被动行走机器人混沌控制实验报告

何舜成，厉丹阳

2015 年 5 月 30 日

1 Lyapunov Exponent

考虑初始值为$x(0) = x_0$的一条轨迹$x(t) = f(t, x_0)$，以及初始值有小扰动的一条轨迹$x(t) + \delta x(t) = f(t, x_0 + \delta x_0)$，那么该演化轨迹对于初始值的敏感程度可以由以下公式衡量：

$$\parallel \delta x(t) \parallel \approx e^{\lambda t} \parallel \delta x_0 \parallel \tag{1}$$

上式中λ表征了两个轨道之间的分离程度，被称作Leading Lyapunov Exponent（主导李雅普诺夫指数），从大时间尺度上看，LLE可以由下式衡量：

$$\lambda \approx \frac{1}{t} ln \frac{\parallel \delta x(t) \parallel}{\parallel \delta x(0) \parallel} \tag{2}$$

考虑一个离散非线性动力学系统：

$$x_{k+1} = f(x_k), x_k \in R^n \tag{3}$$

设J_k为$f(x)$在$x = x_k$处线性化得到的矩阵，再定义

$$T_k = J_k \cdots J_2 J_1 \tag{4}$$

那么第i个Lyapunov Exponent可表示为：

$$\lambda_i = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} ln |\mu_i(T_k)| \tag{5}$$

其中$\mu_i(T_k)$表示矩阵T_k的第i个特征值。

据此原理则可以估计仿真程序中机器人行走的LLE。本程序中仿真了机器人走的1500步，取最后64步计算对应状态的Jacobian矩阵，累乘之后求特征值，取绝对值，取对数，除以矩阵数目64。可以得到4个Lyapunov Exponent（状态变量为4维），数值最大的即为LLE。仿真实验中观察斜坡角度γ对于被动行走机器人步态的影响，增大γ后机器人步态逐渐由单周期分叉为二周期，二周期分叉为四周期，四周期逐渐过渡为混沌步态。下图是γ变化对于机器人每步周期的影响。

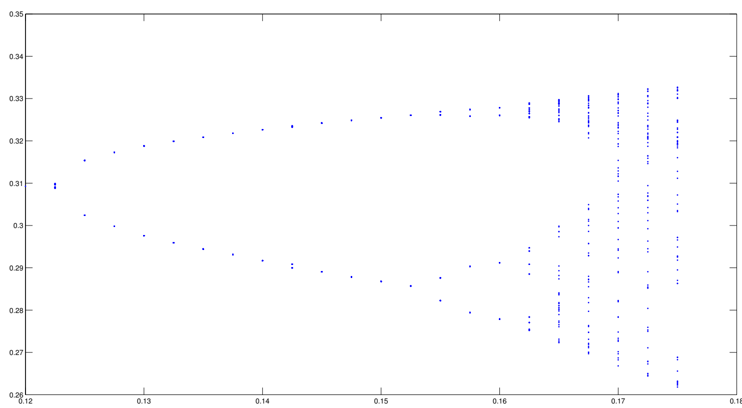

图 1: γ变化导致的步态分叉与混沌现象

大致可以看出，$\gamma = 0.122$附近，步态由单周期变为二周期；$\gamma = 0.153$附近，步态由二周期变为四周期；$\gamma = 0.162$附近，步态变为多周期；$\gamma = 0.165$附近基本变为混沌。图2是LLE随γ变化的曲线。

该曲线与之前的图较为一致，需要指出的是，在稳定状态下（单周期或多周期），LLE小于0，即所有Lyapunov Exponent都小于0；在混沌状态下，LLE大于0；LLE等于0的点会发生状态转换，产生分叉或进入混沌。

2 Chaos Control

机器人在单周期步态下，状态演化在状态空间中的轨迹是闭合的环，被称为极限环。取机器人摆动腿触地的一瞬间为庞加莱截面，那么截面上的状态向量是离散非线性动力学系统方程(3)的不动点。在非单周期步态情况下，方程(3)的不动点仍然可以求出来，但该不动点是不稳定的。在不动

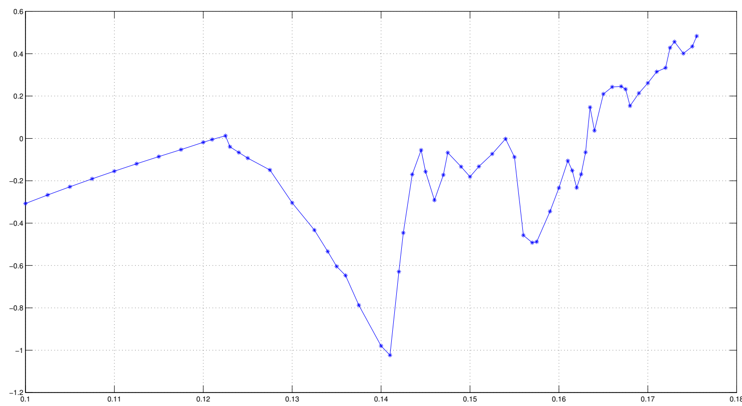

图 2: LLE随γ变化的曲线图

点s^*处进行线性化，得到Jacobian矩阵$J^* = \partial f/\partial s^*$。易知，当$J^*$的特征值全部在单位圆内时，机器人表现为稳定的单周期步态，出现一定扰动时，状态轨线也会逐渐收敛与极限环；当J^*有特征值在单位圆外时，不动点不稳定，此时机器人可能表现出多周期步态（分叉）、混沌或倒下，状态轨线不会收敛到极限环上；当J^*有特征值在单位圆上时，Jacobian矩阵无法判断稳定性，需要更高阶的项来确定。

因此当机器人出现分叉或混沌步态时，跨步方程（stride function）不动点的Jacobian矩阵至少有一个特征值（或系统极点）落在单位圆外，选取一个控制量，可能可以通过状态反馈的方法将单位圆外的极点配置到单位圆内来，并可能通过极点配置改善动态品质。

本次仿真实验中，选取机器人质心在前后方向的位置（参数B）作为变化量，即观察参数B变化导致机器人步态的改变，直至出现分叉和混沌。然后将斜坡角度γ作为控制量，将分叉和混沌抑制到不动点（极限环）上去。

2.1 Linearization

原离散非线性方程为：

$$S_{n+1} = f(S_n, \gamma) \tag{6}$$

在γ^*下，不动点S^*满足如下方程：

$$S^* = f(S^*, \gamma^*) \tag{7}$$

选定控制量之后可以列出如下线性化模型：

$$S^* = AS^* + B\gamma^* + F\omega \tag{8}$$

其中ω是除控制量γ之外的扰动量。

在S^*和γ^*附近给一个小扰动ΔS和$\Delta\gamma$，可以得到下式：

$$\Delta S_{n+1} = A\Delta S_n + B\Delta\gamma \tag{9}$$

2.2 Feedback

在不动点附近若出现了微小扰动ΔS，依据状态反馈，可令控制量满足下式：

$$\Delta\gamma = -k\Delta S \tag{10}$$

其中k为待求量，代入原方程得：

$$\Delta S_{n+1} = (A - Bk)\Delta S_n \tag{11}$$

选取合适的k使得$A - Bk$的极点落在单位圆内，从而使不动点周围的微小扰动随步数增加而衰减到0。在$\Sigma(A, B)$完全可控时，可以选择k使得$A-Bk$的极点位于任意位置。当$\Sigma(A, B)$不完全可控时，可控性矩阵$Q_C = [B, AB, A^2B, A^3B]$不满秩，$r = rank(Q_C)$即为可控状态数，亦即可以配置极点的自由度为$r$。

2.3 Simulation

首先对机器人质心前后位置B进行扫描，观察分叉和混沌现象。而后得到图3。

可以看到随着B的减小，二分叉现象出现，然而在出现四分叉和混沌之前机器人倒掉，无法继续观察分叉和混沌。计算在不同参数B下的LLE如图4，只当$\Delta B \approx -1.7$时接近0，其余均小于0，辅助证明了机器人步态只出

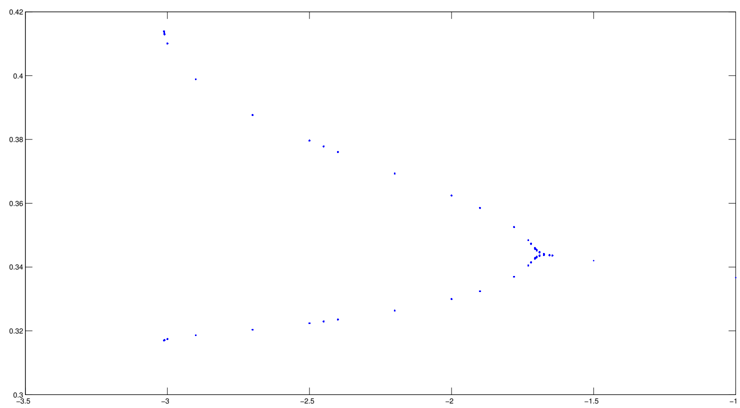

图 3: 质心位置B引起的分叉现象

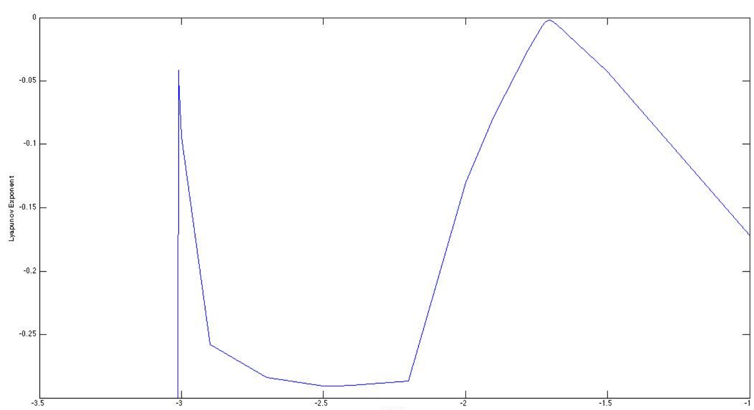

图 4: LLE随质心位置B变化的曲线

现了二分叉，而没有多分叉和混沌。然而接下来可以考虑状态反馈配置极点抑制二分叉。

依据式(9)，令$\Delta\gamma = 0$，依次给状态变量S_n的各个分量加扰动$\Delta s_i = 10^{-4}$，测得ΔS_{n+1}，即可近似计算出S_n对应的Jacobian矩阵A。令$\Delta S = 0$，给γ施加扰动$\Delta\gamma = 10^{-4}$，测得ΔS_{n+1}，可近似计算出矩阵B。

根据分叉状态下的Jacobian矩阵A的极点，选取期望极点[-0.8 0.5 -0.05 0]，计算得到反馈矩阵k，再对参数B进行扫描，得到图5的抑制结果。

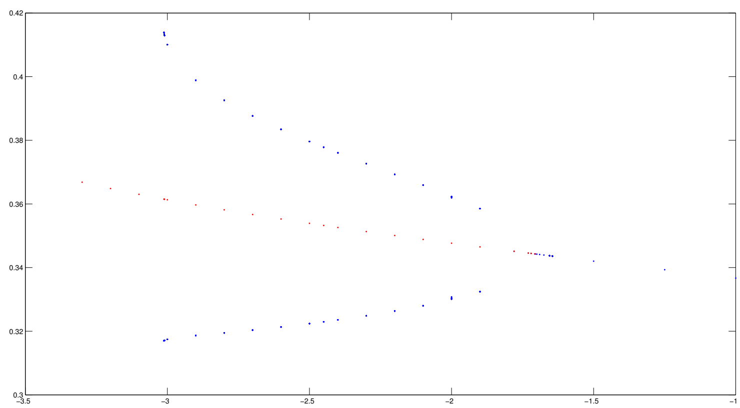

图 5: 分叉抑制效果

可以清楚的看到，在增加反馈之后，二分叉被抑制到原不动点上，并且在之前不能正常行走的ΔB的取值上，机器人仍然可以在不动点上稳定行走。经过分析可以认为该控制方案是成功的。

2.4 Discussion

前述控制方案中期望极点被设置为[-0.8 0.5 -0.05 0]，这是根据经验得到的一个方案。在某个会出现二分叉的点上计算Jacobian矩阵特征值为[-1.1864 0.6943 -0.0514 0]，而可控性矩阵Q_C的秩为3，极点不能任意配置，因此可以尝试不动极点0，将两个较大的极点配小，尝试可知该极点配置方案可以计算出反馈矩阵k，且可以成功抑制分叉，因此是较为合适的。

另外需要关注的方面是控制的动态性能，在不加控制的情况下，机器人在稳定行走一段时间后逐渐发散，最后形成稳定的二周期步态（图6）。

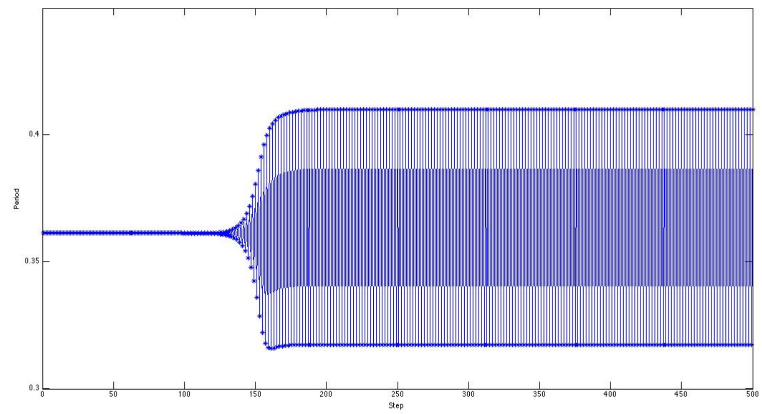

图 6: 不加控制时的二分叉步态

仿真中试验了四组参数，分别是：
参数一：[-0.8 0.7 -0.05 0]
参数二：[-0.9 0.7 -0.05 0]
参数三：[-0.8 0.5 -0.05 0]
参数四：[-0.8 0.7 0.05 0]
得到不同的控制图谱：

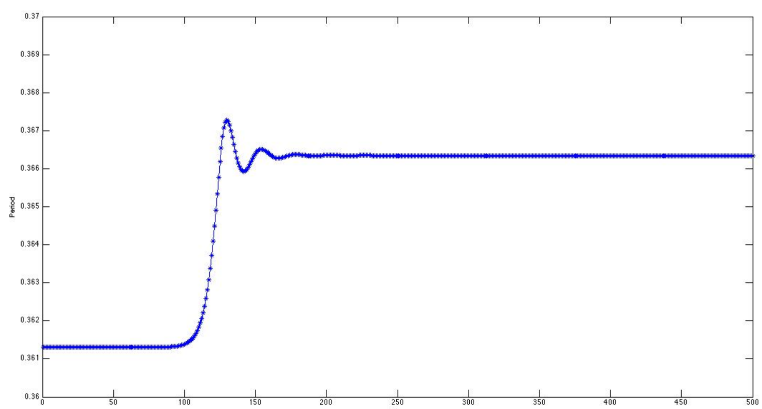

图 7: 使用参数一时的控制图谱

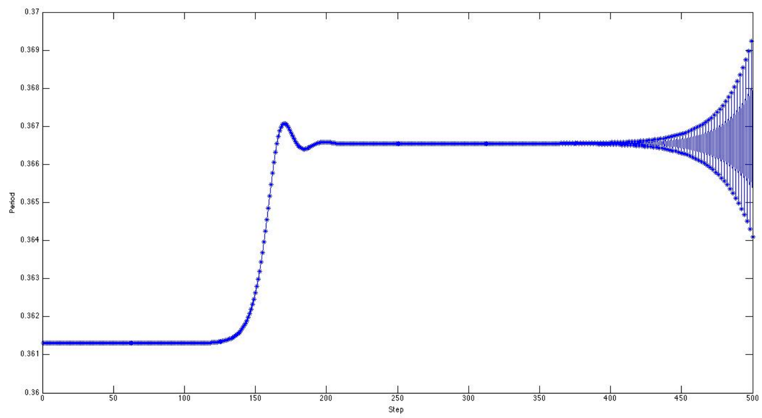

图 8: 使用参数二时的控制图谱

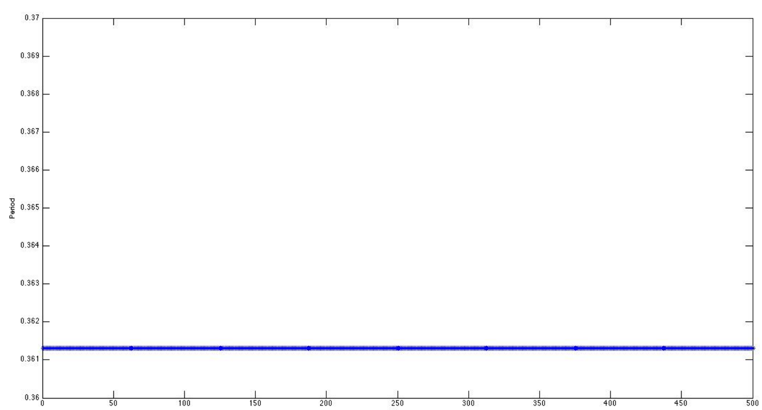

图 9: 使用参数三时的控制图谱

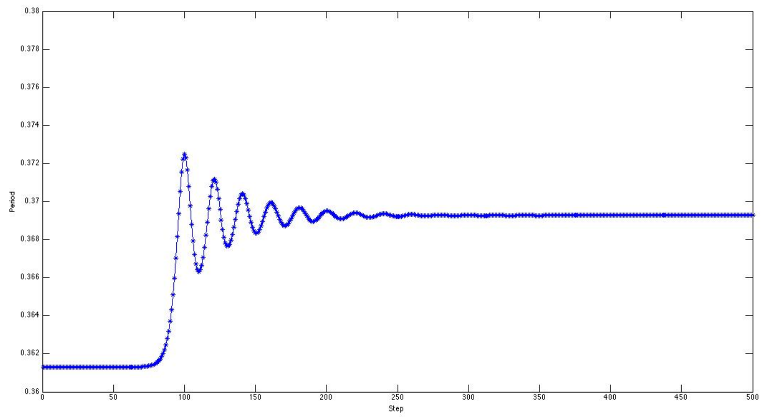

图 10: 使用参数四时的控制图谱

参数一、二、四下控制均出现了误差，参数二下逐渐发散，可能将趋于不稳定，参数四下过渡时间较长，震荡较多。参数三下控制既没有出现误差，又不产生震荡，控制品质好于其他几组参数，因此选定该组参数作为抑制分叉的控制措施。极点配置对于控制品质的影响的机制尚不明确。