

# 高考数学知识点汇总

张书源

2025 年 11 月 29 日

这个文档从 2025 年 8 月 8 日开始编写。遵循 CC BY-NC-SA 4.0 开源协议。

参考书目、网页、资料：《普通高中教科书人教版 A》《普通高中教科书人教版 B》《全品高考复习方案听课手册》《必刷题合订本 2024 版狂 K 重难点》《维基教科书》

# 目录

<b>第一章 集合与常用逻辑用语</b>	<b>1</b>
1.1 集合的概念 . . . . .	1
1.1.1 集合的定义 . . . . .	1
1.1.2 集合的性质 . . . . .	1
1.1.3 集合的表示 . . . . .	2
1.2 集合间的关系 . . . . .	2
1.2.1 相等关系 . . . . .	2
1.2.2 子集与包含关系 . . . . .	2
1.2.3 真子集与真包含关系 . . . . .	2
1.3 集合的运算 . . . . .	3
1.3.1 并集 . . . . .	3
1.3.2 交集 . . . . .	4
1.3.3 补集 . . . . .	4
1.3.4 集合的元素个数 . . . . .	5
1.4 充分条件与必要条件 . . . . .	5
1.4.1 充分条件与必要条件 . . . . .	5
1.4.2 充要条件 . . . . .	5
1.5 全称量词与存在量词 . . . . .	6
1.5.1 全称量词与存在量词 . . . . .	6
1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定 . . . . .	6
<b>第二章 复数</b>	<b>7</b>
2.1 复数的概念 . . . . .	7
2.1.1 数系的扩充和复数的概念 . . . . .	7
2.1.2 复数的几何意义 . . . . .	7
2.2 复数的四则运算 . . . . .	9
2.2.1 复数的加减运算及其几何意义 . . . . .	9

2.2.2 复数的乘除运算 . . . . .	10
2.2.3 复数四则运算的常用结论 . . . . .	11
2.3 一元二次方程的复数解和代数基本定理 . . . . .	12
2.3.1 实系数一元二次方程在复数范围内的解集 . . . . .	12
2.3.2 代数基本定理 . . . . .	13
2.3.3 一元多项式方程根与系数的关系 . . . . .	14
2.4 复数的三角表示 . . . . .	14
2.4.1 复数的三角表示式 . . . . .	14
2.4.2 复数乘除运算的三角表示及其几何意义 . . . . .	15
2.4.3 单位根 . . . . .	17
<b>第三章 函数与不等式</b>	<b>19</b>
3.1 函数的概念及其表示 . . . . .	19
3.1.1 函数的概念 . . . . .	19
3.1.2 区间 . . . . .	20
3.1.3 函数的表示 . . . . .	20
3.2 函数的基本性质 . . . . .	22
3.2.1 函数的单调性与最值 . . . . .	22
3.2.2 奇偶性与图象对称 . . . . .	23
3.3 幂函数、分段函数与绝对值函数 . . . . .	27
3.3.1 幂函数 . . . . .	27
3.3.2 分段函数 . . . . .	28
3.3.3 绝对值函数及其衍生 . . . . .	28
3.4 指数函数与对数函数 . . . . .	34
3.4.1 指数 . . . . .	34
3.4.2 指数函数 . . . . .	35
3.4.3 对数 . . . . .	37
3.4.4 对数函数 . . . . .	37
3.5 反函数与不同函数增长差异 . . . . .	38
3.5.1 反函数的定义 . . . . .	38
3.5.2 反函数的性质 . . . . .	39
3.5.3 不同函数增长的差异 . . . . .	39
3.6 等式与不等式 . . . . .	40
3.6.1 等式与方程(组)的解集 . . . . .	40
3.6.2 不等式 . . . . .	42
3.7 函数、方程、不等式之间的关系 . . . . .	42
3.8 函数的应用 . . . . .	42

3.8.1 对数函数：世界是对数的 . . . . .	42
3.8.2 指数函数：曾“几何”时 . . . . .	42
3.8.3 幂函数：规模效应 . . . . .	42
3.8.4 三角函数：波动的谐律 . . . . .	42
3.8.5 二次函数：宇宙之“2” . . . . .	42
3.8.6 再看函数：混沌中的确定 . . . . .	42
<b>第四章 导数</b>	<b>43</b>
<b>第五章 平面向量、解三角形</b>	<b>44</b>
<b>第六章 立体几何</b>	<b>45</b>
<b>第七章 解析几何</b>	<b>46</b>
7.1 直线 . . . . .	46
7.1.1 直线的描述 . . . . .	46
7.1.2 两直线的位置关系 . . . . .	49
7.1.3 距离公式 . . . . .	50
7.1.4 角度公式与三角形面积公式 . . . . .	52
7.1.5 对称问题 . . . . .	52
<b>第八章 排列组合</b>	<b>56</b>
<b>第九章 数列</b>	<b>57</b>
<b>第十章 统计与概率</b>	<b>58</b>
<b>附录 A 完整证明及解答</b>	<b>59</b>
<b>附录 B B 版中的阅读材料</b>	<b>62</b>
B.1 利用复数产生分形图（复变函数） . . . . .	62
B.2 四元数简介 . . . . .	63
B.3 素数个数与对数 . . . . .	64
<b>定理索引</b>	<b>65</b>
<b>名词索引</b>	<b>66</b>



# 第一章 集合与常用逻辑用语

## 1.1 集合的概念

### 1.1.1 集合的定义

元素 研究对象的统称;

集合 元素组成的总体，简称为集.

我们通常用大写拉丁字母  $A, B, C \dots$  表示集合，用小写拉丁字母用  $a, b, c, \dots$  表示集合中的元素。如果  $a$  是集合的  $A$  的元素，就说  $a$  属于集合  $A$ ，记作  $a \in A$ ；如果  $a$  不是集合的  $A$  的元素，就说  $a$  不属于集合  $A$ ，记作  $a \notin A$ 。

规定：不含任何元素的集合叫空集，记作  $\emptyset$ 。注意： $\{\emptyset\}$  不是空集。

### 1.1.2 集合的性质

- **无序性：**集合中每个元素的地位相同，元素之间是无序的；
- **互异性：**集合中的元素互不相同，每个元素只能出现一次；
- **确定性：**对于一个集合  $A$ ，任给一个元素  $a$ ，要么  $a \in A$ ，要么  $a \notin A$ ，二者必居其一。

名称	元素	记号
自然数集	全体非负整数	$\mathbb{N}$
正整数集	全体正整数	$\mathbb{N}^*$ 或 $\mathbb{N}_+$
整数集	全体整数	$\mathbb{Z}$
有理数集	全体有理数	$\mathbb{Q}$
实数集	全体实数	$\mathbb{R}$

表 1.1: 数学中一些常用的数集及其记法

---

自然语言 所有不超过 5 的自然数组成的集合.

列举法  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

描述法  $\{x \in \mathbb{N} | x \leq 5\}$

---

表 1.2: 集合的表示法

### 1.1.3 集合的表示

集合的三种主要的表示法如表 1.2 所示.

## 1.2 集合间的关系

### 1.2.1 相等关系

若集合  $A$  和集合  $B$  中所有的元素完全相同, 那么称  $A$  和  $B$  相等, 记作  $A = B$ .

### 1.2.2 子集与包含关系

#### 定义

若  $\forall a \in A$ , 有  $a \in B$ , 那么称  $A$  是  $B$  的子集, 记作  $A \subseteq B$ , 读作 “ $A$  包含于  $B$ ” 或 “ $B$  包含  $A$ ”.

规定: 空集是任何集合的子集.

#### 性质

- 自反性:  $\forall$  集合  $S$ ,  $S \subseteq S$ ;
- 反对称性:  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ ;
- 传递性:  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

### 1.2.3 真子集与真包含关系

#### 定义

若  $A \subseteq B$ , 且  $A \neq B$  (亦即  $\exists x \in B, x \notin A$ ), 那么称  $A$  是  $B$  的真子集, 记作  $A \subsetneq B$ , 读作 “ $A$  真包含于  $B$ ” 或 “ $B$  真包含  $A$ ”.

显然, 空集是任何非空集合的真子集.

### 性质

- 反自反性:  $\forall \text{集合 } S, \neg S \subsetneq S;$
- 非对称性:  $A \subsetneq B \Rightarrow \neg B \subsetneq A;$  反之亦然;
- 传递性:  $A \subsetneq B \text{ 且 } B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C.$

**定理 1.1** (有限非空集的子集个数). 含  $n(n \in \mathbb{N}^*)$  个元素的集合有  $2^n$  个子集, 有  $2^n - 1$  个真子集, 有  $2^n - 1$  个非空子集, 有  $2^n - 2$  个非空真子集.

证明. 若  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ,  $\forall S \subseteq A$ , 考虑把  $S$  的  $n$  个元素填入  $A$  中, 论断  $a_i(i = 1, 2, 3, \dots, n) \in S$  有真假两种可能, 因而每个元素各有两种填法, 不同元素的填法互不干扰。把  $n$  个元素全部填入之后,  $S$  唯一确定, 又由集合的确定性, 填法与子集一一对应。所以总共有  $2^n$  个不同的子集, 其中有一个空集和本身.  $\square$

## 1.3 集合的运算

### 1.3.1 并集

#### 定义

由所有属于集合  $A$  或属于集合  $B$  的元素组成的集合, 称为集合  $A$  与  $B$  的并集, 记作  $A \cup B$ , 读作“ $A$  并  $B$ ”.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

#### 性质

- 交换律:  $A \cup B = B \cup A;$
- 结合律:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$
- 幂等律:  $A \cup A = A;$
- 单元:  $\forall \text{集合 } A, A \cup \emptyset = A.$

此外,  $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B.$

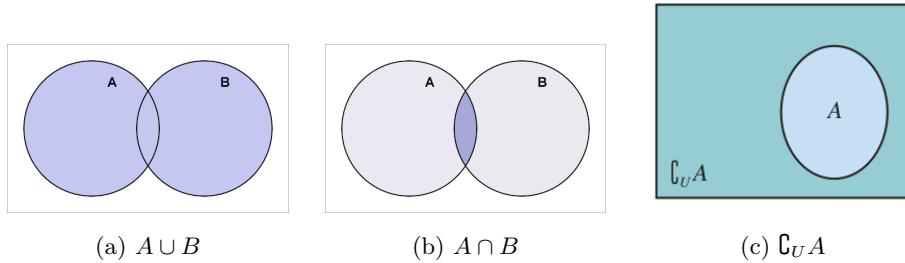


图 1.1: 并集、交集与补集

### 1.3.2 交集

#### 定义

由所有属于集合  $A$  且属于  $B$  的元素组成的集合，称为集合  $A$  与  $B$  的交集，记作  $A \cap B$ ，读作“ $A$  交  $B$ ”。

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

#### 性质

- 交换律： $A \cap B = B \cap A$ ；
- 结合律： $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ；
- 幂等律： $A \cap A = A$ ；
- 空集合： $\forall$  集合  $A$ ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

此外， $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ .

### 1.3.3 补集

#### 全集

如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为全集，通常记作  $U$ 。

#### 定义

对于一个集合  $A$ ，由全集  $U$  中不属于集合  $A$  的所有元素组成的集合称为集合  $A$  相对于全集  $U$  的补集，简称为集合  $A$  的补集，记作  $C_U A$ 。

$$C_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$$

### 性质

**定理 1.2** (德摩根公式). 全集为  $U$ , 集合  $A, B$  一定满足:

$$\begin{aligned}\complement_U(A \cup B) &= (\complement_U A) \cap (\complement_U B) \\ \complement_U(A \cap B) &= (\complement_U A) \cup (\complement_U B)\end{aligned}$$

简记:  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ,  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ . 证明可采用 Venn 图, 从略.

### 1.3.4 集合的元素个数

我们把含有有限个元素的集合叫作**有限集**, 用  $\text{card}(A)$  来表示有限集合  $A$  中元素的个数. 一个集合中元素的个数称为这个集合的基数. 也有其他记法, 例如:  $|A|$ .

**定理 1.3** (容斥原理).  $A, B, C$  都是有限集, 则:

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| \\ &\quad + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

证明可采用 Venn 图, 从略.

## 1.4 充分条件与必要条件

### 1.4.1 充分条件与必要条件

如果“若  $p$ , 则  $q$ ”是真命题, 那么称由  $p$  可以推出  $q$ , 记作  $p \Rightarrow q$ , 并且说,  $p$  是  $q$  的充分条件,  $q$  是  $p$  的必要条件.

如果“若  $p$ , 则  $q$ ”是假命题, 那么由  $p$  不能推出  $q$ , 记作  $p \not\Rightarrow q$ , 此时,  $p$  不是  $q$  的充分条件,  $q$  不是  $p$  的必要条件.

举反例是判断一个命题是假命题的重要方法.

充分条件通常不唯一. 判定定理给出了结论成立的一个充分条件.

必要条件通常不唯一. 性质定理给出了结论成立的一个必要条件.

### 1.4.2 充要条件

如果“若  $p$ , 则  $q$ ”和其逆命题“若  $q$ , 则  $p$ ”均是真命题, 即既有  $p \Rightarrow q$ , 又有  $q \Rightarrow p$ , 就记作  $p \Leftrightarrow q$ . 此时,  $p$  既是  $q$  的充分条件, 又是  $q$  的必要条件.

件，我们说  $p$  是  $q$  的充分必要条件，简称为充要条件。此时命题  $p, q$  等价。显然，如果  $p$  是  $q$  的充要条件，那么  $q$  也是  $p$  的充要条件。

## 1.5 全称量词与存在量词

### 1.5.1 全称量词与存在量词

短语“所有的”“任意一个”<sup>1</sup>在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“ $\forall$ ”表示。含有全称量词的命题，叫作全称量词命题，例如： $\forall x \in M, p(x)$ 。

短语“存在一个”“至少有一个”<sup>2</sup>在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“ $\exists$ ”表示。含有存在量词的命题，叫作存在量词命题，例如： $\exists x \in M, p(x)$ 。

### 1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定

否定一个命题  $p(x)$ ，得到一个新命题，这一新命题称为原命题的否定，记作  $\neg p(x)$ ，即“ $p(x)$  不成立”。

否定全称量词命题或存在量词命题时，只需要将全称量词改为存在量词，或把存在量词改为全称量词，然后对结论进行否定即可。

命题  $\forall x \in M, p(x)$  的否定是  $\exists x \in M, \neg p(x)$ 。命题  $\exists x \in M, p(x)$  的否定是  $\forall x \in M, \neg p(x)$ 。

---

<sup>1</sup>常见的全称量词还有“一切”“每一个”“任给”等。

<sup>2</sup>常见的存在量词还有“有些”“有一个”“对某些”“有的”等。

## 第二章 复数

### 2.1 复数的概念

#### 2.1.1 数系的扩充和复数的概念

为了使方程  $x^2 = -1$  有解，人们引入  $i$ ，并规定  $i$  的平方等于  $-1$ ，即

$$i^2 = -1$$

我们把形如  $a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) 的数叫作复数，其中  $i$  叫作虚数单位。全体复数构成的集合  $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$  叫作复数集。不难看出， $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ ,  $i \in \mathbb{C}$ 。

复数通常用字母  $z$  表示，即  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )。以后如不特别声明，用  $z = a + bi$  等类似表达式表示复数时，都有  $a, b \in \mathbb{R}$ ，其中的  $a$  与  $b$  分别叫做复数  $z$  的实部与虚部。

本书中，用  $\Re(z)$  表示复数  $z$  的实部，用  $\Im(z)$  表示复数  $z$  的虚部。注意： $\Im(z) \in \mathbb{R}$ 。

任取两个数  $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$ ，规定：

$a + bi$  和  $c + di$  相等当且仅当  $a = c$  且  $b = d$

对于复数  $a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )，当且仅当  $b = 0$  时，它是实数；当且仅当  $a = b = 0$  时，它是实数 0；当  $b \neq 0$  时，它叫做虚数；当  $a = 0$  且  $b \neq 0$  时，它叫做纯虚数。

虚数之间、虚数与实数之间不能比较大小。

#### 2.1.2 复数的几何意义

##### 几何意义 1：复平面上的点

实数与数轴上的点一一对应，因此实数可以用数轴上的点来表示。类似的，由于任何一个复数  $z = a + bi$  都可以由一个有序数对  $(a, b)$  唯一确定，并且任何一个复数都可以唯一确定一个有序实数对，所以复数  $z = a + bi$  与有序实数对  $(a, b)$  一一对应。而有序实数对  $(a, b)$  与平面直角坐标系中的点

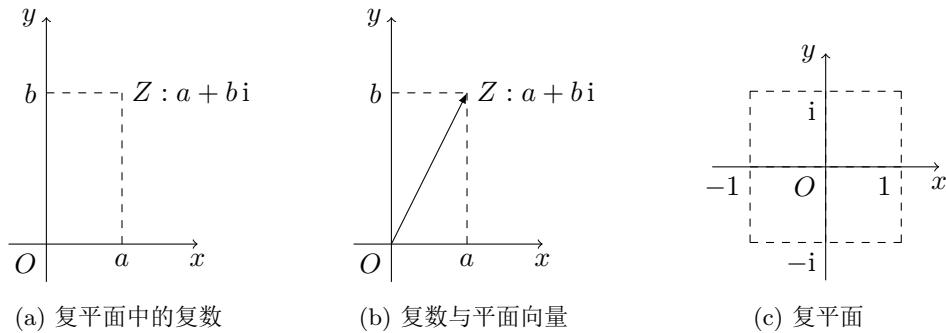


图 2.1: 复数的几何表示

一一对应，所以复数集与平面直角坐标系中的点集之间可以建立一一对应关系。

如图 2.1a，点  $Z$  的横坐标是  $a$ ，纵坐标是  $b$ ，复数  $z = a + bi$  可用点  $Z(a, b)$  表示。这个建立了平面直角坐标系来表示复数的平面叫作**复平面**， $x$  轴叫作**实轴**， $y$  轴叫作**虚轴**，如图 2.1c 所示。实轴上的点都表示实数；除了原点外，虚轴上的点都表示纯虚数。

按照这种方法，每一个复数，有复平面内唯一的一个点和它对应；反过来，复平面内的每一个点，有唯一的一个复数和它对应。由此可知，复数集  $\mathbb{C}$  中的数与复平面内的点按如下方式建立了一一对应关系：

$$\text{复数 } z = a + bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{复平面内的点 } Z(a, b)$$

这是复数的一种几何意义。

### 几何意义 2：平面向量

如图 2.1b，设复平面内的点  $Z$  表示复数  $z = a + bi$ ，连  $OZ$ ，显然向量  $\overrightarrow{OZ}$  由点  $Z$  唯一确定；反过来，点  $Z$  也可以由向量  $\overrightarrow{OZ}$  唯一确定。由此可知，复数集  $\mathbb{C}$  中的数与以原点为起点的向量建立了如下一一对应关系（实数 0 与  $\vec{O}$  对应）：

$$\text{复数 } z = a + bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{平面向量 } \overrightarrow{OZ}$$

这是复数的另一种几何意义。<sup>1</sup>

### 绝对值、共轭复数

为方便起见，我们常把复数  $z = a + bi$  说成点  $Z$  或说成向量  $\overrightarrow{OZ}$ ，并且规定，相等的向量表示同一个复数。

<sup>1</sup>人教 A 版第 71 页：这种几何表示也称阿尔冈图 (Argand diagram)。

图 2.1b 中向量  $\overrightarrow{OZ}$  的模叫作复数  $z = a + bi$  的模或绝对值, 记作  $|z|$  或  $|a + bi|$ 。即

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

如果  $b = 0$ , 则  $|z| = |a|$ , 也就是  $a$  的绝对值。

一般地, 当两个复数的实部相等, 虚部互为相反数时, 我们称这两个复数互为共轭复数。虚部不等于 0 的两个共轭复数也叫做共轭虚数。复数  $z$  的共轭复数用  $\bar{z}$  表示, 即如果  $z = a + bi$ , 那么  $\bar{z} = a - bi$ 。

一对共轭复数在复平面内对应的点关于实轴对称。

## 2.2 复数的四则运算

### 2.2.1 复数的加减运算及其几何意义

#### 复数的加法运算及其几何意义

规定复数的加法法则如下:

设  $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$  是任意两个复数, 其和

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

注意到, 复数相加仍为复数。

容易验证, 复数的加法满足交换律、结合律。共轭复数的和是实数。

如图 2.2a, 设  $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$  分别与复数  $a + bi, c + di$  对应, 则  $\overrightarrow{OZ_1} = (a, b), \overrightarrow{OZ_2} = (c, d)$ 。我们有  $\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2} = (a + c, b + d)$ , 这说明  $\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}$  就是复数  $(a + c) + (b + d)i$  对应的向量。因此复数的加法可以按照向量的加法来进行, 这就是复数加法的几何意义。

#### 复数的减法运算及其几何意义

类比实数中相反数的定义, 我们定义  $-z$  是复数  $z$  的相反数<sup>2</sup>, 并规定:

$$-z = -(a + bi) = -a - bi$$

我们把满足  $z_1 + (x + y)i = z_2$  ( $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ) 的复数  $x + yi$  叫作复数  $z_1$  与  $z_2$  的差, 记作  $z_1 - z_2$ , 并规定  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ 。

不妨设  $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ , 则

$$(c + di) + (x + yi) = a + bi$$

---

<sup>2</sup>人教 A 版中无此定义。

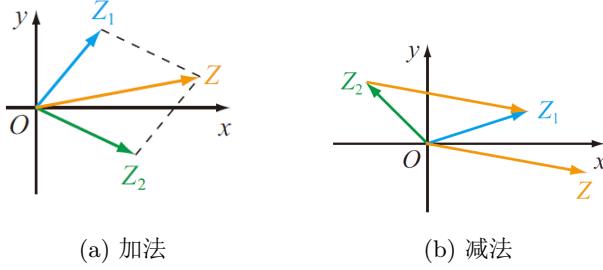


图 2.2: 复数加减法的几何意义

根据复数相等的含义,

$$\begin{array}{ll} c + x = a, & d + y = b \\ x = a - c, & y = b - d \end{array}$$

因此

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a + bi) - (c + di) \\ &= x + yi &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

这就是复数的减法法则。

注意到, 复数相减仍为复数。

由复数与向量之间的对应关系同样可以得出复数减法的几何意义: 如果复数  $z_1, z_2$  所对应的向量分别为  $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$ , 设点  $Z$  满足  $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{Z_2Z_1}$ , 则  $z_1 - z_2$  所对应的向量就是  $\overrightarrow{OZ}$ , 如图 2.2b 所示。由复数的几何意义可以得出复数的绝对值三角不等式, 证明略。

**定理 2.1** (复数的绝对值三角不等式). 任意两个复数  $z_1, z_2$  一定满足

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

## 2.2.2 复数的乘除运算

### 复数的乘法

一般地, 设  $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ , 称  $z_1 z_2$  (或  $z_1 \times z_2$ ) 为  $z_1$  与  $z_2$  的积, 并规定

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

注意到，复数相乘仍为复数。

可以证明，复数的乘法运算满足交换律与结合律，且对加法满足分配律。

### 复数的乘方

$n$  个相同的复数  $z$  相乘时，仍称为  $z$  的  $n$  次方（或  $n$  次幂），并记作  $z^n$ ，即

$$z^n = \underbrace{z \times z \times \cdots \times z}_{n \text{ 个}}$$

可以验证，当  $m, n$  均为正整数时，

$$z^m z^n = z^{m+n}, (z^m)^n = z^{mn}, (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$$

### 复数的除法

如果复数  $z_2 \neq 0$ ，则满足  $zz_2 = z_1$  的复数  $z$  称为  $z_1$  除以  $z_2$  的商， $z_1$  为被除数， $z_2$  为除数。给定复数  $z \neq 0$ ，称  $\frac{1}{z}$  为  $z$  的倒数。

复数的除法法则：

$$\begin{aligned} (a + bi) \div (c + di) &= \frac{a + bi}{c + di} \\ &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \quad (c + di \neq 0) \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中，步骤 (2.1) 被称为“分母实数化”。显然，利用这种办法可以求出任意一个非零复数的倒数，以及任意两个复数的商（除数不能为 0）。

注意到，复数相除仍为复数。

### 2.2.3 复数四则运算的常用结论

1.  $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$ ,  $\frac{1+i}{1-i} = i$ ,  $\frac{1-i}{1+i} = -i$ ;
2.  $-b + ai = i(a+bi)$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ );
3.  $i^{4n} = 1$ ,  $i^{4n+1} = i$ ,  $i^{4n+2} = -1$ ,  $i^{4n+3} = -i$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ );
4.  $|z^2| = |z|^2 = |\bar{z}|^2 = z\bar{z}$ ,  $|\bar{z}| = \bar{z}$ ,  $\overline{(\bar{z})} = z$ ;
5.  $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ ,  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  ( $z_2 \neq 0$ ),  $|z^n| = |z|^n$ ;

$$6. \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}, \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{|\overline{z_1}|}{|\overline{z_2}|} (z_2 \neq 0), \overline{z^n} = \overline{z}^n (n \in \mathbb{Z}).$$

从结论 5 可以看出, 复数的模运算可以与乘法、除法、乘方运算交换顺序; 从结论 6 可以看出, 复数的共轭运算可以与加减乘除以及乘方运算交换顺序。

## 2.3 一元二次方程的复数解和代数基本定理

### 2.3.1 实系数一元二次方程在复数范围内的解集

当  $a, b, c \in \mathbb{R}$  且  $a \neq 0$  时, 关于  $x$  的方程  $ax^2 + bx + c = 0$  称为实系数一元二次方程, 这个方程在复数范围内总是有解的, 而且

1. 当  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  时, 方程有两个不相等的实数根;
2. 当  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$  时, 方程有两个相等的实数根;
3. 当  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  时, 方程有两个互为共轭的虚数根。

下面推导  $\Delta < 0$  时实系数一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的求根公式。

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{(b^2 - 4ac)}{(2a)^2} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} i \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} i}{2a} \quad (\Delta = b^2 - 4ac < 0) \end{aligned}$$

注意到, 此时两根的虚部的绝对值相等, 两根互为共轭。

**定理 2.2** (二次韦达定理). 在复数域内, 关于  $x$  的方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的两根  $x_1, x_2$  满足:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

证明可采用求根公式代入, 从略。

### 2.3.2 代数基本定理

**定理 2.3** (代数基本定理). 任何一元  $n(n \in \mathbb{N}^*)$  次复系数多项式方程  $f(x) = 0$  至少有一个复数根。

证明方法很多，但是每一种证明方法都涉及高等数学，从略。

由代数基本定理可以证明，任何一元  $n(n \in \mathbb{N}^*)$  次复系数多项式  $f(x)$  在复数集中可以分解为  $n$  个一次因式的乘积。进而，一元  $n(n \in \mathbb{N}^*)$  次多项式方程有  $n$  个复数根（重根按照重数计）。证明如下：

证明. 采用数学归纳法。

(归纳奠基) 对于一次多项式

$$f(x) = a_1x + a_0 \quad (a_1 \neq 0)$$

方程  $f(x) = 0$  的解是：

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \tag{2.2}$$

有且仅有一个根，结论成立。

(归纳假设) 假设对于所有次数  $\leq n-1$  的复系数多项式，结论成立。即：任何  $k$  次复系数多项式 ( $k \leq n-1$ ) 在复数域上恰有  $k$  个根 (重根按重数计)。

(归纳步骤) 设  $f(x)$  是一个  $n$  次复系数多项式：

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

由代数基本定理， $f(x) = 0$  至少有一个复根，记为  $\alpha$ ，于是  $f(x)$  可分解为

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$$

其中  $q(x)$  是一个  $n-1$  次的复系数多项式。

根据归纳假设， $q(x) = 0$  有  $n-1$  个复根 (重根按重数计)，记为  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ 。

综上，根据数学归纳法， $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ， $f(x) = 0$  的全体根为：

$$\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$$

共  $n$  个根 (如果  $\alpha$  与某些  $\beta_i$  相同，则计算重数)。  $\square$

这个证明过程的核心是使用因式分解 (因式定理) 来降低次数，同时，代数基本定理保证了归纳基础。

### 2.3.3 一元多项式方程根与系数的关系

次数为 1 的情况即式 (2.2)。次数为 2 的情况即第 12 页的二次韦达定理。

设实系数一元三次方程

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_3 \neq 0) \quad (2.3)$$

在复数集  $\mathbb{C}$  内的根为  $x_1, x_2, x_3$ , 可以得到方程 (2.3) 的变形

$$a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

展开得

$$a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a_3x_1x_2x_3 = 0 \quad (2.4)$$

比较式 (2.3)(2.4) 可以得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

更高次一元多项式方程根与系数的关系不在本节讨论范围内。

## 2.4 复数的三角表示

### 2.4.1 复数的三角表示式

一般地, 如果非零复数  $z = a + bi$  在复平面内对应点  $Z(a, b)$ , 且  $r$  为向量  $OZ$  的模,  $\theta$  是以  $x$  轴非负半轴为始边、射线  $OZ$  为终边的一个角, 则

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

根据正余弦的定义

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a}{r}, & \sin \theta &= \frac{b}{r} \\ a &= r \cos \theta, & b &= r \sin \theta \end{aligned}$$

如图 2.3 所示, 从而

$$z = a + bi = (r \cos \theta) + (r \sin \theta)i$$

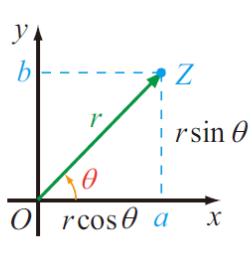


图 2.3: 复数的三角表示

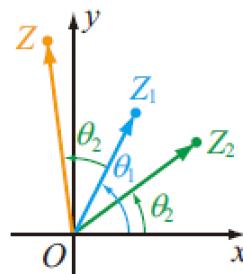


图 2.4: 复数乘法的几何意义

其中,  $r$  是复数  $z$  的模,  $\theta$  称为  $z$  的辐角。 $(r \cos \theta) + (r \sin \theta)i$  称为非零复数  $z = a + bi$  的 **三角表示式**, 简称**三角形式**。对应地,  $a + bi$  称为复数的**代数表示式**, 简称**代数形式**。

显然, 任何一个非零复数  $z$  的辐角都有无穷多个, 而且任意两个辐角之间都相差  $2\pi$  的整数倍。特别地, 在  $[0, 2\pi)$  内的辐角称为  $z$  的**辐角主值**, 记作  $\arg z$ 。

每一个非零复数有唯一的模与辐角主值, 二者唯一确定该复数。两个非零复数相等当且仅当它们的模与辐角主值分别相等 (但是辐角可以相差  $2\pi$  的整数倍)。

### 2.4.2 复数乘除运算的三角表示及其几何意义

#### 乘法

设复数  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ , 则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

即

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

这就是说, 两个复数相乘, 积的模等于各复数的模之积, 积的辐角等于各复数的辐角之和。

两个复数  $z_1, z_2$  相乘时, 可以像图 2.4 一样, 通过把向量逆时针旋转  $\theta_2$  角、按  $r_2$  伸长得到乘积所对应的向量。这就是复数乘法的几何意义。



棣莫弗~

梭莫弗定理的概述图 (2张)

图源：百度百科

不难看出，上述两个复数三角形式的乘法及其几何意义，可以推广到有限个复数的三角形式相乘。事实上，

**定理 2.4 (棣莫弗公式).**  $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ ,

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

证明可以先通过数学归纳法证明正整数的情况，再推广到负整数。注意，不可以使用欧拉公式进行证明，因为欧拉公式的证明中用到了棣莫弗公式，会造成循环论证。

证明. 先证  $P(n) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), n \in \mathbb{N}$ 。采用数学归纳法。

(归纳奠基) 当  $n = 0$  时，显然成立。当  $n = 1$  时：

$$\text{左式} = (\cos \theta + i \sin \theta)^1 = \cos \theta + i \sin \theta = \cos(1 \cdot \theta) + i \sin(1 \cdot \theta) = \text{右式}$$

因此， $P(1)$  成立。

(归纳假设) 当  $n > 1$  时：假设  $P(k)$  成立，即  $(\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos(k\theta) + i \sin(k\theta)$ 。

(归纳步骤) 当  $n = k + 1$  时：

$$\begin{aligned} & (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)^k \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos k\theta + i \sin k\theta) \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos k\theta \cdot \cos \theta + i \sin k\theta \cdot i \sin \theta) + (\cos k\theta \cdot i \sin \theta + i \sin k\theta \cdot \cos \theta) \\ &= (\cos k\theta \cdot \cos \theta - \sin k\theta \cdot \sin \theta) + i(\cos k\theta \cdot \sin \theta + \sin k\theta \cdot \cos \theta) \\ &= \cos(k\theta + \theta) + i \sin(k\theta + \theta) \\ &= \cos[(k+1)\theta] + i \sin[(k+1)\theta] \end{aligned}$$

因此， $P(k+1)$  也成立。

综上，根据数学归纳法， $\forall n \in \mathbb{N}$ ， $P(n)$  成立。

另外，由恒等式  $(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \cdot (\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)) = 1$  可知，公式对于负整数情况也成立。  $\square$

## 除法

复数的除法运算是乘法运算的逆运算。

设  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  ( $z_2 \neq 0$ )，因为

$$r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \cdot \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

所以根据复数除法的定义，有

$$\boxed{\frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]}$$

这就是说，两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差。

### 2.4.3 单位根

$n$  次单位根是  $n$  次幂为 1 的复数。它们位于复平面的单位圆上，构成正多边形的顶点。

#### 定义

方程  $z^n = 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 的复数根  $z$  为  $n$  次单位根，有  $n$  个：

$$\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

#### 复平面中的体现

当  $n \geq 3$  时，在复平面中单位根对应的点依次相连得到正  $n$  边形，其中一定有一个顶点落在  $(1, 0)$  处。

当  $n = 4$  时，4 个单位根分别是  $1, i, -1, -i$ ，如图 2.1c (第 8 页) 所示。

#### 3 次单位根

下面研究  $n = 3$  时的情况。

设  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  ( $\rho > 0$ ) 是 1 的 3 次方根，则  $z^3 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$ ，从而

$$[\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^3 = \rho^3(\cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi)) = \cos 0 + i \sin 0$$

由复数相等的定义，

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\varphi = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ \varphi = \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

因此 1 的 3 次方根是  $\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )。根据三角函数的周期性，得  $\omega_0 = 1, \omega_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \omega_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 。

如图 2.5 所示，在复平面内，设  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  对应的点分别为  $Z_0, Z_1, Z_2$ ，显然  $Z_0, Z_1, Z_2$  都在单位圆上。因为  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  的辐角依次相差  $\frac{2\pi}{3}$ ，所以  $Z_0, Z_1, Z_2$  三等分圆周。 $Z_0$  恰为单位圆与实轴正半轴交点。

不难看出，3 次单位根有如下性质：

1.  $(\omega_k)^3 = 1, |\omega_k| = 1$ ，其中  $k = 0, 1, 2$ ；

2.  $\omega_1 = \overline{\omega_2}$ ；

3.  $1 + \omega_k + \omega_k^2 = 0$  ( $k = 1, 2$ )。

事实上，人们常用如下方法表示 3 次单位根： $1, \omega, \bar{\omega}$ ，其中  $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

### 单位根的和式

当  $n \geq 2$  时， $n$  次单位根之和为 0。

证明方法有很多，一种几何证法是转化为向量，利用单位圆的内接正多边形的重心在原点的性质，即  $\sum \overrightarrow{OZ_i} = \vec{0}$  进行处理。具体过程从略。

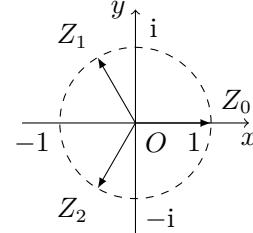


图 2.5: 3 次单位根

# 第三章 函数与不等式

## 3.1 函数的概念及其表示

### 3.1.1 函数的概念

一般地，设  $A, B$  为非空实数集，如果  $\forall x \in A$ ，按照某种对应关系  $f$ ，在  $B$  中都有唯一确定的元素  $y$  与之对应，那么就称  $f : A \rightarrow B$  为集合  $A$  到集合  $B$  的一个函数，记作

$$y = f(x), x \in A$$

其中， $x$  叫作自变量， $x$  的取值范围  $A$  叫作函数的定义域， $B$  则叫作到达域。如果自变量取值  $a$ ，则由对应关系  $f$  确定的值  $y$  叫作函数  $f$  在  $a$  处的函数值，记作  $y = f(x)$  或  $y|_{x=a}$ ；函数值的集合  $f(x) | x \in A$  叫作函数的值域。

这里给出函数的集合论表示法下的正式定义：

二元关系  $f$  若满足

$$(\forall x)(\forall y)(\forall y')\{[(\langle x, y \rangle \in f) \wedge (\langle x, y' \rangle \in f)] \Rightarrow (y = y')\}$$

17 世纪后期，德国数学家莱布尼茨第一次将“function”作为专门的学术语；19 世纪，李善兰首次将其翻译为“函数”（“凡此变数中函彼变数者，则此为彼之函数”）。

这里说的是， $x$  对应  $y$  和  $y'$ ，则二者相等。你细品！ $\wedge$  是逻辑学中的“且”， $\vee$  则是“或”。

则称  $f$  为一函数。为了与逻辑叙述的括弧作区分，这里用  $\langle x, y \rangle$  表示有序对。

注意以下几点：

1. 当使用  $f(a)$  记号时，必有  $f$  为一函数且  $a \in A$ ，其中  $A$  是函数  $f$  的定义域；<sup>1</sup>
2. 函数  $f$  的值域是记号  $f : A \rightarrow B$  中的  $B$  的子集。若值域  $R_f = B$ ，则映射  $f : A \rightarrow B$  为满射；
3. 函数也可以用  $g, h$  等其他字母表示；

<sup>1</sup>事实上，如果这两个条件并不都满足，则  $f(a) = \emptyset$ 。

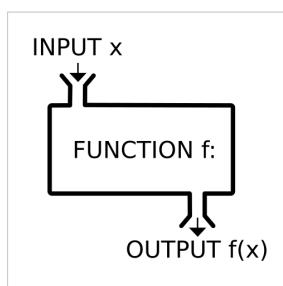


图 3.1: 函数就像机器

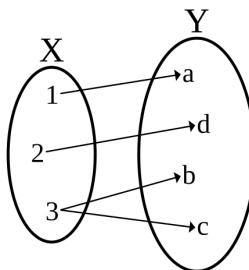


图 3.2: 多值函数不是函数

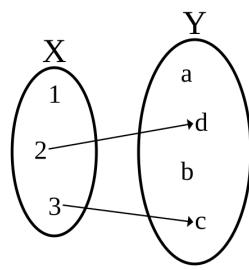


图 3.3: 偏函数不是函数

4. 定义域和对应关系分别相同的两个函数为同一个函数(字母不必相同);
5. 在表示函数时, 如果不会产生歧义, 函数的定义域通常省略不写, 此时就约定: 函数的定义域就是使得这个函数有意义的所有实数组成的集合。

函数就像是一个机器, 同样的输入下, 一定会给出同样的结果, 如图 3.1 所示。因此, 对等式两边作同样的函数操作, 等式依然成立。

### 3.1.2 区间

如表 3.1 所示, 区间指的是满足某一不等式的取值  $x$  的集合, 其中的  $a, b$  须满足  $a < b$ 。其中的第 1、2、3、4 类区间又分别称为闭区间、开区间、左闭右开区间、左开右闭区间, 左闭右开区间与左开右闭区间统称为半开半闭区间, 简称半开区间。其中的实数  $a, b$  叫作相应区间的端点, 但  $+\infty$  和  $-\infty$  不是。

实数集  $\mathbb{R}$  可以用区间表示为  $(-\infty, +\infty)$ , “ $\infty$ ”读作“无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, “ $+\infty$ ”读作“正无穷大”。

### 3.1.3 函数的表示

函数的三种常用的表示法为: 解析法、列表法和图象法。

**解析法** 用解析式表示两个变量之间的对应关系, 如  $f(x) = x^2$ 。

**列表法** 列出表格来表示两个变量之间的对应关系。

**图象法** 用图象表示两个变量之间的对应关系。

区间记法	数轴表示	对应不等式
$[a, b]$		$a \leq x \leq b$
$(a, b)$		$a < x < b$
$[a, b)$		$a \leq x < b$
$(a, b]$		$a < x \leq b$
$[a, +\infty)$		$x \geq a$
$(a, +\infty)$		$x > a$
$(-\infty, b]$		$x \leq b$
$(-\infty, b)$		$x < b$

表 3.1: 区间与数轴表示

如果函数  $f : A \rightarrow B$  满足  $\forall x \in A, f(x) = T_x$ , 其中  $T_x$  是一个含  $x$  的项, 那么  $f$  可以用箭号表示为:

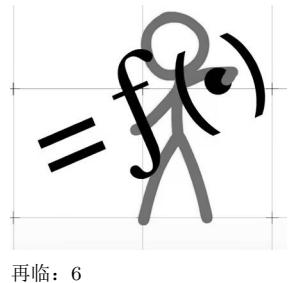
$$f : A \rightarrow B; x \mapsto T_x$$

这样的  $f$  可以用间隔号简记为  $T_{(\cdot)}$ , 例如  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$  简记为  $(\cdot)^2$ 。这种记法的缺点是无法指出定义域。

一元函数如果定义域和值域都是  $\mathbb{R}$  的子集, 那么可以使用图象法来表示。判断一个图形是否是函数图象的方法是垂线检验, 即图形与任何一条平行于  $y$  轴的直线不能有超过一个交点。

有的函数, 定义域是离散的点, 这样的函数图象是一系列离散的点, 研究时可以用虚线连接; 有的函数, 图象无法用形象描绘, 例如狄利克雷函数:

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$



再临: 6

狄利克雷函数是一种 0-1 指示函数, 这类函数用于指示哪些元素属于定义域的某一子集  $S$ 。除了  $\mathbf{1}_S(x)$  以外, 也用  $\chi_S(x)$  或  $I_S(x)$  表示。

有的函数, 其自变量在不同的取值区间内, 函数有不同的对应关系, 称这样的函数为分段函数, 将会在 3.3.2 节进行探讨。

## 3.2 函数的基本性质

### 3.2.1 函数的单调性与最值

#### 单调性的定义

一般地，设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ ，且区间  $I \subseteq D$ ：

1. 如果  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ ，都有  $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称该函数在区间  $I$  上单调递增或该函数在区间  $I$  上是增函数；
2. 如果  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ ，都有  $f(x_1) > f(x_2)$ ，则称该函数在区间  $I$  上单调递减或该函数在区间  $I$  上是减函数。

在两种情况下，都称该函数在区间  $I$  上具有单调性，区间  $I$  叫作该函数的单调区间。单调区间包括所有这样的具有单调性的区间。

特别地，在定义域上单调递增、单调递减的函数分别称为增函数、减函数。

结合不等式的性质容易得到，若  $f(x), g(x)$  都是增函数，则函数  $h(x) = f(x) + g(x)$  也为增函数。其他情况同理，读者自证不难。

作为例子，下面证明函数  $f(x) = \sqrt{x}$  是增函数。

证明. 函数的定义域是  $[0, +\infty)$ 。

$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ，且  $x_1 < x_2$ ，有

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \\ &= \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \end{aligned}$$

因为  $x_1 - x_2 < 0, \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$ ，所以  $f(x_1) < f(x_2)$ ，即函数  $f(x) = \sqrt{x}$  是增函数。  $\square$

证明的关键步骤是第二个等号，巧妙运用平方差公式，把无法比较大小的  $\frac{1}{2}$  次式转化为 1 次式，并且保证了分母为正。不妨把这叫作“分子有理化”。

#### 最值的定义

一般地，设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ ，如果存在实数  $M$  满足：

1.  $\forall x \in D$ ，都有  $f(x) \leq M$ ；

2.  $\exists x_0 \in D$ , 使得  $f(x_0) = M$ 。

那么, 称该函数的最大值是  $M$ ,  $x_0$  是该函数的一个最大值点。

一般地, 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在实数  $M$  满足:

1.  $\forall x \in D$ , 都有  $f(x) \geq M$ ;
2.  $\exists x_0 \in D$ , 使得  $f(x_0) = M$ 。

那么, 称该函数的最小值是  $M$ ,  $x_0$  是该函数的一个最小值点。

若函数在某一闭区间内单调, 则区间的端点为函数的最值点。

### 函数的平均变化率

一般地, 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 区间  $I \subseteq D$ ,  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ , 记  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ ,  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , 则:

1. 该函数在区间  $I$  上是增函数的充要条件是  $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$  在区间  $I$  上恒成立;
2. 该函数在区间  $I$  上是减函数的充要条件是  $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$  在区间  $I$  上恒成立。

一般地, 当  $x_1 \neq x_2$  时, 称

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

为函数  $y = f(x)$  在区间  $[x_1, x_2]$  ( $x_1 < x_2$  时) 或  $[x_2, x_1]$  ( $x_1 > x_2$  时) 上的平均变化率。<sup>2</sup>

注意: 在高中数学的定义中, 单调函数不允许出现不增不减的情况, 即  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  不能为 0。

上述结论与单调性的定义本质相同, 利用不等式的性质即可相互转化。二者均可用以证明函数的单调性。

### 3.2.2 奇偶性与图象对称

#### 奇偶性的定义

一般地, 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果  $\forall x \in D$ , 都有  $-x \in D$ , 且  $f(-x) = f(x)$ , 那么该函数为偶函数。

---

<sup>2</sup>人教 A 版中无此定义。

一般地，设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ ，如果  $\forall x \in D$ ，都有  $-x \in D$ ，且  $f(-x) = -f(x)$ ，那么该函数为奇函数。

奇偶性是函数在其定义域上的整体性质，所以判断函数的奇偶性前应先明确其定义域。

既是奇函数又是偶函数的函数是  $y = 0$ 。注意到，若  $x = 0$  在某个奇函数  $f(x)$  的定义域内，则  $f(0) = -f(0) = 0$ 。

### 奇偶函数图象特点

偶函数的图象关于  $y$  轴呈轴对称，奇函数的图象关于原点呈中心对称。

### 复合函数的奇偶性

约定：“若  $f(x), g(x)$  都是奇函数，则函数  $h(x) = f(x) + g(x)$  也为奇函数”简记为“奇 + 奇 = 奇”。有如下结论成立：

奇 ± 奇 = 奇，偶 ± 偶 = 偶；偶 × 偶 = 偶，奇 × 奇 = 偶，奇 × 偶 = 奇。除法与乘法同理。

使用定义容易证明。

复合函数  $g(f(x))$  的奇偶性判断方法：

1. 若  $f(x)$  为奇函数，则  $g(f(x))$  的奇偶性同  $g(x)$ ；
2. 若  $f(x)$  为偶函数，则  $g(f(x))$  为偶函数，不论  $g(x)$  是否有奇偶性。

证明思路很显然，若  $f(x)$  为偶函数，则自变量取相反数  $f(x)$  不变，再由函数值的唯一确定性， $g(f(x))$  也不变；若  $f(x)$  为奇函数，则自变量取相反数，则  $f(x)$  变为相反数，相当于  $g(x)$  的变量  $x$  取相反数。

### 常见的奇偶函数模型

以下  $y$  关于  $x$  的函数为奇函数：

$$y = Ax^{2n+1}, \quad y = a^x - a^{-x}, \quad y = \log_a (\sqrt{x^2 + 1} \pm x), \quad y = A \sin \omega x,$$

$$y = A \tan \omega x, \quad y = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}, \quad y = \log_a \frac{1-x}{1+x} \quad (a > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{Z})$$

以下  $y$  关于  $x$  的函数为偶函数：

$$y = Ax^{2n}, \quad y = a^x + a^{-x}, \quad y = \log_a (1 + a^{2kx}) - kx, \quad y = A \cos \omega x,$$

$$y = f(|x|), \quad y = \text{const.}, \quad y = A|x| \quad (a > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$$

下证  $f(x) = \log_a (\sqrt{x^2 + 1} \pm x)$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 为奇函数。

证明.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \log_a \left( \frac{(\sqrt{x^2+1} \pm x)(\sqrt{x^2+1} \mp x)}{\sqrt{x^2+1} \mp x} \right) \\
 &= \log_a \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+1} \mp x} \right) \\
 &= -\log_a \left( \sqrt{x^2+1} \mp x \right) \\
 &= -f(-x)
 \end{aligned}$$

□

下证  $y = \log_a (1 + a^{2kx}) - kx$  ( $a > 0, a \neq 1, k \neq 0$ ) 为偶函数。

证明.

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= \log_a (1 + a^{-2kx}) + kx \\
 &= \log_a \left( \frac{a^{2kx} + 1}{a^{2kx}} \right) + kx \\
 &= \log_a (1 + a^{2kx}) - 2kx + kx \\
 &= \log_a (1 + a^{2kx}) - kx \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

□

其余函数奇偶性的证明十分显然，从略。

有的函数，可以恒等变形为上述函数的线性表达式。例如，函数  $f(x) = \frac{3^x}{3^x + 1}$  可以转化为  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + \frac{1}{2}$ ，下面给出推导。  
设常数  $m$ ，

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{3^x}{3^x + 1} + m - m \\
 &= \frac{3^x + m \cdot 3^x + m}{3^x + 1} - m \\
 &= \frac{(m+1) \left( 3^x + \frac{m}{m+1} \right)}{3^x + 1} - m
 \end{aligned}$$

令  $\frac{m}{m+1} = -1$ ，得  $m = -\frac{1}{2}$ ，代入得  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + \frac{1}{2}$ 。

在此推导过程中，核心是抓住目标  $f(x) = k \cdot \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + b$ ，并且运用“加一减一”的技巧和待定系数法。

### 函数图象的对称

若函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x = a$  对称, 则  $f(a - x) = f(a + x) \Leftrightarrow f(x) = f(2a - x)$ ; 若函数  $f(x)$  的图象关于点  $(a, b)$  对称, 则  $b - f(a - x) = f(a + x) - b \Leftrightarrow f(x) + f(2a - x) = 2b$ 。

其中, 第一个推论结合图形易得, 等价推论通过  $x' = a - x$  的换元也容易证明。

注意到, 当函数  $f(x)$  图象呈中心对称或轴对称时, 在等式的同侧,  $f(k_1x + m) \pm f(k_2x + n)$  中  $k_1, k_2$  满足  $k_1 + k_2 = 0$ 。事实上这也是分析问题的重要依据。  
大胆猜想, 小心求证!

### 双对称求周期问题

当已知条件中包含两个对称条件时, 通常函数具有周期性。

(情形一) 若函数  $f(x)$  的图象关于两条直线  $x = a, x = b (a \neq b)$  对称, 则函数  $f(x)$  为周期函数, 且  $2|a - b|$  为函数  $f(x)$  的一个周期。证明如下:

证明. 由已知,  $f(x) = f(2a - x), f(y) = f(2b - y)$ , 设  $y = 2a - x$ , 得  $f(x) = f(2a - x) = f(y) = f(2b - y) = f(2b - (2a - x)) = f(2(b - a) + x)$ 。  
结论显然。  $\square$

(情形二) 若函数  $f(x)$  的图象关于两个点  $(a, 0), (b, 0) (a \neq b)$  对称, 则函数  $f(x)$  为周期函数, 且  $2|a - b|$  为函数  $f(x)$  的一个周期。证明同理, 从略。

(情形三) 若函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x = a$  和点  $(b, 0)$  对称, 则函数  $f(x)$  为周期函数, 且  $4|a - b|$  为函数的一个周期或  $f(x) = 0$ 。证明如下:

证明. 由已知,  $f(x) = f(2a - x), f(y) + f(2b - y) = 0$ , 设  $y = 2a - x$ , 得  $f(x) = f(2a - x) = f(y) = -f(2b - y) = -f(2(b - a) + x)$ , 当  $a = b$  时,  $f(x) = 0$ ; 否则, 再设  $z = 2(b - a) + x$ , 得  $f(x) = -f(z) = -(-f(2(b - a) + z)) = f(2(b - a) + 2(b - a) + x) = f(4(b - a) + x)$ 。结论显然。  $\square$

注意到, 证明过程中出现了  $f(x) = -f(x + k) (k \neq 0)$  的形式, 这是周期函数的典型特征 ( $x$  前系数相同), 由于  $f(\dots)$  前系数不同, 再次换元代入即可得到最小正周期为  $2|k|$ 。

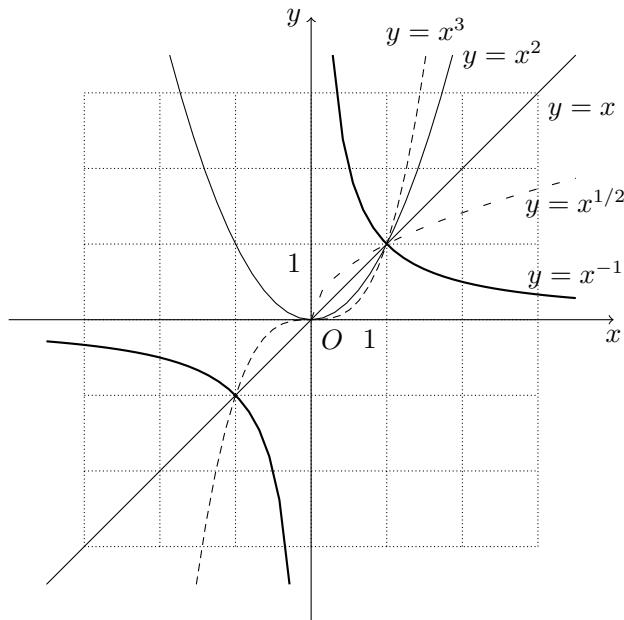


图 3.4: 幂函数图象

### 3.3 幂函数、分段函数与绝对值函数

#### 3.3.1 幂函数

一般地，形如  $y = x^\alpha$  的函数叫作**幂函数**。其中  $x$  是自变量， $\alpha$  是常数。

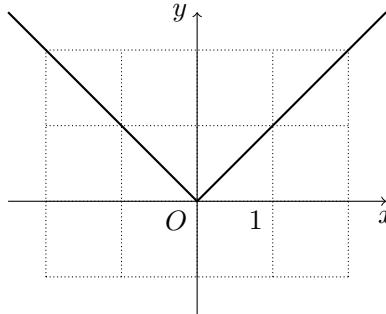
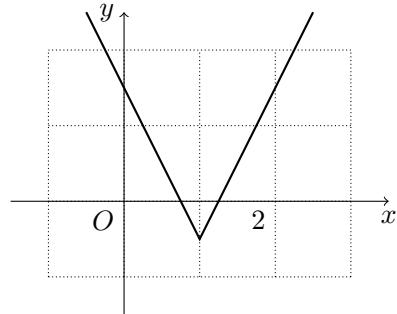
对于幂函数，我们只研究  $\alpha = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$  时的图象与性质。

在同一坐标系下画出  $\alpha = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$  时  $y = x^\alpha$  的图象，如图 3.4 所示。

事实上：

1. 幂函数  $y = x^\alpha$  的图象在第一象限一定存在，且必定经过点  $(1, 1)$ ，一定不经过第四象限；
2. 当  $\alpha > 0$  时，幂函数图象过原点，且在  $[0, +\infty)$  上单调递增；当  $\alpha < 0$  时，幂函数图象不过原点，且在  $(0, +\infty)$  上单调递减；
3. 在直线  $x = 1$  的右边， $\alpha$  越大，函数值增长越快。

通过探究  $\alpha = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$  时  $y = x^\alpha$  的图象，还可以得到幂函数的很多其他性质，在此不一一列举。

图 3.5: 函数  $y = |x|$  图象图 3.6: 函数  $y = 2|x - 1| - 0.5$  图象

### 3.3.2 分段函数

分段函数是通常记为  $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_1 \\ f_2(x), & x \in D_2 \\ \vdots \\ f_n(x), & x \in D_n \end{cases}$  的函数，自变量在不同的取值区间有“不同的”映射关系。沿用函数就像机器的比喻，分段函数就像是多个机器，对于不同的输入，会给出不同的机器产生返回。事实上，选择机器 + 输入机器的过程，可以视为一个机器，因为分段函数也是函数，也就具有函数的一切特性，所以可以看作是一个“割裂的”映射关系。

在解决分段函数有关问题时，需要注意函数的定义域，不同取值区间不应有重叠。在实际问题中，不同的取值区间的并集往往是一个连续的区间，因此需要特别考虑区间断开处的函数值情况，是否有跳跃等。

分段函数的的定义域为每一段自变量取值范围的并集。分段函数的值域为每一段函数值范围的并集，最大值是每一段最大函数值的最大值，最小值是每一段函数最小数值的最小值。

### 3.3.3 绝对值函数及其衍生

#### 绝对值函数

绝对值函数的分段定义如下：

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

函数  $y = |x|$  的图象如图 3.5 所示。

这是最基本的绝对值函数模型，可以看成是从原点引出两条关于过原点的竖直线（即  $y$  轴）对称的射线。

### 一般绝对值函数

对绝对值函数图象进行变换，得到更一般的形式： $y = k|tx - a| + b$  ( $t \neq 0$ )。其中  $k$  控制右侧这条射线的斜率，射线的端点则移动到了点  $(a, b)$  处， $|t|$  控制  $x$  坐标轴伸 ( $< 1$ ) 缩 ( $> 1$ ) 的程度。本小节中把这样的绝对值函数称为一般绝对值函数。图 3.6 是  $k = 2, a = 1, b = -0.5, t = 1$  时的图象。

当我们把这样两个一般绝对值相加时，会得到一个新的绝对值函数，即  $f(x) = k_1|t_1x - a_1| + k_2|t_2x - a_2| + b$  ( $t_1t_2 \neq 0$ )。

解决此类问题的主要思想是分类讨论去掉绝对值，转化为一般分段函数，数形结合进行研究。下面研究  $\frac{a_1}{t_1} \neq \frac{a_2}{t_2}$  的情况。根据各个参数的取值不同，可分为如下四种类型（命名仅为便于记忆，仅在本小节适用）。

### 平底锅模型

形如  $f(x) = |x - a| + |x - b|$  的函数，由于其图象酷似平底锅，故称之为平底锅模型。在绝对值前乘上相同常数同理，不再赘述。

我们需要通过分类讨论将其转化为一般分段函数，各个击破。不妨设  $a < b$ 。可能分段的点为  $x = a, x = b$  两处，二者把定义域  $\mathbb{R}$  分为  $(-\infty, a), [a, b], (b, +\infty)$  三段。

分别考虑每一段上的情况，此时绝对值内的正负完全确定，可以去掉绝对值，得

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a + b, & x < a \\ b - a, & a \leq x \leq b \\ 2x - a - b, & x > b \end{cases}$$

注意到，当  $x \in [a, b]$  时，函数值为定值  $b - a$ ；两侧射线的斜率绝对值为 2。图 3.7 是  $a = -1, b = 1$  时的函数图象。

关于函数值为定值的原因，有一个巧妙的几何解释。

如图 3.8，考虑数轴上  $a, b, x$  对应的点，则  $f(x)$  描述的是  $x$  对应点到  $a, b$  对应点的距离之和。当  $x$  位于二者之间，也就是  $x \in [a, b]$  时，二者距离之和恰好等于  $a, b$  对应点之间的距离。

如果再加上  $n$  个形如  $|x - m|$  的项，则图象将会为平底锅 ( $n$  为偶数) 或尖底锅 ( $n$  为奇数)，如图 3.9 所示。

### Z 字形模型

形如  $f(x) = |x - a| - |x - b|$  的函数为该类型，其中  $a \neq b$ 。在绝对值前乘上相同常数同理，不再赘述。

分类讨论展开即可，同前。展开后又可分为以下两种情形：

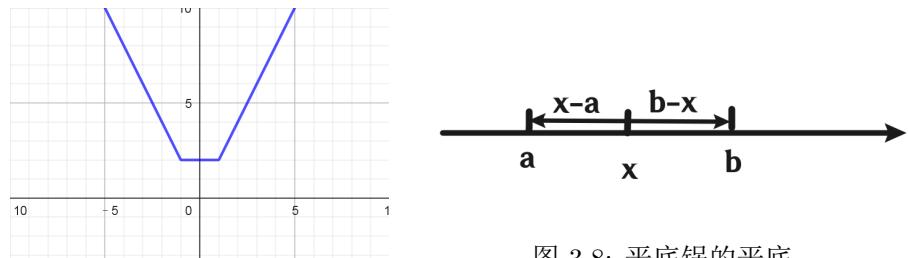


图 3.7: 平底锅模型

图 3.8: 平底锅的平底

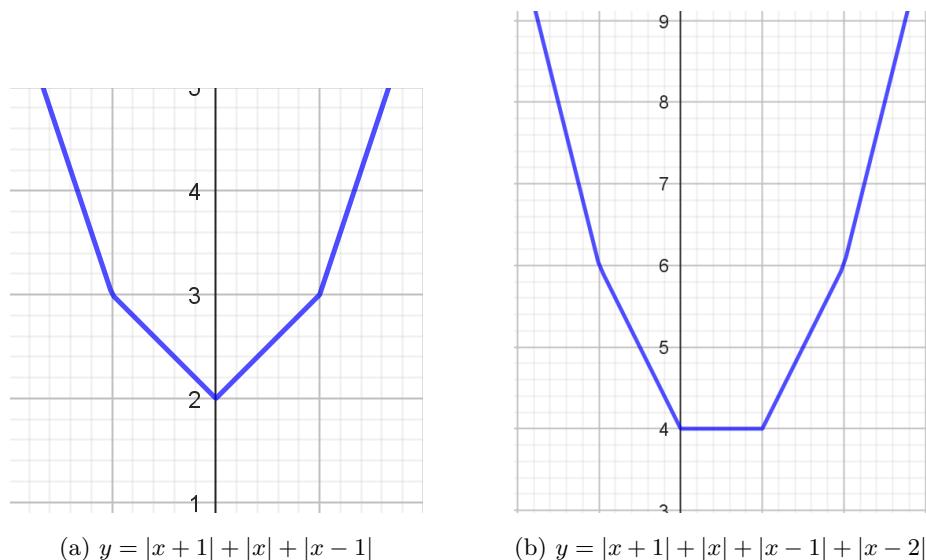


图 3.9: 尖底锅与平底锅函数图象

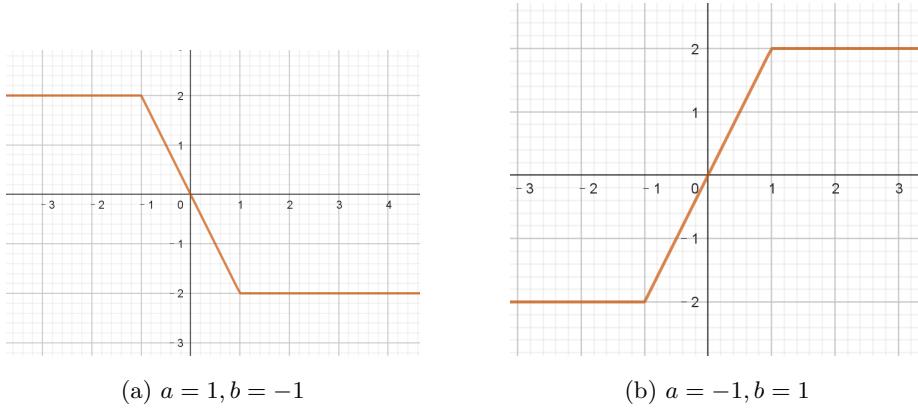


图 3.10: Z 字形模型

(情形一) 如图 3.10a, 当  $a > b$  时,

$$f(x) = \begin{cases} |a - b|, & x \leq b \\ -2x + a + b, & b < x < a \\ -|a - b|, & x \geq a \end{cases}$$

(情形二) 如图 3.10b, 当  $a < b$  时,

$$f(x) = \begin{cases} |a - b|, & x \leq a \\ 2x - a - b, & a < x < b \\ -|a - b|, & x \geq b \end{cases}$$

注意到, 当  $a - b > 0$  时, 中间段函数值逐渐减小; 当  $a - b < 0$  时, 中间段函数值逐渐增大。

### 歪底锅模型

形如  $f(x) = m|x - a| + n|x - b|$  ( $a < b$ ) 的属于该类型。下面研究  $m, n > 0$  的情况。分类讨论同前。展开得

$$f(x) = \begin{cases} (-m - n)x + am + bn, & x < a \\ -an + bn, & x = a \\ (m - n)x + am - bn, & a < x < b \\ -am + bm, & x = b \\ (m + n)x - am - bn, & x > b \end{cases}$$

函数图象如图 3.11 所示。

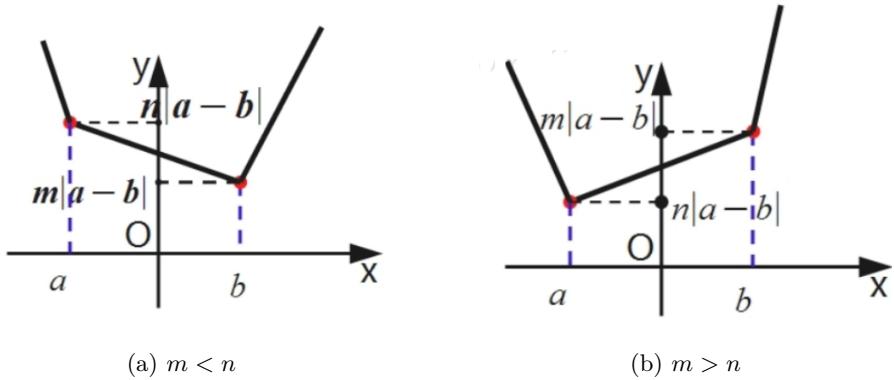


图 3.11: 歪底锅模型

注意到, 不论  $m, n$  的大小关系如何, 函数的最小值点总是为  $m, n$  中较大者对应绝对值内部关于  $x$  的表达式的零点。

### 过山车模型

客套话就不说了。 $f(x) = m|x - a| - n|x - b|$  ( $m, n > 0, a \neq b$ ) 可分为下面两种情形:

(情形一) 如图 3.12, 当  $a < b$  时,

$$f(x) = \begin{cases} (-m+n)x + am - bn, & x < a \\ na - nb, & x = a \\ (m+n)x - am - bn, & a < x < b \\ -ma + mb, & x = b \\ (m-n)x - am + bn, & x > b \end{cases}$$

(情形二) 如图 3.13, 当  $a > b$  时,

$$f(x) = \begin{cases} (-m+n)x + am - bn, & x < b \\ ma - mb, & x = b \\ (-m-n)x + am + bn, & b < x < a \\ -na + nb, & x = a \\ (m-n)x - am + bn, & x > a \end{cases}$$

猜你想找: 二次函数二次项系数与开口方向。

注意到, 不论  $a, b$  大小如何,  $m, n$  中较大者对应项前符号为正则有最小值, 为负则有最大值, 最大(或小)值点总是为  $m, n$  中较大者对应绝对值内部关于  $x$  的表达式的零点。

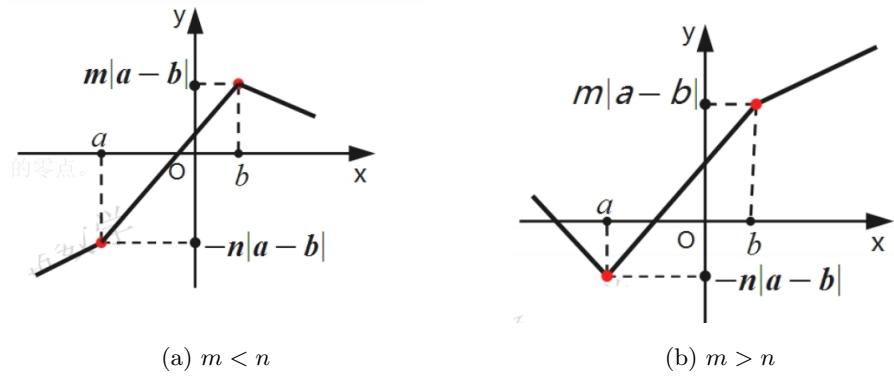


图 3.12: 过山车模型 ( $a < b$ )

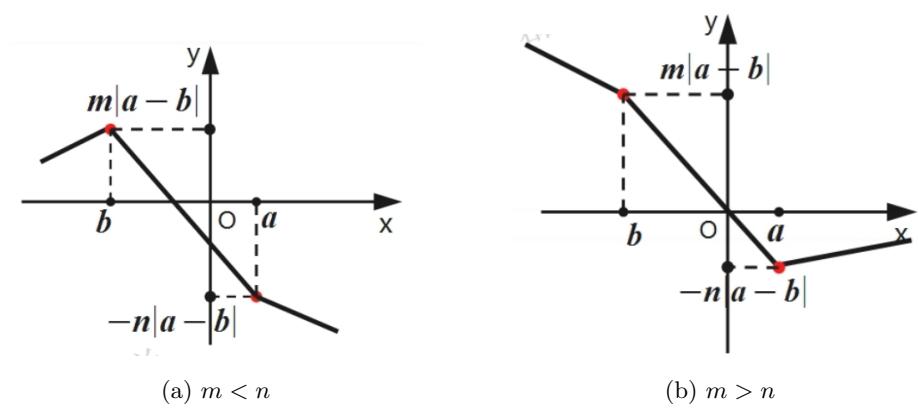


图 3.13: 过山车模型 ( $a > b$ )

## 3.4 指数函数与对数函数

本节研究内容限定在实数域内。

### 3.4.1 指数

#### 根式

一般地，如果  $x^n = a$ ，那么  $x$  叫作  $a$  的  $n$  次方根，其中  $n > 1, n \in \mathbb{N}^*$ 。

当  $n$  是奇数时，正数  $n$  次方根是一个正数，负数的  $n$  次方根是一个负数。这是  $a$  的  $n$  次方根用符号  $\sqrt[n]{a}$  表示。

当  $n$  是偶数时，正数  $n$  次方根有两个，二者互为相反数，正的用  $\sqrt[n]{a}$  表示，负的用  $-\sqrt[n]{a}$  表示。二者可以合并写作  $\pm\sqrt[n]{a}$  ( $a > 0$ )。负数没有偶次方根。

0 的任何次方根都为 0，记作  $\sqrt[0]{0} = 0$ 。

式子  $\sqrt[n]{a}$  叫作根式，这里  $n$  叫作根指数， $a$  叫作被开方数。

根据  $n$  次方根的意义，可得

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ |a|, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

#### 分数指数幂

为了推广后能保持原有的运算性质，我们规定

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, n > 1)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, n > 1)$$

规定：0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义。

至此，因为所有有理数都可以表示为两个整数之比，所以我们已经把指数推广到了有理数域。

#### 无理数指数幂

由于  $\mathbb{Q}$  在  $\mathbb{R}$  中稠密，换句话说， $\forall x \in \mathbb{R}, x$  都可以由  $\mathbb{Q}$  中的数逼近，因此我们可以分别构造单调递增和单调递减收敛于  $x$  的有理数序列  $\{r_n\}, \{s_n\}$ ，再结合夹挤定理与函数  $y = a^x$  ( $a > 0$ ) 的连续性，可以确认  $\{a^{r_n}\}, \{a^{s_n}\}$  收敛于同一极限  $a^x$ ，注意到结论与  $x$  是否为有理数无关，我们已经推广分数指数幂到无理数指数幂。

夹挤定理，又称夹逼定理、夹极限定理、三明治定理、逼近定理、迫敛定理，指出若有两个函数在某点的极限相同，且有第三个函数的值在这两个函数之间，则第三个函数在该点的极限也相同。

实数指数幂有如下运算性质： $\forall r, s \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} a^r a^s &= a^{r+s} \quad (a > 0) \\ (a^r)^s &= a^{rs} \quad (a > 0) \\ (ab)^r &= a^r b^r \quad (a > 0, b > 0) \end{aligned}$$

### 3.4.2 指数函数

#### 指数函数的定义

形如  $y = a^x$  ( $a > 0$  且  $x \neq 1$ ) 的函数叫作**指数函数**，其中  $x$  为自变量，定义域为  $\mathbb{R}$ 。

在实际问题中，经常会遇到指数增长和指数衰减，分别指的是增长率和衰减率为定值的变化模型，其中增长率或衰减率，是指一段时间过后，某一量的变化量与初始量之比。<sup>3</sup>这类模型中， $x$  次经过某一段时间后，终末量  $y$  与初始量  $N$  有如下关系： $y = N(1 + p)^x$  ( $x \in \mathbb{N}$ )，其中  $p$  是增长率或衰减率（取相反数）。<sup>4</sup>

#### 指数函数的图象和性质

在同一个坐标系下画出函数  $y = a^x$  与  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$  ( $a > 1$ ) 的图象，图 3.14 是  $a = 2$  的情况。

因为  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ ，点  $(x, y), (-x, y)$  关于  $y$  轴对称，所以  $y = 2^x$  图象上任意一点  $P(x, y)$  关于  $y$  轴的对称点  $P'(-x, y)$  都在函数  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  的图象上；反之亦然。由此可知，底数互为倒数的两个指数函数的图象关于  $y$  轴对称。

事实上，指数函数的图象根据底数  $a$  的取值，可分为  $0 < a < 1$  和  $a > 1$  两种类型，如表 3.2 所示。

合理利用指数函数的单调性，通过自变量的大小关系可以判断相应函数值的大小关系。

如果底数不同的指数函数图象出现在同一个坐标系下，可以利用  $a^1 = a$  的性质，作出直线  $x = 1$  来判断底数的大小关系，此时与函数图象交点  $(1, a)$  的纵坐标即为  $a$  的值，如图 3.15 所示。事实上，除 1 以外，任何正数都可作为竖直线的横坐标，因为  $y = x^t$  ( $t > 0$ ) 是增函数。

<sup>3</sup> 增长率的另一个意思是瞬时增长速率，作为区分，此处沿用人教 A 版的解释。人教 B 版未出现此概念。

<sup>4</sup> 事实上，这里应该为几何式增长，几何式增长处理的是离散时间（即增长率是定值），而指数增长处理的是连续时间（即瞬时增长速率与当前数量成正比）。教材未作区分。

项目	$0 < a < 1$	$a > 1$
图象		
定义域	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
值域	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
过定点	$(0, 1)$	$(0, 1)$
单调性	减函数	增函数

表 3.2: 指数函数的图象与性质

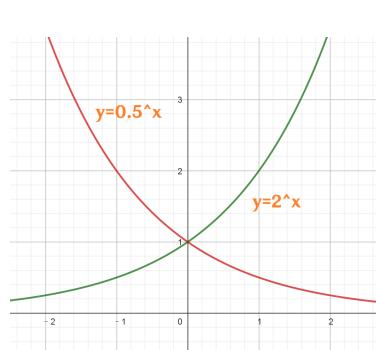


图 3.14: 指数函数的图象

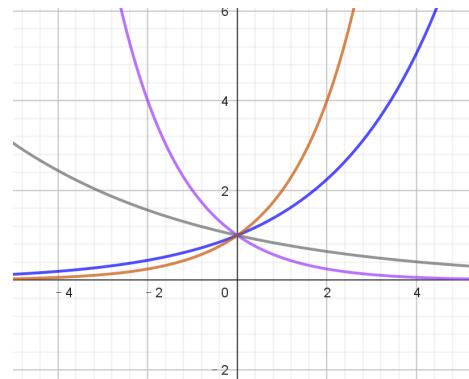


图 3.15: 不同底数指数函数的图象

### 3.4.3 对数

#### 对数的定义

一般地, 如果  $a^x = N$  ( $a > 0, a \neq 1$ ), 那么  $x$  叫作以  $a$  为底  $N$  的对数, 记作  $x = \log_a N$ , 其中  $a$  叫作对数的底数,  $N$  叫作真数。

通常, 我们把以 10 为底的对数叫作常用对数, 并把  $\log_{10} N$  简记为  $\lg N$ 。以  $e$  为底的对数称为自然对数, 并把  $\log_e N$  简记为  $\ln N$ 。

根据对数的定义, 当  $a > 0, a \neq 1$  时,  $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$ 。

由指数与对数的这个关系, 可以得到: 负数和 0 没有对数;  $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$ 。

#### 对数的运算

设  $M = a^m, N = a^n$ , 因为  $a^m a^n = a^{m+n}$ , 所以  $MN = a^{m+n}$ 。这样, 就得到了对数运算的和公式。类似的, 可以得到对数的差公式和次方公式。

如果  $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ , 那么

$$\begin{aligned}\log_a(MN) &= \log_a M + \log_a N \\ \log_a \frac{M}{N} &= \log_a M - \log_a N \\ \log_{a^m} M^n &= \frac{n}{m} \log_a M\end{aligned}$$

设  $\log_a b = x$ , 则  $a^x = b$ , 于是  $\log_c a^x = \log_c b$ , 应用次方公式得  $x \log_c a = \log_c b$ , 于是我们得到了对数换底公式:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1)$$

### 3.4.4 对数函数

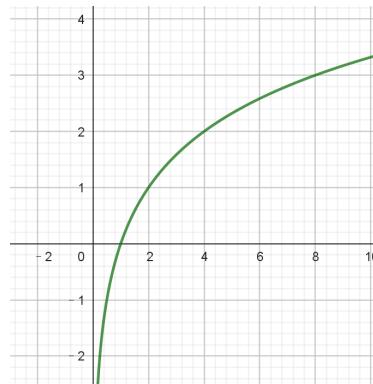
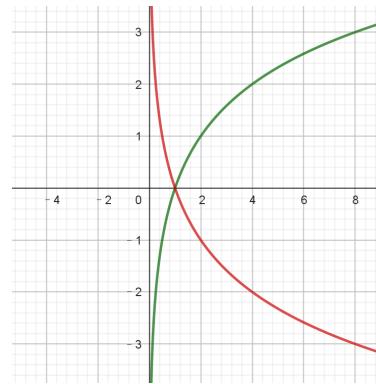
#### 对数函数的定义

一般地, 形如  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的函数叫作对数函数, 其中  $x$  是自变量, 定义域是  $(0, +\infty)$ 。

#### 对数函数的图象与性质

与研究指数函数一样, 我们先画出图象, 再借助图象研究其性质。图 3.16 是底数为 2 的对数函数图象。

应用次方公式, 可以得到  $y = \log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$ 。在同一坐标系中作出两个函数的图象, 如图 3.17 所示。与 3.4.2 节同理, 可以得到, 底数互为倒数的两个对数函数的图象关于  $x$  轴对称。

图 3.16:  $y = \log_2 x$ 图 3.17:  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 

类似于指数函数，对数函数的图象根据底数  $a$  的取值，也可分为  $0 < a < 1$  和  $a > 1$  两种类型。对数函数的性质见表 3.3 所示。

在同一坐标系内，如果有多个对数函数的图象，可作出直线  $y = 1$ ，底数大的对数函数与直线的交点横坐标大，反之亦然。

## 3.5 反函数与不同函数增长差异

### 3.5.1 反函数的定义

反函数，也称作逆函数，是对某个函数做逆运算的函数。

设函数  $f : X \rightarrow Y$ 。如果存在一个函数  $g : Y \rightarrow X$ ，并  $\forall x \in X, g(f(x)) = x$  且  $\forall y \in Y, f(g(y)) = y$ ，则称  $g$  为  $f$  的反函数，记之为  $f^{-1}$ 。若一函数有反函数，称此函数可逆。

这就是说，沿用函数就像机器的比喻，一个函数  $f$  存在反函数  $g$ ，需要  $g$  就像“撤销工具”，能把  $f$  执行的操作“撤销”掉、给出原有的唯一确定的  $x$ ，并且能且仅能撤销  $f$  可能执行的所有操作。这告诉我们， $f$  要想拥有反函数  $g$ ，必须要保证不存在两个不同的输入给出相同的输出，否则把这个输出给反函数  $g$ ，又怎么知道哪一个才是真正的输入呢？另一方面，需要  $f$  的值域与到达域  $Y$  相等，即  $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ 。这是因为，由定义， $g$  应当能撤销  $Y$  中所有的元素的操作，但是要是  $f$  执行操作根本给不出某个元素  $y \in Y$ ，那么把这个“输出”  $y$  放到“撤销工具”里，又会得到什么样的结果呢？进一步，如果再把这个撤销结果输入给  $f$ ，又该如何是好呢？

这告诉我们，一个函数可逆的充分必要条件是该函数为双射，即同时为

- 单射： $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ 。
- 满射： $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ 。

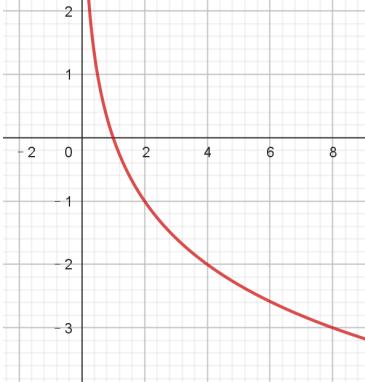
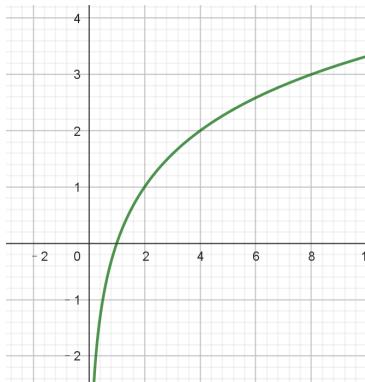
项目	$0 < a < 1$	$a > 1$
图象		
定义域	$(0, +\infty)$	$\mathbb{R}$
值域		
过定点	$(1, 0)$	
单调性	减函数	增函数

表 3.3: 对数函数的图象与性质

验证一个函数是否为双射（也就可逆）的方法是水平线检验法，也就是函数图象须和纵坐标在到达域内的任何一条水平线有且仅有一个交点。

### 3.5.2 反函数的性质

反函数具有如下性质：

1. 原函数的定义域、值域分别是反函数的值域、定义域；
2. 原函数与其反函数的函数图象关于直线  $y = x$  对称；
3. 单调函数一定存在反函数，且反函数与原函数的单调性一致；
4. 拥有反函数的函数不一定是单调函数，例如  $y = x^{-3}$ 。

一部分函数尽管本身不可逆，但它到其定义域的某个子集上的限制是可逆的。也就是说，对这类函数，如果我们限制其定义域到某一范围内，则限制后的函数可逆。

映射  $f$  的限制是一个新的映射，记作  $f|_A$  或  $f \upharpoonright A$ ，它是通过为  $f$  选择一个更小的定义域  $A$  得到的。反过来，也称  $f$  是映射  $f|_A$  的扩张。

### 3.5.3 不同函数增长的差异

本小节中“幂函数”特指幂指数为正数的幂函数。

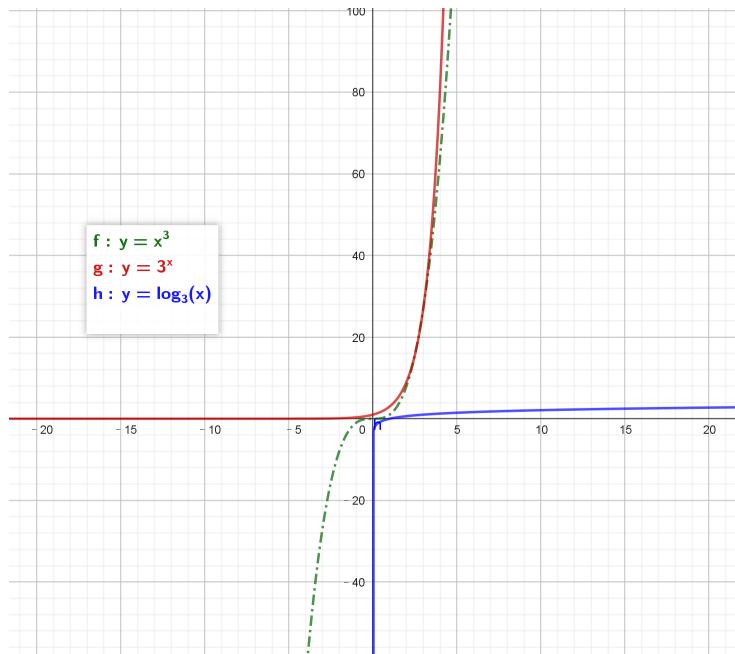


图 3.18: 三种函数增长速度

如图 3.18，在同一坐标系内画出指数函数、幂函数与对数函数的图象，并改变坐标尺到一个较大的范围。可以看出，当  $x$  足够大时，有指数函数  $>$  幂函数  $>$  对数函数。那么是不是对任意的指数函数、幂函数和对数函数都有这样的结论呢？

指数函数增长迅速。一般地， $\forall a, k, n > 0, \exists x_0, \forall x > x_0, a^x > kx^n$ 。即，随着  $x$  的增大，指数函数的函数值与增长速度终将超过幂函数。这种增长称作爆炸性增长。

对数函数增长缓慢。一般地， $\forall a, k, n > 0, \exists x_0, \forall x > x_0, kx^n > \log_a x$ 。即，随着  $x$  的增大，幂函数的函数值与增长速度终将超过对数函数。

## 3.6 等式与不等式

### 3.6.1 等式与方程（组）的解集

#### 等式的定义

数学中，若两个数学对象在各方面都相同，则称二者相等。这定义了一个二元谓词等于，记作“=”： $x = y$  当且仅当  $x, y$  相等。将两个表达式用等号连起来，构成了等式。

在任何条件下都成立的等式称为恒等式，包含未知数的等式称为方程式。

两个常用的恒等式： $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ,  $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ 。

### 等式的性质

等量公理指出， $a = b$  可以推出  $a+c = b+c, a-c = b-c, ac = bc, \frac{a}{d} = \frac{b}{d}$  ( $d \neq 0$ ) 中的任意一者，反之， $a+c = b+c, a-c = b-c, ad = bd, \frac{a}{d} = \frac{b}{d}$  ( $d \neq 0$ ) 中的任意一者可以推出  $a = b$ 。进一步，可以得到等式的替代性这一基本性质。除此之外，等式还具有一些其他基本性质。

- 替代性：对任意量  $a, b$  与任意表达式  $F(x)$ ，则  $a = b \Rightarrow F(a) = F(b)$  (设等式两边都有意义)。
- 自反性：对任意量  $a$ ，则  $a = a$ 。(这通常作为中间步骤而略去)
- 对称性：例如，若  $a = b$ ，则  $b = a$ 。
- 传递性：例如，若  $a = b, b = c$ ，则  $b = c$ 。

### 方程的解集

方程的解（或根）是指能使方程左右两边相等的未知数的值。一般地，把一个方程所有解组成的集合称为这个方程的解集。

### 方程组的解集

一般地，将多个方程联立，就能得到方程组。方程组中，每个方程的解集的交集称为这个方程组的解集。

看一个例子。求方程组  $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - 3z = 5 \end{cases}$  的解集。

如果把  $z$  看作已知数，则可以解出  $x = z + 3, y = 2z + 2$ 。这样一来，方程组的解集可以写成

$$\{(x, y, z) | x = z + 3, y = 2z + 2, z \in \mathbb{R}\}$$

不难看出，这个集合含有无限多个元素，是一个无限集。

这说明，当方程组中未知数的个数大于方程的个数时，方程组的解集可能含有无穷多个元素。此时，如果将其中一些未知数看成常数，那么其他未知数往往能用这些未知数表示出来。

当一个式子中有多个变量，或者一个函数有多个自变量，这时候可以把某些变量看成常数，重点研究此式的值或函数值与剩下这个（或这些）变量的关系，这叫作“主元思想”。

### 3.6.2 不等式

## 3.7 函数、方程、不等式之间的关系

## 3.8 函数的应用

3.8.1 对数函数：世界是对数的

3.8.2 指数函数：曾“几何”时

3.8.3 幂函数：规模效应

3.8.4 三角函数：波动的谐律

3.8.5 二次函数：宇宙之“2”

3.8.6 再看函数：混沌中的确定

## 第四章 导数

## 第五章 平面向量、解三角形

## 第六章 立体几何

# 第七章 解析几何

未经特别说明，本章讨论在平面直角坐标系  $xOy$  中进行。

## 7.1 直线

### 7.1.1 直线的描述

#### 直线的倾斜角、斜率与方向向量

在平面直角坐标系中，当直线  $l$  与  $x$  轴相交时，我们以  $x$  轴为基准， $x$  轴正方向与直线  $l$  向上的方向之间所成的角  $\alpha$  叫作直线  $l$  的倾斜角。特别地，当直线  $l$  与  $x$  轴平行或重合时，我们规定它的倾斜角为  $0^\circ$ 。

对所有直线，倾斜角  $\alpha \in [0, \pi)$ 。

一条直线的倾斜角  $\alpha (\alpha \neq 90^\circ)$  的正切值叫作这条直线的斜率，即斜率  $k = \tan \alpha$ 。倾斜角为  $90^\circ$  的直线的斜率不存在。日常生活中常用的“坡度”概念是这样定义的：坡度 =  $\frac{\text{铅直高度}}{\text{水平宽度}}$ 。当直线的倾斜角为锐角时，直线的斜率与坡度是类似的。

当我们说“两条直线”“两 公式 1 (斜率公式). 过两点  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$  的直线的斜率点”等时，默认这些点或 直线不重合。

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

证明利用向量，见选必一 P52，在此不作赘述。

倾斜角和斜率分别从形和数两个角度刻画了直线相对于  $x$  轴的倾斜程度。

所有直线都有倾斜角，但斜率可能存在。当且仅当直线与  $x$  轴垂直时，斜率不存在。

若  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  是直线  $l$  上两个不同的点，则向量  $\overrightarrow{P_1P_2}$  是直线的方向向量。容易证明，直线  $l$  的方向向量与  $\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  共线。也就是说，直线  $l$  的所有可能的方向向量都可以表示为  $\lambda \overrightarrow{P_1P_2}$  的形式，其中  $\lambda$  为某一确定的非零实数。

若这条直线  $l$  的斜率为  $k$ ，则它的一个方向向量为  $\frac{1}{x_2 - x_1} \overrightarrow{P_1 P_2} = \left( \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1}, \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) = (1, k)$ 。

一般地，已知  $\vec{d} = (u, v)$  为直线  $l$  的一个方向向量，则：

- 当  $u = 0$  时，直线  $l$  的斜率不存在，倾斜角为  $90^\circ$ ；
- 当  $u \neq 0$  时，直线  $l$  的斜率  $k = \frac{v}{u}$ ，倾斜角  $\alpha$  满足  $\tan \alpha = \frac{v}{u}$ 。

关于方向向量的一个例题 7.1.4 见第 52 页。

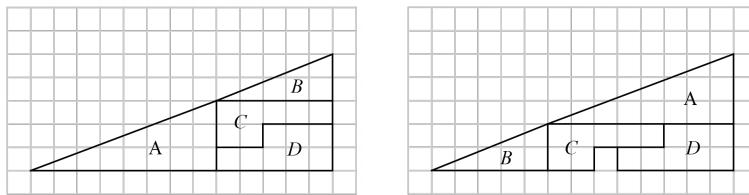
**例题 7.1.1.** 已知  $A(1, 3), B(-2, 1), C(4, m)$  三点在同一条直线上，求  $m$  的值。

这是一个三点共线问题，核心在于先把直线  $AB, BC$ （或  $AB, AC$  等）看作两条直线，然后利用斜率相等（或同为不存在）进行求解。更基本的做法是利用向量平行。这些解法能成立的核心在于，一点和一个方向可以确定一条直线。

解. 斜率算两次： $k_{AB} = \frac{1-3}{(-2)-1} = \frac{2}{3}$ ,  $k_{BC} = \frac{m-1}{4-(-2)} = \frac{m-1}{6}$ ，因为  $A, B, C$  三点共线，所以  $k_{AB} = k_{BC}$ ，解得  $m = 5$ 。

**例题 7.1.2.** 已知一条直线经过  $A(2, 1), B(1, m^2)$  ( $m \in \mathbb{R}$ ) 两点，求此直线的倾斜角  $\alpha$  的取值范围。

例题 7.1.2 的完整解答见附录 A（第 59 页）。



(a) 变换前

(b) 变换后

图 7.1: 失踪的正方形

**例题 7.1.3.** 纽约的业余魔术师保罗·嘉理 (Paul Curry) 在 1953 年发明了谜题“失踪的正方形”。如图 7.1a 所示，保罗声称，一些竖直线和水平线把一个  $13 \times 5$  的直角三角形分成四个部分。图中竖直线和水平线严格与正方形网格重合。魔术师保罗把这些图形经过重新组合，形成了图 7.1b 所示的形状。可是，这与原来的图形相比，多出了一个  $1 \times 1$  的正方形！这怎么可能呢？请说明为什么错了。

例题 7.1.3 的完整解答见附录 A（第 59 页）。

### 直线的 5 种常见方程

直线是平面上的点的集合，点又可以由含两个变量  $x, y$  的坐标唯一确定，因此可以用关于  $x, y$  的方程表示一条直线，满足这个方程的解构成的  $(x, y)$  表示直线上的点。直线的 5 种常见方程常见形式如下：

**点斜式**  $y - y_0 = k(x - x_0)$  表示过点  $(x_0, y_0)$  且斜率为  $k$  的直线，但不能表示直线  $x = x_0$ ；

**斜截式**  $y = kx + b$  表示斜率为  $k$  且  $y$  轴截距为  $b$  的直线，但不能表示垂直于  $x$  轴的直线<sup>1</sup>；

**两点式**  $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$  表示过两点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  的直线，当  $x_1 = x_2$  或  $y_1 = y_2$  时，不能表示过这两点的直线；

**截距式**  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  表示  $x$  轴截距为  $a$  且  $y$  轴截距为  $b$  的直线，但不能表示垂直于  $x$  轴或者  $y$  轴的直线；

**一般式**  $Ax + By + C = 0 (A^2 + B^2 \neq 0)$  可以表示任何直线，这样的直线以  $-\frac{A}{B}$  为斜率（若存在），以  $(-B, A)$  为方向向量，以  $(A, B)$  为法向量的直线。法向量即与任意一个方向向量均垂直的向量。

请特别注意某一种方程无法表示的情况。实际答题中，最终结果建议化为一般式。

事实上，两点式经过变形可以得到更强的形式： $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$ 。这样的直线可以表示过两点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  的直线，不论  $x_1, x_2$  与  $y_1, y_2$  各自是否相等。读者自证不难。

容易得出，经过点  $P(a, b)$  且平行于  $x$  轴的直线方程为  $y = b$ ，平行于  $y$  轴的直线方程为  $x = a$ ，过原点且斜率为  $k$  的直线方程为  $y = kx$ 。

### \* 直线的点向式与点法式

当斜率存在且不为 0 时，直线的点斜式方程  $y - y_0 = k(x - x_0)$  很容易改写为点向式方程： $\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{k}$ ，其一般形式为

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

从点向式方程可以轻松看出，向量  $\vec{v} = (a, b)$  是直线的一个方向向量。反之，如果已知直线经过的点与方向向量，也容易写出此点向式方程。

<sup>1</sup>本书中，为了和圆锥曲线中的量  $b$  作区分，统一设为  $y = kx + m$  的形式。

对于一般形式的直线  $Ax + By = -C (AB \neq 0)$ , 也容易得到点向式方程为  $\frac{x - x_0}{B} = -\frac{y - y_0}{A}$ , 其中  $x_0, y_0$  满足  $Ax_0 + By_0 + C = 0$ , 即点  $(x_0, y_0)$  在直线上。进一步变形可以得到:

$$A(x - x_0) = B(y - y_0) \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

这就是直线的点法式方程, 没有了  $A, B$  都不能为 0 的限制。

点向式、点法式的意义在于, 它们可以轻松地推广到三维的情形, 在立体解析几何的新定义题中常有出现。

### 直线的参数方程

在点向式的基础上, 如果再设  $t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$ , 则由点向式方程可得:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

上式中的  $x, y$  可视为由参变量  $t$  的取值而定, 因此叫做以  $t$  为参变量的直线的参数方程。参变量通常有取值范围。满足该方程的直线经过点  $P_0(x_0, y_0)$ , 且  $(a, b)$  是它的一个方向向量。直线上的每一个点与参变量一一对应, 证明可以使用向量平行的充要条件。

特别地, 当  $a^2 + b^2 = 1$ , 即  $\vec{v}$  为单位方向向量, 则  $|\overrightarrow{P_0P}| = |t \vec{v}| = |t|$ 。这就是说, 直线  $l$  上任意一点  $P$  到直线上一点  $P_0(x_0, y_0)$  的距离即为该点所对应参变量  $t_0$  的绝对值, 也就是  $d_{PP_0} = |t_0|$ 。此时, 我们进行三角换元:

令  $\begin{cases} \cos \theta = a \\ \sin \theta = b \end{cases}$ , 显然  $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$  为单位方向向量。此时, 参数方程可以写作:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \theta \\ y = y_0 + t \sin \theta \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

这里的常数  $\theta$  具有确定的含义, 当  $\theta \in [0, \pi)$  时, 它就是直线  $l$  的倾斜角。读者可以自行证明。

#### 7.1.2 两直线的位置关系

接下来以斜截式  $l_1 : y = k_1x + m_1$ ,  $l_2 : y = k_2x + m_2$  和一般式  $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$  为例来说明两直线的位置关系。若斜率不存在, 则仅取用一般式的结论即可。条件转化的充要性见选必一 P55。

### 平行

两直线平行，当且仅当倾斜角相等且不重合。

$$\text{倾斜角相等} \Leftrightarrow k_1 = k_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Leftrightarrow A_1B_2 = A_2B_1$$

两直线不重合  $\Leftrightarrow m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow C_1 \neq C_2$

$$\text{常见的两种组合为 } l_1 // l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ m_1 \neq m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \\ C_1 \neq C_2 \end{cases}.$$

### 垂直

两直线垂直  $\Leftrightarrow$  方向向量垂直  $\Leftrightarrow k_1k_2 = -1 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

### 相交

两直线相交  $\Leftrightarrow$  倾斜角不相等  $\Leftrightarrow k_1 \neq k_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2} \Leftrightarrow A_1B_2 \neq A_2B_1$

如果直线  $l_1, l_2$  相交于点  $P(x, y)$ ，则  $x, y$  必然同时满足直线  $l_1, l_2$  的方程，换言之，交点坐标一定是两直线方程联立后的解。又因为两条直线最多只会相交在同一点，所以这个解  $(x_0, y_0)$  就是交点  $P$  的坐标。

### 7.1.3 距离公式

**公式 2** (两点间距离公式). 两点  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  之间的距离

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

这是显然的，因为  $|P_1P_2| = |\overrightarrow{P_1P_2}|$ 。

**公式 3** (点到直线的距离公式). 点  $P(x_0, y_0)$  到直线  $l : Ax + By + C = 0$  的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

解析及向量的证法见附录 A (第59页)。下面给出等面积 (面积算两次) 的证明方法。

证明. 如图 7.2，设  $P(x_0, y_0)$  为直线  $l$  外一点，作  $PM // x$  轴交  $l$  于点  $M$ ，  
 $PN // y$  轴交  $l$  于点  $N$ 。联立  $\begin{cases} y = y_0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$  得  $x_M = -\frac{By_0 + C}{A}$ ，  
 则  $M\left(-\frac{By_0 + C}{A}, y_0\right)$ 。同理， $N\left(x_0, -\frac{Ax_0 + C}{B}\right)$ 。

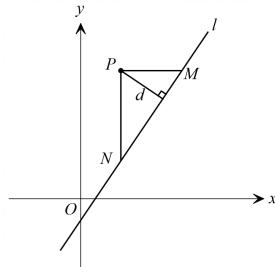


图 7.2

所以,  $|PM| = \left| x_0 - \left( -\frac{By_0 + C}{A} \right) \right| = \left| x_0 + \frac{By_0 + C}{A} \right| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|A|}$ ,  
同理  $|PN| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|B|}$ 。则

$$\begin{aligned} |MN| &= \sqrt{|PN|^2 + |PM|^2} = \sqrt{\frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2} + \frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{B^2}} \\ &= |Ax_0 + By_0 + C| \sqrt{\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}} = |Ax_0 + By_0 + C| \cdot \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{|AB|} \end{aligned}$$

一方面,  $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2}|PN| \cdot |PM| = \frac{1}{2} \cdot \frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{|AB|}$ ; 另一方面, 设点 P 到直线 l 的距离为 d, 则  $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2}|MN| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot d \cdot |Ax_0 + By_0 + C| \cdot \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{|AB|}$ 。对比二式,  $d \cdot \sqrt{A^2 + B^2} = |Ax_0 + By_0 + C|$ , 即  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 。□

从这个例子可以看出, 等面积法是解决几何问题的重要方法, 通过等面积进行转化的方法在解析几何问题解决中常有出现。

**公式 4 (平行线间的距离公式).** 两条平行直线  $l_1, l_2$  之间的距离为:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

特别注意, 运用该公式的前提是, 两直线方程中  $x, y$  的系数分别相等。  
两条平行直线间的距离即为其中一条直线上的一点到另一条直线的距离。公式 4 平行线间的距离公式的完整证明见附录 A (第60页)。

### 7.1.4 角度公式与三角形面积公式

#### 到角公式与夹角公式

我们先给出两直线到角的定义：设有两条直线  $l_1, l_2$  相交于  $A$  点，我们定义直线  $l_1$  按逆时针方向旋转到与  $l_2$  重合时所旋转的最小角度，叫作（从） $l_1$  到  $l_2$  的角。

设两条相交直线  $l_1, l_2$  的倾斜角分别为  $\alpha_1, \alpha_2$ ，斜率分别为  $k_1, k_2$ ，从  $l_1$  到  $l_2$  的角记为  $\theta$ 。由两直线到角的定义画图分析可得， $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$  ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ) 或  $\theta = \pi + (\alpha_2 - \alpha_1)$  ( $\alpha_1 > \alpha_2$ )。不论哪种情况，都有  $\tan \theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1}$ 。若  $l_1, l_2$  的斜率存在并设为  $k_1, k_2$ ，那么我们就得到了到角公式： $\tan \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$ 。

到角是有方向、可以叠加的，可以解决涉及直线的旋转与对称问题。

两直线相交，会形成两对对顶角，其中较小的角就是两直线的夹角。两直线的夹角要么就是到角，要么是到角的补角。所以夹角的正切值就是到角的正切值的绝对值。

**公式 5** (两直线的夹角公式). 设两直线  $l_1, l_2$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ ，两直线的夹角为  $\beta$ ，则有

$$\tan \beta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|$$

利用向量的夹角计算公式，同样也可以得到如下的直线夹角公式：

**例题 7.1.4.** 求证：直线  $A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0$  的夹角  $\theta$  的余弦值  $\cos \theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ 。

例题 7.1.4 的完整解答见附录 A (第60页)。

#### 向量叉乘的三角形面积公式

### 7.1.5 对称问题

开始前我们给出中点公式而不加证明：

**公式 6** (中点公式). 两点  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  连线的中点坐标为

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

#### 点关于点对称

点  $P(a, b)$  关于点  $Q(m, n)$  的对称点为  $P'$ ，则  $P'(2m - a, 2n - b)$ 。

证明. 设  $P'(x, y)$ 。因为  $P, P'$  关于  $Q$  对称, 所以  $PP'$  的中点为点  $Q$ , 应用中点公式, 有  $\begin{cases} m = \frac{a+x}{2} \\ n = \frac{b+y}{2} \end{cases}$ , 解得  $x = 2m - a, y = 2n - b$ 。  $\square$

### 点关于坐标轴及原点对称

点  $P(a, b)$ :

- 关于  $x$  轴对称的点坐标为  $(a, -b)$ ;
- 关于  $y$  轴对称的点坐标为  $(-a, b)$ ;
- 关于原点对称的点坐标为  $(-a, -b)$ 。

### 点关于直线对称

核心思路: 垂直平分。

给定直线  $l : Ax + By + C = 0$  与直线  $l$  外一点  $P(x_0, y_0)$ , 下面推导点  $P$  关于直线  $l$  的对称点  $P'$  的坐标。

先设点  $P'(x, y)$ , 并连  $PP'$ , 由轴对称的性质,  $l$  垂直平分  $PP'$ 。这里有两个未知数, 需要两个方程。

垂直即  $PP' \perp l$ , 故  $\frac{y - y_0}{x - x_0} \cdot \frac{A}{-B} = -1$ , 化简得  $Bx - Ay + (Ay_0 - Bx_0) = 0$ 。这里我们没有考虑斜率不存在的情况, 因为分母稍后就要乘到另一侧, 不影响结果。

平分即  $PP'$  中点在  $l$  上, 故  $A \cdot \frac{x + x_0}{2} + B \cdot \frac{y + y_0}{2} + C = 0$ , 化简得  $Ax + By + (Ax_0 + By_0 + 2C) = 0$ 。

这里我们得到了一个二元一次方程组  $\begin{cases} Bx - Ay + (Ay_0 - Bx_0) = 0 \\ Ax + By + (Ax_0 + By_0 + 2C) = 0 \end{cases}$ ,

通过加减消元法可以直接得到解, 请读者自行尝试。这里我们另辟蹊径。

我们知道, 若设  $l$  的一个法向量为  $\vec{n} = (A, B)$ , 那么  $\vec{n} \parallel \overrightarrow{PP'}$ , 也就是说  $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}$ , 我们令该式  $= t \neq 0$ , 那么  $x = At + x_0, y = Bt + y_0$ , 代入平分条件  $Ax + By + (Ax_0 + By_0 + 2C) = 0$  得到:

$$\begin{aligned} 0 &= A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + (Ax_0 + By_0 + 2C) \\ &= (A^2 + B^2)t + 2Ax_0 + 2By_0 + 2C \end{aligned}$$

解得  $t = -\frac{2(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}$ , 代入  $x = At + x_0, y = Bt + y_0$  得到  $\begin{cases} x = x_0 - \frac{2A(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2} \\ y = y_0 - \frac{2B(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2} \end{cases}$ , 这就是说, 点  $P$  关于直线  $l$  的对称点

$P'$  的坐标为

$$\boxed{P' \left( x_0 - 2A \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}, y_0 - 2B \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} \right)}$$

为便于记忆, 令  $* = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$ , 则  $P'(x_0 - 2A*, y_0 - 2B*)$ 。

这里我们通过引入第三变量  $t$  来辅助消元, 主要是因为垂直条件  $Bx - Ay + (Ay_0 - Bx_0) = 0$  即  $A(x - x_0) = B(y - y_0)$  具有高度的对称性, 而  $t$  是这里的对称性与几何意义的对称并无关系, 这里是关联两个对称的量的关键桥梁。解方程组的同学, 你算对了吗?

值得一看的是, 上述方法同样还可以用来求解过点  $P$  与  $l$  垂直的直线的对称或称“同构”, 是指对两个量(或式等)作同样的操作, 此时如果继续进行同样的操作, 或许会有意想不到的结果。

值得一提的是, 上述方法同样还可以用来求解过点  $P$  与  $l$  垂直的直线的垂足, 即若  $PP' \perp l$  于点  $H$ , 则其坐标为

$$H \left( x_0 - A \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}, y_0 - B \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} \right)$$

若已知  $l$  的斜率为 1 或  $-1$ , 那么  $\begin{cases} Ax_0 + By + C = 0 \\ Ax + By_0 + C = 0 \end{cases}$ , 也就是:

- 若  $l : x + y = m$ , 则  $P'(m - y_0, m - x_0)$ ;
- 若  $l : x - y = m$ , 则  $P'(m + y_0, x_0 - m)$ 。

这也就是你分别把  $x_0, y_0$  代入直线方程得到  $x, y$  的值所组成的坐标。

### 直线关于点对称

核心思路:

- 定点为中点, 相关点法求轨迹(将要使用的);
- 等距离且平行。

给定直线  $l_1 : Ax + By + C$  与点  $Q(x_0, y_0)$ , 下面推导  $l_1$  关于  $Q$  对称的直线  $l_2$  的方程。

显然, 任取直线  $l_2$  上一点  $P(x, y)$ , 那么点  $P$  关于点  $Q$  的对称点  $P'(2x_0 - x, 2y_0 - y)$  必然在  $l_1$  上。也就是:

$$l_2 : A(2x_0 - x) + B(2y_0 - y) + C = 0$$

记忆上式即可, 展开立得  $l_2 : Ax + By - 2Ax_0 - 2By_0 - C = 0$ 。

### 直线关于直线对称

直线关于直线对称往往比较困难。

给定直线  $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $l : A_0x + B_0y + C_0 = 0$ , 求直线  $l_1$  关于直线  $l$  的对称直线  $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 。

常规解法包括但不限于：

- 在  $l_1$  上任取两个点，分别关于直线  $l$  对称，利用两点式求解；
- 在  $l$  上取两个点，设  $l_2$ ，两点到两直线的距离相等联立求解；
- 求  $l_1, l$  的交点  $P$ ，设过  $P$  的点斜式直线  $l_2$ ，在  $l$  上任取一点到两直线的距离相等联立求解。

## 第八章 排列组合

## 第九章 数列

## 第十章 统计与概率

## 附录 A 完整证明及解答

### 例题 7.1.2 的解答

$$\tan \alpha = k_{AB} = \frac{m^2 - 1}{1 - 2} = 2 - m^2 \in (-\infty, 1], \text{ 则 } \alpha \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi).$$

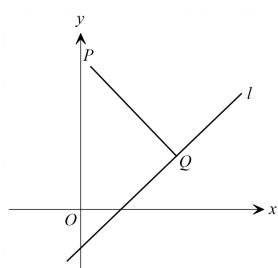
### 例题 7.1.3 的解答

事实上，这不是一个  $13 \times 5$  的直角三角形。不妨设正方形网格边长为 1，水平向右为  $x$  轴，竖直向上为  $y$  轴，则三角形  $A$  的斜边的斜率为  $\frac{3}{8}$ ，三角形  $B$  的斜边的斜率为  $\frac{2}{5}$ ，二者不相等。在变换前， $A, B$  构成的“斜边”实际上是一个向上的钝角，而变换后则是一个向下的钝角，这二者之间形成了这大小为 1 的面积差。

### 公式 3 点到直线的距离公式

证 明 — (解 析 法) : 如 右 图,  
设  $A \neq 0, B \neq 0$ , 由  $PQ \perp l$ , 得  $k_1 k_2 = -1$ , 则  
 $k_{PQ} = \frac{B}{A}$ 。因此直线  $PQ : y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$ , 即  
 $Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0$ 。解方程组

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0 \end{cases} \Rightarrow Q \left( \frac{B^2 x_0 - AB y_0 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{-AB x_0 + A^2 y_0 - BC}{A^2 + B^2} \right)$$



图中  $PQ \perp l$ , 点  $P(x_0, y_0)$  到直线  $l$  的距离即线段

$PQ$  的长度。因此

$$\begin{aligned}
 |PQ| &= \sqrt{\left(\frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{-ABx_0 + A^2y_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC - A^2x_0 - B^2x_0}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{-ABx_0 + A^2y_0 - BC - A^2y_0 - B^2y_0}{A^2 + B^2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{-A^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{-ABx_0 - B^2y_0 - BC}{A^2 + B^2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{[-A(Ax_0 + By_0 + C)]^2 + [-B(Ax_0 + By_0 + C)]^2}{(A^2 + B^2)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(A^2 + B^2)(Ax_0 + By_0 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}
 \end{aligned}$$

**证明二（向量法）：**设直线  $l : Ax + By + C = 0$  及其上一点  $K(x_1, y_1)$ , 直线外某一点  $P(x_0, y_0)$  到直线的距离为  $|PQ|$ 。直线  $PQ$  的方向向量即为直线  $l$  的法向量，即  $\vec{n} = (A, B)$ 。因为  $\overrightarrow{PQ}$  即为  $\overrightarrow{PK}$  在  $\vec{n}$  上的投影向量，所以  $|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{|\overrightarrow{PK} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \cdot (A, B)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 。因为  $K$  在直线  $l$  上，所以  $Ax_1 + By_1 + C = 0$  即  $Ax_1 + By_1 = -C$ 。所以  $|PQ| = \frac{|-C - Ax_0 - By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 。

## 公式 4 平行线间的距离公式

两条平行直线  $l_1 : Ax + By + C_1 = 0$ ,  $l_2 : Ax + By + C_2 = 0$ 。在  $l_1$  上任取一点  $P(x_0, y_0)$ , 则点  $P$  到直线  $l_2$  的距离就是这两条平行线间的距离, 即  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 。因为点  $P$  在直线  $l_1$  上, 所以  $Ax_0 + By_0 + C_1 = 0$ , 即  $Ax_0 + By_0 = -C_1$ , 所以  $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 。

### 例题 7.1.4 的解答

取直线  $A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0$  的方向向量  $\vec{v}_1 = (-B_1, A_1), \vec{v}_2 = (-B_2, A_2)$ , 则  $\cos \theta = |\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = \left| \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} \right| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ 。

这个式子是齐次的，因此方向向量的选取不影响结论的导出，如果仍有疑虑可自行验证。

## 附录 B B 版中的阅读材料

本附录收录了人教版 B 版高中教材中的部分阅读材料，作为补充阅读之用，顺序大致与本书内容对应。  
我们 A 版学生也是太悲催了

### B.1 利用复数产生分形图（复变函数）

以前我们学过的函数，定义域都是实数集的子集。但函数概念还可以推广：定义域是复数集的子集的函数称为复变函数。类似地，我们还可以得到多项式复变函数的概念。例如， $f(z) = z^2$  就是一个多项式复变函数，此时  $f(i) = i^2 = -1, f(1+i) = (1+i)^2 = 2i$ 。

给定多项式复变函数  $f(z)$  之后，对任意一个复数  $z_0$ ，通过计算公式  $z_{n+1} = f(z_n), n \in \mathbb{N}$  可以得到一列值  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ 。

如果存在一个正数  $M$ ，使得  $|z_n| < M$  对任意  $n \in \mathbb{N}$  都成立，则称  $z_0$  为  $f(z)$  的收敛点；否则，称  $z_0$  为  $f(z)$  的发散点。 $f(z)$  的所有收敛点组成的集合称为  $f(z)$  的充满茹利亚集。

例如，当  $f(z) = z^2$  时，如果  $z_0 = i$ ，则得到的一列值是  $i, -1, 1, 1, \dots, 1, \dots$ ；如果  $z_0 = 1+i$ ，则算出的一列值是  $1+i, 2i, -4, \dots, 2^{2^{n-1}}, \dots$ 。

显然，对于  $f(z) = z^2$  来说， $i$  为收敛点， $1+i$  为发散点。事实上，利用  $|z^2| = |z|^2$  可以证明， $f(z) = z^2$  的充满茹利亚集是一个单位圆盘（即由满足  $|z| \leq 1$  的所有  $z$  组成的集合）。

让人惊讶的是，当  $f(z) = z^2 + c$  时，对于某些复数  $c$  来说， $f(z)$  的充满茹利亚集是非常复杂的。如果利用计算机对不同形态的收敛点和发散点进行不同的着色，就可以得到与本章导语所示类似的分形图。而且，如果按照一定的规则对  $c$  进行分类，并进行着色，可以得到如图 B.1 所示的芒德布罗分形图。

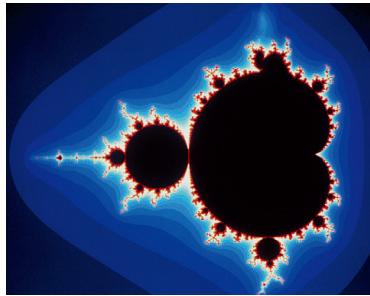


图 B.1: 芒德布罗分形图

## B.2 四元数简介

数学中的数,除了实数、复数之外,还有四元数。一般地,形如  $a+bi+cj+dk$  的数为四元数, 其中  $a, b, c, d$  都是实数,  $i, j, k$  都是虚数单位, 这些虚数单位满足

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

给定两个四元数, 可以进行同复数类似的加法和减法运算, 例如

$$(2 + 3i + 4j + 5k) + (6 + 7i + 8j + 9k) = 8 + 10i + 12j + 14k$$

不过, 对于两个四元数相乘来说, 情况就比复数相乘复杂得多。因为此时, 除了会出现  $i^2, j^2, k^2$  之外, 还会出现  $ij, ik, jk, ji, ki, ij$  等。一般地, 两个四元数相乘时, 规定

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

例如,

$$\begin{aligned} & (2 + 3i + 4j + 5k)(6 + 7i + 8j + 9k) \\ &= (12 - 21 - 32 - 45) + (14 + 18 + 36 - 40)i \\ &\quad + (16 + 24 + 35 - 27)j + (18 + 30 + 24 - 28)k \\ &= -86 + 28i + 48j + 44k \end{aligned}$$

由此也可以看出, 四元数的乘法是不满足交换律的。

不过, 有意思的是, 与复数的乘法能够表示平面直角坐标系中的旋转类似, 四元数的乘法能够表示空间中的旋转。因此, 四元数在描述三维旋转、姿态方面有一些独特的优点, 人们经常使用四元数去描述飞行器、机器人等的姿态。感兴趣的同学请自行查阅有关资料。

顺带提及的是, 有同学可能会想: 既然能有四元数, 那有没有三元数呢? 能不能规定形如  $a + bi + cj$  的数为三元数呢? 其中  $a, b, c$  都是实数,  $i, j$  都

是虚数单位。对这个问题感兴趣的同學，可以考慮一下此时  $i$  与  $j$  的积  $ij$  的结果是什么，由此是否出現矛盾，等等。

### B.3 素数个数与对数

我们已经知道，像 2、3、5、7 这样只能被 1 和它自己整除的正整数称为素数（也称为质数）。例如，100 以内的所有素数为 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97。

探索素数出现的规律，是一些数学家非常关心的问题。特別地，设  $x$  是正整数，用  $\pi(x)$  表示不超过  $x$  的素数个数，寻找  $\pi(x)$  的近似表达式，历史上曾引起了很多数学家的注意。当然，我们可以取  $x$  为一些常数，然后求出  $\pi(x)$  的值来进行观察和归纳。

可能会让你感到惊讶的是， $\pi(x)$  的近似表达式与自然对数有关。事实上，数学家们已经证明，当  $x$  充分大时，

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

这一结果可以从下表中直观感受到。

$x$	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	相对误差
1 000	168	145	13.69%
5 000	669	587	12.26%
10 000	1 229	1 086	11.64%
50 000	5 133	4 621	9.97%
100 000	9 592	8 686	9.45%
500 000	41 538	38 103	8.27%
1 000 000	78 498	72 382	7.79%
5 000 000	348 513	324 150	6.99%

注：如果  $A$  的近似值为  $a$ ，那么相对误差指的是

$$\frac{|A - a|}{A} \times 100\%$$

# 定理索引

1.1	定理 (有限非空集的子集个数) . . . . .	3
1.2	定理 (德摩根公式) . . . . .	5
1.3	定理 (容斥原理) . . . . .	5
2.1	定理 (复数的绝对值三角不等式) . . . . .	10
2.2	定理 (二次韦达定理) . . . . .	12
2.3	定理 (代数基本定理) . . . . .	13
2.4	定理 (棣莫弗公式) . . . . .	16

# 名词索引

交集 intersection set, 4	幂函数 power function, 27
值域 range, 19	并集 union set, 3
偶函数 even function, 23	必要条件 necessary condition, 5
元素 set, 1	指数函数 exponential function, 35
充分条件 sufficient condition, 5	最大值 maximum value, 23
充要条件 necessary and sufficient condition, 6	最小值 minimum value, 23
全称量词 universal quantifier, 6	根式 radical, 34
全集 universal set, 4	直线, 46
共轭复数 conjugate complex number, 9	倾斜角 angle of inclination, 46
函数 function, 19	参数方程 parametric equation, 49
反函数 inverse function, 38	斜率 slope, 46
复数 complex number, 7	真子集 proper subset, 2
复数的模 modulus of a complex number, 9	空集 empty set, 1
复数集 set of complex numbers, 7	自然对数 natural logarithm, 37
奇函数 odd function, 24	虚数 imaginary number, 7
子集 subset, 2	虚数单位 imaginary unit, 7
存在量词 existential quantifier, 6	虚部 imaginary part, 7
定义域 domain, 19	补集 complementary set, 4
实部 real part, 7	辐角 argument, 15
对数 logarithm, 37	集合 element, 1
对数函数 logarithmic function, 37	
属于 belong to, 1	
常用对数 common logarithm, 37	