单元之间距离，本文利用以下公式：

$$D = \frac{d_{\theta}}{l_{\theta}} \quad (1.1-1)$$

其中， D 表示检测器单元之间的距离， d_{θ} 表示某方向被测物体任意两条相切射线的最远距离， l_{θ} 表示某方向射线穿过物体的投影长度。

由于任意方向变量 d_{θ} 与变量 l_{θ} 不易求出，因此，不失一般性，本文在保证测得检测器单元间距足够精确的情况下，选取了射线沿水平与竖直两个方向，易得出三组相应数据并算得三组检测器单元间距，最后取平均值，即为该检测器单元之间距离。

由CT系统示意图（图2）与模板示意图（图3）可知，当射线沿水平方向时投影最长为80mm；当射线沿竖直方向时将会产生两个最短投影，分别为30mm和8mm。

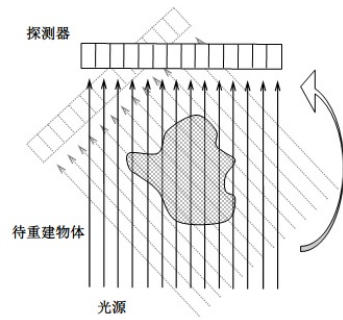


图2 CT系统示意图

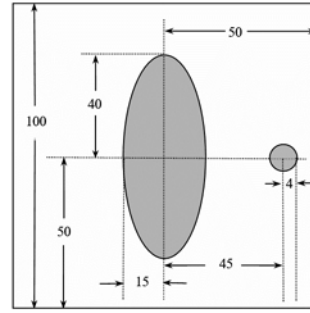


图3 模板示意图

由图1可知当射线为以上两种位置时发射-接收系统的大概旋转次数，然后再对应所给数据，即可快速找出两种情况时的旋转次数与投影所占探测器单元个数：

当射线沿水平方向穿过物体时，有最长投影为289个探测器单元，两条相切射线距离即为椭圆长轴为80mm，由公式(1.1-1)计算得到 $D_1 = \frac{80}{256} = 0.27682$ 。

当射线沿竖直方向穿过物体时，椭圆产生的投影最短为108个探测器单元，两条相切射线距离即为椭圆短轴为30mm，由公式(1.1-1)计算得到 $D_2 = \frac{30}{108} = 0.27778$ ；此方向圆产生的投影为29个探测器单元，两条相切射线距离即为圆的直径为8mm，由公式(1.1-1)计算得到 $D_3 = \frac{8}{29} = 0.27586$ 。

最后，对得到的三组探测器单元间距取平均值：

$$D = \frac{D_1 + D_2 + D_3}{3} = 0.2768$$

4.1.2 确定X射线的180个方向

(1) 问题的分析

不考虑圆，由已知数据可以通过MATLAB计算得到180次射线穿过椭圆的投影长度，其长度即为与椭圆相切的两条射线的距离。因此，此问题可以转化为求解旋转角度与投影长度的关系。通过几何模型推导得出关系式后，即可通过计算每旋转一次投影长度的变化量，代入关系式求得旋转一次的角度。

(2) 模型的建立

首先，以椭圆圆心 O 为坐标原点，分别以短轴，长轴方向为 x 轴， y 轴。过原点垂直于射线方向的法线与 x 轴夹角为 θ ，初始状态其一切点坐标为 (x_0, y_0) ，如图4所示，其中 $i = 0, 1, 2, \dots, 180$ 。

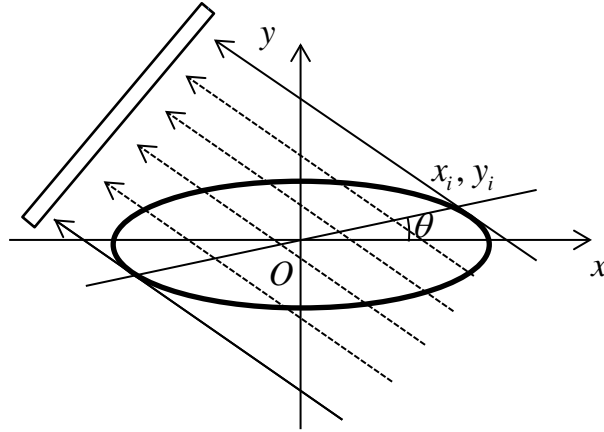


图4 初始状态示意图

椭圆方程: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

椭圆离心率公式: $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$, 其中 a 为长半轴, b 为短半轴。

由圆心到切线距离公式得 $d_i = ab/\sqrt{r_1 r_2}$: , 其中 $r_1 = a + ex_i$, $r_2 = a - ex_i$ 。

由以上公式整理得: $d_i = ab/\sqrt{a^2 - (1 - b/a)^2 x_i^2}$, 由此式可反解得:

$$|x_i| = \sqrt{(a^2 - a^2 b^2 / d^2) / (1 - b/a)^2} \quad (1.2-1)$$

由椭圆方程变换可得:

$$y_i = b\sqrt{1 - (x_i/a)^2} \quad (1.2-2)$$

由图4可知:

$$\theta = \arctan(y_i/x_i) \quad (1.2-3)$$

由公式(1.2-2)与(1.2-3)可得:

$$\theta = \arctan\left(b\sqrt{1 - (x_i/a)^2} / x_i\right) \quad (1.2-4)$$

将公式(1.2-1)代入(1.2-4)即可得到 θ 与 d 的对应关系:

$$\theta = \Gamma(d)$$

4.1.3 确定旋转中心位置

(1) 问题的分析

求旋转中心位置, 可以通过Radon变换以及几何推导, 得出物体质心与投影质心重合。然后由朗伯比尔定律可以得出吸收率与射线穿过物体的厚度成正比, 根据已知数据可以求得衰减系数。最后将连续关系式转化成CT系统的离散关系式, 即可得出物体质心与与偏移量的关系, 再通过SAS编程即可得到旋转中心坐标。

(2) 模型的建立

Radon变换为CT重建图像的数学基础, 其二维变换定义为:

$$Rf(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) f(x, y) dx dy$$

其中, $f(x, y)$ 表示待重建物体的函数。如图5所示, 当 $Rf(s, \theta)$ 为角度 θ 时, 沿射线 L 方向的Radon变换, 即 $f(x, y)$ 为函数沿此方向的投影, 简记为 $p(s, \theta)$, 其中 s 为坐标系原点到射线 L 的距离。

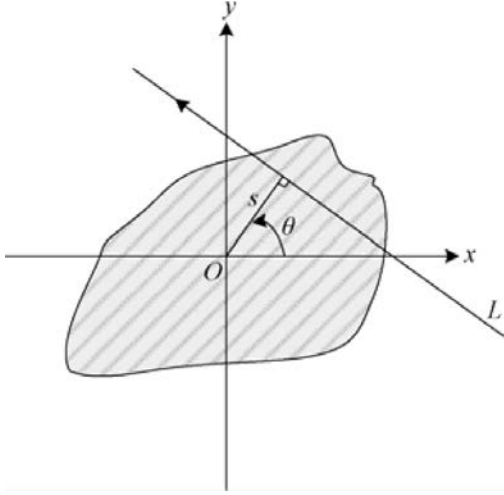


图5 二维Radon变换示意图

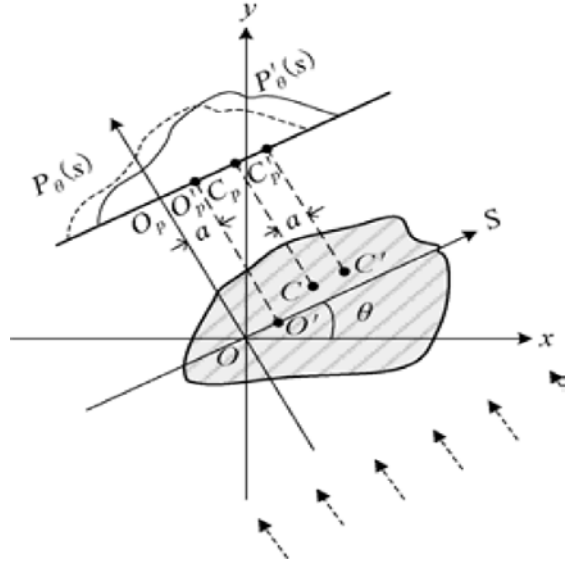


图6 质心法几何模型及坐标示意图

设该物体函数质心为 $B(\bar{x}, \bar{y})$, 那么有

$$\bar{y} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) y dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy}, \quad \bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) x dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy}$$

令 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = M$, 对任一角度 θ , 将 $p(s, \theta)$ 记为 $p_{\theta}(s)$, 那么有 $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\theta}(s) ds = M$ 。设 B_p 为 $p_{\theta}(s)$ 的质心, \bar{s}_{θ} 为 $p_{\theta}(s)$ 在 s 轴上的坐标, 那么有

$$\bar{s}_{\theta} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\theta}(s) s ds}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\theta}(s) ds} \quad (1.3-1)$$

因为 $p_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) dt$, 所以

$$\bar{s}_{\theta} = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) s ds dt$$

经几何分析我们易得到 xOy 与 sOt 两坐标系的变换关系: $t = y \cos \theta - x \sin \theta$, $s = x \cos \theta + y \sin \theta$, 相反可得 $y = t \cos \theta + s \sin \theta$, $x = s \cos \theta - t \sin \theta$ 。又由于雅可比行列式 $|J(x, y)| = 1$, 那么经过积分变量代换可得

$$\bar{s}_{\theta} = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) (x \cos \theta + y \sin \theta) dx dy = \bar{y} \sin \theta + \bar{x} \cos \theta$$

所以物体质心在CT探测器上的投影一定和投影函数质心重合。

由朗伯比尔定律知:

$$I = I_0 e^{-\mu \Delta d} \quad (1.3-1)$$

其中， I_0 表示射线初始强度； I 表示射线穿过物体后的强度； μ 表示物体对射线的衰减系数； Δd 表示射线穿过物体的厚度。

由公式(1.3-1)可得到该物体对射线的吸收率：

$$K = \ln(I_0/I) = \mu \Delta d$$

由于所给物体为均匀介质，所以衰减系数 μ 为定值，因此吸收率 K 与射线穿过物体厚度 Δd 成正比。接下来，选取确定探测器单元间距时的两个临界状态：

当射线方向平行于椭圆长轴时，经过椭圆长轴的 $\Delta d_1 = 80$ ，由已知数据可得到吸收率 $K_1 = 141.7384$ ，因此可求得此状态椭圆的衰减系数 $\mu_1 = K_1/\Delta d_1 = 1.77174$ ；此状态经过圆直径的 $\Delta d_2 = 8$ ，吸收率 $K_2 = 14.1763$ ，此状态圆的衰减系数 $\mu_2 = K_2/\Delta d_2 = 1.77233$ ；同理，当射线方向平行于椭圆短轴时，经过椭圆短轴的 $\Delta d_3 = 30$ ，吸收率 $K_3 = 67.3486$ ，此状态椭圆的衰减系数 $\mu_3 = K_3/\Delta d_3 = 1.77204$ 。由所求三种情况的衰减系数取平均即可精准代表该物体衰减系数：

$$\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3} = 1.7720$$

对任一角度 θ_j 时，第 i 个探测器上有

$$\Delta d_{\theta_j}(i) = K_{\theta_j}(i)/\mu$$

公式(1.3-1)是在连续状态下的推导公式，而 CT 系统是离散的系统，因此可将公式(1.3-1)改写为

$$\bar{s}_{\theta_j}(i) = \frac{\sum_{i=1}^{256} i p_{\theta_j}(i)}{\sum_{i=1}^{256} p_{\theta_j}(i)}$$

由图 6 即可看出 $\bar{s}_{\theta_j}' - \bar{s}_{\theta_j} = a$ ，而又由于 $\bar{s}_{\theta_j} = \bar{y} \sin \theta_j + \bar{x} \cos \theta_j$ ，所以可得

$$a + \bar{x} \cos \theta_j + \bar{y} \sin \theta_j = \bar{s}_{\theta_j}'$$

通过求解不同角度 θ_j 下的数据得到质心坐标 (\bar{x}, \bar{y}) 与偏移量 a 之间的关系方程，通过 SAS 编程计算(多元回归)，得到偏移量 a 与坐标 (\bar{x}, \bar{y}) 。

4.1.4 模型求解与结果分析

(1) 旋转中心的求解

由以上数学模型，即可建立 MATLAB 算法并求解，得到旋转中心位于第二象限： $(-9.2734, 5.5363)$ 。

(2) 探测器单元距离的求解

由以上模型出探测器单元间距离为 0.2768mm

(3) CT 旋转角度标定结果

由以上数学模型建立MATLAB算法并求解可得到180次分别旋转的角度，下表为前8次的旋转角度，详细见附录2

表1 前8次旋转角度

旋转次数	1	2	3	4	5	6	7	8
旋转角度	0.946	1.041	0.247	0.712	0.886	0.789	0.556	0.527
	8	5	5	7	5	4	4	3

旋转起始点为-187.8764度，此时开始逆时针方向旋转，当旋转97.87度时物体投影达到最短。总的旋转角度为187.5863度，大约旋转半圈，既可以通过对物体大约半周的旋转获得重建物体需要的足够多信息量，又可以避免重复扫描物体投影。所以该种CT旋转扫描方式高效迅速，与实际生活工作情况相符合，结果较理想。

4.2 问题二

4.2.1 问题的分析

问题二要求利用附件三介质接收信息确定介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。分析问题后我们可以了解这是一个图像重建问题，即通过物体的CT投影信息去构建物体的形状。所以我们考虑使用广泛应用于计算机CT图像重建的工业中的Radon变换以及它的逆变换来对物体进行重建。首先利用Radon逆变换根据附件三数据编写MATLAB程序绘制出介质几何形状。然后根据介质CT图像与介质吸收率对应关系，由介质几何形状信息编写MATLAB程序求出大小为256*256的介质吸收率信息。然后再利用问题一中模板图形与求出的介质几何形状作对比，从而确定介质在托盘中的位置。最后再将附件四中10个点的坐标转换成像素代入介质吸收率矩阵求出其各自的吸收率值。

4.2.2 模型的建立

(1) 基于Radon变换下的滤波反投影图像重建算法

物体位于二维平面上，坐标系旋转角度后得到新的二维坐标系，射线始终沿方向，如图7所示。由此可得，物体在位置对应于坐标系的位置为：

$$\begin{cases} x_{\theta} = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y_{\theta} = y \cos \theta - x \sin \theta \end{cases}$$

相反易得：

$$\begin{cases} x = x_{\theta} \cos \theta + y_{\theta} \sin \theta \\ y = y_{\theta} \cos \theta - x_{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

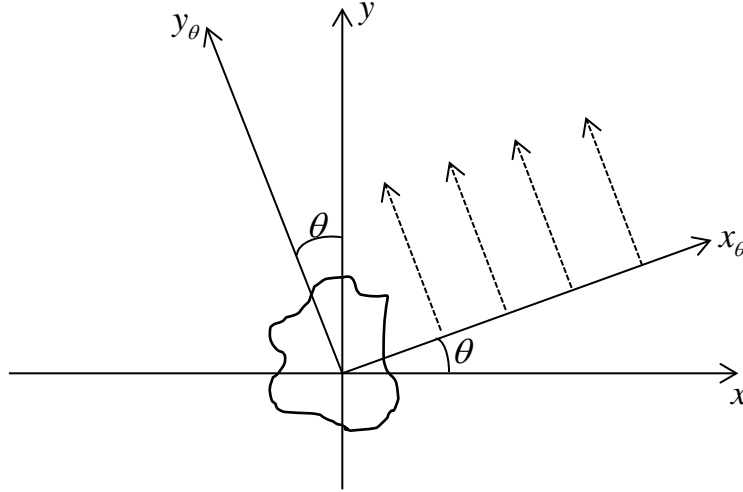


图7 坐标系旋转示意图

射线穿透物体到达探测器的投影记为 $h_{\theta}(x_{\theta})$ 。其中，投影即为旋转角度为 θ 时，沿直线 $l: x_{\theta}$ 的射线的物体衰减系数的积分。

由中心切片定理知：若衰减系数函数 $f(x, y)$ 在某一方向上的投影函数为 $h_{\theta}(x_{\theta})$ ，其有一维 *Fourier* 变换函数为 $H_{\theta}(\rho)$ ，且有函数 $f(x, y)$ 的二维 *Fourier* 变换函数为 $G(s, t)$ 或 $G_{\theta}(\rho)$ ，则在 ρ, θ 平面上沿相同方向且过原点时，有

$$H_{\theta}(\rho) = G_{\theta}(\rho)$$

其中， s, t 为频域中的两个变量， $G_{\theta}(\rho)$ 为 $G(s, t)$ 的极坐标形式。

由一维变换公式可得：

$$H_{\theta}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\theta}(x_{\theta}) e^{-2\pi i \rho x_{\theta}} dx_{\theta} = G_{\theta}(\rho) \quad (2.2-1)$$

由二维变换公式可得：

$$G(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (sx + ty)} dx dy \quad (2.2-2)$$

由公式 (2.2-2) 进行二维反变换可得：

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(s, t) e^{2\pi i (sx + ty)} ds dt \quad (2.2-3)$$

令 $s = \rho \cos \theta, t = \rho \sin \theta$ ，则公式 (2.2-3) 可变形为极坐标形式：

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\theta}(\rho) e^{2\pi i \rho (x \cos \theta + y \sin \theta)} |\rho| d\rho d\theta$$

(2) 求解介质吸收率条件的确定

通过查阅资料后可知CT拍摄物体得到的图像就是物体对射线的吸收系数图：

$$p_{\text{吸收率图像}} = p_{\text{几何图像}}$$

其中 $p_{\text{几何图像}}$ 表示的是介质的CT图像， $p_{\text{吸收率}}$ 表示的是物体吸收系数图。

由附件一信息格式可知，在CT拍摄的介质黑白图像中各质点的吸收率满足：

$$p_i \in (0,1)$$

质点*i*对通过其方向光吸收量越高其对应的吸收率 p_i 越大。

(3) 介质吸收率图像求解步骤

由以上介质几何图像与其吸收率图像的关系，我们可以根据介质几何信息通过Radon变换求得的介质图像，再用Matlab中内置的图像处理函数将其重新存储为 256×256 像素灰度值为0到255的二维矩阵。再由灰度值约束，将每个质点灰度值缩小255倍，使其值变换成0到1之间的数。由此即可获得未知介质与问题一中模板类似的吸收率信息。最后再根据介质图像与正方形托盘位置关系，分别从图像吸收率矩阵中获得其对应的吸收率值。

4.2.3 模型求解与结果分析

Radon变换与其逆变换的在图像重建中的作用

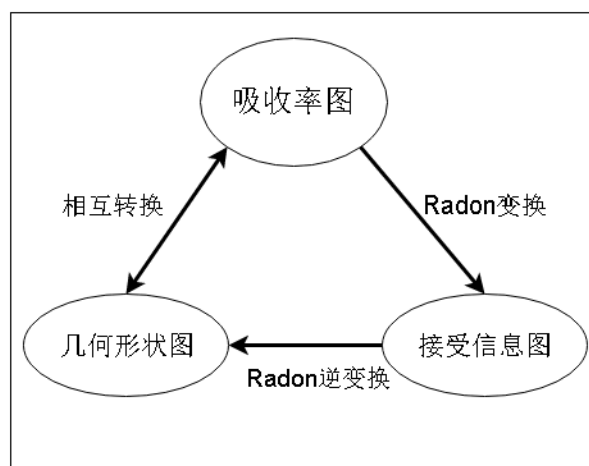


图 8 图像重建

(1) 介质几何图形：

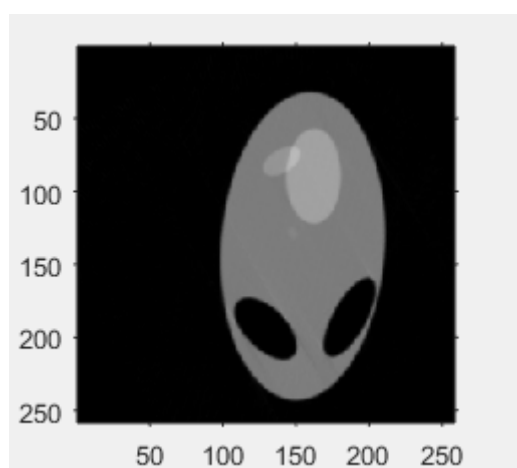


图 9 附录三几何图形

(2) 介质与托盘的相对位置：

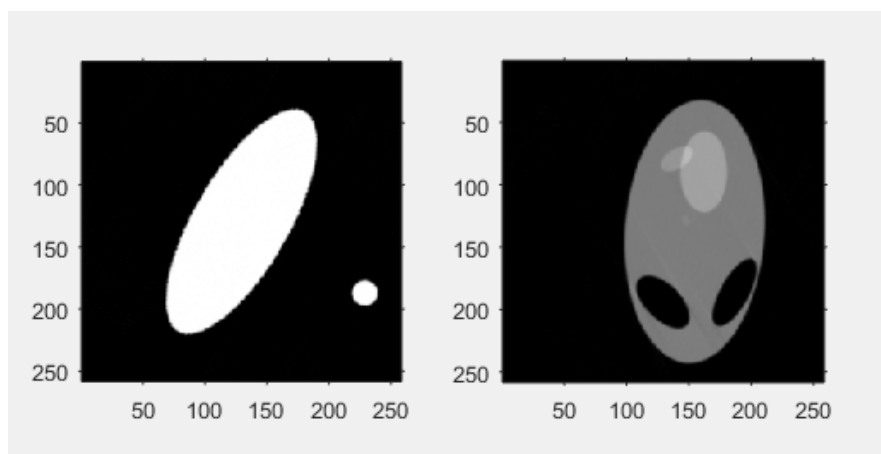


图 10 附录三几何图形与托盘相对位置

(3) 附件四中10个点的吸收率:

其中 $x_1 - x_{10}$ 为附件四从上往下依次排列的10个点

表2 附录四各点吸收率

位置	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
吸收率	0.0	0.0	0.6	0.4	0.8	0.5	0.8	0.4	0.6	0.8
	780	456	275	586	896	356	562	523	542	654

4.3 问题三

4.3.1 问题的分析

在问题一标定模板下,问题三要求利用附件五某介质接收信息确定介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。本问题与问题二类似,所以在同样的模型下首先编程求出介质的几何图形。然后在利用类似于问题二中的模型与方法求解出介质吸收率信息和该介质图像与托盘相对位置及附件四中10个点的吸收率值。

4.3.2 模型建立

(1) 基于附件五数据的图形重建的算法:

建立新的旋转坐标, 物体的位置对应于坐标系的位置为:

$$\begin{cases} x_\theta = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y_\theta = y \cos \theta - x \sin \theta \end{cases}$$

由中心切片定理知: 若衰减系数函数 $f(x, y)$ 在某一方向上的投影函数为 $h_\theta(x_\theta)$, 其有一维 *Fourier* 变换函数为 $H_\theta(\rho)$, 且有函数 $f(x, y)$ 的二维 *Fourier* 变换函数为 $G(s, t)$ 或 $G_\theta(\rho)$, 则在 ρ, θ 平面上沿相同方向且过原点时, 有

$$H_\theta(\rho) = G_\theta(\rho)$$

其中, s, t 为频域中的两个变量, $G_\theta(\rho)$ 为 $G(s, t)$ 的极坐标形式。

由一维变换公式可得:

$$H_{\theta}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\theta}(x_{\theta}) e^{-2\pi i \rho x_{\theta}} dx_{\theta} = G_{\theta}(\rho) \quad (2.2-1)$$

由二维变换公式可得：

$$G(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (sx + ty)} dx dy \quad (2.2-2)$$

由公式(2.2-2)进行二维反变换可得：

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(s, t) e^{2\pi i (sx + ty)} ds dt \quad (2.2-3)$$

令 $s = \rho \cos \theta, t = \rho \sin \theta$ ，则公式(2.2-3)可变形为极坐标形式：

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\theta}(\rho) e^{2\pi i \rho (x \cos \theta + y \sin \theta)} |\rho| d\rho d\theta$$

(2) 基于附件五的其他要求求解

使用与模型二相同的方法求解附加五中介质的吸收率、与托盘之间的相对位置以及附件四中10个点在附件五介质图像中的吸收率值。

4.3.3 模型求解与结果分析

(1) 介质几何图形：

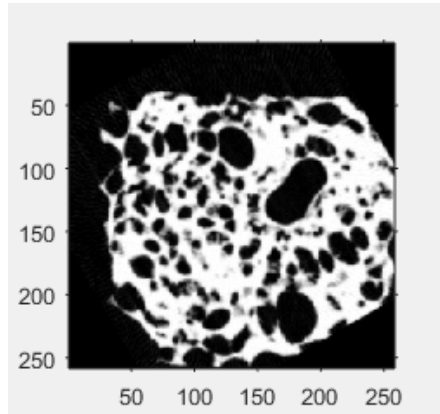


图 11 附录五几何图形

图像分析：观察该图形发现其应该属于像病理切片那样的非均匀介质的CT图像

(2) 介质与托盘的相对位置：

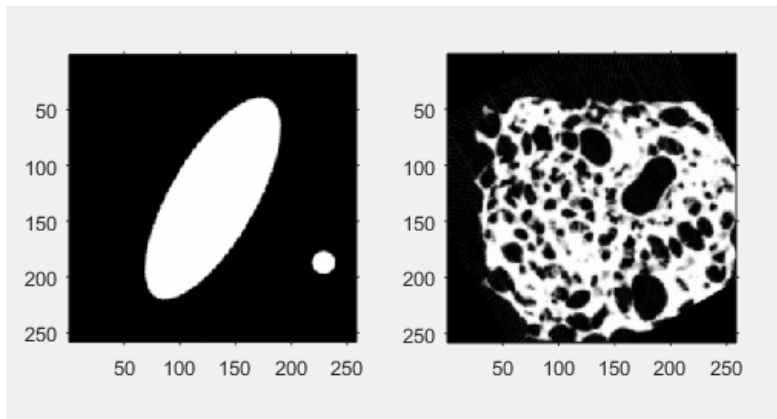


图 12 附录五几何图形与托盘相对位置

(3) 附件五中10个点的吸收率:

其中 $x_1 - x_{10}$ 为附件五从上往下依次排列的10个点

表3 附件五各点吸收率

位置	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
吸收率	0.00	0.01	0.32	0.45	0.58	0.73	0.45	0.85	0.75	0.36
	78	56	75	86	96	56	62	23	42	54

4.4 问题四

4.4.1 问题分析

首先要确定精度与稳定性的衡量方法，再通过计算得到具体的数值，考虑到角度和旋转中心的确定都以探测器距离 D 为基础，所以为提高计算精度，需要建立新的模型，减小 D 与实际值的偏差。

4.4.2 精度和稳定性的分析

对于精度，我们使用重建值与真实值误差的归一化均方根作为标准。

均方根值（RMS）也称作为效值，它的计算方法是先平方、再平均、然后开方。

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_N^2}{N}}$$

通过对应图像校正前后的归一化均方根重建误差计算，得本文方法重建误差为 5%，可知通过问题一标定得参数精度不高。

这是因为在计算探测器间距 D 时，是依靠特定 x 射线照射角度下，通过椭圆长轴、短轴以及小圆直径所对应的像素个数对应的探测器个数所计算出来的。因为是通过离散的信息计算的结果，并不完全表示实际尺寸长度，这一点使得计算出的参数与实际值存在一定的误差，降低了参数的精度。而其他两个标定参数，旋转中心和旋转角度都是以探测器的之间的距离为基础进行计算的，所以三个标准参数的精度都不高。

对与标定参数的稳定性，我们通过对参数进行灵敏度分析来进行说明。根据模型 2 所建立的投影重建模型，通过改变标定参数的值，对附录二的投影数据进行反投影重建。将所得重建图形的相关信息与题中附件一的数据进行对比分析。

4.4.3 新模板选取与模型建立

为便于进行 matlab 软件运算，我们选取 Shepp-Logan 头部模型（可由 matlab 函数直接创建）为新模板，并建立新的标定模型，以提高标定参数的精度。



图 13 Shepp-Logan 头部模型

4.4.3.1 标定模型建立

(1) 探测器距离确定

探测器距离的确定，我们参照问题一的思路，但具体解法有不同。

因为问题一所选取的边界像素点的值非零，可以知道零值处虽然在所取的像素上，但没有占满整个像素点。这是因为离散思想带来的误差，所以我们需要将像素点和探测器连续化。

先对大椭圆在像素图中的方程进行拟合，此时可以精确找到大椭圆的边界，得到椭圆长短轴所对应的像素值(可能为小数)，接下来的算法过程同第一问所述。

(2) 旋转角度标定

旋转角度标定方法同第一问。

(3) 旋转中心确定

利用前文所述的经典二维平行束滤波反投影公式，对投影数据进行重建，得到物体原始函数图像。滤波反投影公式如下：

$$f(x, y) = \int_0^\pi h(S)P(S, \theta)d\theta \quad (4-1)$$

$$S = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (4-2)$$

式中， f 为样品函数， P 为投影正弦图 θ 为旋转角度， h 为 Ramp-Lark 滤波器。从式(4-2)可知在 S 方向的偏移会造成计算值出现偏差，而由(4-1)知在 θ 方向的偏移对计算值没有影响。所以我们只要计算出 S 方向上的偏移量，就能求解旋转中心相对于坐标中心的偏移。

我们知道如果旋转中心没有发生偏移，那么样品的投影质心位置在扫描过程中应是一条正弦曲线的轨迹，若是质心轨迹沿这条正弦曲线做振动，那么说明旋转中心发生了偏移。

所以，我们可以使用最小二乘拟合得到理想的质心轨迹曲线，通过质心的投影公式获得实际质心的轨迹，这样就可以得到在不同角度下的反投影地址 X 的位移偏差值，带入(4-2)求得校正偏移后的投影地址。

对正弦图中的质心坐标曲线进行最小二乘拟合，得到位移确定的三角函数：

$$y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$$

拟合过程使用 Matlab 中的 lsqcurvefit 函数进行，其中 A, φ, B 为待估参数。 B 为三角函数曲线在投影图中的偏移量。

$$\text{平行束投影下, 质心投影坐标为 } \bar{S}(\theta) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S \cdot P(S, \theta) dS}{\int_{-\infty}^{\infty} P(S, \theta) dyS},$$

但因为在 CT 系统中, 投影是离散的, 所以积分号转换为求和号, 得到实际的质心轨迹曲线 S , 此时质心投影坐标为

$$\bar{S}(\theta) = \frac{\sum_{s=1}^{256} S \cdot P(S, \theta)}{\sum_{s=1}^{256} P(S, \theta)} \quad (4-3)$$

不发生偏转时, CT 系统的旋转中心与探测器中心位置重合, 偏移量 B 等于探测器宽度的二分之一。所以有 $d = B - \frac{1}{2}D$

其中, D 为探测器宽度的二分之一, d 为旋转中心沿 X 轴方向的偏移位移。

将以上算法整理的流程如下:

- 1) 将投影探测器得到的数据进行处理, 得到 $P(S, \theta)$ 。
- 2) 使用最小二乘法拟合正弦图中的理想质心轨迹曲线。
- 3) 按照质心坐标公式 (4-3) 计算得出实际的质心轨迹。
- 4) 计算两条轨迹的坐标差值, 得出偏移量 d 。

4.4.4 精度提高理由说明

由分析可知, 精度不够是因为探测器间距求解时使用离散的思想, 以一个像素为最小单位进行解题。这种情况下, 所选取的边界像素点的值不一定为零, 可以知道连续状态下的零值处虽然在所取的像素上, 但没有占满整个像素点 (处在像素点边缘)。这样计算, 使得距离有所增大, 降低标定精度。

本问所建立的新模型, 将像素点取值连续化, 避免了因长度取值带来的误差, 能够有效提高标定精度。

5 模型评价与推广

5.1 模型的评价

本文建立的模型是在严格的物理定理证明之下进行的, 结果真实可信。问题一中利用物体质心与其投影质心关系定理, 联立旋转中心与质心以及投影空间质心三个未知量建立方程。由原理可知只要利用三个以上视角的投影数据就可以计算出旋转中心的位置。但本题中附件二给出了180个视角的投影数据, 所以使用该方法对旋转中心的定位准确度非常的高。问题二、问题三中使用了图像重建方面著名的图像重建模型, Radon变换和Radon逆变换, 这是对附件三以及附件五中数据准确高效的重建, 结果准确度较高。

5.2 模型的推广

问题二、三中使用的 Radon 变换以及它的反变换广泛的应用于计算机 CT 图像重建的工业中。其方法类型主要分为两种: 解析和迭代。其中, 滤波反投影(FBP)算法、卷积反投影, 以及傅里叶算法都是解析重建的方法。这些方法都是进行离散的计算。近来, 由于滤波反投影的方法比较方便, 对于各种位置结构的内部探索起了极大的帮助作用, 故得到了广泛的应用。

参考文献:

- [1]郭立倩. CT系统标定与有限角度CT重建方法的研究[D]. 大连理工大学, 2016.
- [2]毛小渊. 二维CT图像重建算法研究[D]. 南昌航空大学, 2016.
- [3]李增云, 吕东辉. 利用部分投影的二维CT旋转中心偏移快速校正[J/OL]. CT理论与应用研究, 2015, (04): 533-543.
- [4]刘明进. 工业CT系统旋转中心定位方法研究[D]. 重庆大学, 2014.
- [5]孟凡勇, 李忠传, 杨民, 李静海. CT旋转中心的精确确定方法[J]. 中国体视学与图像分析, 2013, (04): 336-341.
- [6]卢彦斌. X射线CT成像技术与多模态层析成像技术研究[D]. 北京大学, 2012.
- [7]康晓月. CT重建算法的比较研究[D]. 中北大学, 2011.
- [8]孟凡文, 吴禄慎. 基于FTP的二维傅里叶变换的研究[J]. 激光与红外, 2008, (09): 955-957.
- [9]张顺利, 李卫斌, 唐高峰. 滤波反投影图像重建算法研究[J]. 咸阳师范学院学报, 2008, (04): 47-49.
- [10]马存宝, 周伟, 张潇, 左云霞. 基于改进二维图像重建算法的工业CT系统[J]. 计算机工程, 2007, (17): 219-221+233.
- [11]范慧赞. CT图像滤波反投影重建算法的研究[D]. 西北工业大学, 2007.
- [12]王召巴. 旋转中心偏移对CT重建图像质量的影响[J]. 兵工学报, 2001, (03): 323-326.

附录:

附录 1: 问题一求旋转角度程序

<pre> clc clear data=xlsread('A 题附件.xls','sheet1','A45:FX430'); length=[]; for i=1:180 s=find(data(:,i),1,'first'); for j=s:386 if data(j,i)==0 length(i)=j-s; break; end end end x=1:180; scatter(x,length); degree=0.0175;%一度等于多少弧度 arr=[];%存储角度变换; % arr(1)=0; for i=2:180 </pre>	<pre> a=40; b=15; l=0.2768; d1=length(i-1)*l; d2=length(i)*l; x1=sqrt((a^2-4*a^2*b^2/d1^2)/(1-b/a^2)); x2=sqrt((a^2-4*a^2*b^2/d2^2)/(1-b/a^2)); dx=abs(x2-x1); agl=atan(dx/a*sqrt(1-(dx/b)^2)); arr(i)=agl/degree; end disp(sprintf(' 总共旋转的角度为%.4f',sum(arr))) [v,i]=min(length); sum(arr(1:150)) </pre>
--	--

附录 2: 180 个旋转角度

0.9468	0.1413	1.5937	0.1413	0.8790	10.0093
1.0415	0.2055	0.4736	0.2188	0.9397	4.2357
0.2475	0.1328	0.9389	0.1506	1.0068	5.6536
0.7127	0.0652	1.4953	0.1545	1.0811	4.0322
0.8865	0.1909	0.0483	0.1586	1.1637	3.2673
0.7894	0.0621	1.7452	0.1629	1.2561	2.7926
0.5564	0.1220	0.0488	0.2526	1.3598	2.4591
0.5273	0.0599	1.4002	0.1741	1.9939	4.1476
0.6611	0.1178	0.8499	0.3629	1.0912	1.8455
0.4671	0.0578	0.0493	0.7849	1.7633	3.2684
0.2986	0.1137	0.0499	0.2857	1.2753	2.8703
0.4298	0.0559	0.0504	0.4003	2.0746	2.5585
0.4094	0.1098	0.0510	0.3158	1.5144	3.3516
0.5163	0.0540	0.0516	0.4432	3.3608	2.0031
0.3667	0.0534	0.0522	0.4707	0.9413	1.8384
0.3503	0.0528	0.0528	0.3725	3.0555	2.4857
0.3349	0.1038	0.0534	0.5245	2.3057	2.2246
0.3204	0.0510	0.1086	0.2752	2.5585	2.0056
0.3068	1.8562	0.0552	0.5778	4.3876	1.2347
0.2939	0.0504	0.0559	0.3037	1.7088	1.7099
0.0952	0.0499	0.0565	0.4751	3.8019	1.5639
0.1865	0.0493	0.1735	0.6727	2.2075	1.4363
0.2703	0.8293	0.0592	0.3547	5.1185	1.3238
0.1741	0.0488	0.1206	0.7485	3.2673	1.2241
0.2526	1.2835	0.0614	0.5988	4.0322	1.1352

0.1629	1.1236	0.1886	0.6337	2.8279	1.0555
0.2364	0.0483	0.0644	0.9040	5.6536	0.9837
0.1526	0.9974	0.1312	0.4800	10.0093	1.2108
0.2216	1.0295	0.1344	1.0201	10.0093	1.0385
0.0720	1.0294	0.1378	0.8237	10.0093	0.9563
附录 3： 问题一求旋转中心程序					
%求解旋转中心坐标 clc clear t=1.7720372; k=xlsread('A 题附件.xls','附件 2'); f=xlsread('A 题附件.xls','附件 1'); m=k/t; a=2.527777; p=a*m; s=[]; for j=1:180 sum_d=0; for i=1:512 sum_d=sum_d+p(i,j)*i;			end s(j)=sum_d/sum(p(:,j)); end r=pi/180; for i=1:180 agl(i)=r*i; end y1=0;x1=30; l=cos(agl-152*r); a=s-(x1*l+y1*sin(agl)); meann=mean(a) maxx=max(a) minn=min(a)		
附录 4： 问题二求吸收率程序					
%%问题二像素 256*256 介质吸收率求取 clc clear I=xlsread('A 题附件.xls','附件 1'); R=radon(I,1:180); f2=iradon(R,1:180); figure(1) J1 = imrotate(f2,-30,'bilinear','crop')); subplot(1,2,1); imshow(J1) %% I = J1; I = double(I); [rows,cols] = size(I); x = ones(rows,1)*[1:cols]; y = [1:rows]'*ones(1,cols); area = sum(sum(I)); meanx = sum(sum(I.*x))/area;			meany = sum(sum(I.*y))/area; hold on; plot(meanx,meany,'r+'); %十字标出 重心位置 meanx-128 meany-128 % hold on I0=imread('2.png'); I1=double(rgb2gray(I0)); I1([1,2,259,260],:)=[]; I1(:,[1,2,259,260])=[]; I1(:)=I1(:)/256; R1=radon(I1,1:180); f1=iradon(R1(:,1:180),1:180); J = imrotate(f1,30,'bilinear','crop') ; subplot(1,2,2); imshow(J)		
附录 5： 问题三求吸收率程序					
%%问题三像素 256*256 介质吸收率求取 clc clear			I0=imread('3.png');%d 读取照片 I1=double(rgb2gray(I0));%转换成二 维矩阵		

<pre> I=xlsread('A题附件.xls','附件1'); R=radon(I,1:180); f2=iradon(R,1:180); figure(1) J1 = imrotate(f2,-30,'bilinear','crop'); subplot(1,2,1); imshow(J1) hold on </pre>	<pre> I1([1,2,259],:)=[]; I1(:,[1,2,3,260])=[]; I1(:)=I1(:)/256; R1=radon(I1,1:180); f1=iradon(R1(:,1:180),1:180); J = imrotate(f1,30,'bilinear','crop') ; subplot(1,2,2); imshow(J) </pre>
--	---