# 利用摄动理论判断被动行走极限环稳定性

何舜成，厉丹阳

2015 年 5 月 6 日

## 1　摄动理论简介

在一些很难求得精确解的数学方程中，引入微扰项，从而求得近似的解析解，这种方法称作摄动方法或摄动理论（Perturbation Theory）。下面是一个简单的运用摄动理论求解方程的例子。

考虑如下二次方程

$$x^2 - 2\epsilon x - 1 = 0, \epsilon \ll 1 \tag{1}$$

由求根公式可以得到精确解如下

$$x = \epsilon \pm \sqrt{1 + \epsilon^2} \tag{2}$$

由于$\epsilon \ll 1$，可以进行展开

$$\begin{aligned} x &= \epsilon \pm (1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \cdots) \\ &= \pm 1 + \epsilon \pm \frac{\epsilon^2}{2} \mp \frac{\epsilon^4}{8} + O(\epsilon^6) \end{aligned}$$

取$\epsilon = 0.1$，方程的正根依次是

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1.1 \\ x_2 &= 1.105 \\ x_3 &= 1.1049875 \end{aligned}$$

其9位精确解为$x = 1.10498756$，可以看到随着阶次的提高，近似解收敛到精确解上。随着$\epsilon$趋于0，收敛速度加快。

在实际应用中，需要对变量进行尺度变换，以找到一个小量$\epsilon$，将精确解写为$\epsilon$的级数形式，截取前几项作为精确解的近似表达。例如将精确解$A$写成如下级数表达式：

A=$\epsilon^0 A_0 + \epsilon^1 A_1 + \epsilon^2 A_2 + \cdots$

# 2 跨步方程模型的建立

McGeer的“Passive Dynamic Walking”一文对经典的被动行走机器人做出了建模，下面简略作介绍。

## 2.1 Start- to End-of-Step Equation

第一个方程是一步从开始到结束的状态方程，其中状态变量既有两条腿的角度$\Delta\theta_C$和$\Delta\theta_F$（表示偏离斜坡表面法方向的角度），合为向量$\Delta\theta$；又有两条腿的角速度$\Omega_C$和$\Omega_F$，合为向量$\Omega$。一步所用规范化时间为$\tau = t\sqrt{g/l}$。$\Delta\theta_{SE}$表示机器人在斜坡上处于静态平衡时的两条腿角度。经过一些推算（略去，详见McGeer原文），可得

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta(\tau_k) \\ \Omega(\tau_k) \end{bmatrix} = D(\tau_k) \begin{bmatrix} \Delta\theta_k - \Delta\theta_{SE} \\ \Omega_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_{SE} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

考虑支撑腿转换时两条腿的角度互为相反数，定义

$$\lambda = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

那么有

$$\Delta\theta_k = \lambda\alpha_k \tag{5}$$

$$\Delta\theta(\tau_k) = -\lambda\alpha_{k+1} \tag{6}$$

其中$\alpha$是摆动腿触地时腿的角度。

### 2.2 Support Transfer

第二个方程是支撑腿转换时发生非弹性碰撞所导致的。$M^-$和$M^+$表示支撑腿转换前和转换后的“惯性矩阵”，并定义

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

那么得到如下方程：

$$\Omega_{k+1} = M^{+-1} M^- F \Omega(\tau_k) \equiv \Lambda\Omega(\tau_k) \tag{8}$$

### 2.3 “S-to-S” Equations

结合(3)(5)(6)(8)，并将$4 \times 4$矩阵分解成四个$2 \times 2$矩阵，可以得到整个周期内离散状态方程表达式。

$$-\lambda\alpha_{k+1} = D_{\theta\theta}[\lambda\alpha_k - \Delta\theta_{SE}] + D_{\theta\Omega}\Omega_k + \Delta\theta_{SE} \tag{9}$$

$$\Omega_{k+1} = \Lambda D_{\Omega\theta}[\alpha_k - \Delta\theta_{SE}] + \Lambda D_{\Omega\Omega}\Omega_k \tag{10}$$

## 3 摄动理论在稳定性分析中的应用

在状态方程建立之后，McGeer用牛顿法找到了极限环参数的解$\tau_0$、$\alpha_0$。在极限环找到之后，下一步是分析极限环的稳定性。假设在稳定步态下发生了微小扰动（$\tau_k - \tau_0$和$\alpha_k - \alpha_0$），那么过渡矩阵$D$和支撑腿转移矩阵$\Lambda$可以由下式估计：

$$D(\tau_k) \approx D(\tau_0) + \frac{\partial D}{\partial \tau}(\tau_k - \tau_0) \tag{11}$$

$$\Lambda(\alpha_k) \approx \Lambda(\tau_0) + \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}(\alpha_k - \alpha_0) \tag{12}$$

将(11)(12)式代入(9)(10)，得到跨步方程的估计形式

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k+1} - \alpha_0 \\ \Omega_{Ck+1} - \Omega_{C0} \\ \Omega_{Fk+1} - \Omega_{F0} \\ \tau_k - \tau_0 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \alpha_k - \alpha_0 \\ \Omega_{Ck} - \Omega_{C0} \\ \Omega_{Fk} - \Omega_{F0} \end{bmatrix} \tag{13}$$

矩阵$S$上$3\times 3$方块可以指示极限环的稳定性，若该方阵的特征值全部在单位圆内，那么该极限环是稳定的，否则是不稳定的，在这种情况下，该方程可以用来设计控制器来使步态变得稳定。

在极限环判稳定性的问题中，摄动理论起到了对跨步方程线性化的作用，用零阶和一阶项估计非线性项。因此在这里只是摄动理论的一个简单应用。