Ensemble de Problèmes 1 : Base Réduite pour les Problèmes Elliptiques Affines Linéaires
Conception d'une Ailette Thermique

Steve de Rose

October 7, 2021

Partie 1 - Approximation par éléments finis

a) Soit $u^e(\mu) \in X^e \equiv H^1(\Omega)$,

$$-k^i \Delta u^e(\mu) = 0 \qquad \text{dans } \Omega^i$$

Ensuite, nous multiplions ces équations avec une fonction de test $v \in X^e$

$$-k^i \Delta u^e(\mu) v = 0 \qquad \text{dans } \Omega^i$$

On intègre ensuite chacune des équations sur le domaine Ω^i

$$\int_{\Omega^i} -k^i \Delta u^e(\mu) v \mathrm{d}A = 0 \qquad \forall v \in X^e$$

et on effectue une intégration par partie

$$k^i \int_{\Omega^i} \nabla u^e(\mu) \cdot \nabla v \mathrm{d}A - \int_{\Gamma^i} k^i (\nabla u^e(\mu) \cdot n^i) v \mathrm{d}S = 0 \qquad \forall v \in X^e$$

- Pour $i > 0$,

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma^i} \nabla k^i (u^e(\mu) \cdot n^i) v \mathrm{d}S &= -\int_{\Gamma^i_{int}} k^i (\nabla u^e(\mu) \cdot n^i) v \mathrm{d}S - \int_{\Gamma^i_{ext}} k^i (\nabla u^e(\mu) \cdot n^i) v \mathrm{d}S \\ &= -\int_{\Gamma^i_{int}} k^i (\nabla u^e(\mu) \cdot n^i) v \mathrm{d}S + \int_{\Gamma^i_{ext}} \mathrm{Bi}\, u^e(\mu) v \mathrm{d}S \end{aligned}$$

- Pour $i = 0$,

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma^0} k^0 (\nabla u^e(\mu) \cdot n^0) v \mathrm{d}S &= -\int_{\Gamma^0_{int}} (\nabla u^e(\mu) \cdot n^0) v \mathrm{d}S - \int_{\Gamma^0_{ext}} (\nabla u^e(\mu) \cdot n^0) v \mathrm{d}S \\ &= \sum_{i=1}^{4} -\int_{\Gamma^i_{int}} (\nabla u^e(\mu) \cdot n^0) v \mathrm{d}S - \int_{\Gamma^0_{ext} \backslash \Gamma_{\text{root}}} (\nabla u^e(\mu) \cdot n^0) v \mathrm{d}S - \int_{\Gamma_{\text{root}}} (\nabla u^e(\mu) \cdot n^0) v \mathrm{d}S \\ &= \sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma^i_{int}} k^i \nabla u^e(\mu) \cdot n^i v \mathrm{d}S + \int_{\Gamma^0_{ext} \backslash \Gamma_{\text{root}}} \mathrm{Bi}\, u^e(\mu) v \mathrm{d}S - \int_{\Gamma_{\text{root}}} v \mathrm{d}S \end{aligned}$$

En additionnant les équation, on obtient

$$\sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} \nabla u^e(\mu) \cdot \nabla v \mathrm{d}A - \sum_{i=0}^{4} \int_{\Gamma^i} k^i \nabla u^e(\mu) \cdot n^i v \mathrm{d}S = 0$$

$$\sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} \nabla u^e(\mu) \cdot \nabla v \mathrm{d}A + \int_{\Gamma \backslash \Gamma_{\text{root}}} \mathrm{Bi}\, u^e(\mu) v \mathrm{d}S - \int_{\Gamma_{\text{root}}} v \mathrm{d}S = 0$$

Ainsi,

$$\sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} \nabla u^e(\mu) \cdot \nabla v \mathrm{d}A + \int_{\Gamma \backslash \Gamma_{\text{root}}} \mathrm{Bi}\, u^e(\mu) v \mathrm{d}S = \int_{\Gamma_{\text{root}}} v \mathrm{d}S$$

et finalement,

$$a(u^e(\mu), v; \mu) = l(v)$$

b)

$$\begin{aligned}J(w) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} \nabla w \cdot \nabla w \mathrm{d}A + \frac{\mathrm{Bi}}{2}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_{\mathrm{root}}} w^2 \mathrm{d}S - \int_{\Gamma_{\mathrm{root}}} w \mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{2}a(w,w;\mu) - l(w)\end{aligned}$$

Soit $h \in X^e$, calculons $J(u^e(\mu)+h) - J(u^e(\mu))$

$$J(u^e(\mu)+h) - J(u^e(\mu)) = \frac{1}{2}a(u^e(\mu)+h, u^e(\mu)+h;\mu) - l(u^e(\mu)+h) - \frac{1}{2}a(u^e(\mu), u^e(\mu);\mu) + l(u^e(\mu))$$

Par linéarité,

$$J(u^e(\mu)+h) - J(u^e(\mu)) = \frac{1}{2}a(u^e(\mu)+h, u^e(\mu)+h;\mu) - l(h) - \frac{1}{2}a(u^e(\mu), u^e(\mu);\mu)$$

Or,

$$\begin{aligned}a(u^e(\mu)+h, u^e(\mu)+h;\mu) &= \sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} \nabla(u^e(\mu)+h)\cdot\nabla(u^e(\mu)+h)\mathrm{d}A + \mathrm{Bi}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_{\mathrm{root}}} (u^e(\mu)+h)^2 \mathrm{d}S \\ &= \sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} \left[\nabla u^e(\mu)\cdot\nabla u^e(\mu) + 2\nabla u^e(\mu)\cdot\nabla h + \nabla h\cdot\nabla h\right]\mathrm{d}A \\ &\qquad + \mathrm{Bi}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_{\mathrm{root}}} \left[u^e(\mu)^2 + 2u^e(\mu)h + h^2\right]\mathrm{d}S \\ &= \sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} 2\nabla u^e(\mu)\cdot\nabla h\,\mathrm{d}A + 2\mathrm{Bi}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_{\mathrm{root}}} u^e(\mu)h\mathrm{d}S + a(u^e(\mu), u^e(\mu);\mu) + a(h,h;\mu)\end{aligned}$$

Donc,

$$J(u^e(\mu)+h) - J(u^e(\mu)) = \sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} \nabla u^e(\mu)\cdot\nabla h\,\mathrm{d}A + \mathrm{Bi}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_{\mathrm{root}}} u^e(\mu)h\mathrm{d}S + \frac{1}{2}a(h,h;\mu) - l(h)$$

Comme $h \in X^e$,

$$\begin{aligned}J(u^e(\mu)+h) - J(u^e(\mu)) &= l(h) - l(h) + \frac{1}{2}a(h,h;\mu) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{4}\int_{\Gamma^i} \nabla h\cdot\nabla h\mathrm{d}A + \mathrm{Bi}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_{\mathrm{root}}} h^2\mathrm{d}S\right) \geqslant 0\end{aligned}$$

Pour tout $h \in X^e$, il existe $h \in X^e$ tel que $w = x^e(\mu) + h$, et donc,

$$J(w) - J(u^e(\mu)) \geqslant 0 \qquad \forall w \in X^e$$

On en conclut que $u^e(\mu)$ minimise J dans X^e.

Partie 2 - Approximation à base réduite

a)

$$\begin{aligned}|||u(\mu) - u_N(\mu)|||^2 &= a\left(u(\mu) - u_N(\mu), u(\mu) - u_N(\mu)\right) \\ &= a(u(\mu), u(\mu)) - 2a(u(\mu), u_N(\mu)) + a(u_N(\mu), u_N(\mu)) \\ &= a(u(\mu), u(\mu)) - 2l(u_N(\mu)) + a(u_N(\mu), u_N(\mu)) \qquad \text{car } u_N(\mu) \in X^e \\ &= a(u(\mu), u(\mu)) + 2J(u_N(\mu))\end{aligned}$$

Comme $u_N(\mu) = \underset{w_N \in W_N}{\operatorname{argmin}} J(w_N)$, $J(u_N(\mu)) \leqslant J(w_N)$ pour tout $w_N \in W_N$ et donc

$$\begin{aligned}|||u(\mu) - u_N(\mu)|||^2 &\leqslant a(u(\mu), u(\mu)) + 2J(w_N) \\ &\leqslant a(u(\mu), u(\mu)) + a(w_N, w_N) - 2l(w_N)\end{aligned}$$

Or $a(u(\mu), w_N) = l(w_N)$, donc

$$\begin{aligned}
|||u(\mu) - u_N(\mu)|||^2 &\leqslant a(u(\mu), u(\mu)) + a(w_N, w_N) - 2a(u(\mu), w_N) \\
&\leqslant a(u(\mu) - w_N, u(\mu) - w_N) \\
&\leqslant |||u(\mu) - w_N)|||^2
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$|||u(\mu) - u_N(\mu)|||^2 \leqslant |||u(\mu) - w_N|||^2 \qquad \forall w_N \in W_N$$

b)

$$\begin{aligned}
|||u(\mu) - u_N(\mu)|||^2 &= a(u(\mu) - u_N(\mu), u(\mu) - u_N(\mu)) \\
&= a(u(\mu), u(\mu)) - 2a(u(\mu), u_N(\mu)) + a(u_N(\mu), u_N(\mu)) \\
&= l(u(\mu)) - 2a(u(\mu), u_N(\mu)) + l(u_N(\mu)) && \text{car } u_N(\mu) \in W_N \\
&= l(u(\mu)) - 2l(u_N(\mu)) + l(u_N(\mu)) && \text{car } u_N(\mu) \in X^e \\
&= l(u(\mu)) - l(u_N(\mu)) \\
&= T_{root}(\mu) - T_{root_N}(\mu)
\end{aligned}$$

c) Nous savons que $\underline{A}^{\mathcal{N}}(\mu)\underline{u}^{\mathcal{N}}(\mu) = \underline{F}^{\mathcal{N}}(\mu)$, en multipliant à gauche par Z^T, on obtient

$$Z^T \underline{A}^{\mathcal{N}}(\mu)\underline{u}^{\mathcal{N}}(\mu) = Z^T \underline{F}^{\mathcal{N}}(\mu)$$

Or $\underline{u}^{\mathcal{N}}(\mu) = Z\underline{u}_N(\mu)$, donc

$$Z^T \underline{A}^{\mathcal{N}}(\mu) Z\underline{u}_N(\mu) = Z^T \underline{F}^{\mathcal{N}}(\mu)$$

En posant $\underline{A}_N(\mu) = Z^T \underline{A}^{\mathcal{N}}(\mu)Z$ et $\underline{F}_N(\mu) = Z^T \underline{F}^{\mathcal{N}}(\mu)$, on obtient

$$\underline{A}_N(\mu)\underline{u}_N(\mu) = \underline{F}_N(\mu)$$

$T_{root_N}(\mu) = T^{\mathcal{N}}_{root}(\mu)$, donc

$$\begin{aligned}
T_{root_N}(\mu) &= (\underline{L}^{\mathcal{N}})^T \underline{u}^{\mathcal{N}}(\mu) \\
&= (\underline{L}^{\mathcal{N}})^T Z\underline{u}_N(\mu)
\end{aligned}$$

En posant $\underline{L}_N = Z^T \underline{L}^{\mathcal{N}}$, on obtient

$$T_{root_N}(\mu) = (\underline{L}_N)^T \underline{u}_N(\mu)$$

d) Nous savons que

$$a(u, v; \mu) = \sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}A + \mathrm{Bi} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{root}} uv\mathrm{d}S$$

En posant

$$\begin{aligned}
\theta^q(\mu) &= k^{q-1} & a^q(u, v) &= \int_{\Omega^{q-1}} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}A \quad 1 \leqslant q \leqslant 5 \\
\theta^6(\mu) &= \mathrm{Bi} & a^6(u, v) &= \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{root}} uv\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

on a

$$a(u, v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q} \theta^q(\mu) a^q(u, v)$$

Où $Q = 6$. $a(u, v; \mu) = u^T \underline{A}^{\mathcal{N}} v$, donc

$$u^T \underline{A}^{\mathcal{N}} v = \sum_{q=1}^{Q} \theta^q(\mu) a^q(u, w)$$

En posant, $a^q(u,v) = u^T A^{\mathcal{N}^q} v$, on obtient

$$
\begin{aligned}
u^T \underline{A}^{\mathcal{N}} v &= \sum_{q=1}^{Q} \theta^q(\mu) u^T \underline{A}^{\mathcal{N}^q} v \\
&= u^T \left(\sum_{q=1}^{Q} \theta^q(\mu) \underline{A}^{\mathcal{N}^q} \right) v
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$
\underline{A}^{\mathcal{N}} = \sum_{q=1}^{Q} \theta^q(\mu) \underline{A}^{\mathcal{N}^q}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{A}_N(\mu) &= Z^T \underline{A}^{\mathcal{N}}(\mu) Z \\
&= Z^T \left(\sum_{q=1}^{Q} \theta^q(\mu) \underline{A}^{\mathcal{N}^q} \right) Z \\
&= \sum_{q=1}^{Q} \theta^q(\mu) Z^T \underline{A}^{\mathcal{N}^q} Z
\end{aligned}
$$

On pose $\underline{A}_N^q = Z^T \underline{A}^{\mathcal{N}^q} Z$ et on obtient

$$
\underline{A}_N(\mu) = \sum_{q=1}^{Q} \theta^q(\mu) \underline{A}_N^q
$$

e) Nous savons que

$$
\alpha^e(\mu) \leqslant \frac{a(u_N, u_N; \mu)}{\|u_N\|_{W_N}^2} \qquad \forall u_N \in W_N
$$

et que

$$
\gamma^e(\mu) \geqslant \frac{a(u_N, v_N; \mu)}{\|u_N\|_{W_N} \|v_N\|_{W_N}} \qquad \forall u_N, v_N \in W_N
$$

en particulier,

$$
\gamma^e(\mu) \geqslant \frac{a(u_N, u_N; \mu)}{\|u_N\|_{W_N}^2} \qquad \forall u_N \in W_N
$$

Soit B la matrice associée au produit scalaire dans W_N

$$
\begin{aligned}
\|u_n\|_{W_N}^2 &= u_N^T B u_N \\
&= \left(\sum_i \beta^i \xi^i \right)^T B \left(\sum_j \beta^j \xi^j \right) \\
&= \sum_{i,j} \beta^i \beta^j (\xi^i)^T B \xi^j \\
&= \sum_{i,j} \delta_{ij} \beta^i \beta^j \\
&= \sum_i (\beta^i)^2 \\
&= u_N^T u_N
\end{aligned}
$$

Nous reconnaissons le quotient de Rayleigh

$$
R(A_N(\mu), u_N) = \frac{u_N^T A_N(\mu) u_N}{u_N^T u_N}
$$

Or, pour tout u_N non nul,

$$
\lambda_{\min} \leqslant R(A_N(\mu), u_N) \leqslant \lambda_{\max}
$$

où $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ sont les valeurs propres extrêmes de $A_N(\mu)$. Et

$$\lambda_{\min} = R(A_N(\mu), u_{\min}) \text{ et } \lambda_{\max} = R(A_N(\mu), u_{\max})$$

Où $u_{\min}$ et $u_{\max}$ sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$. On en déduit que $\lambda_{\max} \leqslant \gamma^e(\mu)$ et que $\lambda_{\min} \leqslant \alpha^e(\mu)$. En conclusion,

$$\text{cond} A_N(\mu) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leqslant \frac{\gamma^e(\mu)}{\alpha^e(\mu)}$$