# 高考数学知识点汇总

张书源

2025 年 8 月 14 日

这个文档从 2025 年 8 月 8 日开始编写.

# 目录

# 第一章　集合与常用逻辑用语

## 1.1　集合的概念

### 1.1.1　集合的定义

**元素** 研究对象的统称；

**集合** 元素组成的总体，简称为**集**.

我们通常用大写拉丁字母 $A, B, C \ldots$ 表示集合，用小写拉丁字母用 $a, b, c, \ldots$ 表示集合中的元素．如果 $a$ 是集合的 $A$ 的元素，就说 $a$ **属于**集合 $A$，记作 $a \in A$；如果 $a$ 不是集合的 $A$ 的元素，就说 $a$ **不属于**集合 $A$，记作 $a \notin A$.

规定：不含任何元素的集合叫**空集**，记作 $\varnothing$．注意：$\{\varnothing\}$ 不是空集.

### 1.1.2　集合的性质

- **无序性**：集合中每个元素的地位相同，元素之间是无序的；
- **互异性**：集合中的元素互不相同，每个元素只能出现一次；
- **确定性**：对于一个集合 $A$，任给一个元素 $a$，要么 $a \in A$，要么 $a \notin A$，二者必居其一.

| 名称 | 元素 | 记号 |
|---|---|---|
| **自然数集** | 全体非负整数 | $\mathbb{N}$ |
| **正整数集** | 全体正整数 | $\mathbb{N}^*$ 或 $\mathbb{N}_+$ |
| **整数集** | 全体整数 | $\mathbb{Z}$ |
| **有理数集** | 全体有理数 | $\mathbb{Q}$ |
| **实数集** | 全体实数 | $\mathbb{R}$ |

表 1.1: 数学中一些常用的数集及其记法

| | |
|---|---|
| 自然语言 | 所有不超过 5 的自然数组成的集合. |
| 列举法 | $\{0,1,2,3,4,5\}$ |
| 描述法 | $\{x \in \mathbb{N} \| x \leq 5\}$ |

表 1.2: 集合的表示法

### 1.1.3 集合的表示

集合的三种主要的表示法如表 1.2 所示.

## 1.2 集合间的关系

### 1.2.1 相等关系

若集合 $A$ 和集合 $B$ 中所有的元素完全相同，那么称 $A$ 和 $B$ **相等**，记作 $A=B$.

### 1.2.2 子集与包含关系

#### 定义

若 $\forall a \in A$，有 $a \in B$，那么称 $A$ 是 $B$ 的**子集**，记作 $A \subseteq B$，读作“$A$ 包含于 $B$”或“$B$ 包含 $A$”.

规定：空集是任何集合的子集.

#### 性质

- **自反性**：$\forall$集合$S, S \subseteq S$；
- **反对称性**：$A \subseteq B$且$B \subseteq A \Leftrightarrow A=B$；
- **传递性**：$A \subseteq B$且$B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

### 1.2.3 真子集与真包含关系

#### 定义

若 $A \subseteq B$，且 $A \neq B$（亦即 $\exists x \in B, x \notin A$），那么称 $A$ 是 $B$ 的**真子集**，记作 $A \subsetneqq B$，读作“$A$ 真包含于 $B$”或“$B$ 真包含 $A$”.

显然，空集是任何非空集合的真子集.

**性质**

- **反自反性**：$\forall$集合$S, \neg S \subsetneqq S$；
- **非对称性**：$A \subsetneqq B \Rightarrow \neg B \subsetneqq A$；反之亦然；
- **传递性**：$A \subsetneqq B$且$B \subsetneqq C \Rightarrow A \subsetneqq C$.

**定理 1** (有限非空集的子集个数)**.** 含 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 个元素的集合有 $2^n$ 个子集，有 $2^n-1$ 个真子集，有 $2^n-1$ 个非空子集，有 $2^n-2$ 个非空真子集.

证明. 若 $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$，$\forall S \subseteq A$，考虑把 $S$ 的 $n$ 个元素填入 $A$ 中，论断 $a_i(i=1,2,3,\ldots,n) \in S$ 有真假两种可能，因而每个元素各有两种填法，不同元素的填法互不干扰。把 $n$ 个元素全部填入之后，$S$ 唯一确定，又由集合的确定性，填法与子集一一对应。所以总共有 $2^n$ 个不同的子集，其中有一个空集和本身. □

## 1.3 集合的运算

### 1.3.1 并集

**定义**

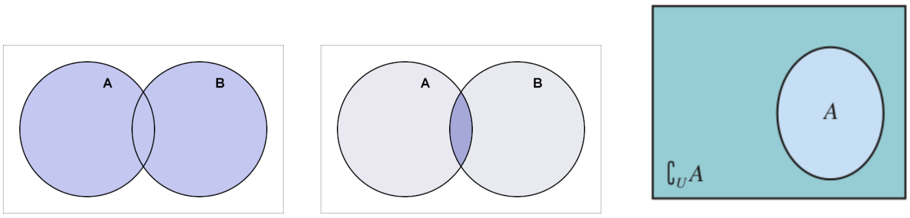
由所有属于集合 $A$ 或属于集合 $B$ 的元素组成的集合，称为集合 $A$ 与 $B$ 的**并集**，记作 $A \cup B$，读作“$A$ 并 $B$”.

$$A \cup B = \{x | x \in A 或 x \in B\}$$

**性质**

- **交换律**：$A \cup B = B \cup A$；
- **结合律**：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；
- **幂等律**：$A \cup A = A$；
- **幺元**：$\forall$集合$A, A \cup \varnothing = A$.

此外，$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$.




(a) $A \cup B$　(b) $A \cap B$　(c) $\complement_U A$

图 1.1: 并集、交集与补集

### 1.3.2　交集

**定义**

由所有属于集合 $A$ 且属于 $B$ 的元素组成的集合，称为集合 $A$ 与 $B$ 的**交集**，记作 $A \cap B$，读作“$A$ 交 $B$”.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{且} x \in B\}$$

**性质**

- **交换律**：$A \cap B = B \cap A$；
- **结合律**：$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；
- **幂等律**：$A \cap A = A$；
- **空集合**：$\forall$集合$A, A \cap \varnothing = \varnothing$.

此外，$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

### 1.3.3　补集

**全集**

如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为**全集**，通常记作 $U$.

**定义**

对于一个集合 $A$，由全集 $U$ 中不属于集合 $A$ 的所有元素组成的集合称为集合 $A$ 相对于全集 $U$ 的**补集**，简称为集合 $A$ 的补集，记作 $\complement_U A$.

$$\complement_U A = \{x | x \in U \text{且} x \notin A\}$$

**性质**

**定理 2** (德摩根公式). 全集为 $U$，集合 $A, B$ 一定满足：

$$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$$
$$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$$

简记：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. 证明可采用 Venn 图，从略.

### 1.3.4 集合的元素个数

我们把含有限个元素的集合叫作**有限集**，用 $\mathrm{card}(A)$ 来表示有限集合 $A$ 中元素的个数. 一个集合中元素的个数称为这个集合的基数. 也有其他记法，例如：$|A|$.

**定理 3** (容斥原理). $A, B, C$ 都是有限集，则：

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C|=&+|A|+|B|+|C|\\&-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|\\&+|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

证明可采用 Venn 图，从略.

## 1.4 充分条件与必要条件

### 1.4.1 充分条件与必要条件

如果“若 $p$，则 $q$”是真命题，那么称由 $p$ 可以推出 $q$，记作 $p\Rightarrow q$，并且说，$p$ 是 $q$ 的**充分条件**，$q$ 是 $p$ 的**必要条件**.

如果“若 $p$，则 $q$”是假命题，那么由 $p$ 不能推出 $q$，记作 $p\not\Rightarrow q$，此时，$p$ 不是 $q$ 的充分条件，$q$ 不是 $p$ 的必要条件.

举反例是判断一个命题是假命题的重要方法.

充分条件通常不唯一. 判定定理给出了结论成立的一个充分条件.

必要条件通常不唯一. 性质定理给出了结论成立的一个必要条件.

### 1.4.2 充要条件

如果“若 $p$，则 $q$”和其逆命题“若 $q$，则 $p$”均是真命题，即既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作 $p\Leftrightarrow q$. 此时，$p$ 既是 $q$ 的充分条件，又是 $q$ 的必要条

件，我们说 $p$ 是 $q$ 的**充分必要条件**，简称为**充要条件**．此时命题 $p, q$ 等价．显然，如果 $p$ 是 $q$ 的的充要条件，那么 $q$ 也是 $p$ 的的充要条件．

## 1.5 全称量词与存在量词

### 1.5.1 全称量词与存在量词

短语“所有的”“任意一个”[1]在逻辑中通常叫做**全称量词**，并用符号“$\forall$”表示。含有全称量词的命题，叫作**全称量词命题**，例如：$\forall x \in M, p(x)$。

短语“存在一个”“至少有一个”[2]在逻辑中通常叫做**存在量词**，并用符号“$\exists$”表示。含有全称量词的命题，叫作**存在量词命题**，例如：$\exists x \in M, p(x)$。

### 1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定

否定一个命题 $p(x)$，得到一个新命题，这一新命题称为原命题的否定，记作 $\neg p(x)$，即“$p(x)$ 不成立”。

否定全称量词命题或存在量词命题时，只需要将全称量词改为存在量词，或把存在量词改为全称量词，然后对结论进行否定即可。

命题 $\forall x \in M, p(x)$ 的否定是 $\exists x \in M, \neg p(x)$。命题 $\exists x \in M, p(x)$ 的否定是 $\forall \in M, \neg p(x)$。

[1]常见的全称量词还有“一切”“每一个”“任给”等。

[2]常见的存在量词还有“有些”“有一个”“对某些”“有的”等。

# 第二章　复数

## 2.1　复数的概念

### 2.1.1　数系的扩充和复数的概念

为了使方程 $x^2 = -1$ 有解，人们引入 i，并规定 i 的平方等于 $-1$，即

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

我们把形如 $a+b\mathrm{i}(a,b \in \mathbb{R})$ 的数叫作**复数**，其中 i 叫作**虚数单位**。全体复数构成的集合 $\mathbb{C} = \{a+b\mathrm{i}|a,b \in \mathbb{R}\}$ 叫作**复数集**。不难看出，$\mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}, \mathrm{i} \in \mathbb{C}$。

复数通常用字母 $z$ 表示，即 $z = a + b\mathrm{i}(a,b \in \mathbb{R})$。以后如不特殊声明，用 $z = a + b\mathrm{i}$ 等类似表达式表示复数时，都有 $a,b \in \mathbb{R}$，其中的 $a$ 与 $b$ 分别叫做复数 $z$ 的**实部**与**虚部**。

本书中，用 $\Re(z)$ 表示复数 $z$ 的实部，用 $\Im(z)$ 表示复数 $z$ 的虚部。注意：$\Im(z) \in \mathbb{R}$。

任取两个数 $a + b\mathrm{i}, c + d\mathrm{i} \in \mathbb{C}$，规定：

$$a + b\mathrm{i} \text{ 和 } c + d\mathrm{i} \text{ 相等当且仅当 } a = c\text{且}b = d$$

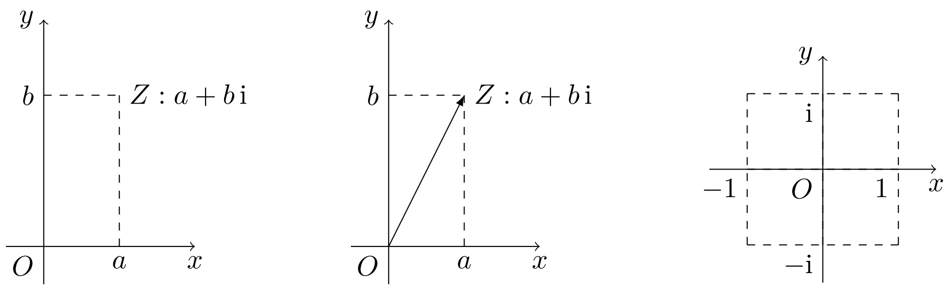
对于复数 $a + b\mathrm{i}(a,b \in \mathbb{R})$，当且仅当 $b = 0$ 时，它是实数；当且仅当 $a = b = 0$ 时，它是实数 0；当 $b \neq 0$ 时，它叫做**虚数**；当 $a = 0\text{且}b \neq 0$ 时，它叫做**纯虚数**。

虚数之间、虚数与实数之间不能比较大小。

### 2.1.2　复数的几何意义

#### 几何意义 1：复平面上的点

实数与数轴上的点一一对应，因此实数可以用数轴上的点来表示。类似的，由于任何一个复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 都可以由一个有序数对 $(a,b)$ 唯一确定，并且任何一个复数都可以唯一确定一个有序实数对，所以复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 与有序实数对 $(a,b)$ 一一对应。而有序实数对 $(a,b)$ 与平面直角坐标系中的点




(a) 复平面中的复数 (b) 复数与平面向量 (c) 复平面

图 2.1: 复数的几何表示

一一对应，所以复数集与平面直角坐标系中的点集之间可以建立一一对应关系。

如图 2.1a，点 $Z$ 的横坐标是 $a$，纵坐标是 $b$，复数 $z = a + b\,\mathrm{i}$ 可用点 $Z(a, b)$ 表示。这个建立了平面直角坐标系来表示复数的平面叫作**复平面**，$x$ 轴叫作**实轴**，$y$ 轴叫作**虚轴**，如图 2.1c 所示。实轴上的点都表示实数；除了原点外，虚轴上的点都表示纯虚数。

按照这种方法，每一个复数，有复平面内唯一的一个点和它对应；反过来，复平面内的每一个点，有唯一的一个复数和它对应。由此可知，复数集 $\mathbb{C}$ 中的数与复平面内的点按如下方式建立了一一对应关系：

$$\text{复数 } z = a + b\,\mathrm{i} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{复平面内的点 } Z(a, b)$$

这是复数的一种几何意义。

### 几何意义 2：平面向量

如图 2.1b，设复平面内的点 $Z$ 表示复数 $z = a + b\,\mathrm{i}$，连 $OZ$，显然向量 $\overrightarrow{OZ}$ 由点 $Z$ 唯一确定；反过来，点 $Z$ 也可以由向量 $\overrightarrow{OZ}$ 唯一确定。由此可知，复数集 $\mathbb{C}$ 中的数与以原点为起点的向量建立了如下一一对应关系（实数 0 与 $\overrightarrow{0}$ 对应）：

$$\text{复数 } z = a + b\,\mathrm{i} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{平面向量 } \overrightarrow{OZ}$$

这是复数的另一种几何意义。[1]

### 绝对值、共轭复数

为方便起见，我们常把复数 $z = a + b\,\mathrm{i}$ 说成点 $Z$ 或说成向量 $\overrightarrow{OZ}$，并且规定，相等的向量表示同一个复数。

[1] 人教 A 版第 71 页：这种几何表示也称阿尔冈图（Argand diagram）。

图 2.1b 中向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模叫作**复数 $z=a+b\,\mathrm{i}$ 的模或绝对值**，记作 $|z|$ 或 $|a+b\,\mathrm{i}|$。即

$$|z|=|a+b\,\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}\ (a,b\in\mathbb{R})$$

如果 $b=0$，则 $|z|=|a|$，也就是 $a$ 的绝对值。

一般地，当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，我们称这两个复数互为**共轭复数**。虚部不等于 0 的两个共轭复数也叫做共轭虚数。复数 $z$ 的共轭复数用 $\overline{z}$ 表示，即如果 $z=a+b\,\mathrm{i}$，那么 $\overline{z}=a-b\,\mathrm{i}$。

一对共轭复数在复平面内对应的点关于实轴对称。

## 2.2 复数的四则运算

### 2.2.1 复数的加减运算及其几何意义

#### 复数的加法运算及其几何意义

规定复数的加法法则如下：

设 $z_1=a+b\,\mathrm{i},z_2=c+d\,\mathrm{i}$ 是任意两个复数，其和

$$(a+b\,\mathrm{i})+(c+d\,\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\,\mathrm{i}$$

注意到，复数相加仍为复数。

容易验证，复数的加法满足交换律、结合律。共轭复数的和是实数。

如图 2.2a，设 $\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 分别与复数 $a+b\,\mathrm{i},c+d\,\mathrm{i}$ 对应，则 $\overrightarrow{OZ_1}=(a,b),\overrightarrow{OZ_2}=(c,d)$。我们有 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=(a+c,b+d)$，这说明 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$ 就是复数 $(a+c)+(b+d)\,\mathrm{i}$ 对应的向量。因此复数的加法可以按照向量的加法来进行，这就是复数加法的几何意义。

#### 复数的减法运算及其几何意义

类比实数中相反数的定义，我们定义 $-z$ 是复数 $z$ 的**相反数**[2]，并规定：

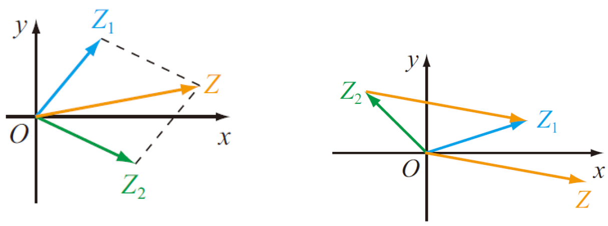
$$-z=-(a+b\,\mathrm{i})=-a-b\,\mathrm{i}$$

我们把满足 $z_1+(x+y)\,\mathrm{i}=z_2(z_1,z_2\in\mathbb{C})$ 的复数 $x+y\,\mathrm{i}$ 叫作复数 $z_1$ 与 $z_2$ 的差，记作 $z_1-z_2$，并规定 $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$。

不妨设 $z_1=a+b\,\mathrm{i},z_2=c+d\,\mathrm{i}$，则

$$(c+d\,\mathrm{i})+(x+y\,\mathrm{i})=a+b\,\mathrm{i}$$

[2]人教 A 版中无此定义。




(a) 加法 (b) 减法

图 2.2: 复数加减法的几何意义

根据复数相等的含义，

$$c + x = a, \qquad d + y = b$$
$$x = a - c, \qquad y = b - d$$

因此

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a + b\,\mathrm{i}) - (c + d\,\mathrm{i}) \\ &= x + y\,\mathrm{i} \qquad = (a - c) + (b - d)\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

这就是复数的减法法则。

注意到，复数相减仍为复数。

由复数与向量之间的对应关系同样可以得出复数减法的几何意义：如果复数 $z_1, z_2$ 所对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$，设点 $Z$ 满足 $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{Z_2Z_1}$，则 $z_1 - z_2$ 所对应的向量就是 $\overrightarrow{OZ}$，如图 2.2b 所示。由复数的几何意义可以得出复数的绝对值三角不等式，证明略。

**定理 4** (复数的绝对值三角不等式). *任意两个复数 $z_1, z_2$ 一定满足*

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

## 2.2.2 复数的乘除运算

### 复数的乘法

一般地，设 $z_1 = a + b\,\mathrm{i}, z_2 = c + d\,\mathrm{i}$，称 $z_1z_2$（或 $z_1 \times z_2$）为 $z_1$ 与 $z_2$ 的积，并规定

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a + b\,\mathrm{i})(c + d\,\mathrm{i}) \\ &= ac + ad\,\mathrm{i} + bc\,\mathrm{i} + bd\,\mathrm{i}^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

注意到，复数相乘仍为复数。

可以证明，复数的乘法运算满足交换律与结合律，且对加法满足分配律。

#### 复数的乘方

$n$ 个相同的复数 $z$ 相乘时，仍称为 $z$ 的 $n$ 次**方**（或 $n$ 次**幂**），并记作 $z^n$，即

$$z^n = \underbrace{z \times z \times \cdots \times z}_{n\text{个}}$$

可以验证，当 $m,n$ 均为正整数时，

$$z^m z^n = z^{m+n}, (z^m)^n = z^{mn}, (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$$

#### 复数的除法

如果复数 $z_2 \neq 0$，则满足 $z z_2 = z_1$ 的复数 $z$ 称为 $z_1$ 除以 $z_2$ 的**商**，$z_1$ 为被除数，$z_2$ 为除数。给定复数 $z \neq 0$，称 $\dfrac{1}{z}$ 为 $z$ 的**倒数**。

复数的除法法则：

$$\begin{aligned}(a+b\,\mathrm{i}) \div (c+d\,\mathrm{i}) &= \frac{a+b\,\mathrm{i}}{c+d\,\mathrm{i}} \\ &= \frac{(a+b\,\mathrm{i})(c-d\,\mathrm{i})}{(c+d\,\mathrm{i})(c-d\,\mathrm{i})} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,\mathrm{i} \quad (c+d\,\mathrm{i} \neq 0)\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中，步骤 (2.1) 被称为“分母实数化”。显然，利用这种办法可以求出任意一个非零复数的倒数，以及任意两个复数的商（除数不能为 0）。

注意到，复数相除仍为复数。

### 2.2.3 复数四则运算的常用结论

1. $(1 \pm \mathrm{i})^2 = \pm 2\,\mathrm{i}$，$\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$，$\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$；
2. $-b + a\,\mathrm{i} = \mathrm{i}(a + b\,\mathrm{i})\ (a, b \in \mathbb{R})$；
3. $\mathrm{i}^{4n} = 1, \mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}, \mathrm{i}^{4n+2} = -1, \mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$；
4. $|z^2| = |z|^2 = |\overline{z}|^2 = z\overline{z}$，$|\overline{z}| = \overline{z}$，$\overline{(\overline{z})} = z$；
5. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(z_2 \neq 0)$，$|z^n| = |z|^n$；

6. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \overline{\left(\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|\right)} = \dfrac{|\overline{z_1}|}{|\overline{z_2}|} (z_2 \neq 0), \overline{z^n} = \overline{z}^n\ (n \in \mathbb{Z})$。

从结论 5 可以看出，复数的模运算可以与乘法、除法、乘方运算交换顺序；从结论 6 可以看出，复数的共轭运算可以与加减乘除以及乘方运算交换顺序。

## 2.3 一元二次方程的复数解和代数基本定理

### 2.3.1 实系数一元二次方程在复数范围内的解集

当 $a, b, c \in \mathbb{R}$且$a \neq 0$ 时，关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 称为**实系数一元二次方程**，这个方程在复数范围内总是有解的，而且

1. 当 $\varDelta = b^2 - 4ac > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；
2. 当 $\varDelta = b^2 - 4ac = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；
3. 当 $\varDelta = b^2 - 4ac < 0$ 时，方程有两个互为共轭的虚数根。

下面推导 $\varDelta < 0$ 时实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的求根公式。

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{-(b^2 - 4ac)}{(2a)^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}\,\mathrm{i} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\,\mathrm{i}}{2a} \quad (\varDelta = b^2 - 4ac < 0)
\end{aligned}
$$

注意到，此时两根的虚部的绝对值相等，两根互为共轭。

**定理 5** (二次韦达定理). *在复数域内，关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根 $x_1, x_2$ 满足：*

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\
x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}
\end{cases}
$$

证明可采用求根公式代入，从略。

### 2.3.2 代数基本定理

**定理 6** (代数基本定理)**.** 任何一元 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 次复系数多项式方程 $f(x) = 0$ 至少有一个复数根。

证明方法很多，但是每一种证明方法都涉及高等数学，从略。

由代数基本定理可以证明，任何一元 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 次复系数多项式 $f(x)$ 在复数集中可以分解为 $n$ 个一次因式的乘积。进而，一元 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 次多项式方程有 $n$ 个复数根（重根按照重数计）。证明如下：

证明. 采用数学归纳法。

（归纳奠基）对于一次多项式

$$f(x) = a_1 x + a_0 \quad (a_1 \neq 0)$$

方程 $f(x) = 0$ 的解是：

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \tag{2.2}$$

有且仅有一个根，结论成立。

（归纳假设）假设对于所有次数 $\leq n-1$ 的复系数多项式，结论成立。即：任何 $k$ 次复系数多项式（$k \leq n-1$）在复数域上恰有 $k$ 个根（重根按重数计）。

（归纳步骤）设 $f(x)$ 是一个 $n$ 次复系数多项式：

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

由代数基本定理，$f(x) = 0$ 至少有一个复根，记为 $\alpha$，于是 $f(x)$ 可分解为

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$$

其中 $q(x)$ 是一个 $n-1$ 次的复系数多项式。

根据归纳假设，$q(x) = 0$ 有 $n-1$ 个复根（重根按重数计），记为 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$。

综上，根据数学归纳法，$\forall n \in \mathbb{N}^*$，$f(x) = 0$ 的全体根为：

$$\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$$

共 $n$ 个根（如果 $\alpha$ 与某些 $\beta_i$ 相同，则计算重数）。 □

这个证明过程的核心是使用因式分解（因式定理）来降低次数，同时，代数基本定理保证了归纳基础。

### 2.3.3 一元多项式方程根与系数的关系

次数为 1 的情况即式 (2.2)。次数为 2 的情况即第 12 页的二次韦达定理。

设实系数一元三次方程

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_3 \neq 0) \tag{2.3}$$

在复数集 $\mathbb{C}$ 内的根为 $x_1, x_2, x_3$，可以得到方程 (2.3) 的变形

$$a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

展开得

$$a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a_3x_1x_2x_3 = 0 \tag{2.4}$$

比较式 (2.3)(2.4) 可以得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

更高次一元多项式方程根与系数的关系不在本节讨论范围内。

## 2.4 复数的三角表示

### 2.4.1 复数的三角表示式

一般地，如果非零复数 $z = a + b\,\mathrm{i}$ 在复平面内对应点 $Z(a, b)$，且 $r$ 为向量 $OZ$ 的模，$\theta$ 是以 $x$ 轴非负半轴为始边、射线 $OZ$ 为终边的一个角，则

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

根据正余弦的定义

$$\cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r}$$
$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$$

如图 2.3 所示，从而

$$z = a + b\,\mathrm{i} = (r\cos\theta) + (r\sin\theta)\,\mathrm{i}$$

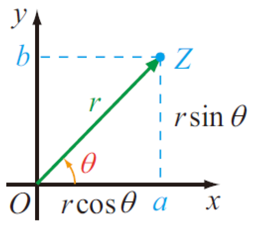



图 2.3: 复数的三角表示

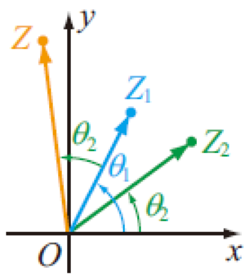



图 2.4: 复数乘法的几何意义

其中，$r$ 是复数 $z$ 的模，$\theta$ 称为 $z$ 的**辐角**。$(r\cos\theta)+(r\sin\theta)\,\mathrm{i}$ 称为非零复数 $z=a+b\,\mathrm{i}$ 的**三角表示式**，简称**三角形式**。对应地，$a+b\,\mathrm{i}$ 称为复数的**代数表示式**)，简称**代数形式**。

显然，任何一个非零复数 $z$ 的辐角都有无穷多个，而且任意两个辐角之间都相差 $2\pi$ 的整数倍。特别地，在 $[0,2\pi)$ 内的辐角称为 $z$ 的**辐角主值**，记作 $\arg z$。

每一个非零复数有唯一的模与辐角主值，二者唯一确定该复数。两个非零复数相等当且仅当它们的模与辐角主值分别相等（但是辐角可以相差 $2\pi$ 的整数倍）。

### 2.4.2 复数乘除运算的三角表示及其几何意义

**乘法**

设复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1), z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned}
z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\
&=r_1r_2(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\
&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\
&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]
\end{aligned}$$

即

$$r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

这就是说，两个复数相乘，积的模等于各复数的模之积，积的辐角等于各复数的辐角之和。

两个复数 $z_1,z_2$ 相乘时，可以像图 2.4 一样，通过把向量逆时针旋转 $\theta_2$ 角、按 $r_2$ 伸长得到乘积所对应的向量。这就是复数乘法的几何意义。

棣莫弗~

棣莫弗定理的概述图（2张）

你知道百度百科有多离谱吗

不难看出，上述两个复数三角形式的乘法及其几何意义，可以推广到有限个复数的三角形式相乘。事实上，

**定理 7** (棣莫弗公式)**.** $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

证明可以先通过数学归纳法证明正整数的情况，再推广到负整数。注意，不可以使用欧拉公式进行证明，因为欧拉公式的证明中用到了棣莫弗公式，会造成循环论证。证明过程来自维基百科。

*证明.* 先证 $P(n) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta), n \in \mathbb{N}$。采用数学归纳法。

（归纳奠基）当 $n = 0$ 时，显然成立。当 $n = 1$ 时：

左式 $= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^1 = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \cos(1\cdot\theta) + \mathrm{i}\sin(1\cdot\theta) =$ 右式

因此，$P(1)$ 成立。

（归纳假设）当 $n > 1$ 时：假设 $P(k)$ 成立，即 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos(k\theta) + \mathrm{i}\sin(k\theta)$。

（归纳步骤）当 $n = k + 1$ 时：

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} \\
=&(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k \cdot (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\
=&(\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta) \cdot (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\
=&(\cos k\theta \cdot \cos\theta + \mathrm{i}\sin k\theta \cdot \mathrm{i}\sin\theta) + (\cos k\theta \cdot \mathrm{i}\sin\theta + \mathrm{i}\sin k\theta \cdot \cos\theta) \\
=&(\cos k\theta \cdot \cos\theta - \sin k\theta \cdot \sin\theta) + \mathrm{i}(\cos k\theta \cdot \sin\theta + \sin k\theta \cdot \cos\theta) \\
=&\cos(k\theta + \theta) + \mathrm{i}\sin(k\theta + \theta) \\
=&\cos[(k+1)\theta] + \mathrm{i}\sin[(k+1)\theta]
\end{aligned}$$

因此，$P(k+1)$ 也成立。

综上，根据数学归纳法，$\forall n \in \mathbb{N}$，$P(n)$ 成立。

另外，由恒等式 $(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)) \cdot (\cos(-n\theta) + \mathrm{i}\sin(-n\theta)) = 1$ 可知，公式对于负整数情况也成立。 □

### 除法

复数的除法运算是乘法运算的逆运算。

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \quad (z_2 \neq 0)$，因为

$$r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \cdot \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)] = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$$

所以根据复数除法的定义，有

$$\boxed{\frac{r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)]}$$

这就是说，两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差。

### 2.4.3 单位根

$n$ 次单位根是 $n$ 次幂为 1 的复数。它们位于复平面的单位圆上，构成正多边形的顶点。

#### 定义

方程 $z^n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ 的复数根 $z$ 为 $n$ 次单位根，有 $n$ 个：

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

#### 复平面中的体现

当 $n \geq 3$ 时，在复平面中单位根对应的点依次相连得到正 $n$ 边形，其中一定有一个顶点落在 $(1, 0)$ 处。

当 $n = 4$ 时，4 个单位根分别是 $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$，如图 2.1c（第 8 页）所示。

#### 3 次单位根

下面研究 $n = 3$ 时的情况。

设 $z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\rho > 0)$ 是 1 的 3 次方根，则 $z^3 = 1 = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0$，从而

$$[\rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)]^3 = \rho^3(\cos(3\varphi) + \mathrm{i}\sin(3\varphi)) = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0$$

由复数相等的定义，

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\varphi = 0 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ \varphi = \dfrac{2k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

因此 1 的 3 次方根是 $\omega_k = \cos\dfrac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$。根据三角函数的周期性，得 $\omega_0 = 1, \omega_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}, \omega_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$。

如图 2.5 所示，在复平面内，设 $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ 对应的点分别为 $Z_0, Z_1, Z_2$，显然 $Z_0, Z_1, Z_2$ 都在单位圆上。因为 $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ 的辐角依次相差 $\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $Z_0, Z_1, Z_2$ 三等分圆周。$Z_0$ 恰为单位圆与实轴正半轴交点。

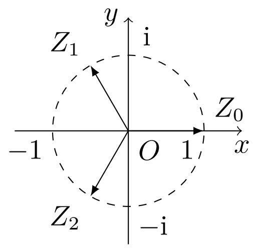



图 2.5: 3 次单位根

不难看出，3 次单位根有如下性质：

1. $(\omega_k)^3 = 1, |\omega_k| = 1$，其中 $k = 0, 1, 2$；
2. $\omega_1 = \overline{\omega_2}$；
3. $1 + \omega_k + \omega_k^2 = 0$ $(k = 1, 2)$。

事实上，人们常用如下方法表示 3 次单位根：$1, \omega, \overline{\omega}$，其中 $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$

**单位根的和式**

当 $n \geq 2$ 时，$n$ 次单位根之和为 0 。

证明方法有很多，一种几何证法是转化为向量，利用单位圆的内接正多边形的重心在原点的性质，即 $\sum \overrightarrow{OZ_i} = \overrightarrow{0}$ 进行处理。具体过程从略。

# 第三章　函数与不等式

## 3.1　函数的概念及其表示

### 3.1.1　函数的概念

17 世纪后期，德国数学家莱布尼茨第一次将“function”作为专门的数学术语；19 世纪，李善兰首次将其翻译为“函数”（“凡此变数中函彼变数者，则此为彼之函数”）。

一般地，设 $A, B$ 为非空实数集，如果 $\forall x \in A$，按照某种对应关系 $f$，在 $B$ 中都有唯一确定的元素 $y$ 与之对应，那么就称 $f : A \to B$ 为集合 $A$ 到集合 $B$ 的一个**函数**，记作

$$y = f(x), x \in A$$

其中，$x$ 叫作自变量，$x$ 的取值范围 $A$ 叫作函数的**定义域**。如果自变量取值 $a$，则由对应关系 $f$ 确定的值 $y$ 叫作函数 $f$ 在 $a$ 处的函数值，记作 $y = f(x)$ 或 $y|_{x=a}$；函数值的集合 $f(x)|x \in A$ 叫作函数的**值域**。

这里给出函数的集合论表示法下的正式定义：

二元关系 $f$ 若满足

这里说的是，$x$ 对应 $y$ 和 $y'$，则二者相等。你细品！$\wedge$ 是逻辑学中的“且”，$\vee$ 则是“或”。

$$(\forall x)(\forall y)(\forall y')\{\,[\,(\langle x,\, y\rangle \in f) \wedge (\langle x,\, y'\rangle \in f)\,] \Rightarrow (y = y')\,\}$$

则称 $f$ 为一函数。为了与逻辑叙述的括弧作区分，这里用 $\langle x, y\rangle$ 表示有序对。

注意以下几点：

1. 当使用 $f(a)$ 记号时，必有 $f$ 为一函数且 $a \in A$，其中 $A$ 是函数 $f$ 的定义域；[1]

2. 函数 $f$ 的值域是记号 $f : A \to B$ 中的 $B$ 的子集。若值域 $R_f = B$，则映射 $f : A \to B$ 为满射；

3. 函数也可以用 $g, h$ 等其他字母表示；

4. 定义域和对应关系分别相同的两个函数为同一个函数（字母不必相同）；

[1]事实上，如果这两个条件并不都满足，则 $f(a) = \varnothing$。

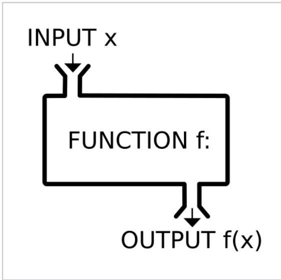



图 3.1: 函数就像机器

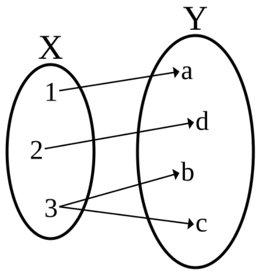



图 3.2: 多值函数不是函数

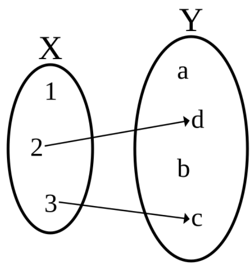



图 3.3: 偏函数不是函数

5. 在表示函数时，如果不会产生歧义，函数的定义域通常省略不写，此时就约定：函数的定义域就是使得这个函数有意义的所有实数组成的集合。

函数就像是一个机器，同样的输入下，一定会给出同样的结果，如图 3.1 所示。因此，对等式两边作同样的函数操作，等式依然成立。

### 3.1.2 区间

如表 3.1 所示，区间指的是满足某一不等式的取值 $x$ 的集合，其中的 $a, b$ 须满足 $a < b$。其中的第 1、2、3、4 类区间又分别称为闭区间、开区间、左闭右开区间、左开右闭区间，左闭右开区间与左开右闭区间统称为半开半闭区间，简称半开区间。其中的实数 $a, b$ 叫作相应区间的端点，但 $+\infty$ 和 $-\infty$ 不是。

实数集 $\mathbb{R}$ 可以用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$，“$\infty$”读作“无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”。

### 3.1.3 函数的表示

函数的三种常用的表示法为：解析法、列表法和图象法。

**解析法** 用解析式表示两个变量之间的对应关系，如 $f(x) = x^2$。

**列表法** 列出表格来表示两个变量之间的对应关系。

**图象法** 用图象表示两个变量之间的对应关系。

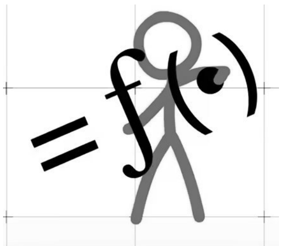
如果函数 $f : A \to B$ 满足 $\forall x \in A, f(x) = T_x$，其中 $T_x$ 是一个含 $x$ 的项，那么 $f$ 可以用箭号表示为：

$$f : A \to B;\ x \mapsto T_x$$

| 区间记法 | 数轴表示 | 对应不等式 |
|---|---|---|
| $[a,b]$ | $a$ $b$ | $a \le x \le b$ |
| $(a,b)$ | $a$ $b$ | $a < x < b$ |
| $[a,b)$ | $a$ $b$ | $a \le x < b$ |
| $(a,b]$ | $a$ $b$ | $a < x \le b$ |
| $[a,+\infty)$ | $a$ | $x \ge a$ |
| $(a,+\infty)$ | $a$ | $x > a$ |
| $(-\infty,b]$ | $b$ | $x \le b$ |
| $(-\infty,b)$ | $b$ | $x < b$ |

表 3.1: 区间与数轴表示

这样的 $f$ 可以用间隔号简记为 $T_{(\cdot)}$，例如 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto x^2$ 简记为 $(\cdot)^2$。这种记法的缺点是无法指出定义域。




再临：6

一元函数如果定义域和值域都是 $\mathbb{R}$ 的子集，那么可以使用图象法来表示。判断一个图形是否是函数图象的方法是竖直线检验，即图形与任何一条平行于 $y$ 轴的直线不能有超过一个交点。

有的函数，定义域是离散的点，这样的函数图象是一系列离散的点，研究时可以用虚线连接；有的函数，图象无法用形象描绘，例如狄利克雷函数：

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}\quad (x\in\mathbb{R})$$

狄利克雷函数是一种 0-1 指示函数，这类函数用于指示哪些元素属于定义域的某一子集 $S$。除了 $\mathbf{1}_S(x)$ 以外，也用 $\chi_S(x)$ 或 $I_S(x)$ 表示。

有的函数，其自变量在不同的取值区间内，函数有不同的对应关系，称这样的函数为**分段函数**，将会在 3.3.2 节进行探讨。

# 3.2 函数的基本性质

## 3.2.1 函数的单调性与最值

### 单调性的定义

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，且区间 $I\subseteq D$：

1. 如果 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$，都有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称该函数在区间 $I$ 上**单调递增**或该函数在区间 $I$ 上是增函数；

2. 如果 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$，都有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称该函数在区间 $I$ 上**单调递减**或该函数在区间 $I$ 上是减函数。

在两种情况下，都称该函数在区间 $I$ 上具有单调性，区间 $I$ 叫作该函数的单调区间。单调区间包括所有这样的具有单调性的区间。

特别地，在定义域上单调递增、单调递减的函数分别称为**增函数**、**减函数**。

结合不等式的性质容易得到，若 $f(x), g(x)$ 都是增函数，则函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 也为增函数。其他情况同理，读者自证不难。

作为例子，下面证明函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 是增函数。

证明. 函数的定义域是 $[0, +\infty)$。

$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$，且 $x_1 < x_2$，有

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \\ &= \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \end{aligned}$$

因为 $x_1 - x_2 < 0, \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$，所以 $f(x_1) < f(x_2)$，即函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 是增函数。 □

证明的关键步骤是第二个等号，巧妙运用平方差公式，把无法比较大小的 $\frac{1}{2}$ 次式转化为 1 次式，并且保证了分母为正。不妨把这叫作“分子有理化”。

### 最值的定义

一般地，设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在实数 $M$ 满足：

1. $\forall x \in D$，都有 $f(x) \le M$；

2. $\exists x_0 \in D$，使得 $f(x_0) = M$。

那么，称该函数的**最大值**是 $M$，$x_0$ 是该函数的一个**最大值点**。

一般地，设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在实数 $M$ 满足：

1. $\forall x \in D$，都有 $f(x) \ge M$；

2. $\exists x_0 \in D$，使得 $f(x_0) = M$。

那么，称该函数的**最小值**是 $M$，$x_0$ 是该函数的一个**最小值点**。

若函数在某一闭区间内单调，则区间的端点为函数的最值点。

#### 函数的平均变化率

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I \subseteq D$，$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$，记 $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2), \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，则：

1. 该函数在区间 $I$ 上是增函数的充要条件是 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$ 在区间 $I$ 上恒成立；
2. 该函数在区间 $I$ 上是减函数的充要条件是 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$ 在区间 $I$ 上恒成立。

一般地，当 $x_1 \neq x_2$ 时，称

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

为函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$（$x_1<x_2$ 时）或 $[x_2, x_1]$（$x_1>x_2$ 时）上的平均变化率。[2]

注意：在高中数学的定义中，单调函数不允许出现不增不减的情况，即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不能为 0。

上述结论与单调性的定义本质相同，利用不等式的性质即可相互转化。二者均可用以证明函数的单调性。

### 3.2.2 奇偶性与图象对称

#### 奇偶性的定义

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，如果 $\forall x \in D$，都有 $-x \in D$，且 $f(-x)=f(x)$，那么该函数为**偶函数**。

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，如果 $\forall x \in D$，都有 $-x \in D$，且 $f(-x)=-f(x)$，那么该函数为**奇函数**。

奇偶性是函数在其定义域上的整体性质，所以判断函数的奇偶性前应先明确其定义域。

既是奇函数又是偶函数的函数是 $y=0$。注意到，若 $x=0$ 在某个奇函数 $f(x)$ 的定义域内，则 $f(0)=-f(0)=0$。

[2] 人教 A 版中无此定义。

### 奇偶函数图象特点

偶函数的图象关于 $y$ 轴呈轴对称，奇函数的图象关于原点呈中心对称。

### 复合函数的奇偶性

约定：“若 $f(x), g(x)$ 都是奇函数，则函数 $h(x)=f(x)+g(x)$ 也为奇函数”简记为“奇 + 奇 = 奇”。有如下结论成立：

奇 ± 奇 = 奇，偶 ± 偶 = 偶；偶 × 偶 = 偶，奇 × 奇 = 偶，奇 × 偶 = 奇。除法与乘法同理。

使用定义容易证明。

有偶即偶，全奇才奇！

复合函数 $g(f(x))$ 的奇偶性判断方法：

1. 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $g(f(x))$ 的奇偶性同 $g(x)$；
2. 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $g(f(x))$ 为偶函数，不论 $g(x)$ 是否有奇偶性。

证明思路很显然，若 $f(x)$ 为偶函数，则自变量取相反数 $f(x)$ 不变，再由函数值的唯一确定性，$g(f(x))$ 也不变；若 $f(x)$ 为奇函数，则自变量取相反数，则 $f(x)$ 变为相反数，相当于 $g(x)$ 的变量 $x$ 取相反数。

### 常见的奇偶函数模型

以下 $y$ 关于 $x$ 的函数为奇函数：

$$y=Ax^{2n+1},\ y=a^x-a^{-x},\ y=\log_a\left(\sqrt{x^2+1}\pm x\right),\ y=A\sin\omega x,$$
$$y=A\tan\omega x,\ y=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}},\ y=\log_a\frac{1-x}{1+x}\quad(a>0,\ a\neq 1,\ n\in\mathbb{Z})$$

以下 $y$ 关于 $x$ 的函数为偶函数：

$$y=Ax^{2n},\ y=a^x+a^{-x},\ y=\log_a\left(1+a^{2kx}\right)-kx,\ y=A\cos\omega x,$$
$$y=f(|x|),\ y=\text{const.},\ y=A|x|\quad(a>0,\ a\neq 1,\ n\in\mathbb{Z},\ k\neq 0)$$

下证 $f(x)=\log_a\left(\sqrt{x^2+1}\pm x\right)\ (a>0, a\neq 1)$ 为奇函数。

证明.

$$\begin{aligned}
f(x)&=\log_a\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\pm x\right)\left(\sqrt{x^2+1}\mp x\right)}{\sqrt{x^2+1}\mp x}\right)\\
&=\log_a\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\mp x}\right)\\
&=-\log_a\left(\sqrt{x^2+1}\mp x\right)\\
&=-f(-x)
\end{aligned}$$

□

下证 $y=\log_a\left(1+a^{2kx}\right)-kx$ $(a>0, a\neq 1, k\neq 0)$ 为偶函数。

证明.

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \log_a\left(1+a^{-2kx}\right)+kx \\
&= \log_a\left(\frac{a^{2kx}+1}{a^{2kx}}\right)+kx \\
&= \log_a\left(1+a^{2kx}\right)-2kx+kx \\
&= \log_a\left(1+a^{2kx}\right)-kx \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

□

其余函数奇偶性的证明十分显然，从略。

有的函数，可以恒等变形为上述函数的线性表达式。例如，函数 $f(x)=\frac{3^x}{3^x+1}$ 可以转化为 $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1}+\frac{1}{2}$，下面给出推导。

设常数 $m$，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3^x}{3^x+1}+m-m \\
&= \frac{3^x+m\cdot 3^x+m}{3^x+1}-m \\
&= \frac{(m+1)\left(3^x+\frac{m}{m+1}\right)}{3^x+1}-m
\end{aligned}$$

令 $\frac{m}{m+k}=-1$，得 $m=-\frac{1}{2}$，代入得 $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1}+\frac{1}{2}$。

在此推导过程中，核心是抓住目标 $f(x)=k\cdot\frac{3^x-1}{3^x+1}+b$，并且运用“加一减一”的技巧和待定系数法。

### 函数图象的对称

若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称，则 $f(a-x)=f(a+x)\Leftrightarrow f(x)=f(2a-x)$；若函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(a,b)$ 对称，则 $b-f(a-x)=f(a+x)-b\Leftrightarrow f(x)+f(2a-x)=2b$。

其中，第一个推论结合图形易得，等价推论通过 $x'=a-x$ 的换元也容易证明。

注意到，当函数 $f(x)$ 图象呈中心对称或轴对称时，在等式的同侧，$f(k_1x+m)\pm f(k_2x+n)$ 中 $k_1,k_2$ 满足 $k_1+k_2=0$。事实上这也是分析问题的重要依据。

**双对称求周期问题**

当已知条件中包含两个对称条件时，通常函数具有周期性。

（情形一）若函数 $f(x)$ 的图象关于两条直线 $x=a,x=b(a\neq b)$ 对称，则函数 $f(x)$ 为周期函数，且 $2|a-b|$ 为函数 $f(x)$ 的一个周期。证明如下：

证明. 由已知，$f(x)=f(2a-x)$, $f(y)=f(2b-y)$，设 $y=2a-x$，得 $f(x)=f(2a-x)=f(y)=f(2b-y)=f(2b-(2a-x))=f(2(b-a)+x)$。结论显然。 □

（情形二）若函数 $f(x)$ 的图象关于两个点 $(a,0),(b,0)(a\neq b)$ 对称，则函数 $f(x)$ 为周期函数，且 $2|a-b|$ 为函数 $f(x)$ 的一个周期。证明同理，从略。

（情形三）若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 和点 $(b,0)$ 对称，则函数 $f(x)$ 为周期函数，且 $4|a-b|$ 为函数的一个周期或 $f(x)=0$。证明如下：

证明. 由已知，$f(x)=f(2a-x)$, $f(y)+f(2b-y)=0$，设 $y=2a-x$，得 $f(x)=(2a-x)=f(y)=-f(2b-y)=-f(2(b-a)+x)$，当 $a=b$ 时，$f(x)=0$；否则，再设 $z=2(b-a)+x$，得 $f(x)=-f(z)=-(-f(2(b-a)+z))=f(2(b-a)+2(b-a)+x)=f(4(b-a)+x)$。结论显然。 □

注意到，证明过程中出现了 $f(x)=-f(x+k)$ $(k\neq 0)$ 的形式，这是周期函数的典型特征（$x$ 前系数相同），由于 $f(\dots)$ 前系数不同，再次换元代入即可得到最小正周期为 $2|k|$。

## 3.3 幂函数、分段函数与绝对值函数

### 3.3.1 幂函数

一般地，形如 $y=x^\alpha$ 的函数叫作**幂函数**。其中 $x$ 是自变量，$\alpha$ 是常数。

对于幂函数，我们只研究 $\alpha=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时的图象与性质。

在同一坐标系下画出 $\alpha=1,2,3,\dfrac{1}{2},-1$ 时 $y=x^\alpha$ 的图象，如图 3.4 所示。

事实上：

1. 幂函数 $y=x^\alpha$ 的图象在第一象限一定存在，且必定经过点 $(1,1)$，一定不经过第四象限；

2. 当 $\alpha>0$ 时，幂函数图象过原点，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递增；当 $\alpha<0$ 时，幂函数图象不过原点，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

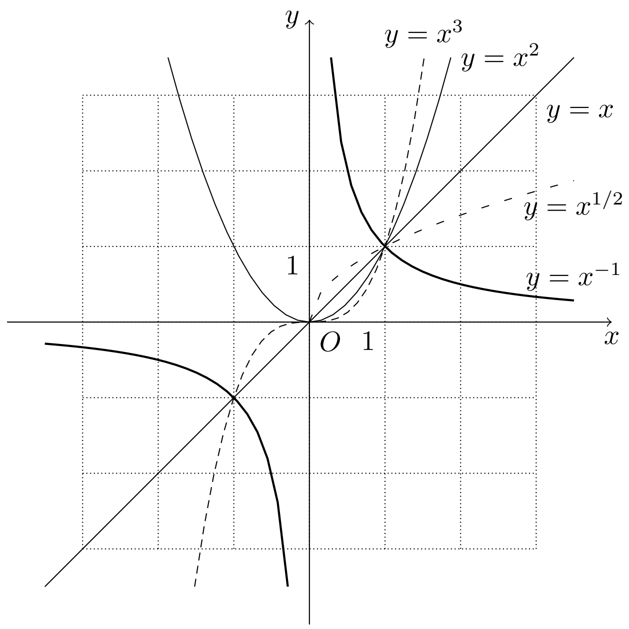



图 3.4: 幂函数图象

3. 在直线 $x = 1$ 的右边，$\alpha$ 越大，函数值增长越快。

通过探究 $\alpha = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ 时 $y = x^{\alpha}$ 的图象，还可以得到幂函数的很多其他性质，在此不一一列举。

### 3.3.2 分段函数

分段函数是通常记为 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_1 \\ f_2(x), & x \in D_2 \\ \vdots & \\ f_n(x), & x \in D_n \end{cases}$ 的函数，自变量在不同的取值区间有“不同的”映射关系。沿用函数就像机器的比喻，分段函数就像是多个机器，对于不同的输入，会给入不同的机器产生返回。事实上，选择机器 + 输入机器的过程，可以视为一个机器，因为分段函数也是函数，也就具有函数的一切特性，所以可以看作是一个“割裂的”映射关系。

在解决分段函数有关问题时，需要注意函数的定义域，不同取值区间不应有重叠。在实际问题中，不同的取值区间的并集往往是一个连续的区间，因此需要特别考虑区间断开处的函数值情况，是否有跳跃等。

分段函数的的定义域为每一段自变量取值范围的并集。分段函数的值域为每一段函数值范围的并集，最大值是每一段最大函数值的最大值，最小

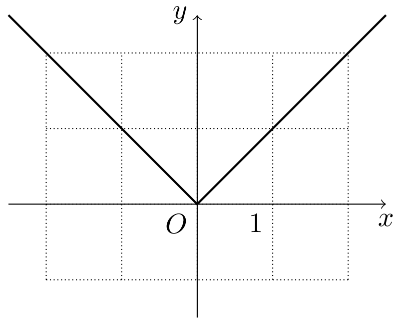



图 3.5: 函数 $y = |x|$ 图象

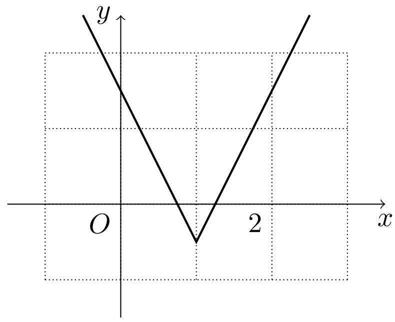



图 3.6: 函数 $y = 2|x-1| - 0.5$ 图象

值是每一段函最小数值的最小值。

### 3.3.3　绝对值函数及其衍生

#### 绝对值函数

绝对值函数的分段定义如下：

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

函数 $y = |x|$ 的图象如图 3.5 所示。

这是最基本的绝对值函数模型，可以看成是从原点引出两条关于过原点的竖直线（即 $y$ 轴）对称的射线。

#### 一般绝对值函数

对绝对值函数图象进行变换，得到更一般的形式：$y = k|tx - a| + b$ $(t \neq 0)$。其中 $k$ 控制右侧这条射线的斜率，射线的端点则移动到了点 $(a, b)$ 处，$|t|$ 控制 $x$ 坐标轴伸（$< 1$）缩（$> 1$）的程度。本小节中把这样的绝对值函数称为一般绝对值函数。图 3.6 是 $k = 2, a = 1, b = -0.5, t = 1$ 时的图象。

当我们把这样两个一般绝对值相加时，会得到一个新的绝对值函数，即 $f(x) = k_1|t_1x - a_1| + k_2|t_2x - a_2| + b$ $(t_1t_2 \neq 0)$。

解决此类问题的主要思想是分类讨论去掉绝对值，转化为一般分段函数，数形结合进行研究。下面研究 $\dfrac{a_1}{t_1} \neq \dfrac{a_2}{t_2}$ 的情况。根据各个参数的取值不同，可分为如下四种类型（命名仅为便于记忆，仅在本小节适用）。

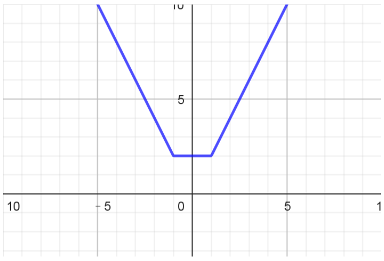


图 3.7: 平底锅模型

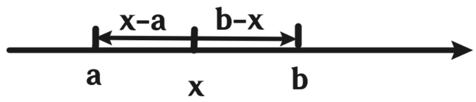



图 3.8: 平底锅的平底

### 平底锅模型

形如 $f(x)=|x-a|+|x-b|$ 的函数，由于其图象酷似平底锅，故称之为平底锅模型。在绝对值前乘上相同常数同理，不再赘述。

我们需要通过分类讨论将其转化为一般分段函数，各个击破。不妨设 $a<b$。可能分段的点为 $x=a,x=b$ 两处，二者把定义域 $\mathbb{R}$ 分为 $(-\infty,a),[a,b],(b,+\infty)$ 三段。

分别考虑每一段上的情况，此时绝对值内的正负完全确定，可以去掉绝对值，得

$$f(x)=\begin{cases}-2x+a+b, & x<a\\ b-a, & a\leq x\leq b\\ 2x-a-b, & x>b\end{cases}$$

注意到，当 $x\in[a,b]$ 时，函数值为定值 $b-a$；两侧射线的斜率绝对值为 2。图 3.7 是 $a=-1,b=1$ 时的函数图象。

关于函数值为定值的原因，有一个巧妙的几何解释。

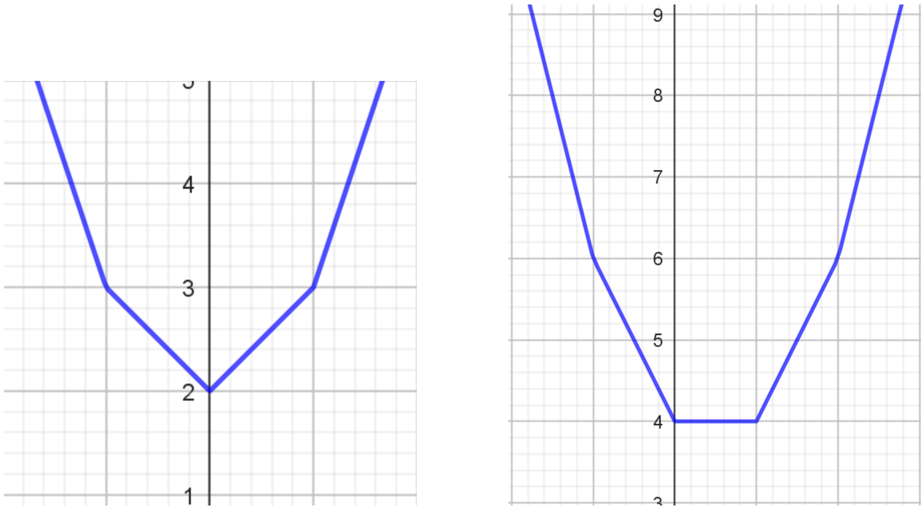
如图 3.8，考虑数轴上 $a,b,x$ 对应的点，则 $f(x)$ 描述的是 $x$ 对应点到 $a,b$ 对应点的距离之和。当 $x$ 位于二者之间，也就是 $x\in[a,b]$ 时，二者距离之和恰好等于 $a,b$ 对应点之间的距离。

如果再加上 $n$ 个形如 $|x-m|$ 的项，则图象将会为平底锅（$n$ 为偶数）或尖底锅（$n$ 为奇数），如图 3.9 所示。

### Z 字形模型

形如 $f(x)=|x-a|-|x-b|$ 的函数为该类型，其中 $a\neq b$。在绝对值前乘上相同常数同理，不再赘述。

分类讨论展开即可，同前。展开后又可分为以下两种情形：




(a) $y = |x+1| + |x| + |x-1|$　(b) $y = |x+1| + |x| + |x-1| + |x-2|$

图 3.9: 尖底锅与平底锅函数图象

（情形一）如图 3.10a，当 $a > b$ 时，

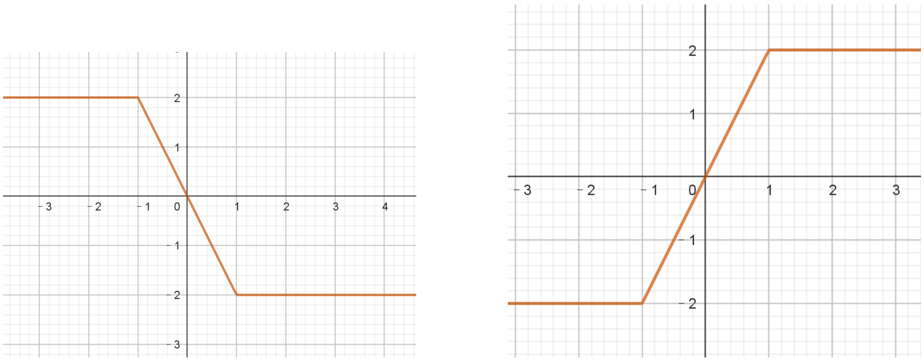
$$f(x) = \begin{cases} |a-b|, & x \le b \\ -2x + a + b, & b < x < a \\ -|a-b|, & x \ge a \end{cases}$$

（情形二）如图 3.10b，当 $a < b$ 时，

$$f(x) = \begin{cases} |a-b|, & x \le a \\ 2x - a - b, & a < x < b \\ -|a-b|, & x \ge b \end{cases}$$

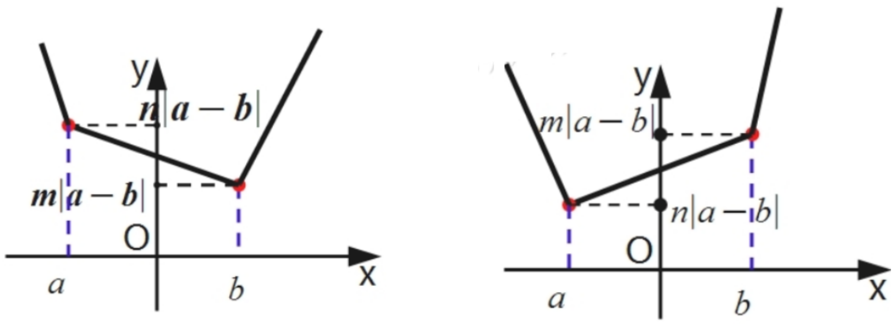
大减小，大到小；小减大，没文化！

注意到，当 $a - b > 0$ 时，中间段函数值逐渐减小；当 $a - b < 0$ 时，中间段函数值逐渐增大。



(a) $a=1,b=-1$ (b) $a=-1,b=1$

图 3.10: Z 字形模型




(a) $m<n$ (b) $m>n$

图 3.11: 歪底锅模型

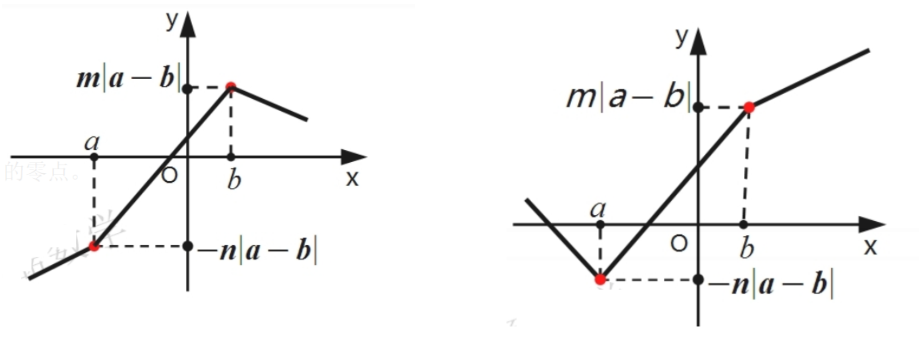
### 歪底锅模型

形如 $f(x)=m|x-a|+n|x-b|\ (a<b)$ 的属于该类型。下面研究 $m,n>0$ 的情况。分类讨论同前。展开得

$$f(x)=\begin{cases}(-m-n)x+am+bn, & x<a\\ -an+bn, & x=a\\ (m-n)x+am-bn, & a<x<b\\ -am+bm, & x=b\\ (m+n)x-am-bn, & x>b\end{cases}$$

函数图象如图 3.11 所示。

注意到，不论 $m,n$ 的大小关系如何，函数的最小值点总是为 $m,n$ 中较大者对应绝对值内部关于 $x$ 的表达式的零点。




(a) $m < n$ (b) $m > n$

图 3.12: 过山车模型（$a < b$）

**过山车模型**

客套话就不说了。$f(x) = m|x-a| - n|x-b|$ $(m, n > 0, a \neq b)$ 可分为下面两种情形：

（情形一）如图 3.12，当 $a < b$ 时，

$$
f(x) = \begin{cases} (-m+n)x + am - bn, & x < a \\ na - nb, & x = a \\ (m+n)x - am - bn, & a < x < b \\ -ma + mb, & x = b \\ (m-n)x - am + bn, & x > b \end{cases}
$$

（情形二）如图 3.13，当 $a > b$ 时，

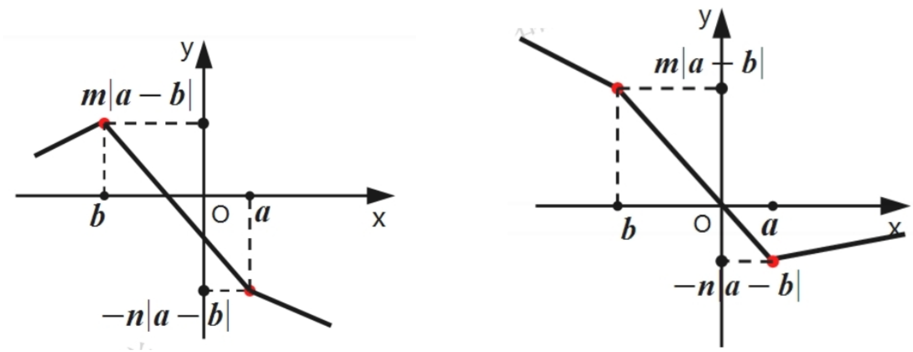
$$
f(x) = \begin{cases} (-m+n)x + am - bn, & x < b \\ ma - mb, & x = b \\ (-m-n)x + am + bn, & b < x < a \\ -na + nb, & x = a \\ (m-n)x - am + bn, & x > a \end{cases}
$$

猜你想找：二次函数二次项系数与开口方向。

注意到，不论 $a, b$ 大小如何，$m, n$ 中较大者对应项前符号为正则有最小值，为负则有最大值，最大（或小）值点总是为 $m, n$ 中较大者对应绝对值内部关于 $x$ 的表达式的零点。

## 3.4 指数函数与对数函数

本节研究内容限定在实数域内。




(a) $m < n$ (b) $m > n$

图 3.13: 过山车模型（$a > b$）

### 3.4.1 指数

#### 根式

一般地，如果 $x^n = a$，那么 $x$ 叫作 $a$ 的 $n$ **次方根**，其中 $n > 1, n \in \mathbb{N}^*$。

当 $n$ 是奇数时，正数 $n$ 次方根是一个正数，负数的 $n$ 次方根是一个负数。这是 $a$ 的 $n$ 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示。

当 $n$ 是偶数时，正数 $n$ 次方根有两个，二者互为相反数，正的用 $\sqrt[n]{a}$ 表示，负的用 $-\sqrt[n]{a}$ 表示。二者可以合并写作 $\pm\sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$。负数没有偶次方根。

0 的任何次方根都为 0，记作 $\sqrt[n]{0} = 0$。

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫作**根式**，这里 $n$ 叫作**根指数**，$a$ 叫作**被开方数**。

根据 $n$ 次方根的意义，可得

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n\text{为奇数} \\ |a|, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

#### 分数指数幂

为了推广后能保持原有的运算性质，我们规定

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \ (a > 0,\, m, n \in \mathbb{N}^*,\, n > 1)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \ (a > 0,\, m, n \in \mathbb{N}^*,\, n > 1)$$

规定：0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义。

至此，因为所有有理数都可以表示为两个整数之比，所以我们已经把指数推广到了有理数域。

#### 无理数指数幂

由于 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，换句话说，$\forall x \in \mathbb{R}$，$x$ 都可以由 $\mathbb{Q}$ 中的数逼近，因此我们可以分别构造单调递增和单调递减收敛于 $x$ 的有理数序列 $\{r_n\}, \{s_n\}$，再结合夹挤定理与函数 $y = a^x$ $(a > 0)$ 的连续性，可以确认 $\{a^{r_n}\}, \{a^{s_n}\}$ 收敛于同一极限 $a^x$，注意到结论与 $x$ 是否为有理数无关，我们已经推广分数指数幂到无理数指数幂。

夹挤定理，又称夹逼定理、夹极限定理、三明治定理、逼近定理、追敛定理，指出若有两个函数在某点的极限相同，且有第三个函数的值在这两个函数之间，则第三个函数在该点的极限也相同。

实数指数幂有如下运算性质：$\forall r, s \in \mathbb{R}$，

$$a^r a^s = a^{r+s} \ (a > 0)$$
$$(a^r)^s = a^{rs} \ (a > 0)$$
$$(ab)^r = a^r b^r \ (a > 0, b > 0)$$

### 3.4.2 指数函数

#### 指数函数的定义

形如 $y = a^x$ $(a > 0且x \neq 1)$ 的函数叫作**指数函数**，其中 $x$ 为自变量，定义域为 $\mathbb{R}$。

在实际问题中，经常会遇到指数增长和指数衰减，分别指的是增长率和衰减率为定值的变化模型。这类模型中，$x$ 次经过某一段时间后，终末量 $y$ 与初始量 $N$ 有如下关系：$y = N(1+p)^x$ $(x \in \mathbb{N})$，其中 $p$ 是增长率或衰减率（取相反数）。

增长率或衰减率，是指一段时间过后，某一量的变化量与初始量之比。

#### 指数函数的图象和性质

在同一个坐标系下画出函数 $y = a^x$ 与 $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ $(a > 1)$ 的图象，图 3.14 是 $a = 2$ 的情况。

因为 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$，点 $(x, y), (-x, y)$ 关于 $y$ 轴对称，所以 $y = 2^x$ 图象上任意一点 $P(x, y)$ 关于 $y$ 轴的对称点 $P'(-x, y)$ 都在函数 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的图象上；反之亦然。由此可知，底数互为倒数的两个指数函数的图象关于 $y$ 轴对称。

事实上，指数函数的图象根据底数 $a$ 的取值，可分为 $0 < a < 1$ 和 $a > 1$ 两种类型，如表 3.2 所示。

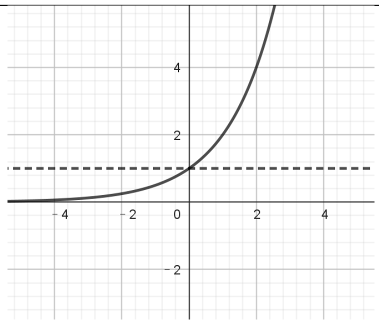
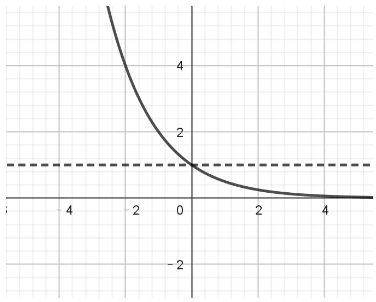
| 项目 | $0 < a < 1$ | $a > 1$ |
|---|---|---|
| 图象 |  |  |
| 定义域 | $\mathbb{R}$ | |
| 值域 | $(0, +\infty)$ | |
| 过定点 | $(0, 1)$ | |
| 单调性 | 减函数 | 增函数 |

表 3.2: 指数函数的图象与性质

合理利用指数函数的单调性，通过自变量的大小关系可以判断相应函数值的大小关系。

如果底数不同的指数函数图象出现在同一个坐标系下，可以利用 $a^1 = a$ 的性质，作出直线 $x = 1$ 来判断底数的大小关系，此时与函数图象交点 $(1, a)$ 的纵坐标即为 $a$ 的值，如图 3.15 所示。事实上，除 1 以外，任何正数都可作为竖直线的横坐标，因为 $y = x^t$ $(t > 0)$ 是增函数。

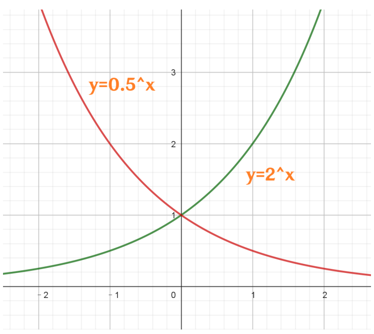



图 3.14: 指数函数的图象

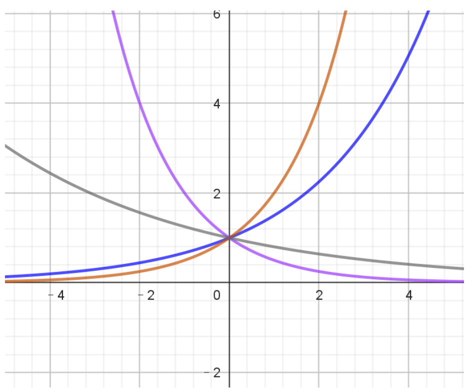


图 3.15: 不同底数指数函数的图象

### 3.4.3　对数

#### 对数的定义

一般地，如果 $a^x = N\,(a > 0, a \neq 1)$，那么 $x$ 叫作以 $a$ 为底 $N$ 的**对数**，记作 $x = \log_a N$，其中 $a$ 叫作对数的**底数**，$N$ 叫作真数。

通常，我们把以 10 为底的对数叫作**常用对数**，并把 $\log_{10} N$ 简记为 $\lg N$。以 $e$ 为底的对数称为**自然对数**，并把 $\log_e N$ 简记为 $\ln N$。

根据对数的定义，当 $a > 0, a \neq 1$ 时，$a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$。

由指数与对数的这个关系，可以得到：负数和 0 没有对数；$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$。

#### 对数的运算

设 $M = a^m, N = a^n$，因为 $a^m a^n = a^{m+n}$，所以 $MN = a^{m+n}$。这样，就得到了对数运算的和公式。类似的，可以得到对数的差公式和次方公式。

如果 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$，那么

$$\begin{aligned}\log_a(MN) &= \log_a M + \log_a N \\ \log_a \frac{M}{N} &= \log_a M - \log_a N \\ \log_{a^m} M^n &= \frac{n}{m} \log_a M\end{aligned}$$

设 $\log_a b = x$，则 $a^x = b$，于是 $\log_c a^x = \log_c b$，应用次方公式得 $x \log_c a = \log_c b$，于是我们得到了**对数换底公式**：

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\ (a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1)$$

### 3.4.4　对数函数

#### 对数函数的定义

一般地，形如 $y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$ 的函数叫作**对数函数**，其中 $x$ 是自变量，定义域是 $(0, +\infty)$。

## 3.5 函数、方程、不等式之间的关系

## 3.6 函数的应用

### 3.6.1 对数函数：世界是对数的

### 3.6.2 指数函数：曾“几何”时

### 3.6.3 幂函数：规模效应

### 3.6.4 三角函数：波动的谐律

### 3.6.5 二次函数：宇宙之“2”

### 3.6.6 再看函数：混沌中的确定

# 第四章　导数

# 第五章　平面向量、解三角形

# 第六章　立体几何

# 第七章　解析几何

# 第八章　排列组合

# 第九章　数列

# 第十章　统计与概率

# 附录 A　B 版中的阅读材料

本附录收录了人教版 B 版高中教材中的部分阅读材料，作为补充阅读之用，顺序大致与本书内容对应。

我们 A 版学生也是太悲催了

## A.1　利用复数产生分形图（复变函数）

以前我们学过的函数，定义域都是实数集的子集. 但函数概念还可以推广：定义域是复数集的子集的函数称为复变函数。类似地，我们还可以得到多项式复变函数的概念。例如，$f(z)=z^2$ 就是一个多项式复变函数，此时 $f(\mathrm{i})=\mathrm{i}^2=-1, f(1+\mathrm{i})=(1+\mathrm{i})^2=2\,\mathrm{i}$。

给定多项式复变函数 $f(z)$ 之后，对任意一个复数 $z_0$，通过计算公式 $z_{n+1}=f(z_n), n\in\mathbb{N}$ 可以得到一列值 $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$。

如果存在一个正数 $M$，使得 $|z_n|<M$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 都成立，则称 $z_0$ 为 $f(z)$ 的收敛点；否则，称 $z_0$ 为 $f(z)$ 的发散点。$f(z)$ 的所有收敛点组成的集合称为 $f(z)$ 的充满茹利亚集。

例如,当 $f(z)=z^2$ 时,如果 $z_0=\mathrm{i}$,则得到的一列值是 $\mathrm{i}, -1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$；如果 $z_0=1+\mathrm{i}$，则算出的一列值是 $1+\mathrm{i}, 2\,\mathrm{i}, -4, \ldots, 2^{2^{n-1}}, \ldots$。

显然，对于 $f(z)=z^2$ 来说，i 为收敛点，$1+\mathrm{i}$ 为发散点。事实上，利用 $|z^2|=|z|^2$ 可以证明，$f(z)=z^2$ 的充满茹利亚集是一个单位圆盘（即由满足 $|z|\leq 1$ 的所有 $z$ 组成的集合）。

让人惊讶的是，当 $f(z)=z^2+c$ 时，对于某些复数 $c$ 来说，$f(z)$ 的充满茹利亚集是非常复杂的。如果利用计算机对不同形态的收敛点和发散点进行不同的着色，就可以得到与本章导语所示类似的分形图. 而且，如果按照一定的规则对 $c$ 进行分类，并进行着色，可以得到如图 A.1 所示的芒德布罗分形图。

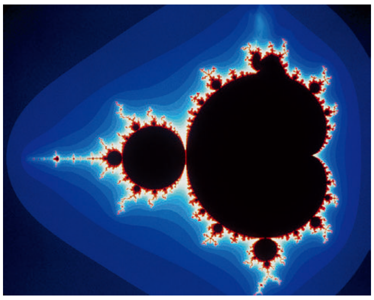


图 A.1: 芒德布罗分形图

## A.2 四元数简介

数学中的数,除了实数、复数之外,还有四元数。一般地,形如 $a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$ 的数为四元数，其中 $a,b,c,d$ 都是实数，i, j, k 都是虚数单位，这些虚数单位满足

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1$$

给定两个四元数，可以进行同复数类似的加法和减法运算，例如

$$(2+3\mathrm{i}+4\mathrm{j}+5\mathrm{k})+(6+7\mathrm{i}+8\mathrm{j}+9\mathrm{k})=8+10\mathrm{i}+12\mathrm{j}+14\mathrm{k}$$

不过，对于两个四元数相乘来说，情况就比复数相乘复杂得多。因为此时，除了会出现 $\mathrm{i}^2,\mathrm{j}^2,\mathrm{k}^2$ 之外，还会出现 $\mathrm{ij},\mathrm{ik},\mathrm{jk},\mathrm{ji},\mathrm{ki},\mathrm{ij}$ 等。一般地，两个四元数相乘时，规定

$$\mathrm{ij}=-\mathrm{ji}=\mathrm{k},\quad \mathrm{jk}=-\mathrm{kj}=\mathrm{i},\quad \mathrm{ki}=-\mathrm{ik}=\mathrm{j}$$

例如，

$$\begin{aligned}&(2+3\mathrm{i}+4\mathrm{j}+5\mathrm{k})(6+7\mathrm{i}+8\mathrm{j}+9\mathrm{k})\\=&(12-21-32-45)+(14+18+36-40)\mathrm{i}\\&+(16+24+35-27)\mathrm{j}+(18+30+24-28)\mathrm{k}\\=&-86+28\mathrm{i}+48\mathrm{j}+44\mathrm{k}\end{aligned}$$

由此也可以看出，四元数的乘法是不满足交换律的。

不过，有意思的是，与复数的乘法能够表示平面直角坐标系中的旋转类似，四元数的乘法能够表示空间中的旋转。因此，四元数在描述三维旋转、姿态方面有一些独特的优点，人们经常使用四元数去描述飞行器、机器人等的姿态。感兴趣的同学请自行查阅有关资料。

顺带提及的是，有同学可能会想：既然能有四元数，那有没有三元数呢？能不能规定形如 $a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}$ 的数为三元数呢？其中 $a,b,c$ 都是实数，i, j 都

是虚数单位。对这个问题感兴趣的同学，可以考虑一下此时 i 与 j 的积 ij 的结果是什么，由此是否出现矛盾，等等。

## A.3 素数个数与对数

我们已经知道，像 2、3、5、7 这样只能被 1 和它自己整除的正整数称为素数（也称为质数）。例如，100 以内的所有素数为 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97。

探索素数出现的规律，是一些数学家非常关心的问题。特别地，设 $x$ 是正整数，用 $\pi(x)$ 表示不超过 $x$ 的素数个数，寻找 $\pi(x)$ 的近似表达式，历史上曾引起了很多数学家的注意。当然，我们可以取 $x$ 为一些常数，然后求出 $\pi(x)$ 的值来进行观察和归纳。

可能会让你感到惊讶的是，$\pi(x)$ 的近似表达式与自然对数有关。事实上，数学家们已经证明，当 $x$ 充分大时，

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

这一结果可以从下表中直观感受到。

| $x$ | $\pi(x)$ | $\frac{x}{\ln x}$ | 相对误差 |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 168 | 145 | 13.69% |
| 5 000 | 669 | 587 | 12.26% |
| 10 000 | 1 229 | 1 086 | 11.64% |
| 50 000 | 5 133 | 4 621 | 9.97% |
| 100 000 | 9 592 | 8 686 | 9.45% |
| 500 000 | 41 538 | 38 103 | 8.27% |
| 1 000 000 | 78 498 | 72 382 | 7.79% |
| 5 000 000 | 348 513 | 324 150 | 6.99% |

注：如果 $A$ 的近似值为 $a$，那么相对误差指的是

$$\frac{|A-a|}{A} \times 100\%$$

# 定理索引

# 名词索引