

一、目標函數 (Objective Function)

數學公式

$$\max \sum_{t=1}^{12} \left[\text{Revenue}_t - \left(\frac{\text{Staff}_t \cdot \text{Salary}}{12} + \text{Fire}_t \cdot 0.4 \cdot \text{Salary} \right) \right]$$

1. Revenue_t (收入提升)

- **定義**：第 t 月因代理商支持帶來的增量廣告收入。
- **計算方法**：

$$\text{Revenue}_t = \text{Assigned}_t \times \text{AvgBudget} \times \text{UpliftRate}$$

- **Assigned_t**：當月分配到代理商的廣告商數量
- **AvgBudget**：美國合格廣告商的平均年度預算（從歷史數據計算）
- **UpliftRate**：預算提升率（概率加權平均值 = 13.5%）

2. 成本項

- **Agent Salaries (代理商薪資)**：

$$\frac{\text{Staff}_t \cdot \text{Salary}}{12}$$

- **Staff_t**：第 t 月的代理商數量
- **Salary**：美國代理商的年薪（月薪為年薪的1/12）

- **Firing Costs (解雇成本)**：

$$\text{Fire}_t \cdot 0.4 \cdot \text{Salary}$$

- **Fire_t**：第 t 月解雇的代理商數量
- 解雇成本 = 40%年薪（一次性支付）

二、約束條件 (Constraints)

1. 初始條件

$$\text{Staff}_1 = \text{InitialStaff}$$

- 物理意義：第一月的代理商數量等於初始代理數量（從 Existing Agent Staffing.xlsx 讀取）。

2. 代理數量動態

$$\text{Staff}_{t+1} = \text{Staff}_t + \text{Hire}_t - \text{Fire}_t$$

- 物理意義：下個月的代理商數量 = 當前數量 + 新雇傭的代理商 - 被解雇的代理商。
- 關鍵限制：
 - 新雇傭的代理商需要1個月準備期（即 Hire_t 在 t+1 月生效）。
 - 解雇代理商需要提前1個月通知（即 Fire_t 在 t+1 月生效）。

3. 最低代理需求

$$\text{Staff}_t \geq \text{MinStaff}_t$$

- 物理意義：每月代理商數量必須滿足最低需求，以處理當月合格廣告商。
- 計算方法：

$$\text{MinStaff}_t = \left\lceil \frac{\text{EligibleNew}_t}{5} \right\rceil$$

- EligibleNew_t：當月合格廣告商數量
- 每位代理商每月最多處理5個新廣告商

4. 容量限制

$$\text{Assigned}_t \leq \text{Staff}_t \times 5$$

- 物理意義：每月分配的廣告商數量不能超過代理商的總容量。

5. 隊列管理

- 隊列動態：

$$\text{Assigned}_t \leq \text{CarryOver}_{t-1} + \text{EligibleNew}_t$$

$$\text{CarryOver}_t = \text{CarryOver}_{t-1} + \text{EligibleNew}_t - \text{Assigned}_t$$

- 物理意義：優先分配等待隊列中的廣告商，剩餘容量分配新廣告商。
- 廣告商等待超限移除：

$$\text{CarryOver}_{t-2} = 0 \quad \text{for } t \geq 3$$

- 物理意義：廣告商在隊列中等待超過2個月後被移除。

6. 非負性約束

$$\text{Staff}_t \geq 0, \quad \text{Hire}_t \geq 0, \quad \text{Fire}_t \geq 0$$

Assumption

1. 數據假設

- **歷史數據代表性**：2023-2024年的月均註冊量能反映2025年的趨勢。
- **合格率固定**：廣告商預算分布與歷史一致，合格率不變。
- **平均預算**：使用歷史數據計算的平均預算作為未來預算的估計。

2. 代理商效率

- **固定容量**：每位代理商每月固定處理5個新廣告商（無效率波動）。
- **無閒置成本**：代理商的閒置時間不產生額外成本。

3. 廣告商行為

- **無主動退出**：廣告商一旦被分配，不會主動退出。
- **等待時間限制**：未分配的廣告商在隊列中等待最多2個月後被強制移除。

4. 成本結構

- **解雇成本**：僅包含40%年薪，忽略招聘成本。
- **收入提升**：廣告商的預算提升在分配後立即生效，且僅計算一次。

5. 時間顆粒度

- **每月為單位**：忽略節假日和周末的影響。
- **支持週期**：廣告商支持週期嚴格為60天（簡化為2個月）。